BIOMATEMÁTICA ***XIII*** *(2003) 91–95*
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Estabilidade Local de Sistemas Dinâmicos Fuzzy

M. T. Mizukoshi,[1,2]
IME – UFG, 74.000-970 – Goiânia, GO.

L. C. Barros[3], R. C. Bassanezi[4],
DMA, IMECC–UNICAMP, 13.083-970 – Campinas, SP.

Resumo. Estudamos os problemas do tipo Cauchy (PC), considerando os parâmetros e/ou as condições inicias da equação diferencial dados por subconjuntos fuzzy. A partir da definição de fluxo da equação dada no (PC) definimos o fluxo do análogo fuzzy como sendo a obtida através da aplicação do princípio de extensão de Zadeh no fluxo clássico. Definimos também estabilidade de um equilíbrio fuzzy.

Palavras-chave: *Conjunto fuzzy,; Extensão de Zadeh; Estabilidade.*

1. Introdução

Considere o problema do valor inicial autônomo

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $f \in C^1(U), U$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$.

Consideramos problemas do tipo:

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x_0 &= X_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde X_0 é um conjunto fuzzy.

Considerando o fluxo da equação dada em (1.1) obtemos o fluxo do análogo fuzzy aplicando o Princípio de extensão de Zadeh no fluxo obtido inicialmente, definimos também

[1]marinam@ime.unicamp.br
[2]Doutoranda (IMECC-UNICAMP) com bolsa PICD
[3]laeciocb@ime.unicamp.br
[4]rodney@ime.unicamp.br

equilíbrio fuzzy e a estabilidade local do mesmo através da distância de Hausdorf. Finalizamos este trabalho com o modelo de Malthus onde a condição inicial é fuzzy e mostramos que a origem que no modelo clássico era assintoticamente estável permanece com o mesmo comportamento no modelo fuzzy.

2. Preliminares

Primeiramente daremos a definição de C^r-semigrupo, pois a definição de fluxo de uma equação diferencial é um caso particular da mesma.

Definição 1 *Sejam X espaço métrico completo, $\mathbb{R}^+ = [0,\infty)$. Uma família de aplicações $T(t) : X \longrightarrow X, t \geq 0$, é dito ser um C^r-semigrupo ou fluxo para $r \in \mathbb{R}^+$, se:*

1. $T(0) = I$;
2. $T(t+s) = T(t) \circ T(s), t \geq 0, s \geq 0$;
3. $T(t)x \in C^r(\mathbb{R}^+ \times X)$.

Definição 2 *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$, aberto, $f \in C^1(U)$ e $\varphi_t(x)$ a solução de (1.1) por x_0 definido sobre seu intervalo maximal de existência $I(x_0)$. Então, para $t \in I(x_0)$, o conjunto das aplicações $\varphi_t : U \longrightarrow U$ definido por*

$$\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0)$$

satisfazendo as propriedades da definição 1 é denominado o fluxo da equação diferencial (1.1) ou o fluxo definido pela equação diferencial (1.1); é também denominado o fluxo do campo vetorial $f(x)$ ou um sistema dinâmico.

A seguir daremos os conceitos básicos da teoria de conjuntos fuzzy para a análise da teoria de estabilidade proposto neste trabalho.

Um subconjunto fuzzy $U \subset$ de $\mathbb{R}^n$, é definido pelo conjunto de pares ordenados $(u, \mu(u)), u \in \mathbb{R}^n$ onde $\mu_U : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ é uma função chamada grau de pertinência, indicando o grau com que u está em U, onde os graus 0 e 1 representam, respectivamente, a não pertinência e a pertinência máxima ao conjunto fuzzy.

Para simplificar a notação indicaremos a função de pertinência μ_U por U.

Para $0 < \alpha \leq 1$ denotaremos por $[U]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ U(x) \geq \alpha\}$ o α-nível de U e $[U]^0 =$supp $U = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n / \ U(x) > 0\}}$, denominado o suporte de U.

Denotemos por $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ o espaço de todos os conjuntos fuzzy compactos.

As operações de soma e produto por escalar sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ são definidas por

$$(U+V)(x) = \sup_{y \in X}\{U(y) \wedge V(x-y)\} \quad e \quad (\lambda U)(x) = \begin{cases} U(\frac{x}{\lambda}) & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}} & \text{se } \lambda = 0, \end{cases}$$

onde $\chi_{\{0\}}$ é a característica do zero.

As operações de soma e produto escalar para os níveis de conjuntos fuzzy são definidos da seguinte maneira:

$$[U+V]^\alpha = [U]^\alpha + [V]^\alpha \ e \ [\lambda U]^\alpha = \lambda [U]^\alpha \ \forall \alpha \in [0,1].$$

Também podemos definir uma métrica sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ como segue

$$D(u,v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h([u]^\alpha, [v]^\alpha),$$

onde h é a métrica de Hausdorff e,

$$h(u,v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} max\,[[u]^\alpha, [v]^\alpha]$$

Exemplo 1 *Se u e v são números fuzzy em E^1 tal que $[u]^\alpha = [u_1^\alpha, u_2^\alpha], [v]^\alpha = [v_1^\alpha, v_2^\alpha]$ temos que*

$$h(u,v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} max\{\mid u_1^\alpha - v_1^\alpha \mid, \mid u_2^\alpha - v_2^\alpha \mid\},$$

isto é, $h(u,v)$ é a distância maximal entre os níveis de u e v.

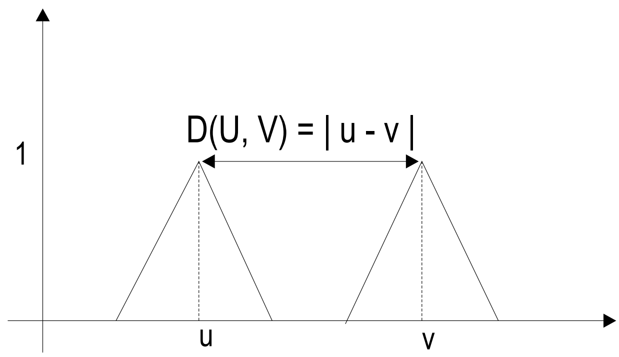

Figura 1: Distância de Hausdorff entre os números triângulares fuzzy simétricos A e B

3. Estabilidade Local Fuzzy

Dado o problema do valor inicial autônomo,

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \tag{3.3}$$

se a condição inicial é incerta temos o seguinte problema do valor inicial fuzzy associado,

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x_0 &\in X_0, \end{cases} \tag{3.4}$$

onde X_0 é um conjunto fuzzy.

Proposição 1 *Seja $\varphi_t(x_0)$ o fluxo associado ao problema determinístico (3.3), então a extensão $\widehat{\varphi}_t : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ que associa a cada $X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n), \widehat{\varphi}_t(X_0)$ é o fluxo associado à (3.4).*

De fato,

Primeiramente notemos que se $\varphi_t(x_0)$ é contínua, então $\widehat{\varphi}_t(X_0)$ também é contínua, (Román-Flores et al., 2001).

Agora, por (Fúller e Keresztfalvi, 1990) e pela definição 1, para $\alpha \in [0,1]$, temos:

1. $[\widehat{\varphi}_t(X_0)]^\alpha = \varphi_t([X_0]^\alpha) = [X_0]^\alpha$;
2. $[\widehat{\varphi}_{t+s}(X_0)]^\alpha = \varphi_{t+s}([X_0]^\alpha) = \varphi_t(\varphi_s([X_0]^\alpha)) = [\widehat{\varphi}_t(\widehat{\varphi}_s(X_0))]^\alpha$.

A seguir definiremos ponto de equilíbrio (ponto estacionário) no contexto fuzzy através do fluxo extendido.

Definição 3 *Dizemos que $\bar{X}_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é um ponto de equilíbrio fuzzy se*

$$\widehat{\varphi}_t(\bar{X}_0) = \bar{X}_0, \forall t \geq 0$$

ou equivalentemnte,

$$[\widehat{\varphi}_t(\bar{X}_0)]^\alpha = [\bar{X}_0]^\alpha, \forall \alpha \in [0,1].$$

Definição 4 *Um ponto de equilíbrio $\bar{X}_0$ de (3.4) é estável se dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que,*

$$D(X_0, \bar{X}_0) < \delta, X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n), \ \ \textit{então} \ \ D(\widehat{\varphi}_t(X_0), \bar{X}_0) < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

E, $\bar{X}$ é assintoticamente estável se for estável e $\exists r > 0$ tal que

$$\lim_{t \to +\infty} D(\widehat{\varphi}_t(X_0), \bar{X}_0) = 0, \forall X \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \ \ \textit{se} \ \ D(X_0, \bar{X}_0) < r$$

Exemplo 2 *Dado o problema do valor inicial clássico*

$$\begin{cases} x'(t) = -ax(t) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.5}$$

podemos verificar que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para $a > 0$ e que a solução da mesma é dada por $\varphi_t(x_0) = x_0 e^{-at}$.

Considerando a análogo fuzzy de (3.5),

$$\begin{cases} x'(t) & = & -ax(t) \\ x(0) & \in & X_0, \end{cases} \tag{3.6}$$

onde a condição inicial é um número fuzzy. Então pela definição e por (Fúller e Keresztfalvi, 1990), temos que os $\alpha-$níveis do fluxo de (3.6) são dados por

$$[\hat{\varphi}_t(X_0)]^\alpha = \varphi_t\left([X_0]^\alpha\right) = [x_{01}^\alpha e^{-at}, x_{02}^\alpha e^{-at}],$$

pois $\varphi_t(x_0)$ *é uma função contínua em relação a* x_0 *e* $[X_0]^\alpha = [x_{01}^\alpha, x_{02}^\alpha]$.

Logo, o único equilíbrio de (3.6) é $\chi_{\{0\}}$, *pois por definição temos*

$$[x_{01}^\alpha e^{-at}, x_{02}^\alpha e^{-at}] = [x_{01}^\alpha, x_{02}^\alpha], \forall t \geq 0, \quad se \;\; x_{01}^\alpha = x_{02}^\alpha = 0.$$

Além disso, $\chi_{\{0\}}$ *é assintoticamente estável, pois*

1. $\chi_{\{0\}}$ *é estável.*
   De fato,
   Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon/M > 0$, *tal que* $\| X_0 \| < \delta$, *então*

$$\begin{aligned} D(\hat{\varphi}_t(X_0), \chi_{\{0\}}) &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h\left([\varphi_t(X_0)]^\alpha, [\chi_{\{0\}}]^\alpha\right) \\ &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h\left(\varphi_t([X_0]^\alpha), 0\right) \\ &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} max\{\mid x_{01}^0 \mid e^{-at}, \mid x_{02} \mid e^{-at}\} \\ &= e^{-at} max\{\mid x_{01}^0 \mid, \mid x_{01}^0 \mid\} < (\varepsilon/M).M = \varepsilon. \end{aligned}$$

2. $\lim_{t \to +\infty} D(\hat{\varphi}_t(X_0), \chi_{\{0\}}) = \lim_{t \to +\infty} \| e^{-at} max\{\mid x_{01}^0 \mid, \mid x_{01}^0 \mid\} = 0.$

Referências

Fúller, R. e Keresztfalvi, T. (1990). On generalization of Nguyen's theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, 41:371–374.

Román-Flores, E., Barros, L. C., e Bassanezi, R. C. (2001). A note on Zadeh extensions. *Fuzzy Sets and Systems*, 117:327–331.