Centro Científico Conhecer
Enciclopédia Biosfera

A TRANSFORMADA DE LAPLACE E ALGUMAS APLICAÇÕES

Fernando Ricardo Moreira[1], Esdras Teixeira Costa[2], Marcio Koetz[3], Samanta Andressa Santos Dumke Teixeira [4], Henrique Bernardes da Silva[5]

[1]Professor Mestre do Curso de Matemática da Universidade Federal de Goiás (UFG) (moreirafrmat@hotmail.com)
[2]Professor Doutor do Curso de Matemática da UFG
[3]Professor Doutor da Faculdade de Engenharia Agrícola da UFMT
[4, 5]Alunos de Graduação em Matemática na UFG

RESUMO

A transformada de Laplace é uma poderosa ferramenta na resolução de problemas envolvendo equações difero-integrais, diferenciais ordinárias e parciais. Neste artigo definimos a transformada de Laplace e calculamos a transformada para diversas funções elementares. Por último fizemos algumas aplicações da transformada de Laplace para resolver problemas de valor inicial em equações diferenciais ordinárias e problemas de valor de contorno em equações diferenciais parciais.

PALAVRAS – CHAVE: Transformada de Laplace, Problema de Valor Inicial, Transformada Inversa.

THE LAPLACE TRANSFORM AND SOME APPLICATIONS

ABSTRACT

The Laplace transform is a powerful tool in solving problems involving equations difero-integrate, and partial differential equations. In this article we define the Laplace transform and transformed to calculate the various elementary functions. Finally we made some applications of the Laplace transform to solve initial value problems in ordinary differential equations and problems of boundary-value partial differential equations.

KEYWORDS: Laplace Transform, Initial-Value Problem, Inverse Transform.

1. INTRODUÇÃO

Muitos problemas em matemática aplicada recaem na resolução de certas equações diferenciais, que na maioria das vezes não é uma tarefa fácil. Portanto métodos que auxiliam na resolução de equações diferenciais são sempre muito bem-vindos. Neste contexto, a Transformada de Laplace (Pierre Simon de Laplace (1749-1827) estudou Mecânica Celeste e Teoria das Probabilidades, Sobre uma biografia de Laplace veja Andreotti) é uma ferramenta importantíssima para a resolução de problemas de valor inicial em equações diferenciais.

A importância da Transformada reside no fato dela “transformar” problemas de valor inicial para equações diferenciais ordinárias, certos problemas de valores de contorno para equações diferenciais parciais em equações algébricas. Estes problemas de equações diferenciais nem sempre são de trato simples.

Somente para dar um exemplo da importância da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais, observe o seguinte o problema de valor inicial:

$$y' + 2y + \int_0^t y(\tau)d\tau = t,\ y(0) = 1.$$

A equação que aparece acima é uma equação difero-integral cuja solução é garantida pelo Teorema de Picard, veja Sotomayor,1979. Este teorema só garante a existência e unicidade de solução para problemas em equações diferenciais ordinárias, mas não fornece uma direção para encontrar esta solução. A equação acima não pode ser resolvida pelos métodos usuais de resolução de equações diferenciais lineares de primeira ordem, mas pode ser resolvida via a teoria da transformada de Laplace.

A transformada de Laplace também pode ser utilizada para resolver certas integrais impróprias como:

$$\int_0^\infty te^{-2t}\cos t\,dt \text{ e } \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t}dt.$$

Neste trabalho iremos estudar um pouco sobre a Transformada de Laplace e faremos algumas aplicações da sua utilização para resolver certos problemas em equações diferenciais.

2. RESULTADOS E DISCUSSÃO

2.1 Definição da Transformada, Funções de Ordem Exponencial e Existência da Transformada Inversa.

Agora iremos definir a transformada de Laplace e apresentar muitos resultados que serão úteis no desenvolvimento da teoria apresentada.

Definição 2.1.1 – Dada uma função $f(x)$ definida no intervalo $[0,\infty)$ definimos a sua Transformada de Laplace, e denotamos por $F(s)$, por:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(x)) = \int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

Supondo que a integral acima seja convergente pelo menos para algum valor de s. Por exemplo, considere a função $f(x) = e^{kx}$. Sua transformada, $\mathcal{L}(f(x))$ é dada por:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx}e^{x}dx = \lim_{l\to\infty}\int_0^l e^{(1-s)x}dx = \lim_{l\to\infty}\frac{e^{(k-s)l} - 1}{k-s} = \frac{1}{s-k},\ se\ s > k.$$

Equação (1)

Uma questão a ser levantada é a seguinte, que condição uma função f deve satisfazer para que sua transformada $\mathcal{L}(f)$ esteja bem definida, isto é, que a integral dada na definição 2.1 seja convergente?

Vamos querer que a função f não cresça muito rapidamente, por exemplo a função $g(x) = e^{x^3}$ não possui transformada de Laplace. Vamos supor que a função $f(x)$ satisfaça:

$$|f(x)| \leq Me^{kx} \text{ para } 0 \leq x < \infty$$

Onde M e k são constantes positivas. Funções satisfazendo a desigualdade acima são ditas de *ordem exponencial* k. Vamos mostrar agora que a transformada de Laplace de funções de Ordem Exponencial está bem definidas. Temos que

$$\left|\int_0^l e^{-sx} f(x)dx\right| \leq \int_0^l e^{-sx}|f(x)|dx \leq \int_0^l e^{(k-s)x}dx \leq \frac{M}{s-k}$$

Logo a transformada existe para $s > k$. Isto é, para funções de ordem exponencial k a integral imprópria é absolutamente convergente e ainda temos a seguinte estimativa

$$|\mathcal{L}(f(x))| = |F(s)| = \frac{M}{s-k}.$$

É possível mostrar que se $f(x)$ é uma função de ordem exponencial k, então a função $g(x)$ definida por $g(x) = \int_0^x f(\tau)d\tau$ também é de ordem exponencial com a mesma constante k.

Agora vamos discutir sobre outro problema: a existência da transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$. Começamos com a seguinte definição:

Definição 2.1.2 – Se $\mathcal{N}(t)$ é uma função tal que, para todo $t > 0$,

$$\int_0^t \mathcal{N}(u)du = 0$$

Então a função $\mathcal{N}(t)$ é chamada de função nula. Por exemplo, toda função que é nula, exceto num conjunto de medida nula é uma função nula.

Seja $f(x)$ uma função de ordem exponencial, $F(s)$ sua transformada de Laplace e $g(x) = f(x) + \mathcal{N}(x)$, onde $\mathcal{N}(x)$ é uma função nula. Observe que

$$\mathcal{L}\big(g(x)\big) = G(s) = \int_0^\infty e^{-sx}(f(x) + \mathcal{N}(x))dx = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx = F(s)$$

Pois, a integral $\int_0^\infty e^{-sx}\,\mathcal{N}(x)dx = 0$. O que estamos querendo dizer é que duas funções distintas ($f(x)$ e $g(x)$) podem ter a mesma transformada de Laplace, isto é, o operador $\mathcal{L}$ não é injetor. Porém temos o seguinte resultado sobre o operador transformada $\mathcal{L}$.

Teorema 2.1.3 – (Teorema de Lerch) – Se nos restringirmos a funções $f(x)$ que sejam contínuas por partes em todo intervalo finito $0 \leq x \leq l$ e de ordem exponencial, então a transformada inversa de Laplace de $F(s)$, isto é $\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big) = f(x)$, é única.

Prova – Para uma demonstração deste teorema veja FIGUEIREDO & NEVES (2001).

2.2 Propriedades da Transformada de Laplace

Nesta seção iremos calcular a transformada de algumas funções elementares. Também mostraremos algumas propriedades que a transformada possui e apresentaremos uma tabela sobre transformada de várias funções para posterior utilização nas aplicações.

Até agora só calculamos a transformada da função $f(x) = e^{kx}$, cujo resultado é $F(s) = 1/(s-k)$ para $s > k$. Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-k}\right) = e^{kx}$$

Mostraremos agora que a transformada da função $f(x) = x^n$ é $F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

Mostraremos este resultado por indução. Primeiramente mostraremos para $n = 0$. Então $f(x) = x^0 = 1$ e assim

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, 1 dx = \lim_{l\to\infty} \frac{-e^{-sl} + 1}{s} = \frac{1}{s}.$$

Logo o resultado é válido para $n = 0$. Suponha que o resultado em questão seja válido para n. Queremos mostrar que vale para $n+1$. Então:

$$\mathcal{L}(x^{n+1}) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, x^{n+1} dx = \lim_{l\to\infty}\int_0^{l} e^{-sx} x^{n+1} dx$$

Aplicando a técnica de integração por partes na última integral acima, obtemos

$$\mathcal{L}(x^{n+1}) = \lim_{l\to\infty} \frac{-l^{n+1}e^{-sl}}{s} + \frac{n+1}{s}\int_0^{l} e^{-sx} x^n dx = \frac{n+1}{s}\int_0^{\infty} e^{-sx} x^n dx.$$

Pela hipótese de indução temos que a última integral acima, que é justamente a transformada de $f(x) = x^n$, é a função $F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Assim

$$\mathcal{L}(x^{n+1}) = \frac{n+1}{s}\int_0^{\infty} e^{-sx} x^n dx = \frac{n+1}{s}\frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{(n+1)+1}}.$$

Uma propriedade muito importante que o operador transformada de Laplace satisfaz é a propriedade linear, isto é,

$$\mathcal{L}\big(af(x) + bg(x)\big) = a\mathcal{L}\big(f(x)\big) + b\mathcal{L}(g(x)).$$

A demonstração deste fato se deve à linearidade da integral de Riemann. É fácil mostrar que esta propriedade é válida para qualquer combinação linear finita de funções.

Calcularemos agora a transformada de algumas funções. Primeiramente note que podemos substituir k na equação (1) pelo número complexo $k + iw$, e para $s > k$ efetuar as mesmas operações e obter

$$\mathcal{L}\big(e^{(k+iw)x}\big) = \frac{1}{s-(k+iw)} = \frac{s-k+iw}{(s-k)^2 + w^2}.$$

Da fórmula de Euller $e^{(k+iw)x} = e^{kx}\cos wx + ie^{kx}\,\mathrm{sen}\, wx$, obtemos então as seguintes e importantes fórmulas

$$\mathcal{L}(e^{kx}\cos wx) = \frac{s-k}{(s-k)^2 + w^2},$$

$$\mathcal{L}(e^{kx}\,\mathrm{sen}\, wx) = \frac{w}{(s-k)^2 + w^2}$$

E ainda fazendo uma combinação linear das fórmulas anteriores, obtemos a fórmula da inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{As+B}{(s-k)^2+w^2}\right)=e^{kx}\left[A\cos wx+\frac{Ak+B}{w}\operatorname{sen} wx\right]$$

Nosso principal objetivo com a transformada de Laplace é resolver equações diferenciais, portanto vejamos como o operador transformada atua na derivação de funções. Começamos com os seguintes Lema.

Lema 2.2.1 – Se $f(x)$ é uma função derivável, com derivada de ordem exponencial k então

$$\mathcal{L}(f'(x))= s\mathcal{L}(f(x))- f(0), \qquad s>k$$

Prova – Por definição temos que

$$\mathcal{L}(f'(x))=\int_0^{\infty} e^{-sx}f'(x)dx=\lim_{l\to\infty}\int_0^{l} e^{-sx}f'(x)dx$$

Aplicando a integração por partes teremos

$$\mathcal{L}(f'(x))= \lim_{l\to\infty} e^{-sl}f(l)- f(0)+ s\int_0^{l} e^{-sx}f(x)dx=-f(0)+ s\int_0^{\infty} e^{-sx}f(x)dx$$

Isto é, $\mathcal{L}(f'(x))= s\mathcal{L}(f(x))- f(0)$.

Lema 2.2.2 – Se $f(x)$ é uma função derivável quantas vezes for necessário, com derivadas de ordem exponencial k então

$$\mathcal{L}\left(f^{(n+1)}(x)\right)=s\mathcal{L}(f^{(n)})- f^{(n)}(0)$$

Prova – Pela definição

$$\mathcal{L}\left(f^{(n+1)}(x)\right)= \lim_{l\to\infty}\int_0^{l} e^{-sx}f^{(n+1)}(x)dx$$

Após uma manipulação algébrica obtemos

$$\lim_{l\to\infty}\int_0^{l} e^{-sx}f^{(n+1)}(x)dx= \lim_{l\to\infty} e^{-sl}f^{(n)}(0)- f^{(n)}(0)+s\int_0^{l} e^{-sx}f^{(n)}(x)dx$$

Assim temos

$$\mathcal{L}\left(f^{(n+1)}(x)\right)=s\mathcal{L}(f^{(n)})- f^{(n)}(0)$$

Mais geralmente podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 2.2.3 – Se $f(x)$ é uma função derivável quantas vezes for necessário, com derivadas de ordem exponencial k então

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(x)\right)= s^n\mathcal{L}(f(x))-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

.

Prova – Segue diretamente dos Lemas 2.2.1 e 2.2.3.

Outra fórmula interessante segue do Lema 2.2.1. Seja $g(x)= \int_0^x f(\tau)d\tau$, então

$$\mathcal{L}(f(x))= \mathcal{L}(g'(x))= s\mathcal{L}(g(x))- g(0)= s\mathcal{L}(\int_0^x f(\tau)d\tau)$$

Isto é,

$$\mathcal{L}\left(\int_0^x f(\tau)d\tau\right) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(x)).$$

Se $f(x) = x^n e^{kx}$, então usando a linearidade de $\mathcal{L}$ e o Lema 2.2.1, obtemos

$$\mathcal{L}(nx^{n-1}e^{kx} + kx^n e^{kx}) = n\mathcal{L}(x^{n-1}e^{kx}) + k\mathcal{L}(x^n e^{kx}) = s\mathcal{L}(x^n e^{kx})$$

Então temos a seguinte fórmula de recorrência

$$\mathcal{L}(x^n e^{kx}) = \frac{n}{s-k}\mathcal{L}(x^{n-1}e^{kx})$$

Aplicando sucessivamente a fórmula anterior teremos

$$\mathcal{L}(x^n e^{kx}) = \frac{n!}{(s-k)^{n+1}}.$$

Colocaremos agora uma tabela com a transformada (e conseqüentemente sua inversa) de algumas funções que aparecem com bastante freqüência e algumas fórmulas gerais.

QUADRO 2.2.4 : Transformadas de Laplace

FUNÇÃO	***TRANSFORMADA***
$f(x)$	$\mathcal{L}(f(x)) = F(s)$
kx^n	$k\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{kx}	$\frac{1}{s-k}, s > k$
$e^{kx}\cos wx$	$\frac{s-k}{(s-k)^2 + w^2}, s > k$
$e^{kx}\operatorname{sen} wx$	$\frac{w}{(s-k)^2 + w^2}, s > k$
$e^{kx}\left[A\cos wx + \frac{Ak+B}{w}\operatorname{sen} wx\right]$	$\frac{As+B}{(s-k)^2 + w^2}, s > k$
$e^{kx}\left[A\cosh wx + \frac{Ak+B}{w}\operatorname{senh} wx\right]$	$\frac{As+B}{(s-k)^2 - w^2}, s > k$
$x^n e^{kx}$	$\frac{n!}{(s-k)^{n+1}}, s > k$
$f'(x)$	$s\mathcal{L}(f(x)) - f(0)$
$f''(x)$	$s^2\mathcal{L}(f(x)) - f(0) - f'(0)$
$e^{kx}f(x)$	$F(s-k)$
$f(kx)$	$\frac{1}{k}F\left(\frac{s}{k}\right)$
$\int_a^x f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}F(s) - \int_0^a f(\tau)d\tau$
$x^n f(x)$	$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}(F(s))$

Outro quadro com outras transformadas pode ser encontrada no livro de SPIEGEL (1965). Para o que estamos nos propondo, estes quadros com as fórmulas são suficientes. Para saber mais sobre transformadas de Laplace de diversas funções, como por exemplo; a função gama, funções de Bessel, função impulso unitário ou função delta de Dirac[1] veja a referência anterior.

3. APLICAÇÕES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Nesta seção iremos fazer algumas aplicações da transformada de Laplace como: resolução de problemas de valor inicial para equações diferenciais ordinárias, resolução de problemas de contorno para equações diferenciais parciais e cálculo de algumas integrais impróprias.

3.1 – Uso da Transformada de Laplace na resolução de problemas de valor inicial para equações diferenciais ordinárias.

Começamos com a seguinte observação. Considere o problema de valor inicial abaixo:

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Do ponto de vista matemático, não faz nenhuma diferença este problema de valor inicial (PVI) com condições iniciais num ponto t_0 qualquer, de outro PVI com a mesma equação, mas com o ponto inicial no ponto $t_0 = 0$. O que há é apenas uma translação, isto é, se $y(t)$ é solução do PVI com condição inicial no ponto t_0 então $x(t - t_0) = y(t)$ é solução do PVI com condição inicial em $t_0 = 0$. Consideraremos apenas PVI com condições iniciais em zero.

Exemplo 3.1.1 – Considere o PVI dado abaixo

$$\begin{cases} y'' + y = t^2 + 1 \\ y(0) = \pi^2 \\ y'(0) = 2\pi \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação acima obtemos

$$\mathcal{L}(y'' + y) = \mathcal{L}(t^2 + 1) \Leftrightarrow \mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(y) = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s}$$

Na equação anterior usamos a linearidade do operador $\mathcal{L}$ e o quadro 2.2.4. Usando ainda o quadro 2.2.4, na parte sobre a atuação do operador $\mathcal{L}$ nas derivadas obtemos

$$\mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(y) = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s} \Leftrightarrow s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}(y) = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s}$$

Usando $\mathcal{L}(y) = \mathcal{Y}$, então teremos

$$(s^2 + 1)\mathcal{Y} = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s} + \pi^2 + 2\pi \Leftrightarrow \mathcal{Y} = \frac{2}{s^3(s^2 + 1)} + \frac{1}{s(s^2 + 1)} + \frac{\pi^2 s + 2\pi}{s^2 + 1}$$

Separando os dois primeiros quocientes da última equação em frações parciais obtemos

---

[1] Paul Dirac, Prêmio Nobel em Física em 1933, por trabalhos em Mecânica Quântica.

$$\frac{2}{s^3(s^2+1)} = \frac{-2}{s} + \frac{2}{s^3} + \frac{2s}{s^2+1}$$
$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

E portanto, temos que

$$\mathcal{Y} = -\frac{2}{s} + \frac{2}{s^3} + \frac{2s}{s^2+1} + \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{\pi^2 s + 2\pi}{s^2+1}$$

Ou equivalentemente

$$\mathcal{Y} = -\frac{1}{s} + \frac{2}{s^3} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{\pi^2 s + 2\pi}{s^2+1}$$

Agora usando a tabela 2.2.4, mas no sentido inverso, isto é, para calcular a transformada inversa, obtemos a seguinte expressão para a solução do PVI proposto

$$y = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{Y}) = -\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^3}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\pi^2 s + 2\pi}{s^2+1}\right)$$

E então

$$y = -1 + t^2 + \cos t + \pi^2 \cos t + 2\pi\,\mathrm{sen}\,t$$

Logo, $y = (1+\pi^2)\cos t + 2\pi\,\mathrm{sen}\,t + t^2 + 1$ é a solução do nosso problema de valor inicial.

Na resolução do problema anterior tivemos que desenvolver a equação algébrica (função racional) obtida, em frações parciais. Para saber um pouco mais sobre a técnica de resolução de frações parciais veja GUIDORIZZI (2001).

Resolveremos agora uma equação difero-integral como aplicação da teoria da transformada de Laplace.

Exemplo 3.1.2 – Considere o PVI dado abaixo

$$\begin{cases} y' + 2y + \int_0^t y(\tau)d\tau = t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Aplicando o operador $\mathcal{L}$ em ambos os lados da equação acima, usando a linearidade de $\mathcal{L}$, utilizando a tabela 2.2.4 e a condição inicial obtemos

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{s(s+1)^2} + \frac{s}{(s+1)^2}$$

Onde $\mathcal{Y} = \mathcal{L}(y)$. Desenvolvendo as funções racionais em frações parciais obtemos

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+1)^2}$$
$$\frac{s}{(s+1)^2} = \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

Logo, temos que

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

Ou equivalentemente

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{s} - \frac{2}{(s+1)^2}$$

Aplicando a transformada inversa em ambos os lados obtemos a solução do PVI, expressa por

$$y = 1 - 2xe^{-x}.$$

Estamos usando o quadro 2.2.4 para calcular a inversa da transformada de Laplace de algumas funções. Existe a fórmula inversa da transformada de Laplace, chamada de fórmula complexa de inversão ou fórmula integral de Bromwich. Spiegel, em seu livro, traz um capítulo inteiro sobre a fórmula complexa de inversão. A palavra complexa é devido ao uso da teoria de funções de variáveis complexas e não pela dificuldade de cálculo apresentada pela fórmula.

Exemplo 3.1.3 – Mostre que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Considere a função definida por $g(t) = \int_0^\infty e^{-tx^2}dx$. Então, tomando a transformada de Laplace, temos

$$\mathcal{L}(g(t)) = \int_0^\infty \frac{1}{s+x^2}dx = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{\sqrt{s}}\tan^{-1}\frac{l}{\sqrt{s}} = \frac{\pi}{2\sqrt{s}}$$

Invertendo a função acima obtemos

$$g(t) = \int_0^\infty e^{-tx^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi t}$$

O resultado procurado segue fazendo t = 1.

Para finalizar mostraremos um exemplo da utilização da teoria da transformada de Laplace na resolução de problemas de valor de contorno em equações diferenciais parciais.

Exemplo 3.1.4 – Encontre a solução do Problema de valor de contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial t} + U \\ U(x,0) = 6e^{-3x} \end{cases}$$

Que seja limitada para $x > 0, t > 0$. Aplicando a transformada de Laplace na equação acima, temos:

$$\frac{du}{dx} = 2[su - U(x,0)] + u$$

Onde $\mathcal{L}(U) = u$. Usando a condição de contorno, obtemos

$$\frac{du}{dx} - (2s+1)u = -12e^{-3x}$$

A solução geral desta equação diferencial ordinária é

$$u = \frac{6}{s+2}e^{-3x} + ce^{(2s+1)x}$$

Como queremos $U(x,t)$ limitada quando $x \to \infty$, devemos ter também $u(x,s)$ quando $x \to \infty$ e segue que devemos escolher então $c = 0$. Assim

$$u = \frac{6}{s+2}e^{-3x}$$

Então, tomando à inversa, encontramos

$$U(x,t) = 6e^{-2t-3x}.$$

Confere-se facilmente que esta é a solução procurada.

SPIEGEL traz inúmeros problemas aplicados envolvendo equações diferenciais ordinárias, parciais e equações diferença. Todas estas equações são resolvidas via teoria da transformada de Laplace.

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDREOTTI, F. ***Um pouco sobre a Biografia de Pierre Simon de Laplace***. www.fem.unicamp.br/~em313/paginas/person/laplace.htm.

FIGUEIREDO, D. G., NEVES, A. F. ***Equações Diferenciais Aplicadas***. Coleção Matemática Universitária. IMPA. Rio de Janeiro. 2001. PP 183-185.

GUIDORIZZI, H. L. ***Um Curso de Cálculo***. Volume 1. 5º Ed. Editora LTC. Rio de Janeiro. 2001.

SOTOMAYOR, J. ***Lições de Equações Diferenciais Ordinárias***. Projeto Euclides. IMPA. Rio de Janeiro. 1979

SPIEGEL, M. R. ***Schaum's Outline of Theory and Problems of Laplace Transforms***. McGraw-Hill Book Co. EUA. 1965.