

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DIMAS NOÉ TEJADA TEJADA

**Linhas de Curvaturas Principais e
Geodésicas Nulas em Superfícies
Imersas no Espaço de Minkowski
3-dimensional**

Goiânia
2018

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: Dissertação Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: DIMAS NOÉ TEJADA TEJADA

Título do trabalho: Linhas de Curvaturas Principais e Geodésicas Nulas em Superfícies Imersas no Espaço de Minkowski 3-dimensional

3. Informações de acesso ao documento:

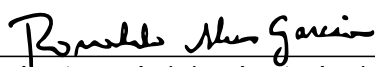
Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.



Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:


Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 09 /02 /2018

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

² A assinatura deve ser escaneada.

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o(a) autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico: Dissertação Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

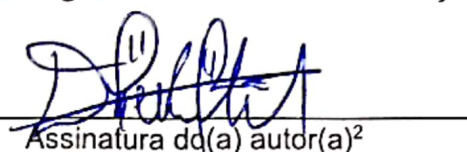
Nome completo do(a) autor(a): DIMAS NOÉ TEJADA TEJADA

Título do trabalho: Linhas de Curvaturas Principais e Geodésicas Nulas em Superfícies Imersas no Espaço de Minkowski 3-dimensional

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Independente da concordância com a disponibilização eletrônica, é imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.



Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:



Assinatura do(a) orientador(a)

Data: 25 / 05 / 2023

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante: a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a); b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

² As assinaturas devem ser originais sendo assinadas no próprio documento. Imagens coladas não serão aceitas.

DIMAS NOÉ TEJADA TEJADA

Linhas de Curvaturas Principais e Geodésicas Nulas em Superfícies Imersas no Espaço de Minkowski 3-dimensional

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos.

Orientador: Prof. Ronaldo Alves Garcia

Goiânia
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

TEJADA TEJADA, DIMAS NOÉ

Linhas de Curvaturas Principais e Geodésicas Nulas em Superfícies Imersas no Espaço de Minkowski 3-dimensional [manuscrito] / DIMAS NOÉ TEJADA TEJADA. - 2018.
173 f.

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2018.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras.

1. Campos de vetores. 2. Curvaturas principais. 3. Linhas principais. 4. Geodésicas nulas. 5. Equações diferenciais binárias. I. Alves Garcia, Ronaldo , orient. II. Título.

CDU 517.938



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

ATA DA REUNIÃO DA BANCA EXAMINADORA DA DEFESA DE TESE DE DIMAS NOE TEJADA TEJADA – Aos cinco dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e dezoito (05/02/2018), às 14:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Ronaldo Alves Garcia - Orientador, Prof. Marcos Craizer, Prof. Durval José Tonon, Prof. Francisco Xavier Fontenele Neto (via videoconferência), Profa. Ana Cláudia Nabarro (via videoconferência), Prof. Luis Fernando de Osório Mello (via videoconferência) e Prof. Jorge Manuel Sotomayor Tello (via videoconferência), sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Centro de Eventos da UFG, procederem a avaliação da defesa de tese intitulada: “**Linhas de Curvaturas Principais e Geodésicas Nulas em Superfícies Imersas no Espaço de Minkowski 3-dimensional**”, em nível de Doutorado, área de concentração em Sistemas Dinâmicos, de autoria de Dimas Noe Tejada Tejada, discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. Ronaldo Alves Garcia que fez a apresentação formal dos membros da Banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor da tese que, em 45 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da Banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1513 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta o Programa de Pós-Graduação em Matemática e procedidas as correções recomendadas, a tese foi **APROVADA** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **DOUTOR EM MATEMÁTICA**, na área de concentração em Sistemas Dinâmicos pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do PPGM da versão definitiva da tese, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 16:30 horas a presidência da mesa encerrou esta sessão de defesa de tese e para constar eu, Ulisses José Gabry, secretário do PPGM, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, será assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia
Presidente - IME/UFG

Prof. Dr. Marcos Craizer
Membro – DM/PUC-Rio

Prof. Dr. Durval José Tonon
Membro – IME/UFG

Prof. Dr. Francisco Xavier Fontenele Neto
Membro – IM/UFF
(via videoconferência)

Profa. Dra. Ana Cláudia Nabarro
Membro – ICMC/USP São Carlos
(via videoconferência)

Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello
Membro – IMC/UNIFEI
(via videoconferência)

Prof. Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello
Membro – IME/USP
(via videoconferência)

DIMAS NOE TEJADA TEJADA

LINHAS DE CURVATURAS PRINCIPAIS E GEODÉSICAS NULAS EM SUPERFÍCIES IMERSAS NO ESPAÇO DE MINKOWSKI 3-DIMENSIONAL

Tese defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática, aprovada em 05 de fevereiro de 2018, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



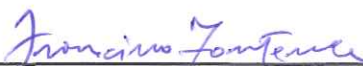
Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia
Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Presidente da Banca




Prof. Dr. Durval José Tonon
Instituto de Matemática e Estatística - UFG



Prof. Dr. Marcos Craizer
Departamento de Matemática - PUC-Rio



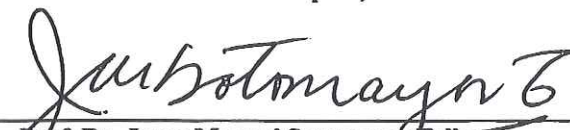
Prof. Dr. Francisco Xavier Fontenele Neto
(via videoconferência)
Instituto de Matemática - UFF



Profa. Dra. Ana Cláudia Nabarro
(via videoconferência)
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação ICMC- USP/São Carlos



Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello
(via videoconferência)
Instituto de Matemática e Computação - UNIFEI



Prof. Dr. Jorge Manuel Sotomayor Fello
(via videoconferência)
Instituto de Matemática e Estatística - USP

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Dimas Noé Tejada Tejada

Graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Universidad de El Salvador - UES (El Salvador). Foi bolsista da UES. Durante o Mestrado, na Universidad de Murcia - UM (España), foi bolsista da Fundação Carolina e escreveu sua dissertação na área de Sistemas Dinâmicos. No Doutorado, na Universidade Federal de Goiás - UFG (Brasil), foi bolsista da OEA-GCUB e desenvolveu seus estudos na área de Sistemas Dinâmicos com ênfase em linhas de curvaturas principais.

À Evelyn e Lucas

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por permitir-me chegar até o fim do curso de maneira satisfatória.

À minha esposa Evelyn pelo amor, companheirismo, apoio e sacrifício durante estes quatro anos, ela é parte fundamental desta conquista, e a nosso amado filho Lucas pela imensa alegria e felicidade que trouxe às nossas vidas.

Aos meus pais Placido e Candelaria, meu irmão Jesus e às minhas irmãs Maria Dolores, Rosa, Berlinda, Alicia e Marta pelo incentivo e suporte desde os primeiros passos.

Ao Hugo, um grande amigo que foi como um irmão durante o curso.

Aos amigos que fiz ao longo do curso, Douglas, Rosane, Thársis, Felipe, Oscar, Pablo, Kelvin, Paulo, Alacyr, entre outros, com os quais compartilhei momentos de frustração, realização e descontração.

Ao professor Ronaldo Alves Garcia pela grande contribuição na minha formação acadêmica, pelas orientações, pelo tempo e paciência a mim dispensados ao longo desses anos. Sinto muita satisfação de te-lo tido como orientador e pela amizade demonstrada.

À Universidad de El Salvador - UES, pelo suporte financeiro e pela oportunidade de me dedicar integralmente aos estudos durante todo o curso.

Ao Instituto de Matemática e Estatística da UFG, pela acolhida e pelo apoio durante todo o curso.

Ao Programa de Alianças para a Educação e Capacitação OEA-GCUB, pelo suporte financeiro e pela oportunidade de realizar o estudo em Brasil.

Resumo

Tejada, Dimas. **Linhas de Curvaturas Principais e Geodésicas Nulas em Superfícies Imersas no Espaço de Minkowski 3-dimensional.** Goiânia, 2018. 173p. Tese de Doutorado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho consideramos imersões no espaço \mathbb{R}^3 com o produto escalar de Minkowski. Obtemos condições suficientes para que uma imersão seja estruturalmente estável na configuração das curvaturas principais. Mostramos que o conjunto de imersões estritamente convexas e estruturalmente estáveis é genérico no conjunto de imersões estritamente convexas. Também, obtemos condições suficientes para que uma imersão seja estruturalmente estável na configuração das geodésicas nulas.

Palavras-chave

Campos de vetores, Curvaturas principais, Linhas principais, Geodésicas nulas, Equações diferenciais binárias, Estabilidade estrutural.

Abstract

Tejada, Dimas. **Lines of Principal Curvatures and Null Geodesics on Immersed Surfaces in the 3-dimensional Minkowski Space.** Goiânia, 2018. 173p. PhD. Thesis. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work we consider immersions in the space \mathbb{R}^3 with the Minkowski scalar product. We obtain sufficient conditions for that an immersion to be structurally stable in the configuration of the principal curvatures. We show that the set of strictly convex and structurally stable immersions is generic in the set of strictly convex immersions. Also, we obtain sufficient conditions for that an immersion to be structurally stable in the configuration of null geodesics.

Keywords

Vector fields, Principal curvatures, Principal lines, Null geodesics, Binary differential equations, Structurally stable.

Sumário

Lista de Figuras	13
INTRODUÇÃO	15
1 PRELIMINARES	18
1.1 O Espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$	18
1.2 Teoria Local das Curvas	21
1.3 Teoria Local das Superfícies Imersas em $\mathbb{R}^{2,1}$	24
1.3.1 Primeira e segunda formas fundamentais	24
1.3.2 Equações de compatibilidade	27
1.3.3 Triedro de Darboux	30
1.4 Configuração Principal	31
1.4.1 Direções principais	31
1.4.2 Propriedades do trópico	34
1.4.3 Propriedades do discriminante LPL	35
1.4.4 Definição da configuração principal	36
1.5 Campo de Lie-Cartan	37
1.6 Coordenadas de Bonnet	38
1.6.1 Superfícies tipo espaço	39
1.6.2 Superfícies tipo tempo	42
2 ESTABILIDADE ESTRUTURAL DA CONFIGURAÇÃO PRINCIPAL	45
2.1 Singularidades	45
2.1.1 Pontos umbílicos tipo espaço	45
2.1.2 Pontos umbílicos tipo tempo	48
2.1.3 Pontos onde o discriminante LPL é uma curva regular	54
2.1.4 Estabilidade estrutural em uma singularidade	61
2.2 Ciclos Principais	65
2.2.1 Derivada da transformação de transição	66
2.2.2 Derivada da transformação de primeiro retorno	72
2.2.3 Estabilidade estrutural em um ciclo principal	81
2.2.4 Superfícies em torno de curvas tipo espaço	81
2.3 Teorema de Estabilidade Estrutural	85
2.4 Demonstração do Teorema A	86
2.4.1 Regiões canônicas	86
2.4.2 Construção de equivalências	88

3	GENERICIDADE DA CONFIGURAÇÃO PRINCIPAL DE IMERSÕES ESTRITAMENTE CONVEXAS	93
3.1	Teorema de Genericidade	93
3.2	Fórmula Variacional	95
3.3	O Lema do Levantamento	98
3.3.1	Lemas auxiliares	99
3.3.2	Demonstração do lema do levantamento	103
3.4	Genericidade das Imersões com Pontos Umbílicos Tipo Espaço Hiperbólicos	107
3.5	Propriedade da Curvatura Variável	109
3.6	Eliminação de Recorrências Não Triviais	114
3.7	Estabilização de Separatrizes	118
3.8	Demonstração do Teorema de Genericidade	122
4	GEODÉSICAS NULAS	123
4.1	Introdução	123
4.2	Singularidades	124
4.3	Ciclos Geodésicos Nulos	128
4.4	Estabilidade Estrutural	134
4.5	Demonstração do Teorema C	135
4.5.1	Regiões canônicas	136
4.5.2	Construção de equivalências	138
5	LINHAS PRINCIPAIS DE SUPERFÍCIES CLÁSSICAS EM $\mathbb{R}^{2,1}$	140
5.1	Superfícies Umbílicas em $\mathbb{R}^{2,1}$.	140
5.2	Superfícies de Revolução.	141
5.3	Sistema Triplamente Ortogonal.	143
5.4	Linhas Principais no Elipsóide.	144
5.5	Hiperbolóide de Duas Folhas.	150
5.5.1	Hiperbolóide horizontal de duas folhas.	151
5.5.2	Hiperbolóide vertical de duas folhas.	153
5.6	Hiperbolóide de Uma Folha.	156
5.6.1	Hiperbolóide horizontal de uma folha.	156
5.6.2	Hiperbolóide vertical de uma folha.	158
5.7	Cone	162
5.7.1	Cone horizontal.	162
5.7.2	Cone vertical.	163
	CONCLUSÕES	165
	Referências Bibliográficas	167
	Índice Remissivo	172

Lista de Figuras

1.1	Espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$.	19
1.2	Com a norma euclidiana, o comprimento de N_e é menor que o comprimento de N , isto é, $ N_e _e \leq N _e$.	26
1.3	O conjunto de vetores de norma 1 em $\mathbb{R}^{2,1}$ é $S^{2,1} \cup H_+^2 \cup H_-^2$	26
1.4	Coordenadas de Bonnet de uma superfície.	39
2.1	Configurações principais nos pontos umbílicos tipo espaço hiperbólicos.	46
2.2	Distribuição dos pontos umbílicos tipo espaço hiperbólicos no plano- (b_1, b_2) .	48
2.3	Configurações principais nos pontos umbílicos tipo tempo hiperbólicos.	51
2.4	Singularidades do campo de linhas de Lie-Cartan em \mathbb{M} e sua projeção nos pontos umbílicos em M .	52
2.5	Distribuição dos pontos umbílicos tipo tempo hiperbólicos no plano- (b_1, b_2) .	54
2.6	Singularidades tipo cúspides onde o LPL é uma curva regular espaço ou tempo.	56
2.7	Singularidades nos pontos onde o discriminante LPL é tipo luz.	57
2.8	Singularidades nos pontos onde o trópico e o LPL são tipo luz.	59
2.9	Resumo das singularidades estáveis da configuração principal. O ponto A é tipo luz para o trópico e o LPL , as curvas são tangentes nesse ponto.	61
2.10	Construção da equivalência local em T_3 e T_4 .	64
2.11	Construção da equivalência local em um nó.	65
2.12	Os quatro diferentes tipos de ciclos principais.	66
2.13	A curva c como arco principal.	67
2.14	Seções transversais em um ciclo que muda de caráter.	75
2.15	Regiões paralelas.	87
2.16	Regiões cilíndricas.	87
2.17	Definição de h_t na interseção de duas regiões paralelas.	89
2.18	Definição de h_t em regiões cilíndricas.	90
2.19	Definição de h_t em uma região semi-transversal irreduzível e em uma região cilíndrica que intersecta um ciclo principal.	91
3.1	A aplicação $\mu \rightarrow v(q_\mu(x))$ é estritamente crescente e sua imagem contém o intervalo $[v(x) - rc, v(x) + rc]$.	101
3.2	\tilde{D} é construído conforme γ intersecta D as primeiras n vezes e tal que (s, t) seja carta principal.	104
3.3	D' é a restrição de \tilde{D} à $\tilde{t}(w)$ e $\tilde{t}(z)$.	104
3.4	Gera uma superfície com um ciclo principal para quebrar a recorrência não trivial.	116
3.5	Gera uma superfície com uma conexão de pontos umbílicos a mais.	116

3.6	Exemplos de gráficos. Na Figura (b) a separatriz $\sigma_1 = \sigma_3$ com orientações diferentes.	119
3.7	Estabilização de uma separatriz σ que contém um ciclo principal em seu conjunto limite.	121
3.8	Cilindro C com um gráfico Γ em uma das fronteiras.	121
4.1	Singularidades tipo cúspides onde o trópico é uma curva regular tipo espaço.	125
4.2	Singularidades nos pontos onde o trópico é tipo luz.	126
4.3	Ciclo geodésico nulo.	129
4.4	Geodésicas nulas do elipsóide e do toro de revolução em torno do eixo z .	133
	(a) Elipsóide	133
	(b) Toro	133
4.5	Região cilíndrica em \mathbb{G}_α composta por duas curvas fechadas de $\mathcal{F}_{I,\alpha}$. Na figura de baixo temos a projeção da região em M .	137
5.1	Linhas de curvatura principal no toro e elipsóide de revolução em torno do eixo z .	142
	(a) Toro	142
	(b) Elipsóide	142
5.2	Sistema triplamente ortogonal para o elipsóide.	145
5.3	Linhas principais no Elipsóide.	149
5.4	Família de quadráticas ortogonal e confocal.	149
5.5	Linhas de curvatura principal do elipsóide $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.	150
	(a) $\mathbb{R}^{2,1}$	150
	(b) \mathbb{E}^3	150
5.6	Sistema triplamente ortogonal para o hiperbolóide horizontal de duas folhas.	152
	(a) $b > c$	152
	(b) $b < c$	152
5.7	Linhas principais no hiperbolóide horizontal de duas folhas.	153
	(a) $b > c$	153
	(b) $b < c$	153
5.8	Linhas principais no hiperbolóide vertical de duas folhas.	156
	(a) $a > b > c$	156
	(b) $a > c > b$	156
	(c) $c > a > b$	156
5.9	Linhas principais no hiperbolóide horizontal de uma folha.	158
	(a) $b > c$	158
	(b) $b < c$	158
5.10	Trópico e LPL de \mathbb{H}_{1h}^{abc} quando $b < c$.	159
5.11	Linhas principais no hiperbolóide vertical de uma folha.	161
	(a) $a > b > c$	161
	(b) $a > c > b$	161
	(c) $c > a > b$	161
5.12	Trópico e LPL de \mathbb{H}_{1v}^{abc} quando $a > c > b$.	162
5.13	Linhas principais no cone horizontal com $b > c$.	163
5.14	Linhas principais no cone vertical com $c > a > b$.	164

Introdução

O estudo das *linhas de curvatura principal* e pontos umbílicos sobre superfícies foi iniciado por Monge [42], [41], Dupin [11], Cayley [7], Darboux [8], entre outros. As ideias e métodos de Equações Diferenciais tais como Estabilidade Estrutural, Recorrências, Genericidade e Bifurcações (veja [46] e [44]) foram introduzidas neste tipo de estudo por Jorge Sotomayor e Carlos Gutiérrez nos trabalhos [29] e [30], e continuado por eles e colaboradores com muitos outros trabalhos tais como [14], [15], [17], [20], [31], [40], [19], [18], [32], [16], [23], [22] etc. Com estas técnicas também foram estudadas linhas de curvatura média [21] e linhas assintóticas [13].

Neste trabalho apresentamos um estudo qualitativo das *linhas de curvatura principal* e de *geodésicas nulas* em superfícies imersas no espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$, onde $\mathbb{R}^{2,1}$ é o espaço vectorial \mathbb{R}^3 com o produto escalar de Minkowski $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3$ com $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Especificamente, temos como objetivo principal os resultados obtidos nos Teoremas A, B e C que apresentamos a seguir.

No conjunto de todas as imersões $\mathcal{I}^{r,s}(M)$ de classe C^r ($r \geq 4$), dotado com a topologia C^s ($s \leq r$), de uma superfície M no espaço Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$, definimos o subconjunto $S^r(M) \subset \mathcal{I}^{r,s}(M)$ tal que $\alpha \in S^r$ se satisfaz:

- a) As propriedades TR e DR (Seção 2.3).
- b) As singularidades são todas hiperbólicas ou cúspides (Seção 2.1).
- c) Os ciclos principais são todos hiperbólicos (Seção 2.2).
- d) Não há separatriz de α que seja separatriz de duas singularidades diferentes ou duas vezes da mesma singularidade (Seção 2.3).
- e) O conjunto limite de toda linha principal é união de singularidades hiperbólicas e ciclos principais (Seção 2.3).

O primeiro resultado que obtemos foi o seguinte teorema:

Teorema A. Seja $r \geq 4$ e M uma superfície suave, orientada e compacta. Então o conjunto $S^r(M)$ é aberto em $\mathcal{I}^{r,3}$ e todo $\alpha \in S^r(M)$ é C^3 -estruturalmente estável.

Definimos os subconjuntos $\mathcal{I}_c^r \subset \mathcal{I}^r(M)$ das imersões estritamente convexas e $S_c^r = S^r(M) \cap \mathcal{I}_c^{r,s}(M)$ das imersões estritamente convexas e estruturalmente estáveis. O segundo resultado obtido foi o seguinte teorema:

Teorema B. Seja $r \geq 4$ e M uma superfície suave, orientada e compacta de gênero 0. Então, o conjunto $S_c^r(M)$ é denso em $\mathcal{I}_c^{r,2}(M)$.

O Teorema A é um resultado paralelo ao Teorema principal, obtido por Sotomayor e Gutiérrez em [29], considerando imersões em \mathbb{R}^3 com o produto escalar Euclidiano. Neste caso, o conjunto $S^r(M)$ é definido pelas propriedades b), c), d) e e) acima. O Teorema B é um paralelo parcial do Teorema principal obtido também por Sotomayor e Gutiérrez em [30]. Eles mostram que o conjunto $S^r(M)$ é denso em $\mathcal{I}^{r,2}(M)$, onde M é uma superfície compacta e orientada.

Em geral, uma imersão $\alpha \in \mathcal{I}^r$ tem uma parte Riemanniana e uma parte Lorentziana divididas por curvas regulares que chamaremos de trópico. Na parte Lorentziana de uma superfície temos sempre duas direções luz as quais se colapsam em uma única direção no trópico (Seção 1.4). As direções luz são as direções onde a primeira forma fundamental se anula e as curvas suaves com vector tangente tipo luz são chamadas de *geodésicas nulas* ou *curvas nulas*. Definimos o subconjunto $\tilde{S}^r(M) \subset \mathcal{I}^{r,s}(M)$ tal que $\alpha \in \tilde{S}^r(M)$ satisfaz às seguintes propriedades:

- a) O trópico é constituído de curvas regulares com apenas pontos luz isolados (Seção 1.2).
- b) As singularidades são todas tipo sela, nó, foco ou cúspides (Seção 4.2).
- c) Os ciclos (curvas fechadas regulares por partes) de geodésicas nulas são hiperbólicos (Seção 4.3).
- d) Não há conexões de separatrizes (Seção 4.4).
- e) O conjunto limite de toda geodésica nula está contido no conjunto de singularidades e ciclos de geodésicas nulas (Seção 4.4).

O terceiro resultado principal que obtemos é o seguinte:

Teorema C. Seja $r \geq 5$ e M uma superfície suave, orientada e compacta. Então o conjunto $\tilde{S}^r(M)$ é aberto em $\mathcal{I}^{r,5}$ e todo $\alpha \in \tilde{S}^r(M)$ é C^5 -estruturalmente estável na configuração das geodésicas nulas.

No Capítulo 1, apresentamos as propriedades básicas do espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$ e a geometria local de curvas e superfícies (veja [39], [53], [38]). Na Seção 1.4 definimos a equação das linhas principais, algumas propriedades do trópico, do *LPL* (curva que separa as regiões das direções principais reais) e a definição de *configuração principal*.

Iniciamos o Capítulo 2 com as condições necessárias para que uma imersão seja localmente estável em uma singularidade da configuração principal (Seção 2.1). Na Seção 2.2 descrevemos os quatro possíveis tipos de ciclos principais e obtemos uma expressão para a derivada da aplicação de Poincaré associada. Finalizamos este capítulo com a prova do Teorema A.

No Capítulo 3, iniciamos mostrando que para imersões estritamente convexas as linhas de curvatura principal são globalmente definidas. Na Seção 3.2 obtemos uma expressão para a variação infinitesimal das linhas de curvatura principal passando por um ponto, por meio da deformação da superfície. No Lema do Levantamento se faz uma perturbação adequada da superfície de tal maneira que possa ser utilizada na eliminação de recorrências não triviais ou na criação de uma nova conexão de separatriz. Nas Seções 3.4-3.7 fazemos aproximações sucessivas até chegar à demonstração do Teorema B.

O Capítulo 4 é dedicado à descrição qualitativa do comportamento das geodésicas nulas. Na Seção 4.2 apresentamos as condições necessárias para que uma imersão seja localmente estável em uma singularidade da configuração das geodésicas nulas. Em seguida, na Seção 4.3 obtemos uma expressão para calcular a derivada da transformação de transição em um arco suave de uma geodésica nula e a correspondente derivada da aplicação de Poincaré. Apresento exemplos de configurações de geodésicas em superfícies de revolução. Terminamos o capítulo com a prova do Teorema C.

No Capítulo 5, mostramos exemplos de superfícies nas quais descrevemos a configuração principal global. Iniciamos com as superfícies de revolução, em seguida trabalhamos com os sistemas triplamente ortogonais (veja [37], [49]) e, utilizando o Teorema de Dupin no contexto do espaço $\mathbb{R}^{2,1}$, fazemos uma descrição das linhas de curvatura principal da família quadrática

$$r \frac{x^2}{a^2} + s \frac{y^2}{b^2} + t \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

onde $r, s, t \in \{-1, 1\}$.

PRELIMINARES

Neste capítulo daremos um resumo da geometria local das curvas e superfícies no espaço $\mathbb{R}^{2,1}$. Apresentamos o conceito de “configuração principal” e as propriedades básicas que satisfazem o trópico e o discriminante *LPL*.

1.1 O Espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$

Definição 1.1. *Seja V um espaço vetorial n -dimensional. Uma forma bilinear simétrica $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é*

- i. positivamente (respec. negativamente) definida se, e somente se, para todo $w \in V$ com $w \neq 0$ temos que $\beta(w, w) > 0$ (respec. $\beta(w, w) < 0$).*
- ii. não-degenerada se, e somente se, $\beta(w, z) = 0$ para todo $z \in V$ implica que $w = 0$.*
- iii. indefinida se, e somente se, existem w e z tais que $\beta(w, w) > 0$ e $\beta(z, z) < 0$.*

Considere \mathbb{R}^3 o espaço vetorial com a estrutura vetorial usual. Denotemos por $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ a base usual de \mathbb{R}^3 , onde

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0) \text{ e } e_3 = (0, 0, 1).$$

Utilizamos (x, y, z) para denotar um vetor deste espaço vetorial na base \mathfrak{B} .

Definição 1.2. *O espaço de Lorentz-Minkowski de dimensão 3 ou simplesmente espaço de Minkowski, é o espaço vetorial $\mathbb{R}^{2,1} = (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$, onde o produto escalar \langle, \rangle é dado por*

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3,$$

com $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$.

O espaço vetorial \mathbb{R}^3 com o produto escalar Euclidiano $\langle u, v \rangle_e = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ é denotado por $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle_e)$, para distinguí-lo do espaço

de Minkowski.

Observação 1.3. Em geral, para distinguir operações e objetos em \mathbb{E}^3 dos análogos em $\mathbb{R}^{2,1}$, vamos colocar uma letra e subscrita em todos símbolos induzidos pelo produto escalar euclidiano. Assim, $|\cdot|_e$ é a norma euclidiana, \times_e ou \wedge_e é o produto vetorial euclidiano, etc.

Definição 1.4. Um vetor $v \in \mathbb{R}^{2,1}$ é chamado

- tipo espaço se $\langle v, v \rangle > 0$ ou $v = 0$,
- tipo tempo se $\langle v, v \rangle < 0$,
- tipo luz se $\langle v, v \rangle = 0$ e $v \neq 0$.

Geralmente vamos escrever simplesmente vetor espaço, tempo ou luz. O caráter causal de um vetor é a propriedade de ser espaço, tempo ou luz.

O conjunto de todos os vetores luz de $\mathbb{R}^{2,1}$ é

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{2,1} : x^2 + y^2 - z^2 = 0\} \setminus \{(0, 0, 0)\},$$

chamado de *cone luz*. O conjunto de todos os vetores tipo tempo é

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{2,1} : x^2 + y^2 - z^2 < 0\}.$$

Cada um dos conjuntos C e T tem duas componentes conexas, veja Figura 1.1.

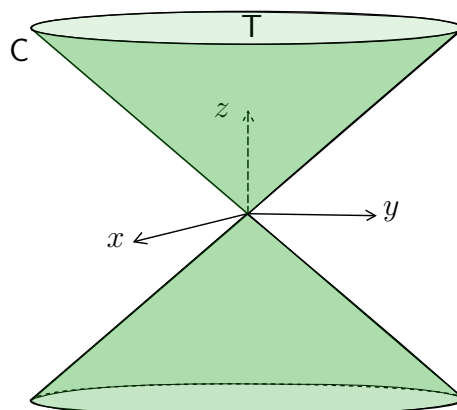


Figura 1.1: Espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$.

Dizemos que dois vetores u e v são ortogonais se $\langle u, v \rangle = 0$. Um vetor v é normal ao plano P se este é ortogonal a todo vetor em P .

Definição 1.5. Um plano é chamado tipo espaço (respec. tipo tempo ou tipo luz) ou simplesmente plano espaço (respec. tempo ou luz), se o vetor normal é tempo (respec. espaço ou luz).

Observação 1.6. 1. Um plano tipo espaço é um subespaço no qual o produto escalar é positivamente definido, assim todo vetor é tipo espaço.

2. Um plano tipo tempo é um subespaço com o produto escalar indefinido, isto é, há vetores espaço, tempo e duas direções luz.

3. Um plano tipo luz é um subespaço com produto escalar degenerado. O vetor normal está contido no plano. Todos os vetores são espaço exceto a direção do vetor normal a qual é luz.

Definição 1.7. Dado $v \in \mathbb{R}^{2,1}$ chamamos norma ou módulo o número $|v| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$. Um vetor é chamado unitário se a sua norma for igual a 1.

Definição 1.8. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^{2,1}$, chamamos produto vetorial de u e v o único vetor denotado por $u \times v$ (ou $u \wedge v$) que satisfaz

$$\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$$

para todo $w \in \mathbb{R}^{2,1}$, onde $\det(u, v, w)$ é o determinante da matriz dos vetores u, v e w colocados como colunas.

Tomando w como cada um dos vetores da base \mathfrak{B} , temos

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

A bilinearidade e não-degeneracidade do produto escalar assegura a existência e unicidade deste vetor. O produto vetorial satisfaz as seguintes propriedades:

- $u \times v = -v \times u$.
- $u \times v$ é ortogonal a u e v .
- $u \times v = 0$ se, e somente se, u e v são proporcionais.
- O vetor $u \times v$ é a reflexão de $u \times_e v$ no plano $\{z = 0\}$.
- $|u \times v| = |u \times_e v|$ e $|u \times v|_e = |u \times_e v|_e$.

Dizemos que um vetor $v = (v_1, v_2, v_3)$ é horizontal (respec. vertical) se $v_3 = 0$ (respec. $v_2 = v_1 = 0$). Um plano é horizontal (respec. vertical) se o vetor

normal é vertical (respec. horizontal).

Proposição 1.9. (veja [53]) No espaço $\mathbb{R}^{2,1}$ se vale que :

- a) $u \times v \neq 0$ está no plano gerado por u e v se, e somente se, o plano é luz.
- b) $(a \times b) \times c = \langle b, c \rangle a - \langle a, c \rangle b$.
- c) $a \times (b \times c) = \langle a, b \rangle c - \langle a, c \rangle b$.
- d) $\langle u \times v, u \times v \rangle = \langle u, v \rangle^2 - \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$.
- e) $u \times v$ é luz se, e somente se, $u \times_e v$ é luz.
- f) $|v| = |v|_e |\cos(2\theta)|^{\frac{1}{2}}$, onde θ é o ângulo entre v e o plano $\{z = 0\}$.
- g) Para v e w linearmente independentes $\langle v \times w, v \times w \rangle = \langle v \times_e w, v \times_e w \rangle_e \cos(2\theta)$, onde θ é o ângulo entre $v \times w$ (ou $v \times_e w$) e o plano $\{z = 0\}$.
- h) $|v| \leq |v|_e$ e assim $|u \times v| \leq |u \times_e v|_e$.

Demonstração. a), b), c), d) e e) são de verificação imediata. Em f), sejam $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (v_1, v_2, -v_3)$, como $|v|_e = |w|_e$ e $\langle v, v \rangle = \langle v, w \rangle_e$ obtemos que $\langle v, v \rangle = |v|_e |w|_e \cos(2\theta) = |v|_e |v|_e \cos(2\theta) = \langle v, v \rangle_e \cos(2\theta)$ onde 2θ é o menor ângulo formado por v e w . Portanto, $|v| = |v|_e |\cos(2\theta)|^{\frac{1}{2}}$. g) e h) seguem de f). \square

1.2 Teoria Local das Curvas

Chamamos *curva diferenciável* à aplicação $c : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$, onde I é um intervalo aberto e c uma aplicação diferenciável. Dizemos que a curva diferenciável é regular (ou suave) se $c'(t) \neq 0$.

Definição 1.10. Seja $c : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ uma curva regular. Dizemos que c é tipo espaço (respec. tempo, luz) em t se o vetor $c'(t)$ é tipo espaço (respec. tempo, luz). A curva é tipo espaço (respec. tempo, luz) se o for para cada $t \in I$.

Em geral, uma curva regular pode ou não ter um só caráter causal. Observe que a propriedade de ser tipo espaço ou tempo são abertas, isto é, se $c'(t_0)$ é espaço (respec. tempo) existe $\delta > 0$ tal que para $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $c'(t)$ é espaço (respec. tempo).

Exemplo 1.11. Considere as seguintes curvas e seus respectivos domínios.

1. $c(t) = p_0 + tv$ e $I = \mathbb{R}$. A curva c tem o caráter causal de v .

2. $c(t) = (\cos(t), 0, \sin(t))$ e $I = [0, 2\pi]$. A curva c é tipo espaço para $t \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$, tipo tempo para $t \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup (\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}) \cup (\frac{7\pi}{4}, 2\pi]$ e tipo luz nos pontos $t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.
3. A hélice $c(t) = (r \cos(t), r \sin(t), kt)$, $k \neq 0$. A imagem da curva c está incluída no cilindro $x^2 + y^2 = r^2$. Se $r^2 > k^2$ (respec. $r^2 < k^2$, $r^2 = k^2$), c é tipo espaço (respec. tempo, luz).

Observação 1.12. (veja [39]) Não existem curvas fechadas regulares tipo tempo ou luz.

De fato, se $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é uma curva regular fechada, existe t_0 onde $z(t)$ assume um máximo, e então $z'(t_0) = 0$. Logo $\langle c'(t_0), c'(t_0) \rangle = x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2 > 0$, ou seja, $c'(t_0)$ é tipo espaço em t_0 .

Proposição 1.13. *Genericamente uma curva regular tem apenas pontos luz isolados.*

Demonstração. Considere a curva regular

$$c(t) = \left(a_1 t + \frac{a_2}{2} t^2 + \frac{a_3}{6} t^3 + O_1(t^4), b_1 t + \frac{b_2}{2} t^2 + \frac{b_3}{6} t^3 + O_2(t^4), c_1 t + \frac{c_2}{2} t^2 + \frac{c_3}{6} t^3 + O_3(t^4) \right),$$

tal que $c(0)$ é um ponto luz, ie $c'(0)$ é luz. Temos que,

$$\begin{aligned} \langle c'(t), c'(t) \rangle = & a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 + 2(a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2)t + (a_1 a_3 + a_2^2 + b_1 b_3 + b_2^2 - c_1 c_3 \\ & - c_2^2)t^2 + (a_2 a_3 + b_2 b_3 - c_2 c_3)t^3 + O(t^4). \end{aligned}$$

Assim, $\langle c'(0), c'(0) \rangle = a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 = 0$. Para que $c(0)$ seja um ponto luz isolado é suficiente que $a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2 \neq 0$. Portanto, genericamente os pontos luz de uma curva são isolados. \square

Triedro de Frenet para curvas tipo espaço ou tempo

Dizemos que c está parametrizada pelo comprimento de arco ou simplesmente parametrizada pelo arco, se o vetor tangente é sempre unitário.

Lema 1.14. *Dada uma curva regular $c : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ tipo espaço ou tempo, existe uma mudança de parâmetro s tal que $|c'(s)| = 1$.*

Demonstração. Seja $t_0 \in I$. Definimos a aplicação comprimento de arco $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |c'(u)| du.$$

Como $s'(t) = |c'(t)| > 0$, $s(I) = J$ um intervalo aberto e portanto $s : I \rightarrow J$ é um difeomorfismo. Seja $\phi = s^{-1}$ a inversa de s e $\tilde{c} = c \circ \phi : J \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ uma reparametrização de c . Assim, $|\tilde{c}'(s)| = 1$. \square

Dados dois vetores e_1 e e_2 , para os quais $\langle e_i, e_i \rangle = \pm 1$ e $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$, um terceiro vetor é definido por $e_3 = e_1 \wedge e_2$, e estes três vetores formam uma base ortonormal. Se definimos $(\bar{\epsilon}, \bar{\eta}) \in \{(1, -1), (1, 1), (-1, 1)\}$ por $\langle e_1, e_1 \rangle = \bar{\epsilon}$ e $\langle e_2, e_2 \rangle = \bar{\eta}$, então disto segue que $\langle e_3, e_3 \rangle = -\bar{\epsilon}\bar{\eta}$. Assim, cada vetor $v \in \mathbb{R}^3$ pode ser decomposto de forma única em três componentes

$$v = \bar{\epsilon}\langle v, e_1 \rangle e_1 + \bar{\eta}\langle v, e_2 \rangle e_2 - \bar{\epsilon}\bar{\eta}\langle v, e_3 \rangle e_3.$$

Proposição 1.15. (veja [38]) *Seja $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva tipo espaço ou tempo parametrizada pelo comprimento de arco s e tal que $\langle c''(s), c''(s) \rangle \neq 0$. Então esta curva induz um **triedro de Frenet** $e_1 = t(s) = c'(s)$, $e_2 = n(s) = \frac{c''(s)}{\sqrt{|\langle c''(s), c''(s) \rangle|}}$, $e_3 = b(s) = t(s) \wedge n(s)$, para o qual as **equações de Frenet** são ($\bar{\eta}$ e $\bar{\epsilon}$ definidos como acima)*

$$\begin{aligned} t'(s) &= \bar{\eta}k(s)n(s), \\ n'(s) &= -\bar{\epsilon}k(s)t(s) - \bar{\epsilon}\bar{\eta}\tau(s)b(s), \\ b'(s) &= -\bar{\eta}\tau(s)n(s). \end{aligned}$$

As funções definidas pela relação $k(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle$ e $\tau(s) = \langle n'(s), b(s) \rangle$, são chamadas **curvatura** e **torção** da curva c , respectivamente.

Proposição 1.16. (veja [39]) *Seja $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva tipo espaço ou tempo não necessariamente parametrizada pelo comprimento do arco tal que $\langle c''(t), c''(t) \rangle \neq 0$. Então, a curvatura $k(t)$ e torção $\tau(t)$ são dadas pelas expressões*

$$\begin{aligned} k(t) &= \bar{\eta} \frac{|c'(t) \wedge c''(t)|}{|c'(t)|^3}, \\ \tau(t) &= \frac{\det(c'(t), c''(t), c'''(t))}{|c'(t) \wedge c''(t)|^2}. \end{aligned}$$

Triedro de Frenet para curvas tipo luz

Dizemos que uma curva c tipo luz é parametrizada pelo pseudo-arco se a segunda derivada de c for sempre um vetor unitário.

Lema 1.17. (veja [39]) *Dada uma curva $c : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ tipo luz com $c''(t)$ não nulo, existe uma reparametrização $\tilde{c}(s)$ tal que $|\tilde{c}''(s)| = 1$.*

Demonstração. Seja $\tilde{c}(s) = c(\varphi(s))$. Então

$$\tilde{c}''(s) = c''(\varphi(s))\varphi'(s)^2 + c'(\varphi(s))\varphi''(s)$$

e $\langle \tilde{c}''(s), \tilde{c}''(s) \rangle = \varphi'(s)^4 |c''(\varphi(s))|^2$. Tomando $\varphi'(s) = \frac{1}{\sqrt{|c''(\varphi(s))|}}$, temos que $|\tilde{c}''(s)| = 1$. \square

Para uma curva c tipo luz parametrizada pelo pseudo-arco, o vetor tangente é $t(s) = c'(s)$. Definimos o vetor normal $n(s) = T'(s) = c''(s)$, o qual é um vetor unitário tipo espaço, e o vetor binormal $b(s)$ sendo o único vetor luz tal que $\langle n(s), b(s) \rangle = 0$ e $\langle t(s), b(s) \rangle = -1$. O triedro $\{t, n, b\}$ é chamado de base nula de $\mathbb{R}^{2,1}$.

Lema 1.18. (veja [39]) *Seja c uma curva tipo luz parametrizada pelo pseudo-arco. Então a curva induz um triedro de Frenet $\{t, n, b\}$, para o qual as equações de Frenet são*

$$\begin{aligned} t'(s) &= n(s), \\ n'(s) &= \tau(s)t(s) + b(s), \\ b'(s) &= \tau(s)n(s), \end{aligned}$$

onde $\tau(s) = -\langle n'(s), b(s) \rangle$ é chamada de pseudo-torção.

1.3 Teoria Local das Superfícies Imersas em $\mathbb{R}^{2,1}$

Considere uma superfície suave e orientada (no sentido usual) M . Uma imersão $\alpha : M \rightarrow \mathbb{E}^3$ de classe C^r ($r \geq 3$), pode ser vista também como uma imersão $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$. No primeiro caso, temos todas as ferramentas que já conhecemos da geometria diferencial (veja [10],[34]) como a primeira e segunda formas fundamentais I_e e II_e , o campo vetorial normal unitário N_e , as curvaturas Gaussiana e média K_e e H_e , etc (a notação segue da Observação 1.3). Vamos expor estas ferramentas para o segundo caso, veja [53].

1.3.1 Primeira e segunda formas fundamentais

Seja $(u, v) : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma carta local, com U aberto, e a aplicação inversa $X = (u, v)^{-1}$, chamada parametrização. Denotemos por $\alpha(u, v) = (\alpha \circ X)(u, v)$ a parametrização local da imersão α . Tomemos $p \in M$, o produto escalar induzido por α em $T_p M$ é definido por

$$\langle u_1, v_1 \rangle := \langle d\alpha(p)u_1, d\alpha(p)v_1 \rangle \quad \text{onde } u_1, v_1 \in T_p M.$$

Em p definimos a forma quadrática $I : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $I(v) = \langle v, v \rangle$. Seja $c : \mathbb{R} \rightarrow M$, $c(t) = (u(t), v(t))$ uma curva parametrizada, então $x(t) = (\alpha \circ c)(t)$ é uma curva e $x' = \alpha_u u' + \alpha_v v'$ é um vetor tangente em $T_p M$, onde $p = c(0)$. Portanto,

$$\langle x', x' \rangle = \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle (u')^2 + 2\langle \alpha_u, \alpha_v \rangle u'v' + \langle \alpha_v, \alpha_v \rangle (v')^2.$$

Definição 1.19. *A expressão*

$$I = \langle d\alpha, d\alpha \rangle = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

onde $E = \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle$, $F = \langle \alpha_u, \alpha_v \rangle$ e $G = \langle \alpha_v, \alpha_v \rangle$ são de classe C^{r-1} , é chamada de **primeira forma fundamental** de α .

Quando $\Delta = \det(I) = EG - F^2$ é positivo (respec. negativo, zero), a imersão é tipo espaço (respec. tempo, luz). Isto é equivalente a dizer que o plano tangente é tipo espaço (respec. tempo, luz). A parte tipo espaço (respec. tempo, luz) também é chamada de **Riemanniana** (respec. **Lorentziana**, **trópico**). O produto escalar induzido é positivo (respec. indefinido, degenerado).

Sendo $\alpha_u, \alpha_v \in T_p M$, então o vetor $\alpha_u \times \alpha_v$ é normal à M . Temos que $\langle \alpha_u \times \alpha_v, \alpha_u \times \alpha_v \rangle = F^2 - EG = -\det(I)$ (observe que o sinal é diferente do caso euclidiano). Assim, na parte Riemanniana ou Lorentziana de α , $|\alpha_u \times \alpha_v| = |\det(I)|^{\frac{1}{2}} \neq 0$. Definimos então o **campo vetorial normal unitário**

$$N = \frac{\alpha_u \times \alpha_v}{|\alpha_u \times \alpha_v|},$$

o qual está bem definido e é invariante por mudanças de coordenadas. Pela definição de produto vetorial

$$N = \frac{\det(I_e)^{\frac{1}{2}}}{|\det(I)|^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} N_e. \quad (1.1)$$

Da Proposição 1.9 e), temos

$$|\det(I)| = |\cos(2\theta)| \det(I_e), \quad (1.2)$$

onde θ é o ângulo entre N (ou N_e) e o plano $\{z = 0\}$. Portanto,

$$|N|_e \geq |N_e|_e,$$

valendo a igualdade se, e somente se, N (ou N_e) é vertical ou horizontal, veja Figura 1.2.

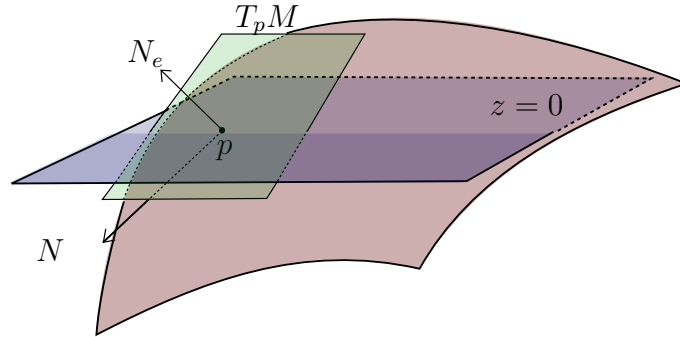


Figura 1.2: Com a norma euclidiana, o comprimento de N_e é menor que o comprimento de N , isto é, $|N_e|_e \leq |N|_e$.

O conjunto unitário em \mathbb{E}^3 é a superfície $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Em $\mathbb{R}^{2,1}$, o conjunto unitário são as superfícies quadráticas $S^{2,1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ (hiperbolóide de uma folha) e $H^2 = H_+^2 \cup H_-^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$ (hiperbolóide de duas folhas), veja Figura 1.3. Chamamos de “esfera” unitária o conjunto unitário de $\mathbb{R}^{2,1}$ e vamos denotar por S_m^2 . Note que S_m^2 não é uma superfície compacta. Chamamos de “esfera” de raio r o conjunto $\{X \in \mathbb{R}^{2,1} : \langle X, X \rangle = \pm r^2\}$ e vamos denotar por $S_m^2(r)$.

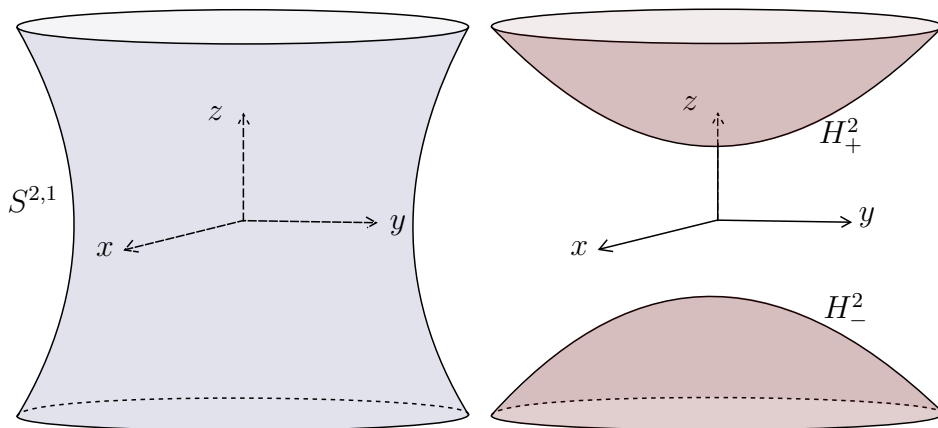


Figura 1.3: O conjunto de vetores de norma 1 em $\mathbb{R}^{2,1}$ é $S^{2,1} \cup H_+^2 \cup H_-^2$

O campo vetorial unitário normal define uma aplicação de Gauss $N : M \rightarrow H_+^2$ ou $N : M \rightarrow H_-^2$ (dependendo da escolha da orientação) na

parte Riemanniana e a aplicação de Gauss $N : M \rightarrow S^{2,1}$ na parte Lorentziana.

Sendo que $\langle N, N \rangle = \pm 1$, então $\langle N, dN \rangle = 0$. Assim, $dN = N_u du + N_v dv$ pode ser visto como um campo vetorial sobre M .

Definição 1.20. *A segunda forma fundamental é*

$$II = -\langle d\alpha, dN \rangle = edu^2 + 2fdudv + gdv^2,$$

onde os coeficientes são de classe C^{r-2}

$$\begin{aligned} e &= -\langle \alpha_u, N_u \rangle = \langle \alpha_{uu}, N \rangle, \\ f &= -\langle \alpha_u, N_v \rangle = -\langle \alpha_v, N_u \rangle = \langle \alpha_{uv}, N \rangle, \\ g &= -\langle \alpha_v, N_v \rangle = \langle \alpha_{vv}, N \rangle. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Observação 1.21. Da equação (1.1), temos que

$$|\det(I)|^{\frac{1}{2}} II = \det(I_e)^{\frac{1}{2}} II_e,$$

assim, II tem o mesmo sinal de II_e .

1.3.2 Equações de compatibilidade

Vamos escrever N_u e N_v na base $\{\alpha_u, \alpha_v\}$ de $T_p M$. Para encontrar os coeficientes a, b, c, d em termos dos quais

$$\begin{aligned} N_u &= a\alpha_u + b\alpha_v \\ N_v &= c\alpha_u + d\alpha_v, \end{aligned}$$

fazemos o produto escalar de cada equação de acima com α_u e α_v . Obtemos

$$\begin{aligned} -e = \langle \alpha_u, N_u \rangle &= aE + bF & -f = \langle \alpha_v, N_u \rangle &= aF + bG \\ -f = \langle \alpha_u, N_v \rangle &= cE + dF & -g = \langle \alpha_v, N_v \rangle &= cF + dG. \end{aligned}$$

Disto, temos

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

assim,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

As equações de Weingarten são

$$\begin{aligned} N_u &= \left(\frac{Ff - Ge}{EG - F^2} \right) \alpha_u + \left(\frac{Fe - Ef}{EG - F^2} \right) \alpha_v, \\ N_v &= \left(\frac{Fg - Gf}{EG - F^2} \right) \alpha_u + \left(\frac{Ff - Eg}{EG - F^2} \right) \alpha_v. \end{aligned} \quad (1.4)$$

A curvatura Gaussiana e a curvatura Média são definidas por

$$\begin{aligned} K &= \det(-dN) = \frac{\det(II)}{\det(I)} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \\ H &= \frac{1}{2} \text{tr}(-dN) = \frac{1}{2} \text{tr}_I II = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2(EG - F^2)}. \end{aligned}$$

Da Observação 1.21, temos

$$\pm \det(I)^2 K = \det(I_e)^2 K_e, \quad (1.5)$$

onde \pm é o sinal de $\det(I)$, e utilizando (1.2) obtemos

$$K \cos^2(2\theta) = \pm K_e,$$

onde θ é o ângulo formado por N (ou N_e) com o plano horizontal. Em particular, temos que

$$|K| \geq |K_e|.$$

Escrevemos α_{uu} , α_{uv} e α_{vv} na base $\{\alpha_u, \alpha_v, N\}$,

$$\begin{aligned} \alpha_{uu} &= a_{11}\alpha_u + a_{12}\alpha_v + a_{13}N, \\ \alpha_{uv} &= b_{11}\alpha_u + b_{12}\alpha_v + b_{13}N, \\ \alpha_{vv} &= c_{11}\alpha_u + c_{12}\alpha_v + c_{13}N. \end{aligned}$$

Fazendo o produto escalar com cada elemento da base, obtemos as equações de Gauss:

$$\begin{aligned} \alpha_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \alpha_u + \Gamma_{11}^2 \alpha_v + \bar{\eta} e N, \\ \alpha_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \alpha_u + \Gamma_{12}^2 \alpha_v + \bar{\eta} f N, \\ \alpha_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \alpha_u + \Gamma_{22}^2 \alpha_v + \bar{\eta} g N, \end{aligned} \quad (1.6)$$

onde $\langle N, N \rangle = \bar{\eta}$ e $\Gamma_{j,k}^i$ são os **símbolos de Christoffel** dados por

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u + FE_v - 2FF_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{EE_v + FE_u - 2EF_u}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - 2FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= -\frac{FE_v - 2EG_u}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{FG_v + GG_u - 2GF_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v + FG_u - 2FF_v}{2(EG - F^2)}.\end{aligned}$$

Derivando com relação a u e v cada equação de (1.6), obtemos expressões para α_{uvv} , α_{uvu} , α_{uvu} e α_{vuu} , as quais podemos escrever em combinação linear da base $\{\alpha_u, \alpha_v, N\}$ utilizando as equações de Gauss (1.6) e as equações de Weingarten (1.4). Como $\alpha_{uvv} = \alpha_{vuv}$ e $\alpha_{uvu} = \alpha_{uvu}$, o coeficiente de N em cada equação tem que ser nulo. Temos assim, as **equações de Codazzi-Mainardi**

$$\begin{aligned}e_v - f_u &= \Gamma_{12}^1 e + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \\ f_v - g_u &= \Gamma_{22}^1 e + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2,\end{aligned}\tag{1.7}$$

as quais em uma carta principal (veja Definição 1.38) são

$$\begin{aligned}e_v &= \frac{E_v}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right), \\ g_u &= \frac{G_u}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right).\end{aligned}\tag{1.8}$$

As equações de Gauss e Codazzi-Mainardi são conhecidas como **equações de compatibilidade**.

Do coeficiente de α_u (ou α_v) em $\alpha_{uvv} - \alpha_{vuv} = 0$, obtemos a **equação de egregium**

$$K(I) = \bar{\eta}K(I, II),$$

onde $K(I)$ é a curvatura intrínseca induzida pelo produto escalar, $K(I, II)$ é a curvatura Gaussiana e $\langle N, N \rangle = \bar{\eta} = -\text{sinal}(\det(I))$. Observe-se que $\bar{\eta} = -1$ na parte Riemanniana e $\bar{\eta} = 1$ na parte Lorentziana.

De $K_e(I_e) = K_e(I_e, II_e)$ e da equação (1.5), temos

$$\text{sinal}(K(I, II)) = -\bar{\eta}\text{sinal}(K_e(I_e, II_e)) = -\bar{\eta}\text{sinal}(K_e(I_e)).$$

Assim,

$$\text{sinal}(K(I)) = -\text{sinal}(K_e(I_e)).$$

A primeira e segunda formas fundamentais determinam a forma de qualquer superfície espaço ou tempo em $\mathbb{R}^{2,1}$. Aqui, $Cod(I, II)$ significa que I e II satisfazem as equações de Codazzi-Mainardi.

Teorema 1.22. Teorema Fundamental da Superfícies em $\mathbb{R}^{2,1}$. *Suponha que*

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

e

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

são formas quadráticas suaves sobre um conjunto aberto V do plano (u, v) com $EG - F^2 \neq 0$, $Cod(I, II)$ e $\frac{\det(II)}{\det(I)} = -\text{sinal}(\det(I))K(I)$. Então, em alguma vizinhança de qualquer ponto de V existe uma parametrização $X : U \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ descrevendo uma superfície com primeira forma fundamental I e segunda forma fundamental II . Além disso, X é unicamente determinada sobre U módulo isometrias que preservam a orientação em $\mathbb{R}^{2,1}$.

Demonstração. Veja [53], pag. 158. □

1.3.3 Triedro de Darboux

Dada uma imersão α de M de classe C^r , considere a curva c tipo espaço ou tempo parametrizada pelo comprimento do arco s na parte Riemanniana ou Lorentziana de M . Definimos $t(s) = d\alpha(c(s))c'(s)$, $N(s) = N(c(s))$ o normal de α , $V(s) = N(s) \wedge t(s)$. Assim, os três vetores $\{t, V = N \wedge t, N\}$ formam uma base ortonormal. Sejam $(\bar{\epsilon}, \bar{\eta}) \in \{(1, -1), (1, 1), (-1, 1)\}$, com $\langle t, t \rangle = \bar{\epsilon}$ e $\langle N, N \rangle = \bar{\eta}$, e disto segue que $\langle V, V \rangle = -\bar{\epsilon}\bar{\eta}$.

Proposição 1.23. *Sejam α uma imersão de M de classe C^r e $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva tipo espaço ou tempo parametrizada pelo comprimento de arco s na parte Riemanniana ou Lorentziana de M . Então a curva c induz um **triedro de Darboux** $\{t(s), V(s), N(s)\}$ para α , no qual as equações são ($\bar{\epsilon}$ e $\bar{\eta}$ definidos como acima)*

$$t'(s) = k_g(s)V(s) + \bar{\epsilon}\bar{\eta}k_n(s)N(s),$$

$$V'(s) = \bar{\eta}k_g(s)t(s) + \tau_g(s)N(s),$$

$$N'(s) = -k_n(s)t(s) + \bar{\epsilon}\tau_g(s)V(s).$$

As funções $k_g(s) = -\bar{\epsilon}\bar{\eta}\langle t'(s), V(s) \rangle$, $k_n(s) = \bar{\epsilon}\langle t'(s), N(s) \rangle$ e $\tau_g(s) = \bar{\eta}\langle V'(s), N(s) \rangle$ são: a curvatura geodésica, a curvatura normal e torção geodésica da curva c , respectivamente.

1.4 Configuração Principal

Chamamos de $\mathcal{I}^r = \mathcal{I}^r(M, \mathbb{R}^{2,1})$ o conjunto de imersões de classe C^r ($r \geq 4$) de M em $\mathbb{R}^{2,1}$, sendo M uma superfície suave, compacta e orientável. Quando \mathcal{I}^r for dotado da topologia C^s (topologia usual para uma aplicação de classe r de uma superfície no espaço vetorial \mathbb{R}^3), $s \leq r$, é denotado por $\mathcal{I}^{r,s}$.

Em geral, para $\alpha \in \mathcal{I}^r$ temos uma parte tipo espaço (**Riemanniana**) onde $\det(I) > 0$, uma parte tipo tempo (**Lorentziana**) onde $\det(I) < 0$ e uma parte tipo luz (**trópico**) onde $\det(I) = EG - F^2 = 0$.

1.4.1 Direções principais

Na parte Riemanniana ou Lorentziana de α , o operador linear $-dN : T_pM \rightarrow T_pM$ aplica vetores $\alpha_u du + \alpha_v dv$ em $-N_u du - N_v dv$. A matriz de $-dN$ na base $\{\alpha_u, \alpha_v\}$ é

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ Ef - Fe & Eg - Ff \end{pmatrix}.$$

Definimos as **curvaturas principais** k_1 e k_2 como os valores próprios do operador linear $-dN$. Assim, as soluções da equação

$$\det(-dN - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \right| = 0, \quad (1.9)$$

são $\lambda_1 = H - \sqrt{H^2 - K} = k_1$ e $\lambda_2 = H + \sqrt{H^2 - K} = k_2$. Temos que

$$K = k_1 k_2 \quad e \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2},$$

e portanto k_1 e k_2 satisfazem a equação

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0.$$

Quando k_1 e k_2 forem reais, as **direções principais** (ou direções próprias) são determinadas pelos vetores próprios não nulos $\alpha_u du + \alpha_v dv$ em T_pM . Temos então que

$$-dN \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix},$$

assim, du e dv satisfazem ao sistema

$$\begin{aligned}\frac{Ge - Ff}{EG - F^2} du + \frac{Gf - Fg}{EG - F^2} dv &= \lambda du, \\ \frac{Ef - Fe}{EG - F^2} du + \frac{Eg - Ff}{EG - F^2} dv &= \lambda dv.\end{aligned}$$

Eliminando λ , temos

$$(Fg - Gf) dv^2 + (Eg - Ge) dvdu + (Ef - Fe) du^2 = 0, \quad (1.10)$$

ou equivalentemente

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dvdu & du^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0.$$

A equação (1.10) não está definida no trópico, mas é homogênea em e, f, g . Podemos multiplicar estes coeficientes por $|\alpha_u \times \alpha_v|$ e substituir por $\bar{e} = \langle \alpha_{uu}, \alpha_u \times \alpha_v \rangle$, $\bar{f} = \langle \alpha_{uv}, \alpha_u \times \alpha_v \rangle$ e $\bar{g} = \langle \alpha_{vv}, \alpha_u \times \alpha_v \rangle$. Assim

$$(F\bar{g} - G\bar{f}) dv^2 + (E\bar{g} - G\bar{e}) dvdu + (E\bar{f} - F\bar{e}) du^2 = 0,$$

e fazendo $L_1 = F\bar{g} - G\bar{f}$, $M_1 = E\bar{g} - G\bar{e}$ e $N_1 = E\bar{f} - F\bar{e}$, obtemos a **equação de direções principais**

$$L_1 dv^2 + M_1 dvdu + N_1 du^2 = 0. \quad (1.11)$$

Fora do trópico, as soluções das equações (1.10) e (1.11) são iguais.

Observação 1.24. Para reduzir notação, quando não for relevante na análise, vamos considerar $e = \bar{e}$, $f = \bar{f}$ e $g = \bar{g}$. Assim, e, f, g são estendidas para o trópico.

Definição 1.25. Um ponto $p \in M$ é **umbílico** de α se $II = kI$ para alguma constante k , ou equivalentemente, se na carta (u, v) e $p = (u_0, v_0)$ fora do trópico satisfaz $L_1(u_0, v_0) = M_1(u_0, v_0) = N_1(u_0, v_0) = 0$. O ponto umbílico é chamado tipo espaço (respec. tempo) se está na parte Riemanniana (respec. Lorentziana).

Observe que $\delta = M_1^2 - 4L_1N_1$ é o discriminante da equação de direções principais (1.11). Se for positivo, temos duas direções principais. Se for zero, na parte Riemanniana caracteriza os pontos umbílicos, entretanto na parte Lorentziana podemos ter pontos onde é zero mas não são pontos umbílicos.

Proposição 1.26. Dada $\alpha \in \mathcal{I}^r$, temos que:

- a) na parte Riemanniana $\delta = M_1^2 - 4L_1N_1 \geq 0$, e zero somente nos pontos umbílicos. Assim, as direções principais são sempre definidas.

b) na parte Lorentziana $\delta = M_1^2 - 4L_1N_1$ pode ter qualquer sinal. Assim, podemos ter regiões onde as direções principais não estão definidas. Além disso, temos pontos onde $\delta = 0$ sem ser necessariamente pontos umbílicos.

c) no trópico $\delta = M_1^2 - 4L_1N_1 \geq 0$. Assim, as direções principais estão sempre definidas.

Demonstração. a) No ponto p , podemos fazer uma mudança de coordenadas afim no plano (u, v) tal que $E = G = 1$ e $F = 0$. Assim, $\delta = (g - e)^2 + 4f^2 \geq 0$, e é zero somente se $e = g$ e $f = 0$. No último caso, $L_1 = M_1 = N_1 = 0$ e portanto é um ponto umbílico.

b) Podemos tomar as duas direções luz do plano tangente como coordenadas da carta (u, v) . Temos então $E = G = 0$ e $F \neq 0$. Assim, $\delta = 4F^2eg$ e portanto, o sinal de δ depende de e e g . Além disso, se $e = 0$ e $g \neq 0$ (ou $e \neq 0$ e $g = 0$) temos que $\delta = 0$, mas $N_1 = -Fg \neq 0$ (ou $L_1 = Fe \neq 0$) e então p não é um ponto umbílico.

c) Tomemos uma carta (u, v) tal que o eixo v seja luz. Então, $E \neq 0$ e $F = G = 0$. Assim, $\delta = E^2g^2 \geq 0$.

□

Como consequência imediata da Proposição 1.26 e da igualdade

$$\frac{M_1^2 - 4L_1N_1}{|\alpha_u \times \alpha_v|^2} = 4(EG - F^2)^2(H^2 - K),$$

temos a relação entre a existência das linhas principais e os valores próprios do operador $-dN$ na parte Riemanniana ou Lorentziana de uma imersão.

Corolário 1.27. *Dada uma imersão $\alpha \in \mathcal{T}$, temos que:*

1. na parte Riemanniana $H^2 - K \geq 0$. Por conseguinte os valores próprios k_1 e k_2 do operador $-dN$ são sempre reais. Além disso, $H^2 - K = 0$ (equivalentemente $k_1 = k_2$) caracteriza os pontos umbílicos (como em uma superfície imersa em \mathbb{E}^3).
2. na parte Lorentziana $H^2 - K$ pode ter qualquer sinal. Assim, os valores próprios k_1 e k_2 do operador $-dN$ não são sempre reais. Além disso, temos pontos onde $H^2 - K = 0$ ($k_1 = k_2$) e não são pontos umbílicos.

Observação 1.28. 1. Na parte Riemanniana ou Lorentziana, as direções principais são ortogonais.

2. Na parte Riemanniana temos somente vetores tipo espaço, portanto as direções principais são sempre espaço.
3. Na parte Lorentziana, se as direções principais existirem, temos sempre uma espaço e outra tempo.

1.4.2 Propriedades do trópico

Considere uma imersão α . O trópico é o conjunto de pontos tipo luz, ou seja, o conjunto $\Delta^{-1}(0)$ onde $\Delta = EG - F^2$. Genericamente o trópico é uma curva, a qual denotamos por $\hat{\gamma}$. Se 0 é valor regular para Δ então $\hat{\gamma}$ é uma curva regular tipo espaço ou luz.

Lema 1.29. *Considere $\alpha \in \mathcal{I}^r$ tal que o trópico seja uma curva regular $\hat{\gamma}$. Suponha que $\hat{\gamma}(0) = p$ para $p \in M$. Temos que, $\delta(p) = 0$ se, e somente se, $\hat{\gamma}'(0)$ é luz. Consequentemente, $\delta(p) > 0$ se, e somente se, $\hat{\gamma}'(0)$ é espaço.*

Demonstração. Considere a carta local (u, v) tal que

$$\alpha(u, v) = (u, v, h(u, v))$$

onde, $h(u, v) = u + a_{20}u^2 + a_{11}uv + \frac{1}{2}a_{02}v^2 + \frac{1}{3!}(a_{30}u^3 + 3a_{21}u^2v + 3a_{12}uv^2 + a_{03}v^3) + O^4(u, v)$ com $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $a_{11} \neq 0$. Nesta carta se cumpre que α_u é tipo luz.

Temos que $\Delta = -2a_{11}v - 2a_{20}u + O^2(u, v)$, então na carta local o trópico é a curva $v = -\frac{a_{20}}{a_{11}}u + O^2(u)$. Assim, para α o trópico é a curva $\hat{\gamma}(u) = (u, -\frac{a_{20}}{a_{11}}u + O^2(u), u + O^2(u))$ a qual é luz se, e somente se, $a_{20} = 0$. Também temos que $\delta(u, v) = a_{20} + O(u, v)$ e $\delta(0, 0) = 0$ se, e somente se, $a_{20} = 0$. Como $\delta(u, v) \geq 0$ no trópico, temos as conclusões do lema. \square

Observação 1.30. Se $\hat{\gamma}$ é regular e $\hat{\gamma}'(0)$ é luz se verifica facilmente que $K_e(p) = -\frac{1}{4}a_{11}^2 < 0$.

Lema 1.31. *Considere $\alpha \in \mathcal{I}^r$ tal que o trópico seja uma curva regular $\hat{\gamma}$. Suponha que $\hat{\gamma}(0) = p$ para $p \in M$ com $\hat{\gamma}'(0)$ espaço. Então as duas direções principais em p são $\hat{\gamma}'(0)$ e a única direção luz em T_pM , as quais são ortogonais.*

Demonstração. Na carta utilizada na demonstração do Lema 1.29, o trópico é localmente a curva $v = -\frac{a_{20}}{a_{11}}u + O^2(u)$ com $a_{20} \neq 0$ para que não seja tipo luz em $(0, 0)$ e a equação de linhas de principais no ponto $(0, 0)$ é

$$-a_{11}dv^2 - a_{20}dudv = 0.$$

Assim, as direções principais são $du = 0$ (direção luz nessa carta) e $\frac{dv}{du} = -\frac{a_{20}}{a_{11}}$ direção do trópico. Elas são ortogonais pelo fato de estarem contidas em um plano luz no qual a única direção luz é o vetor normal. \square

Observação 1.32. Na parte Riemanniana ou Lorentziana as linhas principais não mudam de caráter. Se $\alpha \in \mathcal{I}^r$ é tal que o trópico é uma curva regular, uma linha principal que muda de caráter tem apenas pontos luz isolados, as interseções com o trópico, e nos arcos tipo espaço (respec. tempo) a superfície é Riemanniana (respec. Lorentziana).

Lema 1.33. *Considere $\alpha \in \mathcal{I}^r$ e M compacta. Então, o trópico é diferente de vazio, isto é, sempre temos a parte Riemanniana e Lorentziana de α . Além disso, se o trópico é regular então é composto por um conjunto finito (mais de uma) de curvas fechadas.*

Demonstração. Considere a função $\pi : \alpha(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\pi(p_1, p_2, p_3) = p_3$. Assim, π tem um mínimo q_1 e um máximo q_2 globais (não necessariamente únicos). Sejam $P_1, P_2 \in M$ tal que $\alpha(P_1) = q_1$ e $\alpha(P_2) = q_2$. O plano tangente em P_1 e P_2 são tipo espaço, isto é, P_1 e P_2 estão na parte Riemanniana de α . Seja $c : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva suave tal que $c(0) = P_1$ e $c(1) = P_2$. A aplicação de Gauss $N_e : M \rightarrow S^2$ (métrica euclidiana) associada a α , define uma curva suave $N_e(c(s))$ com $N_e(P_1) = (0, 0, 1)$ e $N_e(P_2) = (0, 0, -1)$, então existe um s_0 tal que $N_e(c(s_0))$ pertence ao equador de S^2 e para este ponto $N_e(c(s_0)) = N(c(s_0))$ (N vetor normal de α em $\mathbb{R}^{2,1}$), assim o plano tangente em $c(s_0)$ é tipo tempo e conseqüentemente a imersão α é Lorentziana em $c(s_0)$. Se 0 é valor regular de $\Delta = EG - F^2$ então $\Delta^{-1}(0)$ é uma subvariedade em M (compacta) e portanto união de curvas fechadas. Sendo que temos duas componentes conexas da parte Riemanniana, então o número de curvas fechadas que compõem o trópico tem que ser mais de uma. \square

1.4.3 Propriedades do discriminante LPL

Quando o discriminante δ da equação (1.11) é zero, podemos ter uma única direção principal ou ter infinitas direções principais (pontos umbílicos).

Definição 1.34. *Dada uma imersão $\alpha \in \mathcal{I}^r$. Chamamos de **discriminante** de α , denotado por LPL (lugar dos pontos luz), ao conjunto de pontos da parte Lorentziana ou do trópico tal que $\delta = M_1^2 - 4L_1N_1 = 0$.*

Genericamente o conjunto LPL é uma curva, a qual divide a parte Lorentziana de M em uma região onde não temos direções principais reais e outra onde temos duas direções (uma espaço e uma tempo).

Observação 1.35. Num ponto p na parte Lorentziana de uma imersão α , sempre podemos tomar a carta (u, v) tal que $u = \text{constante}$ e $v = \text{constante}$ sejam as direções luz. Assim, $E = G = 0$ e $F \neq 0$. A chamaremos de carta luz.

Proposição 1.36. (veja[35]) *Genericamente para uma imersão $\alpha \in \mathcal{I}^r$, o LPL é uma curva suave exceto, possivelmente, em pontos isolados os quais são singularidades de Morse tipo sela para δ . Estas singularidades são exatamente os pontos umbílicos tipo tempo.*

Demonstração. No ponto p da parte Lorentziana, tomemos uma carta local luz (u, v) . Como $E = G = 0$ e $F \neq 0$, a equação de linhas principais é

$$g dv^2 - e du^2 = 0.$$

O LPL é a curva $\delta = eg = 0$, a qual não é suave se

- a) $e(p) = g(p) = 0$, ou
- b) $e(p) = e_u(p) = e_v(p) = 0$, $g(p) \neq 0$ ou $g(p) = g_u(p) = g_v(p) = 0$, $e(p) \neq 0$.

Em b) temos três equações com duas incógnitas e portanto não é genérico. Em a) temos um ponto umbílico tipo tempo e

$$\text{Hess}(\delta)(p) = -(e_u g_v - e_v g_u)^2 < 0.$$

□

A parte regular do LPL pode ser caracterizada pelos pontos onde as direções principais coincidem e se convertem em uma direção luz.

Observação 1.37. Se o trópico é tipo luz em um ponto p , este ponto é tipo luz para o LPL também. Além disso, as duas curvas são tangentes nesse ponto, veja Figura 2.9.

1.4.4 Definição da configuração principal

Para uma imersão $\alpha \in \mathcal{I}^r$, nos pontos $p \in M$ onde $\delta(p) = 0$ as direções principais são infinitas (umbílicos tipo espaço ou tempo) ou somente existe uma direção (parte regular do discriminante LPL). A este conjunto o chamamos de *singularidades*, denotado por

$$\mathcal{S}_\alpha = \{p \in M : \delta(p) = 0\} = LPL \cup \{\text{umbílicos tipo espaço}\}.$$

Na região de M onde $\delta > 0$, as direções principais definem dois *campos de linhas*, mutuamente ortogonais em TM , chamados *campos de linhas principais* e denotados por $\mathcal{L}_{1,\alpha}$ e $\mathcal{L}_{2,\alpha}$.

As curvas integrais destes campos de linhas principais as chamamos *linhas de curvatura principal* ou simplesmente *linhas principais*. Assim, uma curva suave c é uma linha principal se satisfaz a equação (1.11) e não contém singularidades.

Chamaremos de folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ (respec. $\mathcal{F}_{2,\alpha}$) ao conjunto de curvas integrais do campo de linhas $\mathcal{L}_{1,\alpha}$ (respec. $\mathcal{L}_{2,\alpha}$). A tripla $\mathbb{P}_\alpha = \{\mathcal{F}_{1,\alpha}, \mathcal{F}_{2,\alpha}, \mathcal{S}_\alpha\}$ é chamada de *configuração principal* da imersão α .

Definição 1.38. *Considere a imersão $\alpha \in \mathcal{I}^r$ e uma carta local (u, v) . Suponha que para $p \in M$ as direções principais estão definidas. Dizemos que (u, v) é uma carta principal se as linhas principais são $u = \text{constante}$ e $v = \text{constante}$.*

Dada uma carta local, se $F = f = 0$ então $L_1 = N_1 = 0$. A equação de direções principais é

$$M_1(u, v)dvdu = 0,$$

então $u = \text{constante}$ e $v = \text{constante}$ são as linhas principais e portanto (u, v) é uma carta principal. O fato de $F = f = 0$ e $M_1 \neq 0$ caracteriza uma carta principal.

1.5 Campo de Lie-Cartan

Considere a equação diferencial binária

$$a(u, v)dv^2 + 2b(u, v)dvdu + c(u, v)du^2 = 0 \quad (1.12)$$

onde $a, b, c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, são funções de classe C^2 . Nos pontos onde o discriminante $b^2 - ac > 0$, a equação binária define duas diferentes direções como solução. Para saber o comportamento das soluções perto dos pontos onde $b^2 - ac = 0$, definimos a variedade de Lie-Cartan $\mathbb{M} = F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, onde

$$F(u, v, [du : dv]) := a(u, v)dv^2 + 2b(u, v)dvdu + c(u, v)du^2.$$

Colocamos condições nas funções a, b, c tal que \mathbb{M} seja sempre suave. Assim, definimos o campo de linhas de Lie-Cartan Y_F (ou simplesmente Y) em \mathbb{M} , de tal maneira que as curvas integrais, quando projetadas sobre o plano (u, v) pela

aplicação

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v, [du : dv]) &\rightarrow (u, v)\end{aligned}$$

sejam as soluções da equação (1.12). Na carta $(u, v, p = \frac{dv}{du})$ o campo é

$$Y_F = (F_p, pF_p, -(F_u + pF_v))$$

e na carta $(u, v, q = \frac{du}{dv})$ é

$$Y_F = (qF_q, F_q, -(F_v + qF_u)).$$

Observe-se que $d\pi(Y_F)(u, v, p) = (F_p, pF_p)$ (respec. $d\pi(Y_F)(u, v, q) = (qF_q, F_q)$) é um vetor com inclinação p (respec. $\frac{1}{q}$) no plano (u, v) .

Consideramos dois casos dos pontos onde $b^2 - ac = 0$ (suponha que o ponto é a origem):

- i. Quando as três funções se anulam, isto é, $a(0, 0) = b(0, 0) = c(0, 0) = 0$. Neste caso, a condição para que \mathbb{M} seja suave é equivalente a dizer que a função $b^2 - ac$ tem uma singularidade de Morse na origem. Também, é equivalente a dizer que $a = 0$ e $b = 0$ são transversais no plano. A configuração local fica completamente determinada pelas partes lineares de a , b e c (veja [4]).
- ii. Quando pelo menos uma das funções a, b, c é não nula (veja [9]). Neste caso a condição de suavidade de \mathbb{M} é equivalente a que $b^2 - ac = 0$ seja uma curva regular. Sem perda de generalidade suponhamos $a(0, 0) \neq 0$, fazendo $p = \frac{dv}{du}$ temos que $F = a(u, v)p^2 + 2b(u, v)p + c(u, v)$. É fácil provar que a configuração local depende completamente do jato-2 de F em $(0, 0)$ (veja [35]), isto é,

$$j^2F = a_0p^2 + 2(b_0 + b_{10}u + b_{01}v)p + (c_0 + c_{10}u + c_{01}v + c_{20}u^2 + c_{11}uv + c_{02}v^2).$$

A curva $b^2 - ac = 0$ é a projeção, por π , da curva criminante $F = F_p = 0$ de \mathbb{M} .

1.6 Coordenadas de Bonnet

Nesta seção vamos dar uma forma simplificada da equação das linhas principais utilizando coordenadas de Bonnet (veja [24]).

1.6.1 Superfícies tipo espaço

Considere a superfície M e p um ponto na parte Riemanniana de M , isto é, o vetor normal $N(p)$ é tipo tempo. Orientando adequadamente M podemos supor que $N(p) \in \mathbb{H}_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1, z \geq 1\}$. Definimos a projeção estereográfica $\pi : \mathbb{H}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ do ponto $(0, 0, -1)$

$$\pi(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1}, 0 \right)$$

e sua inversa

$$\pi^{-1}(u, v) = \left(-\frac{2u}{u^2 + v^2 - 1}, -\frac{2v}{u^2 + v^2 - 1}, \frac{u^2 + v^2 + 1}{u^2 + v^2 - 1} \right).$$

Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$

$$X(u, v) = \frac{1}{u^2 + v^2 - 1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u^2 - v^2 + 1) & uv & -u \\ uv & \frac{1}{2}(-u^2 + v^2 + 1) & -v \\ -u & -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_u \\ h_v \\ h \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

onde $h(u, v) = (u^2 + v^2 - 1)D(u, v)$ e D é a distância (com sinal) de $TM_{X(u,v)}$ à origem $0 \in \mathbb{R}^3$.

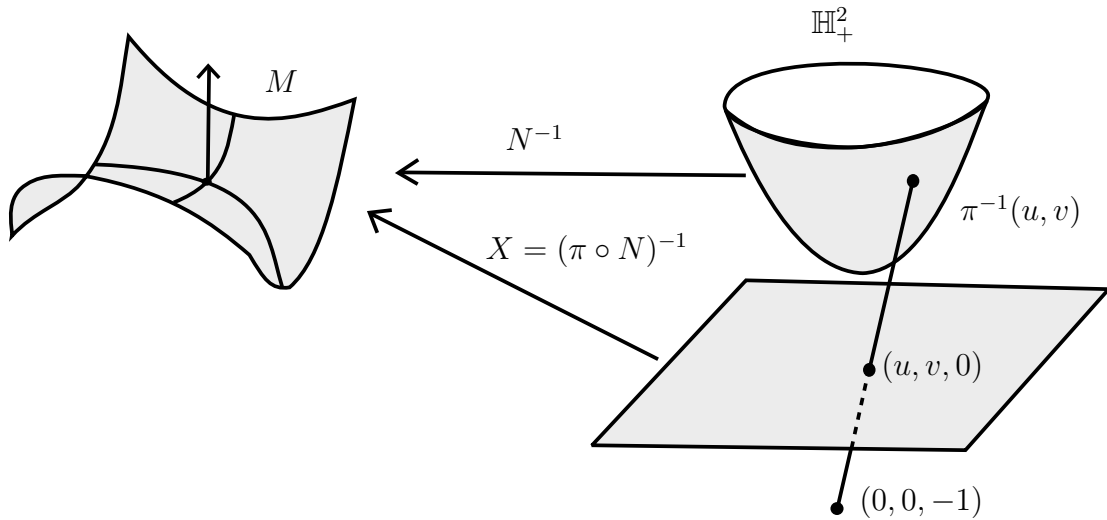


Figura 1.4: Coordenadas de Bonnet de uma superfície.

Proposição 1.39. *Considere a superfície M tal que o vetor normal é tipo tempo. Então $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ dado pela equação (1.13) é uma*

parametrização de M . Além disso, é uma parametrização local regular quando

$$h^2 - \frac{1}{2}hh_{uu} - \frac{1}{2}hh_{vv} + \frac{1}{4}h_{uu}h_{vv} - \frac{1}{4}h_{uv}^2 \neq 0$$

avaliado em $(0, 0)$.

Demonstração. Dado um ponto $p = (x, y, z) \in M$, o plano tangente afim $p + TM_p$, com vetor normal $\pi^{-1}(u, v)$, é definido por

$$\langle p, \pi^{-1}(u, v) \rangle = \frac{h(u, v)}{u^2 + v^2 - 1},$$

que é equivalente à

$$H = 2xu + 2yv + z(u^2 + v^2 + 1) + h(u, v) = 0.$$

Resolvendo o sistema de equações $H = H_u = H_v = 0$ em relação as variáveis (x, y, z) temos

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \frac{1}{u^2 + v^2 - 1} \left(\frac{1}{2}(u^2 - v^2 + 1)h_u + uvh_v - uh \right), \\ y(u, v) &= \frac{1}{u^2 + v^2 - 1} \left(uvh_u + \frac{1}{2}(-u^2 + v^2 + 1)h_v - vh \right), \\ z(u, v) &= \frac{1}{u^2 + v^2 - 1} (-uh_u - vh_v + h). \end{aligned}$$

Para provar que a parametrização é localmente regular, definamos a aplicação $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ a qual satisfaz que $\det(D\varphi(0, 0)) = (h^2 - \frac{1}{2}hh_{uu} - \frac{1}{2}hh_{vv} + \frac{1}{4}h_{uu}h_{vv} - \frac{1}{4}h_{uv}^2)|_{(0,0)}$. Assim, se $\det(D\varphi(0, 0)) \neq 0$ a aplicação φ é um difeomorfismo local, então pelo Teorema de Função Inversa a parametrização X é regular na vizinhança de $(0, 0)$. \square

Proposição 1.40. *As linhas principais de X definida pela equação (1.13) são dadas por*

$$-h_{uv}dv^2 + (h_{vv} - h_{uu})dvdu + h_{uv}du^2 = 0.$$

Demonstração. Os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \frac{1}{4(u^2 + v^2 - 1)^2} (4h^2 + (-8uh_u + 4(u^2 + v^2 - 1)h_{uu} - 8vh_v)h + 4u^2h_u^2 \\ + (-4u(u^2 + v^2 - 1)h_{uu} + 8uvh_v)h_u + (u^2 + v^2 - 1)^2h_{uu}^2 - 4v(u^2 + v^2 - 1)h_vh_{uu} + (u^2 + v^2 - 1)^2h_{uv}^2 + 4v^2h_v^2),$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = \frac{h_{uv}}{4(u^2 + v^2 - 1)^2} (4h - 4uh_u + (u^2 + v^2 - 1)(h_{uu} + h_{vv}) - 4vh_v),$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \frac{1}{4(u^2 + v^2 - 1)^2} (4h^2 + (-8uh_u - 8vh_v + 4(u^2 + v^2 - 1)h_{vv})h + 4u^2h_u^2 \\ + (8uvh_v - 4u(u^2 + v^2 - 1)h_{vv})h_u + (u^2 + v^2 - 1)^2h_{uv}^2 - 4v(u^2 + v^2 - 1)h_{vv}h_v + (u^2 + v^2 - 1)^2h_{vv}^2 + 4v^2h_v^2).$$

O vetor normal é $N = \pi^{-1}(u, v)$ e os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = -\frac{1}{(u^2 + v^2 - 1)^2} ((u^2 + v^2 - 1)h_{uu} - 2uh_u - 2vh_v + 2h),$$

$$f = \langle X_{uv}, N \rangle = -\frac{h_{uv}}{u^2 + v^2 - 1},$$

$$g = \langle X_{vv}, N \rangle = -\frac{1}{(u^2 + v^2 - 1)^2} ((u^2 + v^2 - 1)h_{vv} - 2uh_u - 2vh_v + 2h).$$

Disto temos que

$$L = (Fg - Gf) = -h_{uv}\Gamma,$$

$$M = (Eg - Ge) = (h_{vv} - h_{uu})\Gamma,$$

$$N = (Ef - Fe) = h_{uv}\Gamma,$$

onde

$$\Gamma = \frac{1}{4(u^2 + v^2 - 1)^3} (4h^2 + (-8uh_u + 2(u^2 + v^2 - 1)h_{uu} - 8vh_v + 2(u^2 + v^2 - 1)h_{vv})h \\ + 4u^2h_u^2 + (-2u(u^2 + v^2 - 1)h_{uu} + 8uvh_v - 2u(u^2 + v^2 - 1)h_{vv})h_u + (-2v(u^2 + v^2 - 1)h_v \\ + (u^2 + v^2 - 1)^2h_{vv})h_{uu} - (u^2 + v^2 - 1)^2(h_{uv}^2 + 2vh_{vv}h_v) + 4v^2h_v^2)$$

e

$$\Gamma(0, 0) = -\left(h^2 - \frac{1}{2}hh_{uu} - \frac{1}{2}hh_{vv} + \frac{1}{4}h_{uu}h_{vv} - \frac{1}{4}h_{uv}^2\right) \neq 0.$$

Portanto, a equação das linhas de curvatura nesta carta é

$$-h_{uv}dv^2 + (h_{vv} - h_{uu})dvdu + h_{uv}du^2 = 0.$$

□

1.6.2 Superfícies tipo tempo

Considere a superfície M e p um ponto na parte Lorentziana de M , isto é, o vetor normal $N(p)$ é tipo espaço. Assim, $N(p)$ está contido no hiperbolóide de uma folha $\mathbb{S}^{2,1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Definimos a projeção estereográfica $\pi : \mathbb{S}^{2,1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ do ponto $(-1, 0, 0)$ por

$$\pi(x, y, z) = \left(0, \frac{y}{\sqrt{-y^2 + z^2 + 1} + 1}, \frac{z}{\sqrt{-y^2 + z^2 + 1} + 1} \right)$$

e sua inversa

$$\pi^{-1}(u, v) = \left(\frac{v^2 - w^2 - 1}{v^2 - w^2 + 1}, \frac{2v}{v^2 - w^2 + 1}, \frac{2w}{v^2 - w^2 + 1} \right).$$

Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$

$$X(v, w) = \frac{1}{v^2 - w^2 + 1} \begin{pmatrix} -1 & v & w \\ v & -\frac{1}{2}(v^2 + w^2 - 1) & -vw \\ w & -vw & -\frac{1}{2}(v^2 + w^2 + 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ h_v \\ h_w \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

onde $h(v, w) = (v^2 - w^2 + 1)D(v, w)$ e D é a distância (com sinal) de $TM_{X(v,w)}$ à origem $0 \in \mathbb{R}^3$.

Proposição 1.41. *Considere a superfície M tal que o vetor normal é tipo espaço. Então $X(v, w) = (x(v, w), y(v, w), z(v, w))$ dado pela equação (1.14) é uma parametrização de M . Além disso, é uma parametrização local regular quando*

$$h^2 + \frac{1}{2}hh_{vv} - \frac{1}{2}hh_{ww} - \frac{1}{4}h_{vv}h_{ww} + \frac{1}{4}h_{vw}^2 \neq 0$$

avaliado em $(0, 0)$.

Demonstração. Dado um ponto $p = (x, y, z) \in M$, o plano tangente afim $p + TM_p$, com vetor normal $\pi^{-1}(v, w)$, é definido por

$$\langle p, \pi^{-1}(v, w) \rangle = \frac{h(v, w)}{v^2 - w^2 + 1},$$

que é equivalente à

$$H = x(v^2 - w^2 - 1) + 2yv - 2zw - h(v, w) = 0.$$

Resolvendo o sistema de equações $H = H_v = H_w = 0$ em relação as variáveis (x, y, z) temos

$$\begin{aligned} x(v, w) &= \frac{1}{v^2 - w^2 + 1} (vh_v + wh_w - h), \\ y(v, w) &= \frac{1}{v^2 - w^2 + 1} \left(vh - \frac{1}{2}(v^2 + w^2 - 1)h_v - vwh_w \right), \\ z(v, w) &= \frac{1}{v^2 - w^2 + 1} \left(wh - vwh_v - \frac{1}{2}(v^2 + w^2 + 1)h_w \right). \end{aligned}$$

Para provar que a parametrização é localmente regular, definamos a aplicação $\varphi(v, w) = (y(v, w), z(v, w))$ a qual satisfaz que $\det(D\varphi(0, 0)) = (h^2 + \frac{1}{2}hh_{vv} - \frac{1}{2}hh_{ww} - \frac{1}{4}h_{vv}h_{ww} + \frac{1}{4}h_{vw}^2)|_{(0,0)}$. Assim, se $\det(D\varphi(0, 0)) \neq 0$ a aplicação φ é um difeomorfismo local, então pelo Teorema de Função Inversa a parametrização X é regular na vizinhança de $(0, 0)$. \square

Proposição 1.42. *As linhas principais de X definida pela equação (1.14) são dadas por*

$$h_{vw}dw^2 + (h_{vv} + h_{ww})dwdv + h_{vv}dv^2 = 0.$$

Demonstração. Os coeficientes da primeira forma fundamental $E = \langle X_v, X_v \rangle$, $F = \langle X_v, X_w \rangle$ e $G = \langle X_w, X_w \rangle$ são expressões similares as apresentadas na Proposição 1.40. O vetor normal é $N = \pi^{-1}(v, w)$ e os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned} e = \langle X_{vv}, N \rangle &= -\frac{1}{(v^2 - w^2 + 1)^2} ((v^2 - w^2 + 1)h_{vv} - 2vh_v - 2wh_w + 2h), \\ f = \langle X_{vw}, N \rangle &= -\frac{h_{vw}}{v^2 - w^2 + 1}, \\ g = \langle X_{ww}, N \rangle &= -\frac{1}{(v^2 - w^2 + 1)^2} ((v^2 - w^2 + 1)h_{ww} + 2vh_v + 2wh_w - 2h). \end{aligned}$$

Disto temos que

$$\begin{aligned} L &= (Fg - Gf) = h_{vw}\Gamma, \\ M &= (Eg - Ge) = (h_{vv} + h_{ww})\Gamma, \\ N &= (Ef - Fe) = h_{vw}\Gamma, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{1}{4(v^2 - w^2 + 1)^3} (4h^2 + (-8vh_v + 2(v^2 - w^2 + 1)h_{vv} - 8wh_w - 2(v^2 - w^2 + 1)h_{ww})h \\ & + 4v^2h_v^2 - 2v((v^2 - w^2 + 1)h_{vv} + 8vwh_w + 2v(v^2 - w^2 + 1)h_{ww})h_v + (-2w(v^2 - w^2 \\ & + 1)h_w - (v^2 - w^2 + 1)^2h_{ww})h_{vv} + (v^2 - w^2 + 1)^2(h_{vv}^2 + 2wh_{ww}h_w)) + 4w^2h_w^2) \end{aligned}$$

e

$$\Gamma(0,0) = - \left(h^2 + \frac{1}{2}hh_{vv} - \frac{1}{2}hh_{ww} - \frac{1}{4}h_{vv}h_{ww} + \frac{1}{4}h_{vv}^2 \right) \neq 0.$$

□

ESTABILIDADE ESTRUTURAL DA CONFIGURAÇÃO PRINCIPAL

Neste capítulo daremos condições suficientes para que a configuração principal de uma imersão seja estável por pequenas perturbações.

2.1 Singularidades

Dado que genericamente o discriminante LPL é uma curva regular exceto nos pontos umbílicos tipo tempo, o conjunto de singularidades \mathcal{S}_α de α é formado pelos pontos

- umbílicos tipo espaço,
- umbílicos tipo tempo e
- onde o LPL é uma curva regular.

Em termos de cartas locais, vamos apresentar a configuração local das singularidades que são estáveis por pequenas perturbações. Trabalhos tais como [3], [4], [29], [35], [50], [51], [36], entre outros, aportam ideias importantes para as propriedades descritas nesta seção.

2.1.1 Pontos umbílicos tipo espaço

Seja $p \in M$ um ponto umbílico tipo espaço de $\alpha \in \mathcal{I}^r$. Consideremos a carta local de Monge $(u, v) : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ e uma translação $\Gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\Gamma(\alpha(p)) = 0$ e

$$\Gamma(\alpha(u, v)) = (u, v, h(u, v))$$

onde, $h(u, v) = \frac{1}{2}k(u^2 + v^2) + \frac{1}{3!}(au^3 + 3b'u^2v + 3bv^2u + cv^3) + O((u^2 + v^2)^2)$ com $k = k_1(p) = k_2(p)$ e $a, b, b', c \in \mathbb{R}$.

Fazendo uma rotação adequada no plano- (u, v) , podemos eliminar o coeficiente b' . Portanto, vamos tomar a carta com $b' = 0$.

Proposição 2.1. *Seja p um ponto umbílico tipo espaço da imersão $\alpha \in \mathcal{I}^r$ ($r \geq 4$). Considere a carta de Monge (u, v) ,*

$$\alpha(u, v) = (u, v, h(u, v)).$$

Suponha que $b(b - a) \neq 0$ e que uma das opções

$$E_1) \frac{a}{b} > \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2,$$

$$E_2) \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2 > \frac{a}{b} > 1, a \neq 2b, \text{ ou}$$

$$E_3) 1 > \frac{a}{b}$$

é satisfeita. Então a configuração principal perto de p , nos casos E_1 , E_2 e E_3 , é como na Figura 2.1. Estes pontos vamos chamar de umbílicos tipo espaço Darbouxianos (ou hiperbólicos) e vamos denotar por U_e .

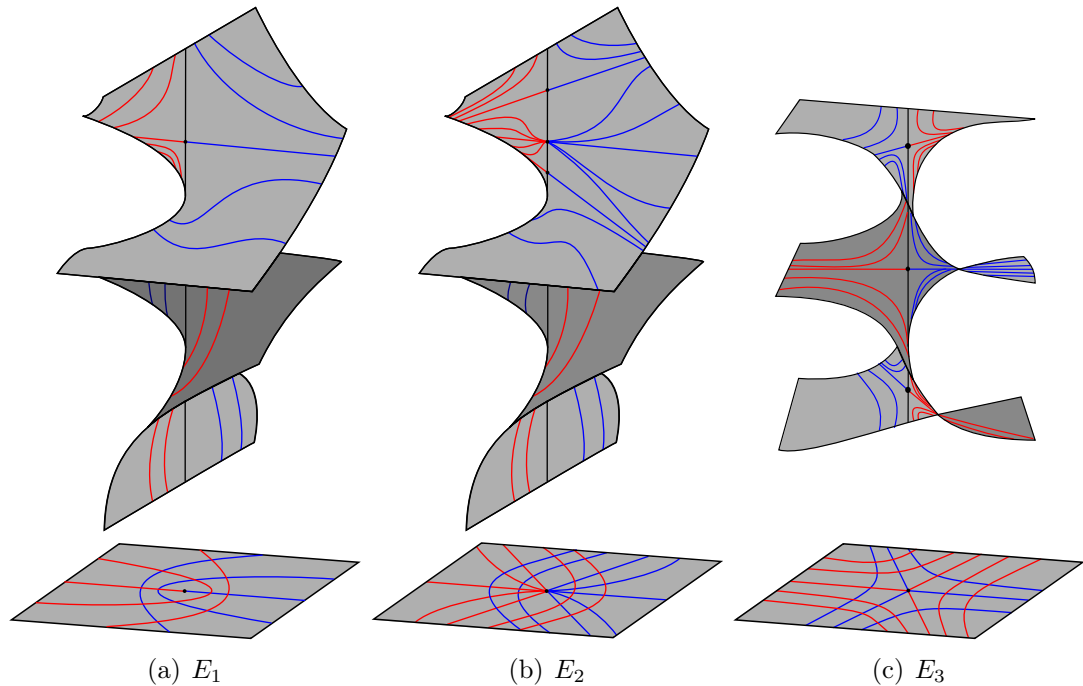


Figura 2.1: Configurações principais nos pontos umbílicos tipo espaço hiperbólicos.

Demonstração. Nesta carta,

$$\begin{aligned} E &= 1 + O(u^2 + v^2), & F &= O(u^2 + v^2), & G &= 1 + O(u^2 + v^2), \\ e &= k + au + O(u^2 + v^2), & f &= bv + O(u^2 + v^2), & g &= k + bu + cv + O(u^2 + v^2). \end{aligned}$$

A parte linear da equação das linhas principais é

$$bvdv^2 - ((b-a)u + cv)dvdv - bvdv^2 = 0.$$

$\delta(u, v) = (-a + b)^2 u^2 + 2c(-a + b)uv + (4b^2 + c^2)v^2 + O^3((u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}})$ e $\text{Hess}(\delta(0, 0)) = 16b^2(a - b)^2 > 0$. Como $\delta \geq 0$ na parte Riemanniana, então os umbílicos tipo espaço Darbouxianos são pontos críticos (mínimos) para a função $\delta(u, v)$.

Definimos $F = bvp^2 - ((b-a)u + cv)p - bv$ com $p = \frac{dv}{du}$, assim a superfície e o campo de Lie-Cartan são $\mathbb{M} = F^{-1}(0)$ e

$$Y_F(u, v, p) = (2bpv + au - bu - cv, p(2bpv + au - bu - cv), -p(bp^2 - cp + a - 2b)),$$

respectivamente. Fora do ponto $(0, 0)$ as folheações estão bem definidas e são ortogonais, queremos então determinar o comportamento na vizinhança deste ponto. A condição $b(b-a) \neq 0$ é equivalente ao fato que \mathbb{M} seja suave nos pontos $(0, 0, p)$ (também é equivalente ao fato que as curvas $L_1(u, v) = 0$ e $M_1(u, v) = 0$ sejam transversais, onde L_1 e M_1 são os coeficientes da equação diferencial das linhas principais).

Procuramos as singularidades do campo Y no eixo projetivo $(0, 0, p)$, assim $Y_F(0, 0, p) = (0, 0, -p(bp^2 - cp + a - 2b)) = (0, 0, 0)$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, \\ p_1 &= \frac{c}{2b} + \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}, \\ p_2 &= \frac{c}{2b} - \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}. \end{aligned}$$

Os valores próprios de

$$DY_F(0, 0, p_i) = \begin{pmatrix} a - b & 2bp_i - c & 0 \\ p_i(a - b) & p_i(2bp_i - c) & 0 \\ 0 & 0 & -3bp_i^2 + 2cp_i - a + 2b \end{pmatrix}$$

são

$$\lambda_{1i} = 2bp_i^2 - cp_i + a - b, \lambda_{2i} = 3bp_i^2 + 2cp_i - a + 2b.$$

Analisemos cada um dos casos:

E_1) temos somente o ponto crítico $P_0 = (0, 0, 0)$ e $\lambda_{10}\lambda_{20} = -(a-b)(a-2b) < 0$.

Assim, P_0 é uma sela para Y_F na superfície \mathbb{M} (Figura 2.1(a)).

E_2) são três singularidades $P_i = (0, 0, p_i)$, $i = 0, 1, 2$. Ordenamos os p_i do menor ao maior, $p_{j_0} < p_{j_1} < p_{j_2}$. Se prova que $\lambda_{1j_0}\lambda_{2j_0} < 0$, $\lambda_{1j_1}\lambda_{2j_1} > 0$ (reais) e $\lambda_{1j_2}\lambda_{2j_2} < 0$. Assim, temos que P_{j_0} e P_{j_2} são selas, e P_{j_1} é nó de Y_F (Figura 2.1(b)).

E_3) temos três singularidades $P_i = (0, 0, p_i)$ e $\lambda_{1i}\lambda_{2i} < 0$ para $i = 0, 1, 2$. Assim, os P_i são selas de Y_F (Figura 2.1(c)).

A projecção das curvas integrais no plano (u, v) por meio de π , dá a configuração dos pontos umbílicos tipo espaço Darbouxianos E_i . As separatrizes dos pontos umbílicos são as projecções das separatrizes das selas transversais ao eixo $(0, 0, p)$ em cada caso. \square

Observação 2.2. Em [27] e [15], os autores fazem uma exposição mais ampla da configuração principal na vizinhança dos pontos E_i , os quais são chamados lá de D_i por serem pontos umbílicos conhecidos como Darbouxianos. Nós chamamos de E_i para fazer referência aos umbílicos tipo espaço.

Tomando $b_1 = \frac{1}{2}(\frac{a}{b} - 1)$ e $b_2 = -\frac{c}{2b}$, os pontos umbílicos tipo espaço hiperbólicos são distribuídos no plano- (b_1, b_2) como na Figura 2.2.

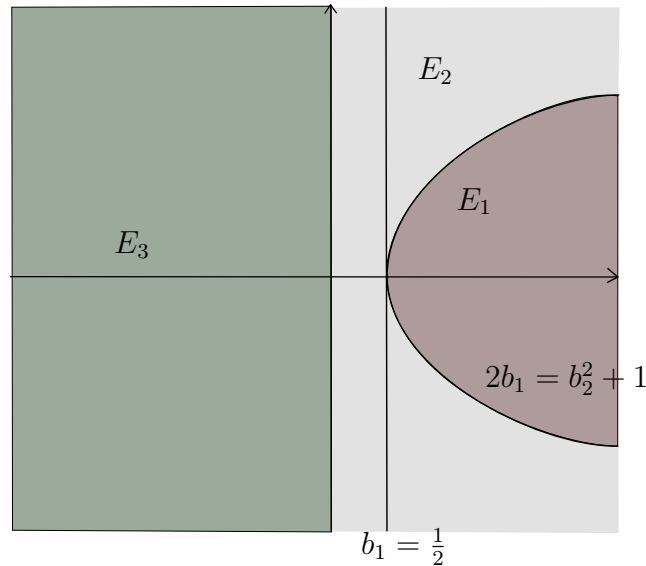


Figura 2.2: Distribuição dos pontos umbílicos tipo espaço hiperbólicos no plano- (b_1, b_2) .

2.1.2 Pontos umbílicos tipo tempo

Como o plano tangente na parte Lorentziana de uma imersão α nunca é horizontal, qualquer ponto $p \in M$ na parte Lorentziana de α pode ser parametrizado

localmente por $(u, h(u, v), v)$ com h uma função suave.

Seja $p \in M$ um ponto umbílico tipo tempo de $\alpha \in \mathcal{I}^r$. Consideremos a carta local de Monge $(u, v) : (M, p) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ e uma translação $\Gamma : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\Gamma(\alpha(p)) = 0$ e

$$\Gamma(\alpha(u, v)) = (u, h(u, v), v)$$

onde, $h(u, v) = -\frac{1}{2}k(u^2 - v^2) + \frac{1}{3!}(au^3 + 3b'u^2v + 3buv^2 + cv^3) + O((u^2 + v^2)^2)$ com $k = k_1(p) = k_2(p)$ e $a, b, b', c \in \mathbb{R}$.

Genericamente o coeficiente b' ou b pode ser anulado. Para isto, fazemos a rotação hiperbólica

$$\begin{aligned} u &= \cosh(\theta)x + \sinh(\theta)y, \\ v &= \sinh(\theta)x + \cosh(\theta)y, \end{aligned}$$

assim,

$$h(x, y) = -\frac{1}{2}k(x^2 - y^2) + \frac{1}{6}(A_1x^3 + A_2x^2y + A_3xy^2 + A_4y^3) + O((x^2 + y^2)^2)$$

onde

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2^4}[(a + b' - b - c)e^\theta + (-a + 3b' - 3b + c)e^{-3\theta} + (-a + b' + b - c)e^{-\theta} \\ &\quad + (a + 3b' + 3b + c)e^{3\theta}], \\ A_3 &= \frac{1}{2^4}[(-a - b' + b + c)e^\theta + (a - 3b' + 3b - c)e^{-3\theta} + (-a + b' + b - c)e^{-\theta} \\ &\quad + (a + 3b' + 3b + c)e^{3\theta}]. \end{aligned}$$

A parte quadrática de h fica invariante. Substituindo $s = e^\theta > 0$ no produto A_2A_3 e multiplicando por s^6 temos que

$$\begin{aligned} A_2A_3 &= \frac{1}{2^8s^6}[(a^2 + 6ab' + 6ab + 2ac + 9b'^2 + 18b'b + 6b'c + 9b^2 + 6bc + c^2)s^{12} \\ &\quad + (-3a^2 - 6ab' - 2ab - 2ac + 5b'^2 + 14b'b - 2b'c + 5b^2 - 6bc - 3c^2)s^8 \\ &\quad + (3a^2 - 6ab' + 2ab - 2ac - 5b'^2 + 14b'b + 2b'c - 5b^2 - 6bc + 3c^2)s^4 \\ &\quad - 9b'^2 + 6b'a + 18b'b - 6b'c - a^2 - 6ab + 2ac - 9b^2 + 6bc - c^2] \\ &= \frac{1}{2^8s^6}[B_3t^3 + B_2t^2 + B_1t + B_0], \end{aligned}$$

onde na última linha fizemos $t = s^4$. Temos então que $A_2A_3 = 0$ é um polinômio

cúbico com $t > 0$ e

$$B_3 B_0 = -(a + 3b' + 3b + c)^2 (-a + 3b' - 3b + c)^2.$$

Assim, sempre que $(a + 3b' + 3b + c)(-a + 3b' - 3b + c) \neq 0$ a equação $A_2 A_3 = 0$ tem pelo menos uma solução, isto é, podemos anular A_2 ou A_3 . Portanto, trocando as variáveis u e v em h se for necessário, genericamente podemos eliminar o coeficiente b' .

Proposição 2.3. *Seja p um ponto umbílico tipo tempo da imersão $\alpha \in \mathcal{I}^r$ ($r \geq 4$). Considere a carta de Monge (u, v) ,*

$$\alpha(u, v) = (u, h(u, v), v).$$

Suponha que $b(b + a) \neq 0$ e que uma das opções T_i ($i = 1, \dots, 5$)

$$a) \left(\frac{c}{2b}\right)^2 < \frac{a}{b} + 2$$

$$T_1) \frac{a}{b} + 1 > 0.$$

$$T_2) \frac{a}{b} + 1 < 0.$$

$$b) \left(\frac{c}{2b}\right)^2 > \frac{a}{b} + 2$$

$T_3)$ se

- $|\frac{c}{b}| > \frac{a}{b} + 3$ e $\frac{a}{b} + 1 > 0$, ou

- $|\frac{c}{b}| < -(\frac{a}{b} + 3)$.

$T_4)$ se

- $|\frac{c}{b}| < \frac{a}{b} + 3$ e $\frac{a}{b} + 1 > 0$, ou

- $|\frac{c}{b}| > \frac{a}{b} + 3$ e $-2 < \frac{a}{b} + 1 < 0$, $\frac{a}{b} + 1 \neq -1$, ou

- $|\frac{c}{b}| > -(\frac{a}{b} + 3)$ e $\frac{a}{b} + 1 \leq -2$.

$$T_5) |\frac{c}{b}| < \frac{a}{b} + 3 \text{ e } -2 < \frac{a}{b} + 1 < 0, \frac{a}{b} + 1 \neq -1.$$

é satisfeita. Então a configuração principal na vizinhança de p , nos casos T_i ($i = 1, \dots, 5$), é dada nas Figuras 2.3 e 2.4. Estes pontos vamos chamar de umbílicos tipo tempo hiperbólicos e vamos denotar por U_t .

Demonstração. Nesta carta temos que

$$\begin{aligned} E &= 1 + O(u^2 + v^2), & F &= O(u^2 + v^2), & G &= -1 + O(u^2 + v^2), \\ e &= -k - au + O(u^2 + v^2), & f &= -bv + O(u^2 + v^2), & g &= k - bu - cv + O(u^2 + v^2). \end{aligned}$$

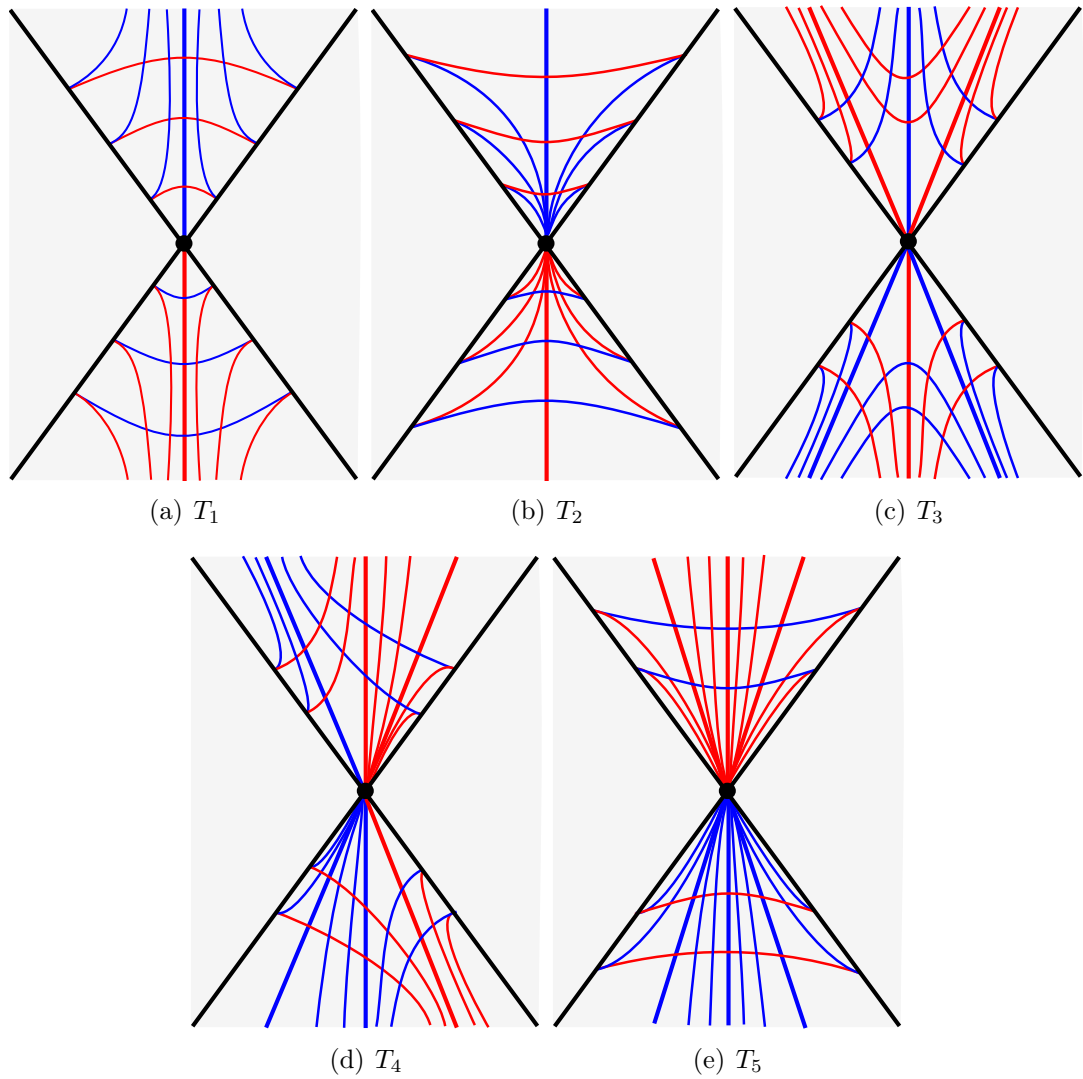


Figura 2.3: Configurações principais nos pontos umbílicos tipo tempo hiperbólicos.

A parte linear da equação das linhas principais é

$$bvdu^2 + ((a + b)u + cv)dvd + bvd^2 = 0.$$

$\delta(u, v) = (a + b)^2u^2 - 2c(a + b)uv + (-4b^2 + c^2)v^2 + O((u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}})$ e $\text{Hess}(\delta(0, 0)) = -16b^2(a + b)^2 < 0$. Os umbílicos tipo tempo hiperbólicos são pontos críticos (selas) para a função $\delta(u, v)$.

Definimos $F = bvp^2 + ((b + a)u + cv)p + bv$ com $p = \frac{dv}{du}$, assim a superfície e o campo de Lie-Cartan são $\mathbb{M} = F^{-1}(0)$ e

$$Y_F(u, v, p) = (2bpv + au + bu + cv, p(2bpv + au + bu + cv), -p(bp^2 + cp + a + 2b)),$$

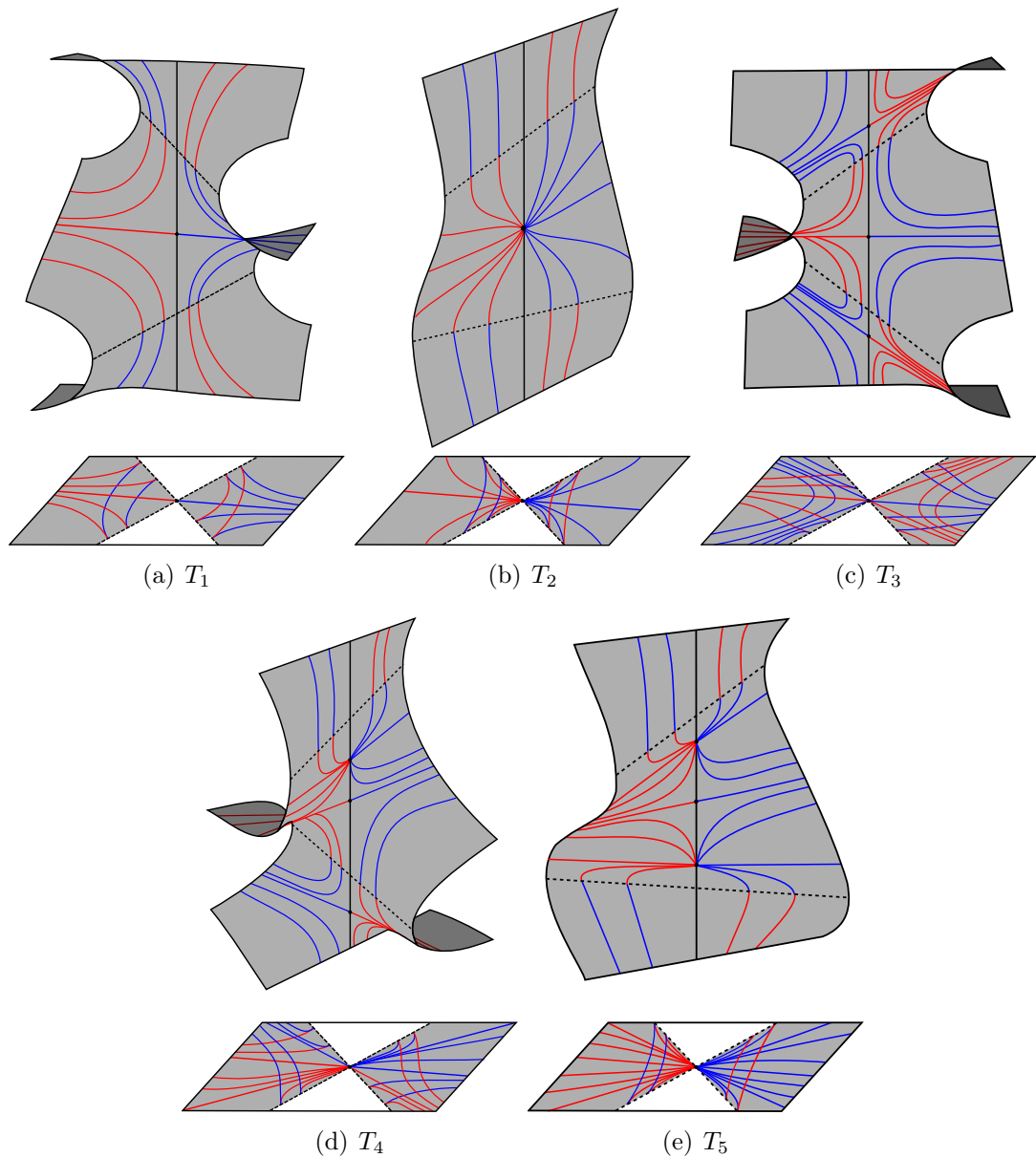


Figura 2.4: Singularidades do campo de linhas de Lie-Cartan em \mathbb{M} e sua projeção nos pontos umbílicos em M .

respectivamente.

A condição $b(b + a) \neq 0$ é equivalente ao fato de \mathbb{M} ser suave nos pontos $(0, 0, p)$ ou ao fato de que as curvas $L_1(u, v) = 0$ e $M_1(u, v) = 0$ sejam transversais em $(0, 0)$, onde L_1 e M_1 são os coeficientes da equação de linhas principais. As singularidades do campo Y_F no eixo projetivo $(0, 0, p)$, são $Y_F(0, 0, p) =$

$(0, 0, -p(bp^2 + cp + a + 2b)) = (0, 0, 0)$, assim

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, \\ p_1 &= -\frac{c}{2b} + \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 2}, \\ p_2 &= -\frac{c}{2b} - \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 2}. \end{aligned}$$

Os valores próprios de

$$DY_F(0, 0, p_i) = \begin{pmatrix} a + b & 2bp_i + c & 0 \\ p_i(a + b) & p_i(2bp_i + c) & 0 \\ 0 & 0 & -3bp_i^2 - 2cp_i - a - 2b \end{pmatrix}$$

são

$$\lambda_{1i} = 2bp_i^2 - cp_i + a - b, \lambda_{2i} = 3bp_i^2 + 2cp_i - a + 2b.$$

Analisaremos cada um dos casos T_i :

a) o campo Y_F tem somente a singularidade $P_0 = (0, 0, 0)$:

T_1) temos que $\lambda_{10}\lambda_{20} = -b^2\left(\frac{a}{b} + 1\right)\left(\frac{a}{b} + 2\right) < 0$, e portanto P_0 é uma sela para Y_F (Figura 2.3(a)).

T_2) tem-se que $\lambda_{10}\lambda_{20} = -b^2\left(\frac{a}{b} + 1\right)\left(\frac{a}{b} + 2\right) > 0$, e portanto P_0 é um nó para Y_F (Figura 2.3(b)).

b) o campo Y_F tem três singularidades $P_i = (0, 0, p_i)$, $i = 0, 1, 2$:

T_3) podemos provar que $\lambda_{1i}\lambda_{2i} < 0$, $i = 0, 1, 2$, assim P_i são selas para o campo Y_F (Figura 2.3(c)).

T_4) aqui temos que (Figura 2.3(d))

i. se $\frac{a}{b} + 1 < -1$ ou $0 < \frac{a}{b} + 1$, então P_0 é sela, P_1 é nó (respec. sela) e P_2 é sela (respec. nó) quando $\frac{c}{2b} > 0$ (respec. $\frac{c}{2b} < 0$).

ii. se $-1 < \frac{a}{b} + 1 < 0$, então P_0 é nó, P_1 e P_2 são selas.

T_5) neste caso temos que (Figura 2.3(e))

i. se $-1 < \frac{a}{b} + 1 < 0$, então P_0 é nó, P_1 é nó (respec. sela) e P_2 é sela (respec. nó) quando $\frac{c}{2b} > 0$ (respec. $\frac{c}{2b} < 0$).

ii. se $-2 < \frac{a}{b} + 1 < -1$, então P_0 é sela, P_1 e P_2 são nós.

As linhas principais são as projeções por π no plano (u, v) das curvas integrais do campo Y_F na superfície \mathbb{M} . A curva LPL da configuração principal é a projeção por π do criminante $F = F_p = 0$ em \mathbb{M} . \square

Observação 2.4. Às vezes os pontos T_i são classificados pelo número de selas ou nós do campo de Lie-Cartan (veja [4]), os pontos T_i ($i = 1, \dots, 5$) são chamados de $1S, 1N, 3S, 2S + 1N, 1S + 2N$, respectivamente.

A proposição anterior pode ser resumida no plano- (b_1, b_2) na Figura 2.5, tomando $b_1 = \frac{1}{2}(\frac{a}{b} + 1)$ e $b_2 = \frac{c}{2b}$.

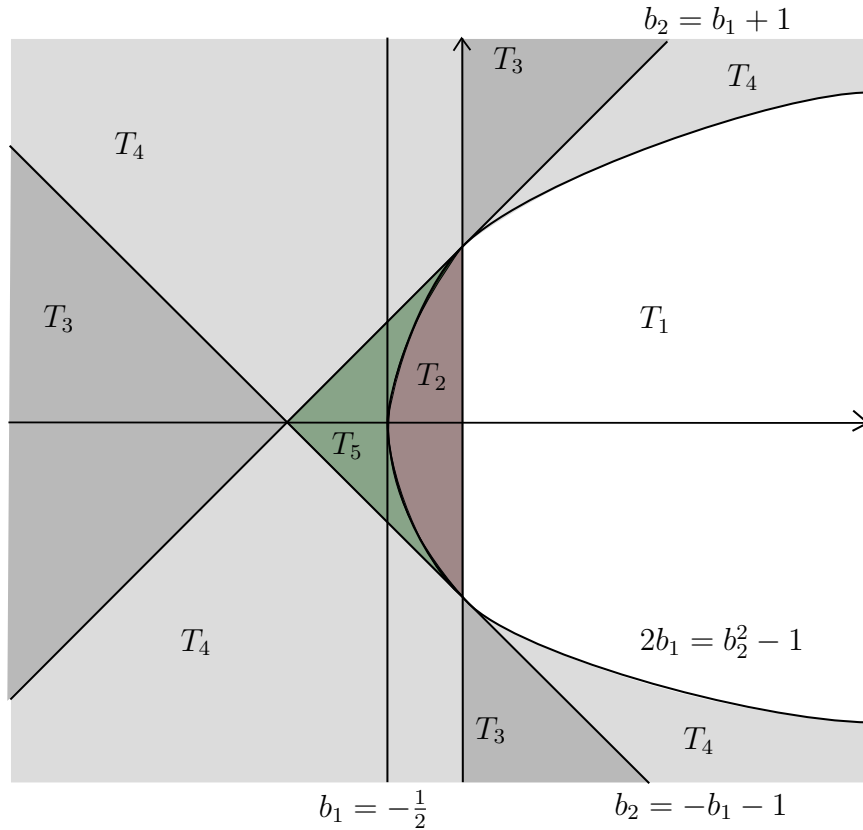


Figura 2.5: Distribuição dos pontos umbilícos tipo tempo hiperbólicos no plano- (b_1, b_2) .

2.1.3 Pontos onde o discriminante LPL é uma curva regular

A parte onde o discriminante LPL é uma curva regular está contida na parte Lorentziana e no trópico.

Na parte Lorentziana

Seja $p \in M$ um ponto regular do LPL na parte Lorentziana de $\alpha \in \mathcal{I}^r$. Consideremos a carta local luz $(u, v) : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ e uma translação $\Gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\Gamma(\alpha(p)) = 0$ e

$$\Gamma(\alpha(u, v)) = (u + v, h(u, v), u - v)$$

onde, $h(u, v) = a_{11}uv + \frac{1}{2}a_{02}v^2 + \frac{1}{3!}(a_{30}u^3 + 3a_{21}u^2v + 3a_{12}uv^2 + a_{03}v^3) + \frac{1}{4!}(a_{40}u^4 + 4a_{31}u^3v + 6a_{22}u^2v^2 + 4a_{13}uv^3 + a_{04}v^4) + O((u^2 + v^2)^{\frac{5}{2}})$ com $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Proposição 2.5. *Seja $p \in M$ um ponto regular do LPL na parte Lorentziana de $\alpha \in \mathcal{I}^r$. Considere a carta local luz (u, v) ,*

$$\alpha(u, v) = (u + v, h(u, v), u - v).$$

Suponha que $a_{02}a_{21} \neq 0$.

i. se $a_{30} \neq 0$, então o LPL é uma curva tipo tempo ou tipo espaço e a configuração principal na vizinhança de p é como a Figura 2.6. As direções principais se convertem em uma única direção luz transversal ao LPL. A estes pontos vamos chamar de singularidades tipo cúspides (ou simplesmente cúspides) e vamos denotar por \mathcal{S}_c .

ii. se $a_{30} = 0$, então o LPL é tipo luz em p . Se para $\lambda_{1,2} = 2a_{21} \pm 2\sqrt{8a_{02}a_{40} + a_{21}^2}$ uma das opções

- λ_1 e λ_2 são reais e $\lambda_1\lambda_2 < 0$ (tipo sela),
- λ_1 e λ_2 são reais, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $\lambda_1\lambda_2 > 0$ (tipo nó) ou
- λ_1 e λ_2 são complexos conjugados com parte real e imaginária não nula (tipo foco)

é satisfeita. A configuração principal na vizinhança de p é como a Figura 2.7. Os nomes: tipo sela, nó e foco fazem referência às singularidades do campo de Lie-Cartan que tem valores próprios $\lambda_{1,2}$. A estes pontos vamos chamar de singularidades tipo luz hiperbólicas e vamos denotar por \mathcal{S}_l .

Demonstração. Nesta carta,

$$\begin{aligned} E &= a_{11}^2v^2 + O((u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}), \\ F &= 2 + a_{11}^2uv + a_{02}a_{11}v^2 + O((u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}), \\ G &= a_{11}^2u^2 + 2a_{02}a_{11}uv + a_{02}^2v^2 + O((u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}), \\ e &= 2a_{30}u + 2a_{21}v + a_{40}u^2 + 2a_{31}uv + a_{22}v^2 + O((u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}), \\ f &= 2a_{11} + 2a_{21}u + 2a_{12}v + a_{31}u^2 + 2a_{22}uv + a_{13}v^2 + O((u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}), \\ g &= 2a_{02} + 2a_{12}u + 2a_{03}v + a_{22}u^2 + 2a_{13}uv + a_{04}v^2 + O((u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}). \end{aligned}$$

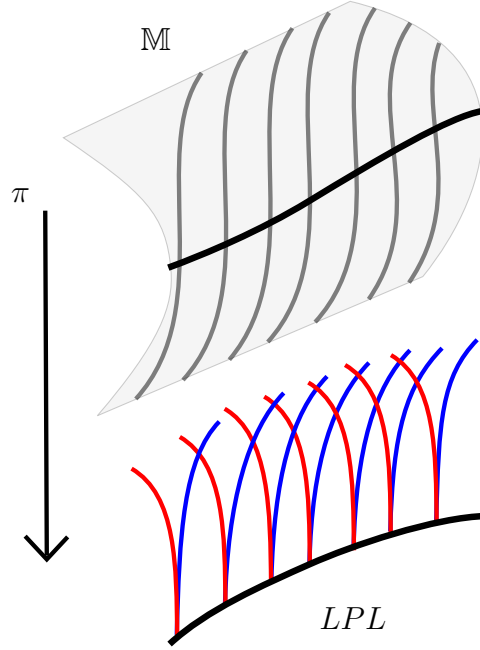


Figura 2.6: Singularidades tipo cúspides onde o LPL é uma curva regular espaço ou tempo.

Pelo exposto na Seção 1.5, a configuração local depende do termo independente de L_1 , da parte linear de M_1 e da parte quadrática de N_1 . Assim, a parte de interesse da equação das linhas principais é

$$4a_{02}dv^2 + [-4a_{30}u - 4a_{21}v - 2a_{40}u^2 - 4a_{31}uv + (2a_{11}^3 - 2a_{22})v^2]du^2 = 0.$$

Temos que $\delta(u, v) = 64a_{02}a_{30}u + 64a_{02}a_{21}v + O(u^2 + v^2)$. Disto segue que, no plano (u, v) com u, v pequenos, o conjunto LPL é a curva $v = -\frac{a_{30}}{a_{21}}u + O(u^2)$ e por conseguinte, a curva LPL localmente é

$$\gamma(u) = \left(u - \frac{a_{30}}{a_{21}}u, 0, u + \frac{a_{30}}{a_{21}}u \right) + (O_1(u^2), O_2(u^2), O_3(u^2))$$

a qual é tipo luz se, e somente se, $a_{30} = 0$.

Definimos $F = 4a_{02}p^2 + [-4a_{30}u - 4a_{21}v - 2a_{40}u^2 - 4a_{31}uv + (2a_{11}^3 - 2a_{22})v^2]$, a superfície $\mathbb{M} = F^{-1}(0)$ a qual é suave na origem e o campo de Lie-Cartan

$$Y_F(u, v, p) = (8a_{02}p, 8a_{02}p^2, 4a_{21}p + 4a_{31}v + 4a_{40}u + 4a_{31}up + (-4a_{11}^3 + 4a_{22})vp).$$

Em $(0, 0)$, temos que $F(0, 0, p) = 4a_{02}p^2 = 0$ então $p = 0$ e $Y_F(0, 0, 0) = (0, 0, 4a_{30})$:

- i. se $a_{30} \neq 0$ a curva LPL é espaço ou tempo, e o campo Y_F é regular em $(0, 0, 0)$

LPL

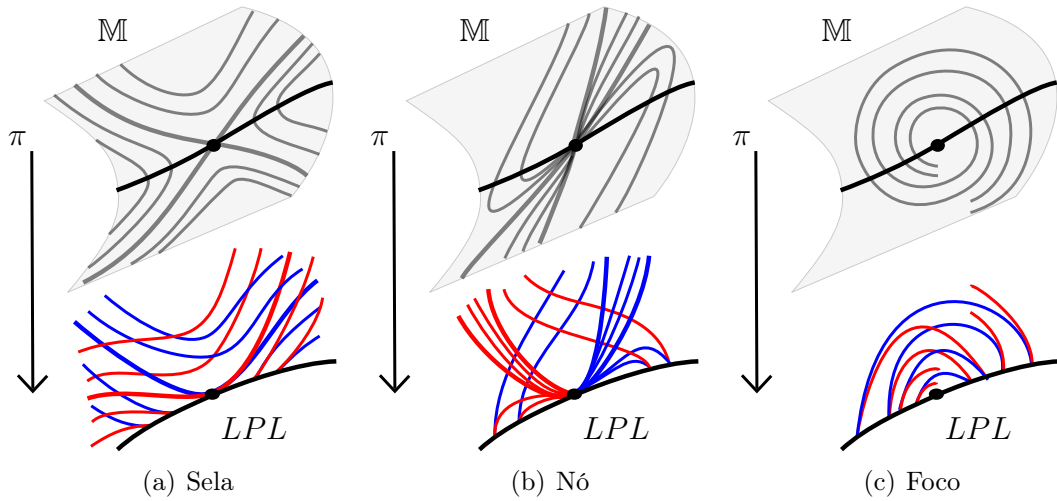


Figura 2.7: Singularidades nos pontos onde o discriminante LPL é tipo luz.

e transversal ao criminante. Assim, as curvas projetadas por π no plano (u, v) são cúspides na curva LPL , veja Figura 2.6.

- ii. se $a_{30} = 0$ a curva LPL é tipo luz. O campo Y_F tem uma singularidade no ponto $(0, 0, 0)$. Os valores próprios de

$$DY_F(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8a_{02} \\ 0 & 0 & 0 \\ 4a_{40} & 4a_{31} & 4a_{21} \end{pmatrix}$$

são

$$\lambda_1 = 2a_{21} + 2\sqrt{8a_{02}a_{40} + a_{21}^2}, \quad \lambda_2 = 2a_{21} - 2\sqrt{8a_{02}a_{40} + a_{21}^2},$$

e portanto temos as conclusões que o ponto p é sela, nó ou foco, em cada caso. Portanto, a configuração principal na vizinhança de p é como na Figura 2.7.

Além disso, o vetor tangente ao criminante é

$$(\nabla F \times_e \nabla F_p)(0, 0, 0) = (-32a_{02}a_{21}, 0, 0),$$

e os vetores próprios são $(1, 0, \lambda_1)$ e $(1, 0, \lambda_2)$. Portanto se verifica que quando a singularidade é sela (respec. nó) os vetores próprios tem inclinação negativa (respec. positiva) com respeito ao criminante. Isto justifica a maneira de desenhar a inclinação dos espaços próprios da sela e nó em \mathbb{M} .

□

Quando se cumpre qualquer uma das opções de ii. a curva LPL é luz ($a_{30} = 0$) e $a_{40} \neq 0$, fazendo uma aproximação de maior grau para curva LPL se pode conferir que necessariamente ela muda de caráter nestes pontos, isto é, $\delta(u, v) = -32a_{02}a_{11}^3v^2 + 32a_{02}a_{22}^2 + 64a_{02}a_{31}uv + 32a_{02}a_{40}u^2 + 64a_{03}a_{21}v^2 + 64a_{12}a_{21}uv + 64a_{02}a_{21}v$ e no plano a curva é $v = A_2u^2 + A_3u^3 + O(u^3)$ com $A_2 = -\frac{1}{2}\frac{a_{40}}{a_{21}} \neq 0$ e $A_3 = \frac{1}{2}\frac{a_{40}(a_{02}a_{31} + a_{12}a_{21})}{a_{21}^2a_{02}}$. Assim, o LPL é

$$\gamma(u) = (u + A_2u^2 + A_3u^3, A_2a_{11}u^3, u - A_2u^2 - A_3u^3) + (O_1(u^4), O_2(u^4), O_3(u^4))$$

e $\langle \gamma'(u), \gamma'(u) \rangle = 8A_2u + 12A_3u^2 + O(u^3)$, portanto γ muda de caráter em $u = 0$.

No trópico

Suponha que o trópico de uma imersão $\alpha \in \mathcal{I}^r$ é uma curva regular e seja p um ponto tipo luz deste. Pelo Lema 1.29, o LPL passa por p e é tipo luz. Consideremos a carta local $(u, v) : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ e uma translação $\Gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\Gamma(\alpha(p)) = 0$ e

$$\Gamma(\alpha(u, v)) = (u, v, h(u, v))$$

onde, $h(u, v) = u + a_{11}uv + \frac{1}{2}a_{02}v^2 + \frac{1}{31}(a_{30}u^3 + 3a_{21}u^2v + 3a_{12}uv^2 + a_{03}v^3) + O((u^2 + v^2)^2)$ com $a_{ij} \in \mathbb{R}$. A carta é tomada de forma que $\alpha_u(p)$ seja tipo luz.

Nesta carta temos que $\Delta(u, v) = -2a_{11}v + (-a_{11}^2 - a_{30})u^2 + (-2a_{02}a_{11} - 2a_{21})uv + (-a_{02}^2 - a_{11}^2 - a_{12})v^2 + O((u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}})$, assim $v = -\frac{1}{2}\frac{a_{11}^2 + a_{30}}{a_{11}}u^2 + O(u^3)$ e o trópico localmente é $\hat{\gamma}(u) = (u, -\frac{1}{2}\frac{a_{11}^2 + a_{30}}{a_{11}}u^2, u - (\frac{1}{2}a_{11}^2 + \frac{1}{3}a_{30})u^3) + (0, O_1(u^3), O_2(u^4))$ e

$$\langle \hat{\gamma}'(u), \hat{\gamma}'(u) \rangle = \frac{(2a_{11}^2 + a_{30})^2}{a_{11}^2}u^2 + O(u^3)$$

o qual é zero em $u = 0$, ou seja, o trópico é tipo luz na origem.

Proposição 2.6. *Seja $p \in M$ um ponto regular tipo luz do trópico de $\alpha \in \mathcal{I}^r$. Considere a carta local (u, v) ,*

$$\alpha(u, v) = (u, v, h(u, v)).$$

Suponha que $a_{11} \neq 0$, $a_{30} \neq -a_{11}^2$ e que para $\lambda_1 = -a_{30}$, $\lambda_2 = 2a_{11}^2 + a_{30}$ uma das opções

- $\lambda_1\lambda_2 < 0$ (tipo sela)
- $\lambda_1\lambda_2 > 0$ (tipo nó)

é satisfeita. Então, a configuração principal na vizinhança de p é como a sela ou nó da Figura 2.8. A estes pontos vamos chamar de singularidades do trópico luz hiperbólicas e vamos denotar por S_l^t . Além disso, o trópico é a projeção da curva integral do campo de Lie-Cartan na direção do espaço próprio associado à λ_2 .

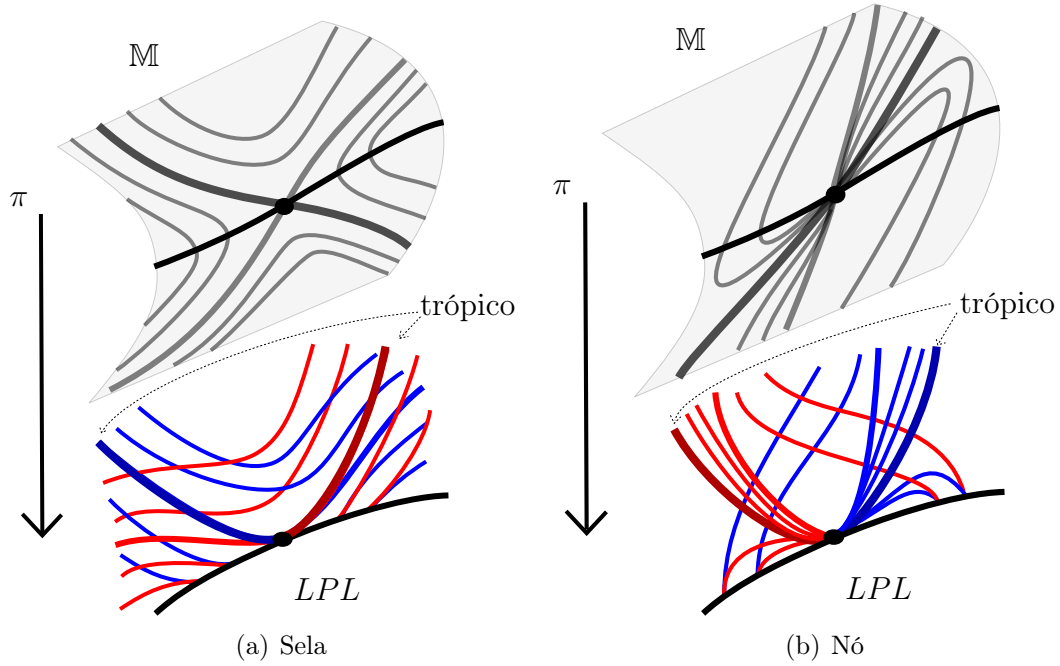


Figura 2.8: Singularidades nos pontos onde o trópico e o LPL são tipo luz.

Demonstração. Nesta carta,

$$\begin{aligned}
 E &= -2a_{11}v - a_{30}u^2 - 2a_{21}uv - (a_{11}^2 + a_{12})v^2 + O((u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}), \\
 F &= -a_{11}u - a_{02}v - \frac{1}{2}a_{21}u^2 - (a_{12} + a_{11}^2)uv - (a_{11}a_{02} + \frac{1}{2}a_{03})v^2 + O((u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}), \\
 G &= 1 - a_{11}^2u^2 - 2a_{02}a_{11}uv - a_{02}^2v^2 + O((u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}), \\
 e &= a_{30}u + a_{21}v + \frac{1}{2}a_{40}u^2 + a_{31}uv + \frac{1}{2}a_{22}v^2 + O((u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}), \\
 f &= a_{11} + a_{21}u + a_{12}v + \frac{1}{2}a_{31}u^2 + a_{22}uv + \frac{1}{2}a_{13}v^2 + O((u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}), \\
 g &= a_{02} + a_{12}u + a_{03}v + \frac{1}{2}a_{22}u^2 + a_{13}uv + \frac{1}{2}a_{04}v^2 + O((u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}).
 \end{aligned}$$

Pelo exposto na Seção 1.5 a configuração local depende do termo independente de L_1 , da parte linear de M_1 e da parte quadrática de N_1 . Assim, a parte de interesse

da equação das linhas principais é

$$\begin{aligned}
& -a_{11}dv^2 + (-a_{30}u + (-2a_{02}a_{11} - a_{21})v)dvdu + [-a_{20}a_{11}u + (a_{02}a_{20} - 2a_{11}^2)v \\
& - \frac{3}{2}a_{20}a_{21}u^2 + (a_{02}a_{20}^2 - a_{11}^2a_{20} + a_{02}a_{30} - 3a_{11}a_{21} - a_{12}a_{20})uv \\
& + (-3a_{11}a_{12} + a_{02}a_{11}a_{20} + \frac{1}{2}a_{20}a_{03} + a_{02}a_{21} - a_{11}^3)v^2]du^2 = 0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

e também definimos $F(u, v, p)$ fazendo $p = \frac{dv}{du}$ em (2.1), a superfície $\mathbb{M} = F^{-1}(0)$ e o campo de Lie-Cartan

$$\begin{aligned}
Y_F(u, v, p) = & (-a_{30}u + (-2a_{02}a_{11} - a_{21})v - 2a_{11}p, -a_{30}up + (-2a_{02}a_{11} - a_{21})vp \\
& - 2a_{11}p^2, (-a_{02}a_{30} + 3a_{11}a_{21})v + (2a_{11}^2 + a_{30})p + (-a_{02}a_{30} + 3a_{11}a_{21})up \\
& + (2a_{11}^3 - 2a_{02}a_{21} + 6a_{11}a_{12})vp + (2a_{02}a_{11} + a_{21})p^2).
\end{aligned}$$

Como $F(0, 0, p) = -a_{11}p^2 = 0$, então $p = 0$. Assim, $(0, 0, 0)$ é uma singularidade do campo. Os valores próprios de

$$DY_F(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -a_{30} & -2a_{02}a_{11} - a_{21} & -2a_{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{02}a_{30} + 3a_{11}a_{21} & 2a_{11}^2 + a_{30} \end{pmatrix}$$

são $\lambda_1 = -a_{30}$ e $\lambda_2 = 2a_{11}^2 + a_{30}$. Temos assim, uma singularidades tipo sela ou nó para Y_F . Não temos foco já que os valores próprios λ_1 e λ_2 são reais. O vetor tangente ao criminante é

$$(\nabla F \times_e \nabla F_p)(0, 0, 0) = 4a_{11}^3 \left(1, 0, -\frac{a_{30}}{2a_{11}} \right),$$

e os vetores próprios de λ_1 e λ_2 são $(1, 0, 0)$ e $\left(1, 0, -\frac{a_{11}^2 + a_{30}}{a_{11}} \right)$, respectivamente. Assim, os vetores próprios tem inclinação negativa (respec. positiva) com respeito ao criminante quando a singularidade é sela (respec. nó), pois

$$\left(-\frac{a_{11}^2 + a_{30}}{a_{11}} + \frac{a_{30}}{2a_{11}} \right) \frac{a_{30}}{2a_{11}} = -\frac{1}{4} \frac{a_{30}(2a_{11}^2 + a_{30})}{a_{11}^2},$$

negativo (respec. positivo), então a configuração nestes pontos é como na Figura 2.8.

Por último, temos que o trópico é uma linha principal. Localmente na carta (u, v) é

$$v = -\frac{a_{11}^2 + a_{30}}{2a_{11}}u^2 + O(u^3),$$

e disto $p = \frac{dv}{du} = -\frac{a_{11}^2 + a_{30}}{2a_{11}}u + O(u^2)$. Entretanto, fazendo $v = v(u, p)$ em $F = 0$ a superfície \mathbb{M} é localmente $\hat{X}(u, p) = (u, -\frac{p^2}{2a_{11}} - \frac{a_{30}up}{a_{11}^2}, p)$. Assim, o trópico é a projeção da curva integral para o campo Y_F

$$\gamma(u) = \left(u + O_1(u^2), -\frac{a_{11}^2 + a_{30}}{2a_{11}}u^2 + O_2(u^3), -\frac{a_{11}^2 + a_{30}}{a_{11}}u + O_3(u^2) \right)$$

e $\gamma'(0) = \left(1, 0, -\frac{a_{11}^2 + a_{30}}{a_{11}} \right)$ o qual é o vetor próprio associado à λ_2 . \square

Quando o trópico é uma curva regular, ela é uma linha principal com singularidades nos pontos luz. Como o trópico e o LPL somente se intersectam tangencialmente nos pontos luz, temos que a singularidade não pode ser tipo foco.

Na Figura 2.9 fazemos um resumo das diferentes singularidades da configuração principal considerando o trópico uma curva regular. Os pontos umbílicos E_i que são três tipos, os T_i que são cinco tipos, o ponto A pode ser sela ou nó (o trópico e o LPL são tipo luz nele), o ponto B pode ser sela, nó ou foco (o LPL é tipo luz), e o ponto C que é cúspide (o LPL é tipo espaço ou tempo).

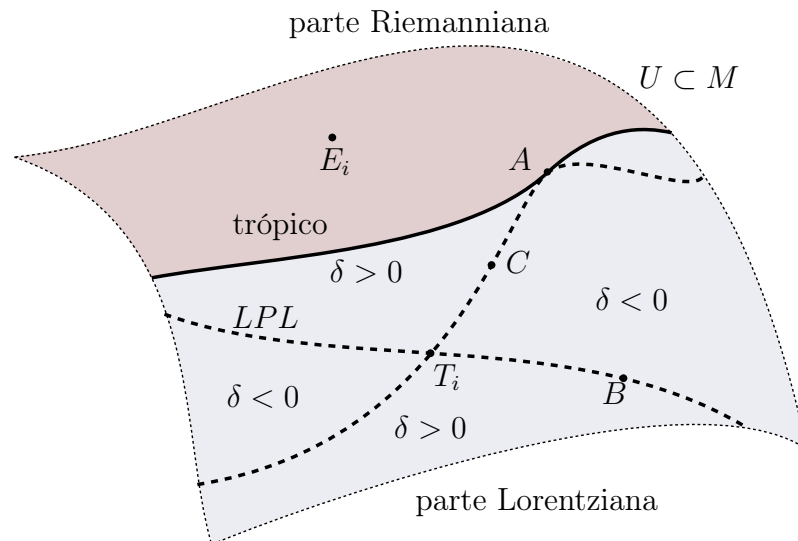


Figura 2.9: Resumo das singularidades estáveis da configuração principal. O ponto A é tipo luz para o trópico e o LPL , as curvas são tangentes nesse ponto.

2.1.4 Estabilidade estrutural em uma singularidade

Definição 2.7. Uma imersão $\alpha \in \mathcal{I}^{r,s}$ é chamada C^s -estruturalmente estável na topologia C^s em um ponto $p \in M$ se para toda vizinhança $U(p)$ de p em M existe

uma vizinhança \mathcal{U} de α em $\mathcal{I}^{r,s}$ tal que para toda imersão $\beta \in \mathcal{U}$ existe um ponto $q = q_\beta$ em $U(p)$ e um homeomorfismo $h = h_\beta : W(p) \rightarrow W(q)$, entre vizinhanças de p e q com $h(p) = q$, levando conjuntamente as folheações $\mathcal{F}_{1,\alpha}|_{W(p)}$ e $\mathcal{F}_{2,\alpha}|_{W(p)}$ nas folheações $\mathcal{F}_{1,\beta}|_{W(q)}$ e $\mathcal{F}_{2,\beta}|_{W(q)}$, respectivamente.

Definição 2.8. Dizemos que p é uma singularidade hiperbólica de $\alpha \in \mathcal{I}^r$ se $p \in U_e \cup U_t \cup \mathcal{S}_l \cup \mathcal{S}_l^t$ ou p é cúspide.

Teorema 2.9. O conjunto de imersões tal que suas singularidades são todas hiperbólicas é aberto em $\mathcal{I}^{r,3}$ ($r \geq 3$). Se p é uma singularidade hiperbólica de α , então α é localmente C^3 -estruturalmente estável em p na configuração das linhas principais.

Demonstração. A abertura das condições das Proposições 2.1, 2.3, 2.5 e 2.6 garantem que o conjunto das imersões com singularidades hiperbólicas é aberto. Além disso, interpretando as separatrizes como as projeções das separatrizes das singularidades do campo de Lie-Cartan, concluímos que elas dependem continuamente de α .

Vamos construir a equivalência topológica na vizinhança de uma singularidade em cada caso. Para isso, definimos a vizinhança \mathcal{U} de α em $\mathcal{I}^{r,3}$ e p uma singularidade hiperbólica de α . Seja $W(p)$ uma vizinhança de p . Para $\beta \in \mathcal{U}$ temos a singularidade q do mesmo tipo que p e $W(q)$ uma vizinhança de q . Sem perda de generalidade, podemos considerar $\overline{W(p)}$ e $\overline{W(q)}$ como discos.

E_1 : Seja a (respec. b) a interseção da separatriz de p da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ (respec. $\mathcal{F}_{2,\alpha}$) com o bordo de $\overline{W(p)}$. Da mesma maneira, c (respec. d) é a interseção da separatriz da folheação $\mathcal{F}_{1,\beta}$ (respec. $\mathcal{F}_{2,\beta}$) com o bordo de $\overline{W(q)}$. Definimos $h(p) = q$ e $h|_{[a,b]}$ como qualquer homeomorfismo tal que $h(a) = c$ e $h(b) = d$. Para cada $x \in \overline{W(p)}$, sejam x_1 (respec. x_2) a interseção da linha principal da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ (respec. $\mathcal{F}_{2,\alpha}$) com o arco principal $\widehat{a,b}$. Chamemos $y_1 = h(x_1)$ e $y_2 = h(x_2)$. Assim, definimos $h(x) = y$, onde y é interseção das linhas principais da folheação $\mathcal{F}_{1,\beta}$ e $\mathcal{F}_{2,\beta}$ passando por y_1 e y_2 , respectivamente. Pela construção, h é uma equivalência local.

E_2 : Sejam p_{11} (respec. p_{21}) a interseção de uma das separatrizes de p da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ (respec. $\mathcal{F}_{2,\alpha}$) com o bordo de $\overline{W(p)}$. Da mesma maneira, q_{11} (respec. q_{21}) é a interseção de uma das separatrizes da folheação $\mathcal{F}_{1,\beta}$ (respec. $\mathcal{F}_{2,\beta}$) com o bordo de $\overline{W(q)}$. Considere também, um arco principal da folheação $\mathcal{F}_{2,\alpha}$ (respec. $\mathcal{F}_{1,\alpha}$) que intersecta os arcos das separatrizes da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ (respec. $\mathcal{F}_{2,\alpha}$) nos pontos p_{12} e p_{13} (respec. p_{22} e p_{23}). Definimos $h(p) = q$ e, $h|_{[p,p_{11}]}$, $h|_{[p_{12},p_{13}]}$, $h|_{[p,p_{21}]}$ e $h|_{[p_{22},p_{23}]}$ como qualquer homeomorfismo tal que

$h(p_{ij}) = q_{ij}$. Para cada $x \in \overline{W(p)}$, sejam x_1 (respec. x_2) a interseção da linha principal da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ (respec. $\mathcal{F}_{2,\alpha}$) com algum dos arcos principais $\widehat{p, p_{11}}$ ou $\widehat{p_{12}, p_{13}}$ (respec. $\widehat{p, p_{21}}$ ou $\widehat{p_{22}, p_{23}}$). Chamemos $y_1 = h(x_1)$ e $y_2 = h(x_2)$. Assim, definimos $h(x) = y$ como a interseção das linhas principais da folheação $\mathcal{F}_{1,\beta}$ e $\mathcal{F}_{1,\beta}$ passando por y_1 e y_2 , respectivamente.

E_3 : Sejam p_{11}, p_{12} e p_{13} (respec. p_{21}, p_{22} e p_{23}) as interseções das separatrizes de p da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ (respec. $\mathcal{F}_{2,\alpha}$) com o bordo de $\overline{W(p)}$. Da mesma maneira, q_{11}, q_{12} e q_{13} (respec. q_{21}, q_{22} e q_{23}) são as interseções das separatrizes da folheação $\mathcal{F}_{1,\beta}$ (respec. $\mathcal{F}_{2,\beta}$) com o bordo de $\overline{W(q)}$. Definimos $h(p) = q$ e $h|_{[p, p_{ij}]}$ como qualquer homeomorfismo tal que $h(p_{ij}) = q_{ij}$. Para cada $x \in \overline{W(p)}$, sejam x_1 (respec. x_2) a interseção da linha principal da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ (respec. $\mathcal{F}_{2,\alpha}$) com algum dos arcos principais $\widehat{p, p_{1j}}$ (respec. $\widehat{p, p_{2j}}$). Chamemos $y_1 = h(x_1)$ e $y_2 = h(x_2)$. Assim, definimos $h(x) = y$, onde y é interseção das linhas principais da folheação $\mathcal{F}_{1,\beta}$ e $\mathcal{F}_{1,\beta}$ passando por y_1 e y_2 , respectivamente.

T_1 : Sejam p_i (respec. q_i), $i = 1, 2, 3, 4$, as interseções do LPL com o bordo de $\overline{W(p)}$ (respec. $\overline{W(q)}$). Definimos $h(p) = q$ e $h|_{[p, p_i]}$ como qualquer homeomorfismo tal que $h(p_i) = q_i$. Para cada x na região de $\overline{W(p)}$ que temos linhas principais, sejam x_1 (respec. x_2) a interseção da linha principal da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ (respec. $\mathcal{F}_{2,\alpha}$) com o LPL . Chamemos $y_1 = h(x_1)$ e $y_2 = h(x_2)$. Definimos $h(x) = y$ como a interseção das linhas principais da folheação $\mathcal{F}_{1,\beta}$ e $\mathcal{F}_{2,\beta}$ as quais intersectam o LPL em y_1 e y_2 , respectivamente (observe que nos pontos y_1 e y_2 existe uma escolha de linhas principais de diferente folheação que se intersectam e outra que não).

T_2 : Este caso é similar ao T_1 .

T_3 : Sejam p_i (respec. q_i), $i = 1, \dots, 6$, as interseções do LPL e das separatrizes σ_1 e σ_2 com o bordo de $\overline{W(p)}$ (respec. $\overline{W(q)}$). Definimos $h(p) = q$ e $h|_{[p, p_i]}$ como qualquer homeomorfismo tal que $h(p_i) = q_i$ (veja Figura 2.10(a)). Para cada x na região de $\overline{W(p)}$ que temos linhas principais, sejam x_1 (respec. x_2) a interseção da linha principal da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ (respec. $\mathcal{F}_{2,\alpha}$) com o LPL , σ_1 ou σ_2 . Chamemos $y_1 = h(x_1)$ e $y_2 = h(x_2)$. Definimos $h(x) = y$ como a interseção das linhas principais da folheação $\mathcal{F}_{1,\beta}$ e $\mathcal{F}_{2,\beta}$ as quais intersectam o LPL , σ_1 ou σ_2 em y_1 e y_2 , respectivamente (observe que nos pontos y_1 e y_2 existe uma escolha de linhas principais de diferente folheação que se intersectam e outra que não).

T_4 : Definimos h em σ_i ($i = 1, \dots, 6$) e na interseção do LPL com $\overline{W(p)}$ como qualquer homeomorfismo que preserva os extremos (veja Figura 2.10(b)). Além

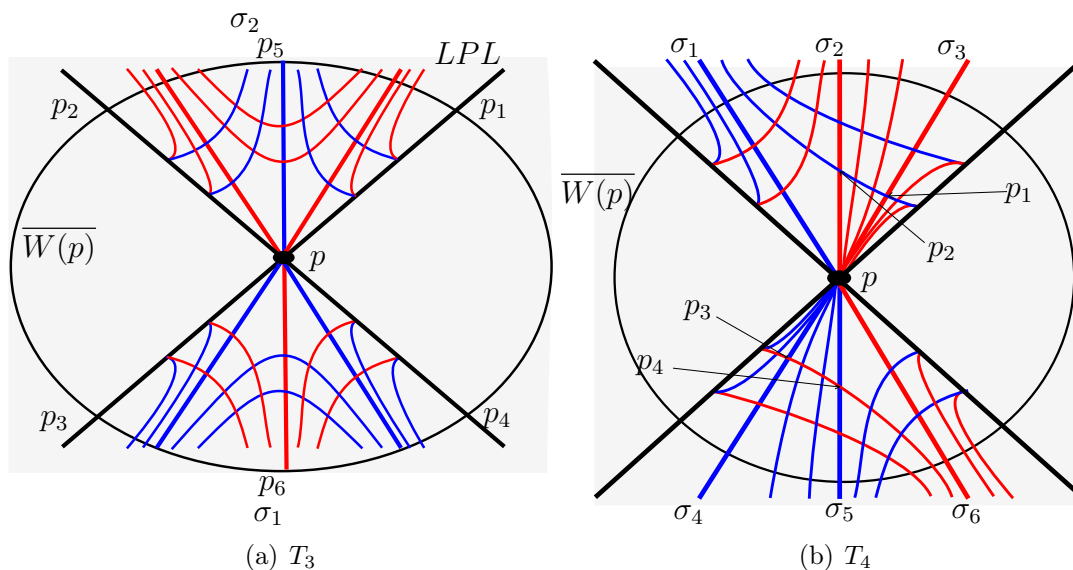


Figura 2.10: Construção da equivalência local em T_3 e T_4 .

disso, definimos h nos arcos principais $[p_1, p_2]$ e $[p_3, p_4]$ da mesma maneira. O procedimento para definir h em um ponto x é sempre procurar as interseções x_1 e x_2 das linhas principais que passam por x com os arcos σ_i , o LPL ou os arcos $[p_i, p_j]$. Assim, a imagem de x por h é a interseção das curvas que passam por $h(x_1)$ e $h(x_2)$.

T_5 : O procedimento é similar ao caso T_4 . Definimos h na interseção do LPL com a vizinhança, nas separatrizes e em um arco principal transversal as separatrizes. Para os outros pontos o procedimento é igual.

Sela: Enviamos por qualquer homeomorfismo os arcos principais das separatrizes e do LPL na vizinhança de tal maneira que preserve os extremos. Depois, o procedimento é igual aos outros casos.

Nó: Definimos h como qualquer homeomorfismo que leva os arcos principais que são projeções das variedades estáveis do campo de Lie-Cartan e o LPL preservando os extremos. Além disso, definimos h nos arcos principais $[p_1, p_2]$ e $[p_3, p_4]$ (veja Figura 2.11) de tal maneira que os extremos sejam preservados. Para o resto de pontos na vizinhança $W(p)$ onde temos linhas principais procedemos como nos outros casos.

Foco: Aqui é suficiente definir h na interseção do LPL com a vizinhança de tal maneira que preserve os extremos. Depois, para cada ponto na vizinhança onde temos linhas principais o procedimento é igual aos outros casos.

Cúspide: Igual ao caso do foco.

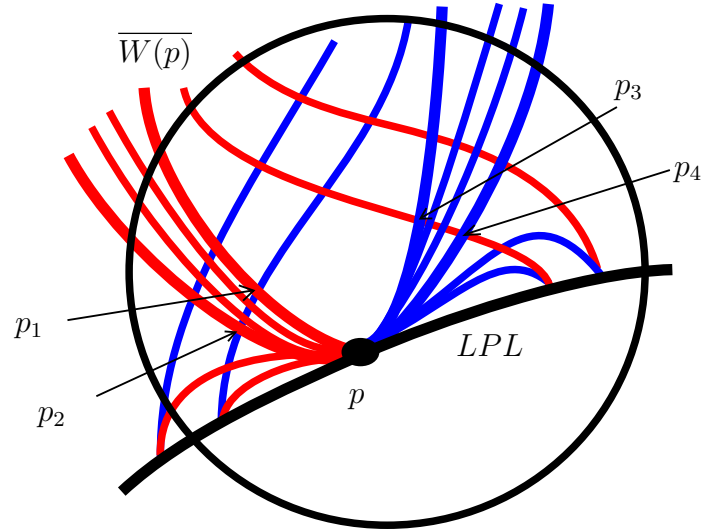


Figura 2.11: Construção da equivalência local em um nó.

□

2.2 Ciclos Principais

Definição 2.10. *Uma curva suave fechada que é linha principal é chamada de ciclo principal. O ciclo principal é hiperbólico se a derivada da transformação de primeiro retorno (ou transformação de Poincaré) associada a este é diferente de 1.*

Pela Observação 1.12, não há ciclos principais tipo tempo ou luz. Temos quatro tipos de ciclos principais (Figura 2.12):

- tipo espaço (\mathcal{C}_e): são curvas fechadas tipo espaço contidas na parte Riemanniana ou Lorentziana de α sem interceptar o trópico.
- que mudam de caráter (\mathcal{C}_m): são curvas fechadas que interceptam transversalmente o trópico onde são tipo luz, com arcos tipo espaço na parte Riemanniana e tipo tempo na parte Lorentziana.
- no trópico (\mathcal{C}_t): são curvas fechadas tipo espaço contidas no trópico.
- suaves por partes (\mathcal{C}_s): são curvas fechadas que interceptam o discriminante LPL de α transversalmente (singularidade tipo cúspide), nesses pontos elas não são suaves. Tem arcos tipo tempo e espaço, e podem interceptar o trópico. Realmente, não é um ciclo principal propriamente dito, já que tem singularidades e não é suave, mas por seu comportamento de curva fechada vamos tratá-lo como se fosse.

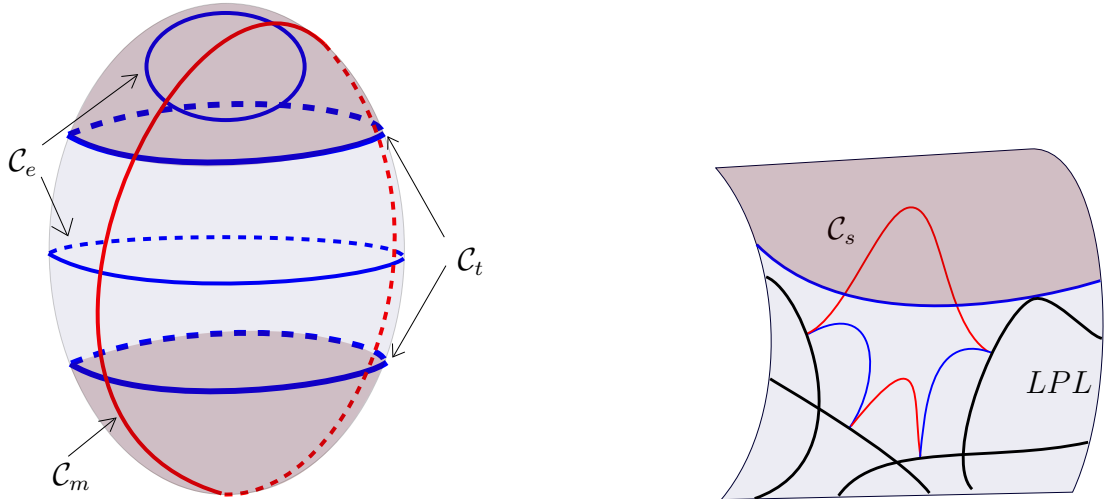


Figura 2.12: Os quatro diferentes tipos de ciclos principais.

Antes de calcular a derivada da transformação do primeiro retorno associada a um ciclo principal, vamos calcular a transformação de transição em arcos principais.

2.2.1 Derivada da transformação de transição

A transformação de transição $\Pi : U \subset \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ associada a uma linha principal da folheação $\mathcal{F}_{i,\alpha}$ ($i = 1, 2$) entre as seções transversais Σ_1 e Σ_2 , é a aplicação tal que para cada $p \in U$ sua imagem é a primeira interseção com Σ_2 pela folheação $\mathcal{F}_{i,\alpha}$. Ela é a transformação do primeiro retorno quando $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

Consideremos três tipos de arcos: espaço, tempo e que contém um ponto luz. Vamos calcular a derivada da aplicação de transição nestes casos.

Arco principal tipo espaço ou tempo

Considere o triedro de Darboux $\{t, V = N \wedge t, N\}$ da Proposição 1.23, associado à curva c tipo espaço ou tempo parametrizada pelo comprimento de arco s , onde $t(s) = d\alpha(c(s))c'(s)$, $N(s) = N(c(s))$ é o normal de α e $V(s) = N(s) \wedge t(s)$. Aqui $\langle t, t \rangle = \bar{\epsilon}$, $\langle N, N \rangle = \bar{\eta}$, e portanto $\langle V, V \rangle = -\bar{\epsilon}\bar{\eta}$, com $(\bar{\epsilon}, \bar{\eta}) \in \{(1, -1), (1, 1), (-1, 1)\}$.

Lema 2.11. *Seja $\alpha \in \mathcal{I}^r$ e $c : [0, l] \rightarrow M$ um arco da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ tipo espaço ou tempo, parametrizado pelo comprimento de arco s , de comprimento l e contido na parte Riemanniana ou Lorentziana de M . Então a expressão:*

$$\alpha(s, v) = \alpha(c(s)) + \bar{\eta}v(N \wedge t)(s) - \bar{\epsilon} \left(\frac{1}{2}k_2(s)v^2 + \frac{1}{6}A(s)v^3 + v^3B(s, v) \right) N(s), \quad (2.2)$$

onde $k_2(s)$ é a curvatura principal de $\mathcal{F}_{2,\alpha}$ sobre c , define uma carta local (s, v) na vizinhança de c .

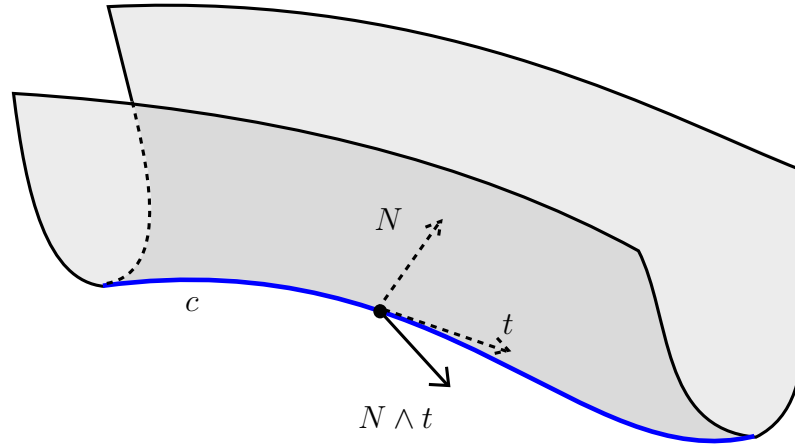


Figura 2.13: A curva c como arco principal.

Demonstração. A aplicação

$$\alpha(s, v, w) = \alpha(c(s)) + \bar{\eta}v(N \wedge t)(s) - \bar{\epsilon}wN(s)$$

é um difeomorfismo local em uma vizinhança do eixo s . De fato, $[\alpha_s, \alpha_v, \alpha_w](s, 0, 0) = \langle \alpha_s \times \alpha_v, \alpha_w \rangle = -\bar{\epsilon}\bar{\eta}$. Assim, existe uma função $w(s, v)$ tal que $\alpha(s, v, w(s, v))$ é uma parametrização de uma vizinhança tubular de $\alpha \circ c$.

Para cada s , $w(s, v)$ é a parametrização da curva de interseção entre $\alpha(M)$ e o plano gerado por $\{(N \wedge t)(s), N(s)\}$. O vetor $(N \wedge t)(s)$ é o vetor tangente da curva w em $w(s, 0)$. A curvatura normal de $\beta_s(v) = w(s, v)$ em $v = 0$ é $k_n(\beta_s)(s, 0) = k_2(s)$, isto é, a curvatura principal da folheação \mathcal{F}_2 sobre a curva c . Assim,

$$\alpha(s, v) = \alpha(c(s)) + \bar{\eta}v(N \wedge t)(s) - \bar{\epsilon} \left(\frac{1}{2}k_2(s)v^2 + \frac{1}{6}A(s)v^3 + vB(s, v) \right) N(s)$$

define uma carta local. □

Proposição 2.12. *Seja $\alpha \in \mathcal{I}^r$ e $c : [0, l] \rightarrow M$ um arco principal tipo espaço ou tempo, parametrizado pelo comprimento de arco s , de comprimento l e contida na*

parte Riemanniana ou Lorentziana de M . Então a derivada da transformação de transição Π associada a c entre as seções $\Sigma_1 = \alpha(0, v)$ e $\Sigma_2 = \alpha(l, v)$ é dada por

$$\ln \Pi'(0) = \int_0^l \frac{-k_2'(s)}{k_2(s) - k_1(s)} ds, \quad (2.3)$$

onde $k_1(s)$ e $k_2(s)$ são as curvaturas principais sobre c .

Demonstração. Usando a carta local dada pelo Lema 2.11, a equação das linhas principais na vizinhança de $\{v = 0\}$ é

$$L_1(s, v) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + M_1(s, v) \frac{dv}{ds} + N_1(s, v) = 0, \quad (2.4)$$

onde

$$\begin{aligned} L_1(s, v) &= -k_2'(s)v + O(v^2), \\ M_1(s, v) &= -\bar{\eta}(k_2(s) - k_1(s)) + \bar{\eta}(-3k_g(s)k_2(s) - A(s) + 2k_1(s)k_g(s) + k_g(s)k_2(s))v \\ &\quad + O(v^2), \\ N_1(s, v) &= -\bar{\eta}k_2'(s)v + O(v^2). \end{aligned}$$

Denotemos por $v(s, r)$ a solução da equação (2.4) com condição inicial $v(0, r) = r = v_0$ e $v(s, 0) = 0$. Assim, a transformação de transição entre as seções transversais $\Sigma_1 = \alpha(0, v)$ e $\Sigma_2 = \alpha(l, v)$ é $\Pi(r) = v(l, r)$.

Derivando a equação (2.4) com relação a r e avaliando em $r = v_0 = 0$, temos

$$\begin{aligned} L_{1v}(s, 0)v_r(s, 0)(v_s(s, 0))^2 + 2L_1(s, 0)v_s(s, 0)v_{sr}(s, 0) + M_{1v}(s, 0)v_r(s, 0)v_s(s, 0) \\ + M_1(s, 0)v_{sr}(s, 0) + N_{1v}(s, 0)v_r(s, 0) = 0. \end{aligned}$$

Sendo $v_s(s, 0) = 0$, então

$$M_{1v}(s, 0)v_{sr}(s, 0) + N_{1v}(s, 0)v_r(s, 0) = 0.$$

Usando que $v_{sr} = v_{rs}$ e integrando com relação a s no intervalo $[0, s]$ temos

$$v_r(s, 0) = \exp \left\{ \int_0^s -\frac{N_{1v}(s, 0)}{M_1(s, 0)} ds \right\} = \exp \left\{ \int_0^s \frac{-k_2'(s)}{k_2(s) - k_1(s)} ds \right\}.$$

Portanto,

$$\Pi'(0) = \left. \frac{dv}{dr}(l, r) \right|_{r=0} = \exp \left\{ \int_0^l -\frac{N_{1v}(s, 0)}{M_1(s, 0)} ds \right\} = \exp \left\{ \int_0^l \frac{-k_2'(s)}{k_2(s) - k_1(s)} ds \right\}.$$

□

Observação 2.13. O procedimento anterior para calcular a derivada da transformação de transição pode ser aplicado em qualquer parametrização $X(s, v)$ na vizinhança de uma linha principal c , sempre que satisfaça $X(s, 0) = c(s)$ e $M_1(s, 0) \neq 0$. Em uma carta com tais condições a derivada é

$$\Pi'(0) = \exp \left\{ \int_0^l -\frac{N_{1v}(s, 0)}{M_1(s, 0)} ds \right\}.$$

Arco principal que intersecta transversalmente o trópico

Mostramos aqui a existência de uma carta na vizinhança de um arco principal transversal ao trópico, com isso podemos calcular a derivada da transformação de transição.

Dada uma imersão α , suponha que o trópico é uma curva regular tipo espaço. Seja p um ponto no trópico e o arco principal a ele transversal $c : [-\epsilon, \epsilon] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, com ϵ pequeno e $c(0) = p$. Pelo Lema 1.31 temos que $c'(0)$ é tipo luz, então para $\alpha(c(s)) = (c_1(s), c_2(s), c_3(s))$ temos que $c_1'^2(0) + c_2'^2(0) - c_3'^2(0) = 0$. Como a curva é regular $c_1'^2(0) + c_2'^2(0) \neq 0$ e $c_3'^2(0) \neq 0$.

Tomemos o parâmetro s tal que a projeção da curva $\alpha(c(s))$ no plano seja a curva $\bar{c}(s) = (c_1(s), c_2(s))$ parametrizada pelo comprimento do arco s com curvatura \bar{k} , então $c_1'^2(0) + c_2'^2(0) = 1$ e $c_3'(0) = \pm 1$. Assim, para ϵ pequeno podemos definir o triedro $\{t, n_1, n_2\}$, com $t(s) = (c_1'(s), c_2'(s), c_3'(s))$, $n_1(s) = (c_2'(s), -c_1'(s), 0)$ e $n_2(s) = (0, 0, c_3'(s))$.

Lema 2.14. *Suponha que $c_3''(0) \neq 0$ para α , p e c nas condições de acima. Então a expressão*

$$\begin{aligned} \alpha(u, v) = & \alpha(c(s)) + \left(a_1(s)v + \frac{a_2(s)}{2}v^2 + v^3A_1(s, v) \right) n_1(s) \\ & + \left(b_1(s)v + \frac{b_2(s)}{2}v^2 + v^3B_1(s, v) \right) n_2(s) \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde os a_i e b_i são funções suaves e, a_1 e b_1 satisfaz à equação diferencial $(c_3'^2 - 1) \left(\frac{b_1}{a_1} \right)' - \bar{k}c_3'^2 \left(\frac{b_1}{a_1} \right)^2 - \bar{k}(c_3'^2 - 1) = 0$, $b_1(0) = 0$, $a_1(0) = a_0 \neq 0$ e define uma carta (s, v) na vizinhança de c . Além disso, a derivada da transformação de transição entre as seções $\Sigma_1 = \alpha(-\epsilon, v)$ e $\Sigma_2 = \alpha(\epsilon, v)$ é dada por

$$\ln \Pi'(0) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} -\frac{N_{1v}(s, 0)}{M_1(s, 0)} ds, \quad (2.6)$$

onde $M_1(s, 0)$ e $N_{1v}(s, 0)$ são calculados em (2.7).

Demonstração. Para $a_1(0) \neq 0$, a aplicação

$$\alpha(s, v, w) = \alpha(c(s)) + \left(a_1(s)v + \frac{a_2(s)}{2}v^2 + v^3A_1(s, v) \right) n_1(s) + wn_2(s)$$

é um difeomorfismo local em uma vizinhança de $(0, 0, 0)$. De fato, $\langle \alpha_s \wedge \alpha_v, \alpha_w \rangle(s, 0, 0) = [\alpha_s, \alpha_v, \alpha_w](s, 0, 0) = -a_1(s)c_3'(s)$ e $a_1(0)c_3'(0) \neq 0$. Para ϵ suficientemente pequeno existe uma função $w(s, v)$ tal que $\alpha(s, v) = \alpha(s, v, w(s, v))$ é a parametrização de uma vizinhança tubular de $\alpha \circ c$. Para cada s , $w(s, v)$ é a parametrização da curva da interseção entre $\alpha(M)$ e o plano gerado por n_1 e n_2 . Portanto

$$\begin{aligned} \alpha(u, v) = & \alpha(c(s)) + \left(a_1(s)v + \frac{a_2(s)}{2}v^2 + v^3A_1(s, v) \right) n_1(s) \\ & + \left(b_1(s)v + \frac{b_2(s)}{2}v^2 + v^3B_1(s, v) \right) n_2(s) \end{aligned}$$

define uma carta na vizinhança de c .

Na carta (s, v) , $\Delta(s, 0) = E(s, 0)G(s, 0) - F^2(s, 0) = a_1^2(s) - c_3^2(s)(b_1^2(s) + a_1^2(s))$. Como $c(0) = p$ está no trópico, então $\Delta(0, 0) = 0$ e portanto $b_1(0) = 0$. Calculamos os coeficientes da equação de linhas principais

$$\begin{aligned} L_1(s, v) = & (\bar{k}c_3^3b_1^2a_1^2 - c_3^2c_3''b_1^3a_1 - c_3^3b_1^2a_1b_1' + c_3^3b_1^3a_1' + \bar{k}c_3^3b_1a_1b_2 - c_3'a_1^4)(s) \\ & + (-c_3^3b_1^2a_2 + c_3''b_1a_1^3 + c_3'a_1^3b_1' - c_3'b_1a_1^2a_1')(s) + O(v), \\ M_1(s, v) = & (c_3^3(-\bar{k}b_1^3 - a_2b_1 + b_2a_1) - c_3^2c_3''b_1^2a_1 + \bar{k}c_3'b_1a_1^2 + a_1^3c_3'' + a_2c_3'b_1 \\ & - b_2c_3'a_1)(s) + O(v), \\ N_1(s, v) = & (-\bar{k}c_3^3(b_1^2 + a_1^2) + (c_3^3 - c_3')(b_1'a_1 - a_1'b_1) + \bar{k}c_3'a_1^2)(s) \\ & + [(-2\bar{k}^2a_1 - \bar{k}b_1 + a_1'')b_1^2 + (a_1^2\bar{k}' + 2\bar{k}a_1a_1' - a_1b_1'' - 2a_1'b_1' - 2\bar{k}b_2 - a_2')b_1 \\ & - 2\bar{k}a_1^2b_1' + 2a_1b_1'^2 - 2\bar{k}a_1a_2 + a_1b_2' - b_2a_1' + a_2b_1'](s)c_3^3(s) + [-3\bar{k}b_1a_1^2c_3'' \\ & - \bar{k}b_1^3c_3'' - b_1^2a_1c_3''' + b_1a_1c_3''b_1' - 2b_1^2a_1c_3'''](s)c_3^2(s) + [(2\bar{k}b_1c_3^4a_1 - 2\bar{k}b_1c_3^4a_1 \\ & + 4\bar{k}b_1c_1^2a_1 + \bar{k}b_1a_1 + b_2)a_1' + (-2\bar{k}a_1^2c_2^4 + 2\bar{k}a_1^2c_s^4 - 4\bar{k}a_1^2c_1^2 - a_2)b_1' \\ & + 2\bar{k}^2c_2^4a_1^3 - 2\bar{k}^2c_1^4a_1^3 + 4\bar{k}^2c_1^2a_1^3 + b_1^2a_1c_3''^2 + 2\bar{k}a_1a_2 - a_1b_2' + b_1a_2'](s)c_3'(s) \\ & - [((2\bar{k}c_2^4 - 2\bar{k}c_1^4 + 4\bar{k}c_1^2)b_1 - a_1')a_1^2 + a_1b_2 + b_1a_2](s)c_3''(s)]v + O(v^2). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Temos que $N_1(0, 0) = 0$, mas como c é linha principal de α então $N_1(s, 0) = 0$ para

todo s . Disto segue que, a_1 e b_1 têm que satisfazer à equação diferencial

$$(c_3'^2 - 1) \left(\frac{b_1}{a_1} \right)' - \bar{k} c_3'^2 \left(\frac{b_1}{a_1} \right)^2 - \bar{k} (c_3'^2 - 1) = 0, b_1(0) = 0, a_1(0) = a_0 \neq 0. \quad (2.8)$$

Verifiquemos que esta equação tem pelo menos uma solução. Façamos $y = \frac{b_1}{a_1}$ e associamos o seguinte campo vetorial à equação diferencial

$$X : \begin{cases} s' = c_3'^2(s) - 1 \\ y' = \bar{k}(s)(c_3'^2(s)y^2 + c_3'^2(s) - 1). \end{cases}$$

Assim, $X(0, 0) = 0$ e

$$DX(0, 0) = \begin{pmatrix} 2c_3'(0)c_3''(0) & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $c_3'(0)c_3''(0) \neq 0$, $(0, 0)$ é uma sela-nó para X . Tomando $y(s) = \left(\frac{b_1}{a_1} \right)(s)$ como a variedade estável ou instável (dependendo do sinal de $c_3'(0)c_3''(0)$) da sela-nó, é uma solução da equação com $a_1(0) \neq 0$ e $b_1(0) = 0$. Vamos calcular uma aproximação de grau 3 para y , então fazemos

$$\begin{aligned} c_3'(s) &= \eta + d_1s + d_2s^2 + d_3s^3 + O(s^4), \\ \bar{k}(s) &= k_0 + k_1s + k_2s^2 + k_3s^3 + O(s^4), \\ y(s) &= as + bs^2 + cs^3 + O(s^4), \end{aligned}$$

onde $\eta = \pm 1$ e $d_1 \neq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} s' &= 2\eta d_1s + (d_1^2 + 2d_2\eta)s^2 + (2d_1d_2 + 2d_3\eta)s^3 + O(s^4), \\ y' &= as' + 2bss' + 3s^2s' + O(s^3), \end{aligned}$$

e substituindo na segunda componente do campo, temos que

$$\begin{aligned} &\eta(2ad_1 - 2d_1k_0)s + [-k_0a^2 + 4\eta bd_1 - k_0(d_1^2 + 2\eta d_2) - 2\eta k_1d_1 + a(d_1^2 + 2\eta d_2)]s^2 \\ &+ [-(2d_1\eta k_0 + k_1)a^2 + 6c\eta d_1 + 2b(d_1^2 + 2d_2\eta) - k_0(2d_3\eta + 2d_1d_2) - k_1(d_1^2 + 2d_2\eta) \\ &- 2k_2\eta d_1 - 2k_0ab + a(2d_3\eta + 2d_1d_2)]s^3 + O(s^4) = 0. \end{aligned}$$

Resolvendo para a , b e c obtemos

$$y(s) = k_0s + \frac{1}{4d_1}(2d_1k_1 + \eta k_0^3)s^2 + \frac{1}{12d_1^2}(3d_1^2k_0^3 + 4\eta d_1k_0^2k_1 - 2\eta d_2k_0^3 + k_0^5 + 4d_1^2k_2)s^3 + O(s^4)$$

a qual é uma aproximação da variedade estável ou instável do campo X , e portanto uma solução aproximada de (2.8).

Finalmente, sendo $M_1(0,0) = a_1^3(0)c_3''(0) \neq 0$ então, para ϵ pequeno, $M_1(s,0) \neq 0$. Assim, pela Observação 2.13 obtemos que a derivada da transformação de transição é

$$\ln \Pi'(0) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} -\frac{N_{1v}(s,0)}{M_1(s,0)} ds,$$

onde $M_1(s,0)$ e $N_{1v}(s,0)$ são obtidos da equação (2.7). \square

2.2.2 Derivada da transformação de primeiro retorno

Agora, apresentamos como calcular a derivada da transformação de primeiro retorno em cada caso. Quando os ciclos principais não forem hiperbólicos, fazemos uma perturbação adequada em cada caso para torná-lo hiperbólico.

Ciclos principais tipo espaço

Corolário 2.15. *Seja $\alpha \in \mathcal{I}^r$ e $c : [0, l] \rightarrow M$ um ciclo principal tipo espaço parametrizado pelo comprimento de arco s e de comprimento l . Então a derivada da transformação de primeiro retorno Π associada a c na seção $\Sigma = \alpha(0, v)$ é dada por*

$$\ln \Pi'(0) = \int_0^l \frac{-k_2'}{k_2 - k_1} ds = \int_0^l \frac{-k_1'}{k_2 - k_1} ds = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{dH}{\sqrt{H^2 - K}},$$

onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais, $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$ é a Curvatura Média e $K = k_1 k_2$ é a Curvatura Gaussiana.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \ln \Pi'(0) &= \int_0^l \frac{-k_2'(s)}{k_2(s) - k_1(s)} ds \\ &= \int_0^l \left[\frac{k_2'(s) - k_1'(s)}{k_2(s) - k_1(s)} - \frac{k_1'(s)}{k_2(s) - k_1(s)} \right] ds \\ &= \int_0^l -[\ln(k_2(s) - k_1(s))]' ds - \int_0^l \frac{k_1'(s)}{k_2(s) - k_1(s)} ds \\ &= -\ln(k_2(s) - k_1(s)) \Big|_0^l - \int_0^l \frac{k_1'(s)}{k_2(s) - k_1(s)} ds \\ &= \int_0^l \frac{-k_1'(s)}{k_2(s) - k_1(s)} ds, \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde a primeira igualdade é pela Proposição 2.12 com $\bar{\epsilon} = 1$ e $\Sigma_1 = \Sigma_2$ e a última igualdade é porque c é fechada.

Assim,

$$2 \ln \Pi'(0) = \int_0^l -\frac{k_1'(s) + k_2'(s)}{k_2(s) - k_1(s)} ds = - \int_0^l \frac{dH}{\sqrt{H^2 - K}}.$$

□

Lema 2.16. *Seja $\alpha \in \mathcal{I}^r$ e $c : [0, l] \rightarrow M$ um ciclo principal tipo espaço parametrizado pelo comprimento de arco s e de comprimento l . Suponha que $dk_1|_c \neq 0$. Considere a deformação*

$$\alpha_\epsilon(s, v) = \alpha(s, v) + \epsilon \frac{k_1'(s)}{2} v^2 \delta(v) N(s)$$

onde δ é uma função suave com suporte pequeno e $\delta|_{v=0} = 1$. Então para todo $\epsilon \neq 0$ pequeno c é um ciclo principal hiperbólico de α_ϵ .

Demonstração. Na carta local

$$\begin{aligned} \alpha_\epsilon(s, v) = & \alpha(c(s)) + \bar{\eta} v (N \wedge t)(s) \\ & - \left(\left(\frac{k_2(s) - \epsilon k_1'(s) \delta(v)}{2} \right) v^2 + \frac{1}{6} A(s) v^3 + v^3 B(s, v) \right) N(s), \end{aligned}$$

onde $\langle N, N \rangle = \bar{\eta}$, temos que

$$\begin{aligned} L_1(s, v) &= - (k_2'(s) - \epsilon k_1''(s)) v + O(v^2), \\ M_1(s, v) &= \bar{\eta} (k_1(s) - k_2(s) + \epsilon k_1'(s)) + \bar{\eta} [\epsilon 2k_g(s) k_1'(s) + 3\delta'(0) k_1'(s) \\ & \quad + 2k_g(s) (k_1(s) - k_2(s)) - A(s)] v + O(v^2), \\ N_1(s, v) &= \bar{\eta} (\epsilon k_1''(s) - k_2'(s)) v + O(v^2), \end{aligned}$$

e portanto, c é ciclo principal de α_ϵ . As curvaturas principais de $\mathcal{F}_{1, \alpha_\epsilon}$ e $\mathcal{F}_{2, \alpha_\epsilon}$ sobre c são $k_1(\epsilon, s) = k_1(s)$ e $k_2(\epsilon, s) = k_2(s) - \epsilon k_1'(s)$. Assim,

$$\Pi'_\epsilon(0) = \exp \left\{ \int_0^l \frac{-k_1'(s)}{k_2(s) - \epsilon k_1'(s) - k_1(s)} ds \right\}.$$

Calculamos,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\Pi'_\epsilon(0)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= \exp \left\{ \int_0^l \frac{-k_1'(s)}{k_2(s) - \epsilon k_1'(s) - k_1(s)} ds \right\} \int_0^l \frac{-(k_1'(s))^2}{(k_2(s) - \epsilon k_1'(s) - k_1(s))^2} ds \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \Pi'(0) \int_0^l \frac{-(k_1'(s))^2}{(k_2(s) - k_1(s))^2} ds = k \neq 0 \end{aligned}$$

e disto segue que $\Pi'_\epsilon(0) = \Pi'(0) + k\epsilon + O(\epsilon^2)$. Portanto, c é ciclo principal hiperbólico de α_ϵ para ϵ pequeno. \square

Ciclos principais que mudam de caráter

Considere $\alpha \in \mathcal{I}^r$ e $c : [a, b] \rightarrow M$ um ciclo principal que muda de caráter. Se uma linha principal que intersecta transversalmente o trópico muda de caráter, então é tipo espaço na parte Riemanniana e tipo tempo na parte Lorentziana. Assim, c tem um número par de pontos luz p_1, p_2, \dots, p_{2r} (as interseções com o trópico). Podemos dividir o ciclo em r arcos tipo espaço, r arcos tipo tempo e $2r$ arcos na vizinhança de cada ponto luz.

Sejam Σ_i^e e Σ_i^t seções transversais c na parte tipo espaço e tipo tempo, respectivamente, na vizinhança de p_i , para $i \in \{1, 2, \dots, 2r\}$. Suponha que $c(a) = p_1$ e percorremos c no sentido tal que o primeiro arco seja tipo espaço. As seções aparecem na seguinte ordem $\Sigma_1^e, \Sigma_2^e, \Sigma_2^t, \Sigma_3^t, \Sigma_3^e, \dots, \Sigma_{2r}^e, \Sigma_{2r}^t, \Sigma_1^t$ (ver Figura 2.14). Assim, podemos definir as aplicações de transição seguintes:

- Arcos tipo espaço: $\Pi_{2i-1, 2i}^e$ entre as seções Σ_{2i-1}^e e Σ_{2i}^e , para $i = 1, 2, \dots, r$.
- Arcos tipo tempo: $\Pi_{2i, 2i+1}^t$ entre as seções Σ_{2i}^t e Σ_{2i+1}^t , para $i = 1, 2, \dots, r-1$, e $\Pi_{2r, 1}^t$ entre as seções Σ_{2r}^t e Σ_1^t .
- Arco na vizinhança do ponto luz: Π_i^l entre as seções Σ_i^t e Σ_i^e , para $i = 1, 2, \dots, 2r$.

Pela Proposição 2.12 e pelo Lema 2.14, estas aplicações de transição existem e podemos calcular as suas derivadas. Seja $\Pi : \Sigma_1^e \rightarrow V \subset \Sigma_1^e$ a aplicação de primeiro retorno associado a c . Então

$$\Pi(p) = (\Pi_1^l \circ \Pi_{2r, 1}^t \circ \Pi_{2r}^l \circ \Pi_{2r-1, 2r}^e \circ \dots \circ \Pi_3^l \circ \Pi_{2, 3}^t \circ \Pi_2^l \circ \Pi_{1, 2}^e)(p). \quad (2.10)$$

Se $\Pi'(0) \neq 1$, temos que c é um ciclo principal hiperbólico de α . Em outro caso, podemos fazer uma perturbação de α em uma vizinhança de um arco tipo espaço ou tempo de tal maneira que c seja ciclo principal hiperbólico de uma imersão na vizinhança de α .

Lema 2.17. *Sejam $\alpha \in \mathcal{I}^r$ e $c_1 : [0, l] \rightarrow M$ um arco principal tipo espaço parametrizado pelo comprimento de arco s e de comprimento l . Suponha $dk_1|_{c_1}$ não identicamente nula. Considere a deformação*

$$\alpha_\epsilon(s, v) = \alpha(s, v) + \epsilon \frac{k_1'(s)}{2} v^2 \delta(s, v) N(s),$$

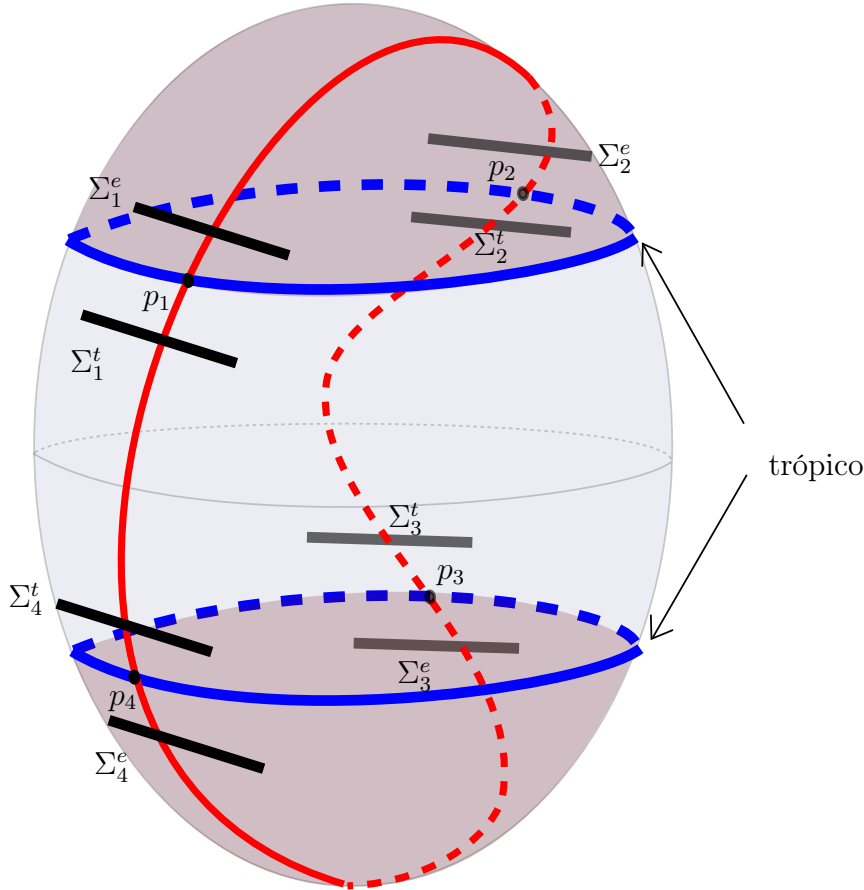


Figura 2.14: Seções transversais em um ciclo que muda de caráter.

onde $\alpha(s, v)$ é a carta local dada pelo Lema 2.11 com $\bar{\epsilon} = 1$, $\delta(s, v) = \delta_1(s)\delta_2(v)$ é uma função suave com suporte pequeno, $\delta_2(0) = 1$, $\delta_1(s)$ não negativa com suporte em $[\frac{1}{4}l, \frac{3}{4}l]$. Então para $\epsilon \neq 0$ pequeno, c_1 é arco principal de α_ϵ e $\Pi'_\epsilon(0) = \Pi'(0)(1 + k\epsilon) + O(\epsilon^2)$, com $k \neq 0$.

Demonstração. Na carta local

$$\alpha_\epsilon(s, v) = \alpha(c_1(s)) + \bar{\eta}v(N \wedge t)(s) - \left(\left(\frac{k_2(s) - \epsilon k'_1(s)\delta(s, v)}{2} \right) v^2 + \frac{1}{6}A(s)v^3 + v^3B(s, v) \right) N(s)$$

temos que,

$$\begin{aligned} L_1(s, v) &= [\epsilon k'_1(s)\delta'_1(s) - k'_2(s) + \epsilon k'(s)\delta_1(s)]v + O(v^2), \\ M_1(s, v) &= \bar{\eta}[k_1(s) - k_2(s) + \epsilon\delta_1 k'_1(s)] + \bar{\eta}[2(k_1(s) - k_2(s) + \epsilon\delta_1 k'_1(s))k_g(s) \\ &\quad + 3\epsilon\delta'_2(0)\delta_1(s)k'_1(s) - A(s)]v + O(v^2), \\ N_1(s, v) &= \bar{\eta}[\epsilon\delta'_1(s)k'_1(s) + \epsilon\delta_1(s)k''_1(s) - k'_2(s)]v + O(v^2) \end{aligned}$$

e portanto, c_1 é arco principal de α_ϵ com $k_1(\epsilon, s) = k_1(s)$ e $k_2(\epsilon, s) = k_2(s) - \epsilon k_1'(s) \delta_1(s)$ sendo as curvaturas principais das folheações $\mathcal{F}_{1, \alpha_\epsilon}$ e $\mathcal{F}_{2, \alpha_\epsilon}$, respectivamente, sobre c_1 . Assim, utilizando as igualdades da equação (2.9), a derivada da transformação de transição associada a c_1 para α_ϵ é

$$\begin{aligned} \Pi'_\epsilon(0) &= \exp \left\{ -\ln(k_2(s) - \epsilon \delta_1(s) k_1'(s) - k_1(s)) \Big|_0^l - \int_0^l \frac{k_1'(s)}{k_2(s) - \epsilon \delta_1(s) k_1'(s) - k_1(s)} ds \right\} \\ &= \exp \left\{ -\ln \left(\frac{k_2(l) - k_1(l)}{k_2(0) - k_1(0)} \right) - \int_0^l \frac{k_1'(s)}{k_2(s) - \epsilon \delta_1(s) k_1'(s) - k_1(s)} ds \right\}. \end{aligned}$$

Observe-se que $\Pi'_\epsilon(0)|_{\epsilon=0} = \Pi'(0)$. Calculando

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi'_\epsilon(0)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} &= \Pi'_\epsilon(0) \int_0^l \frac{-\delta_1(s) (k_1'(s))^2}{(k_2(s) - \epsilon k_1'(s) - k_1(s))^2} ds \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \Pi'(0) \int_0^l \frac{-\delta_1(s) (k_1'(s))^2}{(k_2(s) - k_1(s))^2} ds = \Pi'(0)k. \end{aligned}$$

Portanto $k \neq 0$ e temos a conclusão do lema. \square

Corolário 2.18. *Sejam $\alpha \in \mathcal{I}^r$ e $c : [a, b] \rightarrow M$ um ciclo principal que muda de caráter. Chamemos c_1 o arco principal de c tipo espaço entre as seções transversais Σ_1^e e Σ_2^e nos pontos $c(u_1)$ e $c(u_2)$, respectivamente. Suponha que $dk_1|_{c_1}$ não é identicamente nula. Então existe α_ϵ na vizinhança de α tal que c é ciclo principal hiperbólico de α_ϵ .*

Demonstração. Tomemos $\alpha_\epsilon(s, v)$ como no Lema 2.17 para $s \in [u_1, u_2]$ (c_1 parametrizado pelo comprimento de arco s) e $\alpha_\epsilon = \alpha$ em outro caso. Para ϵ pequeno, α_ϵ é uma imersão na vizinhança de α .

Pelo Lema 2.17, temos que c é ciclo principal de α_ϵ e $\Pi'_\epsilon(0) \neq 1$ para ϵ pequeno, sendo Π_ϵ a transformação de primeiro retorno dada por (2.10) para c e α_ϵ . Portanto, c é ciclo principal hiperbólico de α_ϵ . \square

Ciclos principais no trópico

Lema 2.19. *Seja $\alpha \in \mathcal{I}^r$ e suponha que $c : [0, l] \rightarrow M$ é uma curva fechada tipo espaço, parametrizada pelo comprimento de arco s e de comprimento l , contida no trópico de α e tal que $\langle c''(s), c''(s) \rangle \neq 0$. Então a expressão:*

$$\begin{aligned} \alpha(s, v) &= \alpha(c(s)) + \left(a_1(s)v + \frac{a_2(s)}{2}v^2 + v^3 A_1(s, v) \right) n(s) \\ &\quad + \left(\delta a_1(s)v + \frac{b_2(s)}{2}v^2 + v^3 B_1(s, v) \right) b(s), \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde, os a_i e b_i são funções suaves com $a_1(s) \neq 0$, $\delta = \pm 1$, $\{t, n, b\}$ é o triedro de Frenet associado a $\alpha \circ c$ e $\langle n(s), n(s) \rangle = \bar{\eta} \in \{\pm 1\}$, define uma carta local (s, v) na vizinhança de c . Além disso, se $a_1(s)(a_2(s) - \delta b_2(s)) \neq 0$, c é ciclo principal de α e a derivada do primeiro retorno associado a c é

$$\Pi'(0) = \exp \left\{ -2\delta\bar{\eta} \int_0^l \tau(s) ds \right\},$$

onde $\tau(s)$ é a torção da curva $\alpha \circ c$.

Demonstração. A aplicação

$$\alpha(s, v, w) = \alpha(c(s)) + \left(a_1(s)v + \frac{a_2(s)}{2}v^2 + v^3 A_1(s, v) \right) n(s) + wb(s)$$

é um difeomorfismo local em uma vizinhança de c . De fato, $\langle \alpha_s \wedge \alpha_v, \alpha_w \rangle(s, 0, 0) = [\alpha_s, \alpha_v, \alpha_w](s, 0, 0) = a_1(s)$ e $a_1(s) \neq 0$. Assim, existe uma função $w(s, v)$ tal que $\alpha(s, v) = \alpha(s, v, w(s, v))$ é a parametrização de uma vizinhança tubular de $\alpha \circ c$. Além disso, para cada s , $w(s, v)$ é a parametrização da curva da interseção entre $\alpha(M)$ e o plano gerado por n e b .

Portanto,

$$\begin{aligned} \alpha(s, v) = & c(s) + \left(a_1(s)v + \frac{a_2(s)}{2}v^2 + v^3 A_1(s, v) \right) n(s) \\ & + \left(b_1(s)v + \frac{b_2(s)}{2}v^2 + v^3 B_1(s, v) \right) b(s) \end{aligned} \quad (2.12)$$

define uma carta na vizinhança de c .

Nesta carta temos que $\Delta(s, 0) = b_1^2(s) - a_1^2(s)$. Como c está no trópico de α , então $b_1(s) = \delta a_1(s)$. Calculamos os coeficientes da equação de linhas principais:

$$\begin{aligned} L_1(s, v) &= O(v^2), \\ M_1(s, v) &= (a_1(b_2 - \delta a_2))(s) - \frac{1}{2}(-10ka_2a_1^2 + 10k\delta b_2a_1^2 + 2\delta a_1a_3 - 2a_1b_3)(s)v + O(v^2), \\ N_1(s, v) &= (2\bar{\eta}\tau a_1(\delta b_2 - a_2) + a_1'(\delta a_2 - b_2) + a_1(b_2' - \delta a_2'))(s)v + O(v^2), \end{aligned}$$

onde k é a curvatura da curva $\alpha \circ c$. Quando $a_1(s)(b_2(s) - \delta a_2(s)) \neq 0$, c é linha principal. Assim,

$$-\frac{N_{1v}(s, 0)}{M_1(s, 0)} = -2\delta\bar{\eta}\tau(s) + \frac{a_1'(s)}{a_1(s)} - \frac{\delta a_2'(s) - b_2'(s)}{\delta a_2(s) - b_2(s)},$$

e pela Observação 2.13 temos que a derivada da transformação do primeiro retorno

é

$$\Pi'(0) = \exp \left\{ -\frac{N_{1v}(s, 0)}{M_1(s, 0)} \right\} = \exp \left\{ -2\delta\bar{\eta} \int_0^l \tau(s) ds \right\},$$

onde a integral dos dois últimos termos é zero por ser c uma curva fechada. \square

Lema 2.20. *Considere uma curva fechada $c : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco s e de comprimento l , tal que $\langle c''(s), c''(s) \rangle \neq 0$, com torção τ e curvatura k . Para $\epsilon > 0$ pequeno, a curva fechada*

$$c_1(s) = c(s) + \epsilon(\bar{\eta}\tau(s)k(s)n(s) + k'(s)b(s))$$

é tipo espaço com $\langle c_1''(s), c_1''(s) \rangle \neq 0$ e tem torção total

$$\int_0^l \tau_1(s) \|c_1'(s)\| ds = \int_0^l \tau(s) ds + \epsilon \left(\int_0^l (\tau(s)k(s))^2 ds + \int_0^l (k'(s))^2 ds \right) + O(\epsilon^2),$$

onde $\{t, n, b\}$ é o triedro de Frenet associado à c com $\langle n, n \rangle = \bar{\eta}$.

Demonstração. Pela Proposição 1.16, temos que

$$\tau_1(s) = \frac{\det(c_1'(s), c_1''(s), c_1'''(s))}{|c_1'(s) \times c_1''(s)|^2},$$

onde τ_1 é a torção de c_1 . Observe-se que c_1 não está parametrizada pelo comprimento de arco, assim a torção total é

$$\int_0^l \tau_1(s) \|c_1'(s)\| ds.$$

Fazendo os cálculos, segue que

$$\tau_1(s) \|c_1'(s)\| = \tau(s) + \epsilon R(s) + O(\epsilon^2),$$

onde

$$\begin{aligned} R(s) = & k(s)^2 \tau(s)^2 + 3\bar{\eta} \tau'(s)^2 + 3\bar{\eta} \tau''(s) \tau(s) - k(s) k''(s) \\ & + \frac{\bar{\eta}}{k(s)^2} (k'(s)(2\tau'(s)\tau(s)k(s) + k'''(s)) + \tau(s)^2(k''(s)k(s) - k'(s)^2) - k''''(s)k(s)). \end{aligned}$$

Portanto, a torção total é

$$\int_0^l \tau_1(s) \|c_1'(s)\| ds = \int_0^l \tau(s) ds + \epsilon \int_0^l R(s) ds + O(\epsilon^2),$$

e fazendo integração por partes várias vezes temos que

$$\int_0^l R(s)ds = \int_0^l (\tau(s)k(s))^2 ds + \int_0^l (k'(s))^2 ds.$$

□

Proposição 2.21. *Sejam α e c como no Lema 2.19, com $\tau(s)k(s)$ ou $k'(s)$ não identicamente nulas. Então, existe uma imersão α_1 na vizinhança de α e c_1 uma curva fechada tipo espaço na vizinhança de c , tal que c_1 é um ciclo principal hiperbólico contido no trópico de α_1 .*

Demonstração. Considere a carta local $\alpha(s, v)$ dada no Lema 2.19. Seja c_1 como no Lema 2.20. Podemos supor que c_1 esta parametrizada pelo comprimento de arco u e de comprimento l_1 . Assim, c_1 tem associado um triedro de Frenet $\{t_1, n_1, b_1\}$ com τ_1 a torção e k_1 a curvatura.

A imersão

$$\begin{aligned} \alpha_1(u, v) = & c_1(u) + \left(a_1(u)v + \frac{a_2(u)}{2}v^2 + v^3 A_1(u, v) \right) n_1(u) \\ & + \left(\delta a_1(u)v + \frac{b_2(u)}{2}v^2 + v^3 B_1(u, v) \right) b_1(u), \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde a_i e b_i são funções do Lema 2.19 ($a_1(s)(b_2(s) - \delta a_2(s)) \neq 0$ e $\delta = \pm 1$), está na vizinhança de α . Além disso, fazendo os mesmos cálculos como no Lema 2.19 temos que c_1 é uma linha principal fechada no trópico de α_1 , e portanto a derivada da transformação do primeiro retorno é

$$\Pi'_1(0) = \exp \left\{ -2\delta\bar{\eta} \int_0^{l_1} \tau_1(u)du \right\}.$$

Como

$$\int_0^{l_1} \tau_1(u)du = \int_0^l \tau_1(s) \|c'_1(s)\| ds,$$

pelo Lema 2.20, temos

$$\begin{aligned} \Pi'_1(0) = & \exp \left\{ -2\delta\bar{\eta} \int_0^l \tau(s)ds - 2\delta\bar{\eta}\epsilon \left(\int_0^l (\tau(s)k(s))^2 ds + \int_0^l (k'(s))^2 ds \right) + O(\epsilon^2) \right\} \\ = & \Pi'(0) \exp \left\{ -2\delta\bar{\eta}\epsilon \left(\int_0^l (\tau(s)k(s))^2 ds + \int_0^l (k'(s))^2 ds \right) + O(\epsilon^2) \right\}. \end{aligned}$$

Portanto, para $\epsilon \neq 0$ pequeno, c_1 é um ciclo principal hiperbólico de α_1 . □

Ciclos principais suaves por partes (c.p.s.p)

Sobre o discriminante LPL , as linhas principais coincidem em uma direção luz. Podemos ter curvas fechadas suaves por partes que intersectam transversalmente o LPL onde cada arco suave é linha principal. Os pontos onde não são suaves ocorrem justamente nas interseções com o LPL .

Sejam $\alpha \in \mathcal{T}^r$ e $c : [0, l] \rightarrow M$ um ciclo principal suave por partes, isto é, existem os números $0 = a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} = l$, tal que $c_i(s) = c(s)|_{(a_i, a_{i+1})}$ é um arco principal e $c(a_i)$ pertencente ao LPL para $i = 1, 2, \dots, n$. Neste caso, c é a projeção de uma órbita fechada C para o campo de Lie-Cartan associado a α definido sobre a superfície \mathbb{M} a qual intersecta o conjunto criminante nos pontos $C(a_i)$ (o LPL é a projeção do criminante e os pontos $c(a_i)$ são a projeção dos pontos $C(a_i)$).

Sejam Σ_i^1 e Σ_i^2 seções transversais na vizinhança dos pontos $c(a_i)$, para $i = 1, \dots, n$. Definamos as transformações de transição:

- $\Pi_{i,i+1}$ entre as seções Σ_i^1 e Σ_{i+1}^2 para $i = 1, \dots, n$ e $\Pi_{n,1}$ entre Σ_n^1 e Σ_1^2 .
- Π_i entre as seções Σ_i^2 e Σ_i^1 .

Seja $\Pi : \Sigma_1^1 \rightarrow V \subset \Sigma_1^1$ a transformação do primeiro retorno associado a c . Então

$$\Pi(p) = (\Pi_1 \circ \Pi_{n,1} \circ \Pi_n \circ \Pi_{n-1,n} \circ \dots \circ \Pi_3 \circ \Pi_{2,3} \circ \Pi_2 \circ \Pi_{1,2})(p). \quad (2.14)$$

A priori, os arcos c_i podem intersectar o trópico de α . Pelo Lema 2.14 e pelos argumentos dados nos ciclos que mudam de caráter, a derivada das transformações $\Pi_{i,i+1}$ para $i = 1, \dots, n$ e $\Pi_{n,1}$ existem.

Na vizinhança de p_i , tomamos o sistema de coordenadas (u, v) tal que as linhas principais são dadas pela equação diferencial (veja [1])

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = v$$

e este sistema de coordenadas $\Pi_i : \{v = \epsilon\} \rightarrow \{v = \epsilon\}$ é uma translação $\Pi_i(u, \epsilon) = (u + k, \epsilon)$, k constante, e portanto diferenciável. Temos então que Π é diferenciável. Se $\Pi'(q) \neq 1$ para o ponto $q \in c \cap \Sigma_1^2$, temos que c é um ciclo principal hiperbólico de α .

Observação 2.22. Quando $\Pi'(q) = 1$, escolhemos um arco c_1 tipo espaço de c tal que c_1 não intersecte nenhum outro arco de c , isto é, que c não tenha auto-interseções

em c_1 . Podemos fazer a perturbação do Lema 2.17 em c_1 de tal maneira que c seja ciclo principal hiperbólico de uma imersão na vizinhança de α .

2.2.3 Estabilidade estrutural em um ciclo principal

Definição 2.23. *Uma imersão $\alpha \in \mathcal{I}^{r,s}$ é chamada C^s -estruturalmente estável na topologia C^s em um ciclo principal c de α se para toda vizinhança $U(c)$ de c em M existe uma vizinhança \mathcal{U} de α em $\mathcal{I}^{r,s}$ tal que para toda imersão $\beta \in \mathcal{U}$ existe um ciclo principal $\hat{c} = \hat{c}_\beta$ de β , contido em $U(c)$, e um homeomorfismo $h = h_\beta : W(c) \rightarrow W(\hat{c})$, entre vizinhanças de c e \hat{c} com $h(c) = \hat{c}$, levando conjuntamente as folheações $\mathcal{F}_{1,\alpha}|_{W(c)}$ e $\mathcal{F}_{2,\alpha}|_{W(c)}$ nas folheações $\mathcal{F}_{1,\beta}|_{W(\hat{c})}$ e $\mathcal{F}_{2,\beta}|_{W(\hat{c})}$, respectivamente.*

Teorema 2.24. *Uma imersão $\alpha \in \mathcal{I}^r$ ($r \geq 4$) é C^3 -estruturalmente estável em um ciclo principal c se, e somente se, c é hiperbólico.*

Demonstração. O fato de ser c hiperbólica garante a estabilidade local dentro de perturbações na C^3 -topologia. Na Seção 2.4 vamos fazer a equivalência das duas folheações em um contexto global. \square

2.2.4 Superfícies em torno de curvas tipo espaço

Dada uma curva fechada tipo espaço com torção total zero no espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$, é possível construir um germe de superfície que contem a curva fechada dada como ciclo principal hiperbólico (veja [14]).

Curvas fechadas como linhas principais.

Seja $c : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva fechada regular com curvatura $k(s)$ positiva e de comprimento l . Considere o triedro de Frenet $\{t, n, b\}$ ao longo de c , onde $\langle t, t \rangle = 1$, $\langle n, n \rangle = \eta$ e $\langle b, b \rangle = -\eta$ com $\eta \in \{-1, 1\}$, satisfazendo as equações

$$\begin{aligned} t'(s) &= \eta k(s)n(s), \\ n'(s) &= -k(s)t(s) - \eta \tau(s)b(s), \\ b'(s) &= -\eta \tau(s)n(s). \end{aligned}$$

Considere a superfície C^r , com $r \geq 4$, parametrizada por

$$\begin{aligned} \alpha(s, v) &= c(s) + \left(\cosh(r(s))v + \frac{a_2(s)}{2}v^2 + \frac{a_3(s)}{6}v^3 + \frac{a_4(s)}{24}v^4 \right) n(s) \\ &+ \left(\sinh(r(s))v + \frac{b_2(s)}{2}v^2 + \frac{b_3(s)}{6}v^3 + \frac{b_4(s)}{24}v^4 \right) b(s), \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde $r(s) = r(s+l)$, $a_i(s) = a_i(s+l)$ e $b_i(s) = b_i(s+l)$ para $i = 1, 2, 3$, são funções suaves l -periódicas com respeito à s e v é pequeno (similar a Figura 2.13 com o triedro de Frenet).

Lema 2.25. *A curva c é união de linhas principais de α se, e somente se,*

$$r'(s) = \eta\tau(s), r(0) = r_0 \text{ e } \int_0^l \tau(s)ds = 0. \quad (2.16)$$

Além disso, para qualquer solução $r(s)$ de (2.16) a superfície é regular, orientada e mergulhada em uma vizinhança de c . O conjunto de pontos umbílicos $U_\alpha \cap c$ é definido pela equação

$$a_2(s) \sinh(r(s)) - b_2(s) \cosh(r(s)) - k(s) \sinh(r(s)) = 0.$$

Demonstração. Pela definição de α segue que $\alpha_s(s, 0) = t(s)$ e $\alpha_v(s, 0) = \cosh(r(s))n(s) + \sinh(r(s))b(s)$ são linearmente independentes. Pela forma local das imersões segue que α é uma superfície regular na vizinhança de c .

O vetor normal da superfície sobre c é $N(s, 0) = \sinh(r(s))n(s) + \cosh(r(s))b(s)$. Calculando os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, temos que $L_1dv^2 + M_1dvdu + N_1du^2 = 0$, onde

$$\begin{aligned} L_1(s, v) &= r'(s) - \eta\tau(s) + O(v), \\ M_1(s, v) &= \eta(a_2(s) \sinh(r(s)) - b_2(s) \cosh(r(s)) - k(s) \sinh(r(s))) + O(v), \\ N_1(s, v) &= \eta(\tau(s)\eta - r'(s)) + \frac{\eta}{\cosh(r(s))} [\eta\tau(s)k(s) \cosh(r(s))^2 \\ &\quad - 2\eta \cosh(r(s))^2 \tau(s)a_2(s) + 2\eta\tau(s) \cosh(r(s)) \sinh(r(s))b_2(s) \\ &\quad - k(s)r'(s) \cosh(r(s))^2 + r'(s) \cosh(r(s))^2 a_2(s) \\ &\quad - r'(s) \cosh(r(s)) \sinh(r(s))b_2(s) + \cosh(r(s))^2 b_2'(s) \\ &\quad - \cosh(r(s)) \sinh(r(s))a_2'(s) + \eta\tau(s)a_2(s) - r'(s)a_2(s)]v + O(v^2). \end{aligned} \quad (2.17)$$

A curva $\{v = 0\}$ é solução desta equação se, e somente se, $N_1(s, 0) = 0$, ou seja $r'(s) = \eta\tau(s)$. Portanto, c é união de linhas principais se, e somente se, $r'(s) = \eta\tau(s)$.

Fazendo $r'(s) = \eta\tau(s)$ segue que

$$\begin{aligned} k_1(s) &= k(s) \sinh(r(s)), \\ k_2(s) &= a_2(s) \sinh(r(s)) - b_2(s) \cosh(r(s)), \\ M_1(s, 0) &= \eta(a_2(s) \sinh(r(s)) - b_2(s) \cosh(r(s)) - k(s) \sinh(r(s))) \\ &= \eta(k_2(s) - k_1(s)). \end{aligned}$$

Os pontos umbílicos em c são dados pelas soluções da equação $M_1(s, 0) = k_2(s) - k_1(s) = 0$. \square

Ciclos principais hiperbólicos

Proposição 2.26. *Considere a superfície orientada parametrizada α_{r_0} de classe C^r , $r \geq 4$, definida pelas equações (2.15) e (2.16) tal que $U_{\alpha_{r_0}} \cap c = \emptyset$. Então c é ciclo principal hiperbólico se, e somente se,*

$$\begin{aligned} \ln(\pi'_{r_0}(0)) &= \int_0^l -\frac{k'_1(s)}{k_2(s) - k_1(s)} ds \\ &= \int_0^l \frac{\eta\tau(s)k(s) \cosh(r(s)) + k'(s) \sinh(r(s)) ds}{b_2(s) \cosh(r(s)) + k(s) \sinh(r(s)) - a_2(s) \sinh(r(s))} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Demonstração. A transformação de Poincaré $\pi : \{s = 0\} \rightarrow \{s = l\}$ definida por $\pi(v_0) = v(l, v_0)$, com $v(0, v_0) = v_0$ satisfaz a equação variacional (veja Observação 2.13)

$$M_1(s, 0)v_{sv_0} + N_{1v}(s, 0)v_0 = 0. \quad (2.18)$$

Das equações (2.17) e utilizando que $r'(s) = \eta\tau(s)$, temos que

$$\begin{aligned} -\frac{N_{1v}(s, 0)}{M_1(s, 0)} &= \frac{\cosh(r(s))(\tau(s)\eta a_2(s) - b'_2(s)) - \sinh(r(s))(\tau(s)\eta b_2(s) - a'_2(s))}{\sinh(r(s))(k(s) - a_2(s)) + b_2(s) \cosh(r(s))} \\ &= -\frac{k'_2(s)}{k_2(s) - k_1(s)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_0^l -\frac{N_{1v}(s, 0)}{M_1(s, 0)} ds = -\int_0^l \frac{k'_2(s)}{k_2(s) - k_1(s)} ds = -\int_0^l \frac{k'_1(s)}{k_2(s) - k_1(s)} ds,$$

onde a última igualdade é pelo Corolário 2.15. Portanto, integrando (2.18)

$$\pi'_{r_0}(0) = \frac{dv}{dv_0}(l, v_0)|_{v_0=0} = \exp \left\{ -\int_0^l \frac{k'_1(s)}{k_2(s) - k_1(s)} ds \right\}.$$

□

Proposição 2.27. *Seja c uma curva suave fechada tipo espaço e de comprimento l em $\mathbb{R}^{2,1}$ tal que $k(s)$ é não constante ou $\tau(s)$ é não identicamente zero, e a torção total é zero. Então existe um germe de superfície orientada de classe C^r , $r \geq 4$, contendo c como ciclo principal hiperbólico.*

Demonstração. Considere a superfície definida pelas equações (2.15) e (2.16). Fazendo $a_2(s) = k(s)$ e $b_2(s) = 1$ segue que $M(s, 0) = -\eta \cosh(r(s)) \neq 0$ e assim $U_{\alpha_{r_0}} \cap c = \emptyset$. Sendo τ não identicamente zero ou $k(s)$ não constante, $\sinh(r(s)) = \sinh(r_0 - \int_0^s \tau(s) ds)$ e portanto $k(s) \sinh(r(s))$ é não constante. Pela Proposição 2.26, c é hiperbólica se, e somente se,

$$\ln(\pi'(0)) = \int_0^l \frac{[k(s) \sinh(r(s))]' ds}{\cosh(r(s))} \neq 0.$$

Se $\ln(\pi(0)) \neq 0$, então c é um ciclo principal hiperbólico e finaliza a prova. Se $\ln(\pi(0)) = 0$, considere a deformação de α dada por

$$\begin{aligned} \alpha_\epsilon(s, v) &= c(s) \\ &+ \left(\cos(r(s))v + \frac{a_2(s) + \epsilon A_1(s)}{2}v^2 + \frac{a_3(s)}{6}v^3 + \frac{a_4(s)}{24}v^4 \right) N(s) \\ &+ \left(\sin(r(s))v + \frac{b_2(s) + \epsilon B_1(s)}{2}v^2 + \frac{b_3(s)}{6}v^3 + \frac{b_4(s)}{24}v^4 \right) B(s). \end{aligned}$$

Então c é uma linha principal de α_ϵ . Fazendo $A_1(s) = k'(s)$ e $B_1(s) = -\eta\tau(s)k(s)$, as curvaturas principais são

$$\begin{aligned} k_1(s, 0, \epsilon) &= k(s) \sinh(r(s)) = k_1(s), \\ k_2(s, 0, \epsilon) &= k(s) \sinh(r(s)) - \cosh(r(s)) \\ &\quad + \epsilon[k'(s) \sinh(r(s)) + \eta\tau(s)k(s) \cosh(r(s))] \\ &= k_2(s) + \epsilon k_1'(s). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.26 segue que

$$\begin{aligned} \ln(\pi'_\epsilon(0)) &= - \int_0^\ell \frac{k_1'(s, 0, \epsilon)}{k_2(s, 0, \epsilon) - k_1(s, 0, \epsilon)} ds \\ &= - \int_0^\ell \frac{k_1'(s, 0)}{k_2(s, 0) + \epsilon k_1(s, 0) - k_1(s, 0)} ds. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Derivando a equação (2.19) em relação de ϵ e avaliando em $\epsilon = 0$ temos que

$$\frac{d}{d\epsilon}(\ln(\pi'_\epsilon(0)))|_{\epsilon=0} = \int_0^\ell \frac{[k'_1(s, 0)]^2}{(k_2(s, 0) - k_1(s, 0))^2} ds \neq 0.$$

□

2.3 Teorema de Estabilidade Estrutural

Definição 2.28. Diremos que uma imersão satisfaz a propriedade **TR**, se o trópico é uma curva regular $\hat{\gamma}$ com apenas pontos isolados tipo luz.

Definição 2.29. Diremos que uma imersão satisfaz a propriedade **DR**, se o discriminante é uma curva $\tilde{\gamma}$ a qual é:

- i. regular, exceto nos pontos onde $\delta = 0$ tem uma singularidade de Morse tipo sela (umbílicos tipo tempo), e
- ii. $\tilde{\gamma}'$ é luz somente em pontos isolados.

Considere o subconjunto $S^r = S^r(M) \subset \mathcal{I}^{r,s}$ que para $\alpha \in S^r$ satisfaz:

- a) As propriedades **TR** e **DR**.
- b) As singularidades são todas hiperbólicas ou cúspides.
- c) Os ciclos principais são todos hiperbólicos.
- d) Não há separatriz de α que seja separatriz de duas singularidades diferentes ou duas vezes da mesma singularidade.
- e) O conjunto limite de toda linha principal é união de singularidades e ciclos principais.

Observação 2.30. Chamamos de separatrizes às linhas principais que são projeções:

- i. das separatrizes de selas do campo de linhas de Lie-Cartan (Veja Figuras 2.1, 2.4, 2.7(a) e 2.8(a)), e
- ii. das variedades estáveis fortes dos nós na parte regular do criminante (com orientação de atrator) do campo de linhas de Lie-Cartan. Essas separatrizes aparecem nos nós da parte regular do *LPL* (veja Figuras 2.7(b) e 2.8(b)).

Definição 2.31. Uma imersão $\alpha \in \mathcal{I}^{r,s}$ é chamada C^s -estruturalmente estável na topologia C^s se existe uma vizinhança \mathcal{U} de α em $\mathcal{I}^{r,s}$ tal que para toda imersão $\beta \in \mathcal{U}$ existe um homeomorfismo $h = h_\beta : M \rightarrow M$ tal que $h(\mathcal{S}_\alpha) = \mathcal{S}_\beta$ e levando conjuntamente as folheações $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ e $\mathcal{F}_{2,\alpha}$ nas folheações $\mathcal{F}_{1,\beta}$ e $\mathcal{F}_{2,\beta}$, respectivamente.

Teorema A. Seja $r \geq 4$ e M uma superfície suave, orientada e compacta. Então o conjunto $S^r(M)$ é aberto em $\mathcal{I}^{r,3}$ e todo $\alpha \in S^r(M)$ é C^3 -estruturalmente estável.

2.4 Demonstração do Teorema A

A abertura do conjunto S^r em $\mathcal{I}^{r,3}$ segue da estabilidade local nas singularidades e a continuidade sobre partes compactas das separatrizes de singularidades por uma C^3 -perturbação (Teorema 2.9), a estabilidade local nos ciclos hiperbólicos (Teorema 2.24) e a abertura das propriedades DR e TR (Proposições 1.13 e 1.36). As propriedades d) e e) do conjunto S^r são essenciais para reduzir a análise da abertura ao estudo local das singularidades, separatrizes e ciclos principais.

Para provar a estabilidade estrutural, vamos utilizar as ideias do método exposto por Peixoto em [45] e por Gutiérrez e Sotomayor em [29] e [27] para a construção da equivalência topológica. As folheações $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ e $\mathcal{F}_{2,\alpha}$ são chamadas de *primeira* e *segunda* folheações das linhas principais, respectivamente.

2.4.1 Regiões canônicas

Uma primeira (respec. segunda) região canônica de α , com $\alpha \in S^r$, é a componente conexa do complemento dos pontos umbílicos, dos ciclos principais (exceto os c.p.s.p.¹) da primeira (respec. segunda) folheação, das separatrizes da primeira (respec. segunda) folheação, das linhas principais da primeira (respec. segunda) folheação que formam c.p.s.p. e do LPL .

As primeiras (respec. segundas) regiões canônicas podem ser *paralelas* ou *cilíndricas*. No primeiro caso o campo $\mathcal{L}_{1,\alpha}$ (respec. $\mathcal{L}_{2,\alpha}$) é topologicamente equivalente ao campo vetorial $\frac{\partial}{\partial u}$ em \mathbb{R}^2 , no segundo caso eles são topologicamente equivalentes ao campo vetorial $\frac{\partial}{\partial u}u + \frac{\partial}{\partial v}v$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

¹Ciclos principais suaves por partes (veja a Seção 2.2)

Se o bordo de uma região canônica contém separatrizes ou parte do LPL então é uma região paralela (veja Figura 2.15). Se o bordo da região canônica consiste somente de ciclos principais (exceto os c.p.s.p.), então a região é cilíndrica (veja Figura 2.16).

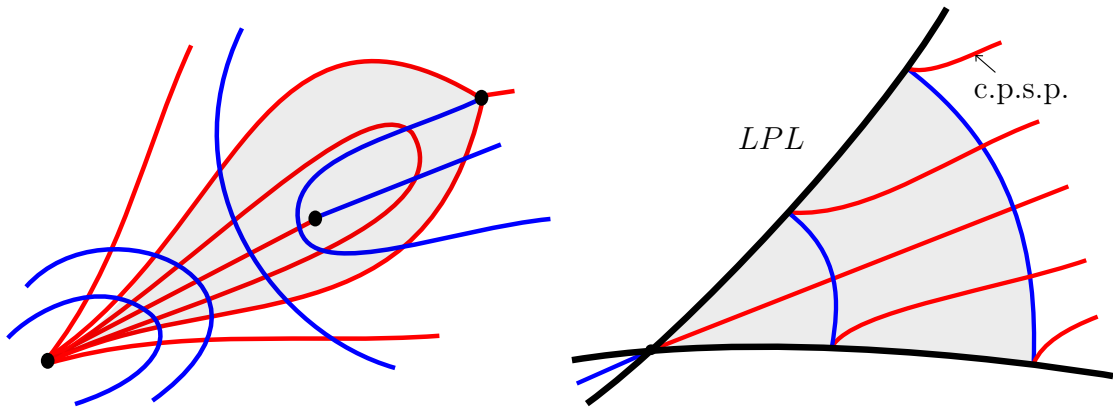


Figura 2.15: Regiões paralelas.

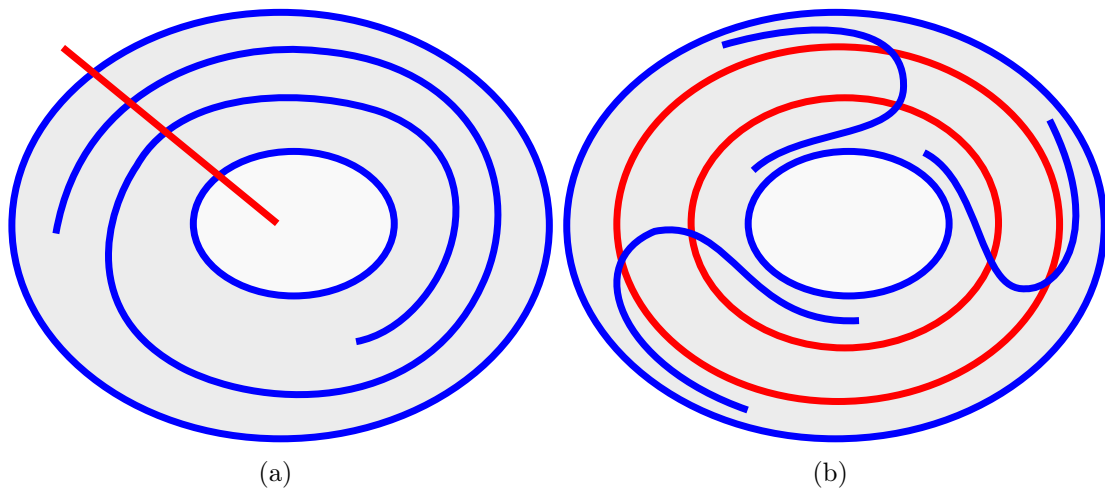


Figura 2.16: Regiões cilíndricas.

Da conectividade das regiões canônicas temos que o conjunto limite de cada linha principal em uma região paralela é sempre um ponto umbílico E_2 , T_2 , T_4 , T_5 (pelo setor parabólico deles) ou um ciclo principal. Entretanto, em uma região cilíndrica o conjunto limite é sempre ciclos principais. Em cada região canônica os campos $\mathcal{L}_{1,\alpha}$ e $\mathcal{L}_{2,\alpha}$ são orientáveis.

As regiões cilíndricas podem ser de dois tipos:

- a) todas as linhas da outra folheação atravessam a região (veja Figura 2.16(a)),
- ou

- b) a região contém pelo menos um ciclo principal da outra folheação (veja Figura 2.16(b)).

Chamamos de *primeira (respec. segunda) região cilíndrica transversal irreduzível* a uma primeira (respec. segunda) região cilíndrica do caso a). Uma primeira (respec. segunda) região cilíndrica do caso b), é decomposta em uma união finita de segundas (primeiras) regiões cilíndricas transversais irreduzíveis e duas *primeiras regiões semi-transversais irreduzíveis*. O bordo de uma primeira (respec. segunda) região semi-transversal irreduzível é a união de um ciclo principal da folheação $\mathcal{L}_{1,\alpha}$, para o qual as linhas principais estão tendendo, e de um ciclo principal da folheação $\mathcal{L}_{2,\alpha}$, no qual a folheação $\mathcal{L}_{1,\alpha}$ é transversal.

Dada uma imersão $\alpha \in \mathcal{I}^r$, podemos encontrar um vizinhança \mathcal{U}_α de α em $\mathcal{I}^{r,3}$ tal que $\mathcal{U}_\alpha \subset S^r$, $r \geq 3$, e que ao longo de um arco contínuo α_t , $t \in [0, 1]$, em \mathcal{U}_α unindo $\alpha = \alpha_0$ e $\beta = \alpha_1$, há uma dependência contínua, de maneira única, das singularidades, das separatrizes e dos ciclos principais de ambas folheações $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ e $\mathcal{F}_{2,\alpha}$, e portanto, uma dependência contínua das regiões canônicas de α_0 em α_t de maneira única, definindo uma correspondência um a um entre as regiões de α e β . A correspondência preserva o tipo de região.

A dependência contínua, de maneira única, das regiões canônicas define uma equivalência topológica parcial h_t entre as singularidades de α e α_t , e entre o conjunto de pontos que estão simultaneamente em separatrizes das duas folheações ou em ciclos principais de α com similar conjunto de α_t , para $t \in [0, 1]$.

Procedemos agora, a estender a equivalência parcial h_t em uma equivalência entre \mathbb{P}_α e \mathbb{P}_{α_t} em todo M . Vamos fazer isso em todas as possíveis interseções de regiões canônicas.

2.4.2 Construção de equivalências

- Definição de h_t na interseção de primeiras e segundas regiões paralelas (veja Figura 2.17). Em cada primeira região paralela A de α tomamos uma seção transversal S , a qual pode ser escolhida como parte de uma separatriz, como parte do *LPL* ou como parte de uma linha principal de um c.p.s.p da folheação $\mathcal{F}_{2,\alpha}$. Os extremos a e b de S têm uma natural continuação $h_t(a)$ e $h_t(b)$, os quais definem os extremos da natural continuação S_t de S . A seção S_t está contida em uma separatriz, no *LPL* ou em um c.p.s.p. de α_t a qual é a continuação da separatriz, *LPL* ou linha principal de α que contém S . Definimos

$h_t : S \rightarrow S_t$ como qualquer homeomorfismo que estende a correspondência dada pelos extremos $\{a, b\}$ e $\{h_t(a), h_t(b)\}$.

De maneira similar definiremos $h_t : T \rightarrow T_t$ no segmento T que está contido em uma separatriz, no *LPL* ou em um c.p.s.p. da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ a qual é seção transversal de uma segunda região paralela B de α .

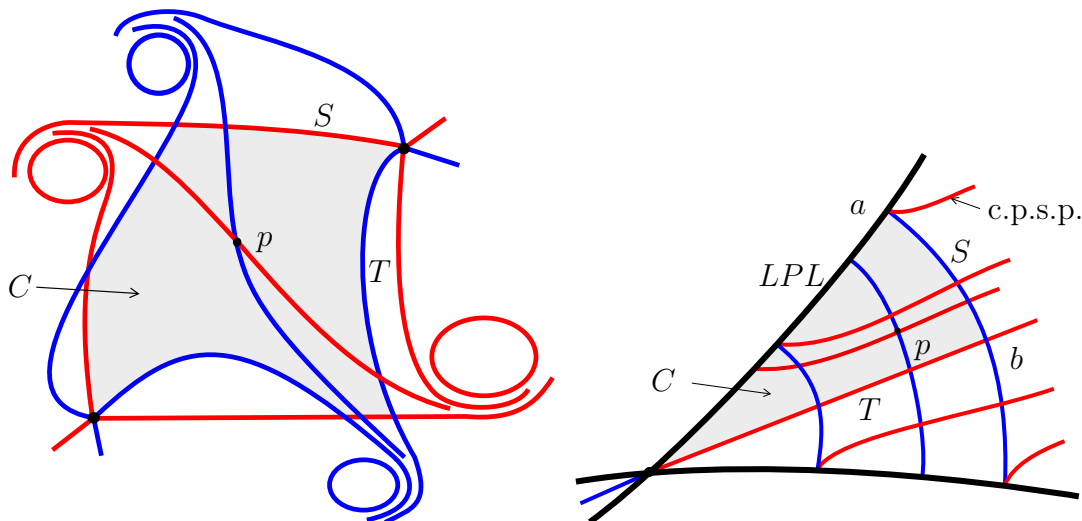


Figura 2.17: Definição de h_t na interseção de duas regiões paralelas.

Denotemos por p_1 (respec. p_2) a interseção da linha principal da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ (respec. $\mathcal{F}_{2,\alpha}$) que passa por um ponto p com a seção transversal S (respec. T). Em cada componente conexa C de $A \cap B$, vamos definir $h_t : C \rightarrow C_t$, onde C_t é a continuação de C . Note que h_t está bem definida nas arestas e nos vértices de C . Os vértices são pontos umbílicos, interseção de separatrizes ou pontos do *LPL* (interseção de um c.p.s.p com o *LPL*). Para $p \in C$ definimos $h_t(p)$ como o único ponto em C_t o qual é interseção da linha principal da folheação \mathcal{F}_{1,α_t} que passa por $h_t(p_1)$ e a linha principal da folheação \mathcal{F}_{2,α_t} que passa por $h_t(p_2)$.

Se a imersão α não contém ciclos principais, exceto possivelmente c.p.s.p., este procedimento gera um equivalência topológica h_t entre α e α_t .

- Definição de h_t sobre ciclos principais da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ (respec. $\mathcal{F}_{2,\alpha}$) e sobre primeiras (respec. segundas) regiões cilíndricas do tipo a) as quais estão contidas em uma união de segundas (respec. primeiras) regiões paralelas (veja Figura 2.18(a)). Note que, pelo procedimento do item 1, h_t está bem definida nos ciclos principais. Chamemos R_0 a região cilíndrica. A aplicação h_t está definida no

bordo de R_0 . Assim, h_t define uma correspondência um a um entre arcos da folheação $\mathcal{F}_{2,\alpha}$ em R_0 e arcos da folheação \mathcal{F}_{2,α_t} em R_t , onde R_t é a continuação de R_0 .

Sejam l_0 um arco da folheação $\mathcal{F}_{2,\alpha}$ e l_t sua continuação. Chamemos de p e q os pontos de interseção de l_0 com o bordo de R_0 . Definimos a transformação de Poincaré em l_t da folheação \mathcal{F}_{1,α_t} , $\pi_t : l_t \rightarrow l_t$. A transformação π_t somente tem dois pontos fixos $h_t(p)$ e $h_t(q)$, um atrator e outro repulsor, para cada $t \in [0, 1]$. Assim, π_t e π_0 são topologicamente conjugados. Chamemos de $g_t : l_0 \rightarrow l_t$ a conjugação topológica, então $\pi_0 = g_t^{-1} \circ \pi_t \circ g_t$.

Definimos $\widehat{h_t|_{l_0}} = g_t$ e estendemos h_t para $R_0 - \{l_0\}$ tal que, para $a \in l_0$, o arco principal $\widehat{a, \pi_0(a)}$ seja levado no arco $\widehat{h_t(a), \pi_t(h_t(a))}$ em $R_t - \{l_t\}$ de tal maneira que para $x \in \widehat{a, \pi_0(a)} \cap \tilde{l}_0$, com \tilde{l}_0 um arco principal da folheação \mathcal{F}_{2,α_t} , sua imagem seja $h_t(x)$ na interseção do arco principal $\widehat{h_t(a), \pi_t(h_t(a))}$ com o arco principal \tilde{l}_t , onde \tilde{l}_t é a continuação de \tilde{l}_0 . Pela construção, h_t é uma equivalência topológica em R_0 .

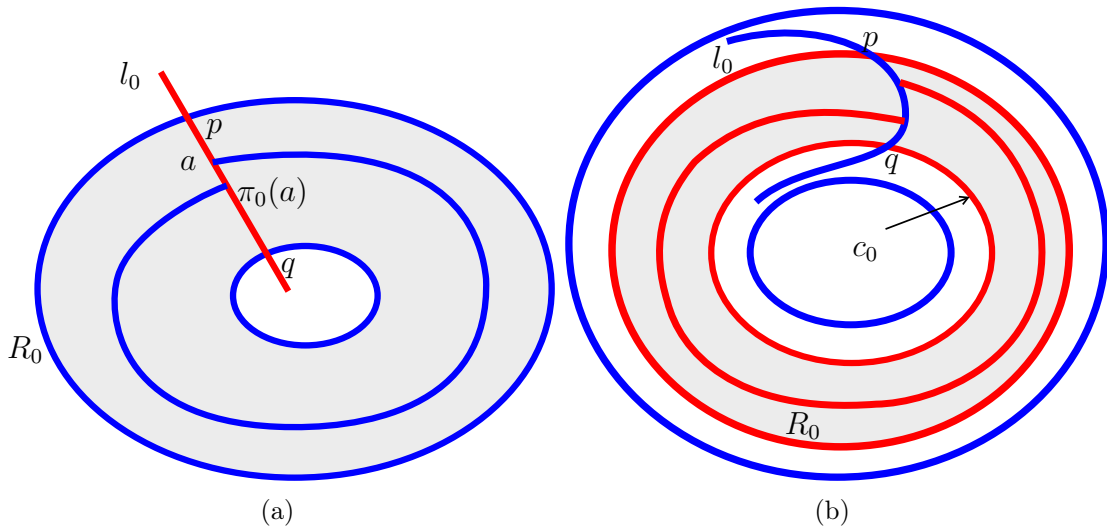


Figura 2.18: Definição de h_t em regiões cilíndricas.

- Definição de h_t em uma primeira (respec. segunda) região cilíndrica do tipo a) a qual está contida em uma segunda (respec. primeira) região cilíndrica do tipo b) (veja Figura 2.18(b)). Chamemos R_0 a segunda região cilíndrica do tipo b). Seja c_0 o ciclo principal da primeira folheação na região R_0 e c_t sua continuação. Definimos um homeomorfismo $g_t : c_0 \rightarrow c_t$ o qual é uma correspondência um a um entre linhas principais da segunda folheação em R_0 e R_t , onde R_t é a

continuação de R_0 . Agora definimos h_t na primeira região cilíndrica do tipo a) contida em R_0 . Como no item 2, escolha uma segunda linha principal l_0 e sua continuação l_t . Sejam $\pi_0 : l_0 \rightarrow l_0$ e $\pi_t : l_t \rightarrow l_t$ as transformações de Poincaré associadas a l_0 e l_t , respectivamente. Elas são topologicamente conjugadas. Neste ponto, a maneira de construir a equivalência topológica é exatamente igual ao item 2.

4. Definição de h_t em uma primeira (respec. segunda) região irredutível semi-transversal a qual está contida em uma segunda (respec. primeira) região cilíndrica do tipo b) (veja Figura 2.19(a)). O ciclo principal c mais interno da segunda folheação está contido em uma união de regiões paralelas ou em uma região cilíndrica do tipo b). Dos itens 2 e 3, h_t está definida em c . Sejam p_1 e p_2 as interseções das linhas principais l_0 e L_0 , respectivamente, que passam por p com os ciclos principais do bordo de R_0 . Sejam p_{1t} , p_{2t} , l_t e L_t as continuações de p_1 , p_2 , l_0 e L_0 . Definimos $h_t(p) = p_t$, onde p_t está na interseção das linhas principais l_t e L_t .

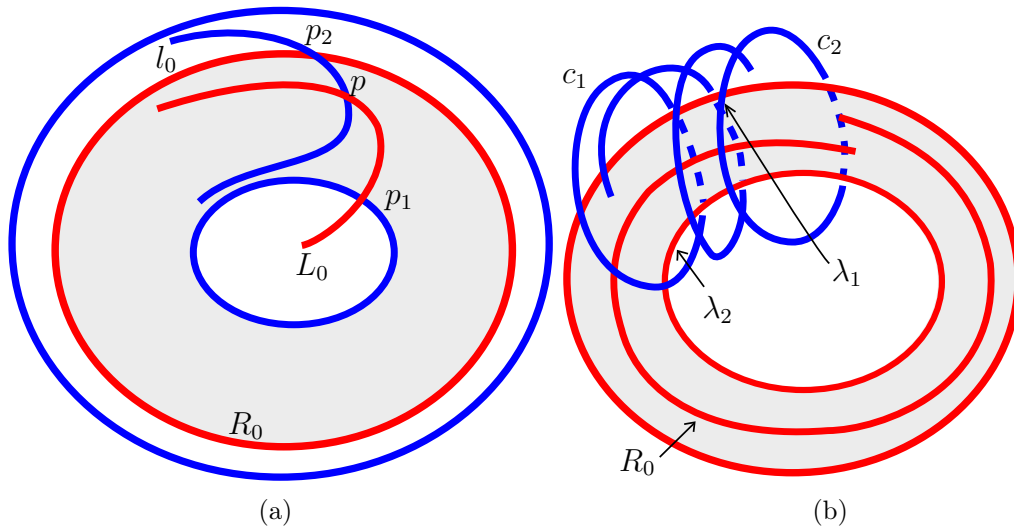


Figura 2.19: Definição de h_t em uma região semi-transversal irredutível e em uma região cilíndrica que intersecta um ciclo principal.

5. Definição de h_t em uma primeira (respec. segunda) região cilíndrica a qual intersecta um ciclo principal da segunda (respec. primeira) folheação (veja Figura 2.19(b)). Note que a região cilíndrica tem que ser do tipo a), sendo que uma região cilíndrica do tipo b) sempre contém um ciclo principal da outra folheação. Seja R_0 a região a qual se intersecta com o ciclo principal c_1 a componente conexa λ_1 . Definimos h_t em λ_1 como no item 2, isto é, se R_t é a continuação de R_0 e λ_{1t} é a continuação de λ_1 , então h_t é igual à conjugação topológica da transformação de Poincaré em λ_1 e λ_{1t} induzida pelas folheações $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ e \mathcal{F}_{1,α_t} ,

respectivamente.

Observe que uma primeira região cilíndrica do tipo a) somente pode ser intersectada por segundas regiões paralelas ou por segundas regiões cilíndricas do tipo a). Para definir h_t na interseção de R_0 com regiões paralelas utilizamos o item 2.

Procedemos a definir h_t na interseção de R_0 com uma segunda região cilíndrica S_0 do tipo a) limitada por c_1 e c_2 . Seja λ_2 a seção transversal à segunda folheação em S_0 . Definimos h_t em λ_2 da mesma maneira que para λ_1 . Para $p \in (R_0 \setminus \lambda_1) \cap (S_0 \setminus \lambda_2)$, sejam p_1 e p_2 as interseções das linhas principais que passam por p da primeira e segunda folheação com λ_1 e λ_2 , respectivamente. Chamando p_{1t} e p_{2t} as continuações de p_1 e p_2 , definimos $h_t(p)$ como a interseção das linhas principais que passam por p_{1t} e p_{2t} das folheações \mathcal{F}_{1,α_t} e \mathcal{F}_{1,α_t} , respectivamente. Assim, h_t é uma equivalência topológica em R_0 .

Como todas as possibilidades de interseções de regiões canônicas foram consideradas, temos uma equivalência topológica entre α e α_t , para $t \in [0, 1]$. Com isto finalizamos a demonstração do Teorema A.

GENERICIDADE DA CONFIGURAÇÃO PRINCIPAL DE IMERSÕES ESTRITAMENTE CONVEXAS

Neste capítulo provamos que o conjunto de imersões estruturalmente estáveis e estritamente convexas de uma superfície de gênero zero é genérico no conjunto de imersões estritamente convexas com a C^2 -topologia. Isto se consegue depois de eliminar as recorrências não triviais. Seguimos as ideias de [28] para demonstrar o Teorema B, fazendo as mudanças adequadas para imersões em $\mathbb{R}^{2,1}$.

3.1 Teorema de Genericidade

Uma imersão $\alpha \in \mathcal{I}^r$ é chamada de *estritamente convexa* se $\alpha(M)$ tem curvatura Gaussiana K_e (métrica euclidiana) positiva. Consideremos o subconjunto $\mathcal{I}_c^r = \mathcal{I}_c^r(M) \subset \mathcal{I}^r(M)$ das imersões estritamente convexas. Temos que $\mathcal{I}_c^r = \emptyset$ quando M é de gênero diferente de zero, então quando falamos de \mathcal{I}_c^r implicitamente estamos supondo que M é de gênero zero. Note que $\alpha \in \mathcal{I}_c^r$ é mais que uma imersão, é um mergulho. Observe também que \mathcal{I}_c^r é um conjunto aberto em $\mathcal{I}^{r,s}$, $s \leq r$.

No lema a seguir, vemos que para $\alpha \in \mathcal{I}_c^r$ temos somente singularidades na parte Riemanniana (umbílicos tipo espaço). Na parte Lorentziana, as folheações são localmente topologicamente equivalentes ao fluxo tubular. Além disso, em [50] provam que a conjectura de Carathéodory vale neste caso. Outras referências em relação deste assunto são [5] e [52]. Portanto, sempre vamos ter pelo menos dois pontos umbílicos tipo espaço.

Lema 3.1. *As linhas principais para $\alpha \in \mathcal{I}_c^r$ estão globalmente definidas. Além disso, o trópico é formado por duas curvas fechadas regulares tipo espaço e o*

conjunto discriminante LPL é vazio (somente vamos ter singularidades na parte Riemanniana).

Demonstração. Pela Proposição 1.26, $\delta \geq 0$ na parte Riemanniana e no trópico. Na parte Lorentziana de α , a curvatura Gaussiana com a métrica euclidiana

$$K_e = \frac{e_e g_e - f_e^2}{E_e G_e - F_e^2} > 0,$$

e sendo $E_e G_e - F_e^2 > 0$ temos que $e_e g_e - f_e^2 > 0$. Da Observação 1.21 temos que

$$eg - f^2 = \frac{\det(I_e)^{\frac{1}{2}}}{|\det(I)|^{\frac{1}{2}}}(e_e g_e - f_e^2) > 0.$$

Como $EG - F^2 < 0$, então as curvaturas principais, as quais são raízes da equação

$$\det(II - \lambda I) = (EG - F^2)\lambda^2 - (Eg + Ge - 2Ff)\lambda + eg - f^2 = 0,$$

são sempre reais e distintas. Assim, as direções principais existem e $\delta > 0$ na parte Lorentziana. Portanto, as linhas principais estão globalmente definidas.

Da Proposição 1.9 e), temos que $\alpha_u \times \alpha_v$ é luz se, e somente se, $\alpha_u \times_e \alpha_v$ (equivalentemente N_e) é luz. Como α é compacta e estritamente convexa, então N_e é un difeomorfismo. Sendo que o trópico de S^2 é formado por as duas curvas $\left\{ \left(x, y, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \in S^2 \right\}$, temos que N_e , e portanto $\alpha_u \times \alpha_v$, é luz em duas curvas fechadas de α . Assim, o trópico de α é composto por duas curvas fechadas as quais, pela Observação 1.30, são tipo espaço. Utilizando o Lema 1.29, $\delta > 0$ sobre o trópico. Portanto, o discriminante LPL é vazio. \square

Definimos o conjunto $S_c^r = S_c^r(M) = S^r(M) \cap \mathcal{I}_c^{r,s}(M)$ das imersões estritamente convexas e estruturalmente estáveis. O teorema que enunciamos a seguir é o objetivo final deste capítulo.

Teorema B. Sejam $r \geq 4$ e M uma superfície suave, orientada e compacta de gênero 0. Então, o conjunto $S_c^r(M)$ é denso em $\mathcal{I}_c^{r,2}(M)$.

A demonstração deste teorema é dada na Seção 3.8, depois de vários resultados que serão apresentados nas seções seguintes.

3.2 F3rmula Variacional

Na Proposi33o 3.2 vamos encontrar uma express33o para a varia33o infinitesimal de uma curva principal passando por um ponto, por meio da deforma33o da superf3cie.

Dada $\alpha \in \mathcal{I}^r$, uma carta local $(u, v) : (U, D, q_0) \longrightarrow (V, \mathbf{I} \times \mathbf{I}, p_0)$, $U \subset \alpha(M)$ aberto, denota que $(u, v)(q_0) = p_0$ e $(u, v)(D) = \mathbf{I} \times \mathbf{I}$, onde $q_0 \in D \subset U$ e $p_0 \in \mathbf{I} \times \mathbf{I} \subset V$, com $\mathbf{I} = [-1, 1]$.

Proposi33o 3.2. *Sejam $\alpha \in \mathcal{I}^r$ e $U \subset \alpha(M)$ um aberto fora das auto-interse333es de $\alpha(M)$ tal que n33o intersecta o tr33pico. Considere a carta principal $(u, v) : (U, D) \longrightarrow (V, \mathbf{I} \times \mathbf{I})$. Assuma-se que as linhas principais $\{v = c\}$ s33o da folhea333o $\mathcal{F}_{1,\alpha}$. Seja φ uma fun333o suave sobre U com suporte em D e suponha que, para r pequeno, $U_r = (I + r\varphi N)(U)$ 33 uma superf3cie (N 33 o vetor normal de U e $\langle N, N \rangle = \bar{\eta}$). Ent33o a linha principal de U_r sobre $D_r = (I + r\varphi N)(D)$ que passa pelo ponto q com $u(q) = -1$ e $-1 < v(q) = v_0 < 1$, intersecta o segmento de abscissa $\{u\}$ no ponto $q_r = q_r(u, q)$, cuja v -coordenada, $v = v(q_r) = v(u, q; r)$, tem derivada com rela333o a r dada por*

$$\begin{aligned} \left. \frac{dv}{dr}(u, q; r) \right|_{r=0} &= -\bar{\eta} \int_{-1}^u \varphi \left(\frac{k_{1v}}{(k_2 - k_1)^2 G} \right)_u du + \bar{\eta} \int_{-1}^u \frac{\varphi_v k_{1u}}{(k_2 - k_1)^2 G} du \\ &\quad + \bar{\eta} \frac{\varphi k_{1v}}{(k_2 - k_1)^2 G} \Big|_{-1}^u - \bar{\eta} \frac{\varphi_v}{(k_2 - k_1) G} \Big|_{-1}^u, \end{aligned}$$

onde as fun3333es s33o avaliadas em $(u, v_0; 0)$. Em particular,

$$\left. \frac{dv}{dr}(1, q; r) \right|_{r=0} = -\bar{\eta} \int_{-1}^1 \varphi \left[\frac{k_{1v}}{(k_2 - k_1)^2 G} \right]_u du + \bar{\eta} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_v k_{1u}}{(k_2 - k_1)^2 G} du.$$

Demonstra333o. A parametriza333o, X , da carta (u, v) sobre U_r 33 dada por

$$X(u, v; r) = X^0(u, v) + r\varphi(u, v)N(u, v),$$

onde X^0 e N s33o a parametriza333o e vetor normal, respectivamente, de $U = U_0$. A v -coordenada, $v = v(u, q; r)$, da linha principal passando pelo ponto q , satisfaz o problema de valor inicial

$$L_1(u, v; r) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + M_1(u, v; r) \frac{dv}{du} + N_1(u, v; r) = 0; \quad v(-1, v_0; r) = v_0, \quad (3.1)$$

onde $L_1 = Fg - Gf$, $M_1 = Eg - Ge$ e $N_1 = Ef - Fe$ s33o calculados com a

parametrização X .

Como (u, v) é carta principal para $U = U_0$, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du}(u, v; 0) &= 0, & F(u, v; 0) &= f(u, v; 0) = 0, \\ k_1(u, v; 0) &= \frac{e(u, v; 0)}{E(u, v; 0)} & e & \quad k_2(u, v; 0) = \frac{g(u, v; 0)}{G(u, v; 0)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Derivando com relação a r a equação (3.1), avaliando em $(u, v(q_r); r)$ e fazendo $r = 0$, temos:

$$(L_{1r}(v_u)^2 + 2L_1v_uv_{ur} + M_{1r}v_u + M_1v_{ur} + N_{1r}) \Big|_{(u, v_0; 0)} = 0; \quad v_r(-1, v_0; 0) = 0.$$

Utilizando as equações (3.2) e fazendo $v_r(u) = v_r(u, q; 0)$,

$$v_{ur}(u) = -\frac{Ef_r - F_re}{EG(k_2 - k_1)}(u, v_0; 0); \quad v_r(-1, v_0; 0) = 0.$$

Para verificar a expressão dada na proposição para $v_r(u)$, precisamos encontrar F_r e f_r .

Calculamos as seguintes expressões que usaremos depois (lembre-se que (u, v) é carta principal em U). Da igualdade $N_{uv} = N_{vu}$ e sendo $N_u = -k_1X_u^0$ e $N_v = -k_2X_v^0$, então

$$X_{uv}^0 = \frac{k_{1v}}{k_2 - k_1}X_u^0 - \frac{k_{2u}}{k_2 - k_1}X_v^0. \quad (3.3)$$

Agora,

$$\begin{aligned} X_u &= (1 - rk_1\varphi)X_u^0 + r\varphi_uN, \\ X_v &= (1 - rk_2\varphi)X_v^0 + r\varphi_vN, \\ X_{uv} &= (1 - rk_1\varphi)X_{uv}^0 - r(k_{1v}\varphi + k_1\varphi_v)X_u^0 + r\varphi_{uv}N - r\varphi_uk_2X_v^0, \\ &= \left(\frac{(1 - rk_1\varphi)k_{1v}}{k_2 - k_1} - r(k_{1v}\varphi + k_1\varphi_v) \right) X_u^0 \\ &\quad + \left(-\frac{(1 - rk_1\varphi)k_{2u}}{k_2 - k_1} - rk_2\varphi_u \right) X_v^0 + r\varphi_{uv}N. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Vemos que $F = \langle X_u, X_v \rangle = r^2\varphi_u\varphi_v$ e portanto $F_r(u, v_0; 0) = 0$. Faltava agora calcular $f_r(u, v_0; 0)$. Derivando com relação a r a equação $|X_u \wedge X_v|f = \langle X_u \wedge X_v, X_{uv} \rangle$ e avaliando em $r = 0$, temos

$$\sqrt{-\bar{\eta}EG}f_r|_{r=0} = \langle X_{ur} \wedge X_v, X_{uv} \rangle|_{r=0} + \langle X_u \wedge X_{vr}, X_{uv} \rangle|_{r=0} + \langle X_u \wedge X_v, X_{uvr} \rangle|_{r=0},$$

onde utilizamos que $|X_u \wedge X_v| = \sqrt{\bar{\eta}(F^2 - EG)}$.

Calculamos,

$$\begin{aligned} X_{ur}|_{r=0} &= -k_1\varphi X_u^0 + \varphi_u N, \\ X_{vr}|_{r=0} &= -k_2\varphi X_v^0 + \varphi_v N, \\ X_{uvr}|_{r=0} &= \left(\frac{-k_1\varphi k_{1v}}{k_2 - k_1} - (k_{1v}\varphi + k_1\varphi_v) \right) X_u^0 + \left(\frac{k_1\varphi k_{2u}}{k_2 - k_1} - k_2\varphi_u \right) X_v^0 \\ &\quad + \varphi_{uv} N, \\ X_{uv}|_{r=0} &= X_{uv}^0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Utilizando as equações (3.5) e as propriedades do produto vetorial triplo da Proposição 1.9, temos

$$\begin{aligned} \langle X_{ur} \wedge X_v, X_{uv} \rangle &= \frac{-\bar{\eta}\varphi_u k_{1v} \sqrt{-\bar{\eta}EG}}{k_2 - k_1}, \\ \langle X_u \wedge X_{vr}, X_{uv} \rangle &= \frac{\bar{\eta}\varphi_v k_{2u} \sqrt{-\bar{\eta}EG}}{k_2 - k_1}, \\ \langle X_u \wedge X_v, X_{uvr} \rangle &= \bar{\eta}\varphi_{uv} \sqrt{-\bar{\eta}EG}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Assim,

$$f_r = \frac{-\bar{\eta}(\varphi_u k_{1v} - \varphi_v k_{2u} - \varphi_{uv}(k_2 - k_1))}{k_2 - k_1} \quad (3.7)$$

e portanto

$$v_{ur}(u) = \frac{\bar{\eta}(\varphi_u k_{1v} - \varphi_v k_{2u} - \varphi_{uv}(k_2 - k_1))}{G(k_2 - k_1)^2}(u, v_0; 0). \quad (3.8)$$

Integrando entre -1 e u , obtemos que

$$v_r(u) = \bar{\eta} \int_{-1}^u \frac{\varphi_u k_{1v} - \varphi_v k_{2u} - \varphi_{uv}(k_2 - k_1)}{G(k_2 - k_1)^2} du.$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned} \int_{-1}^u \frac{\varphi_u k_{1v}}{G(k_2 - k_1)^2} du &= \frac{\varphi k_{1v}}{G(k_2 - k_1)^2} \Big|_{-1}^u - \int_{-1}^u \varphi \left(\frac{k_{1v}}{G(k_2 - k_1)^2} \right)_u du \\ - \int_{-1}^u \frac{\varphi_{uv}}{G(k_2 - k_1)} du &= - \frac{\varphi_v}{G(k_2 - k_1)} \Big|_{-1}^u + \int_{-1}^u \varphi_v \left(\frac{1}{G(k_2 - k_1)} \right)_u du \end{aligned}$$

Substituindo, temos

$$\begin{aligned} v_r(u) = & \bar{\eta} \int_{-1}^u \varphi_v \left[\left(\frac{1}{G(k_2 - k_1)} \right)_u - \frac{k_{2u}}{G(k_2 - k_1)^2} \right] du \\ & - \bar{\eta} \int_{-1}^u \varphi \left(\frac{k_{1v}}{G(k_2 - k_1)^2} \right)_u du + \bar{\eta} \frac{\varphi k_{1v}}{G(k_2 - k_1)^2} \Big|_{-1}^u - \bar{\eta} \frac{\varphi_v}{G(k_2 - k_1)} \Big|_{-1}^u. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Temos que $\langle X_{uv}, X_v \rangle = G_u$ e utilizando a equação (3.3), obtemos

$$\frac{G_u}{G} = -\frac{2k_{2u}}{k_2 - k_1}. \quad (3.10)$$

Assim, a expressão entre colchetes na integral (3.9) se reduz a

$$\left(\frac{1}{G(k_2 - k_1)} \right)_u - \frac{k_{2u}}{G(k_2 - k_1)^2} = \frac{k_{1u}}{G(k_2 - k_1)^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} v_r(u) = & \bar{\eta} \int_{-1}^u \frac{\varphi_v k_{1u}}{G(k_2 - k_1)^2} du \\ & - \bar{\eta} \int_{-1}^u \varphi \left(\frac{k_{1v}}{G(k_2 - k_1)^2} \right)_u du + \bar{\eta} \frac{\varphi k_{1v}}{G(k_2 - k_1)^2} \Big|_{-1}^u - \bar{\eta} \frac{\varphi_v}{G(k_2 - k_1)} \Big|_{-1}^u. \end{aligned}$$

Como φ tem suporte em D , $\varphi(\pm 1, v_0) = \varphi_v(\pm 1, v_0) = 0$ e com isso temos o resultado para $v_r(1)$. \square

3.3 O Lema do Levantamento

O lema a seguir é fundamental para eliminar recorrências não triviais. Para a demonstração, provamos primeiro o Lema 3.5 que tem a restrição de ser válido somente na topologia C^2 (veja Observação 3.6).

Lema 3.3. (Lema do Levantamento) *Seja $\alpha \in \mathcal{I}$ e $\bar{\gamma}$ uma linha principal da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$. Suponha que $\bar{\gamma}$ é orientada iniciando em q e contém em seu conjunto ω -limite uma recorrência não trivial γ . Suponha também, que $dk_1(p) \neq 0$ para algum $p \in \gamma$ na parte Riemanniana ou Lorentziana de $\alpha(M)$. Dado qualquer $\epsilon > 0$ e uma carta principal $(u, v) : (W, D, p) \rightarrow (V, \mathbf{I} \times \mathbf{I}, 0)$ de $\alpha(M)$ com W sem intersectar o trópico e fora das auto-interseções $\alpha(M)$, existe uma carta principal $(s, t) : D' \rightarrow \mathbf{I} \times \mathbf{I}$ de $\alpha(M)$ e uma função $\varphi : \alpha(M) \rightarrow [0, 1]$, tal que:*

- i. o suporte de φ está contido em $D \cap D'$ e $\|\varphi \circ X\|_{2,V}$, a C^2 -norma da expressão coordenada de φ sobre V , é menor que ϵ . Além disso, para todo $\mu \in [0, 1]$, $\alpha_\mu(M) = (I + \mu\varphi N)(\alpha(M))$ é uma imersão com $\|\alpha - \alpha_\mu\|_2 < \epsilon$.*

ii. Temos arcos $[b, a] \subset [q, a] \subset \bar{\gamma}$ tais que a, b estão em $\{s = -1\}$, e $[a, b] \cap D' = [q, a] \cap D' \subset [a, a'] \cup [b, b']$, onde a' e b' são os pontos sobre $\{s = 1\}$, definidos por $t(a') = t(a)$ e $t(b') = t(b)$. Além disso, o arco da folheação $\mathcal{F}_{1, \alpha_\mu}$ sobre $D'_\mu = (I + \mu\varphi N)(D')$, que passa pelo ponto a (respectivamente b) intersecta o segmento $\{s = 1\}$ no ponto q_μ de tal maneira que para alguns valores de μ , q_μ coincide com a' e b' .

3.3.1 Lemas auxiliares

Lema 3.4. (Veja [28]) Seja $\{p_i\}$ uma sequência de pontos em \mathbf{I} , a qual tem 0 como ponto de acumulação. Seja $\bar{c} \in (0, 1)$. Se $\epsilon_0 > 0$ é suficientemente pequeno, então existem dois pontos p_i e p_k , $k > i$, da sequência tais que

$$a) |p_i| < \epsilon_0, |p_k| < \epsilon_0, \bar{d} = |p_i - p_k| < \epsilon_0, e$$

$$b) \text{ para } s_1 = \min\{p_i, p_k\} - \bar{c}\bar{d} \text{ e } s_2 = \max\{p_i, p_k\} + \bar{c}\bar{d} \text{ se tem que } (s_1, s_2) \cap \{p_1, \dots, p_i, \dots, p_k\} = \{p_i, p_k\}.$$

Demonstração. Dado $\epsilon \in (0, \frac{1}{4})$, seja $r = r(\epsilon)$ um número positivo tal que $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ intersecta o intervalo $(-\epsilon\frac{1-c}{2}, \epsilon\frac{1-c}{2})$ exatamente em dois pontos, um dos quais é p_r . Seja s uma permutação de $\{1, 2, \dots, r\}$ tal que $p_{s(1)} < p_{s(2)} < \dots < p_{s(r)}$ e suponha que, para $n < r$,

$$[p_{s(n)}, p_{s(n+1)}] \subset \left(-\epsilon\frac{1-c}{2}, \epsilon\frac{1-c}{2}\right). \quad (3.11)$$

Assim, temos que $p_{s(n)}$ e $p_{s(n+1)}$ satisfazem às conclusões do lema ou temos duas possibilidades:

$$i. n > 2 \text{ e } p_{s(n)} - p_{s(n-1)} < c(p_{s(n+1)} - p_{s(n)}), \text{ ou}$$

$$ii. n + 2 \leq r \text{ e } p_{s(n+2)} - p_{s(n+1)} < c(p_{s(n+1)} - p_{s(n)}).$$

Suponha que se cumpre ii. Como acima, temos que $p_{s(n+1)}$ e $p_{s(n+2)}$ satisfazem a conclusão do lema ou $n + 2 \leq r$ e $p_{s(n+3)} - p_{s(n+2)} < c(p_{s(n+2)} - p_{s(n+1)})$. Se a condição do lema não é satisfeita, continuando da mesma maneira temos que:

$$p_{s(j)} - p_{s(j-1)} < c^{j-n-1}(p_{s(n+1)} - p_{s(n)}) \quad (3.12)$$

com $j = n + 2, n + 3, \dots, r$. A única maneira que $p_{s(r)}$ e $p_{s(r-1)}$ não satisfazem a conclusão do lema é que $p_{s(r)}$ seja próximo de 1 e que

$$1 - p_{s(r)} < c(p_{s(r)} - p_{s(r-1)}).$$

Em particular, da equação (3.11) e (3.12), temos que

$$p_{s(r)} > 1 - \epsilon. \quad (3.13)$$

Entretanto, da equação (3.12) temos que

$$p_{s(r)} - p_{s(n)} < \sum_{j=n+1}^r (p_{s(j)} - p_{s(j-1)}) < \left(\sum_{i=0}^{\infty} c^i \right) (p_{s(n+1)} - p_{s(n)}) < \epsilon.$$

Disto e da equação (3.11) temos que $p_{s(r)} < 2\epsilon$, que é uma contradição com (3.13). \square

Lema 3.5. *Sejam $\alpha \in \mathcal{I}^r$, N o normal de $\alpha(M)$ com $\langle N, N \rangle = \bar{\eta}$ e $W \subset \alpha(M)$ um aberto que não intersecta o trópico e que esteja fora das auto-interseções de $\alpha(M)$. Considere a carta principal $(u, v) : (W, D) \rightarrow (V, \mathbf{I} \times \mathbf{I})$ e sua parametrização X . Suponha que as linhas principais $\{v = c\}$ são da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ e que $dk_1 \neq 0$ em D .*

Então, dado $\epsilon > 0$, existem os números $c, d \in (0, \frac{1}{12})$ tais que para todo $r \in (0, d]$ e $x \in D$ com $u(x) = -1$ e $\{-\frac{1}{2} < v(x) < \frac{1}{2}\}$, há uma função suave $\varphi : \alpha(M) \rightarrow [0, 1]$ tal que

- a) o suporte está contido em $D_r = v^{-1}(v(x) + r\mathbf{I})$ e $\|\varphi \circ X\|_{2,V}$, a C^2 -norma de φ em V , é menor que ϵ .*
- b) para todo $\mu \in \mathbf{I}$, $\alpha_\mu(M) = (I + \mu\varphi N)(\alpha(M))$ é uma imersão e o arco principal da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha_\mu}$ em $D_\mu = (I + \mu\varphi N)(D)$, o qual passa por x intersecta ao segmento $\{u = 1\}$ no ponto $q_\mu(x)$, de tal maneira que a aplicação $\mu \rightarrow v(q_\mu(x))$ é estritamente crescente e sua imagem contém o intervalo $[v(x) - rc, v(x) + rc]$ (Veja Figura 3.1).*

Demonstração. Sejam $\epsilon > 0$ e $m : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ uma função suave tal que $m(\frac{5}{6}\mathbf{I}) = 1$ e com suporte em $\frac{6}{7}\mathbf{I}$. Como $dk_1 \neq 0$ sobre D , podemos escolher os números $c > 0$ e b tais que para todo $v_0 \in \mathbf{I}$, se cumpre que

$$\begin{aligned} 3|b|\|m\|_2^2 &< \epsilon, \\ \left| \int_{-1}^u bm(u) \left(\frac{k_{1u}}{(k_2 - k_1)^2 G} \right) (u, v_0) du \right| &< \frac{1}{4}, \\ \bar{\eta} \int_{-1}^1 bm(u) \left(\frac{k_{1u}}{(k_2 - k_1)^2 G} \right) (u, v_0) du &> 2c, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde $G = \langle X_v, X_v \rangle$.

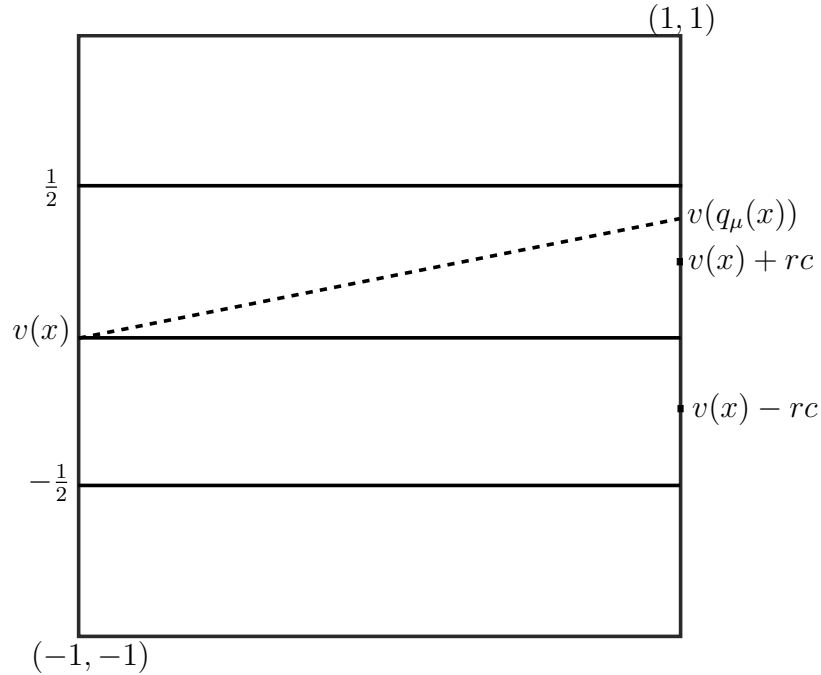


Figura 3.1: A aplicação $\mu \rightarrow v(q_\mu(x))$ é estritamente crescente e sua imagem contém o intervalo $[v(x) - rc, v(x) + rc]$.

Seja ψ uma função real suave sobre $W \times \mathbf{I}$, definida por

$$\psi(u, v; v_0) = b(v - v_0)m(u),$$

e suponha que $d \in (0, \frac{1}{12})$ é pequeno tal que para $(v_0, r) \in \mathbf{I} \times d\mathbf{I}$, $D_{v_0, r} = (I + r\psi N)(D)$ é uma superfície. Seja $v(u; v_0, r)$, $(u, v_0) \in \mathbf{I} \times \frac{3}{4}\mathbf{I}$, a v -coordenada do arco principal de $D_{v_0, r}$ através do ponto x , com $u(x) = -1$ e $v(x) = v_0$. Como $\psi(u, v_0; v_0, r) \equiv 0$, segue da Proposição 3.2 que

$$v_r(u; v_0, 0) = \bar{\eta} \int_{-1}^u bm(u) \left(\frac{k_{1u}}{(k_2 - k_1)^2 G} \right) (u, v_0) du$$

e utilizando as desigualdades (3.14), temos

$$v_r(1; v_0, 0) > 2c \text{ e } |v_r(u; v_0, 0)| < \frac{1}{4}.$$

Como I é compacto e $v_r(1; v_0, r)$ depende continuamente de (v_0, r) , tomando $d > 0$ suficientemente pequeno, temos que para todo $(u, v_0, r) \in \mathbf{I} \times \frac{1}{2}\mathbf{I} \times d\mathbf{I}$,

$$v_r(1; v_0, r) > c \text{ e } |v_r(u; v_0, r)| < \frac{1}{2}, \quad (3.15)$$

integrando a primeira desigualdade no intervalo definido por 0 e r , e utilizando o

Teorema do Valor Médio na segunda, obtemos

$$v(1; v_0, r) \geq v_0 + rc, \text{ se } r \geq 0, \quad (3.16)$$

$$v(1; v_0, r) \leq v_0 + rc, \text{ se } r < 0, \text{ e} \quad (3.17)$$

$$|v(u; v_0, r) - v_0| \leq \frac{|r|}{2}. \quad (3.18)$$

Para $v_0 \in \frac{1}{2}\mathbf{I}$, $r \in d\mathbf{I} - \{0\}$ e tomando $d = d(\epsilon)$ pequeno tal que $rb < 1$, definimos $\varphi : \alpha(M) \rightarrow [0, 1]$ com suporte em W tal que na carta (u, v) ,

$$\varphi(u, v; v_0, r) = r\psi(u, v; v_0)m\left(\frac{v - v_0}{|r|}\right) = rb(v - v_0)m(u)m\left(\frac{v - v_0}{|r|}\right).$$

Provemos a). Observe que para $v \notin v(x) + r\mathbf{I} = [v_0 - r, v_0 + r]$, $m\left(\frac{v - v_0}{|r|}\right) = 0$. Assim, o suporte de φ está contido em $D_r \subset W$. Seja $\delta = \text{senal}(r)$, então

$$\begin{aligned} \varphi_u &= bm'(u)r(v - v_0)m\left(\frac{v - v_0}{|r|}\right), \\ \varphi_v &= bm(u)\left[rm\left(\frac{v - v_0}{|r|}\right) + \delta(v - v_0)m'\left(\frac{v - v_0}{|r|}\right)\right], \\ \varphi_{uu} &= bm''(u)r(v - v_0)m\left(\frac{v - v_0}{|r|}\right), \\ \varphi_{uv} &= bm'(u)\left[rm\left(\frac{v - v_0}{|r|}\right) + \delta(v - v_0)m'\left(\frac{v - v_0}{|r|}\right)\right], \\ \varphi_{vv} &= bm(u)\left[2\delta m'\left(\frac{v - v_0}{|r|}\right) + \left(\frac{v - v_0}{r}\right)m''\left(\frac{v - v_0}{|r|}\right)\right]. \end{aligned}$$

Observe-se que, se $|v - v_0| \geq |r|$, então todas as derivadas são nulas, e se $|v - v_0| < |r|$ a primeira desigualdade de (3.14) implica que todas as derivadas são menores que ϵ . Portanto, $\|\varphi \circ X\|_{2,V} < \epsilon$.

Provemos b). Sem perda de generalidade, ϵ pode ser suficientemente pequeno tal que para $\mu \in \mathbf{I}$, $\alpha_\mu(M) = (I + \mu\varphi N)(\alpha(M))$ seja uma superfície. Observe-se que $m\left(\frac{v - v_0}{|r|}\right) = 1$ para $v \in v(x) + \frac{5}{6}r\mathbf{I}$. Sendo $\mu\varphi(u, v; v_0, r) = \mu r\psi(u, v; v_0) = r_\mu\psi(u, v; v_0)$ e $r_\mu \in d\mathbf{I}$, da desigualdade (3.18), temos que as linhas de curvatura de $(I + r_\mu\psi N)(D')$ e $(I + \mu\varphi N)(D')$ coincidem, onde $D' = v^{-1}(v(x) + \frac{5}{6}r\mathbf{I})$.

Portanto, de (3.15) obtemos que $\mu \rightarrow v(q_\mu(x))$ é estritamente crescente e, de (3.16) e (3.17) que sua imagem contém $[v(x) - rc, v(x) + rc]$. \square

Observação 3.6. Utilizando o argumento do Lema 3.5, não é possível obter uma aproximação na C^3 -norma. A derivada

$$\varphi_{vvv} = bm(u) \left[\frac{3}{r} m'' \left(\frac{v - v_0}{|r|} \right) + \delta \left(\frac{v - v_0}{r^2} \right) m''' \left(\frac{v - v_0}{|r|} \right) \right],$$

onde $\delta = \text{sign}(r)$. Quando r tende para 0, φ_{vvv} tende para infinito. Assim, não é possível limitar a C^3 -norma de φ .

3.3.2 Demonstração do lema do levantamento

Demonstração. Como $dk_1(p) \neq 0$, podemos assumir, escolhendo adequadamente D , que $dk_1 \neq 0$ em todo D . Dado $\epsilon > 0$, sejam c, d os números associados a ϵ no Lema 3.5. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $nc < 1 \leq (n+1)c$.

Como γ é uma recorrência não trivial, intersecta o segmento $\{(-1, v) : v \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ e suponha-se que $\{v = 0\} \subset \gamma$. Vamos utilizar um arco apropriado de γ para construir uma carta principal $(\tilde{s}, \tilde{t}) : \tilde{D} \rightarrow \mathbf{I} \times \mathbf{I}$ com as seguintes propriedades (veja Figura 3.2):

- i) $\{\tilde{t} = 0\} \subset \gamma$ intersecta $\{u = \pm 1\} \cap \{-\frac{1}{2} < v < \frac{1}{2}\}$ exatamente em $2n$ pontos $\{p_1, p'_1, p_2, p'_2, \dots, p_n, p'_n\}$, tal que:
 - a) as \tilde{s} -coordenadas, $s_i = \tilde{s}(p_i)$ e $s'_i = \tilde{s}(p'_i)$, cumprem que $-1 = s_1 < s'_1 < s_2 < s'_2 \cdots < s_n < s'_n = 1$,
 - b) $\{s_i \leq \tilde{s} \leq s'_i\} \subset \{-\frac{1}{2} < v < \frac{1}{2}\}$,
 - c) $\{s'_i < \tilde{s} < s_{i+1}\} \cap D = \emptyset$, o conjunto $\{s'_i < \tilde{s} < s_{i+1}\}$ pode intersectar o trópico de $\alpha(M)$, e
 - d) um dos $\{\tilde{s} = s_i\}$ e $\{\tilde{s} = s'_i\}$ está contido no $\{u = 1\}$ e o outro no $\{u = -1\}$.
- ii) \tilde{D} pode ser assumido tal que:
 - a) para todo $z, w \in \mathbf{I}$ com $\{\tilde{s} = z\} \cup \{\tilde{s} = w\} \subset D$ e para todo $x, y \in \{\tilde{s} = z\}$ o comprimento do segmento $v(\{\tilde{s} = z\}) < d$, e
 - b) a transformação de transição $P = P_{zw} : v(\{\tilde{s} = z\}) \rightarrow v(\{\tilde{s} = w\})$, definida pela folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ sobre \tilde{D} , cumpre que

$$1 - \frac{1}{n+3} < \frac{P'(v(x))}{P'(v(y))} < 1 + \frac{1}{n+3}.$$

Os arcos de linhas principais entre as seções $v(\{\tilde{s} = z\})$ e $v(\{\tilde{s} = w\})$ podem intersectar o trópico, mas pelo Lema 2.14, P está bem definida.

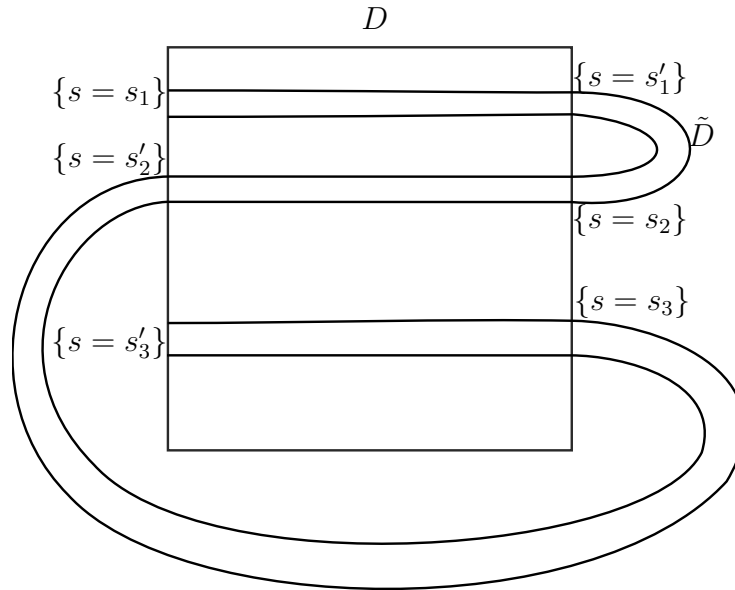


Figura 3.2: \tilde{D} é construído conforme γ intersecta D as primeiras n vezes e tal que (s, t) seja carta principal.

Considere a sucessão de pontos da interseção de $\bar{\gamma}$ com o arco $\{u = -1\}$, ordenados pela orientação de $\bar{\gamma}$. Como $\{v = 0\} \subset \gamma$ está contido no conjunto ω -limite de $\bar{\gamma}$, tomando ϵ_0 suficientemente pequeno e $\bar{c} > \frac{3}{4}$ no Lema 3.4, podemos escolher $a, b \in \{\tilde{s} = -1\} \cap \bar{\gamma}$ e $z, w \in \{\tilde{s} = -1\}$ (veja Figura 3.3), tais que:

- $v(w) < v(a) < v(b) < v(z)$ ou $v(w) > v(a) > v(b) > v(z)$, onde b é a primeira interseção de $\bar{\gamma}$ com $\{\tilde{s} = -1\}$,
- $|v(w) - v(a)| = \frac{3}{2}\theta$, $|v(a) - v(b)| = 2\theta$ e $|v(b) - v(z)| = \frac{3}{2}\theta$, e
- $[q, a] \cup (v(z); v(w)) = \{a, b\}$, onde $[q, a]$ é o arco em $\bar{\gamma}$ entre q e a , e $(v(z); v(w))$ é o segmento em $\{\tilde{s} = -1\}$ entre z e w .

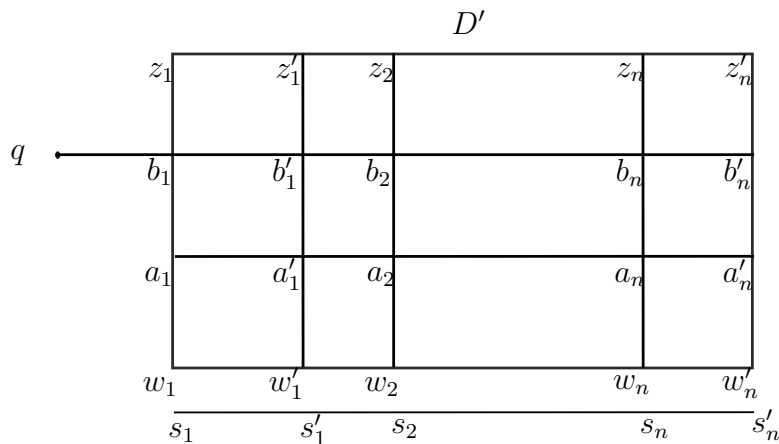


Figura 3.3: D' é a restrição de \tilde{D} à $\tilde{t}(w)$ e $\tilde{t}(z)$.

Seja $(s, t) : D' \longrightarrow \mathbf{I} \times \tilde{t}([z; w])$, a restrição de (\tilde{s}, \tilde{t}) ao conjunto $D' = \{\tilde{t}(z) \leq \tilde{t} \leq \tilde{t}(w)\}$. Chamemos w_i, a_i, b_i, z_i (respectivamente w'_i, a'_i, b'_i, z'_i) às interseções das linhas principais, passando por w, a, b, z , com $\{s = s_i\}$ (respectivamente $\{s = s'_i\}$).

iii) Provemos que, se $|v(a_i) - v(b_i)| = 2\theta_i$ então $|v(a_i) - v(w_i)| > \theta_i$ e $|v(z_i) - v(b_i)| > \theta_i$.

Seja $P_{1i} : v(\{s = s_1\}) \longrightarrow v(\{s = s_i\})$ a transformação de transição definida pela linhas principais da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ sobre D' . Pelo Teorema do Valor Médio, temos $x, y \in \{s = s_1\}$ tais que

$$\begin{aligned} |v(b_i) - v(z_i)| &= |P'_{1i}(v(x))| |v(b_1) - v(z_1)| \text{ e} \\ |v(b_i) - v(a_i)| &= |P'_{1i}(v(y))| |v(b_1) - v(a_1)| \end{aligned}$$

dividindo os termos

$$|v(b_i) - v(z_i)| = \frac{|P'_{1i}(v(x))| |v(b_1) - v(z_1)|}{|P'_{1i}(v(y))| |v(b_1) - v(a_1)|} |v(b_i) - v(a_i)|,$$

utilizando ii. b), segue que

$$|v(b_i) - v(z_i)| > \left(1 - \frac{1}{n+3}\right) \frac{3}{2} \theta_i > \theta_i,$$

e de maneira similar o outro caso.

Para $x, y \in \mathbb{R}$, denotemos por $[x, y]'$ o segmento com pontos finais x e y , onde x pode ou não ser menor que y . Para $i = 1, 2, \dots, n$, seja $\delta_i = 1$ se $v(a_i) < v(b_i)$, $\delta_i = -1$ se $v(a_i) > v(b_i)$. Por iii) e como $nc < 1$, temos que

$$v(a_i) + \delta_i(i-1)c\theta_i + \theta_i \mathbf{I} \subset v([z_i; w_i])$$

onde $[z_i; w_i] \subset \{s = s_i\}$. Segue de i), que

$$D_i = v^{-1}(v(a_i) + \delta_i(i-1)c\theta_i + \theta_i \mathbf{I})$$

cumpra que $D_i \cap D_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e $D_i \subset D \cap D'$. Em cada D_i podemos aplicar independentemente o Lema 3.5, assim temos uma função $\varphi : \alpha(M) \longrightarrow [0, 1]$ tal que

iv) o suporte de φ está contido em $\cup D_i \subset D \cap D'$ e C^2 -norma na carta (u, v) é menor que ϵ . Além disso, para todo $\mu \in [0, 1]$, $\alpha_\mu(M) = (I + \mu\varphi N)(\alpha(M))$ é uma imersão.

Dados dois números reais x e y , vamos escrever $[x, y]'$ para indicar o intervalo $[x, y]$ se $x < y$ ou $[y, x]$ se $y < x$.

v) o arco da linha principal da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ de α_μ que passa através de $v(a_i) + \delta_i(i-1)\theta_i \in [v(a_i), v(b_i)]'$ intersecta o segmento $[v(a'_i), v(b'_i)]'$ no ponto $q_i(\mu)$. Utilizando ii) a), a imagem da aplicação $\mu \rightarrow q_i(\mu)$ contém o segmento $[v(a_i) + \delta_i(i-1)\theta_i, v(a_i) + \delta_i(i+1)\theta_i]'$.

Como o suporte de φ está contido em D , por i) c), a transformação de transição $P_i : [v(z'_i); v(w'_i)]' \rightarrow [v(z_{i+1}); v(w_{i+1})]'$ é a mesma para todos os μ .

vi. Provemos que $P_i(v(a'_i) + \delta_i(i+1)c\theta_i) \in [v(a_{i+1}) + \delta_{i+1}ic\theta_{i+1}, v(b_{i+1})]'$.

Para $i < n$, $(i+1)c < 1$, assim $v(a'_i) + \delta_i(i+1)c\theta_i \in [v(a'_i), v(b'_i)]'$ e $P_i(v(b'_i)) = v(b_{i+1})$, então $P_i(v(a'_i) + \delta_i(i+1)c\theta_i) < v(b_{i+1})$. Pelo Teorema do Valor Médio, existem $x, y \in [v(a'_i), v(b'_i)]$ tais que

$$|P_i(v(a'_i) + \delta_i(i+1)c\theta_i) - P(v(a'_i))| = |P'(v(x))|(i+1)c\theta_i|,$$

$$|P(v(b'_i)) - P_i(v(b'_i))| = |P(v(y))|\theta_i.$$

Dividindo os termos e utilizando ii) b), temos

$$\begin{aligned} |P_i(v(a'_i) + \delta_i(i+1)c\theta_i) - v(a_{i+1})| &> \left(1 - \frac{1}{n+3}\right) (i+1)c\theta_{i+1} \\ &> \left(\frac{n+2}{n+3}\right) (i+1)c\theta_{i+1} > ic\theta_{i+1}. \end{aligned}$$

Portanto, se $\delta_{i+1} = 1$

$$v(a_{i+1}) < v(a_{i+1}) + \delta_{i+1}ic\theta_{i+1} < P_i(v(a'_i) + \delta_i(i+1)c\theta_i),$$

e se $\delta_{i+1} = -1$

$$v(a_{i+1}) > v(a_{i+1}) + \delta_{i+1}ic\theta_{i+1} > P_i(v(a'_i) + \delta_i(i+1)c\theta_i).$$

Como q_1 é monótona e sua imagem contém o intervalo $[v(a'_1), v(a'_1) + 2\delta_1c\theta_1]'$, $P_1(v(a'_1)) = v(a_2)$ e $P_1(v(a'_1) + 2\delta_1c\theta_1) \in [v(a_2) + \delta_2c\theta_2, v(b_2)]'$; segue que a imagem de $P_1 \circ q_1$ contém $[v(a_2), v(a_2) + \delta_2c\theta_2]'$. Similarmente, $q_2 \circ P_1 \circ q_1$ e $P_2 \circ q_2 \circ P_1 \circ q_1$ são monótonas e em suas imagens estão contidos os intervalos $[v(a'_2), v(a'_2) + 3\delta_2c\theta_2]'$ e $[v(a_3), v(a_3) + 2\delta_3c\theta_3]'$, respectivamente. Procedendo neste sentido, como $(n+1)c > 1$, concluímos que a imagem de $q_n \circ P_{n-1} \circ q_{n-1} \circ \dots \circ P_1 \circ q_1$ contém o intervalo $[v(a'_n), v(b'_n)]'$.

Portanto, para a aplicação $q_n \circ P_{n-1} \circ q_{n-1} \circ \dots \circ P_1 \circ q_1 : \mu \mapsto q_\mu$ existem valores de μ tais que q_μ coincidem com a' e b' , e temos a conclusão do lema. \square

3.4 Genericidade das Imersões com Pontos Umbílicos Tipo Espaço Hiperbólicos

Os pontos umbílicos hiperbólicos tipo espaço U_e (umbílicos Darbouxianos) são os E_i $i = 1, 2, 3$ da Proposição 2.1. A condição $b(b - a) \neq 0$ nos pontos E_i é chamada de *condição de transversalidade* e denotada por T_e . A seguir veremos que o conjunto de imersões que satisfazem localmente à condição T_e é denso em $\mathcal{I}^{r,3}$. O seguinte resultado é uma adaptação para contexto de Minskowski do Lema 3.2, pag. 28 de [28].

Lema 3.7. *Dada uma imersão $\alpha \in \mathcal{I}^r$, considere o ponto $p \in M$ e U vizinhança de p na parte Riemanniana de α . Na carta $(u, v) : (U, p) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ considere a parametrização local*

$$\alpha(u, v) = (u, v, f(u, v)),$$

com $f(u, v) = au^2 + buv + cv^2 + O((u^2 + v^2)^{3/2})$. Definimos

$$\alpha_{\epsilon, \mu}(u, v) = \alpha(u, v) + (0, 0, \epsilon uv + \mu u^2) = (u, v, f(u, v) + \epsilon uv + \frac{1}{2}\mu u^2)$$

com $(\epsilon, \mu) \in \mathbb{R}^2$ e $(u, v) \in U$. Sejam

$$\begin{aligned} a_0 &= -vf_v f_{vv} - uf_u f_{vv} + 2uf_v f_{uv} + f_v^2 - 1, \\ b_0 &= -uf_{vv} f_v, \\ c_0 &= 2uf_v f_{uu} - 2vf_u f_{vv}, \\ d_0 &= -2uf_u f_{vv} + f_v^2 - 1 \end{aligned}$$

e $D \subset U$ um disco compacto sobre o qual $(a_0 d_0 - b_0 c_0)(u, v) > 0$. Chamaremos de $\mathcal{T} = \mathcal{T}(D)$ o conjunto de (ϵ, μ) para os quais todos os pontos umbílicos tipo espaço, sobre D , de $\alpha_{\epsilon, \mu}$ satisfazem a propriedade de transversalidade T_e . Então, existe um $r > 0$ pequeno tal que a interseção de \mathcal{T} com o disco de raio r tem medida de Lebesgue total.

Demonstração. A equação de linhas de curvatura principal para $\alpha_{\epsilon, \mu}$ é

$$L_1(u, v; \epsilon, \mu)dv^2 + M_1(u, v; \epsilon, \mu)dvdu + N_1(u, v; \epsilon, \mu)du^2 = 0.$$

Os pontos umbílicos tipo espaço é o conjunto

$$U_d = \{(u, v; \epsilon, \mu) : L_1(u, v; \epsilon, \mu) = 0, M_1(u, v; \epsilon, \mu) = 0\}.$$

Nos pontos umbílicos onde se cumpre a condição de transversalidade T_e , U_d é uma superfície regular já que $\frac{\partial(L_1, M_1)}{\partial(u, v)} \neq 0$. Vamos provar que para (ϵ, μ) suficientemente pequeno, U_d é também regular em pontos umbílicos que não cumprem T_e , sobre D . Temos que

$$\begin{aligned} L_1(u, v; \epsilon, \mu) &= -f_{uv} - f_u f_{vv} f_v - \mu u f_{vv} f_v + f_{uv} f_v^2 + (-\mu u^2 f_{vv} - u f_u f_{vv} + 2u f_{uv} f_v \\ &\quad - v f_v f_{vv} + f_v^2 - 1)\epsilon + (u^2 f_{uv} - uv f_{vv} + 2u f_v)\epsilon^2 + u^2 \epsilon \\ M_1(u, v; \epsilon, \mu) &= -\epsilon^2 v^2 f_{vv} - 2\epsilon v f_u f_{vv} - f_u^2 f_{vv} + f_{vv} + (\epsilon^2 u^2 - 2\epsilon uv f_{vv} + 2\epsilon u f_v \\ &\quad - 2u f_u f_{vv} + f_v^2 - 1)\mu - u^2 f_{vv} \mu^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} L_{1\epsilon}(u, v; 0, 0) &= -v f_v f_{vv} - u f_u f_{vv} + 2u f_v f_{uv} + f_v^2 - 1 = a_0, \\ L_{1\mu}(u, v; 0, 0) &= -u f_{vv} f_v = b_0, \\ M_{1\epsilon}(u, v; 0, 0) &= 2u f_v f_{uv} - 2v f_u f_{vv} = c_0, \\ M_{1\mu}(u, v; 0, 0) &= -2u f_u f_{vv} + f_v^2 - 1 = d_0. \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial(L_1, M_1)}{\partial(\epsilon, \mu)}(0, 0) = (a_0 d_0 - b_0 c_0)(0, 0) = 1$, existe um disco $D \subset U$ onde $(a_0 d_0 - b_0 c_0)(u, v) > 0$. Assim, existe $r > 0$ tal que para $(\epsilon, \mu) \in D_r$, $\frac{\partial(L_1, M_1)}{\partial(\epsilon, \mu)} > 0$ com $(u, v) \in D$. Temos então que U_d é uma superfície suave.

Seja π a projeção de U_d no plano- (ϵ, μ) , o conjunto de valores regulares de π se correspondem com \mathcal{T} . A função π é suave entre U_d e D_r , pelo Teorema de Sard, temos que o conjunto de valores regulares tem medida total. \square

Proposição 3.8. *O conjunto das imersões $\alpha \in \mathcal{I}^r$, $r \geq 3$, cujos pontos umbílicos tipo espaço são todos hiperbólicos é aberto e denso em $\mathcal{I}^{r,3}$.*

Demonstração. A propriedade de ser aberto é consequência direta da abertura das condições dos pontos Darbouxianos sendo que elas envolvem somente derivadas de ordem 3. Se a condição de transversalidade é satisfeita em todo ponto umbílico tipo espaço, as condições E_i da Proposição 2.1 são atingidas por um número finito de perturbações nos coeficientes em uma carta de Monge. Assim, é suficiente provar a densidade da condição de transversalidade.

No Lema 3.7, provamos que a propriedade T_e é densa localmente. Sendo que M é compacta então pode ser recoberta por um número finito de cartas de Monge. Temos assim que, a propriedade T_e é densa.

Portanto, o conjunto de imersões que têm os pontos umbílicos tipo espaço hiperbólicos é aberto e denso em \mathcal{I}^r .³ \square

3.5 Propriedade da Curvatura Variável

Lema 3.9. *Considere $\alpha \in \mathcal{I}^r$ e seja c uma linha principal da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ com $k_1|_c \equiv k$, k constante, contida na parte Riemanniana ou Lorentziana de $\alpha(M)$. Se cumpre que:*

- a) *se $k \neq 0$ (respec. $k = 0$), há uma esfera $S_m^2 \left(\frac{1}{|k|} \right)$ (respec. um plano) tangente a $\alpha(M)$ ao longo de c .*
- b) *se $dk_1 \equiv 0$ sobre c , então existe um plano intersectando $\alpha(M)$ ortogonalmente ao longo de c . Além disso, se $k \neq 0$ (respec. $k = 0$) c está contida em uma curva gerada pelo plano ortogonal e a esfera $S_m^2 \left(\frac{1}{|k|} \right)$ (respec. em uma linha reta).*
- c) *c está mergulhada em $\alpha(M)$.*
- d) *Se $\alpha(M)$ é analítica então c é ciclo principal ou o conjunto limite de c consiste de pontos umbílicos.*

Demonstração. a) Suponha que $c = c(t)$ é uma parametrização de c . Se $k \neq 0$, pela fórmula de Rodrigues temos que

$$\frac{d}{dt} \left(c(t) + \frac{1}{k} N(c(t)) \right) = 0$$

para todo t . Portanto, existe um $p \in \mathbb{R}^{2,1}$ tal que

$$c(t) = p - \frac{1}{k} N(c(t)).$$

Isto implica que $\alpha(M)$ é tangente à “esfera” $S_m^2 \left(\frac{1}{|k|} \right) = \{x \in \mathbb{R}^{2,1} : |x - p| = \frac{1}{|k|}\}$ ao longo de c . De maneira similar, se $k = 0$, $N'(c(t)) = 0$ e portanto $N(c(t))$ é constante. Assim, o plano $\{x \in \mathbb{R}^{2,1} : \langle x - c(t_0), N(c(t_0)) \rangle = 0\}$, para algum t_0 no domínio de c , é tangente a $\alpha(M)$ ao longo de c .

- b) Sejam $p = c(t_0)$ e $(u, v) : (U, D, p) \rightarrow (V, \mathbf{I} \times \mathbf{I}, 0)$ uma carta principal sobre $\alpha(M)$ com parametrização X , onde $\mathbf{I} = [-1, 1]$, tal que $\{v = 0\} \subset c$. Da equação

(3.3) temos que $X_{uv}(u, 0) = -\frac{k_{2u}}{k_2 - k_1} X_v(u, 0)$ e utilizando a equação (3.10),

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \left(\frac{X_v(u, 0)}{|X_v(u, 0)|} \right) &= \frac{d}{du} \left(\frac{X_v(u, 0)}{\sqrt{\eta G(u, 0)}} \right) \\ &= -\frac{\eta G_u(u, 0)}{2(\sqrt{\eta G(u, 0)})^3} X_v(u, 0) + \frac{1}{\sqrt{\eta G(u, 0)}} X_{uv}(u, 0) = 0, \end{aligned}$$

onde $\eta = 1$ (respec. $\eta = -1$) se $X_v(u, 0)$ é tipo espaço (respec. tempo). Sendo que $\frac{X_v(u, 0)}{|X_v(u, 0)|}$ é constante, c está contida no plano ortogonal a ele, e consequentemente ortogonal a $\alpha(M)$. A conclusão segue do item a).

c) Suponha que o conjunto limite de c contenha a linha principal \bar{c} da folheação $\mathcal{F}_{1, \alpha}$. Seja $(u, v) : (U, D) \rightarrow (V, \mathbf{I} \times \mathbf{I})$ uma carta principal sobre $\alpha(M)$, onde $\mathbf{I} = [-1, 1]$, tal que $\{v = 0\} \subset \bar{c}$. Temos duas possibilidades:

- i. Existe $\epsilon > 0$ tal que $c \cap \{-\epsilon < v < \epsilon\} = \{v = 0\}$. Neste caso, como c está contida em seu próprio conjunto limite, temos que $c = \bar{c}$ é um ciclo principal.
- ii. Existe uma sequência $\{v_n\}$ em \mathbf{I} convergindo para 0, tal que para todo n , $\{v = v_n\} \subset c$. Como $k_1(u, v_n) = k$, segue que $k_1(u, 0) = k$ e $k_{1v}(u, 0) = k$. Por b), temos que \bar{c} está contida em uma linha reta (quando $k = 0$) ou em uma circunferência de raio $\frac{1}{|k|}$ (quando $k \neq 0$). Como \bar{c} é o conjunto limite de c , c está mergulhada em $\alpha(M)$.

d) α é analítica. Se i. é satisfeita, então c é um ciclo principal. Se ii. é satisfeita, então $\alpha(M)$ é tangente a uma “esfera” $S_m^2(r)$ ou a um plano, ao longo do conjunto $\{v = 0\} \cup \{v = v_n : n \in \mathbb{N}\} \subset c \cup \bar{c}$. Pela analiticidade, $\alpha(M)$ é uma “esfera” $S_m^2(r)$ ou um plano, o qual é uma contradição, já que elas são superfícies umbílicas (veja Seção 5.1). Assim, se c não ciclo principal então seu conjunto limite consiste de pontos umbílicos.

□

Lema 3.10. *Considere $\alpha \in \mathcal{I}^r$ e seja c uma linha principal da folheação $\mathcal{F}_{1, \alpha}$.*

- a) *Se c intersecta transversalmente o trópico de $\alpha(M)$ então $k_1|_c$ não é constante em seu domínio (k_1 não está definida sobre o trópico).*
- b) *Se c está contida na parte Riemanniana (respec. Lorentziana) de $\alpha(M)$ e $k_1|_c \equiv k$ então o conjunto limite de c está contido na parte Riemanniana (respec. Lorentziana).*

Demonstração. Provemos a). Suponha que $c : [-a, a] \rightarrow M$ é uma linha principal da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ transversal ao trópico com $c_1 = c|_{(0,a]}$ (respec. $c_2 = c|_{[-a,0)}$) na parte Riemanniana (respec. na parte Lorentziana) de α e tal que $k_1|_{c_1} = r_1$ e $k_1|_{c_2} = r_2$, r_1 e r_2 constantes. Pelo item a) do Lema 3.9, a curva c_1 (respec. c_2) está contida na “esfera” $S_m^2\left(\frac{1}{|r_1|}\right)$ (respec. $S_m^2\left(\frac{1}{|r_2|}\right)$). A curva c_1 (respec. c_2) não pode estar contida em um plano porque ele teria que ser tipo espaço (respec. tempo) e tangentes a M ao longo de c_1 (respec. c_2), mas em $c(0)$ o tangente à superfície é tipo luz. O vetor normal $N(c(t))$ de α se aproxima de um vetor luz quando t se aproxima de zero. Como em uma “esfera” $S_m^2(r)$ o vetor normal é sempre espaço ou tempo e se aproxima de um vetor luz somente na parte não limitada de $S_m^2(r)$, então a curva c se aproxima de infinito quando t se aproxima de 0, mas isto é uma contradição, porque c é uma curva suave contida em uma superfície compacta. A parte b) segue de a).

□

Lema 3.11. *Considere $\alpha \in \mathcal{I}^r$ e seja c uma linha principal da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ com $k_1|_c \equiv k$, k constante, contida na parte Riemanniana ou Lorentziana de $\alpha(M)$. Dada uma carta principal $(u, v) : (U, D) \rightarrow (V, \mathbf{I} \times \mathbf{I})$ de $\alpha(M)$ tal que U não intersecta o trópico, está fora das auto-interseções de $\alpha(M)$ e $\{v = 0\} \subset c$ com $k_{1v}(u, 0) \neq 0$ para todo $u \in \mathbf{I}$ ou $k_{1v}(u, 0) = 0$ para todo $u \in \mathbf{I}$.*

Então existe $\epsilon > 0$ e uma função suave φ com suporte em D tal que para todo $r \in (-\epsilon, \epsilon) - \{0\}$, $U_r = (I + r\varphi N)(U)$ é uma superfície e a curvatura principal $k_1(u, 0; r)$ é não constante.

Demonstração. Seja $\psi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ uma função suave com suporte em \mathbf{I} , a qual é igual a 1 em $(\frac{1}{2})\mathbf{I}$, para $u \leq 0$, $\psi'(u) \geq 0$. Fazemos $\varphi(u, v) = -\psi(u)\psi(v)$. Seja $\epsilon > 0$ pequeno tal que para todo $r \in (-\epsilon, \epsilon)$, $U_r = (I + r\varphi N)(U)$ seja uma superfície e N o vetor normal de U com $\langle N, N \rangle = \bar{\eta}$ sendo -1 (respec. 1) se U está na parte Riemanniana (respec. na parte Lorentziana) de $\alpha(M)$.

- a) Provemos que sobre $D' = \{(u, v) : (u, v) \in (\frac{1}{2})\mathbf{I} \times (\frac{1}{2})\mathbf{I}\} \subset D$ (φ é identicamente 1 em D')

$$k_1(\cdot; r) = \frac{k_1}{1 - rk_1},$$

onde $k_1(\cdot; r)$ é a curvatura da folheação \mathcal{F}_{1,α_r} sobre U_r , $k_1(\cdot) = k_1(\cdot; 0)$, e assim $k_{1r}(u, 0; 0) = k^2$.

Considere a parametrização de $X(\cdot; r) = X(\cdot; 0) + r\varphi N(\cdot; 0)$ da carta (u, v)

sobre U_r . Segue da equação (3.4) que sobre D'

$$\begin{aligned} X_u(\cdot; r) &= (1 - rk_1)X_u(\cdot; 0), \\ X_v(\cdot; r) &= (1 - rk_2)X_v(\cdot; 0), \\ E(\cdot; r) &= (1 - rk_1)^2 E(\cdot; 0), \\ F(\cdot; r) &= 0, \\ G(\cdot; r) &= (1 - rk_2)^2 G(\cdot; 0), \end{aligned}$$

isto implica que $N(\cdot; r) = N(\cdot; 0)$. Assim, $e(\cdot; r) = (1 - rk_1)e(\cdot; 0)$. Usando a última linha da equação (3.4) temos que $f(\cdot; r) = 0$. Então (u, v) é uma carta principal sobre D' para U_r . Portanto,

$$k_1(\cdot; r) = \frac{e(\cdot; r)}{E(\cdot; r)} = \frac{(1 - rk_1)e(\cdot; 0)}{(1 - rk_1)^2 E(\cdot; 0)} = \frac{(1 - rk_1)k_1 E(\cdot; 0)}{(1 - rk_1)^2 E(\cdot; 0)} = \frac{k_1}{1 - rk_1}.$$

b) Considere o caso em que $k_{1v}(u, 0) \neq 0$ para todo $u \in \mathbf{I}$. Provemos que

$$\frac{d}{dr}(k_1(0, v(0, r); r))|_{r=0} > 0,$$

onde $v = v(u, r)$ é a v -coordenada do ponto $p(u, r)$ pertencente à linha principal de U_r através de p intersectando a curva com abscissa $\{u\}$. Como $\varphi_v(u, 0) = 0$ e $\varphi_{uv}(u, 0) \geq 0$ para todo $u \in \mathbf{I}$, segue da equação (3.8) ao longo de $\{v = 0\}$,

$$v_{ur}(u) = \frac{\bar{\eta}\varphi_u k_{1v}}{(k_2 - k_1)^2 G}(u, 0; 0). \quad (3.19)$$

Como para todo $u \in [-1, 0]$, $k_{1v}(u, 0; 0) \neq 0$ e $\varphi_u(u, 0) \leq 0$ não identicamente zero, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(k_1(0, v(0, r); r))|_{r=0} &= k_{1v}(0, 0; 0)v_r(0) + k_{1r}(0, 0; 0) \\ &= k_{1v}(0, 0; 0) \int_{-1}^0 \left(\frac{\bar{\eta}\varphi_u k_{1v}}{(k_2 - k_1)^2 G} \right) (u, 0; 0) du + k^2, \end{aligned}$$

onde $v_r(0)$ é calculado da equação (3.19). Em U sempre podemos escolher uma carta tal que $X_v(u, v; 0)$ seja tipo tempo na parte Lorentziana. Assim, $G(u, v; 0) = -\bar{\eta}|G(u, v; 0)|$. Segue então que o integrando

$$\frac{\bar{\eta}\varphi_u k_{1v}}{(k_2 - k_1)^2 G} = \text{sinal}(k_{1v}) \frac{-\varphi_u |k_{1v}|}{(k_2 - k_1)^2 |G|}$$

e portanto $\frac{d}{dr}(k_1(0, v(0, r); r))|_{r=0}$, é positivo. O lema segue imediatamente

neste caso.

- c) Considere o caso em que $k_{1v}(u, 0) = 0$ para todo $u \in \mathbf{I}$. Das equações (3.4) e (3.7) temos que ao longo de $\{v = 0\}$, $F(u, 0, r) \equiv 0$ e $f(u, 0; r) \equiv 0$. Assim, $\{v = 0\}$ é linha principal de U_r . Do Lema 3.9 item b) segue que para r pequeno, existe um plano P ortogonal a U contendo um arco principal de U_r :

$$\hat{c} : u \longrightarrow X(u, 0; r) = X(u, 0; 0) + r\psi(u)N(u, 0; 0),$$

com $u \in \mathbf{I}$. Da equação (3.4) temos que:

$$X_v(u, 0; r) = (1 - rk_2\psi(u))X_v(u, 0; 0).$$

Como para todo $u \in \mathbf{I}$, P contém $N(u, 0; 0)$ e $X_v(u, 0; 0)$, então para todo r pequeno P contém $X_v(u, 0; r)$. Disto, temos que P contém $N(u, 0; r)$. Assim, para r pequeno, P é ortogonal a U_r ao longo de \hat{c} . Portanto, para $r \neq 0$ segue da parametrização, que $\hat{c}(u)$ não é parte de uma linha reta ou uma circunferência. Assim, pelo Lema 3.9 item b), temos que a curvatura principal de U_r ao longo de \hat{c} é não constante.

□

Proposição 3.12. *O conjunto das imersões em \mathcal{I}_c^r tais que as curvaturas principais não são constantes ao longo de qualquer arco contido na parte Riemanniana ou Lorentziana de α é denso em $\mathcal{I}_c^{r,s}$.*

Demonstração. Uma linha principal c da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ tem curvatura principal constante se $k_1|_c = k$, k constante. Uma imersão $\alpha \in \mathcal{I}_c^r$ pode ser aproximada por uma imersão $\alpha_1 \in \mathcal{I}_c^r$ tal que:

- a) todos seus pontos umbílicos são hiperbólicos (Proposição 3.8),
- b) o conjunto de linhas principais com curvatura principal não constante é não vazio e contém as separatrizes (Lema 3.11), e
- c) é analítica (veja [33], Teorema 5.1).

A imersão α_1 tem somente uma quantidade finita de ciclos principais com curvatura principal constante. Caso contrario, elas poderiam acumular em separatrizes as quais, por b), tem curvatura principal não constante, pela analiticidade de α_1 isto não é possível.

Provemos que α_1 tem uma quantidade finita de linhas principais com curvatura principal constante. De fato, seja c uma linha principal da folheação \mathcal{F}_{1,α_1} com curvatura constante a qual não é um ciclo, por b), c não é uma separatriz então segue do Lema 3.9 item d) que seu conjunto limite é um ponto umbílico q tipo E_2 . Se c é acumulada por linhas principais com curvatura constante, então a curvatura principal constante sobre todas elas é $k_1(q)$. Pela analiticidade de α_1 , k_1 é constante sobre todas as linhas principais acumulando em q , em particular, ao longo das separatrizes. Isto não é permitido por b). Então c é uma curva isolada de outras curvas que tenham curvatura principal constante, e portanto temos somente uma quantidade finita delas.

Chamemos c_1, c_2, \dots, c_n às linhas principais com curvatura principal constante. Seja $p_i \in c_i$, usando o Lema 3.11, α_1 pode ser aproximado por $\alpha_2 \in \mathcal{I}_c^r$ tal que $V = \alpha_1(M) \setminus \alpha_2(M)$ é uma pequena vizinhança de $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, cada $c_i \setminus V$ não é vazio e as linhas principais de α_2 contendo $c_i \setminus V$ têm curvatura principal não constante. Note que como α_1 é analítica, se $c \notin \{c_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ e é uma linha principal de α_1 , então c não tem nenhum sub-arco com curvatura principal constante. Sendo que V é uma vizinhança suficientemente pequena, α_2 tem as linhas principais com curvatura principal não constante em nenhum sub-arco em V (pelo Lema 3.11) e fora de V (por ser igual a α_1). Portanto, α_2 satisfaz a conclusão da proposição. \square

Uma imersão $\alpha \in \mathcal{I}_c^r$ tem a *propriedade da curvatura variável* se para qualquer linha principal a correspondente curvatura principal, em seu domínio, é não constante.

Proposição 3.13. *Considere a imersão $\alpha \in \mathcal{I}_c^r$ e \mathcal{U} qualquer vizinhança de α em $\mathcal{I}_c^{r,s}$, então existe $\tilde{\alpha} \in \mathcal{U}$ tal que $\tilde{\alpha}$ tem a propriedade da curvatura variável.*

Demonstração. Segue da Proposição 3.12. \square

3.6 Eliminação de Recorrências Não Triviais

Lema 3.14. *Seja $\alpha \in \mathcal{I}_c^r$ com pontos umbílicos tipo espaço Darbouxianos. Suponha que temos uma recorrência não trivial γ da $\mathcal{F}_{1,\alpha}$. Então há uma separatriz da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ a qual contém γ em seu conjunto limite.*

Demonstração. Como fizemos na Seção 2.4, podemos definir no espaço projetivo tangente $PM = \{TM \setminus 0\} / \{v = rw, r \neq 0\}$ a subvariedade \mathbb{M}_α composta por todas

as direções principais (os zeros da equação de linhas principais) de α . Na carta local (u, v) a subvariedade é

$$\mathbb{M}_\alpha = \{(u, v, [p : q]) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) : L_1 p^2 + M_1 p q + N_1 q^2 = 0\},$$

e a projeção $\pi : \mathbb{M}_\alpha \rightarrow M$ tal que $\pi(u, v, [p : q]) = (u, v)$ é um recobrimento duplo de M .

O campo de Lie-Cartan, o qual na carta local é $(\bar{F}_p, p\bar{F}_p, -(\bar{F}_u + p\bar{F}_v))$, onde $\bar{F} = L_1 p^2 + M_1 p + N_1$ e $p = \frac{dv}{du}$, define globalmente em \mathbb{M}_α o campo de linhas $\mathcal{L}_{I,\alpha}$ que localmente é um campo vetorial e este é o levantamento dos campos $\mathcal{L}_{1,\alpha}$ e $\mathcal{L}_{2,\alpha}$. A folheação deste campo de linhas, denotada por $\mathcal{F}_{I,\alpha}$, é o levantamento das folheações $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ e $\mathcal{F}_{2,\alpha}$ das linhas principais de α .

Se as singularidades da imersão α são pontos umbílicos tipo espaço Darbouxianos, o campo de linhas $\mathcal{L}_{I,\alpha}$ na subvariedade \mathbb{M}_α tem somente singularidades selas e nós (veja Seção 2.1). A recorrência γ vai ser levantada em uma recorrência não trivial $\bar{\gamma}$ do campo de linhas $\mathcal{L}_{I,\alpha}$. Aplicando o procedimento dos campos vetoriais (veja [44], Demonstração do Lema 2.5), podemos concluir que $\mathcal{L}_{I,\alpha}$ tem uma separatriz de sela $\bar{\sigma}_1$ a qual contém $\bar{\gamma}$ em seu conjunto limite. A projeção por π de $\bar{\sigma}_1$ é uma separatriz σ_1 de pontos umbílicos em M que contém γ em seu conjunto limite. \square

Proposição 3.15. *Considere a imersão $\alpha \in \mathcal{I}_c^r$ com a propriedade da curvatura variável e com seus pontos umbílicos hiperbólicos, e γ uma recorrência não trivial. Seja A o subconjunto de $\alpha(M)$ composto pelas conexões de pontos umbílicos e pelos ciclos principais. Então, existe um ponto $p \in \gamma \setminus A$ tal que dado ϵ e uma vizinhança W de p suficientemente pequena e disjunta de A e do trópico, há uma imersão $\alpha_\mu \in \mathcal{I}_c^r$ $\epsilon - C^2$ -próxima de α , $\alpha_\mu - \alpha$ com suporte em W , tendo a propriedade da curvatura variável e satisfazendo uma das seguintes condições:*

- a) α_μ tem um ciclo γ_μ não completamente contido em $\alpha(M) \setminus W$. Além disso, se há um ciclo principal $\hat{\gamma}$ da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ disjunta de W o qual forma junto com γ_μ o bordo de um cilindro em $\alpha_\mu(M)$, então o cilindro contém um ponto umbílico de α_μ .
- b) $\alpha_\mu(M)$ tem pelo menos uma conexão de separatrizes de pontos umbílicos a mais que $\alpha(M)$.

Demonstração. Suponha que γ é linha principal da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$. Como $\alpha(M)$ tem a propriedade da curvatura variável, existe $p \in \gamma \setminus A$ tal que $dk_1(p) \neq 0$. Pelo

Lema 3.14, seja $\bar{\gamma}$ uma separatriz orientada de um ponto umbílico q a qual contém γ no w -limite. Seja $\epsilon > 0$, considere a carta principal $(s, t) : D' \subset W \rightarrow \mathbf{I} \times \mathbf{I}$ com $\{v = 0\} \subset \bar{\gamma}$, a família de imersões $\alpha_\mu(M)$, o arco $[q, a]$ e todas as conclusões do Lema 3.3, com W uma vizinhança de p disjunta de A e do trópico. Os pontos a, a', b, b' aparecem ordenados no arco $[a, q]$ de $\bar{\gamma}$, das seguintes quatro maneiras:

Caso 1: b, b' e a (veja Figura 3.4).

Caso 2: b, b', a' e a (veja Figura 3.5).

Caso 3: b', b, a' e a (similar ao caso 1).

Caso 4: b', b e a (similar ao caso 2).

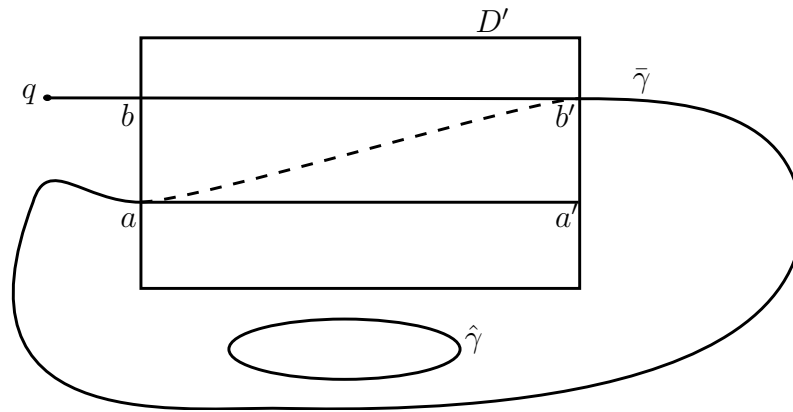


Figura 3.4: Gera uma superfície com um ciclo principal para quebrar a recorrência não trivial.

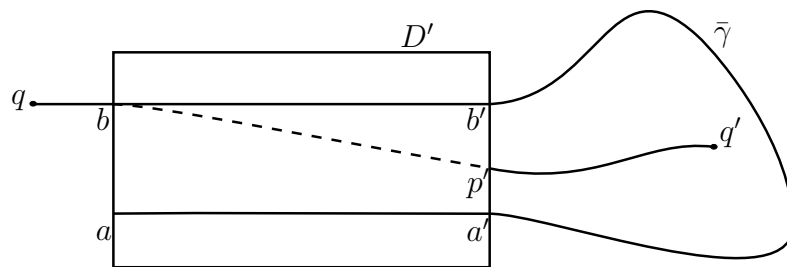


Figura 3.5: Gera uma superfície com uma conexão de pontos umbílicos a mais.

Caso 1: Mostremos que se cumpre as conclusões do item a) da proposição. O sub-arco $[b', a]$ de $[q, a]$ intersecta D' exatamente em $\{b', a\}$. Considere a família de superfícies α_μ , com $\mu \in [0, 1]$. Pelo Lema 3.3, α_μ tem um arco principal contido em D'_μ conectando a e b' para algum μ . Se $[b', a]$ é também um arco principal para α_μ , então α_μ tem um ciclo principal γ_μ através de b' . Agora, suponha que α_μ tem um ciclo principal $\hat{\gamma}$ disjunta de W_μ , o qual junto com γ_μ formam o bordo de um cilindro K em $\alpha_\mu(M)$ sem pontos umbílicos. Segue que a folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ restrita a

K é orientável e sem pontos umbílicos. Como a folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ é transversal a $[a, b]$ e o ponto umbílico $q = \alpha - \limite(\bar{\gamma}) \notin K$, segue que o $w - \limite(\gamma)$ tem que estar em K , mas isto é uma contradição pelo Teorema de Poincaré-Bendixson.

Caso 2: $[q, a] \cap D' = [b, a] \cap D' = [b, b'] \cup [a, a']$ e o sub-arco $[b', a']$ intersecta D' exatamente em $\{b', a'\}$ (veja Figura 3.5). Suponha que $a < b$ e $a' < b'$. Provemos que:

(*) A imersão α tem um ponto umbílico q' e um arco $[q', p']$ separatriz de q' que intersecta $D' \setminus \{t = \pm 1\}$ exatamente no ponto $p' \in (a'; b')$ (veja Figura 3.5).

O segmento $(a'; b')$ unido com o arco $[b', a']$ delimitam uma região \bar{U} homeomorfa ao disco, já que M é de gênero zero. Assim, \bar{U} contém pelo menos um ponto umbílico ou a folheação tem uma tangência com o segmento $(a'; b')$, mas o último não é possível porque (s, t) é carta principal e portanto o segmento $(a'; b')$ é um arco da folheação $\mathcal{F}_{2,\alpha}$. Temos então um ponto umbílico $q' \in \bar{U}$ tal que pelo menos uma de suas separatrizes corta o segmento $(a'; b')$ em um ponto p' (A demonstração de (*) quando a superfície não é necessariamente de gênero zero é mais complicada, veja [28]).

Sendo que há um μ' tal que a imersão $\alpha'_{\mu'}$ tem um arco da folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha'_{\mu'}}$ conectando b e p' e $\alpha = \alpha'_{\mu'}$ fora de D' , segue que $[q, b] \cup [b, p'] \cup [p', q']$ é uma conexão de separatrizes de pontos umbílicos de $\alpha'_{\mu'}$. Portanto, $\alpha'_{\mu'}$ tem uma conexão de pontos umbílicos a mais que α .

□

Proposição 3.16. *Considere $\alpha \in \mathcal{I}_c^r$ uma imersão com a propriedade da curvatura variável e com seus pontos umbílicos hiperbólicos. Seja A como na Proposição 3.15. Então, para $\epsilon > 0$ há uma imersão $\alpha_{\mu} \in \mathcal{I}_c^r$ $\epsilon - C^2$ -próxima de α tal que o suporte de $\alpha_{\mu} - \alpha$ é disjunto de $A \cup \mathcal{U}_{\epsilon}$ (\mathcal{U}_{ϵ} é o conjunto de pontos umbílicos de α), α_{μ} satisfaz a propriedade da curvatura variável e não tem recorrências não triviais.*

Demonstração. Aplicamos a Proposição 3.15 para (α, A) , obtemos uma imersão α_{μ_1} com a propriedade da curvatura variável e γ_{μ_1} sendo um ciclo principal ou uma conexão de pontos umbílicos. Definimos $A_{\mu_1} = A \cup \gamma_{\mu_1}$. Se α_{μ_1} tem uma recorrência não trivial, aplicamos o mesmo procedimento para $(\alpha_{\mu_1}, A_{\mu_1})$ e obtemos $(\alpha_{\mu_2}, A_{\mu_2})$. Assim, temos uma sequência $(\alpha_{\mu_n}, A_{\mu_n})$ a qual deve ser finita porque em cada passo o número de pontos umbílicos disponíveis diminui ou o número de ciclos principais é crescente. De fato, pela Proposição 3.15, qualquer cilindro com bordo formado por dois ciclos principais de $A_{\mu_n} \setminus A$ deve ter pontos umbílicos. Disto se tem que

aplicando um número finito de vezes a Proposição 3.15, temos a imersão α_μ com a propriedade da curvatura variável e sem recorrências não triviais. \square

3.7 Estabilização de Separatrizes

Definição 3.17. *Seja $\alpha \in \mathcal{I}_c^r$ uma imersão com todos seus pontos umbílicos tipo espaço hiperbólicos. Dizemos que uma separatriz σ de um ponto umbílico q está estabilizada se:*

- i. não é uma conexão de separatrizes de pontos umbílicos,*
- ii. o conjunto limite é um ponto umbílico (tipo E_2) ou um ciclo principal,*
- iii. as propriedades i. e ii. são persistentes por pequenas perturbações de ordem C^3 de α .*

Antes de enunciar o lema seguinte, vamos definir um gráfico para nossa configuração com uma pequena variação em relação a campos vetoriais. Numa linha principal orientada podemos falar do conjunto ω – limite e α – limite.

Definição 3.18. *Um gráfico para a folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ (ou $\mathcal{F}_{2,\alpha}$) de uma imersão $\alpha \in \mathcal{I}_c^r$ é um conjunto fechado e conexo de M formado por separatrizes orientadas $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n+1}$ e pontos umbílicos p_1, p_2, \dots, p_{n+1} tais que:*

- a. $p_i = \alpha$ – limite(σ_i) e ω – limite(σ_j) = α – limite(σ_{j+1}) = p_{j+1} .*
- b. $n + 1$ é o menor dos índices para o qual se cumpre que $p_1 = p_{n+1}$, $\sigma_1 = \sigma_{n+1}$ e α – limite(σ_1) = α – limite(σ_{n+1}) (veja Figura 3.6).*

Note que as separatrizes σ_k , $1 < k < n + 1$, não são necessariamente diferentes. Neste caso vamos permitir orientar em dois sentidos uma mesma separatriz, isto é, se $\sigma_i = \sigma_j$, $1 < i < j < n + 1$, teremos a ω – limite(σ_j) = α – limite(σ_i) = p_i (veja Figura 3.6(b)).

Lema 3.19. *Seja $\alpha \in \mathcal{I}_c^{r,2}$ sem recorrências não triviais e com seus pontos umbílicos hiperbólicos. Então, o conjunto ω – limite de qualquer linha principal orientada é um ponto umbílico, um ciclo principal ou um gráfico o qual consiste de pontos umbílicos e conexões de separatrizes de pontos umbílicos.*

Demonstração. Seja γ uma linha principal orientada de $\mathcal{F}_{1,\alpha}$. Suponha que o ω – limite(γ) = $\hat{\gamma}$ não é um ciclo principal ou um ponto umbílico. Note que γ não pode conter um ciclo principal nem um ponto umbílico E_2 sem conter suas separatrizes, já que nesses casos $\hat{\gamma}$ se reduz somente ao ciclo principal ou ao ponto E_2 , respectivamente. Assim, $\hat{\gamma}$ deve conter pontos umbílicos e separatrizes. Consideremos dois casos:

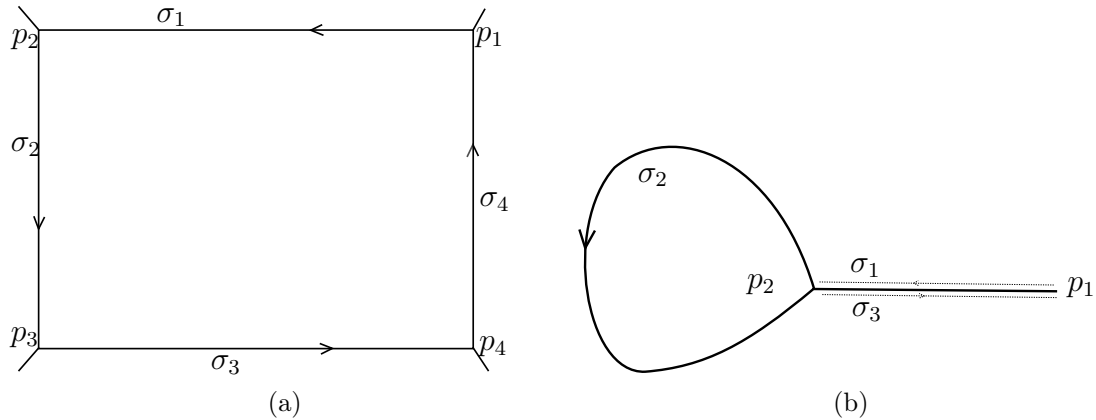


Figura 3.6: Exemplos de gráficos. Na Figura (b) a separatriz $\sigma_1 = \sigma_3$ com orientações diferentes.

- i. Cada uma das separatrizes (orientadas) contidas em $\hat{\gamma}$ tem como ω -limite um único ponto umbílico. Seja $p_1, \sigma_1 \in \hat{\gamma}$ um ponto umbílico e uma separatriz orientada tal que α -limite(σ_1) = p_1 . Seja $p_2 = \omega$ -limite(σ_1) e σ_2 uma separatriz instável de p_2 contida em $\hat{\gamma}$. Continuando com este processo, como temos uma quantidade finita de separatrizes, teremos uma sequência finita $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n+1} = \sigma_1$ contidas em $\hat{\gamma}$ tal que $p_{j+1} = \omega$ -limite(σ_j) = α -limite(σ_{j+1}) e α -limite(σ_1) = α -limite(σ_{n+1}) = p_1 . Portanto $\hat{\gamma}$ é um gráfico.
- ii. Existe uma separatriz $\bar{\sigma}_1 \subset \hat{\gamma}$ cujo conjunto ω -limite não é simplesmente um ponto umbílico. O ω -limite($\bar{\sigma}_1$) $\subset \hat{\gamma}$ e sendo que não temos recorrências não triviais $\bar{\sigma}_1 \not\subset \omega$ -limite($\bar{\sigma}_1$). Suponha que ω -limite($\bar{\sigma}_1$) contém somente separatrizes com um único ponto umbílico com ω -limite então, pelo item ii., ω -limite($\bar{\sigma}_1$) é um gráfico. Este gráfico é $\hat{\gamma}$, mas $\bar{\sigma}_1 \subset \hat{\gamma}$ e portanto temos uma contradição. Então deve existir $\bar{\sigma}_2 \subset \omega$ -limite($\bar{\sigma}_1$) cujo ω -limite não é um único ponto umbílico e ω -limite($\bar{\sigma}_2$) $\subset \omega$ -limite($\bar{\sigma}_1$) $\subset \hat{\gamma}$. Continuando com este argumento e sendo que temos uma quantidade finita de separatrizes, vamos encontrar uma separatriz $\bar{\sigma} \subset \hat{\gamma}$ tal que $\bar{\sigma} \subset \omega$ -limite($\bar{\sigma}$), o qual é uma contradição porque não temos recorrências não triviais.

□

Proposição 3.20. Considere a imersão $\alpha \in \mathcal{I}_c^{r,2}$ e \mathcal{U} qualquer vizinhança de α , então existe $\tilde{\alpha} \in \mathcal{U}$ tal que $\tilde{\alpha}$ tem a propriedade da curvatura variável e seus pontos umbílicos tipo espaço são hiperbólicos. Além disso:

- a) suas separatrizes são estabilizadas,

b) o ω -limite de qualquer linha principal orientada de $\tilde{\alpha}$ é um ponto umbílico ou um ciclo principal,

c) qualquer $\bar{\alpha}$ na vizinhança de α em $\mathcal{I}_c^{r,s}$, $s \geq 3$, satisfaz as propriedades a) e b).

Demonstração. Vamos mostrar que α pode ser C^2 -aproximada por uma imersão com a propriedade da curvatura variável, sem recorrências não triviais e com uma separatriz estabilizada a mais. Como α tem uma quantidade finita de separatrizes então isto gera a imersão que satisfaz as conclusões da proposição.

Pelas Proposições 3.13, 3.8 e 3.16, α pode ser aproximada por α_1 com a propriedade da curvatura variável, com seus pontos umbílicos hiperbólicos e sem recorrências não triviais. Suponha que σ é uma separatriz não estabilizada da folheação \mathcal{F}_{1,α_1} . Do Lema 3.19, temos três opções:

- i. o conjunto limite de σ contém um ciclo principal γ . Se o ciclo principal é hiperbólico σ já está estabilizada. Em outro caso, note que se p é um ponto em γ e Σ uma seção transversal, σ intersecta Σ em uma sequência $a_n \rightarrow p$. Para n suficientemente grande, o arco de trajetória entre a_n e a_{n+1} , o segmento (a_{n+1}, a_n) e γ formam um cilindro A . Fazendo a perturbação do Lema 3.5 para $\mu > 0$ (ou $\mu < 0$ de acordo com o caso) no retângulo $R \subset A$ (veja Figura 3.7), o conjunto limite de σ é um ciclo principal contido em A , (veja [44], demonstração do Teorema 2.6). Obtemos assim, uma imersão $\alpha_2 \in \mathcal{I}_c^r$ na vizinhança de α_1 , com uma separatriz estabilizada a mais.
- ii. α_1 contém um cilindro C , sem pontos umbílicos, com um dos bordos sendo um gráfico Γ que contém σ , tal que: Γ é acumulado por ciclos principais em C ou a folheação $\mathcal{F}_{1,\alpha_1}|_C$ pode ser orientada de tal maneira que o ω -limite de toda linha principal em C seja Γ , veja Figura 3.8.

Fazendo a perturbação do Lema 3.5 localizada em um ponto $p \in R \cap \sigma$ da mesma maneira que em i., a conexão σ pode ser quebrada tal que uma das separatrizes tenha um ciclo principal $\gamma \subset C$ no seu ω -limite. Utilizando o procedimento de i., sobre γ se for necessário, temos uma separatriz estabilizada a mais.

- iii. σ é uma conexão de pontos umbílicos a qual não é acumulada por ciclos principais e não é conjunto limite de nenhuma linha principal. Seja $p \in \sigma$, podemos encontrar uma carta principal (u, v) com domínio D pequeno ($p \in D$) tal que $\{v = 0\} = D \cap \sigma$ e o conjunto Q das linhas principais da folheação

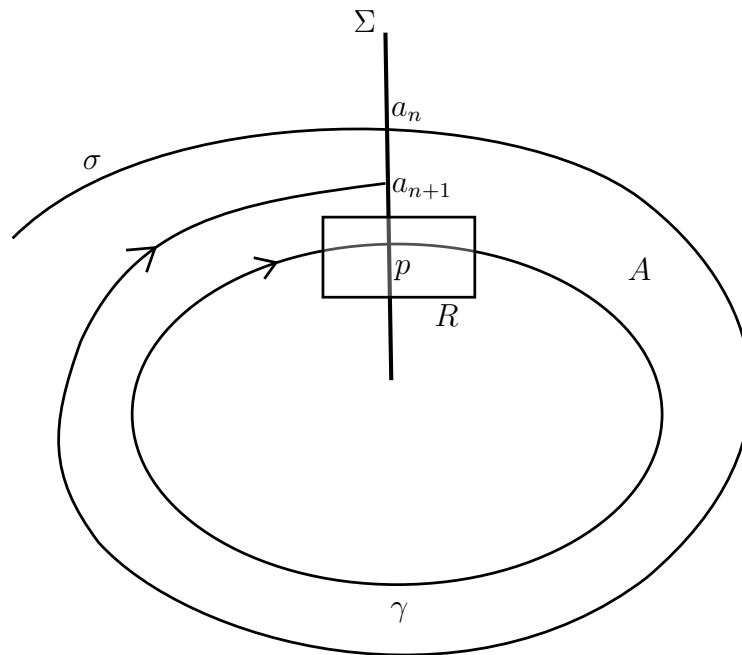


Figura 3.7: Estabilização de uma separatriz σ que contém um ciclo principal em seu conjunto limite.

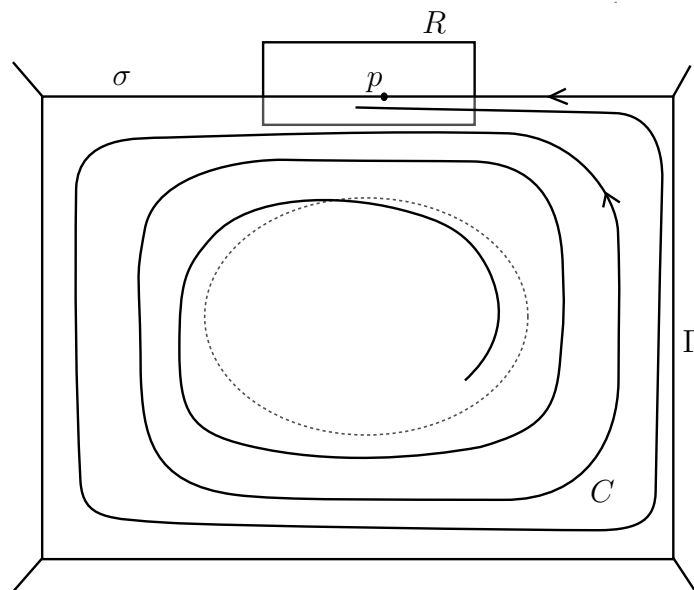


Figura 3.8: Cilindro C com um gráfico Γ em uma das fronteiras.

$\mathcal{F}_{1,\alpha}$ que intersectam D satisfaça que: não temos nenhuma separatriz de pontos umbílicos diferente de σ em Q e para toda linha principal $\gamma \neq \sigma$ orientada e contida em uma das partes conexas de $Q \setminus \sigma$ temos que $\omega - \limite(\gamma) = \hat{\gamma}$ é um ponto umbílico ou um ciclo principal. Utilizando a perturbação do Lema 3.5 no ponto p podemos quebrar a conexão σ de tal maneira que uma das

separatrizes tenha $\hat{\gamma}$ como conjunto limite. Fazendo o procedimento i. se for necessário, temos uma separatriz estabilizada a mais.

Como α tem somente uma quantidade finita de separatrizes de pontos umbílicos, podemos aproximar α por uma superfície com as propriedades requeridas. \square

3.8 Demonstração do Teorema de Genericidade

Demonstração. Teorema B. Das Proposições 3.13 e 3.8, suponha que $\alpha \in \mathcal{I}_c^r$ satisfaz a propriedade da curvatura variável e que todos seus pontos umbílicos são hiperbólicos. A imersão α pode ser aproximada por uma imersão analítica α_1 . Como podemos tomar α_1 satisfazendo a Proposição 3.20, deve ter uma quantidade finita de ciclos principais, todos com multiplicidade finita. De fato, a presença de infinitos ciclos principais em uma superfície analítica é inconsistente com o fato de não haver conexão de pontos umbílicos. Assim, utilizando o Lema 2.16, o Corolário 2.18 e a Proposição 2.21, podemos aproximar α_1 por uma imersão α_2 com todos seus ciclos principais hiperbólicos. A Proposição 3.20 garante que α_2 satisfaz às outras condições para pertencer ao conjunto S_c^r . Portanto, o conjunto S_c^r é denso em $\mathcal{I}_c^{r,2}$. \square

Com a técnica de demonstração usada, o Teorema B é limitado à C^2 -topologia sendo que a deformação local do Lema do Levantamento para eliminar recorrências não triviais é válido apenas para a C^2 -topologia.

GEODÉSICAS NULAS

Temos como objetivo descrever o comportamento global das geodésicas nulas (curvas nulas) na parte Lorentziana de uma superfície imersa no espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$ quando o trópico for um conjunto regular com apenas pontos luz isolados. Apresentamos condições necessárias para que uma imersão seja estruturalmente estável na configuração das geodésicas nulas. Propriedades globais de geodésicas nulas no toro foram consideradas em [6].

4.1 Introdução

Considere $\alpha \in \mathcal{T}^r$ e uma carta local (u, v) com parametrização X . A primeira forma fundamental

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (4.1)$$

é positivamente definida na parte Riemanniana, mas na parte Lorentziana $I = 0$ define em cada ponto p duas direções $\{e_1(p), e_2(p)\}$ chamadas de direções luz. A ordem das direções vai ser escolhida tal que $d\alpha(p)(e_1(p)) \wedge d\alpha(p)(e_2(p)) = N_\alpha(p)$ e $I_p(v) = \langle v, v \rangle > 0$ onde $v = e_1(p) + e_2(p)$.

Observe-se que o trópico de α são os pontos onde $\det(I) = EG - F^2 = 0$. Assim, no trópico temos uma única direção luz e constitui o conjunto de singularidades das direções luz denotado por $\tilde{\mathcal{S}}_\alpha = \{p \in M : \Delta(p) = 0\}$ com $\Delta = EG - F^2$.

Na parte Lorentziana, isto é, onde $\Delta < 0$, as direções luz definem dois *campos de linhas*, chamados de *campos de linhas nulas* e denotados por $\tilde{\mathcal{L}}_{1,\alpha}$ e $\tilde{\mathcal{L}}_{2,\alpha}$ com a ordem definida pela base $\{e_1(p), e_2(p)\}$.

As curvas integrais dos campos de linhas nulas são chamadas de *linhas nulas ou geodésicas nulas*, sendo que são curvas luz, e portanto, seu comprimento é zero. Assim, uma curva c é uma geodésica nula se satisfaz a equação $I = 0$ e não

contém singularidades.

Chamaremos de folhação $\tilde{\mathcal{F}}_{1,\alpha}$ (respec. $\tilde{\mathcal{F}}_{2,\alpha}$) ao conjunto de curvas integrais do campo de linhas $\tilde{\mathcal{L}}_{1,\alpha}$ (respec. $\tilde{\mathcal{L}}_{2,\alpha}$). A tripla $\tilde{\mathbb{P}}_\alpha = \{\tilde{\mathcal{F}}_{1,\alpha}, \tilde{\mathcal{F}}_{2,\alpha}, \tilde{\mathcal{S}}_\alpha\}$ é chamada de *configuração das geodésicas nulas* da imersão α .

4.2 Singularidades

Seja $p \in M$ um ponto regular do trópico de $\alpha \in \mathcal{I}^r$. Consideremos a carta local $(u, v) : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ e uma translação $\Gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\Gamma(\alpha(p)) = 0$ e

$$\Gamma(\alpha(u, v)) = (u, v, h(u, v))$$

onde, $h(u, v) = u + \frac{1}{2}(a_{20}u^2 + 2a_{11}uv + a_{02}v^2) + \frac{1}{3!}(a_{30}u^3 + 3a_{21}u^2v + 3a_{12}uv^2 + a_{03}v^3) + O((u^2 + v^2)^2)$ com $a_{ij} \in \mathbb{R}$. A carta é tomada tal que $\alpha_u(p)$ seja tipo luz.

Proposição 4.1. *Seja $p \in M$ um ponto regular do trópico de $\alpha \in \mathcal{I}^r$. Na carta local (u, v) e*

$$\alpha(u, v) = (u, v, h(u, v)),$$

suponha que $a_{11} \neq 0$.

i. se $a_{20} \neq 0$, então o trópico é tipo espaço e a configuração principal na vizinhança de p é como a Figura 4.1. As geodésicas nulas se convertem em uma única direção luz transversal ao trópico.

ii. se $a_{20} = 0$ então o trópico é tipo luz em p . Se para $\lambda_{1,2} = a_{11} \pm \sqrt{9a_{11}^2 + 4a_{30}}$ uma das opções

- λ_1 e λ_2 são reais e $\lambda_1\lambda_2 < 0$ (tipo sela),
- λ_1 e λ_2 são reais, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $\lambda_1\lambda_2 > 0$ (tipo nó) ou
- λ_1 e λ_2 são complexos conjugados com parte real e imaginária não nula (tipo foco)

é satisfeita. A configuração das geodésicas nulas na vizinhança de p é como a Figura 4.2.

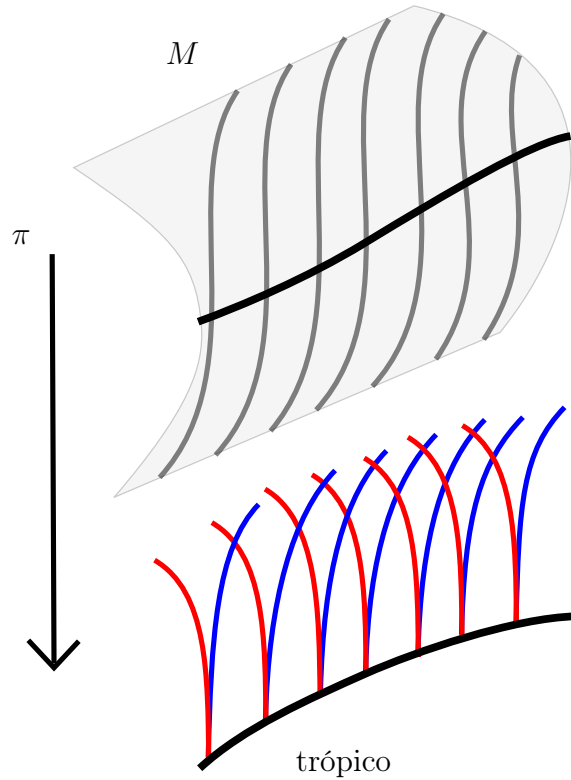


Figura 4.1: Singularidades tipo cúspides onde o trópico é uma curva regular tipo espaço.

Demonstração. Nesta carta temos que

$$\begin{aligned}
 E &= -2a_{20}u - 2a_{11}v + (-a_{20}^2 - a_{30})u^2 + (-2a_{11}a_{20} - 2a_{21})uv + (-a_{11}^2 - a_{12})v^2 \\
 &\quad + O((u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}), \\
 F &= -a_{11}u - a_{02}v - (a_{11}a_{20} + \frac{1}{2}a_{21})u^2 - (a_{02}a_{20} + a_{11}^2 + a_{12})uv - (a_{11}a_{02} + \frac{1}{2}a_{03})v^2 \\
 &\quad + O((u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}), \\
 G &= 1 - a_{11}^2u^2 - 2a_{02}a_{11}uv - a_{02}^2v^2 + O((u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}).
 \end{aligned}$$

Pelo exposto na Seção 1.5, a configuração local da equação $I = 0$ depende do termo independente de G , da parte linear de F e a parte quadrática de E . Assim, a parte de interesse da equação das geodésicas nulas tem a forma

$$\begin{aligned}
 dv^2 + (-a_{11}u - a_{02}v)dvdu + [-2a_{20}u - 2a_{11}v + (-a_{20}^2 - a_{30})u^2 \\
 + (-2a_{11}a_{20} - 2a_{21})uv + (-a_{11}^2 - a_{12})v^2]du^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Temos que $\Delta(u, v) = -2a_{20}u - 2a_{11}v + (-a_{11}^2 - a_{20}^2 - a_{30})u^2 + (-2a_{02}a_{11} - 2a_{11}a_{20} - 2a_{21})uv + (-a_{02}^2 - a_{11}^2 - a_{12})v^2 + O((u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}})$, assim o trópico é localmente

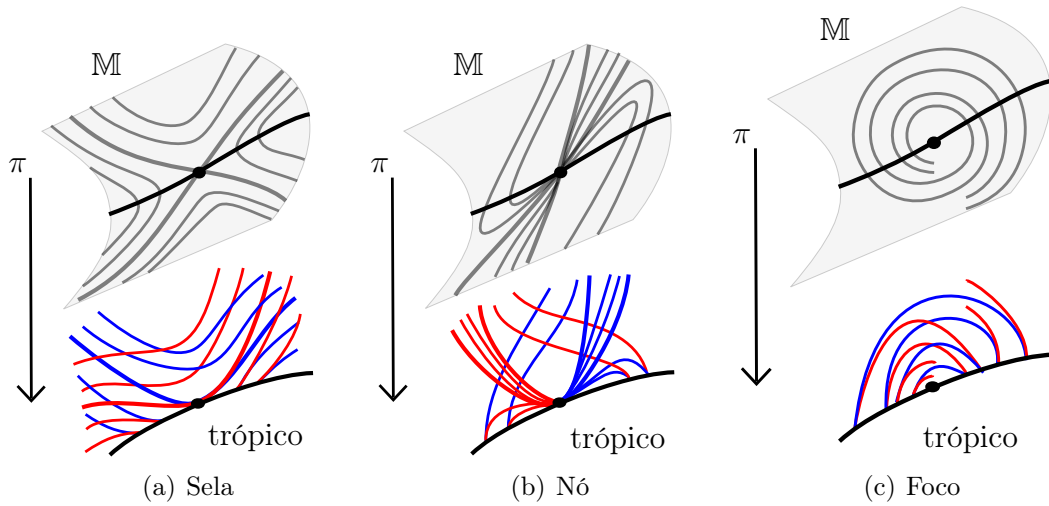


Figura 4.2: Singularidades nos pontos onde o trópico é tipo luz.

parametrizado por $\hat{\gamma}(u) = (u, -\frac{a_{20}}{a_{11}}u, u) + (0, O_1(u^2), O_2(u^2))$ e

$$\langle \hat{\gamma}'(u), \hat{\gamma}'(u) \rangle = \left(\frac{a_{20}}{a_{11}} \right)^2,$$

portanto é tipo luz se, e somente se, $a_{20} = 0$.

Definimos $F = p^2 + (-a_{11}u - a_{02}v)p + [-2a_{20}u - 2a_{11}v + (-a_{20}^2 - a_{30})u^2 + (-2a_{11}a_{20} - 2a_{21})uv + (-a_{11}^2 - a_{12})v^2]$, a superfície $\mathbb{M} = F^{-1}(0)$ a qual é suave na origem e o campo de Lie-Cartan

$$Y_F(u, v, p) = (-2a_{11}u - 2a_{02}v + 2p, 2p(-a_{11}u - a_{02}v + p), 2a_{20} + 2(a_{20}^2 + a_{30})u + 2(a_{11}a_{20} + a_{21})v + 4a_{11}p + 2(a_{11}a_{20} + a_{21})up + 2(a_{11}^2 + a_{12})vp + 2a_{02}p^2).$$

Em $(0, 0)$, temos que $F(0, 0, p) = p^2 = 0$ então $p = 0$ e $Y_F(0, 0, 0) = (0, 0, 2a_{20})$.

- i. se $a_{20} \neq 0$ o trópico é tipo espaço, o campo Y_F é regular em $(0, 0, 0)$ e transversal ao criminante. Assim, as curvas projetadas por π no plano (u, v) são cúspides no trópico como mostra a Figura 4.1.
- ii. se $a_{20} = 0$ o trópico é tipo luz. O campo Y_F tem uma singularidade no ponto $(0, 0, 0)$. Os valores próprios de

$$DY_F(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -2a_{11} & -2a_{02} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2a_{30} & 2a_{21} & 4a_{11} \end{pmatrix}$$

são

$$\lambda_{1,2} = a_{11} \pm \sqrt{9a_{11}^2 + 4a_{30}},$$

e portanto temos as conclusões que o ponto p é sela, nó ou foco, em cada caso.

Além disso, o tangente ao criminante é

$$(\nabla F \times_e \nabla F_p)(0, 0, 0) = -4a_{11}(1, 0, a_{11}),$$

e os vetores próprios são

$$E_i = \left(1, 0, \frac{3}{2}a_{11} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9a_{11}^2 + 4a_{30}} \right).$$

Assim,

$$\left(\frac{3}{2}a_{11} + \frac{1}{2}\sqrt{9a_{11}^2 + 4a_{30}} - a_{11} \right) \left(\frac{3}{2}a_{11} - \frac{1}{2}\sqrt{9a_{11}^2 + 4a_{30}} - a_{11} \right) = -2a_{11}^2 - a_{30}$$

e $\lambda_1\lambda_2 = 4(-2a_{11}^2 - a_{30})$. Portanto se verifica que quando a singularidade é sela (respec. nó) os vetores próprios tem inclinação negativa (respec. positiva) com respeito ao criminante. Portanto, a configuração das geodésicas nulas nestes pontos é como na Figura 4.2.

□

Observação 4.2. Para mais propriedades de singularidades das geodésicas nulas veja [35].

Geodésicas nulas em superfícies estritamente convexas e compactas

Do Lema 3.1 temos que em uma superfície estritamente convexa e compacta o trópico é formado por duas curvas fechadas tipo espaço. Assim, pela Proposição 4.1 segue o seguinte resultado.

Corolário 4.3. *Se M é uma superfície estritamente convexa, então as geodésicas nulas formam cúspides globalmente no trópico.*

Estabilidade estrutural em uma singularidade

Definição 4.4. *Uma imersão $\alpha \in \mathcal{I}^{r,s}$ é chamada C^s -estruturalmente estável da configuração das geodésicas nulas na topologia C^s em um ponto $p \in M$, se para toda vizinhança $U(p)$ de p em M existe uma vizinhança \mathcal{U} de α em $\mathcal{I}^{r,s}$ tal que para toda*

imersão $\beta \in \mathcal{U}$ existe um ponto $q = q_\beta$ em $U(p)$ e um homeomorfismo $h = h_\beta : W(p) \rightarrow W(q)$ entre vizinhanças de p e q com $h(p) = q$, levando conjuntamente as folheações $\tilde{\mathcal{F}}_{1,\alpha}|_{W(p)}$ e $\tilde{\mathcal{F}}_{2,\alpha}|_{W(p)}$ nas folheações $\tilde{\mathcal{F}}_{1,\beta}|_{W(q)}$ e $\tilde{\mathcal{F}}_{2,\beta}|_{W(q)}$, respectivamente.

Teorema 4.5. *O conjunto de imersões em \mathcal{I}^r ($r \geq 5$) tais que suas singularidades são selas, nós, focos e cúspides é aberto em \mathcal{I}^r .⁵ Se p é uma sela, nó, foco ou cúspide para α então α é localmente C^5 -estruturalmente estável na configuração das geodésicas nulas em p .*

Demonstração. A abertura das condições da Proposição 4.1 garante que o conjunto das imersões com singularidades deste tipo seja aberto. Além disso, interpretando as separatrizes como projeções das separatrizes das singularidades do campo de Lie-Cartan também garante que elas dependem continuamente de α . Na Seção 4.5 vamos fazer a equivalência em um contexto global. \square

4.3 Ciclos Geodésicos Nulos

Uma geodésica nula é uma curva tipo luz. Pela Observação 1.12 não temos geodésicas nulas que sejam curvas fechadas regulares. Entretanto, chamaremos de *ciclo geodésico nulo* uma curva fechada não suave que intersecta o trópico em uma cúspide onde cada arco suave é uma geodésica nula (veja Figura 4.3). Dizemos que o ciclo geodésico nulo é hiperbólico se a derivada da transformação do primeiro retorno é diferente de 1.

Seja $\alpha \in \mathcal{I}^r$ e $c : [0, l] \rightarrow M$ um ciclo geodésico nulo, isto é, existem os números $0 = a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} = l$, tal que $c_i(s) = c(s)|_{(a_i, a_{i+1})}$ é uma geodésica nula e $c(a_i)$ está contida no trópico para $i = 1, 2, \dots, n$. A curva c é a projeção na carta de uma órbita fechada C para o campo de Lie-Cartan associado a α definido sobre a superfície M a qual intersecta o conjunto discriminante nos pontos $C(a_i)$ (o trópico é a projeção do discriminante e os pontos $c(a_i)$ são a projeção dos pontos $C(a_i)$).

Sejam Σ_i^1 e Σ_i^2 seções transversais na vizinhança dos pontos $p_i = c(a_i)$, para $i = 1, \dots, n$ (veja Figura 4.3). Definamos as transformações de transição:

- $\Pi_{i,i+1}$ entre as seções Σ_i^1 e Σ_{i+1}^2 para $i = 1, \dots, n$ e $\Pi_{n,1}$ entre Σ_n^1 e Σ_1^2 .
- Π_i entre as seções Σ_i^2 e Σ_i^1 .

Seja $\Pi : \Sigma_1^1 \rightarrow V \subset \Sigma_1^1$ a transformação do primeiro retorno associado a c . Então

$$\Pi(p) = (\Pi_1 \circ \Pi_{n,1} \circ \Pi_n \circ \Pi_{n-1,n} \circ \dots \circ \Pi_3 \circ \Pi_{2,3} \circ \Pi_2 \circ \Pi_{1,2})(p). \quad (4.2)$$

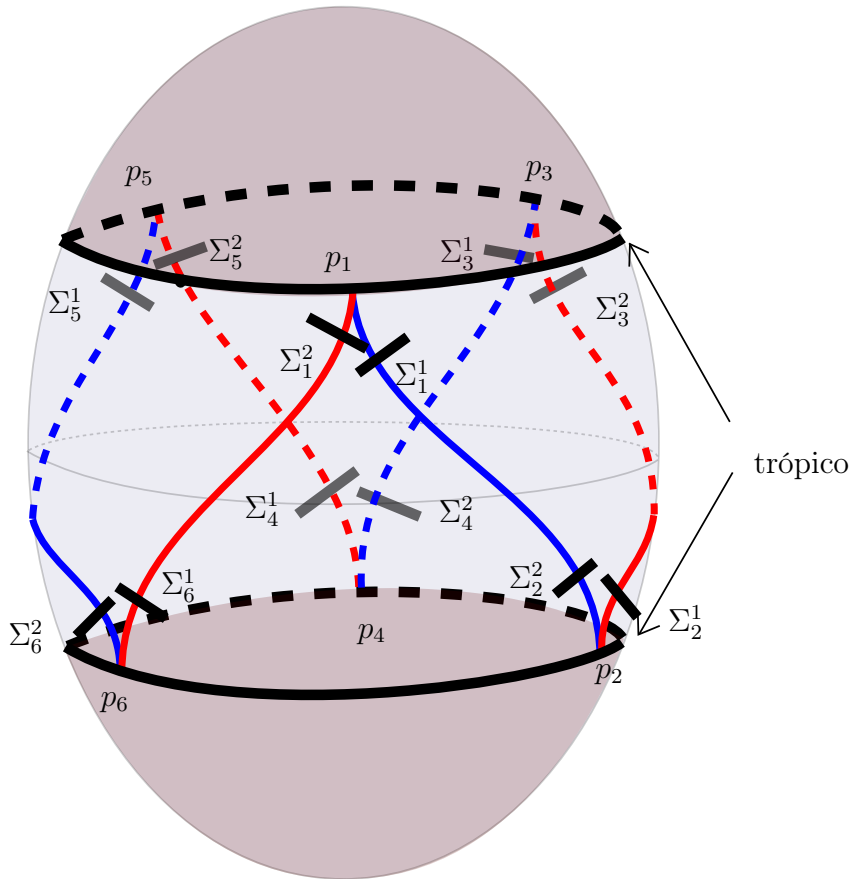


Figura 4.3: Ciclo geodésico nulo.

No seguinte lema, explicitamos a derivada da transformação de transição associada a um arco de geodésica nula.

Lema 4.6. *Seja $\alpha \in \mathcal{I}^r$ e suponha que $\tilde{c} : [0, \tilde{l}] \rightarrow M$ é um arco de uma geodésica nula parametrizado pelo pseudo-arco s . Então a expressão*

$$\begin{aligned} \alpha(s, v) = & \alpha(\tilde{c}(s)) + \left(a_1(s)v + \frac{a_2(s)}{2}v^2 + v^3 A_1(s, v) \right) n(s) \\ & + \left(b_1(s)v + \frac{b_2(s)}{2}v^2 + v^3 B_1(s, v) \right) b(s), \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde os a_i e b_i são funções suaves com $b_1(s) \neq 0$, $\{t, n, b\}$ é o triedro de Frenet associado a $\alpha \circ \tilde{c}$, define uma carta local (s, v) na vizinhança de \tilde{c} . Além disso, a derivada da transformação de transição associado a \tilde{c} é

$$\Pi'(0) = \exp \left\{ - \int_0^{\tilde{l}} \frac{a_1(s) + b_1'(s)}{b_1(s)} ds \right\}.$$

Demonstração. A aplicação

$$\alpha(s, v, w) = \alpha(\tilde{c}(s)) + wn(s) + \left(b_1(s)v + \frac{b_2(s)}{2}v^2 + v^3B_1(s, v) \right) b(s)$$

é um difeomorfismo local em uma vizinhança de $(0, 0, 0)$. De fato, $\langle \alpha_s \wedge \alpha_v, \alpha_w \rangle(s, 0, 0) = [\alpha_s, \alpha_v, \alpha_w](s, 0, 0) = b_1(s) \neq 0$. Para ϵ suficientemente pequeno existe uma função $w(s, v)$ tal que $\alpha(s, v) = \alpha(s, v, w(s, v))$ é a parametrização de um vizinhança tubular de $\alpha \circ \tilde{c}$. Para cada s , $w(s, v)$ é a parametrização da curva da interseção entre $\alpha(M)$ e o plano gerado por n e b . Portanto,

$$\begin{aligned} \alpha(s, v) = & \alpha(\tilde{c}(s)) + \left(a_1(s)v + \frac{a_2(s)}{2}v^2 + v^3A_1(s, v) \right) n(s) \\ & + \left(b_1(s)v + \frac{b_2(s)}{2}v^2 + v^3B_1(s, v) \right) b(s) \end{aligned} \quad (4.4)$$

define uma carta na vizinhança de \tilde{c} .

Nesta carta temos que a equação das geodésicas nulas é

$$G(s, v) \frac{dv^2}{ds} + 2F(s, v) \frac{dv}{ds} + E(s, v) = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} E(s, v) = & -2(b_1'(s) + a_1(s))v + (\tau(s)(\tau(s)b_1^2(s) - 2a_1^2(s) - 2a_1(s)b_1'(s)) \\ & + 2b_1(s)a_1'(s) + a_1^2(s) - a_2(s) - b_1^2(s))v^2 + O(v^3), \\ F(s, v) = & -b_1(s) + (a_1(s)a_1'(s) - b_2(s))v + \frac{1}{2}(\tau(s)a_1(s)b_2(s) + \tau(s)a_2(s)b_1(s) \\ & + 2a_1'(s)a_2(s) + a_2'(s)a_1(s) - b_3(s))v^2 + O(v^3), \\ G(s, v) = & a_1^2(s) + 2a_1(s)a_2(s)v + (a_1(s)a_3(s) + a_2^2(s))v^2 + O(v^3). \end{aligned}$$

Denotemos por $v(s, r)$ a solução de equação (4.4) com condição inicial $v(0, r) = r = v_0$ e $v(s, 0) = 0$. Assim, a transformação de transição entre as seções transversais $\Sigma_1 = \alpha(0, v)$ e $\Sigma_2 = \alpha(\tilde{l}, v)$ é $\Pi(r) = v(\tilde{l}, r)$.

Derivando a equação em relação a r e avaliando em $r = v_0 = 0$, temos

$$\begin{aligned} G_v(s, 0)v_r(s, 0)v_s^2(s, 0) + 2G(s, 0)v_s(s, 0)v_{sr}(s, 0) + 2F_v(s, 0)v_r(s, 0)v_s(s, 0) \\ + 2F(s, 0)v_{sr}(s, 0) + E_v(s, 0)v_r(s, 0) = 0. \end{aligned}$$

Como $v_s(s, 0) = 0$, então

$$2F(s, 0)v_{sr}(s, 0) + E_v(s, 0)v_r(s, 0) = 0.$$

Utilizando que $v_{sr} = v_{rs}$ e integrando com relação a s no intervalo $[0, s]$ temos

$$v_r(s, 0) = \exp \left\{ \int_0^s -\frac{E_v(s, 0)}{2F(s, 0)} ds \right\} = \exp \left\{ -\int_0^s \frac{a_1(s) + b_1'(s)}{b_1(s)} ds \right\}.$$

Portanto,

$$\Pi'(0) = \frac{dv}{dr}(\tilde{l}, r) \Big|_{r=0} = \exp \left\{ -\int_0^{\tilde{l}} \frac{a_1(s) + b_1'(s)}{b_1(s)} ds \right\}.$$

□

Aplicando este lema em cada arco de geodésica nula entre as seções Σ_i^1 e Σ_{i+1}^2 para $i = 1, \dots, n$ e Σ_n^1 e Σ_1^2 , podemos calcular a derivada das transformações de transição $\Pi_{i,i+1}$ e $\Pi_{n,1}$.

Para as transformações Π_i , na vizinhança de p_i tomamos o sistema de coordenadas (u, v) tal que as geodésicas nulas são dadas pela equação diferencial (veja [1])

$$\left(\frac{du}{dv} \right)^2 = v.$$

Neste sistema de coordenadas $\Pi_i : \{v = \epsilon\} \longrightarrow \{v = \epsilon\}$ é uma translação $\Pi_i(u, \epsilon) = (u + k, \epsilon)$, k constante, e portanto diferenciável.

Assim, Π é diferenciável. Se $\Pi'(p) \neq 1$ para o ponto $p \in c \cap \Sigma_1^1$, temos que c é um ciclo geodésico nulo hiperbólico de α . Em outro caso, vamos fazer uma perturbação em um arco suave de geodésica nula, onde c não tenha auto-interseções, de tal maneira que c seja ciclo geodésico nulo hiperbólico de uma imersão na vizinhança de α .

Lema 4.7. *Sejam $\alpha \in \mathcal{I}^r$ e $\tilde{c} : [0, \tilde{l}] \longrightarrow M$ um arco suave de geodésica nula parametrizado pelo pseudo-arco s . Considere a deformação*

$$\alpha_\epsilon(s, v) = \alpha(s, v) + \epsilon \frac{(b_1(s))^3}{2} \delta(s, v) v n(s)$$

onde $\alpha(s, v)$ é a carta local dada pelo Lema 4.6 com $b_1(s) \neq 0$, $\delta(s, v) = \delta_1(s)\delta_2(v)$ é uma função suave com suporte pequeno, $\delta_2(0) = 1$, $\delta_1(s)$ não negativa com suporte em $\left[\frac{1}{4}\tilde{l}, \frac{3}{4}\tilde{l} \right]$. Então para $\epsilon \neq 0$ pequeno, \tilde{c} é arco de geodésica nula de α_ϵ e $\Pi'_\epsilon(0) = \Pi'(0)(1 + k\epsilon) + O(\epsilon^2)$, com $k \neq 0$.

Demonstração. Na carta local

$$\begin{aligned} \alpha(s, v) = & \alpha(\tilde{c}(s)) + \left((a_1(s) + \epsilon(b_1(s))^3 \delta(s, v))v + \frac{a_2(s)}{2}v^2 + v^3 A_1(s, v) \right) n(s) \\ & + \left(b_1(s)v + \frac{b_2(s)}{2}v^2 + v^3 B_1(s, v) \right) b(s) \end{aligned}$$

temos que,

$$\begin{aligned} G(s, v) = & (a_1(s) + \epsilon \delta_1(s)(b_1(s))^3)^2 + [(a_1 + \epsilon \delta_1 b_1^3)(4\delta_2'(0)\epsilon \delta_1 b_1^3 + 2a_2)](s)v + O(v^2), \\ F(s, v) = & -b_1(s) + [a_1' a_1 - b_2 + 3\epsilon \delta_1 a_1 b_1' b_1^2 + \epsilon(\delta_1 a_1)' b_1^3 + 3\epsilon^2 \delta_1^2 b_1' b_1^5 + \epsilon^2 \delta_1 \delta_1' b_1^6](s)v \\ & + O(v^2), \\ E(s, v) = & -2(a_1(s) + b_1'(s) + \epsilon \delta_1(s) b_1^3(s))v + O(v^2) \end{aligned}$$

e portanto, \tilde{c} é arco de geodésica nula de α_ϵ . Assim, a derivada da transformação de transição associada a \tilde{c} para α_ϵ é

$$\Pi'_\epsilon(0) = \exp \left\{ - \int_0^{\tilde{l}} \left(\frac{a_1(s) + b_1'(s)}{b_1(s)} + \delta_1(s) b_1(s)^2 \epsilon \right) ds \right\}.$$

Observamos que $\Pi'_\epsilon(0)|_{\epsilon=0} = \Pi'(0)$. Calculando,

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi'_\epsilon(0)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} &= \Pi'_\epsilon(0) \int_0^{\tilde{l}} -\delta_1(s) b_1(s)^2 ds \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \Pi'(0)k, \end{aligned}$$

temos $k \neq 0$ e portanto a conclusão do lema. \square

Corolário 4.8. *Sejam $\alpha \in \mathcal{I}^r$ e $c : [a, b] \rightarrow M$ um ciclo geodésico nulo. Chamemos \tilde{c} o arco suave de geodésica nula de c , que não intersecta outro arco de c , entre as seções transversais Σ_1^1 e Σ_2^2 nos pontos $c(u_1)$ e $c(u_2)$, respectivamente, tal que não intersecta outro arco de c . Então existe α_ϵ na vizinhança de α tal que c é ciclo principal hiperbólico de α_ϵ .*

Demonstração. Tomemos $\alpha_\epsilon(s, v)$ como no Lema 4.7 para $s \in [u_1, u_2]$ (\tilde{c} parametrizado pelo pseudo-arco s) e $\alpha_\epsilon = \alpha$ em outro caso. Para ϵ pequeno, α_ϵ é uma imersão na vizinhança de α .

Pelo Lema 4.7, temos que c é ciclo geodésico nulo de α_ϵ e $\Pi'_\epsilon(0) \neq 1$ para ϵ pequeno, onde Π_ϵ é a transformação do primeiro retorno dada por (4.2) para \tilde{c} e α_ϵ . Portanto, c é ciclo geodésico nulo de α_ϵ . \square

Exemplo 4.9. *Elipsóide de revolução em torno do eixo z .* Considere a parametrização $X(u, v) = (a \operatorname{sen}(v) \cos(u), a \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u), c \cos(v))$. O trópico é dado pelas curvas $v_1 = \arccos\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)$ e $v_2 = \pi - \arccos\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)$. A equação de geodésicas nulas é

$$((a^2 + c^2) \cos^2(v) - c^2)dv^2 + a^2 \operatorname{sen}^2(v)du^2 = 0.$$

Como o trópico é composto por duas curvas tipo espaço, as geodésicas nulas tem singularidades tipo cúspide globalmente. A transformação do primeiro retorno $\pi : \{v = v_1\} \rightarrow \{v = v_1\}$ é $\pi(u) = u + \frac{a\pi}{\sqrt{a^2+c^2}}$. Variando a e c , o número de rotação de π pode ser racional ou irracional. Portanto, vamos ter configurações com todas as geodésicas nulas fechadas ou todas densas, veja Figura 4.4(a).

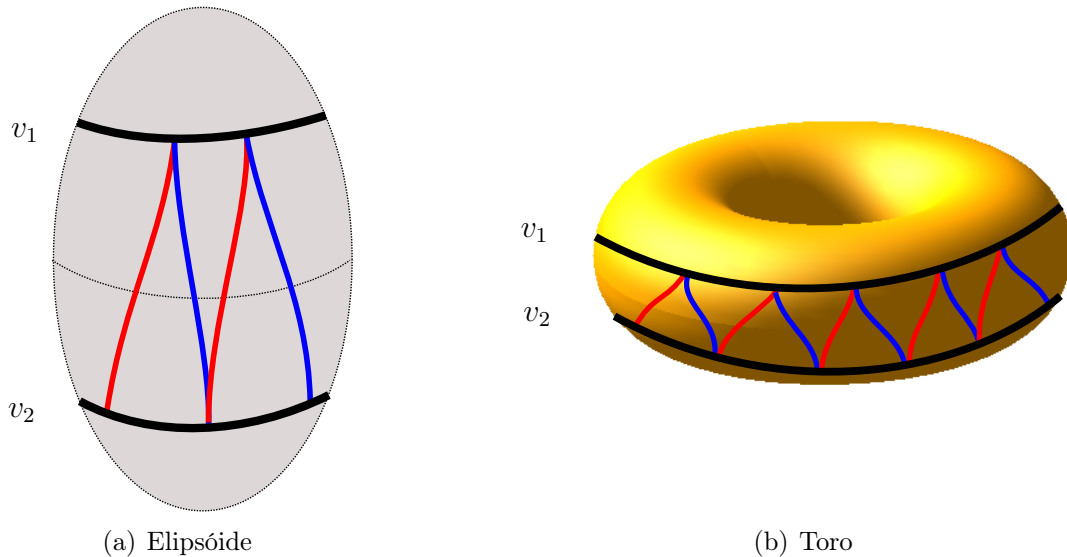


Figura 4.4: *Geodésicas nulas do elipsóide e do toro de revolução em torno do eixo z .*

Exemplo 4.10. *Toro de revolução em torno do eixo z .* Considere a parametrização $X(u, v) = ((ar + r \cos(v)) \cos(u), (ar + r \cos(v)) \operatorname{sen}(u), r \sin(v))$ com $a > 1$ e $r > 0$. O trópico é dado pelas curvas $v_1 = \frac{\pi}{4}$ e $v_2 = \frac{3\pi}{4}$. A equação de geodésicas nulas é

$$-r^2(2 \cos^2(v) - 1)dv^2 + r(a + \cos^2(v))du^2 = 0.$$

Igual que no Exemplo 4.9, as geodésicas nulas tem singularidades tipo cúspide globalmente. A transformação do primeiro retorno $\pi : \{v = v_1\} \rightarrow \{v = v_1\}$ é $\pi(u) = u + \sqrt{2}\pi + 2a\sqrt{2} \operatorname{EllipticK}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$, onde $\operatorname{EllipticK}$ é uma integral elíptica de primeira ordem. Variando a , o número de rotação de π pode ser racional ou irracional. Portanto, teremos configurações com todas as geodésicas nulas fechadas ou todas densas, veja Figura 4.4(b).

Exemplo 4.11. *Geodésicas nulas e linhas assintóticas no hiperbolóide de uma folha vertical.* Considere as parametrizações $X(u, v) = (a(\cos(u) + v \sin(u)), a(\sin(u) - v \cos(u)), cv)$ do hiperbolóide vertical de uma folha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

com $c \geq a > 0$. A superfície é Lorentziana. A equação das linhas geodésicas nulas é:

$$(c^2 - a^2)dv^2 + 2a^2dvdu - a^2(v^2 + 1)du^2 = 0.$$

A equação das linhas assintóticas é:

$$2a^2cdvdu - a^2c(v^2 + 1)du^2 = 0.$$

Portanto, as geodésicas nulas coincidem com as linhas assintóticas se, e somente se, $a = c$.

Estabilidade estrutural em um ciclo geodésico nulo

Definição 4.12. *Uma imersão $\alpha \in \mathcal{I}^{r,s}$ é chamada C^s -estruturalmente estável da configuração das geodésicas nulas na topologia C^s em um ciclo geodésico nulo c de α , se para toda vizinhança $U(c)$ de c em M existe uma vizinhança \mathcal{U} de α em $\mathcal{I}^{r,s}$ tal que para toda imersão $\beta \in \mathcal{U}$ existe um ciclo geodésico nulo $\hat{c} = \hat{c}_\beta$ em $U(c)$ e um homeomorfismo $h = h_\beta : W(c) \rightarrow W(\hat{c})$ entre vizinhanças de c e \hat{c} com $h(c) = \hat{c}$, levando conjuntamente as folheações $\tilde{\mathcal{F}}_{1,\alpha}|_{W(c)}$ e $\tilde{\mathcal{F}}_{2,\alpha}|_{W(c)}$ nas folheações $\tilde{\mathcal{F}}_{1,\beta}|_{W(\hat{c})}$ e $\tilde{\mathcal{F}}_{2,\beta}|_{W(\hat{c})}$, respectivamente.*

Teorema 4.13. *Seja c um ciclo geodésico nulo de uma imersão $\alpha \in \mathcal{I}^r$ ($r \geq 5$). Se c é hiperbólico então α é localmente C^4 -estruturalmente estável na configuração das geodésicas nulas em c .*

Demonstração. O fato de ser c hiperbólica garante a estabilidade local dentro de perturbações na C^3 -topologia. Na Seção 4.5 vamos fazer a equivalência das duas folheações em um contexto global. \square

4.4 Estabilidade Estrutural

Considere o subconjunto $\tilde{S}^r = \tilde{S}^r(M) \subset \mathcal{I}^{r,s}$ tal que para $\alpha \in \tilde{S}^r$ satisfaz as seguintes propriedades:

- a) O trópico é uma curva regular com apenas pontos luz isolados.

- b) As singularidades são todas tipo sela, nó, foco ou cúspides.
- c) Os ciclos de geodésicas nulas são hiperbólicos.
- d) Não tem conexões de separatrizes.
- e) O conjunto limite de toda geodésica nula está contido no conjunto de singularidades e ciclos de geodésicas nulas.

Observação 4.14. Chamamos de separatrizes as geodésicas nulas que são projeções das separatrizes de selas e das variedades estáveis fortes dos nós do campo de linhas de Lie-Cartan.

Definição 4.15. Uma imersão $\alpha \in \mathcal{I}^{r,s}$ é chamada C^s -estruturalmente estável da configuração das geodésicas nulas na topologia C^s , se existe uma vizinhança \mathcal{U} de α em $\mathcal{I}^{r,s}$ tal que para toda imersão $\beta \in \mathcal{U}$ existe um homeomorfismo $h = h_\beta : M \rightarrow M$ tal que $h(\tilde{\mathcal{S}}_\alpha) = \tilde{\mathcal{S}}_\beta$ e levando as folheações $\tilde{\mathcal{F}}_{1,\alpha}$ e $\tilde{\mathcal{F}}_{2,\alpha}$ nas folheações $\tilde{\mathcal{F}}_{1,\beta}$ e $\tilde{\mathcal{F}}_{2,\beta}$.

Teorema C. Seja $r \geq 5$ e M uma superfície suave, orientada e compacta. Então o conjunto $\tilde{\mathcal{S}}^r(M)$ é aberto em $\mathcal{I}^{r,5}$ e todo $\alpha \in \tilde{\mathcal{S}}^r(M)$ é C^5 -estruturalmente estável na configuração das geodésicas nulas.

4.5 Demonstração do Teorema C

A abertura do conjunto $\tilde{\mathcal{S}}^r$ em $\mathcal{I}^{r,5}$ segue da estabilidade local nas singularidades, a continuidade sobre partes compactas das separatrizes e a estabilidade local nos ciclos hiperbólicos.

Para provar a estabilidade estrutural, vamos utilizar o método exposto por Garcia, Gutiérrez e Sotomayor em [13] para a construção da equivalência topológica. No espaço projetivo tangente $PM = \{TM \setminus 0\}/\{v = rw, r \neq 0\}$ considere a subvariedade \mathbb{G}_α composta por todas as direções de geodésicas nulas (os zeros da primeira forma fundamental) de α . Numa carta local (u, v) a subvariedade é

$$\mathbb{G}_\alpha = \{(u, v, [p : q]) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) : Gp^2 + 2Fpq + Eq^2 = 0\},$$

a projeção $\pi : \mathbb{G}_\alpha \rightarrow M$ tal que $\pi(u, v, [p : q]) = (u, v)$ é um recobrimento duplo do fecho da parte Lorentziana de α em M e a projeção do criminante \mathbb{P}_α de \mathbb{G}_α é o trópico de α .

O campo de Lie-Cartan, o qual na carta local é $(\bar{F}_p, p\bar{F}_p, -(\bar{F}_u + p\bar{F}_v))$, onde $\bar{F} = Gp^2 + 2Fp + E$ e $p = \frac{dv}{du}$, define globalmente em \mathbf{G}_α um campo de linhas $\tilde{\mathcal{L}}_{I,\alpha}$ que localmente é um campo vetorial e este é o levantamento dos campos $\tilde{\mathcal{L}}_{1,\alpha}$ e $\tilde{\mathcal{L}}_{2,\alpha}$. As singularidades do campo de linhas $\tilde{\mathcal{L}}_{I,\alpha}$, se tiver, estão em \mathbf{P}_α e elas são sempre selas, nós ou focos. A folheação deste campo de linhas, denotada por $\tilde{\mathcal{F}}_{I,\alpha}$, é um levantamento das folheações $\tilde{\mathcal{F}}_{1,\alpha}$ e $\tilde{\mathcal{F}}_{2,\alpha}$ das geodésicas nulas no fecho da parte Lorentziana de α .

Na superfície \mathbf{G}_α há uma involução canônica $\varphi_\alpha : \mathbf{G}_\alpha \rightarrow \mathbf{G}_\alpha$ tal que $\varphi_\alpha^2 = id$, $\varphi_\alpha \neq id$ e $\varphi_\alpha|_{\mathbf{P}_\alpha} = id$. Assim, $\varphi_\alpha(u, v, [p_1 : q_1]) = (u, v, [p_2 : q_2])$, isto é, envia a direção de geodésica nula $[p_1 : q_1]$ na outra direção $[p_2 : q_2]$ da fibra $\pi^{-1}(u, v)$.

Pelas condições de regularidade do trópico de α a involução φ_α é um difeomorfismo. Considere o campo de linhas $\tilde{\mathcal{L}}_{II,\alpha} = (\varphi_\alpha)_*\tilde{\mathcal{L}}_{I,\alpha}$ induzido por φ_α . Denotemos por $\tilde{\mathcal{F}}_{II,\alpha}$ a folheação gerada por este campo. As folheações $\tilde{\mathcal{F}}_{I,\alpha}$ e $\tilde{\mathcal{F}}_{II,\alpha}$ são transversais em \mathbf{G}_α exceto em \mathbf{P}_α . As singularidades do campo $\tilde{\mathcal{L}}_{I,\alpha}$ estão em \mathbf{P}_α e como $\varphi_\alpha|_{\mathbf{P}_\alpha} = id$ temos que as singularidades dos campos de linhas $\tilde{\mathcal{L}}_{I,\alpha}$ e $\tilde{\mathcal{L}}_{II,\alpha}$ são as mesmas.

As folheações $\tilde{\mathcal{F}}_{I,\alpha}$ e $\tilde{\mathcal{F}}_{II,\alpha}$ são chamadas de *primeira* e *segunda* folheações, respectivamente. Observe que a projeção por π de qualquer das folheações em \mathbf{G}_α gera as duas folheações das geodésicas nulas em M .

As condições impostas para as folheações $\tilde{\mathcal{F}}_{1,\alpha}$ e $\tilde{\mathcal{F}}_{2,\alpha}$ na definição do conjunto \tilde{S}^r , são induzidas para as folheações $\tilde{\mathcal{F}}_{I,\alpha}$ e $\tilde{\mathcal{F}}_{II,\alpha}$.

Uma fato importante é que, pela Observação 1.12, não temos ciclos de geodésicas nulas disjuntos do trópico, mas temos ciclos com arcos em ambas folheações (veja Seção 4.3). Assim, $\tilde{\mathcal{F}}_{I,\alpha}$ e $\tilde{\mathcal{F}}_{II,\alpha}$ somente tem ciclos principais que intersectam \mathbf{P}_α .

4.5.1 Regiões canônicas

A primeira (respec. segunda) região canônica de α , com $\alpha \in \tilde{S}^r$, é a componente conexa do complemento das singularidades selas e nós, dos arcos da primeira (respec. segunda) folheação contidos em ciclos, das variedades estáveis fortes dos nós (com orientação de atrator) da primeira (respec. segunda) folheação e das separatrizes de selas da primeira (respec. segunda) folheação.

As primeiras (respec. segundas) regiões canônicas podem ser paralelas ou cilíndricas. No primeiro caso o campo $\tilde{\mathcal{L}}_{I,\alpha}$ (respec. $\tilde{\mathcal{L}}_{II,\alpha}$) é topologicamente equivalente ao campo vetorial $\frac{\partial}{\partial u}$ em \mathbb{R}^2 , no segundo caso ele é topologicamente equivalente ao campo vetorial $\frac{\partial}{\partial u}u + \frac{\partial}{\partial v}v$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Observação 4.16. Como não temos geodésicas nulas que não intersectem o trópico, ou equivalentemente, não temos curvas fechadas da primeira e segunda folheações disjuntas do conjunto \mathbb{P}_α , então as regiões canônicas cilíndricas não contem ciclos fechados da outra folheação (veja [13], [29]). Isto reduz os casos a serem analisados para fazer a equivalência topológica, já que para uma região cilíndrica todas as linhas da outra folheação atravessam transversalmente (veja Figura 4.5).

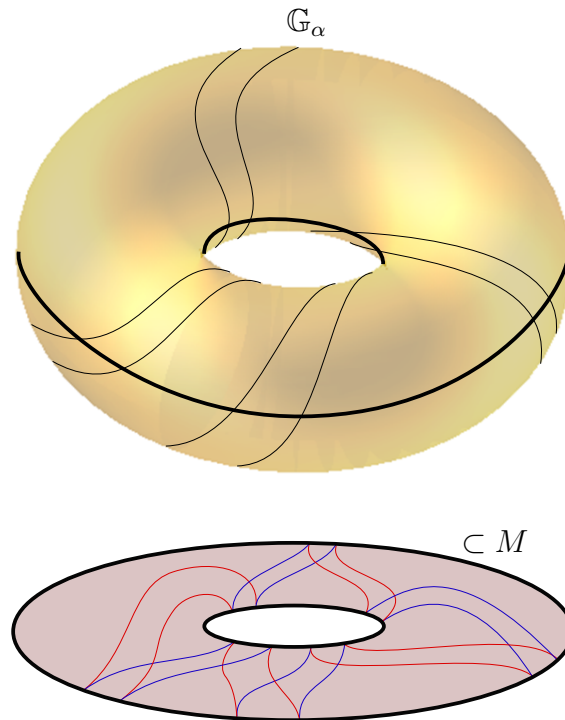


Figura 4.5: Região cilíndrica em \mathbb{G}_α composta por duas curvas fechadas de $\mathcal{F}_{I,\alpha}$. Na figura de baixo temos a projeção da região em M .

Dada uma imersão $\alpha \in \mathcal{I}^r$, podemos encontrar uma vizinhança \mathcal{U}_α de α em $\mathcal{I}^{r,5}$ tal que $\mathcal{U}_\alpha \subset \tilde{\mathcal{S}}^r$, $r \geq 5$, e que ao longo de um arco contínuo α_t , $t \in [0, 1]$, em \mathcal{U}_α unindo $\alpha = \alpha_0$ e $\beta = \alpha_1$, há uma dependência contínua, de maneira única, das singularidades, dos ciclos geodésicos nulos e das separatrizes de pontos de selas e nós (variedades estáveis fortes) de ambas folheações $\tilde{\mathcal{F}}_{I,\alpha}$ e $\tilde{\mathcal{F}}_{II,\alpha}$, e portanto, uma dependência contínua das regiões canônicas de α_0 em α_t de maneira única, definindo

uma correspondência um a um entre as regiões de α e β . A correspondência preserva o tipo de região.

Seja $\varphi_{\alpha_t} : \mathbb{G}_{\alpha_t} \longrightarrow \mathbb{G}_{\alpha_t}$ a involução com as mesmas propriedades que φ_α em \mathbb{G}_α . A dependência contínua das regiões canônicas define uma equivalência topológica parcial entre as singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}_{I,\alpha}$ e $\tilde{\mathcal{F}}_{I,\alpha_t}$, e entre as separatrizes ou ciclos principais para $t \in [0, 1]$.

4.5.2 Construção de equivalências

1. *Definição de h_t sobre a interseção de uma primeira e segunda região paralela.* Em cada primeira região paralela R_1 , escolhemos a seção transversal S da seguinte maneira: se $P_\alpha \cap R_1 \neq \emptyset$, então S é uma componente conexa deste conjunto, e se $P_\alpha \cap R_1 = \emptyset$, então S é um arco de alguma separatriz da segunda folheação (isto sempre é possível).

Seja S a seção transversal da região R_1 . Se S é um arco de uma separatriz σ da segunda folheação, os extremos a e b de S têm como continuação $h_t(a)$ e $h_t(b)$ os quais definem os extremos da continuação S_t de S contida em um arco da separatriz σ_t (continuação de σ). Definimos $h_t : S \longrightarrow S_t$ como qualquer homeomorfismo que estende a correspondência dada pelos extremos. Se S está contida em P_α , a definição é similar, neste caso os extremos são sempre selas ou nós.

Sejam R_1 e R_2 as regiões paralelas e S e T suas seções transversais, respectivamente. Para cada p em uma componente conexa C de $R_1 \cap R_2$, chamamos $s(p)$ e $t(p)$ às interseções das geodésicas nulas que passam por p da primeira e segunda folheação com S e T , respectivamente. Seja C_t a continuação de C . Assim, para cada $p \in C$ definimos $h_t(p)$ como a interseção das geodésicas nulas da primeira e segunda folheação de α_t que passam por $h_t(s(p)) \in S_t$ e $h_t(t(p)) \in T_t$, respectivamente.

2. *Definição de h_t na interseção de uma região cilíndrica com uma região paralela.* Da Observação 4.16, uma região cilíndrica R_1 sempre intersecta o conjunto P_α . Assim, definimos a seção transversal S como uma componente conexa de $R_1 \cap P_\alpha$. Consideremos a continuação R_{1t} e S_t de R_1 e S , respectivamente. As folheações $\tilde{\mathcal{F}}_{I,\alpha}|_{R_{1t}}$ definem transformações de Poincaré $\pi_t : S_t \longrightarrow S_t$ as quais possuem um atrator e um repulsor nos extremos de S_t . Seja $g_t : S \longrightarrow S_t$ a conjugação

topológica entre π_0 e π_t . Definimos $h_t|_S = g_t$ (similar que no item 2 da Seção 2.4.2).

Considere a região paralela R_2 e $C = R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$. A seção transversal T para R_2 é um arco de qualquer dos dois ciclos que formam R_1 da primeira folheação. A definição de h_t em T dá uma correspondência um a um dos arcos da segunda folheação em C_t , onde C_t é a continuação de C . A extensão de h_t a todo C a fazemos da seguinte maneira: a interseção do arco $\widehat{p, \pi_0(p)}$ da primeira folheação ($p \in S$) com C é levado no arco $\widehat{p, \pi_t(p)}$ da primeira folheação de α_t respeitando a correspondência um a um dos arcos da segunda folheação gerada pela definição de h_t em T .

3. *Definição de h_t na interseção de duas regiões cilíndricas.* Seja R_1 (respec. R_2) a região cilíndrica da primeira (respec. segunda) folheação, e seja S seção transversal de R_1 (componente conexa de $R_1 \cap P_\alpha$ sendo que todas regiões cilíndricas intersectam o conjunto P_α). Neste caso, S é também seção transversal para R_2 . Definimos $h_t : S \rightarrow S_t$ (S_t continuação de S) utilizando a transformação de Poincaré da primeira ou segunda folheação.

Para $p \in R_1 \cap R_2$, chamemos $s_1(p)$ (respec. $s_2(p)$) a interseção da linha da primeira (respec. segunda) folheação com S . Assim, $h_t(p)$ é definido como a interseção das linhas da primeira e segunda folheação de α_t que passam pelos pontos $h_t(s_1(p))$ e $h_t(s_2(p))$, respectivamente.

Todas as possibilidades de interseção de regiões canônicas estão consideradas (os casos se reduzem pelo fato de não ter curvas fechadas disjuntas do P_α). Assim, temos uma equivalência topológica h_t das folheações $\tilde{\mathcal{F}}_{I,\alpha}$ e $\tilde{\mathcal{F}}_{II,\alpha}$ com as folheações $\tilde{\mathcal{F}}_{I,\alpha_t}$ e $\tilde{\mathcal{F}}_{II,\alpha_t}$, para todo $t \in [0, 1]$, a qual induz uma equivalência topológica H_t entre a tripla $\tilde{\mathbb{P}}_\alpha$ e $\tilde{\mathbb{P}}_{\alpha_t}$ em M .

LINHAS PRINCIPAIS DE SUPERFÍCIES CLÁSSICAS EM $\mathbb{R}^{2,1}$

Vamos descrever as linhas principais de superfícies “clássicas” no espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1} = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, onde $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3$, e em alguns casos fazer a comparação com as linhas principais das mesmas superfícies no espaço $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_e)$ (o espaço vetorial \mathbb{R}^3 com o produto escalar euclidiano). As configurações principais das superfícies descritas neste capítulo não satisfazem as condições de estabilidade estrutural global. Nelas mostramos a utilização do Teorema de Dupin no espaço de Minkowski.

Neste capítulo, vamos falar de ponto umbílico quando os coeficientes da equação de linhas principais (1.11) são nulos. Assim, vamos estender a ideia de ponto umbílico para o trópico, chamando eles de pontos umbílicos luz.

5.1 Superfícies Umbílicas em $\mathbb{R}^{2,1}$.

Uma superfície tal que todos seus pontos são umbílicos é chamada de superfície umbílica.

A esfera $S^2(r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\} = \{X \in \mathbb{R}^3 : |X|_e = r\}$ é uma superfície umbílica no espaço \mathbb{E}^3 . Também, um plano $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\}$ é uma superfície umbílica em \mathbb{E}^3 .

Em $\mathbb{R}^{2,1}$, os planos são superfícies umbílicas. Entretanto, a esfera $S^2(r)$ não é mais superfície umbílica (veja Observação 5.10). A “esfera” do espaço de Minkowski $S_m^2(r) = \{X \in \mathbb{R}^3 : |X| = \sqrt{|\langle X, X \rangle|} = r\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = \pm r^2\}$ é uma superfície umbílica. A “esfera” $S_m^2(r)$ é a união de um hiperbolóide de uma

folha e outro de duas folhas (veja Figura 1.3). O cone luz

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{2,1} : x^2 + y^2 - z^2 = 0\} - \{(0, 0, 0)\},$$

(veja Figura 1.1), é também uma superfície umbílica em $\mathbb{R}^{2,1}$.

5.2 Superfícies de Revolução.

Seja $c(v) = (h_1(v), h_2(v))$ uma curva suave no plano- yz , para $v \in [a, b]$. Considere a superfície de revolução em torno do eixo z parametrizada por

$$X(u, v) = (h_1(v) \cos(u), h_2(v) \sin(u), h_2(v))$$

com $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (a, b)$ e $h_1(v) \neq 0$. Os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais são:

$$\begin{aligned} E &= h_1^2, & F &= 0, & G &= h_1'^2 - h_2'^2, \\ e &= -h_1^2 h_2', & f &= 0, & g &= h_1(h_1'' h_2' - h_2'' h_1'). \end{aligned}$$

Assim, temos uma carta principal. O trópico é $\Delta = h_1^2(h_1'^2 - h_2'^2) = 0$. Os coeficientes da equação das linhas principais são:

$$L_1 = 0, \quad M_1 = h_1^2[h_1(h_1'' h_2' - h_2'' h_1') - h_2'(h_1'^2 - h_2'^2)], \quad N_1 = 0.$$

As linhas principais são os meridianos e os paralelos, podendo ter linhas de pontos umbílicos nos v tais que $M_1 = 0$.

Exemplo 5.1. *O toro de revolução em torno do eixo z .* Fazemos $c(v) = (R + r \cos(v), r \sin(v))$ com $R > r > 0$ e $v \in [0, 2\pi]$. O trópico é $\Delta = -r^2(R + r \cos(v))^2(2 \cos^2(v) - 1) = 0$, isto é, quatro curvas fechadas quando $2 \cos^2(v) - 1 = 0$, divide o toro em duas regiões Riemannianas e duas Lorentzianas. Temos também que: $L_1 = 0$, $M_1 = -r^2(R + r \cos(v))^2(2r \cos^3(v) + R)$, $N_1 = 0$. Se $2r \geq R$, então $2r \cos^3(v) + R = 0$ tem duas soluções e teríamos neste caso duas curvas de pontos umbílicos, as quais aparecem em uma das regiões da parte Lorentziana do toro (veja Figura 5.1(a) onde se mostra em vermelho uma das duas curvas de singularidades). Se $2r < R$ não temos pontos umbílicos.

Exemplo 5.2. *Elipsóide (esfera se $a = c$)* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Fazemos $c(v) = (a \cos(v), c \sin(v))$ com $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. O trópico é $\Delta = -a^2 \cos^2(v)(\cos^2(v)(a^2 +$

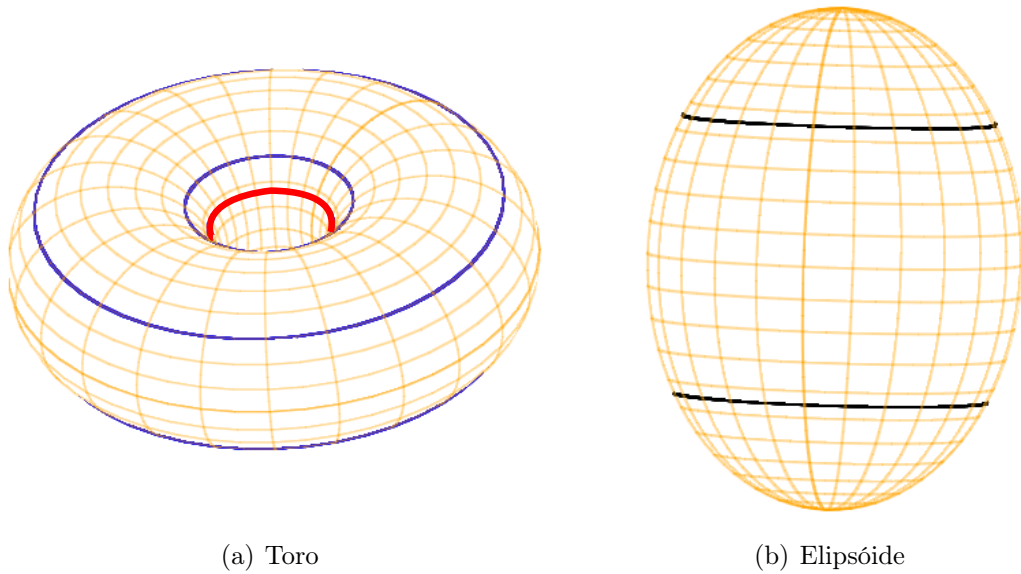


Figura 5.1: Linhas de curvatura principal no toro e elipsóide de revolução em torno do eixo z .

$c^2) - a^2) = 0$, isto é, duas curvas fechadas quando $\cos^2(v)(a^2 + c^2) - a^2 = 0$. Os coeficientes da equação das linhas de curvatura são: $L_1 = 0$, $M_1 = -\cos^5(v)a^2c(a^2 + c^2)$, $N_1 = 0$ (veja Figura 5.1(b)). Os pontos $P = (0, 0, \pm c)$ são umbílicos tipo centro.

Observe que, na esfera $S^2(r)$ ($a = c$) somente temos dois pontos umbílicos, entretanto em \mathbb{E}^3 é uma superfície umbílica. No elipsóide ($a \neq c$) as linhas principais são exatamente as mesmas curvas tanto em \mathbb{E}^3 como em $\mathbb{R}^{2,1}$.

Como veremos na Seção 5.4, um elipsóide de revolução com eixo de rotação em x ou y tem quatro pontos umbílicos tipo E_1 . Entretanto, em \mathbb{E}^3 temos somente dois pontos umbílicos tipo centro. As configurações principais não são equivalentes.

Exemplo 5.3. *Rotação no eixo x .* Agora, seja $c(v) = (h_1(v), h_2(v))$ uma curva suave no plano- xz , para $v \in [a, b]$. Considere a superfície de revolução entorno do eixo x parametrizada por

$$X(u, v) = (h_2(v), h_1(v) \cos(u), h_1(v) \sin(u))$$

com $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (a, b)$ e $h_1(v) \neq 0$. Obtemos que $f \equiv 0$ e $F = -2 \sin(u) \cos(u) h_1(v) h_1'(v) \equiv 0$ se, somente se, $h_1(v) = \text{constante} = k$. Assim, os meridianos e paralelos são as linhas principais somente quando X é um cilindro de raio k . Resultado similar se obtém fazendo rotação no eixo y .

As linhas principais em uma superfície gerada a partir de uma rotação em um eixo diferente ao eixo z , não tem uma caracterização geral, isto é, não é possível ter conclusões globais da configuração principal delas.

5.3 Sistema Triplamente Ortogonal.

Definição 5.4. (Veja [37]) Para qualquer produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em \mathbb{R}^3 , um sistema triplamente ortogonal de superfícies é uma aplicação diferenciável $X : W \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida em um aberto $W \subset \mathbb{R}^3$, satisfazendo:

- a) $dX_{(u,v,w)} : T_{(u,v,w)}\mathbb{R}^3 \rightarrow T_{X(u,v,w)}\mathbb{R}^3$ é bijetiva para todo $(u, v, w) \in W$.
- b) $\langle X_u, X_v \rangle = \langle X_u, X_w \rangle = \langle X_w, X_v \rangle = 0$.

Veja outras definições de sistemas ortogonais em [49], [26] e [48]. Para $p = (u_0, v_0, w_0) \in W$, as três superfícies

$$\begin{aligned} (u, v) &\longmapsto X(u, v, w_0), \\ (u, w) &\longmapsto X(u, v_0, w), \\ (v, w) &\longmapsto X(u_0, v, w), \end{aligned}$$

são mutuamente ortogonais. Denotamos estas superfícies por S_{w_0} , S_{v_0} e S_{u_0} , respectivamente. Elas são regulares por a).

Note que pela condição b), $F = 0$ sobre cada superfície. Além disso, $X_w(u, v, w_0)$ é normal de S_{w_0} em (u, v, w_0) (de maneira similar para outras duas superfícies), derivando

$$\langle X_u, X_v \rangle_w = \langle X_u, X_w \rangle_v = \langle X_w, X_v \rangle_u = 0$$

temos que:

$$\begin{aligned} \langle X_{uw}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{vw} \rangle &= 0, \\ \langle X_{uv}, X_w \rangle + \langle X_u, X_{vw} \rangle &= 0, \\ \langle X_{wu}, X_v \rangle + \langle X_w, X_{vu} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Disto,

$$\langle X_{uv}, X_w \rangle = -\langle X_u, X_{vw} \rangle = \langle X_{uw}, X_v \rangle = -\langle X_w, X_{vu} \rangle.$$

Portanto, $\langle X_{uv}, X_w \rangle = 0$. De maneira similar obtemos que $\langle X_{uw}, X_v \rangle = \langle X_{vw}, X_u \rangle = 0$. Então $f = 0$ sobre cada superfície, isto é, temos uma carta principal. Podemos concluir o seguinte teorema.

Teorema 5.5. (*Dupin*). *As curvas coordenadas sobre qualquer das superfícies em um sistema triplamente ortogonal são as linhas principais.*

5.4 Linhas Principais no Elipsóide.

Considere as superfícies (veja [25])

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_u &= \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2 - u} + \frac{y^2}{b^2 - u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1 \right\}, \\ \mathbb{G}_v &= \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2 - v} + \frac{y^2}{b^2 - v} + \frac{z^2}{c^2 + v} = 1 \right\}, \\ \mathbb{H}_w &= \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2 - w} + \frac{y^2}{b^2 - w} + \frac{z^2}{c^2 + w} = 1 \right\},\end{aligned}$$

onde $a > b > 0$ (para $b > a > 0$ é similar) e $c > 0$.

Seja $U_E := \{(u, v, w) \in (-c^2, b^2) \times (b^2, a^2) \times (-c^2, b^2)\}$. Para $(u, v, w) \in U_E$, F_u , H_w são elipsóides e G_v um hiperbolóide de uma folha.

Teorema 5.6. *As superfícies \mathbb{F}_u , \mathbb{G}_v e \mathbb{H}_w formam um sistema triplamente ortogonal para $(u, v, w) \in U_E$, $v \neq w$.*

Demonstração. Resolvendo o sistema linear em $\{x^2, y^2, z^2\}$

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2 - u} + \frac{y^2}{b^2 - u} + \frac{z^2}{c^2 + u} - 1 &= 0, \\ \frac{x^2}{a^2 - v} + \frac{y^2}{b^2 - v} + \frac{z^2}{c^2 + v} - 1 &= 0, \\ \frac{x^2}{a^2 - w} + \frac{y^2}{b^2 - w} + \frac{z^2}{c^2 + w} - 1 &= 0,\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} x(u, v, w) &= \pm \sqrt{\frac{(a^2 - u)(a^2 - v)(a^2 - w)}{(a^2 - b^2)(a^2 + c^2)}}, \\ y(u, v, w) &= \pm \sqrt{\frac{-(b^2 - u)(b^2 - v)(b^2 - w)}{(a^2 - b^2)(b^2 + c^2)}}, \\ z(u, v, w) &= \pm \sqrt{\frac{(c^2 + u)(c^2 + v)(c^2 + w)}{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}}. \end{aligned}$$

É fácil verificar que

$$X(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \quad (5.1)$$

satisfaz $\langle X_u, X_v \rangle = \langle X_u, X_w \rangle = \langle X_v, X_w \rangle = 0$. Além disso,

$$\det(dX) = \frac{(u - v)(u - w)(v - w)}{8x(u, v, w)y(u, v, w)z(u, v, w)(a^2 - b^2)(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)} \neq 0.$$

□

Como F_u, G_v, H_w é um sistema triplamente ortogonal, pelo Teorema de Dupin, estas superfícies se intersectam em suas linhas de curvatura principal.

Fixemos w e definimos o elipsóide $\mathbb{E}_w = \mathbb{H}_w$ com $(u, v, w) \in U_E$, assim temos que as linhas principais em \mathbb{E}_w são as curvas geradas pelas interseções do elipsóide com a família de hiperbolóides de uma folha \mathbb{F}_u e com a família de elipsóides \mathbb{G}_v (veja Figura 5.2).

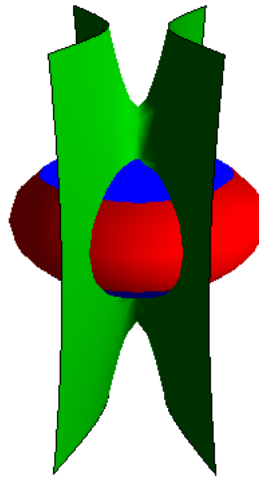


Figura 5.2: Sistema triplamente ortogonal para o elipsóide.

Em cada octante de E_w , temos que a parametrização (5.1) é uma carta principal, isto é, $f = F = 0$. Assim, as linhas principais são $u = \text{constante}$ e $v = \text{constante}$. A configuração completa é obtida por simetria com relação aos planos coordenados.

Queremos uma descrição detalhada das linhas principais no elipsóide

$$\mathbb{E}_0 = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

com $a > b > 0$ e $c > 0$ (permitimos que $a = c$ ou $b = c$).

Lema 5.7. *Em \mathbb{E}_0 temos que:*

- a. *As curvas $\{(x, y, z) : x = 0\} \cap \mathbb{E}_0$ e $\{(x, y, z) : z = 0\} \cap \mathbb{E}_0$ são linhas principais.*
- b. *Há quatro pontos umbílicos tipo espaço*

$$\left(\pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}}, 0, \pm c \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2}} \right).$$

- c. *Os pontos umbílicos são tipo E_1 .*
- d. *A curva $\{(x, y, z) : y = 0\} \cap \mathbb{E}_0$ é união de linhas principais. Além disso, elas são as separatrizes dos pontos umbílicos.*
- e. *O trópico é composto por duas curvas regulares fechadas disjuntas as quais são linhas principais.*
- f. *As linhas principais são globalmente definidas.*

Demonstração. Trabalhamos com diferentes cartas e calculamos os coeficientes da equação (1.11).

- a. Considere a parametrização

$$X(u, v) = (a \cos(u) \sqrt{A_1 \cos^2(v) + \sin^2(v)}, b \sin(u) \sin(v), c \cos(v) \sqrt{B_1 \cos^2(u) + \sin^2(u)}) \quad (5.2)$$

com $(u, v) \in U_1 = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ ou $(u, v) \in U_2 = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$, e onde $A_1 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}$, $B_1 = \frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2}$. Esta parametrização não é regular nos vértices do retângulo U_1 ou U_2 (os pontos umbílicos).

A equação (1.11) é

$$abc(b^2 \cos^2(v) + c^2 \cos^2(v) + a^2 \cos^2(u) - b^2 \cos^2(u) - a^2 - c^2)^4 dudv = 0,$$

e portanto, (u, v) define uma carta principal. As linhas principais são $u = \text{constant}$ e $v = \text{constant}$. Para $(u, v) \in U_1$ (respec. U_2) e $u = \frac{\pi}{2}$ (respec. $v = \frac{\pi}{2}$), temos que $\{(x, y, z) : x = 0\} \cap \mathbb{E}$ (respec. $\{(x, y, z) : z = 0\} \cap \mathbb{E}$) é linha principal.

b. Considere a carta

$$X(u, v) = \left(au, bv, \pm c\sqrt{1 - u^2 - v^2} \right), \quad (5.3)$$

a equação (1.11) é

$$-uv(a^2 + c^2)du^2 + (u^2(a^2 + c^2) - v^2(b^2 + c^2) - a^2 + b^2)dudv + uv(b^2 + c^2)dv^2 = 0. \quad (5.4)$$

Temos que $L_1 = N_1 = 0$ quando $u = 0$ ou $v = 0$. Se $u = 0$, então $M_1 = -v^2(b^2 + c^2) - a^2 + b^2 \neq 0$. Se $v = 0$, temos que $M_1 = u^2(a^2 + c^2) - a^2 + b^2 = 0$ se, e somente se,

$$u_0 = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}}.$$

Assim, avaliando em X temos quatro pontos umbílicos. Além disso,

$$(EG - F^2)(u_0, 0) = \frac{b^4(a^2 + c^2)}{b^2 + c^2} > 0,$$

então os pontos umbílicos estão na parte Riemanniana de E_0 .

c. Fazendo $p = \frac{dv}{du}$ na equação (5.4),

$$F(u, v, p) = -uv(a^2 + c^2) + (u^2(a^2 + c^2) - v^2(b^2 + c^2) - a^2 + b^2)p + uv(b^2 + c^2)p^2 = 0.$$

O campo de Lie-Cartan é $Y = (F_p, pF_p, -(F_x + pF_y))$ na superfície $M = F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}\mathbb{P}^1$. O ponto umbílico $P_1 = \left(a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}}, 0, c\sqrt{\frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2}} \right)$ tem coordenadas $u_0 = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}}$ e $v = 0$. Agora, temos que

$$Y(u_0, 0, p) = \left(0, 0, -\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}}p(b^2p^2 + c^2p^2 + a^2 + c^2) \right) = (0, 0, 0)$$

se, e somente se, $p = 0$.

Além disso, os valores próprios de $DY(u_0, 0, 0)$ são

$$\lambda_1 = 2\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}}(a^2 + c^2),$$

$$\lambda_2 = -2\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}}(a^2 + c^2).$$

Portanto, o ponto P_1 é tipo E_1 (veja [15]). Para os outros pontos umbílicos a análise é igual.

- d. Com a parametrização (5.2), as curvas $(0, v), (\pi, v), (u, 0), (u, \pi) \in U_2$ são linhas principais. Assim, $\{(x, y, z) : y = 0\} \cap \mathbb{E}_0$ é união de linhas principais e pontos umbílicos. Como os pontos umbílicos são tipo E_1 , obtemos o resultado.
- e. Utilizando a carta (5.2) com $(u, v) \in D_1$, temos que

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= ((b^2 + c^2) \cos^2(v) - c^2) ((a^2 - b^2) \cos^2(u) - a^2) \\ &\quad ((a^2 - b^2) \cos^2(u) + (b^2 + c^2) \cos^2(v) - a^2 - c^2)^2 = 0 \end{aligned}$$

se, e somente se, $v_1 = \arccos\left(\frac{c}{\sqrt{c^2 + b^2}}\right)$ ou $v_2 = \arccos\left(-\frac{c}{\sqrt{c^2 + b^2}}\right) = \pi - v_1$.

O trópico é união de duas curvas fechadas $c_1(u) = X(u, v_1)$ e $c_2(u) = X(u, v_2)$. Como $v = \text{constante}$ e X é carta principal, c_1 e c_2 são linhas principais. As curvas c_1 e c_2 podem ser também obtidas na carta (5.1) com $u = 0$.

- f. Como a parametrização (5.2) é definida globalmente em \mathbb{E}_0 e é uma carta principal, temos $L_1 = N_1 = 0$ e o LPL é vazio. □

Do Lema 5.7 e Teorema 5.6, a configuração principal no elipsóide \mathbb{E}_0 é dada na Figura 5.3. Todas as linhas principais são fechadas, exceto as quatro separatrizes entre os pontos umbílicos.

Observação 5.8. Fazendo um redimensionamento das coordenadas $u = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2}}x$ e $v = y$, a equação (5.4) é

$$-xydx^2 + (x^2 - y^2 - \lambda^2) dydx + xydy^2 = 0 \quad (5.5)$$

com $\lambda^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}$. Os eixos coordenados, a família de elipses

$$u(t) = R \cos(t), v(t) = r \sin(t), R^2 = r^2 + \lambda^2$$

e a família de hipérbolas

$$u(t) = R \cosh(t), v(t) = r \sinh(t), R^2 - r^2 = \lambda^2$$

são soluções da equação diferencial 5.5 (similar no caso do produto escalar euclidiano, veja [15]).

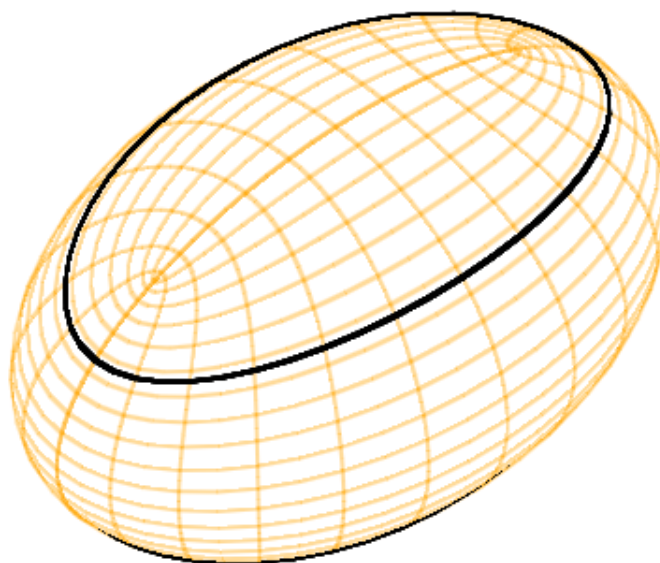


Figura 5.3: *Linhas principais no Elipsóide.*

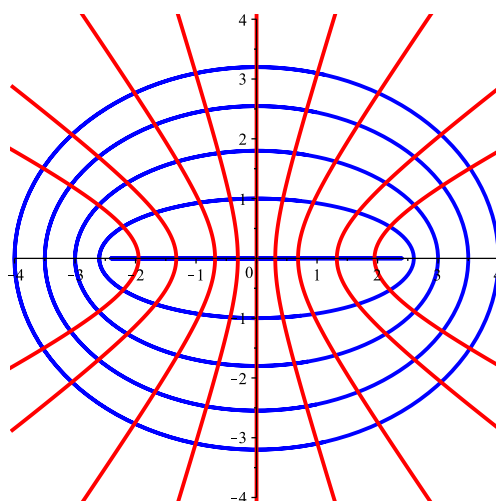


Figura 5.4: *Família de quadráticas ortogonal e confocal.*

Observação 5.9. Quando $a = c \neq b$ ou $b = c \neq a$, temos quatro pontos umbílicos tipo E_1 , enquanto com o produto escalar euclidiano somente temos dois pontos tipo centro (veja Figura 5.5).

Observação 5.10. Quando $a = b$ e $c > 0$ (elipsóide ou esfera), a parametrização (5.2) é simplificada

$$X(u, v) = (a \operatorname{sen}(v) \cos(u), a \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u), c \cos(v)).$$

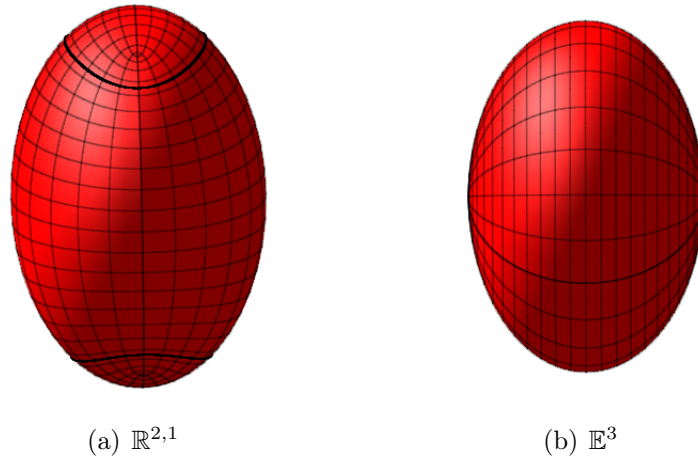


Figura 5.5: Linhas de curvatura principal do elipsóide $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

A equação das linhas principais é

$$a^2c(a^2 \cos^2(v) + c^2 \cos^2(v) - a^2 - c^2)^4 dvdu = 0,$$

assim, as linhas principais são $u = \text{constante}$ e $v = \text{constante}$. Temos somente dois pontos umbílicos $(0, 0, \pm c)$ tipo centro na parte Riemanniana de E_0 (veja Exemplo 5.2).

5.5 Hiperbolóide de Duas Folhas.

Considere a equação

$$r \frac{x^2}{a^2} + s \frac{y^2}{b^2} + t \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

onde $r, s, t \in \{-1, 1\}$. Vamos chamar de hiperbolóide horizontal (respec. vertical) de duas folhas, denotado por \mathbb{H}_{2h} (respec. \mathbb{H}_{2v}), se $r = \pm 1$, $s = \mp 1$ e $t = -1$ (respec. $r = s = -1$ e $t = 1$). Também, vamos chamar de hiperbolóide horizontal (respec. vertical) de uma folha, denotado por \mathbb{H}_{1h} (respec. \mathbb{H}_{1v}), se $r = \pm 1$, $s = \mp 1$ e $t = 1$ (respec. $r = s = 1$ e $t = -1$).

5.5.1 Hiperbolóide horizontal de duas folhas.

Considere as superfícies

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_u &= \{(x, y, z) : -\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 - u} - \frac{z^2}{c^2 - u} = 1\}, \\ \mathbb{G}_v &= \{(x, y, z) : -\frac{x^2}{a^2 + v} + \frac{y^2}{b^2 - v} - \frac{z^2}{c^2 - v} = 1\}, \\ \mathbb{H}_w &= \{(x, y, z) : -\frac{x^2}{a^2 + w} + \frac{y^2}{b^2 - w} - \frac{z^2}{c^2 - w} = 1\}.\end{aligned}$$

Sejam

$$U_1 = \{(u, v, w) \in (-a^2, c^2) \times (-\infty, -a^2) \times (-a^2, c^2) : b > c, u \neq w\},$$

$$U_2 = \{(u, v, w) \in (c^2, \infty) \times (-\infty, -a^2) \times (-a^2, b^2) : b < c\}.$$

Corolário 5.11. *As superfícies \mathbb{F}_u , \mathbb{G}_v e \mathbb{H}_w formam um sistema triplamente ortogonal para $(u, v, w) \in U_1 \cup U_2$.*

Demonstração. Resolvendo para x, y, z como no Teorema 5.6, temos que

$$\begin{aligned}x(u, v, w) &= \pm \sqrt{-\frac{(a^2 + u)(a^2 + v)(a^2 + w)}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}}, \\ y(u, v, w) &= \pm \sqrt{\frac{(b^2 - u)(b^2 - v)(b^2 - w)}{(a^2 + b^2)(b^2 - c^2)}}, \\ z(u, v, w) &= \pm \sqrt{\frac{(c^2 - u)(c^2 - v)(c^2 - w)}{(a^2 + c^2)(b^2 - c^2)}}.\end{aligned}$$

Assim,

$$X(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \quad (5.6)$$

satisfaz $\langle X_u, X_v \rangle = \langle X_u, X_w \rangle = \langle X_v, X_w \rangle = 0$ e

$$\det(dX) = \frac{(u - v)(u - w)(v - w)}{8x(u, v, w)y(u, v, w)z(u, v, w)(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)(b^2 - c^2)} \neq 0.$$

□

Para $(u, v, w) \in U_1$, F_u , G_v e H_w são as superfícies H_{2h} , H_{1v} e H_{2h} , respectivamente, e para $(u, v, w) \in U_2$, F_u , G_v e H_w são as superfícies H_{2v} , H_{1v} e H_{2h} , respectivamente (veja Figura 5.6). Como F_u, G_v, H_w formam um sistema triplamente ortogonal, pelo Teorema 5.5 estas superfícies se intersectam em suas

linhas principais.

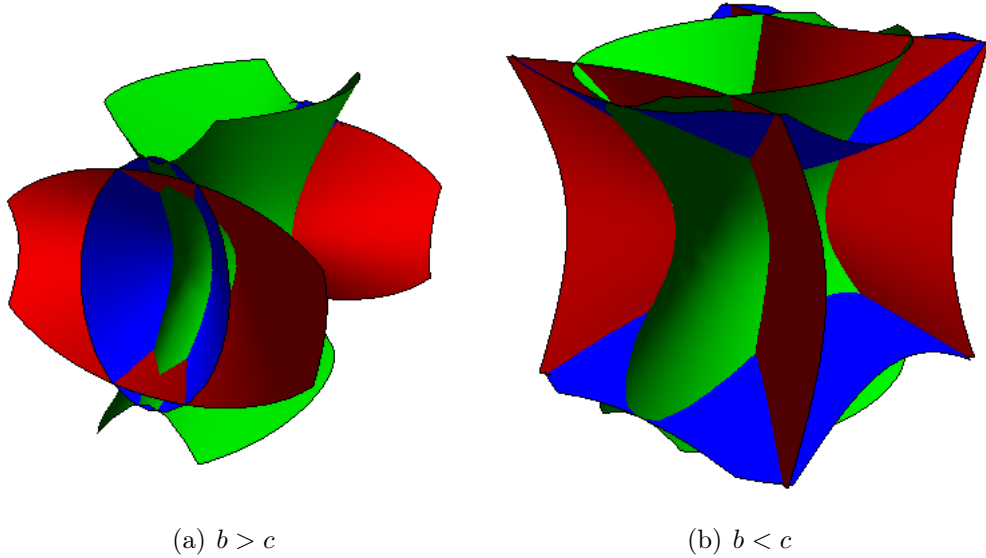


Figura 5.6: Sistema triplamente ortogonal para o hiperbolóide horizontal de duas folhas.

Agora, fixamos $\mathbb{H}_{2h}^{abc} = \mathbb{H}_0$. Temos que as linhas principais em \mathbb{H}_{2h}^{abc} são as curvas de interseções com as famílias \mathbb{H}_{2h} e \mathbb{H}_{1v} para $b > c$, e com \mathbb{H}_{2v} e \mathbb{H}_{1v} para $b < c$. Em cada octante, temos que para \mathbb{H}_{2h}^{abc} a parametrização (5.6) é uma carta principal. A configuração principal completa em \mathbb{H}_{2h}^{abc} é obtida pela simetria com relação aos planos coordenados.

Lema 5.12. Dado um hiperbolóide horizontal de duas folhas H_{2h}^{abc} temos que:

a. para $b > c$

i. há quatro pontos umbílicos tipo E_1

$$\left(0, \pm b \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{b^2 - c^2}}, \pm c \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{b^2 - c^2}} \right).$$

ii. as linhas principais são globalmente definidas.

iii. o trópico é composto por quatro curvas abertas.

b. para $b < c$

i. não temos pontos umbílicos.

ii. a superfície é Lorentziana.

iii. as linhas principais são globalmente definidas.

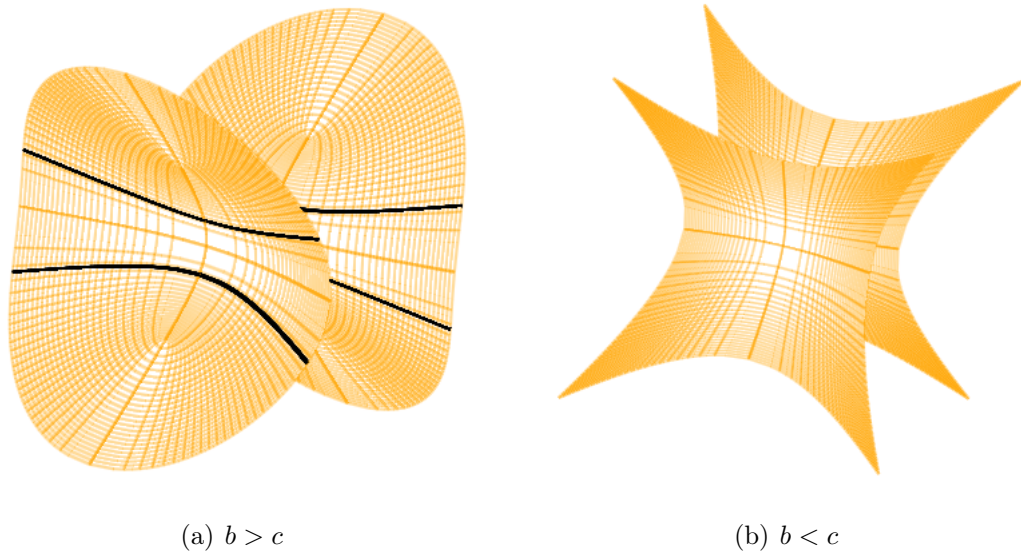


Figura 5.7: *Linhas principais no hiperbolóide horizontal de duas folhas.*

Observação 5.13. Para o hiperbolóide horizontal de duas folhas ($a \neq c$)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

a análise é similar.

Observação 5.14. Quando $b = c$ ($a = b = c$ são permitidos), a parametrização

$$X(u, v) = \left(av, \pm b\sqrt{v^2 + 1} \cosh(u), b\sqrt{v^2 + 1} \sinh(u) \right)$$

é uma carta principal. Não temos pontos umbílicos e a superfície é Lorentziana.

5.5.2 Hiperbolóide vertical de duas folhas.

Definimos as superfícies

$$\mathbb{F}_u = \left\{ (x, y, z) : -\frac{x^2}{a^2 + u} - \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1 \right\},$$

$$\mathbb{G}_v = \left\{ (x, y, z) : -\frac{x^2}{a^2 + v} - \frac{y^2}{b^2 + v} + \frac{z^2}{c^2 + v} = 1 \right\},$$

$$\mathbb{H}_w = \left\{ (x, y, z) : -\frac{x^2}{a^2 + w} - \frac{y^2}{b^2 + w} + \frac{z^2}{c^2 + w} = 1 \right\},$$

com $a > b$ (quando $a < b$ é similar) e sejam

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(u, v, w) \in (-a^2, -b^2) \times (-\infty, -a^2) \times (-c^2, \infty) : a > b > c\}, \\ U_2 &= \{(u, v, w) \in (-b^2, \infty) \times (-\infty, -a^2) \times (-b^2, \infty) : a > c > b, u \neq w\}, \\ U_3 &= \{(u, v, w) \in (-b^2, \infty) \times (-a^2, -b^2) \times (-b^2, \infty) : a > b > c, u \neq w\}. \end{aligned}$$

Corolário 5.15. *As superfícies \mathbb{F}_u , \mathbb{G}_v e \mathbb{H}_w formam um sistema triplamente ortogonal para $(u, v, w) \in U_1 \cup U_2 \cup U_3$.*

Demonstração. Resolvendo para x, y, z como no Teorema 5.6, temos que

$$\begin{aligned} x(u, v, w) &= \pm \sqrt{-\frac{(a^2 + u)(a^2 + v)(a^2 + w)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}, \\ y(u, v, w) &= \pm \sqrt{\frac{(b^2 + u)(b^2 + v)(b^2 + w)}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}}, \\ z(u, v, w) &= \pm \sqrt{\frac{(c^2 + u)(c^2 + v)(c^2 + w)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}}. \end{aligned}$$

Então

$$X(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \quad (5.7)$$

satisfaz $\langle X_u, X_v \rangle = \langle X_u, X_w \rangle = \langle X_v, X_w \rangle = 0$ e

$$\det(dX) = -\frac{(u - v)(u - w)(v - w)}{8x(u, v, w)y(u, v, w)z(u, v, w)(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \neq 0.$$

□

As famílias ortogonais são dadas na tabela 5.1. Como F_u, G_v, H_w formam um

	F_u	G_v	H_w
$(u, v, w) \in U_1$	H_{2h}	H_{1v}	H_{2v}
$(u, v, w) \in U_2$	H_{2v}	H_{1v}	H_{2v}
$(u, v, w) \in U_3$	H_{2v}	H_{1h}	H_{2v}

Tabela 5.1: Famílias ortogonais para H_{2v} .

sistema triplamente ortogonal, pelo Teorema 5.5 as superfícies se intersectam nas linhas principais.

Agora, fixamos $\mathbb{H}_{2v}^{abc} = \mathbb{H}_0$. Temos que as linhas principais em \mathbb{H}_{2v}^{abc} são as curvas interseções com as superfícies da tabela 5.1.

Em cada octante, para \mathbb{H}_{2v}^{abc} a parametrização (5.7) é uma carta principal. A configuração principal completa de \mathbb{H}_{2v}^{abc} é obtida por simetria com relação aos planos coordenados.

Lema 5.16. *Dado o hiperbolóide horizontal de duas folhas $H_{2v} = H_0$, temos que:*

a. para $a > b > c$

i. há quatro pontos umbílicos tipo E_1

$$\left(0, \pm b \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}, \pm c \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}} \right).$$

ii. a superfície é Riemanniana.

b. para $a > c > b$

i. não temos pontos umbílicos.

ii. o trópico é composto por quatro curvas abertas.

iii. as linhas principais são globalmente definidas.

c. para $c > a > b$

i. há quatro pontos umbílicos tipo E_1

$$\left(\pm a \sqrt{-\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, 0, \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \right).$$

ii. o trópico é composto por duas curvas fechadas.

iii. as linhas principais são globalmente definidas.

Observação 5.17. Quando $b = c$, a parametrização

$$X(u, v) = \left(av, \pm b \sqrt{v^2 + 1} \sinh(u), \pm b \sqrt{v^2 + 1} \cosh(u) \right)$$

é uma carta principal. Não temos pontos umbílicos e a superfície é Riemanniana.

Observação 5.18. Quando $a = c$, a parametrização

$$X(u, v) = \left(\pm a \sqrt{v^2 + 1} \sinh(u), bv, \pm a \sqrt{v^2 + 1} \cosh(u) \right)$$

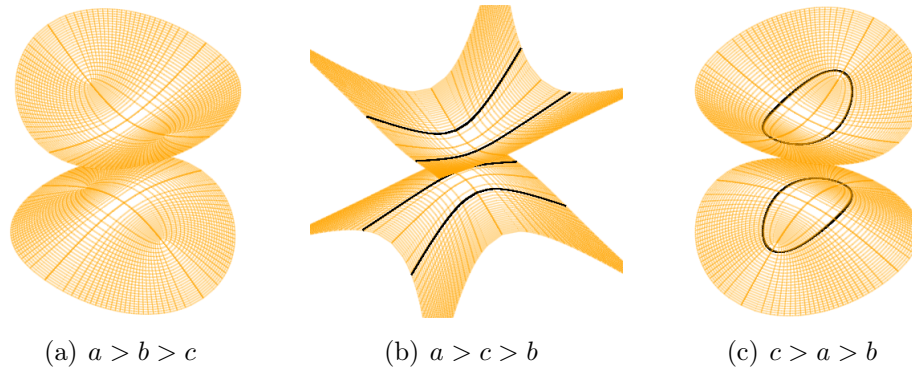


Figura 5.8: Linhas principais no hiperbolóide vertical de duas folhas.

é uma carta principal. Não temos pontos umbílicos e o trópico é composto por quatro curvas abertas.

Observação 5.19. Quando $a = b = c$, temos uma superfície totalmente umbílica. É a parte Lorentziana da “esfera de raio a ” no espaço de Minkowski, isto é, é o conjunto $\{v \in \mathbb{R}^{2,1} : \langle v, v \rangle = -a^2\}$. Lembre-se, a esfera S^2 com o produto escalar euclidiano é uma superfície totalmente umbílica.

5.6 Hiperbolóide de Uma Folha.

5.6.1 Hiperbolóide horizontal de uma folha.

Considere as superfícies

$$\mathbb{F}_u = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2 - u} - \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1\},$$

$$\mathbb{G}_v = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2 - v} - \frac{y^2}{b^2 + v} + \frac{z^2}{c^2 + v} = 1\},$$

$$\mathbb{H}_w = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2 - w} - \frac{y^2}{b^2 + w} + \frac{z^2}{c^2 + w} = 1\},$$

onde $a > b$ (para $b < a$ é similar) e $b \neq c$, e sejam

$$U_1 = \{(u, v, w) \in (-c^2, a^2) \times (-\infty, -b^2) \times (-c^2, a^2) : b > c, w \neq u\}$$

$$U_2 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (-b^2, a^2) : c > b, u \neq v, v \neq w, u \neq w\}.$$

Corolário 5.20. As superfícies \mathbb{F}_u , \mathbb{G}_v e \mathbb{H}_w formam um sistema triplamente ortogonal para $(u, v, w) \in U_1 \cup U_2$.

Demonstração. Resolvendo para x, y, z como no Teorema 5.6, temos

$$\begin{aligned} x(u, v, w) &= \pm \sqrt{\frac{(a^2 - u)(a^2 - v)(a^2 - w)}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}}, \\ y(u, v, w) &= \pm \sqrt{\frac{-(b^2 + u)(b^2 + v)(b^2 + w)}{(a^2 + b^2)(b^2 - c^2)}}, \\ z(u, v, w) &= \pm \sqrt{-\frac{(c^2 + u)(c^2 + v)(c^2 + w)}{(a^2 + c^2)(b^2 - c^2)}}. \end{aligned}$$

A carta

$$X(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \quad (5.8)$$

satisfaz $\langle X_u, X_v \rangle = \langle X_u, X_w \rangle = \langle X_v, X_w \rangle = 0$ e

$$\det(dX) = -\frac{(u - v)(u - w)(v - w)}{8x(u, v, w)y(u, v, w)z(u, v, w)(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)(b^2 - c^2)} \neq 0.$$

□

As famílias ortogonais são as seguintes

- i. para $(u, v, w) \in U_1$, as superfícies F_u, G_v e H_w são H_{1h}, H_{1v} e H_{1h} , respectivamente.
- ii. para $(u, v, w) \in U_2$, temos

No.		F_u	G_v	H_w
1	$(u, v) \in (-\infty, -c^2) \times (-\infty, -c^2)$	H_{1v}	H_{1v}	H_{1h}
2	$(u, v) \in (-c^2, -b^2) \times (-c^2, -b^2)$	E	E	H_{1h}
3	$(u, v) \in (-b^2, a^2) \times (-b^2, a^2)$	H_{1h}	H_{1h}	H_{1h}
4	$(u, v) \in (a^2, \infty) \times (a^2, \infty)$	H_{2v}	H_{2v}	H_{1h}

Tabela 5.2: Famílias ortogonais para H_{1h} quando $b < c$.

Fixamos $\mathbb{H}_{1h}^{abc} = \mathbb{H}_0$, isto é, o hiperbolóide horizontal de uma folha. Assim, as linhas principais são as curvas de interseção com as superfícies da tabela 5.2. Em cada octante, para \mathbb{H}_{1h}^{abc} a parametrização (5.8) é uma carta principal. A configuração principal completa em \mathbb{H}_{1h}^{abc} é obtida pela simetria em relação aos planos coordenados.

Lema 5.21. *Dado um hiperbolóide horizontal de uma folha H_{1h}^{abc} , temos*

a. para $b > c$

i. não temos pontos umbílicos.

- ii. as linhas principais são globalmente definidas.
 - iii. o trópico é composto por quatro curvas abertas.
- b. para $b < c$
- i. há 12 pontos umbílicos tipo tempo degenerados (fora dos T_i).
 - ii. o trópico é composto por duas curvas fechadas.
 - iii. o LPL é uma curva tipo luz a qual é regular exceto em 12 pontos os quais são selas tipo Morse.
 - iv o LPL e o trópico tem oito tangências.

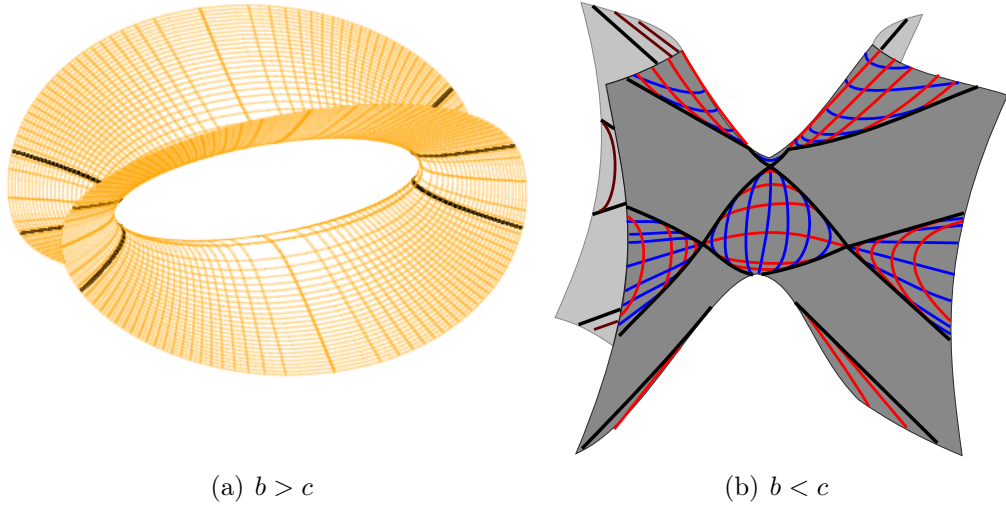


Figura 5.9: Linhas principais no hiperbolóide horizontal de uma folha.

Na Figura 5.10 mostramos o LPL e trópico para \mathbb{H}_{1h}^{abc} com $b < c$ na carta $X(u, v) = (a\sqrt{v^2 + 1} \cos(u), bv, c\sqrt{v^2 + 1} \sin(u))$ com $u \in [0, 2\pi]$ e $v \in \mathbb{R}$. Em cada região onde as linhas principais estão definidas, as superfícies que intersectam \mathbb{H}_{1h}^{abc} para obter as linhas principais são indicadas com o número da tabela 5.2.

Observação 5.22. Quando $b = c$, a superfície tem dois pontos umbílicos tipo tempo degenerados e as linhas principais são globalmente definidas. O trópico é composto por quatro curvas abertas.

5.6.2 Hiperbolóide vertical de uma folha.

Considere as superfícies

$$\mathbb{F}_u = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2 - u} + \frac{y^2}{b^2 - u} - \frac{z^2}{c^2 - u} = 1 \right\},$$

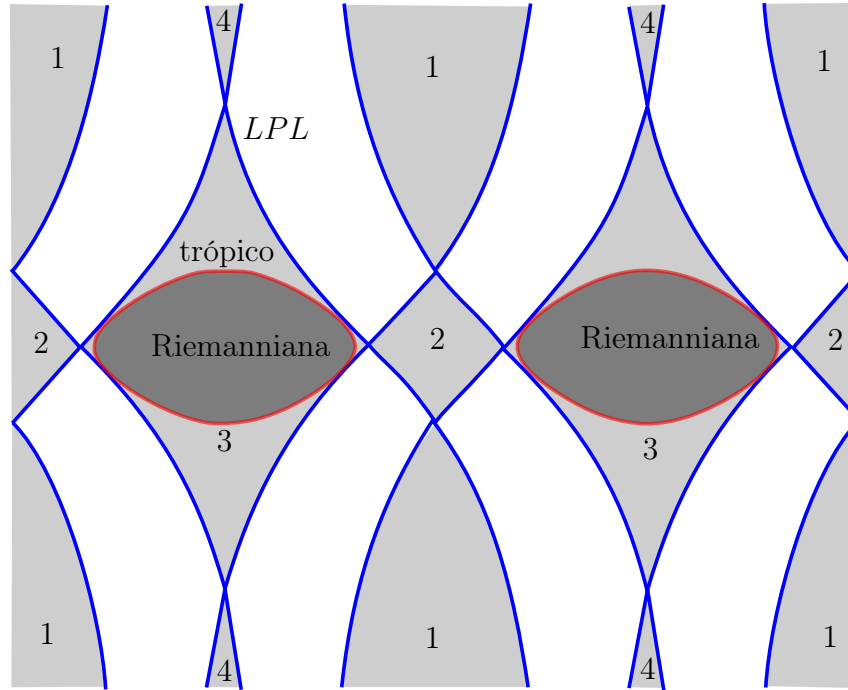


Figura 5.10: Trópico e LPL de \mathbb{H}_{1h}^{abc} quando $b < c$.

$$\mathbb{G}_v = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2 - v} + \frac{y^2}{b^2 - v} - \frac{z^2}{c^2 - v} = 1\},$$

$$\mathbb{H}_w = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2 - w} + \frac{y^2}{b^2 - w} - \frac{z^2}{c^2 - w} = 1\},$$

com $a > b$ (para $b > a$ é similar) e sejam

$$U_1 = \{(u, v, w) \in (b^2, a^2) \times (-\infty, c^2) \times (-\infty, c^2) : a > b > c, w \neq v\},$$

$$U_2 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (-\infty, b^2) : a > c > b, u \neq v, v \neq w, u \neq w\},$$

$$U_3 = \{(u, v, w) \in (c^2, \infty) \times (b^2, a^2) \times (-\infty, b^2) : c > a > b\}.$$

Corolário 5.23. As superfícies \mathbb{F}_u , \mathbb{G}_v e \mathbb{H}_w formam um sistema triplamente ortogonal para $(u, v, w) \in U_1 \cup U_2 \cup U_3$.

Demonstração. Resolvendo para x, y, z como no Teorema 5.6, temos

$$\begin{aligned} x(u, v, w) &= \pm \sqrt{\frac{(a^2 - u)(a^2 - v)(a^2 - w)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}, \\ y(u, v, w) &= \pm \sqrt{\frac{-(b^2 - u)(b^2 - v)(b^2 - w)}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}}, \\ z(u, v, w) &= \pm \sqrt{-\frac{(c^2 - u)(c^2 - v)(c^2 - w)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}}. \end{aligned}$$

A carta

$$X(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \quad (5.9)$$

satisfaz $\langle X_u, X_v \rangle = \langle X_u, X_w \rangle = \langle X_v, X_w \rangle = 0$ e

$$\det(dX) = \frac{(u-v)(u-w)(v-w)}{8x(u, v, w)y(u, v, w)z(u, v, w)(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \neq 0.$$

□

As famílias ortogonais são as seguintes

- i. Para $(u, v, w) \in U_1$, as superfícies F_u , G_v e H_w são H_{1h} , H_{1v} e H_{1v} , respectivamente.
- ii. Para $(u, v, w) \in U_2$, temos

No.		F_u	G_v	H_w
1	$(u, v) \in (-\infty, b^2) \times (-\infty, b^2)$	H_{1v}	H_{1v}	H_{1v}
2	$(u, v) \in (b^2, c^2) \times (b^2, c^2)$	H_{2h}	H_{2h}	H_{1v}
3	$(u, v) \in (c^2, a^2) \times (c^2, a^2)$	H_{1h}	H_{1h}	H_{1v}
4	$(u, v) \in (a^2, \infty) \times (a^2, \infty)$	H_{2v}	H_{2v}	H_{1v}

Tabela 5.3: Famílias ortogonais à H_{1v} quando $a > c > b$.

- iii. Para $(u, v, w) \in U_3$, as superfícies F_u , G_v e H_w são H_{2v} , H_{2h} e H_{1v} , respectivamente.

Fixamos $\mathbb{H}_{1v}^{abc} = \mathbb{H}_0$. As linhas principais são as curvas de interseção com as superfícies da tabela 5.3 em cada caso.

Em cada octante, para \mathbb{H}_{1v}^{abc} a parametrização (5.9) é uma carta principal, as linhas principais são $u = \text{constante}$ e $v = \text{constante}$. A configuração principal completa em \mathbb{H}_{1v}^{abc} é obtida pela simetria em relação aos planos coordenados.

Lema 5.24. *Dado o hiperbolóide vertical de uma folha H_{1v}^{abc} , temos*

- a. Para $a > b > c$
 - i. não temos pontos umbílicos.
 - ii. as linhas principais são definidas globalmente.
 - iii. o trópico é composto por duas curvas fechadas.
- b. Para $a > c > b$

- i. tem 12 pontos umbílicos tipo tempo degenerados (fora dos T_i).
- ii. o trópico é composto por quatro curvas abertas.
- iii. o LPL é uma curva tipo luz a qual é regular exceto em 12 pontos os quais são selas tipo Morse.
- iv. o LPL e trópico tem oito pontos de tangência.

c. Para $c > a > b$

- i. não há pontos umbílicos.
- ii. a superfície é Lorentziana.
- iii. as linhas principais são globalmente definidas.

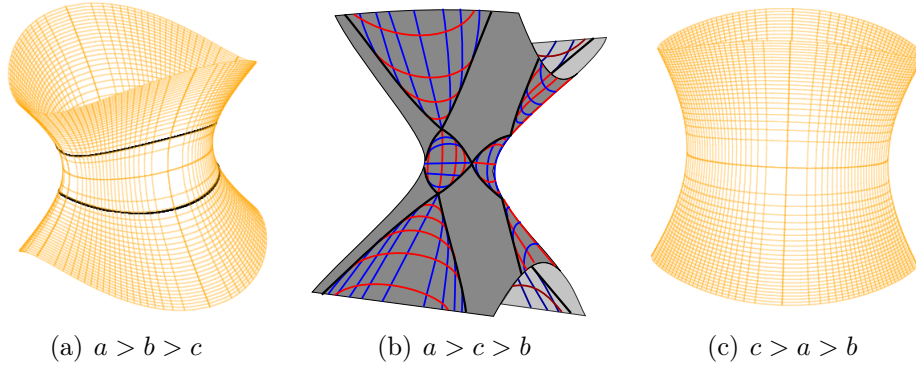


Figura 5.11: Linhas principais no hiperbolóide vertical de uma folha.

Na Figura 5.12 mostramos o LPL e trópico para \mathbb{H}_{1v}^{abc} com $a > c > b$ na carta $X(u, v) = (a\sqrt{v^2 + 1} \cos(u), b\sqrt{v^2 + 1} \sin(u), cv)$ com $u \in [0, 2\pi]$ e $v \in \mathbb{R}$. Em cada região onde as linhas principais estão definidas, as superfícies que intersectam \mathbb{H}_{1v}^{abc} para obter as linhas principais são indicadas com o número da tabela 5.3.

Observação 5.25. Quando $a > b = c$ a superfície tem dois pontos umbílicos tipo tempo degenerados $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (\pi, 0)$, e as linhas principais são globalmente definidas. O trópico é composto por quatro curvas abertas.

Observação 5.26. Quando $a = c > b$ a superfície tem dois pontos umbílicos tipo tempo degenerados $P_1 = (\frac{\pi}{2}, 0)$ e $P_2 = (\frac{3\pi}{2}, 0)$, e as linhas principais são globalmente definidas. A superfície é Lorentziana.

Observação 5.27. Quando $a = b = c$ a superfície é Lorentziana e é globalmente umbílica.

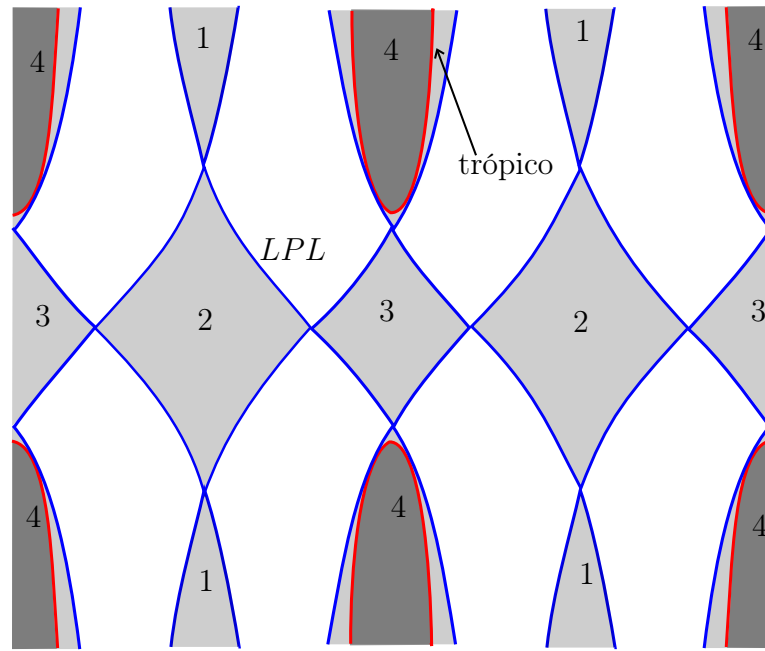


Figura 5.12: Trópico e LPL de \mathbb{H}_{1v}^{abc} quando $a > c > b$.

5.7 Cone

5.7.1 Cone horizontal.

Considere o cone C_h e a parametrização

$$X(u, v) = (av \cos(u), bv, cv \sin(u)) \quad (5.10)$$

com $u \in [0, 2\pi]$ e $v \in \mathbb{R}$ (para o cone $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ é similar).

Lema 5.28. *As linhas principais em C_h são definidas globalmente e não tem pontos umbílicos,*

- para $b < c$ a superfície é Lorentziana e o LPL é composto por quatro curvas ($X(u_1, v)$ com u_1 solução de $(a^2 + c^2) \cos^2(u) + b^2 - c^2 = 0$),
- para $b = c$ (inclusive $a = b = c$), C_h é uma superfície Lorentziana com duas curvas degeneradas $u = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ (sendo trópico e LPL), e
- para $b > c$ o trópico é composto por quatro curvas abertas ($X(u_1, v)$ com u_1 solução de $(a^2 + c^2)b^2 \cos^2(u) + a^2(c^2 - b^2) = 0$).

Além disso, com a carta (5.10) as linhas principais são as curvas $X(u_0, v)$ (abertas)

e $X(u, v_1)$ (fechada) com

$$v_1 = \frac{v_0 \sqrt{a^2 + b^2}}{2\sqrt{|(a^2 + c^2) \cos^2(u) + b^2 - c^2|}}.$$

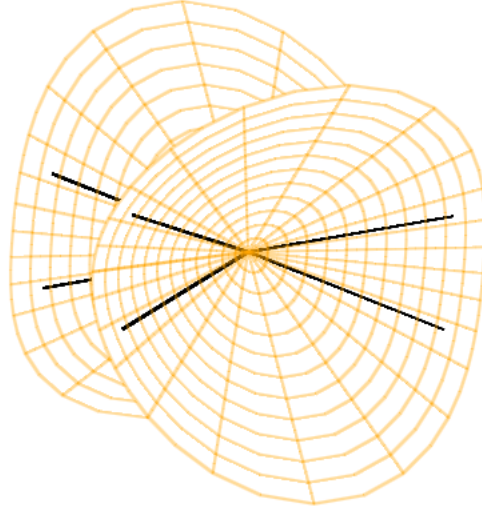


Figura 5.13: Linhas principais no cone horizontal com $b > c$.

5.7.2 Cone vertical.

Considere o cone C_v

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

e a parametrização

$$X(u, v) = (av \cos(u), bv \sin(u), cv) \quad (5.11)$$

com $u \in [0, 2\pi]$, $v \in \mathbb{R}$ e $a > b$ ($a < b$ é similar).

Lema 5.29. *As linhas principais em C_v são globalmente definidas e não temos pontos umbílicos,*

- para $a > b > c$ a superfície é Riemanniana,
- para $a > c > b$, o trópico é composto por quatro curvas abertas ($X(u_1, v)$ com u_1 solução de $a^2 b^2 - c^2(\cos^2(u)b^2 + \sin^2(u)a^2) = 0$) e $LPL = 0$ quando $(a^2 - b^2) \cos^2(u_0) + b^2 - c^2 = 0$ ($u_0 = \text{constante}$ é solução dupla),
- para $c > a > b$ a superfície é Lorentziana.

Além disso, na carta (5.11) e $a \neq c$ as linhas principais são as curvas $X(u_0, v)$ (aberta) e $X(u, v_1)$ (fechada) com

$$v_1 = \frac{v_0 \sqrt{|a^2 - c^2|}}{\sqrt{|(a^2 - b^2) \cos^2(u) + b^2 - c^2|}}.$$

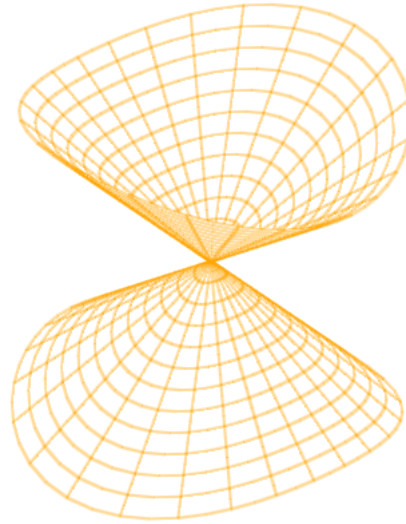


Figura 5.14: Linhas principais no cone vertical com $c > a > b$.

- Observação 5.30.**
1. Quando $a = b = c$ é o **cone luz** que é totalmente umbílico.
 2. Se $a = c$ e $a > b$ (respec. $a < b$), C_v é Lorentziana (respec. Riemanniana) com duas curvas degeneradas onde $u = 0, \pi$ (estas curvas são trópico e *LPL*). As linhas principais são $u = \text{constante}$ e $X(u, v_2)$ com $v_2 = \frac{v_0}{|\sin(u)|}$.
 3. Se $a = b$ e $a > c$ (respec. $a < c$) o cone é uma superfície Riemanniana (respec. Lorentziana).
 4. Se $b = c$ e $a > b$ (respec. $a < b$), C_v é Riemanniana (respec. Lorentziana) com duas curvas degeneradas (estas curvas são trópico e *LPL*), quando $u = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Conclusão

Neste trabalho analisamos o comportamento das folheações das linhas de curvatura principal e de geodésicas nulas em superfícies compactas imersas no espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$. O mesmo foi inspirado nos trabalhos desenvolvidos por C. Gutierrez e Jorge Sotomayor, [29], [30]. Nestes trabalhos os autores introduziram ideias e métodos da teoria qualitativa de sistemas dinâmicos no contexto de linhas principais em superfícies. Os referidos autores introduziram o conceito de estabilidade estrutural da configuração principal e demonstraram que o conjunto das imersões principalmente estáveis é aberto na topologia C^3 e denso na topologia C^2 . Veja também [28].

As contribuições obtidas neste trabalho foram:

No primeiro capítulo fizemos um resumo das propriedades básicas do espaço $\mathbb{R}^{2,1}$ e da geometria das curvas e superfícies. Mostramos propriedades importantes do trópico e do LPL . O fato que quando o trópico é uma curva regular, a mesma é solução da equação de linhas principais (regularizada) foi relevante para os resultados posteriores.

No segundo capítulo mostramos como se comportam localmente as folheações $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ e $\mathcal{F}_{2,\alpha}$ na vizinhança das singularidades e ciclos principais. Ressaltamos os resultados referentes às parametrizações e expressões das aplicações de Poincaré dos ciclos principais que são transversais ao trópico e os que estão nele contido. Demos as condições suficientes para que a configuração principal de uma imersão seja estruturalmente estável. As condições necessárias estão relacionadas a eliminação de recorrências não triviais na topologia C^3 .

No terceiro capítulo obtivemos um teorema de genericidade para a configuração principal definida pelas folheações $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ e $\mathcal{F}_{2,\alpha}$ na família de imersões estritamente convexas e compactas.

No quarto capítulo fizemos um análise das folheações definidas pelas geodésicas nulas $\tilde{\mathcal{F}}_{1,\alpha}$ e $\tilde{\mathcal{F}}_{2,\alpha}$. Descrevemos o comportamento local dessas folheações na vizinhança das singularidades e ciclos geodésicos nulos. Mostramos as condições suficientes para que a configuração definida pelas geodésicas nulas de uma imersão seja estruturalmente estável.

No quinto capítulo, mostramos alguns exemplos de superfícies onde é possível fazer a descrição global da configuração principal como o toro, o elipsóide, a esfera S^2 , os hiperbóloides de uma e duas folhas (verticais e horizontais) e o cone.

Algumas linhas de pesquisa que a partir desta tese se abrem são: análise das linhas de curvaturas principais em superfícies compactas e não compactas e hipersuperfícies regulares e singulares em $\mathbb{R}^{3,1}$ e $\mathbb{R}^{2,2}$, onde $\mathbb{R}^{3,1}$ e $\mathbb{R}^{2,2}$ denotam o espaço vetorial \mathbb{R}^4 com os produtos escalares $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 - u_4v_4$ e $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3 - u_4v_4$, $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ e $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, respectivamente. Especificamente, destacamos a descrição das linhas de curvatura na vizinhança dos pontos singulares genéricos (guarda-chuvas de Whitney) e na vizinhança dos fins algébricos. Resultados nesta direção foram obtidos por exemplo em [17], [47] e [51].

Outra questão é sobre a possibilidade de estender a densidade na topologia C^2 estabelecida no Teorema B para a topologia C^3 . Questões desta natureza estão relacionadas ao Problema do “Closing-Lemma”.

Finalmente mencionamos a Conjectura de Carathéodory e problemas relacionados aos pontos umbílicos no contexto de superfícies no espaço de Minkowski. Para um resultado recente veja [50] em que é demonstrado que um ovalóide (superfície compacta, convexa e de classe C^3) possui pelo menos dois pontos umbílicos.

Referências Bibliográficas

- [1] ARNOLD, V. **Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations**. Springer-Verlag, 1988.
- [2] BASTO-GONÇALVES, J.; REIS, H. **The geometry of 2×2 systems of conservation laws**. *Acta Applicandae Mathematicae*, 88:269–329, 2005.
- [3] BRUCE, J. W.; FIDAL, D. L. **On binary differential equations and umbilics**. *Royal Society of Edinburgh*, 111:147–168, 1989.
- [4] BRUCE, J. W.; TARI, F. **On binary differential equations**. *Nonlinearity*, 8:255–271, 1995.
- [5] CARATHÉODORY, C. **Einfach bemrkungen uber nabelpunktscurven**. *Lecture at Breslau, Complete Works*, 5:26–30, 1935.
- [6] CARRIÈRE, Y.; ROZOY, L. **Complétude des Métriques Lorentziennes de \mathbb{T}^2 et Difféomorphismes du Cercle**. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, 25(2):223–235, 1994.
- [7] CAYLEY, A. **On differential equations and umbilici**. *Philosophical Magazine*, 26:373–379, 1863.
- [8] DARBOUX, J. G. **Sur la forme des lignes de courbure dans la voisinage d'un ombilic**. *Leçons sur la Théorie des Surfaces, vol. IV, Note 7, Gauthier Villars, Paris*, 1896.
- [9] DAVYDOV, A. A. **Qualitative Theory of Control Systems**. American Mathematical Society, 1994.
- [10] DO CARMO, M. **Differential Geometry of Curves and Surfaces**. Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1976.
- [11] DUPIN, C. **Développements de Géométrie**. Paris, Courcier, 1813.
- [12] FONTENELE, F.; XAVIER, F. **The index of isolated umbilics on surfaces of non-positive curvature**. *Enseign. Math.*, 61(1-2):139–149, 2015.

- [13] GARCIA, R.; GUTIERREZ, C.; SOTOMAYOR, J. **Structural stability of asymptotic lines on surfaces immersed in \mathbb{R}^3** . *Bulletin des sciences mathématiques*, 123(8):599–622, 1999.
- [14] GARCIA, R.; MELLO, L. F.; SOTOMAYOR, J. **Surfaces around closed principal curvature lines, an inverse problem**. *Real and complex singularities*, p. 158–166, 2010.
- [15] GARCIA, R.; SOTOMAYOR, J. **Differential Equations of Classical Geometry, a Qualitative Theory**. Publicações matemáticas. IMPA, 2009.
- [16] GARCIA, R.; SOTOMAYOR, J. **Historical comments on Monge’s ellipsoid and the configurations of lines of curvature on surfaces**. *Antiq. Math.*, 10:169–182, 2016.
- [17] GARCIA, R.; GUTIERREZ, C.; SOTOMAYOR, J. **Lines of principal curvature around umbilics and Whitney umbrellas**. *Tohoku Mathematical Journal*, 52(2):163–172, 2000.
- [18] GARCIA, R.; GUTIERREZ, C.; SOTOMAYOR, J. **Bifurcations of umbilic points and related principal cycles**. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 16:321–346, 2004.
- [19] GARCIA, R.; SOTOMAYOR, J. **Structural stability of parabolic points and periodic asymptotic lines**. *Matemática Contemporânea*, 12:83–102, 1997.
- [20] GARCIA, R.; SOTOMAYOR, J. **Lines of axial curvature on surfaces immersed in \mathbb{R}^4** . *Differential Geometry and its Applications*, 12:253–269, 2000.
- [21] GARCIA, R.; SOTOMAYOR, J. **Structurally stable configurations of lines of mean curvature and umbilic points on surfaces immersed in \mathbb{R}^3** . *Public. Math*, p. 431–466, 2001.
- [22] GARCIA, R.; SOTOMAYOR, J. **On the patterns of principal curvature lines around a curve of umbilic points**. *An. Acad. Brasil. Ciênc.*, 77(1):13–24, 2005.
- [23] GARCIA, R.; SOTOMAYOR, J. **Lines of curvature on surfaces, historical comments and recent developments**. *São Paulo J. Math. Sci.*, 2(1):99–143, 2008.
- [24] GARCIA, R. A. **Bonnet coordinates of surfaces in Minkowski space**. *Manuscrito*, 2018.

- [25] GENIN, D.; KHESIN, B.; TABACHNIKOV, S. **Geodesics on an ellipsoid in Minkowski space**. *L'Enseignement Mathématique*, (2) 53:307–331, 2007.
- [26] GRAY, A.; ABBENA, E.; SALAMON, S. **Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica**. Studies in Advanced Mathematics. Chapman, Hall/CRC, Boca Raton, 2006.
- [27] GUTIÉRREZ, C.; SOTOMAYOR, J. **Lines of Curvature and Umbilical Points on Surfaces**. IMPA, 1991.
- [28] GUTIÉRREZ, C.; SOTOMAYOR, J. **Structurally Stable Configurations of Lines of Curvature and Umbilic Points on Surfaces**. Monografías del IMCA, 1998.
- [29] GUTIERREZ, C.; SOTOMAYOR, J. **Structurally stable configurations of lines of principal curvature**. *Asterisque*, p. 98–99:195–215, 1982.
- [30] GUTIERREZ, C.; SOTOMAYOR, J. **An approximation theorem for immersions with stable configurations of lines of principal curvature**. *Springer Lecture Notes in Math*, 1007:332–368, 1983.
- [31] GUTIÉRREZ, C.; SOTOMAYOR, J. **Lines of principal curvature for mappings with Whitney umbrella singularities**. *Tohoku Mathematical Journal*, 38(4):551–559, 1986.
- [32] GUTIÉRREZ, C.; SOTOMAYOR, J. **Lines of Curvature, Umbilical Points and Carathéodory Conjecture**. *Resenhas IME-USP*, 03:291–322, 1998.
- [33] HIRSCH, M. W. **Differential Topology**. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1976.
- [34] HOPF, E. **Differential Geometry in the Large**. Lect. Notes in Math. 1000, Springer Verlag, 1979.
- [35] ISUMIYA, S.; TARI, F. **Self-adjoint operators on surfaces with singular metrics**. *Journal of Dynamical and Control Systems*, p. Vol. 16, No. 3, 329–353, 2010.
- [36] IZUMIYA, S.; ROMERO, M.; SOARES, M. A.; TARI, F. **Differential Geometry from Singularity Theory Viewpoint**. World Scientific, 2015.
- [37] KLINGENBERG, W. **A Course in differential geometry**. Springer Science+Business Media, 1978.

- [38] KUHNEL, W. **Differential Geometry. Curves-Surfaces-Manifolds.** Student Mathematical Library, 2005.
- [39] LOPEZ, R. **Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space.** *International Electronic Journal of Geometry*, p. 44–107, 2014.
- [40] MELLO, L. F. **Mean directionally curved lines on surfaces immersed in \mathbb{R}^4 .** *Publicacions Matemàtiques*, 47:415–440, 2003.
- [41] MONGE, G. **Application de l'Analyse á la Géométrie.** Bachalier, Paris, Reimpression by University Microfilms International, Ann Arbor, MI, 1850.
- [42] MONGE, G. **Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoide.** *Journal de l'École Polytechnique Ileme cahier, cours de Floréal an III (around 1795)*, p. 145, 1795.
- [43] MONTESINOS-AMILIBIA, A., Software ODEinR2 - Ordinary Differential Equations in \mathbb{R}^2 , Versão 1.98. <http://www.uv.es/montesin/>. Universidad de València, 2011.
- [44] PALIS, J.; DE MELO, W. **Geometric Theory of Dynamical Systems. An Introduction.** Springer-Verlag, 1982.
- [45] PEIXOTO, M. M.; PEIXOTO, M. C. **Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions.** *Anais da Academia Brasileira de Ciências* 31, p. 135–160, 1959.
- [46] PEIXOTO, M. **Structural stability on two-dimensional manifolds.** *Topology Vol. 1*, p. 101–120, 1962.
- [47] SOTOMAYOR, J.; GARCIA, R. **Lines of curvature on algebraic surfaces.** *Bull. Sci. Math.*, 120(4):367–395, 1996.
- [48] SPIVAK, M. **A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.** Volume I, II, III, IV and V. Publish or Perish, Berkeley, 1979.
- [49] STRUIK, D. J. **Lectures on Classical Differential Geometry.** Dover Publications, Inc., 1961.
- [50] TARI, F. **Umbilics of surfaces in the Minkowski 3-space.** *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 65(3):723–731, 2013.
- [51] TARI, F.; SCALCO, F. **On the geometry of the cross-cap in minkowski 3-space and binary differential equations.** *Tohoku Math. J.*, 68:293–328, 2016.

-
- [52] TITUS, C. J. **A proof of a conjecture of Loewner and of the conjecture of Carathéodory on umbilic points.** *Acta Math.*, 131:43–77, 1973.
- [53] WEINSTEIN, T. **An Introduction to Lorentz Surfaces.** Walter De Gruyter, 1996.
- [54] XAVIER, F. **An index formula for Loewner vector fields.** *Math. Res. Lett.*, 14:865–873, 2007.

Índice Remissivo

- LPL , 35, 36
- S^r , 85
- U_e , 46
- U_t , 50
- \mathbb{E}^3 , 18
- \mathcal{I}_c^r , 93
- \mathcal{S}_l^t , 59
- \tilde{S}^r , 134

- \mathcal{I}^r , 31
- \mathcal{S}_l , 55

- Campos de linhas nulas, 123
- Campos de linhas principais, 37
- Carta principal, 37
- Ciclo geodésico nulo, 128
 - hiperbólico, 128
- Ciclo principal, 65
 - hiperbólico, 65
 - no trópico, 65, 76
 - que muda de caráter, 65, 74
 - suave por partes , 65, 80
 - tipo espaço, 65, 72
- Cone luz, 19
- Configuração das geodésicas nulas $\tilde{\mathbb{P}}_\alpha$, 124
- Configuração principal \mathbb{P}_α , 37
- Coordenadas de Bonnet, 38
- Curva regular, 21
 - tipo espaço, 21
 - tipo luz, 21
 - tipo tempo, 21
- Direções luz, 123

- Equação de direções principais, 32
- Esfera unitária S_m^2 , 26
- Espaço de Minkowski, 18
 - $\mathbb{R}^{2,1}$, 18
- Estabilidade estrutural
 - em um ciclo, 81
 - em um ponto, 61
 - global, 86
- Estabilidade estrutural das geodésicas nulas
 - em um ciclo, 134
 - em um ponto, 127
 - global, 135
- Estritamente convexa, 93

- Folheação
 - $\tilde{\mathcal{F}}_{1,\alpha}, \tilde{\mathcal{F}}_{2,\alpha}$, 124
 - $\mathcal{F}_{1,\alpha}, \mathcal{F}_{2,\alpha}$, 37
- Forma Bilinear, 18

- Geodésicas nulas, 123
- Gráfico, 118

- Lie-Cartan
 - campo, 37
 - variedade, 37
- Linhas de curvatura principal, 37
- Linhas nulas, 123

- Parte
 - tipo espaço ou Riemanniana, 25
 - tipo tempo ou Lorentziana, 25
- Plano
 - tipo espaço, 20

- tipo luz, 20
- tipo tempo, 20
- Ponto umbílico, 32
- Primeira forma fundamental, 25
- Produto escalar induzido, 24
- Produto vetorial, 20
- Propriedade
 - DR , 85
 - TR , 85
- Propriedade da curvatura variável, 114
- Pseudo-arco, 23

- Regiões canônicas, 86, 136

- Segunda Forma Fundamental, 27
- Singularidade hiperbólica, 62
- Singularidades
 - \mathcal{S}_α , 36
 - $\tilde{\mathcal{S}}_\alpha$, 123
- Superfície umbílica, 140

- Topologia C^s , 31
- Trópico, 25, 34
- Triedro de Darboux, 30
- Triedro de Frenet, 23, 24

- Vetor
 - caráter causal, 19
 - tipo espaço, 19
 - tipo luz, 19
 - tipo tempo, 19