Problemas do condicional: relevância

Wagner de Campos Sanz/UFG

sanz@fchf.ufg.br

Resumo

Após uma breve análise do problema da relação de relevância entre o antecedente e o conseqüente de um condicional, fazemos uma análise de qual deve ser a estrutura de um critério de adequação para uma definição de relevância em uma demonstração.

Palavras-chave: condicional, relevância, prova.

Abstract

Following a brief analysis of the relation between the antecedent and the consequent of a conditional, we search for the structure of an adequacy criterion that should define what can be a definition of relevancy within a demonstration.

Key-words:Conditional, relevancy, proof.

Aqueles que alguma vez já enfrentaram a tarefa de dar classes introdutórias de lógica certamente já se depararam com a resistência dos alunos ao serem informados da definição vero-funcional do condicional, pois esta difere de suas intuições lingüísticas. Dentre as discrepâncias podemos salientar o problema da relevância, acerca do qual mesmo entre os lógicos não encontramos propriamente concordância.

A definição vero-funcional clássica – o condicional é falso somente quando o antecedente é verdadeiro e o conseqüente falso – admite paradoxos de relevância como aqueles a seguir exemplificados:

(a) $p\rightarrow(q\rightarrow p)$
(b) $(p\rightarrow q)\vee(q\rightarrow p)$
(c) $(p\rightarrow(\sim p\rightarrow q))$

A fórmula (a), em uma interpretação intuitiva que leva em conta a regra de *Modus Ponens*, significa que dada uma verdade *p* então qualquer coisa implica esta verdade. A (b) significa que dadas duas proposições quaisquer, duas afirmações tomadas ao acaso em um jornal, por exemplo, ou a primeira implica a segunda ou vice-versa. Finalmente, (c) diz que de duas proposições contraditórias segue-se uma proposição qualquer. Em todos estes casos, vemos que pode não existir nenhuma conexão entre as proposições p e q.

Contudo, dentre os três casos acima, o terceiro nos parece de natureza algo distinta dos demais. Aquela fórmula eqüivale a dizer que de uma contradição podemos inferir qualquer coisa. Esta compreensão da natureza de uma contradição é muito arraigada no espírito da cultura ocidental. Se pretendemos pôr em xeque, de algum modo, este princípio, segue-se um certo mal-estar que M. Dunn[1] em tom jocoso diz ser o momento no qual perdemos a platéia.

As lógicas relevantes procuram evitar estes paradoxos por meio de certas interdições. Podemos distinguir estas interdições em dois grupos: interdições que visam os teoremas lógicos e interdições que visam as inferências lógicas. Sua diferença consiste basicamente na forma de abordar o problema. Entretanto, se focamos nossa atenção sobre as inferências e sua composição em uma demonstração, parece-nos que a outra abordagem também estará contemplada, na medida em que a definição do que vem a ser um teorema depende do que entendemos por uma demonstração. De forma paralela, o significado clássico de uma inferência válida admite também como correto um raciocínio do seguinte estilo:

A Lua é feita de queijo verde

Está ou não está chovendo no Equador neste momento

As lógicas relevantes são lógicas não-clássicas que procuram evitar os paradoxos como aqueles ilustrados acima.[2] Segundo Mares,[3] as lógicas relevantes são relevantes sobretudo de dois pontos de vista: (1) elas não nos forçam a aceitar qualquer irrelevância, ou seja elas não tornam válidos quaisquer um dos paradoxos; (2) de algumas lógicas relevantes, por meio da sua teoria da prova, resultam uma noção relevante de prova.

Dirigindo nossa atenção sobretudo à noção de prova relevante, nosso propósito aqui será o de discutir critérios de admissibilidade para uma definição da mesma.

Imediatamente podemos formular um critério trivial de adequabilidade. Uma noção de prova relevante não deve permitir que sejam demonstrados os paradoxos de relevância. Entretanto, este critério não é exatamente operacional. Para introduzir um que o seja examinemos mais de perto uma prova clássica do primeiro dos paradoxos acima:

1) $p\{1\}$	hipótese[4]
2) $q \rightarrow p\{1\}$	condicionalização de 1 s/descarte de hipótese
3) $p \rightarrow (q \rightarrow p)\ \{\}$	condicionalização de 2 c/descarte de (1)

Podemos identificar no passo (2) um uso não relevante da condicionalização, pois a fórmula sendo condicionalizada em (1) não depende de nenhuma hipótese da forma "q". Do ponto de vista das tabelas de verdade, se uma proposição *p* é verdadeira, então independente da verdade ou falsidade de outra proposição *q*, $q \rightarrow p$. Estes dois pontos de vista não podem ser compatibilizados de forma imediata, mas se admitimos que uma hipótese é uma proposição que conjecturamos verdadeira, então podemos admitir certa concordância.

Se buscamos barrar tais usos irrelevantes do condicional pareceria natural interditar passos como aquele realizado acima. De fato, historicamente, este foi o requisito imposto para uma inferência relevante por Church.[5] Em outros termos, diríamos que B será deduzido relevantemente de uma hipótese A se de fato a hipótese A é utilizada na dedução de B, ou seja se há uma cadeia de inferências ligando A a B. Obviamente isto não ocorre no exemplo anterior, pois a condicionalização sequer descarta uma das hipótese listadas.[6] De modo simples, podemos formular nosso primeiro critério operacional e evitar a demonstração dos paradoxos de relevância: *condicionalizamos B com a fórmula A somente se B é deduzido relevantemente de A*. Assim, passos de inferência semelhantes àquele (2) acima estariam proibidos - evidentemente *p* não depende dedutivamente de *q*, mesmo porque *p* é uma hipótese. Mas, se isto parece razoável, este critério é ainda insuficiente, pois ao levarmos em conta os outros conectivos lógicos e suas respectivas regras o problema ressurge. Observe o seguinte exemplo:

1)p{1}	hipótese
2)q{2}	hipótese
3)p&q{1,2}	introdução de conjunção sobre 1 e 2
4)p{1,2}	eliminação de conjunção sobre 3
5)q→p{2}	condicionalização de 4 c/ descarte de 2
6)p→(q→p) {}	condicionalização de 5 c/ descarte de 1

Novamente estaríamos fazendo um uso irrelevante da condicionalização em 5.[7] Para bloquear estes movimentos adiciona-se, usualmente, na lógica relevante R, uma restrição sobre os índices da introdução de conjunção. Temos então um segundo critério operacional que extende o primeiro: *exigimos que o conjunto de índices das premissas usadas para inferir uma conjunção sejam iguais, o que vem a ser o mesmo que admitir uma introdução da conjunção unicamente quando cada uma das suas premissas depende das mesmas hipóteses.*[8]

Embora o exemplo anterior apresente uma suposta fraqueza do primeiro critério operacional, talvez não seja exatamente claro porque deveríamos aceitar a objeção nele baseada. Examinemos os argumentos que poderiam ser oferecidos a seu favor

Primeiro, poderíamos sustentar a importância da objeção, observando que uma das tarefas básicas da lógica é a de apresentar um conceito preciso do que entendemos por uma inferência correta. Assim, a objeção seria razoável, pois do passo (2) ao passo (3) e deste ao passo (4) temos inferências corretas. Em suma, estaríamos advogando que a noção de relevância deveria ser aplicável a um sistema fechado para as operações lógicas. Este argumento, apesar de muito razoável, enseja algum cuidado, pois uma vez que começamos a nos preocupar em dar uma definição de inferência correta e relevante, não vemos por que eventualmente não poderíamos ir além e pedir uma noção de relevância ainda mais forte. Uma definição que excluísse de uma demonstração inferências que não nos levam a lugar algum, por exemplo. Ocorre que na prática, ao fazermos uma demonstração, procuramos apresentá-la da maneira mais direta, clara e elegante possível, e qualquer que seja o significado que atribuamos a estes adjetivos no contexto das provas, dificilmente eles seriam aplicáveis ao caso anterior. A prova acima comporta um certo artificialismo. O passo (3) é o que poderíamos chamar de um "rodeio" desnecessário à prova. Ele é conclusão de uma regra de introdução de símbolo lógico e premissa de uma regra de eliminação de símbolo lógico. Vemos claramente que estes em nada contribuem para a demonstração pretendida. Raramente um matemático treinado apresentaria uma prova que contivesse rodeios como aquele acima.

Segundo, poderíamos sustentar à importância da objeção observando que as regras da lógica possuem uma simetria admirável entre regras de introdução e de eliminação para os símbolos lógicos, e que além disso as regras de eliminação extraem de uma proposição nada mais nada menos do que aquilo que as regras de introdução lá puseram. Chamamos a isto de princípio de inversão.[9] Assim, se existem tais simetrias tão profundas, poderíamos argumentar que a objeção do exemplo anterior repousa sobre estas simetrias. Antes de mais nada, queremos deixar claro que consideramos este um argumento muito bom. Todavia, bem sabemos que eventualmente esta simetria pode ser violada levando em conta certos propósitos específicos. De fato, o próprio sistema R na sua formulação original a viola, como mostraremos mais adiante. Mas, pior ainda, caso quiséssemos sustentar a necessidade da manutenção da simetria, estaríamos expondo o flanco a crítica, pois apesar de podermos contar com a negação entre os símbolos lógicos e apesar de podermos formular regras de introdução e eliminação para a negação, não se segue uma das propriedades fundamentais derivadas do princípio de inversão: a eliminabilidade dos rodeios.[10]

Basicamente, podemos dizer que as duas argumentações anteriores são estruturais, pois ambas apontam para a importância de certas propriedades estruturais da Lógica. Porém, acreditamos que um argumento em algum sentido mais básico pode ser oferecido. Este argumento não assume como ponto de partida as propriedades estruturais da Lógica, mas antes justifica pragmaticamente estas propriedades estruturais. No entanto, este argumento depende de aceitar como um fato essencial o caráter de *organon* da Lógica. A resposta que temos em mente parte de um exame daquilo que poderíamos chamar de paradigma central do conhecimento matemático.

Se aceitamos que a Geometria Euclidiana é "o paradigma fundamental" da ciência matemática, então uma explicação pode ser oferecida nos seguintes moldes. Podemos distinguir, grosso modo, dois elementos principais na estrutura deste paradigma: os axiomas ou princípios básicos; e os teoremas. Tradicionalmente, concebemos os axiomas como certas asserções que não dependem de nenhum outro princípio próprio da teoria. Já os teoremas são derivados, fundamentalmente, dos axiomas, dependem destes. Quando demonstramos um teorema, consideramos completamente lícito o recurso a outros teoremas já provados. Para sermos mais precisos, quando dizemos que os teoremas dependem unicamente dos axiomas é porque cada vez que provamos um teorema com recurso a outros teoremas, se substituíssemos nesta prova cada um destes últimos por suas respectivas provas, e assim sucessivamente, então poderíamos observar que em um certo ponto todas as asserções que servem como premissas básicas serão axiomas próprios da teoria.

Em certo sentido, podemos dizer que a apresentação axiomática de uma teoria constitui um estoque de conhecimentos. Pertencerão ao estoque os axiomas e todos os teoremas que já tenham sido demonstrados. Novos elementos poderão ser adicionados desde que seja possível apresentar uma prova que faça uso tão somente de regras de inferência lógica e de elementos já estocados (eventualmente de regras próprias à teoria).

Assim, teríamos boas razões para considerarmos importantes as provas que contenham rodeios. Ocorre que ao provar um teorema, se fazemos uso de outros teoremas já estocados, então a prova resultante será uma prova composta. Se queremos saber de quais axiomas depende efetivamente um dado teorema, precisamos examinar esta prova composta. Não obstante, esta composição de provas em geral dar-se-á sobre sentenças cujo símbolo principal será provavelmente um condicional ou um universal, raramente uma conjunção. Mas, ao tentarmos eliminar os rodeios imediatos de uma prova, rodeios de implicação ou de universal, novos rodeios podem surgir, e estes por sua vez podem ter como símbolo lógico principal qualquer um dos conectivos lógicos, aí incluída a conjunção. Se o nosso problema de determinar a relevância de uma condicionalização dentro de uma prova estivesse restrito ela mesma à prova, o primeiro critério oferecido anteriormente, nos parece, já seria amplamente satisfatório. Porém, acredito, temos boas razões para rejeitar este ponto de vista limitado. Pois, ao considerarmos uma teoria, não estamos unicamente interessados em conhecer os axiomas e as provas normais (ou seja diretas e livres de rodeios) de certos teoremas, mas interessados em determinar quais as consequências lógicas desta teoria. Adotando o primeiro critério operacional estaríamos subrepticiamente comprometendo-nos a exigir mais do que uma demonstração de que A e $A \rightarrow B$ são teoremas quando queremos mostrar que B também é um teorema, seria preciso ainda saber se existe uma prova em forma normal e além disso relevante segundo o critério proposto.

Resumindo, desde que aceitemos que a Lógica tem um papel essencial de *organon* para o conhecimento, sobretudo o conhecimento matemático, e que a apresentação do próprio conhecimento matemático supõe a necessidade de compor provas, então os rodeios são inevitáveis. Assim, se desejamos propor um critério de prova relevante devemos levar em consideração esta natureza da Lógica, e como claramente o uso irrestrito de introdução da conjunção pode permitir a introdução de irrelevâncias em uma prova, pareceria adequado admitir que se façam restrições ao seu uso. Ainda que não o tenhamos mostrado explicitamente, considerações semelhantes aplicam-se a disjunção.

Se a argumentação anterior é aceitável parece-nos que teríamos um outro critério de admissibilidade para a definição de uma noção de prova relevante. Em primeiro lugar, seria desejável que a composição de provas relevantes resultasse numa prova relevante. Em segundo lugar, se a prova composta resultante é relevante e contém rodeios, então pareceria também desejável que da eliminação dos rodeios de uma prova, ou o processo de normalização, resultasse provas relevantes. Em qualquer caso, assumir qualquer um dos desideratos, nos leva a tomar como critério de admissibilidade a existência de provas normais e propriedades correlatas bem como o fechamento por normalização para a noção de prova definida.[11]

Infelizmente, a definição usual do sistema R (seja a apresentação axiomática ou a apresentação em dedução natural), feita com base no segundo critério operacional, introduz uma dissimetria na divisão entre regras de introdução e regras de eliminação,[12] o que redunda em problemas do ponto de vista da eliminabilidade dos "rodeios". A regra é a seguinte:

$$\frac{p\&(q\vee r)}{(p\&q)\vee r}\ \text{regra de distribuição}$$

Portanto, o sistema R não passa pelo crivo do critério de admissibilidade que propusemos mais acima. Além disso, no contexto de uma noção de prova relevante, o segundo critério operacional nos parece demasiadamente restritivo, e como R usa este critério, a ele também se aplica a observação a seguir. O segundo critério operacional interdita certas provas que concordam com uma definição intuitiva de relevância.[13] Ou ainda, interdita certas provas que cumprem adequadamente com o primeiro critério. Observe a seguinte prova:

1) $p_{\{1\}}$	hipótese
2) $p\to(q\to r)_{\{2\}}$	hipótese
3) $q_{\{3\}}$	hipótese
4) $q\to r_{\{1,2\}}$	eliminação do condicional sobre 1 e 2
5) $r_{\{1,2,3\}}$	eliminação do condicional sobre 3 e 4
6) $s_{\{6\}}$	hipótese
7) $r\&s_{\{1,2,3,6\}}$	introdução da conjunção sobre 5 e 6
8) $r_{\{1,2,3,6\}}$	eliminação da conjunção sobre 7
9) $p\to r_{\{2,3,6\}}$	condicionalização de 8 c/ descarte de 1

Em primeiro lugar notem que esta prova, com os índices usados da forma tradicional, não informa adequadamente as dependências entre a conclusão e as hipóteses. Claramente (9) não depende de (6). Por outro lado, não vemos como negar que a condicionalização em 9 seja relevante, pois 8 realmente depende dedutivamente de (1). Esta prova seria rejeitada em NR pois se exige das premissas de uma introdução da conjunção que elas dependam das mesmas hipóteses.[14]

Este problema da relevância de um condicional nas demonstrações é uma pequena parcela do problema mais amplo da relevância lingüística. Embora os problemas de relevância lingüística sejam estranhos às considerações pertinentes ao domínio da Lógica e da Filosofia da Linguagem, no entanto, parece-nos razoável admitir que uma solução do problema mais específico seja consistente com uma solução do problema mais amplo. Certamente, esta última observação comporta um *desiderato*, porém aponta também inequivocamente uma transição contínua entre diferentes áreas do saber humano. Esta transição é ainda mais ampla se levarmos em conta a estrutura do argumento anterior, em que fizemos intervir algumas considerações epistemológicas acerca da matemática. Esta observação não é ociosa, pois neste momento nos dirigimos a um público interessado em filosofia, e, dentre estes, a uma parcela de estudantes que sempre estão a nos perguntar: "para que estudamos lógica?"

Notas

[1] Relevance Logic, *Handbook of Philosophical Logic*, v. III.

[2] Para uma exposição introdutória ver S. Haack, "The Philosophy of Logics".

[3] Na *Stanford Enciclopaedia of Philosophy*, verbete Logic, Relevance, na internet.

[4] O índice entre chaves indica a dependência lógica da proposição com respeito as proposições que aparecem na prova, e neste caso indicam que *p* é uma hipótese.

[5] "The weak theory of implication", Kontrolllliertes Denken, Untersuchungen zum Logikkalkül und der Logik der Einzelwissenschaften, 1951.

[6] Para fazer referência a uma outra forma de apresentar a questão, Prawitz (Natural Deduction, pág. 82) caracteriza o uso relevante da regra de condicionalização, ou, em termos mais apropriados, de introdução do condicional, exigindo que uma pressuposição seja de fato descartada pela aplicação da regra. No caso do sistema de dedução natural do estilo Gentzen sempre há uma conexão entre as suposições e a fórmula a ser condicionalizada por meio de uma sequência de inferências.

[7] O mesmo ocorreria em um sistema de dedução natural do estilo Gentzen.

[8] Continuando o paralelo que já vinhamos estabelecendo com Prawitz, segundo entendemos, a restrição imposta por este (pág. 88) não nos parece tão forte quanto a anterior.

[9] Ver Prawitz, *Natural Deduction*, Cap. II.

[10] Observe-se também que esta segunda argumentação é uma espécie de extensão da primeira.

[11] Se examinamos a exposição de Prawitz acerca do assunto observamos o uso deste critério de admissibilidade que tentávamos justificar ao definir seu sistema R_P para a implicação pura.

[12] Dunn, em "Relevance Logic and Entailment", *Hanbook of Philosophical Logic* V. III, pág. 144, o afirma explicitamente algumas vezes. Também afirma que o sistema R_C de Prawitz [1965] não possui a regra de distribuição – o que a nosso ver não é correto – mas que isso é compensado pelo fato de Prawitz pode provar o teorema de forma normal para seu sistema.

[13] Uma objeção semelhante pode ser feita ao sistema R_C de Prawitz.

[14] É bem verdade que se nos restringimos somente a uma noção mais ampla de derivabilidade que leva em conta só as hipóteses de partida e a conclusão de chegada, podemos demonstrar em R uma relação de derivabilidade semelhante aquela que vige acima entre as hipóteses e a conclusão.

Referências bibliográficas

Anderson, A.R. & N.D. Belnap. *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*. vol. I, Princeton University Press, 1975.

Dunn, J.M. Relevance Logic and Entailment. In: *Handbook of Philosophical Logic*, vol. III, eds. D. Gabbay & F. Guenthner, Reidel, 1986.

Haack, S. *Philosophy of Logics*. Cambridge Univerity Press, 1978.

Prawitz, D. *Natural Deduction*. Alqvist, 1965.