Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

O V postulado de Euclides

Romildo da Silva Pina - IME - UFG

Resumo: Apresentamos neste trabalho algumas versões equivalentes ao quinto postulado de Euclides, que surgiram ao longo dos anos, na tentativa de provar que o mesmo poderia ser obtido a partir dos outros quatro primeiros postulados. O quinto postulado desempenhou um papel fundamental para o desenvolvimento da geometria , pois foi questionando a sua veracidade que se descobriram outros modelos de geometria , diferentes da Euclidiana, o que hoje chamamos de geometria não - Euclidiana.

INTRODUÇÃO

A geometria é uma ciência muito antiga. Seus conceitos primitivos são ponto, reta e plano. Conhecimentos geométricos não triviais já eram dominados no Egito antigo, na Babilônia e na Grécia. Na forma como nós a conhecemos, podemos estabelecer o seu ponto inicial na Grécia no tempo de Ptolomeu I, quando Euclides escreveu os Elementos (por volta de 300 a.C).

Euclides e seus predecessores reconheceram o que, nos dias de hoje, todo estudante de filosofia sabe: que não se pode provar tudo. Na construção de uma estrutura lógica, uma ou mais afirmações devem ser admitidas como verdadeiras e a partir delas todas as outras serão então deduzidas.

Desde o tempo de Euclides, o que hoje chamamos de geometria Euclidiana estava totalmente desenvolvida. Os 13 livros , conhecidos como os Elementos é uma compilação da matemática da época, reunindo os teoremas conhecidos, em um único texto, com uma apresentação unificada dos resultados até então conhecidos.

Euclides ficou famoso, pela concepção do livro em si, considerado como primeiro tratado científico, servindo de modelo para vários ramos da ciência, e pela escolha que fez dos axiomas, ou seja, as afirmações que seriam aceitas como verdadeiras.

Os dez axiomas de Euclides foram apresentados em dois grupos: as noções comuns e os postulados. A distinção entre eles não é muito clara. As noções comuns parecem ter sido consideradas como afirmações aceitáveis à todas as ciências, enquanto que os postulados seriam afirmações específicas da geometria.

Os axiomas de Euclides são os seguintes:
Noções Comuns:

1) Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais.
2) Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.
3) Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4) Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais uma à outra.
5) O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

Postulados:

I. Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.
II. Pode-se continuar (de maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.
III. Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
IV. Todos os ângulos retos são iguais.
V. É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos interiores, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Na verdade, os enunciados acima apresentados não coincidem exatamente com aqueles apresentados nos Elementos. As alterações que fizemos estão entre parênteses e representam a forma na qual Euclides realmente os utilizou nas provas dos teoremas. Dizemos também que duas retas distintas são paralelas quando não se interceptam, ou seja, não tem ponto em comum.

Os Elementos foi dividido em 13 volumes e contém 465 proposições. Ao escrever os Elementos, Euclides introduziu os postulados um a um, na ordem acima apresentada. Na verdade, o Livro I dos Elementos foi dividido em três partes. As 26 primeiras proposições tratam da teoria elementar dos triângulos. Da proposição 27 à 34 é apresentada a teoria das paralelas e finalmente, na terceira parte, são introduzidas as noções de área de paralelogramos e triângulos que culminam com o teorema de Pitágoras.

O curioso é que Euclides só utiliza o quinto postulado a partir da proposição 29, sendo que as 28 primeiras proposições são provadas usando apenas os quatro primeiros postulados.

Apresentaremos em seguida as proposições 27 e 28 na forma em que foram enunciadas no Livro I dos Elementos (ver [2] e [4]).

Proposição I. 27. *Se uma reta corta duas outras formando ângulos correspondentes iguais como na figura (1), então as duas retas são paralelas.*

Proposição I. 28. *Uma reta corta duas outras formando ângulos como na figura (1). Se* $\alpha + \beta$ *é igual a dois ângulos retos então as duas retas são paralelas.*

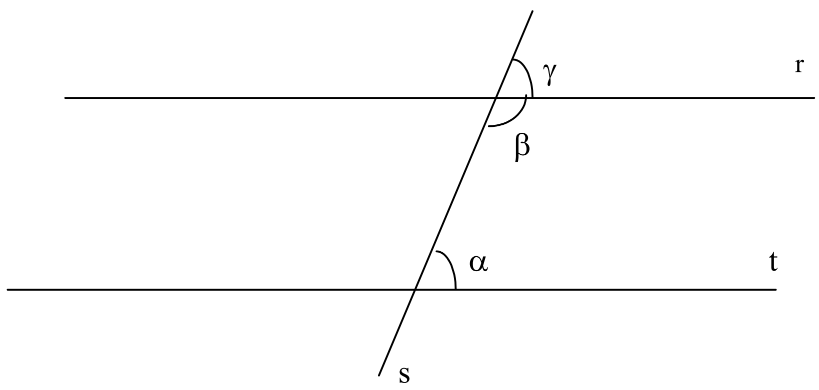

Figura (1)

As demonstrações das proposições acima são feitas sem usar o quinto postulado e podem ser encontradas em [2].

Com a terminologia acima o quinto postulado pode ser reescrito da seguinte forma:

Postulado V. *Uma reta s corta duas outras retas r e t formando ângulos como na figura (1). Se* $\alpha + \beta$ *for diferente de dois ângulos retos então as duas retas se encontram.*

Na verdade, o quinto postulado está dizendo que, se as retas r e t são paralelas então $\alpha + \beta$ é igual a dois ângulos retos. Observe que o quinto postulado é uma afirmação inversa da proposição I.28. O quinto postulado foi objeto de críticas aos Elementos ainda no tempo de Euclides, até porque ele se apresenta muito diferente dos demais inclusive pelo tamanho do seu enunciado. Devido a estes fatos, desde o início, muitas pessoas o consideraram como uma proposição que Euclides não conseguiu provar. Dois mil anos se passaram ao longo dos quais, inúmeras tentativas foram feitas, tentando provar o quinto postulado usando os quatro primeiros.

Uma das conseqüências da busca por uma prova, foi a produção de um grande número de afirmações a ele equivalentes, o que nós chamamos de substitutos. Primeiro é preciso entender o que significa afirmar que uma proposição (*P*) é equivalente ao quinto postulado. Significa que a teoria desenvolvida usando os quatro primeiros postulados mais (*P*) coincide com a geometria de Euclides. Isto é, a geometria baseada nos axiomas e postulados de Euclides. Para provar esta equivalência devemos mostrar que, (*P*) é uma proposição da geometria Euclidiana. Depois devemos provar que, na teoria desenvolvida usando os quatro primeiros mais (*P*), pode-se provar o quinto postulado.

Na verdade, é o que acontece hoje. A maioria dos livros de geometria consideram no lugar do quinto postulado uma versão equivalente a ele. Em seguida, apresentaremos algumas versões mais conhecidas do quinto postulado que podem ser encontradas em [1] e [2].

Postulados equivalentes ao quinto postulado de Euclides.

Começaremos com o substituto mais conhecido, que é comumente chamado de axioma de Playfair em homenagem ao geômetra Playfair, que o apresentou em um trabalho em 1795, ver [5] e [6].

Postulado V_1(Axioma de Playfair) *Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.*

Em seguida provaremos que V_1 é de fato equivalente ao quinto postulado.

Teorema : *O postulado V_1 é equivalente ao quinto postulado de Euclides.*

Demonstração: Precisamos provar que V_1 é uma proposição da geometria Euclidiana. Ou seja, provar que dada uma reta *m* e um ponto p fora de *m*, existe uma única reta t que passa por p e é paralela a *m*.

Existência: Traça – se por *p* uma reta *s* qualquer formando u*m* ângulo α com a reta *m* (ver figura 2).

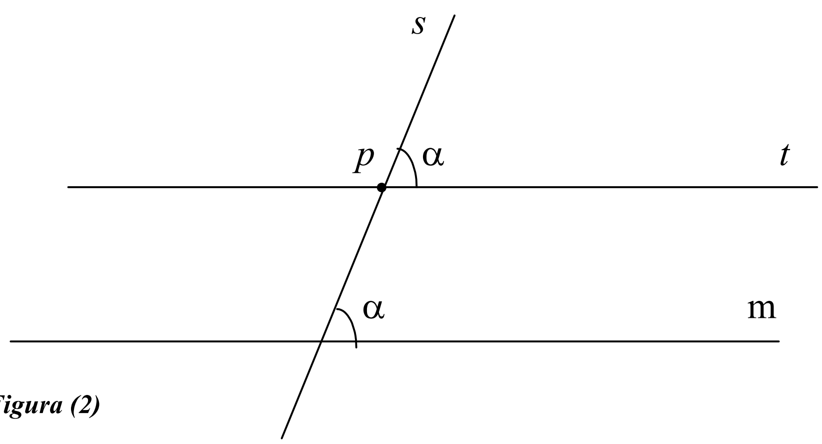

Figura (2)

Agora trace uma reta t passando por p tal que o ângulo entre t e s seja também α. Portanto, segue pela proposição I.27 que t e m são paralelas pois os ângulos correspondentes são iguais.

Unicidade: Suponha por contradição que exista outra reta *t'* passando por *p* e também paralela a *m* (ver figura 3).

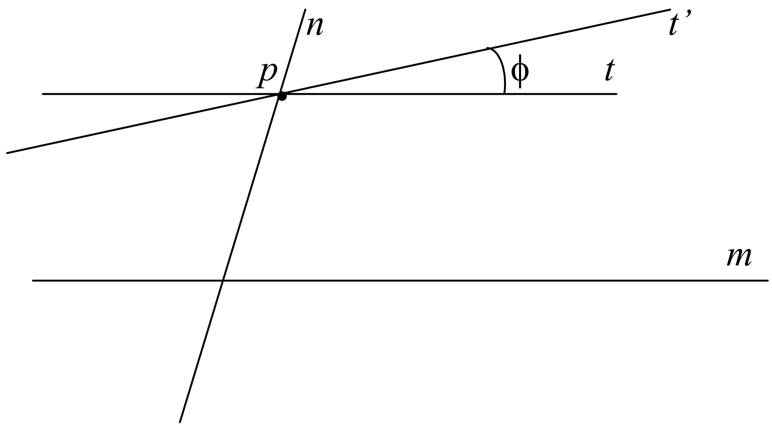

Figura (3).

Traçamos por *p* uma transversal *n* às três retas. Como *t* e *t'* são paralelas à reta *m*, segue pelo postulado *V* que *t* e *t'* formam o mesmo ângulo com a reta *n e* consequentemente o ângulo formado pelas retas t e t′ é zero. Portanto são coincidentes, provando assim a unicidade.

Vamos agora considerar os quatro primeiros postulados de Euclides e mais (V_1) e provar o quinto postulado.

Fazendo uso da figura (4) abaixo suponha que $\alpha + \beta$ é menor do que dois retos. Provaremos que *m* e *t* se encontram.

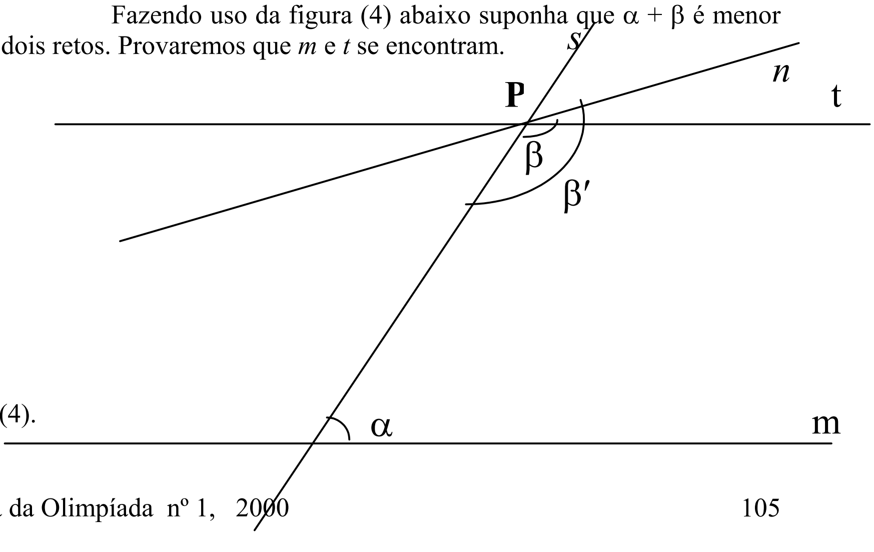

Figura (4).

Suponha por contradição que as retas m e t são paralelas. Traçamos pelo ponto P uma reta n formando um ângulo β' com a reta s tal que $\alpha + \beta'$ seja igual a dois ângulos retos. Segue pela Proposição I.28 que n e m são paralelas. Neste caso, temos duas retas distintas passando pelo ponto P e paralelas à reta m. Isso contraria V_1. Logo ,as retas r e s se encontram. Portanto, podemos concluir que V_1 é equivalente ao quinto postulado.

Apresentaremos agora mais seis versões equivalentes ao quinto postulado. A justificativa de que realmente são equivalentes é deixada para o leitor e podem ser encontradas em [2] .

Postulado V_2. *A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.*

Postulado V_3. *Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.*

Postulado V_4. *Existe um par de retas eqüidistantes.*

Postulado V_5 *Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando por estes três pontos.*

Postulado V_6. *Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então o último também é reto.*

Postulado V_7 . *Por qualquer ponto dentro de um ângulo menor do que dois terços de um ângulo reto, pode-se traçar uma reta que corta os dois lados do ângulo.*

Estes substitutos do quinto postulado, além da importância, servem para mostrar a não trivialidade do mesmo na Geometria Euclidiana. Suas conseqüências incluem as proposições mais conhecidas e mais utilizadas da Geometria. Sem ele ou um de seus equivalentes não teríamos o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo e toda a teoria dos triângulos semelhantes e consequentemente a trigonometria deixaria de existir.

Ao longo dos séculos, desde a época de Euclides, muitos matemáticos tentaram obter o quinto postulado como uma conseqüência dos quatro primeiros. Algumas tentativas ficaram famosas entre elas as de Nasiradin (1201 – 1274), John Wellis (1616 – 1703), Gerolamo Sacheri (1667 – 1733), John H. Lambert (1728 – 1777), Adrien M. Legendre (1752 – 1833), Louis Bertrand (1731 – 1812) e Carl F. Gauss (1777 – 1855) [3].

O erro mais comum dos matemáticos que buscavam provar o quinto postulado, era que no decorrer da prova eles usavam resultados que eram equivalentes ao próprio quinto postulado. Esta questão é altamente fascinante pois ainda no século XIX, os matemáticos estavam na busca de uma prova para o quinto postulado. Nos anos críticos para a evolução da geometria, a figura dominante do mundo matemático era Carl F. Gauss. Poucos dos resultados de seus muitos anos de pesquisa sobre os problemas associados ao quinto postulado foram publicados ou tornados públicos durante sua vida. Algumas notas descobertas entre seus trabalhos levam a crer que ele foi provavelmente o primeiro a entender claramente a possibilidade de existir uma nova geometria, logicamente precisa e diferente da geometria Euclidiana. Resumindo, somente nesta época é que ficou claro que era impossível provar o quinto postulado a partir dos quatro primeiros postulados de Euclides, pois se juntarmos a negação do mesmo com os quatro primeiros surge uma geometria tão consistente quanto a de Euclides. É o que hoje nós chamamos de geometria não-Euclidiana. Entretanto, os esforços feitos para provar o quinto postulado não foram em vão; serviram para obter um conhecimento profundo da geometria Euclidiana. Na verdade, quando Euclides escreveu os Elementos ele usou hipóteses que não foram mencionadas na lista inicial dos dez axiomas. Mas devido a grandeza de seu trabalho, estas falhas não ofuscaram o brilho de sua obra. Um tratamento moderno e logicamente perfeito para a geometria Euclidiana, corrigindo as imperfeições dos Elementos, foi feito por D. Hilbert em 1899 (ver [7]).

Para finalizar , apresentaremos um modelo de uma geometria não – Euclidiana, ou seja, um modelo onde o quinto postulado de Euclides não é válido. O modelo que será apresentado é conhecido como modelo de Klein.

Modelo de Klein

Considere uma circunferência **C** no plano Euclidiano de centro **O** e raio **R** . O modelo de Klein é formado por todos os pontos interiores a **C** , ou seja , por todos os pontos **X** tais que **OX < OR.** As retas deste modelo são todos os segmentos ligando dois pontos da circunferência **C**, sem as extremidades . Ver figura (5).

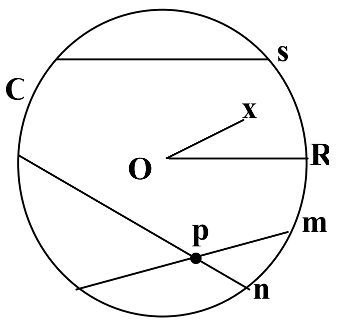

Figura (5)

Neste modelo o quinto postulado de Euclides não é válido pois, basta olhar para a figura (5) e ver que podemos traçar infinitas retas passando por **P** e paralelas à reta **s,** lembrando que retas paralelas, conforme definimos anteriormente, são retas que não tem nenhum ponto em comum.

A demonstração de que o modelo de Klein satisfaz axiomas equivalentes aos quatro primeiros postulados de Euclides não será feita aqui e pode ser encontrada em [5].

Referências

[1] Barbosa, João L. M. Geometria Euclidiana Plana, SBM, Rio de Janeiro, 1985.
[2] Barbosa, João L. M. Geometria hiperbólica, IX Escola de Geometria Diferencial, Vitória – ES, 1994.
[3] Boyer, C., História da Matemática, Ed. Edgar Blucher, São Paulo – SP, 1976.
[4] Euclid, The Elements, Dover Publications, N. Y., 1956.
[5] Greenberg, M. J., Euclidean and non-euclidean geometries - development and history, W. H. Freeman and Co. , S. Francisco, 1973.
[6] Hartshorne, R., Companion to Euclid, Lecture Notes vol. 9, Berkeley Mathematics (MAS), 1997.
[7] Hilbert, D., The foundations of Geometry, traduzido por E.J. Townsend, The Open Court Publishing Co, Chicago1902.

Romildo da Silva Pina
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
Goiânia, GO, Brasil
romildo@mat.ufg.br