

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

KAMILA DA SILVA ANDRADE

**A coexistência de quatro ciclos limite
em campos vetoriais seccionalmente
lineares em $\mathbb{R}^3$**

Goiânia
2012

KAMILA DA SILVA ANDRADE

A coexistência de quatro ciclos limite em campos vetoriais seccionalmente lineares em $\mathbb{R}^3$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos.

Orientador: Prof. João Carlos da Rocha Medrado

Goiânia
2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

A553c Andrade, Kamila da Silva.
A coexistência de quatro ciclos limite em campos
vetoriais seccionalmente lineares em $\mathbb{R}^3$ [manuscrito] /
Kamila da Silva Andrade. - 2012.
xv, 75 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2012.

Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Campos vetoriais. 2. Ciclo limite. 3. Cálculo vetorial.
I. Título.

CDU: 514.742

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Kamila da Silva Andrade

Bacharel em Matemática pela Universidade Federal de Goiás - UFG.

Aos meus pais, Roque e Joana,
e ao meu irmão, Danilo.

Agradecimentos

A Deus, por ter me dado a vida e por ter possibilitado ultrapassar as barreiras e dificuldades em minha caminhada até aqui, também por me dar força e vontade de continuar lutando e caminhando.

A toda minha família (pais, avós, irmão, tios(as), primos(as) e afins), pela paciência, incentivo, carinho e amor, por compreenderem minha ausência em vários momentos, por me apoiarem e me ajudarem a superar cada desafio.

Aos meus pais, por todo apoio e incentivo, por todo amor, carinho e paciência, por terem sido meu porto seguro e minha base, por serem meus exemplos de vida e luta, enfim, por serem tudo para mim.

Ao meu irmão, Danilo, e a minha cunhada, Samara, por toda ajuda, apoio e incentivo, por estarem sempre me acompanhando, nas festas, nos bares, etc., por me fazerem rir com eles e admirá-los.

Aos meus avós, Roque e Maria, por sempre estarem se preocupando comigo e tentando me ajudar de alguma forma.

A todos os meus amigos, pois sempre estiveram comigo, me apoiaram, me fizeram rir, me ensinaram e me fizeram enxergar a vida mais colorida. Aos meus amigos matemáticos por nossas conversas, discussões e estudos, pela companhia, pelo carinho, pelas risadas e por todo o ensinamento. Aos meus amigos não matemáticos pelo carinho, apoio, companhia, por me fazerem esquecer um pouco dos "números" e olhar a vida por perspectivas diferentes e por sempre estarem me divertindo. Alguns que eu não poderia deixar de citar, Nara, Marcos Túlio, Thamara, Paula, Leonardo, Myllena, Jean, Taynara, Bira, Thaís, Gabriella, Juliana, Rayner, Hiuri, Sarah, Daiane, Douglas, Gustavo, José Henrique, Yerko, Oscar, Martin, Aydee e Guilherme dentre outros. Em especial, Gabriela e Mayk, que foram os primeiros companheiros de luta, por estarem sempre dispostos a me ajudar e por serem ótimos amigos. A Brunna e a Nina, por me darem apoio em todos os momentos, por me divertirem e por serem as florzinhas que me acompanham em todas as estações, e aos seus respectivos namorados, Pedro e Pablo, por terem me acolhido e se tornado grandes amigos. Ao Laredo e a Lucy, por serem tão humildes e companheiros, por me ensinarem tanto enquanto eu tentava, de alguma forma, ajudá-los.

A todos os professores que tive em minha vida, pois eles abriram as portas da

minha mente e me ensinaram muito. Em especial, João Luis por ter sido também um bom amigo e a Murany por ter sido uma grande incentivadora e amiga.

Ao meu orientador, professor João Carlos, por toda paciência, pelos ensinamentos e conselhos, por todo apoio e incentivo, por ter me acolhido desde a graduação e por ter sido um grande amigo em todo este tempo que trabalhamos juntos.

Aos funcionários do IME/UFG por sempre estarem dispostos a resolver nossos problemas e nos direcionarem quando precisamos.

À CAPES pelo apoio financeiro.

"Mesmo quando tudo parece desabar
cabe a mim decidir entre rir ou chorar,
ir ou ficar, desistir ou lutar;
porque descobri, no caminho incerto da vida,
que o mais importante é o decidir."

Cora Coralina,
em entrevista.

Resumo

da Silva Andrade, Kamila. **A coexistência de quatro ciclos limite em campos vetoriais seccionalmente lineares em $\mathbb{R}^3$** . Goiânia, 2012. 75p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho estudamos campos vetoriais seccionalmente lineares, contínuos e simétricos, com três zonas em $\mathbb{R}^3$, investigamos a existência de ciclos limite utilizando o método das *closing equations*. Mais especificamente, estudamos uma família a dois parâmetros e mostramos a coexistência de quatro ciclos limites para esta família e também sua realização no circuito de Chua.

Palavras-chave

campos vetoriais seccionalmente lineares, ciclos limite, *closing equations*.

Abstract

da Silva Andrade, Kamila. **The coexistence of four limit cycles in piecewise linear vector fields on $\mathbb{R}^3$** . Goiânia, 2012. 75p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work we study continuous, symmetric and piecewise linear vector fields on $\mathbb{R}^3$, we investigate the existence of limit cycles using the closing equations method. More specifically, we study a two parameters family of this vector fields and we show the coexistence of four limit cycles and too, its realization on Chua's circuit.

Keywords

piecewise linear vector fields, limit cycles, closing equations.

Sumário

Lista de Figuras	10
1 Introdução	11
2 Preliminares	15
2.1 Campos Vetoriais	15
2.1.1 Campos Vetoriais Lineares	16
2.1.2 Campos Vetoriais Seccionalmente Diferenciáveis	18
2.2 Órbitas Periódicas, Ciclos Limite e Aplicações de Poincaré	20
2.3 Bifurcações	22
2.3.1 Bifurcação Dobra	22
2.3.2 Bifurcação Hopf	24
2.3.3 Bifurcação Zero-Hopf	26
2.4 O Teorema da Função Implícita	26
2.5 A Redução de Liapunov-Schmidt	28
2.5.1 Construção das Equações Reduzidas	28
3 Forma Canônica e o Método das <i>Closing Equations</i>	32
3.1 Forma Canônica de Campos Vetoriais Seccionalmente Lineares	32
3.1.1 Forma Generalizada de Liénard	34
3.2 <i>Closing Equations</i>	36
3.2.1 Aplicações de Poincaré	40
4 Uma Família Especial de Campos Vetoriais	45
4.1 Caracterização do Sistema	45
4.2 Ciclos Limite Tri-zonais	50
4.3 Ciclos Limite Bi-zonais	59
5 Aplicação: O Oscilador de Chua	68
5.1 O Circuito	68
5.2 Realização do Oscilador de Chua em uma Família a 2 Parâmetros	70
6 Apêndice - Cálculo de Séries	73
Referências Bibliográficas	74

Lista de Figuras

1.1	Esquema ilustrando a existência de ciclos limite para o sistema (1-1)-(1-2), com $ \varepsilon \ll 1$.	13
1.2	Esboço de quatro ciclos limite para o sistema (1-1)-(1-2), com $\mu > 1$ e $0 < \varepsilon \ll 1$.	14
2.1	Retrato de fase do sistema (2-4).	17
2.2	Retrato de fase do sistema (2-4) com o equilíbrio transladado.	18
2.3	Ciclo limite assintoticamente estável.	21
2.4	Aplicação de Poincaré.	21
2.5	Bifurcação dobra em $\mathbb{R}$.	23
2.6	Diagrama de bifurcação.	23
2.7	Bifurcação dobra em $\mathbb{R}^2$.	24
2.8	Bifurcação Hopf em $\mathbb{R}^2$.	25
2.9	Diagrama de bifurcação do caso Hopf.	26
3.1	Esquema ilustrando uma órbita periódica tri-zonal.	38
3.2	Ciclos bi-zonais simétricos.	39
3.3	Esquema ilustrando uma órbita periódica bi-zonal.	40
4.1	Cones folheados de órbitas periódicas do sistema (4-1)-(4-2), com $\mu > 0$ e $\varepsilon = 0$.	49
4.2	Cone folheado de órbitas periódicas do sistema (4-31), com $\mu > 0$ e $\varepsilon = 0$.	59
4.3	Esboço de quatro ciclos limite para o sistema (1-1)-(1-2), com $\mu > 1$ e $0 < \varepsilon \ll 1$.	66
4.4	Esquema ilustrando a existência de ciclos limite para o sistema (4-1)-(4-2), com $ \varepsilon \ll 1$.	67
5.1	(a) Esquema do oscilador de Chua. (b) Implementação da condutância não-linear N_R .	68
5.2	Curva característica $v - i$ de N_R .	69

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é mostrar a coexistência de quatro ciclos limite em uma família a dois parâmetros de campos vetoriais seccionalmente lineares em $\mathbb{R}^3$ com três zonas de linearidade e nos baseamos no artigo [15] para realizar esta tarefa. Utilizamos a técnica das *closing equations*, apresentada por Andronov, Vitt e Khaikin em 1966 com o nome método das transformações de ponto para sistemas seccionalmente lineares, ver Capítulo VIII de [1].

O interesse no estudo de sistemas seccionalmente lineares vem crescendo desde a década passada com a utilização destes para modelar problemas em mecânica, eletrônica, teoria de controle, biologia e outros, ver [8]. Sistemas seccionalmente lineares são a extensão natural dos lineares na modelagem de fenômenos não lineares, pois eles podem reproduzir muito do comportamento complexo destes sistemas: multiestabilidade, oscilações autossustentáveis, comportamento histérico, conexões homoclínicas e heteroclínicas e comportamento caótico. Estes sistemas tornam mais precisa a modelagem em algumas aplicações realísticas, vários exemplos podem ser vistos em [5], [6], [12], [13], [17] dentre outros.

Sistemas seccionalmente lineares podem ser classificados em duas classes, dependendo da continuidade associada ao campo de vetores: (i) o caso descontínuo, que tem sido amplamente estudado e é objeto de inúmeras pesquisas recentes, este caso não é abordado aqui, ver novamente [8]; (ii) o caso contínuo, o qual estudamos neste trabalho, que ainda possui muitos problemas não resolvidos, mesmo para problemas aparentemente simples como estabilidade e um único equilíbrio. Além da análise de equilíbrios é importante caracterizar as órbitas periódicas isoladas destes sistemas, para estudar a existência destas órbitas seguimos uma estratégia comum em teoria de bifurcações, que é, primeiro analisamos situações degeneradas e depois, variando os parâmetros olhamos para o aparecimento de ciclos limite, ver [3], [2] e [18].

A não diferenciabilidade dos sistemas seccionalmente lineares requer que bifurcações de ciclos limite sejam analisadas caso a caso, aproximados por famílias de sistemas relevantes em aplicações com ou sem a presença de simetria. Em todos os casos, bifurcações resultando em ciclos limite são associadas à órbitas contidas em mais de uma zona

de linearidade uma vez que, sistemas lineares não admitem ciclos limite. Admitimos a presença de simetria e consideramos aqui um situação degenerada específica tendo a presença simultânea de um par de autovalores imaginários puros e um autovalor nulo, assim obtemos algo parecido com a bifurcação zero-Hopf para sistemas diferenciáveis, ver [11] e [14], entretanto não podemos fazer um paralelo entre este e o caso diferenciável, a estrutura das famílias analisadas em ambos os casos são distintas e a codimensão da bifurcação não tem uma definição clara no caso seccionalmente linear.

Neste trabalho, mais precisamente, dividimos o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ em três, a região $\mathcal{E}$ compreendida dos pontos $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ com $x < -1$, a região $\mathcal{C}$ compreendida dos pontos $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ com $-1 \leq x \leq 1$ e a região $\mathcal{D}$ compreendida dos pontos $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ com $x > 1$. Em cada uma destas regiões definimos um campo afim da forma $\dot{X} = AX + B$ de forma que o campo obtido seja contínuo e não diferenciável. A partir daí, buscamos a existência de ciclos limite motivados pela existência de um sólido folheado por órbitas periódicas do campo descontínuo quando um dos parâmetros é nulo.

Uma vez que, como é bem conhecido na teoria clássica, campos vetoriais lineares não admitem ciclos limite buscamos por ciclos cuja órbita atravessa ao menos um dos planos de separação. Mostramos que, mesmo em um sistema seccionalmente linear, podemos encontrar ciclos limite. Não existe uma cota para a quantidade de ciclos que podem ocorrer neste caso, no exemplo estudado garantimos a existência de no mínimo quatro e apresentamos uma conjectura a respeito da existência de um par de ciclos limites bi-zonais adicionais, ver [15]. Para determinar a existência de órbitas fechadas contidas em mais de uma zona utilizamos uma idéia simples envolvendo o fluxo do campo associado e construindo um sistema do qual as soluções correspondem com órbitas fechadas do sistema, o método das *closing equations*. Uma parte interessante da utilização deste método é a riqueza de informações que conseguimos obter a respeito destes ciclos tais como as coordenadas de pontos contidos nesta órbita, períodos e tempos de retorno, e conseguimos expressar estas informações em séries de potências de um dos parâmetros do sistema. É um trabalho árduo obter estas expressões e para isto utilizamos o software de manipulação algébrica Maple. Além de informações qualitativas e quantitativas, conseguimos mostrar que esta família é realizável em um circuito muito importante em aplicações, o circuito de Chua.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos e um apêndice. No Capítulo 2 buscamos introduzir as notações, terminologias, definições e resultados necessários para a compreensão do restante do texto. Damos um breve paralelo entre campos vetoriais lineares e seccionalmente lineares em $\mathbb{R}^3$, introduzimos os conceitos de ciclos limite, aplicações de Poincaré e bifurcações, enunciamos o Teorema da Função Implícita e, por fim, apresentamos a técnica de redução de Liapunov-Schmidt que será utilizada na demonstração de um dos teoremas sobre existência de ciclos limite apresentados no

Capítulo 4.

No Capítulo 3 mostramos uma forma normal para a classe dos campos seccionalmente lineares simétricos com três zonas em $\mathbb{R}^3$, a assim chamada Forma Canônica de Liénard. Esta forma é introduzida com a finalidade de motivar a escolha da família a ser analisada no Capítulo posterior. Ainda neste Capítulo ilustramos o método das *closing equations* que é utilizado intensivamente nas demonstrações dos teoremas principais deste trabalho e abordamos a utilização de aplicações e semi-aplicações de Poincaré como ferramenta na análise da estabilidade dos ciclos encontrados.

No Capítulo 4 apresentamos a família a ser estudada, analisamos suas principais propriedades, mostramos a existência de ciclos limite utilizando o método das *closing equations* e concluímos a coexistência de quatro ciclos limite para a seguinte família,

$$\dot{X} = F(X) = A(\mu)X + b_\varepsilon(\mu)\text{sat}(x) \quad (1-1)$$

onde $X = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$,

$$A(\mu) = \begin{bmatrix} -6\mu & -1 & 0 \\ 11\mu^2 & 0 & -1 \\ -6\mu^3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$b_\varepsilon(\mu) = \begin{bmatrix} 6\mu - \varepsilon \\ 1 - 11\mu^2 - \varepsilon^2 \\ 6\mu^3 + \varepsilon + \varepsilon^3 \end{bmatrix}. \quad (1-2)$$

Denotamos por ${}^3\Gamma^{s,u}(\mu, \varepsilon)$ os ciclos tri-zonais e por ${}^2\Gamma^{s,u}(\mu, \varepsilon)$ os pares de ciclos bi-zonais, onde utilizamos apenas um dos índices, s ou u , para significar estável e instável, respectivamente. A existência de ciclos é dada conforme a Figura 1.1.

	$\varepsilon < 0$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon > 0$
$0 < \mu < \frac{1}{\sqrt{2}}$	${}^3\Gamma_{(\mu, \varepsilon)}^s - {}^2\Gamma_{(\mu, \varepsilon)}^s$	-	-
$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \mu < 1$	${}^3\Gamma_{(\mu, \varepsilon)}^s$	-	-
$\mu = 1$	${}^3\Gamma_{(\mu, \varepsilon)}^s$	-	-
$\mu > 1$	${}^3\Gamma_{(\mu, \varepsilon)}^s$	${}^3\Gamma_{(\mu, \varepsilon)}^s$	${}^3\Gamma_{(\mu, \varepsilon)}^s - {}^3\Gamma_{(\mu, \varepsilon)}^u$ $- {}^2\Gamma_{(\mu, \varepsilon)}^s$

Figura 1.1: Esquema ilustrando a existência de ciclos limite para o sistema (1-1)-(1-2), com $|\varepsilon| \ll 1$.

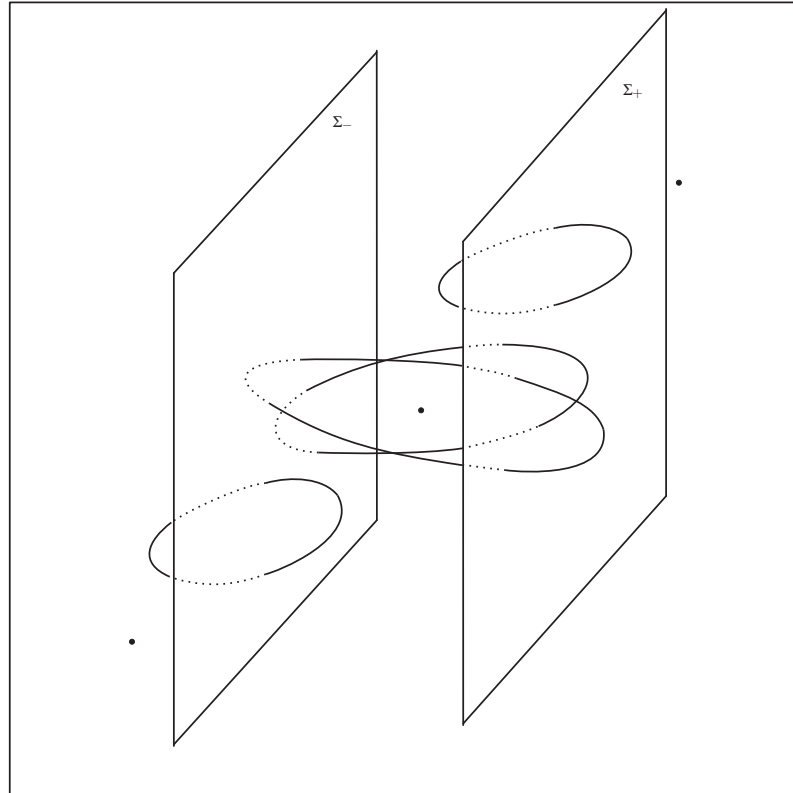


Figura 1.2: Esboço de quatro ciclos limite para o sistema (1-1)-(1-2), com $\mu > 1$ e $0 < \varepsilon \ll 1$.

No Capítulo 5 mostramos a realização da família estudada anteriormente no famoso circuito de Chua.

No Apêndice damos uma breve noção de como encontrar as séries obtidas nos teoremas do Capítulo 4, fazemos um exemplo simples apenas para ilustrar a idéia, pois é necessário o auxílio de algum software para obtermos os coeficientes das expansões.

Preliminares

Neste Capítulo estabelecemos as definições e os conceitos necessários para a compreensão do restante do trabalho. Alguns resultados são apenas enunciados, temos, sobretudo, um interesse conceitual. Muitas vezes não nos preocupamos em estabelecer relações entre os tópicos aqui apresentados e, sempre que necessário, uma referência adequada é indicada.

Inicialmente, definimos campos vetoriais e exemplificamos os tipos destes campos que são utilizados nos capítulos seguintes e também apresentamos alguns conceitos básicos da teoria de campos vetoriais. Em seguida, enunciamos resultados e métodos que são necessários nas demonstrações dos principais teoremas deste trabalho.

2.1 Campos Vetoriais

Seja Ω um subconjunto aberto do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Um campo vetorial de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$, em Ω é uma aplicação $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k . Ao campo vetorial F associamos a equação diferencial

$$\dot{X} = F(X), \quad (2-1)$$

onde a derivação se dá com relação ao tempo t , isto é, $X = X(t)$ e $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$.

Uma solução desta equação é uma aplicação diferenciável $\Phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ tal que

$$\frac{d\Phi}{dt}(t) = F(\Phi(t)), \quad (2-2)$$

para todo $t \in I$, estas soluções são chamadas trajetórias ou curvas integrais de F ou da equação diferencial (2-1).

Uma questão importante é saber se $F(X_0) = 0$ para algum $X_0 \in \Omega$, pois assim definindo $\Phi(t) = X_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ temos $\frac{d\Phi}{dt}(t) = 0$ logo $\frac{d\Phi}{dt}(t) = F(\Phi(t)) = F(X_0) =$

0 e $\Phi(t)$ é uma solução da equação diferencial. Caso isto ocorra vamos distinguir este ponto dos demais de acordo com a seguinte definição,

Definição 2.1 Um ponto $X_0 \in \Omega$ é dito um ponto de equilíbrio de F , ou apenas um equilíbrio de F , se $F(X_0) = 0$, caso contrário, X_0 é dito um ponto regular de F .

Definição 2.2 Um equilíbrio X_0 do campo F é dito hiperbólico se os autovalores da matrix Jacobiana, $D_X F(X_0)$, tem parte real não nula.

Como trabalhamos com campos que dependem de parâmetros, uma questão natural é saber se a estrutura qualitativa do campo muda com pequenas perturbações desses parâmetros. Quando, na vizinhança de um equilíbrio ou de uma órbita periódica, uma pequena perturbação do campo não muda sua estrutura qualitativa dizemos que o campo é estruturalmente estável. Não nos aprofundaremos nesta questão.

É um resultado básico na teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias que, numa vizinhança de um equilíbrio hiperbólico, o campo é estruturalmente estável (Teorema de Hartman-Grobman), ver [16] e [19].

2.1.1 Campos Vetoriais Lineares

Sejam A uma matriz quadrada de ordem n e b um vetor em $\mathbb{R}^n$. Se $F(X) = AX + b$ em (2-1) dizemos que o sistema é afim, se $b = 0$ o sistema é dito linear.

Caso A não seja singular a equação $AX + b = 0$ tem uma única solução $X = -A^{-1}b$ e a solução do sistema com $X(0) = X_0$ é,

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{At}X_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} b d\tau, \\ &= e^{At}X_0 + e^{At}(-A^{-1}e^{-At}b + A^{-1}b) \\ &= e^{At}X_0 + e^{At}(-e^{-At}A^{-1}b + A^{-1}b) \\ &= e^{At}(X_0 + A^{-1}b) - A^{-1}b. \end{aligned} \tag{2-3}$$

De fato, $X(0) = X_0$ e, derivando (2-3) com respeito a t , obtemos

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= Ae^{At}(X_0 + A^{-1}b) \\ &= A \left[e^{At}(X_0 + A^{-1}b) - A^{-1}b \right] + b \\ &= AX + b. \end{aligned}$$

Se A é não singular, um sistema afim sempre pode ser transformado em um sistema linear, basta considerar a mudança de coordenadas $X \mapsto Y = X + A^{-1}b$ e assim $\dot{Y} = AY$. Neste caso, o vetor b apenas translada o equilíbrio. Deste modo podemos analisar apenas os sistemas lineares pois, qualitativamente, estes são equivalentes. Por este motivo,

no que segue, nos referiremos a um campo da forma $F(X) = AX + b$ como sendo um sistema linear. Os casos onde A é singular precisam ser analisados caso a caso mas também receberão a mesma denominação.

Exemplo 2.3 Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y + x \end{cases} \quad (2-4)$$

ou, equivalentemente, $\dot{X} = AX$ com $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Este sistema tem um único equilíbrio na origem. A solução com $X(0) = X_0$ é

$$X(t) = e^{At} = e^t \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} X_0$$

e o retrato de fase é mostrado na Figura 2.1.

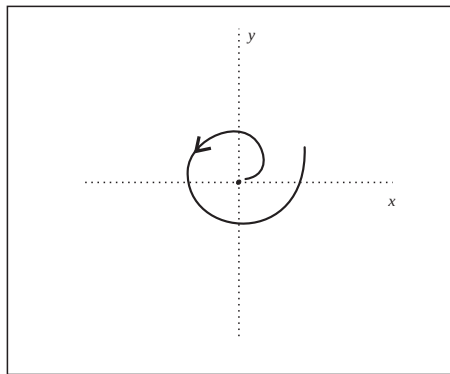


Figura 2.1: Retrato de fase do sistema (2-4).

Exemplo 2.4 Consideremos $\dot{X} = AX + b$, onde A é como no exemplo anterior e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Temos um equilíbrio $X = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. Então,

$$X(t) = e^t \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \left(X_0 + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

e o retrato de fase é dado na Figura 2.2.

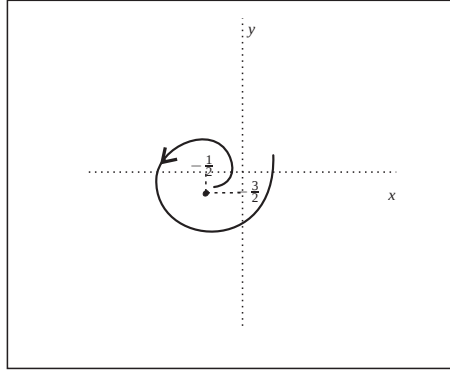


Figura 2.2: Retrato de fase do sistema (2-4) com o equilíbrio trasladado.

2.1.2 Campos Vetoriais Seccionalmente Diferenciáveis

Uma aplicação seccionalmente diferenciável em $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ é descrita por um número finito de aplicações diferenciáveis

$$X \mapsto F_i(X, \alpha), \quad \text{para } X \in S_i, \quad (2-5)$$

onde $\cup_i S_i = \mathcal{D}$ e cada S_i tem interior não-vazio. A interseção, $\Sigma_{i,j}$, entre a fronteira dos conjuntos S_i e S_j é uma variedade de dimensão $n - 1$ contida nas fronteiras ∂S_i e ∂S_j , ou é um conjunto vazio. Cada função F_i é diferenciável com relação a variável de estado X e ao parâmetro α em qualquer subconjunto aberto $U \subset S_i$. Os conjuntos $\Sigma_{i,j}$ são usualmente denominados bordo ou conjuntos de descontinuidade. Estes conjuntos de descontinuidade separam regiões do espaço onde estão definidas diferentes aplicações diferenciáveis.

A uma aplicação seccionalmente diferenciável podemos associar um sistema de equações diferenciais, também seccionalmente diferenciável, da seguinte forma

$$\dot{X} = F_i(X, \alpha), \quad \text{para } X \in S_i. \quad (2-6)$$

Denotamos, simplifcadamente, por $\dot{X} = F(X)$. Cada campo vetorial F_i define um fluxo $\Phi_i(X, t)$ em qualquer aberto $U \supset S_i$ assim, este fluxo, está bem definido em ambos os lados da fronteira ∂S_i .

Se $F_i(X) \neq F_j(X)$ para um ponto $X \in \Sigma_{i,j}$ dizemos que o sistema (2-6) é descontínuo ou um sistema de Filippov, não estudaremos este caso neste trabalho, uma análise detalhada pode ser encontrada em [9]. Se $F_i(X) = F_j(X)$ sempre mas, $D_X F_i(X) \neq D_X F_j(X)$ para algum ponto $X \in \Sigma_{i,j}$ dizemos que o sistema é contínuo e seccionalmente diferenciável e é este o tipo que estudamos no decorrer do trabalho, mais informações podem ser encontradas em [8] e [9].

Exemplo 2.5 Considere o sistema

$$\dot{X} = F(X) = \begin{cases} A_0X + x_1 e_1, & \text{se } x_1 \leq 1 \\ A_1X & \text{se } x_1 > 1 \end{cases},$$

onde A_0, A_1 são matrizes quadradas de ordem n e $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ é o vetor da base canônica do $\mathbb{R}^n$.

A condição de continuidade se resume a $A_0 + e_1^T I = A_1$ então, se isto é satisfeito, temos um sistema contínuo e seccionalmente diferenciável, caso contrário, temos um sistema de Fillipov.

O problema agora é definir uma solução do sistema (2-6). Uma vez que estamos trabalhando com sistemas contínuos, esta tarefa não é tão árdua. Para sistematizar melhor o problema, suponhamos que o sistema seja composto por duas regiões S_1 e S_2 com uma fronteira de separação $\Sigma_{1,2}$.

Definição 2.6 Dizemos que um ponto $X \in \mathcal{D}$ é ,

- (a) um equilíbrio real do campo F se $F_i(X) = 0$ e $X \in S_i$, $i = 1$ ou 2 , ou seja, X é um equilíbrio de F_i em S_i ;
- (b) um equilíbrio virtual do campo F se $F_i(X) = 0$ e $X \in S_j$, $i \neq j$, ou seja, X é um equilíbrio de F_i que não pertence a S_i ;
- (c) um ponto regular do campo F se não é um equilíbrio real.

Observe que um ponto $X \in \mathcal{D}$ pode ser, ao mesmo tempo, singular real e singular virtual ou singular virtual e regular mas nunca poderá ser singular real e regular simultaneamente. Se $X \in \Sigma_{1,2}$ é um ponto regular de F_1 então, pela continuidade, X é também um ponto regular de F_2 .

Seja $X \in \Sigma_{1,2}$ um ponto regular de F , devido a continuidade do campo temos duas possibilidades:

- (i) A trajetória de F_1 por X esteja contida em S_1 para $t \leq 0$ e a trajetória de F_2 contida em S_2 para $t \geq 0$, ou
- (ii) A trajetória de F_1 por X esteja contida em S_1 para $t \geq 0$ e a trajetória de F_2 contida em S_2 para $t \leq 0$.

Sem perda de generalidade, suponhamos que (i) ocorra e sejam $\Phi_1(X, t)$, $\Phi_2(X, t)$ as soluções, por X , em S_1 e S_2 , respectivamente. Então, a solução, $\Phi(t, X)$, do sistema (2-6) é definida por

$$\Phi(t, X) = \begin{cases} \Phi_1(t, X), & \text{para } t < 0 \\ X, & \text{para } t = 0 \\ \Phi_2(t, X) & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad (2-7)$$

Se X é um ponto do interior de uma das regiões, digamos $X \in S_i$, $i = 1, 2$, a solução por X é $\Phi(t, X) = \Phi_i(t, X)$ para $t_n < t < t_p$ onde t_n é o maior tempo negativo para o qual $\Phi_i(t_n, X) \in \Sigma_{1,2}$ e t_p é o menor tempo positivo para o qual $\Phi(X, t) = \Phi_i(t_p, X) \in \Sigma_{1,2}$ quando estes tempos existem, caso contrário $t_n = -\infty$ e $t_p = \infty$, $\Phi(t, X) = \Phi(t, \Phi_i(t_n, X))$ para $t \leq t_n$ e $\Phi(t, X) = \Phi(t, \Phi_i(t_p, X))$ para $t \geq t_p$.

Nos casos onde temos mais que duas regiões a definição de solução é definida de maneira natural a partir desta. Nos capítulos seguintes estudamos campos definidos em $\mathbb{R}^3$ com três regiões, sendo que o campo é linear (ou afim) em cada uma delas.

2.2 Órbitas Periódicas, Ciclos Limite e Aplicações de Poincaré

Consideremos $\Phi(t, X)$ o fluxo do sistema $\dot{X} = F(X)$ e seja Γ uma órbita deste campo que passa em um ponto X para $t = 0$, se consideramos apenas $t \geq 0$ obtemos uma semi-órbita (positiva), a qual denotamos por Γ_X^+ . Dizemos que Γ é uma solução fechada se, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(t, X) = \Phi(t + T, X)$ para algum $T \in \mathbb{R}$, o menor $T > 0$ satisfazendo isto é chamado o período da órbita Γ .

Definição 2.7 *Um ciclo ou uma órbita periódica do campo F é uma solução fechada do sistema, $\dot{X} = F(X)$, que não é um equilíbrio. Uma órbita periódica, Γ , é dita estável se, dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança U de Γ tal que para todo $X \in U$ a distância entre a semi-órbita positiva, Γ_X^+ e Γ é menor que ε . A órbita periódica Γ é dita instável se não é estável, e Γ é assintoticamente estável se é estável e existe uma vizinhança V de Γ tal que para todo $X \in V$ a órbita por X se aproxima de Γ quando $t \rightarrow +\infty$.*

Definição 2.8 *Um ciclo limite é uma órbita periódica isolada, veja Figura 2.3.*

No que segue, trabalharemos com a finalidade de classificar a estabilidade de um ciclo limite, para isto utilizaremos as chamadas aplicações de Poincaré.

Se Γ é uma órbita periódica do sistema (2-1) pelo ponto X_0 e Σ é um hiperplano transversal a Γ em X_0 , então para qualquer ponto $X \in \Sigma$, suficientemente próximo de X_0 , a solução deste sistema por X , $\Phi(t, X)$, irá cruzar novamente Σ em um ponto $P(X)$. A aplicação $X \rightarrow P(X)$ é chamada aplicação de Poincaré.

Uma vez que esta aplicação é definida através do fluxo do campo, ela será diferenciável. Se Γ é uma órbita periódica por X_0 e P é a aplicação de Poincaré numa

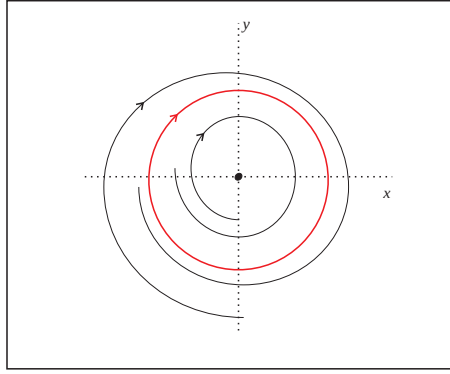


Figura 2.3: *Ciclo limite assintoticamente estável.*

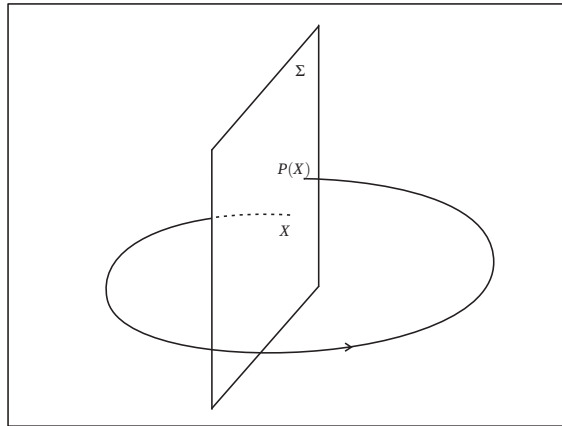


Figura 2.4: *Aplicação de Poincaré.*

vizinhança de X_0 definimos os multiplicadores característicos de Γ como sendo os autovalores da diferencial, $DP(X_0)$. Estes multiplicadores característicos são utilizados para determinar a estabilidade do ciclo Γ , ver [16], [7] e [19].

Neste contexto, um conceito importante é o de órbita periódica hiperbólica.

Definição 2.9 *Uma órbita periódica Γ é dita hiperbólica se nenhum dos seus multiplicadores característicos está no círculo unitário, i.e., se nenhum dos seus multiplicadores característico tem módulo igual a 1.*

Uma órbita periódica hiperbólica é dita atratora (respec. repulsora) se todos os seus multiplicadores característicos estão no interior (respec. exterior) do círculo unitário. Desta forma, as órbitas periódicas hiperbólicas atratoras (respec. repulsoras) são estáveis (respec. instáveis).

2.3 Bifurcações

Consideremos agora um sistema de equações diferenciais da forma

$$\dot{X} = F(X, \alpha), \quad (2-8)$$

onde $X \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}^k$ é um vetor de parâmetros. Queremos entender como o retrato de fase muda quando variamos o parâmetro α .

Quando variamos o parâmetro α a estrutura qualitativa do sistema pode sofrer mudanças, estas mudanças são chamadas de bifurcações. Dizemos que o sistema (2-8) exibe uma bifurcação para o valor do parâmetro α_0 se $F(X, \alpha_0)$ não é localmente estruturalmente estável, ou seja, a estrutura qualitativa do sistema muda para pequenas perturbações do parâmetro α . Nesse caso, α_0 é dito um valor de bifurcação. Estamos considerando esta definição de forma local, sempre na vizinhança de um equilíbrio não hiperbólico (equilíbrios hiperbólicos são estruturalmente estáveis).

Várias questões podem ser levantadas neste contexto como, por exemplo, saber quais soluções pode-se obter fazendo o parâmetro variar e saber quantos parâmetros são necessários para se descrever todas as variações possíveis de um dado campo vetorial. A menor quantidade de parâmetros necessária para desdobrar completamente um equilíbrio é chamada de codimensão da bifurcação. Não detalharemos esta teoria aqui, pois nosso interesse no decorrer do trabalho será apenas conceitual, para análises detalhadas ver [16], [7], [11] e [9].

Podemos descrever as bifurcações na forma de um diagrama no espaço (x, α) , onde temos subvariedades formadas pelos valores de bifurcação dividindo o espaço em regiões onde o sistema é estruturalmente estável, este diagrama é chamado diagrama de bifurcação.

Agora vamos descrever três tipos de bifurcação, dobra, Hopf e dobra-Hopf para que, no Capítulo 4, possamos fazer uma analogia do caso seccionalmente linear com o caso diferenciável apresentado aqui, para maiores detalhes ver [7], [14], [11] dentre outros.

2.3.1 Bifurcação Dobra

Este tipo de bifurcação é caracterizada por possuir um autovalor nulo com multiplicidade 1 e os outros autovalores com parte real não nula. Usando técnicas de variedade central, reduzimos esta análise para o caso unidimensional e podemos considerar uma bifurcação de codimensão 1, esta também pode ser chamada de bifurcação sela-nó.

Exemplo 2.10 Para sistemas unidimensionais temos a seguinte forma normal

$$\dot{x} = \alpha + x^2 \equiv F(x, \alpha).$$

Para $\alpha = 0$ o sistema tem um equilíbrio não hiperbólico, $x_0 = 0$, com $D_x F(0, 0) = 0$. Para $\alpha < 0$ o sistema possui dois equilíbrios hiperbólicos $x_1 = -\sqrt{-\alpha}$ a qual é atratora e $x_2 = \sqrt{-\alpha}$ a qual é repulsora, veja a Figura 2.5. O diagrama de bifurcação para este caso é mostrado na Figura 2.6, e tem uma tangência quadrática na origem, isto ilustra o fato de se tratar de uma bifurcação do tipo dobra.

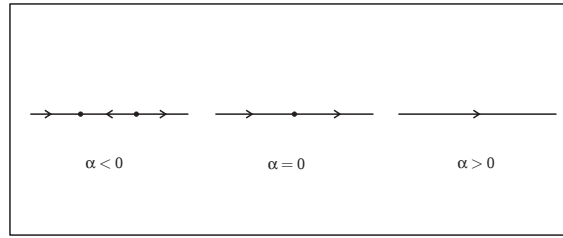


Figura 2.5: Bifurcação dobra em $\mathbb{R}$.

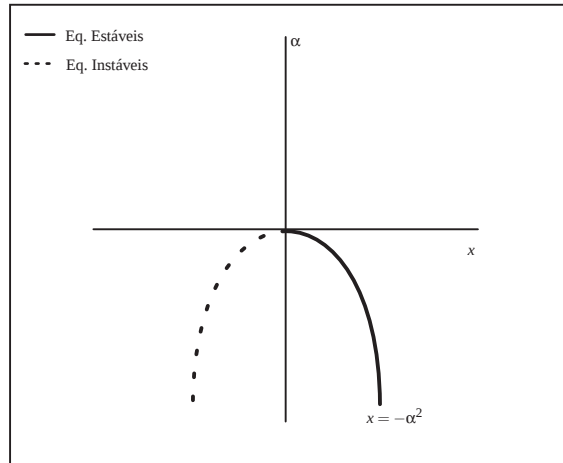


Figura 2.6: Diagrama de bifurcação.

Para ilustrar melhor o fato de ser também denominada uma bifurcação sela-nó observemos o seguinte exemplo em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.11 Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha + x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

Para $\alpha = 0$ a origem é o único equilíbrio e

$$D_X F(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

a qual possui um autovalor nulo e outro igual a -1 . Se $\alpha > 0$ o sistema não possui equilíbrios e se $\alpha < 0$ este sistema possui dois equilíbrios hiperbólicos $X_1 = (-\sqrt{-\alpha}, 0)$ a qual é um nó atrator e $X_2 = (\sqrt{-\alpha}, 0)$ a qual é uma sela, veja Figura 2.7. Como a

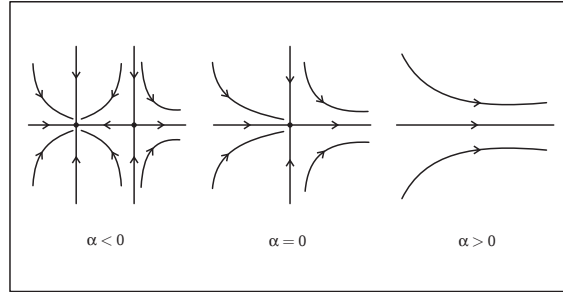


Figura 2.7: Bifurcação dobra em $\mathbb{R}^2$.

segunda coordenada dos equilíbrios é sempre nula, podemos considerar um diagrama de bifurcação no plano (x, α) como na Figura 2.6.

2.3.2 Bifurcação Hopf

Este tipo de bifurcação é caracterizado pelo nascimento de um ciclo limite a partir da mudança na estabilidade de um equilíbrio do qual, a parte linear, possui um par de autovalores imaginários puros, é também chamada de bifurcação de Andronov-Hopf.

Para descrever simplificadaamente esta bifurcação consideremos o sistema (2-8) com $k = 1$ e F diferenciável satisfazendo

- (i) $\alpha = 0$ é o valor de bifurcação e para $|\alpha|$ suficientemente pequena o sistema possui uma família de equilíbrios $X^0(\alpha)$;
- (ii) a matriz Jacobiana $A(\alpha) = D_X F(X^0(\alpha), \alpha)$ possui um par de autovalores complexos

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha),$$

com $\mu(0) = 0$ e $\omega(0) = \omega_0 > 0$.

Quando α passa através de $\alpha = 0$, o equilíbrio muda de estabilidade e um ciclo limite bifurca desse ponto. Se nenhum outro autovalor de $A(0)$ tem parte real nula, esta bifurcação é de codimensão 1, i.e., precisamos de apenas um parâmetro para obter um desdobramento completo do equilíbrio.

Um resultado importante neste sentido, demonstrado em [14], é o seguinte,

Teorema 2.12 (Teorema de Hopf) Qualquer sistema da forma

$$\dot{X} = F(X, \alpha),$$

com $X \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tendo em $\alpha = 0$ o equilíbrio $X = 0$ com autovalores

$$\lambda_{1,2}(0) = \pm \omega_0 i, \quad \omega_0 > 0,$$

é localmente topologicamente equivalente, próximo a origem, a uma das seguintes formas normais

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pm (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ilustramos este caso com um exemplo em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.13 Considere o sistema planar

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(\alpha - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(\alpha - x^2 - y^2), \end{cases} \quad (2-9)$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$. Este sistema possui um único ponto de equilíbrio na origem e

$$D_X F(0, \alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Os autovalores desta matriz são $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$. Fazendo uma mudança para coordenadas polares ($x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$) este sistema se torna

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\alpha - r^2) \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases} \quad (2-10)$$

Assim, se $\alpha \leq 0$ temos $\dot{r} < 0$ e portanto a origem é um foco atrator e se $\alpha > 0$ temos $\dot{r} > 0$ se $\sqrt{\alpha} < r$, $\dot{r} < 0$ se $0 < r < \sqrt{\alpha}$ e $\dot{r} = 0$ se $r = \sqrt{\alpha}$ logo a origem é um foco repulsor e temos um ciclo limite de raio $\sqrt{\alpha}$ o qual é atrator, veja a Figura 2.8. Podemos considerar

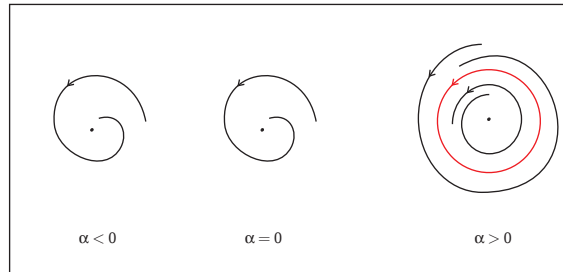


Figura 2.8: Bifurcação Hopf em $\mathbb{R}^2$.

o diagrama de bifurcação no plano (r, α) como na Figura 2.9.

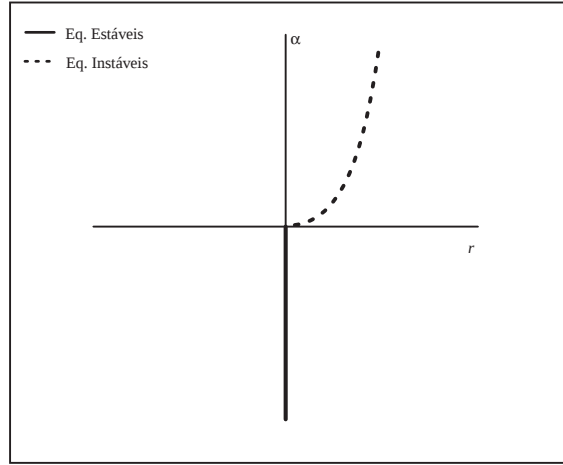


Figura 2.9: Diagrama de bifurcação do caso Hopf.

2.3.3 Bifurcação Zero-Hopf

Consideremos o sistema tri-dimensional suave a dois parâmetros,

$$\dot{X} = f(X, \alpha), \quad X \in \mathbb{R}^3 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}^2. \quad (2-11)$$

Assumamos que $f(0, 0) = 0$ e que a parte linear de f neste ponto possua um autovalor nulo, $\lambda_1 = 0$, e dois autovalores, conjugados, imaginários puros, $\lambda_{2,3} = \pm wi$ com $w > 0$. O desbobrimento que ocorre quando fazemos α variar é conhecido como *bifurcação zero-Hopf*, *bifurcação dobra-Hopf*, *bifurcação sela-nó-Hopf* ou ainda *bifurcação Gavrilov-Guckenheimer*.

Este tipo de bifurcação é uma mistura de bifurcações dos tipos dobra e Hopf, e tem codimensão 2. Um sistema deste tipo apresenta uma dinâmica bem rica, com aparecimento de ciclos limites, órbitas homoclínicas e heteroclínicas, mas não analisaremos e nem apresentaremos diagramas de bifurcação devido a complexidade dos mesmos e pelo fato de nosso interesse ser apenas conceitual, maiores detalhes deste tipo de bifurcação podem ser encontrados em [14].

2.4 O Teorema da Função Implícita

Enunciaremos, sem demonstração, o Teorema da Função Implícita e daremos alguns exemplos (ver [10] e [4]). Faremos isto para que no decorrer do trabalho sua aplicação fique mais clara e direta.

Considere o sistema

$$f_i(x, \alpha) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2-12)$$

com $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}^k$. O teorema irá estabelecer condições suficientes para que este sistema seja localmente resolvido para x como função do parâmetro α .

As funções do sistema (2-12) definem uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(x, \alpha) = (f_1(x, \alpha), \dots, f_n(x, \alpha))$. Se f é diferenciável denotaremos por $D_x f(x, \alpha)$ a matriz Jacobiana $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, \alpha) \right)_{i,j=1,\dots,n}$. Com base nisto enunciamos,

Teorema 2.14 (Teorema da Função Implícita) *Seja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$. Suponha que $f(x_0, \alpha_0) = 0$ e que $\det(D_x f(x_0, \alpha_0)) \neq 0$. Então, existem vizinhanças U de x_0 em $\mathbb{R}^n$ e V de α_0 em $\mathbb{R}^k$ e uma aplicação $X : V \rightarrow U$ tal que para todo $\alpha \in V$, o sistema (2-12) tem uma única solução $x = X(\alpha) \in U$. Além disso, X é de classe C^r . Se f é analítica numa vizinhança de (x_0, α_0) então, X é analítica numa vizinhança de α_0 . Em resumo,*

$$f(X(\alpha), \alpha) \equiv 0, \quad X(\alpha_0) = x_0.$$

Seguem dois exemplos de aplicação deste Teorema.

Exemplo 2.15 *Seja $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x, \alpha) = x^2 - \alpha x$. Assim, $g(0, \alpha) = 0$ e $g'(0, \alpha) = -\alpha$ logo para todo $\alpha_0 \neq 0$ temos vizinhanças U de $x = 0$ e V de α_0 onde está definida única aplicação $X : V \rightarrow U$ tal que $g(X(\alpha), \alpha) = 0$ e $X(\alpha_0) = 0$ então $X(\alpha) = 0$ é esta solução.*

Exemplo 2.16 *Considere $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada da seguinte forma*

$$f(X, \alpha) = (x + 2\alpha y, x + (1 + 2\alpha)y + \alpha - 1).$$

Temos:

- $f(0, 1) = (0, 0)$,
- $D_X f(0, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$,
- $\det(D_X f(0, 1)) = 1 \neq 0$,

então, existem uma vizinhança U da origem em $\mathbb{R}^2$, uma vizinhança V de $\alpha_0 = 1$ em $\mathbb{R}$ e uma aplicação $X : V \rightarrow U$ tal que $X(1) = (0, 0)$ e $f(X(\alpha), \alpha) = (0, 0)$ para todo $\alpha \in V$. Podemos, depois de algumas manipulações algébricas simples, encontrar explicitamente a aplicação X , e obtemos

$$X(\alpha) = (-2\alpha(1 - \alpha), 1 - \alpha).$$

Então, o Teorema da Função Implícita garante que esta é a única solução numa vizinhança do ponto $(0, 1) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.

2.5 A Redução de Liapunov-Schmidt

Consideremos um sistema de n equações

$$\Phi_i(y, \alpha) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2-13)$$

onde $\Phi_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ e $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ é uma aplicação diferenciável, sendo $y = (y_1, \dots, y_n)$ a variável desconhecida e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ um vetor de parâmetros. Assumimos que $\Phi_i(0, 0) = 0$ e assim descrevemos as soluções deste sistema numa vizinhança da origem.

Seja $D_y\Phi(0, 0)$ a matriz Jacobiana, $\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_j}(0, 0)\right)_{n \times n}$. Se esta matriz tem posto máximo, i.e., $\text{posto}(D_y\Phi(0, 0)) = n$, segue do Teorema da função implícita que (2-13) pode ser unicamente resolvido para y como uma função de α . O próximo caso a ser analisado é quando $\text{posto}(D_y\Phi(0, 0)) = n - 1$, que é o caso de interesse no decorrer deste trabalho e portanto é o único caso que analisamos aqui.

A idéia agora é mostrar que as soluções do sistema (2-13) podem ser colocadas em correspondência biunívoca com as soluções de uma equação da forma

$$g(x, \alpha) = 0, \quad (2-14)$$

onde $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. Esta é a redução de Liapunov-Schmidt para (2-13).

2.5.1 Construção das Equações Reduzidas

Para sintetizar a notação escrevemos $L = D_y\Phi(0, 0)$ e por $\text{Nuc}(L)$, $\text{Im}(L)$ entendemos o núcleo e a imagem da transformação linear L . Além disso, escolhemos os espaços vetoriais M e N sendo os complementos ortogonais de $\text{Nuc}(L)$ e $\text{Im}(L)$ respectivamente, assim obtemos duas decomposições de $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \text{Nuc}(L) \oplus M, \quad (2-15)$$

e

$$\mathbb{R}^n = \text{Im}(L) \oplus N. \quad (2-16)$$

Como $\text{posto}(L) = n - 1$ temos que $\dim(\text{Im}(L)) = n - 1$ e, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, obtemos que $\dim(\text{Nuc}(L)) = 1$, consequentemente, $\dim(M) = n - 1$ e $\dim(N) = 1$. Consideremos E a matriz projeção de $\mathbb{R}^n$ sobre $\text{Im}(L)$ com $\text{Nuc}(E) = N$, i.e., E é a matriz projeção ortogonal de $\mathbb{R}^n$ sobre $\text{Im}(L)$, assim a projeção complementar, $I - E$, tem imagem igual a N e núcleo igual a $\text{Im}(L)$. Desta forma, se $u \in \mathbb{R}^n$ então

$$u = 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad Eu = 0 \quad \text{e} \quad (I - E)u = 0. \quad (2-17)$$

A primeira implicação é trivial pois E e $I - E$ são lineares. A implicação reversa pode ser estabelecida observando que $\text{Nuc}(E) \cap \text{Nuc}(I - E) = \{0\}$.

Com isto, se $(y, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ é uma solução de (2-13), i.e., $\Phi(y, \alpha) = 0$ podemos colocar esta solução em correspondência com o par de equações equivalentes

$$\begin{aligned} (a) \quad E\Phi(y, \alpha) &= 0, \\ (b) \quad (I - E)\Phi(y, \alpha) &= 0. \end{aligned} \tag{2-18}$$

A idéia da redução de Liapunov-Schmidt é que a equação de (2-18-a) pode ser resolvida para $n - 1$ das variáveis y e então, substituindo estes valores na segunda equação de (2-18-b), obtemos o restante desconhecido.

Seja $y \in \mathbb{R}^n$, da decomposição (2-16) podemos escrever $y = v + w$ com $v \in \text{Nuc}(L)$ e $w \in M$, e escrevemos (2-18-a) da seguinte forma

$$E\Phi(v + w, \alpha) = 0. \tag{2-19}$$

O que nos dá uma aplicação $F : \text{Nuc}(L) \times M \times \mathbb{R}^k \rightarrow \text{Im}(L)$, com

$$F(v, w, \alpha) = E\Phi(v + w, \alpha).$$

Com base nisto, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 2.17 *Existem uma vizinhança, $\Omega \subset \text{Nuc}(L) \times \mathbb{R}^k$, de $(0, 0)$ e uma aplicação $W : \Omega \rightarrow M$ satisfazendo*

- (i) $E\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha) = 0$, para todo $(v, \alpha) \in \Omega$;
- (ii) $W(0, 0) = 0$.

Demonstração. Utilizando a regra da cadeia para derivar F com respeito a w obtemos

$$D_w F(0, 0, 0) = ED_y \Phi(0, 0) |_{M=EL} |_{M=L} |_M,$$

pois E age como a identidade em $\text{Im}(L)$. Portanto, a aplicação linear

$$L : M \rightarrow \text{Im}(L)$$

é invertível. Segue, do Teorema da Função Implícita, que (2-18-a) admite uma única solução para w como função de v e α em uma vizinhança, $\Omega \subset \text{Nuc}(L) \times \mathbb{R}^k$, da origem. Escrevemos $w = W(v, \alpha)$, com $W : \Omega \rightarrow M$ satisfazendo $W(0, 0) = 0$ e

$$F(v, W(v, \alpha), \alpha) = E\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha) = 0,$$

para todo $(v, \alpha) \in \Omega$.

□

Substituindo W em (2-18-b) obtemos a aplicação reduzida $\phi : \text{Nuc}(L) \times \mathbb{R}^k \rightarrow N$ onde

$$\phi(v, \alpha) = (I - E)\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha). \quad (2-20)$$

Desta forma os zeros de $\phi(v, \alpha)$ estão em correspondência biunívoca com os zeros de $\Phi(y, \alpha)$ da seguinte forma

$$\phi(v, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \Phi(v + W(v, \alpha), \alpha) = 0.$$

Esta função reduzida ϕ tem todas as informações necessárias para a redução de Liapunov-Schmidt e é uma aplicação entre subespaços unidimensionais de $\mathbb{R}^n$. Escolhendo coordenadas explícitas para $\text{Nuc}(L)$ e N queremos obter uma equação reduzida $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, que depende desta escolha e da escolha anterior de M e N . Estabelecemos isto a seguir.

Sejam $v_0 \in \text{Nuc}(L)$ e $v_0^* \in N$ não nulos, onde N é escolhido com respeito ao produto interno usual

$$\langle y, z \rangle = \sum_{i=1}^n y_i z_i.$$

Qualquer vetor $v \in \text{Nuc}(L)$ pode ser unicamente escrito na forma $v = xv_0$ onde $x \in \mathbb{R}$. Definimos $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x, \alpha) = \langle v_0^*, \phi(xv_0, \alpha) \rangle. \quad (2-21)$$

Uma vez que $\phi(xv_0, \alpha) \in N$ então $g(x, \alpha) = 0$ se, e somente se, $\phi(xv_0, \alpha) = 0$. Desta forma, os zeros de g também estão em correspondência biunívoca com as soluções de $\Phi(y, \alpha) = 0$.

Uma vez que $v_0^* \in N$ e para qualquer vetor $V \in \mathbb{R}^n$, $EV \in \text{Im}(L)$ temos $\langle v_0^*, EV \rangle = 0$. Portanto,

$$\langle v_0^*, (I - E)V \rangle = \langle v_0^*, V \rangle. \quad (2-22)$$

Agora, substituindo a expressão de ϕ dada em (2-20) na equação (2-21) obtemos

$$\begin{aligned} g(x, \alpha) &= \langle v_0^*, (I - E)\Phi(xv_0 + W(xv_0, \alpha), \alpha) \rangle \\ &= \langle v_0^*, \Phi(xv_0 + W(xv_0, \alpha), \alpha) \rangle, \end{aligned}$$

pois estamos assumindo $E\Phi(xv_0 + W(xv_0, \alpha), \alpha) = 0$.

Mostramos então que as soluções do sistema (2-13) estão em correspondência biunívoca com as soluções de (2-21). A essência deste método de redução é mostrar que o Teorema da Função Implícita é aplicável em situações onde sua aplicabilidade não é aparente.

Utilizamos acima a denominação "função reduzida" para nos referir a ambas, $\phi(v, \alpha)$ e $g(x, \alpha)$, pois elas contém a mesma informação (g é apenas uma representação de ϕ em coordenadas específicas). A diferença entre estas funções está no fato de ϕ ser mais conveniente para fins analíticos, enquanto g é mais conveniente para fins práticos. Assim podemos sempre fazer uso da mais conveniente.

Forma Canônica e o Método das *Closing Equations*

A forma mais simples de se modelar um problema prático é por meio de um sistema linear porém, nem sempre conseguimos um resultado satisfatório com esta aproximação. Uma forma natural de extensão é considerando sistemas seccionalmente lineares.

Trabalhamos com sistemas definidos em $\mathbb{R}^3$ modelando uma situação comum em aplicações, a saber, sistemas dinâmicos definidos por campos de vetores contínuos seccionalmente lineares, simétricos com relação a origem, com três zonas e duas fronteiras paralelas.

Denotamos aqui $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ como o espaço das matrizes quadradas de ordem 3 com entradas em $\mathbb{R}$. Primeiramente introduzimos uma forma canônica, forma generalizada de Liénard, para motivar a escolha do sistema a ser analisado no Capítulo 4. Na sequência, apresentamos o método das *closing equations* para servir como ferramenta na investigação da existência e estabilidade de ciclos limite.

Vamos considerar que as fronteiras de separação, das regiões onde os campos estão definidos, são planos porém, pode-se considerar o caso mais geral onde estas fronteiras são superfícies suaves.

3.1 Forma Canônica de Campos Vetoriais Seccionalmente Lineares

Consideremos a equação diferencial

$$\dot{X} = F(X)$$

com $X = (x, y, z)^T$. Dizemos que esta define um sistema seccionalmente linear se existem quatro vetores B_0, B_1, B_2 e v em $\mathbb{R}^3$, com $v \neq 0$, dois escalares $\delta_1 < \delta_2$ em $\mathbb{R}$ e três matrizes A_0, A_1, A_2 em $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ tais que

$$\dot{X} = F(X) = \begin{cases} A_0X + B_0, & \text{se } v^T X < \delta_1 \\ A_1X + B_1, & \text{se } \delta_1 \leq v^T X \leq \delta_2 \\ A_2X + B_2, & \text{se } \delta_2 < v^T X \end{cases}, \quad (3-1)$$

e F é contínua, isto é, para todo X tal que $v^T X = \delta_i$ temos

$$A_{i-1}X + B_{i-1} = A_iX + B_i, \quad i=1,2.$$

Considerando que os planos $v^T X = \delta_i$, $i = 1, 2$, são paralelos, podemos transformá-los, por uma mudança de coordenadas linear, nos planos $x = \pm 1$, i.e., sem perda de generalidade podemos assumir que $v = e_1$, $\delta_1 = -1$ e $\delta_2 = 1$. De fato, seja P_1 um ponto no plano $v^T X = \delta_1$, a reta, r , perpendicular a este plano por P_1 intersecta o plano $v^T X = \delta_2$ em um ponto P_2 , seja P_0 o ponto médio do segmento $\overline{P_1 P_2}$. Estes pontos são distintos pois $\delta_1 \neq \delta_2$, então por meio de uma translação e uma rotação (mudanças de coordenadas lineares) podemos fazer com que P_0 seja a origem e r coincida com o eixo x , agora fazendo $(x, y, z) \mapsto \left(\frac{2}{|P_2 - P_1|} x, y, z \right)$ obtemos o resultado desejado.

Se a parte linear em duas zonas adjacentes coincidem, então pela condição de continuidade o campo deve coincidir tornando nestas regiões o sistema definido em duas zonas. Como queremos estudar campos com três zonas vamos assumir que $A_i \neq A_{i+1}$, $i = 0, 1$. Além disso, estamos interessados no estudo de sistemas simétricos, i.e., sistemas onde $F(-X) = -F(X)$, logo devemos ter $A_0 = A_2 = \tilde{A}$ e $B_0 = -B_2 = -\tilde{B}$.

Da continuidade de F obtemos

$$A_{i-1}(\delta_i e_1 + \mu e_k) + B_{i-1} = A_i(\delta_i e_1 + \mu e_k) + B_i$$

para todo $\mu \in \mathbb{R}$ e $k = 2, 3$, $i = 1, 2$. Em particular, para $\mu = 0$ e levando em conta as igualdades $A_0 = A_2 = \tilde{A}$, $B_0 = -B_2 = -\tilde{B}$, segue que $B_1 = 0$ e $\tilde{B} = (A_1 - \tilde{A})e_1$. Assim, para $\mu = 1$ obtemos $A_1 e_k = \tilde{A} e_k$, $k = 2, 3$, logo as matrizes A_1 e $\tilde{A}$ diferem apenas na primeira coluna.

Com isto, o sistema (3-1) se torna

$$\dot{X} = F(X) = \begin{cases} \tilde{A}X - \tilde{B}, & \text{se } x < -1 \\ A_1X, & \text{se } |x| \leq 1 \\ \tilde{A}X + \tilde{B}, & \text{se } x > 1 \end{cases}, \quad (3-2)$$

donde concluimos que este sistema pode ser escrito na forma

$$\dot{X} = AX + B\phi(e_1^T X), \quad (3-3)$$

com $\varphi(u) = \text{sat}(u)$, onde

$$\text{sat}(u) = \begin{cases} -1, & \text{se } u < -1 \\ u, & \text{se } |u| \leq 1 \\ 1, & \text{se } u > 1 \end{cases}, \quad (3-4)$$

$A = \tilde{A}$, $B = \tilde{B}$ e $A + Be_1^T = A_1$. Esta forma é conhecida como forma de Lure.

Este sistema possui 12 parâmetros e vamos trabalhar com a finalidade de reduzir esta quantidade.

3.1.1 Forma Generalizada de Liénard

Os primeiros resultados relacionados as formas canônicas estão relacionados com conceitos de Teoria do Controle e, a partir de (3-3), podemos estender alguns conceitos como segue.

Definição 3.1 O sistema (3-3) é dito observável se a matriz de observabilidade

$$O = \begin{pmatrix} e_1 & | & e_1^T A & | & e_1^T A^2 \end{pmatrix}^T$$

tem posto máximo.

Para nossos propósitos consideramos (3-3) observável. Mas, caso esta hipótese não seja satisfeita, resultados similares podem ser estabelecidos, ver [3].

Um resultado básico na Teoria de Controle é que o posto da matriz de observabilidade é invariante por mudanças de coordenadas lineares. De fato, basta observar que, se fazemos $Y = PX$, a matriz de observabilidade passa a ser OP^{-1} .

No que segue, determinaremos uma forma canônica para sistemas observáveis a qual é denominada forma canônica generalizada de Liénard.

Proposição 3.2 (Forma Canônica Generalizada de Liénard) Se o sistema

$$\dot{X} = AX + B\varphi(e_1^T X), \quad \text{com } X, B, e_1 \in \mathbb{R}^3 \text{ e } A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$$

é observável, existe uma transformação linear $X = PY$, tal que, nas novas variáveis o sistema se escreve como:

$$\dot{Y} = \begin{bmatrix} d_1 & -1 & 0 \\ d_2 & 0 & -1 \\ d_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} Y + \bar{B}\varphi(y_1), \quad (3-5)$$

onde $\bar{B} = P^{-1}B$.

Demonstração. Se P é uma matriz regular então P é invertível e fazendo $X = PY$ obtemos $Y = P^{-1}X$ e

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= P^{-1}\dot{X} \\ &= P^{-1}(AX + B\varphi(e_1^T X)) \\ &= P^{-1}AX + P^{-1}B\varphi(e_1^T X) \\ &= P^{-1}APY + P^{-1}B\varphi(e_1^T PY).\end{aligned}$$

Então, vamos escolher adequadamente a matriz P para que esta expressão seja igual a (3-5). Por hipótese o sistema é observável, logo a matriz de observabilidade O tem posto máximo, daí esta matriz define uma transformação linear bijetora então, existe um único $V \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$OV = \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_1^T A \\ e_1^T A^2 \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3-6)$$

Consideremos

$$S = \begin{bmatrix} A^2V & | & AV & | & V \end{bmatrix},$$

assim,

$$e_1^T S = \begin{bmatrix} e_1^T A^2V & | & e_1^T AV & | & e_1^T V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Seja } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora façamos $P = SD$, logo $e_1^T P = e_1^T SD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\varphi(e_1^T PY) = \varphi(y_1)$.

Resta mostrar que $P^{-1}AP$ é regular e dada como em (3-5). Para isto, vejamos que S é regular. De fato, se S não fosse regular existiria uma combinação linear não trivial tal que

$$\alpha_1 A^2V + \alpha_2 AV + \alpha_3 V = 0.$$

Multiplicando, pela esquerda, por e_1^T obtemos

$$\alpha_1 e_1^T A^2V + \alpha_2 e_1^T AV + \alpha_3 e_1^T V = 0,$$

utilizando (3-6) obtemos $\alpha_1 = 0$. Multiplicando agora por $e_1^T A$ obtemos $\alpha_2 = 0$ e por $e_1^T A^2$ obtemos $\alpha_3 = 0$, contradizendo a suposição de a combinação linear ser não trivial.

Portanto, S é regular e como, claramente, D é regular temos P regular.

Se $\bar{A} = P^{-1}AP$ então $P\bar{A} = AP$ daí,

$$SD\bar{A} = ASD$$

$$\begin{bmatrix} A^2V & AV & V \end{bmatrix} D\bar{A} = \begin{bmatrix} A^3V & A^2V & AV \end{bmatrix} D$$

$$\begin{bmatrix} A^2V & -AV & V \end{bmatrix} \bar{A} = \begin{bmatrix} A^3V & -A^2V & AV \end{bmatrix}.$$

Comparando as duas últimas colunas concluímos que $\bar{A}$ deve ter a forma esperada. $\square$

Podemos notar que:

- (i) a forma generalizada de Liénard possui apenas 6 parâmetros, isto significa que tivemos uma redução significativa em relação ao número de parâmetros do sistema inicial (12 parâmetros);
- (ii) as entradas da primeira coluna da matriz em (3-5) estão diretamente relacionadas com os coeficientes do polinômio característico da matriz A . Uma vez que A e $\bar{A}$ são semelhantes devem possuir os mesmos autovalores, donde o polinômio característico de A deve ser

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + d_1\lambda^2 - d_2\lambda + d_3;$$

- (iii) como as matrizes A e $\bar{A}$ são semelhantes temos conservados o traço, T , o determinante, D , e a soma dos menores principais de ordem 2, M . Logo $d_1 = T$, $d_2 = M$ e $d_3 = D$;
- (iv) podemos reescrever o sistema (3-3) com

$$A = \begin{bmatrix} T & -1 & 0 \\ M & 0 & -1 \\ D & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} t - T \\ m - M \\ d - D \end{bmatrix}, \quad A_1 = A + Be_1^T,$$

onde t, m, d e T, M, D são o traço, soma dos menores principais de ordem 2 e determinante das matrizes A_1 e A , respectivamente.

3.2 Closing Equations

Considerando o sistema (3-3) estamos interessados em analisar a existência de ciclos limite. O primeiro passo para esta análise é determinar a existência de órbitas periódicas do sistema.

Uma vez que estamos trabalhando com sistemas seccionalmente lineares e, sabemos que sistemas lineares não admitem ciclos limite, podemos refinar nossa análise e buscar por órbitas periódicas que estejam contidas em pelo menos duas zonas. Temos então dois casos possíveis: ciclos limite em duas zonas e ciclos limite em três zonas, os quais denominaremos por ciclos bi-zonais e ciclos tri-zonais, respectivamente.

Para simplificar notação, consideremos $\Sigma_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = -1\}$, $\Sigma_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 1\}$, $\mathcal{E}, \mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ as regiões onde $x < -1$, $|x| < 1$ e $x > 1$, respectivamente.

Em ambos os casos, ciclos bi-zonais e tri-zonais, a ideia é considerar o fluxo do campo em cada região e obter um sistema cujas soluções correspondem a órbitas periódicas do sistema.

Para que exista um ciclo limite, ele deve ser transversal a pelo menos um dos planos Σ_- e Σ_+ pois, caso contrário estaria contido em uma zona onde o campo é linear o que não pode ocorrer.

Para o caso tri-zonal o ciclo intersecta transversalmente os dois planos de separação, então podemos escolher $P_0 \in \Sigma_+$ para o qual é possível considerar

- (i) τ_D o tempo gasto pela órbita por este ponto, através da zona $\mathcal{D}$, para encontrar novamente o plano Σ_+ e seja $P_1 \in \Sigma_+$ o ponto de encontro;
- (ii) τ_C o tempo gasto pela órbita por P_1 , através da zona $\mathcal{C}$, para encontrar o plano Σ_- no ponto P_2 ;
- (iii) τ_E o tempo gasto pela órbita por P_2 , através da zona $\mathcal{E}$, para encontrar novamente o plano Σ_- no ponto P_3 e
- (iv) τ_{C^*} o tempo gasto pela órbita por P_3 , através da zona $|x| \leq 1$, para encontrar o plano Σ_+ no ponto P_0 .

Pela simetria do sistema esta órbita é simétrica com respeito a origem, logo devemos ter $P_2 = -P_0$, $P_3 = -P_1$, $\tau_D = \tau_E$ e $\tau_{C^*} = \tau_C$ como na Figura 3.1.

Como vimos no Capítulo 2, a solução de um sistema linear da forma $\dot{X} = AX + B$ com condição inicial $X(0)$ é

$$X(\tau) = e^{A\tau}X(0) + \int_0^\tau e^{A(\tau-s)}Bds. \quad (3-7)$$

Caso $AX + B = 0$ tenha solução $\bar{X}$, podemos transformar este sistema em um sistema homogêneo e obter

$$X(\tau) = e^{A\tau}(X(0) - \bar{X}) + \bar{X}. \quad (3-8)$$

Com as observações feitas, é suficiente que estudemos a órbita conectando P_0 e $P_2 = -P_0$ e, com a notação estabelecida acima, devemos ter

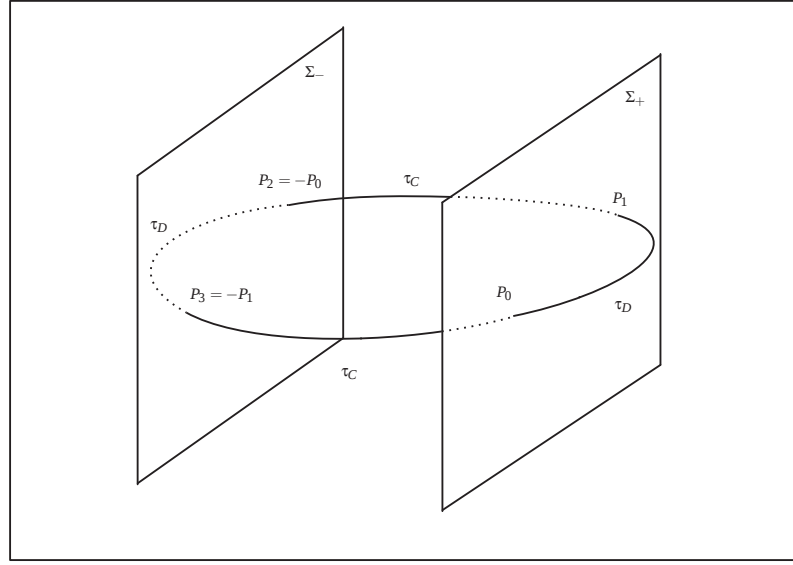


Figura 3.1: Esquema ilustrando uma órbita periódica tri-zonal.

$$e^{A\tau_D}P_0 + \int_0^{\tau_D} e^{A(\tau_D-s)}Bds - P_1 = 0, \quad (3-9)$$

e

$$e^{A\tau_C}P_1 + P_0 = 0. \quad (3-10)$$

As equações (3-9)-(3-10) são chamadas *closing equations*. Se $P_0 = (1, y_0, z_0)^T$ e $P_1 = (1, y_1, z_1)$, então temos um sistema com seis incógnitas, τ_D , τ_C , y_0 , z_0 , y_1 e z_1 .

Com esta construção, estabelecemos a seguinte proposição.

Proposição 3.3 *Suponha que o sistema (3-3) tenha uma órbita periódica tri-zonal que intersecta transversalmente Σ_+ nos pontos P_0 e P_1 , com tempo de volta $\tau_D > 0$ na região $\mathcal{D}$, e que $\tau_C > 0$ seja o tempo necessário para a órbita por P_1 intersectar (transversalmente) Σ_- no ponto $-P_0$ na região $\mathcal{C}$. Então, os valores de τ_D , τ_C , P_0 e P_1 satisfazem as closing equations (3-9)-(3-10).*

Cosideramos agora os ciclos limite bi-zonais. Levando em conta a simetria do sistema é suficiente considerar as zonas adjacentes ao plano Σ^+ e assim obtemos o seguinte sistema,

$$\dot{X} = \begin{cases} AX + B & \text{se } x > 1 \\ (A + Be_1^T)X & \text{se } x \leq 1 \end{cases}. \quad (3-11)$$

Um ciclo limite do sistema (3-11) contido na região onde $x \in (-1, \infty)$ também é um ciclo limite do sistema (3-3). Além disso, a simetria do problema força a existência de um outro ciclo limite para o sistema original, simétrico ao obtido, contido na região onde $x \in (-\infty, 1)$. Veja Figura 3.2.

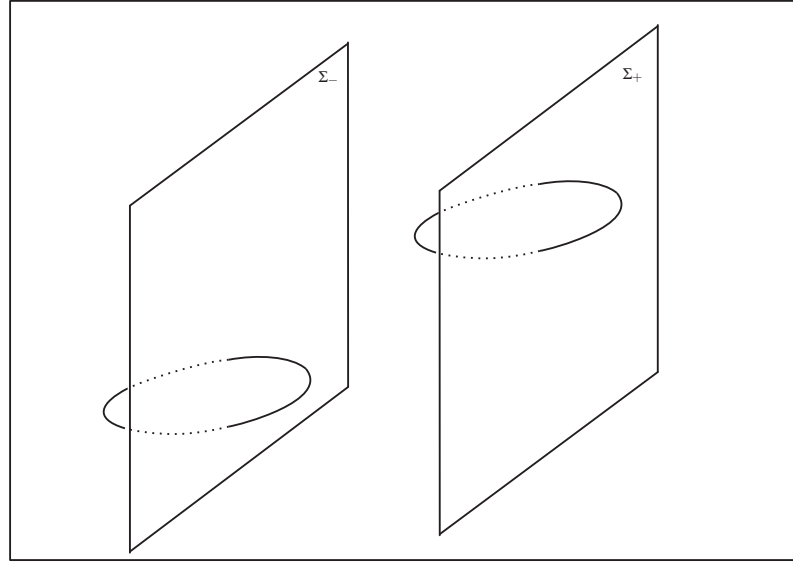


Figura 3.2: Ciclos bi-zonais simétricos.

Se existe um ciclo limite do sistema (3-11) ele deve cruzar transversalmente o plano Σ^+ , caso contrário estaria totalmente contido em uma zona onde o sistema é linear, o que não pode ocorrer. Assumamos que este ciclo limite tenha início no ponto $P_0 = (1, y_0, z_0) = (1, p_0) \in \Sigma^+$ passando através da região $\mathcal{D}$ e retornando ao plano Σ^+ no ponto $P_1 = (1, y_1, z_1) = (1, p_1)$ após um tempo τ_D , atravessando para a região $\mathcal{C}$ e finalmente retornando ao ponto P_0 após um tempo τ_C , como na Figura 3.3.

Com esta nova formulação as *closing equations* se tornam

$$e^{A\tau_D}P_0 + \int_0^{\tau_D} e^{A(\tau_D-s)}Bds - P_1 = 0, \quad (3-12)$$

e

$$e^{A\tau_C}P_1 - P_0 = 0. \quad (3-13)$$

Novamente temos um sistema com seis parâmetros e seis equações. As idéias apresentadas acima podem ser resumidas na seguinte proposição.

Proposição 3.4 *Suponha que o sistema (3-3) tenha uma órbita periódica bi-zonal que intersecta transversalmente Σ_+ nos pontos P_0 e P_1 , com tempo de volta $\tau_D > 0$ na região $\mathcal{D}$, e que $\tau_C > 0$ seja o tempo necessário para a órbita por P_1 intersectar (transversalmente) novamente Σ_+ no ponto P_0 na região $\mathcal{C}$. Então, os valores de τ_D , τ_C , P_0 e P_1 satisfazem as closing equations (3-12)-(3-13).*

Podemos concluir que, se existe uma órbita periódica do sistema (3-3), ela deve satisfazer as *closing equations* correspondentes e, se uma órbita deste sistema satisfaz o sistema formado pelas *closing equations* esta deve ser periódica. O que devemos fazer

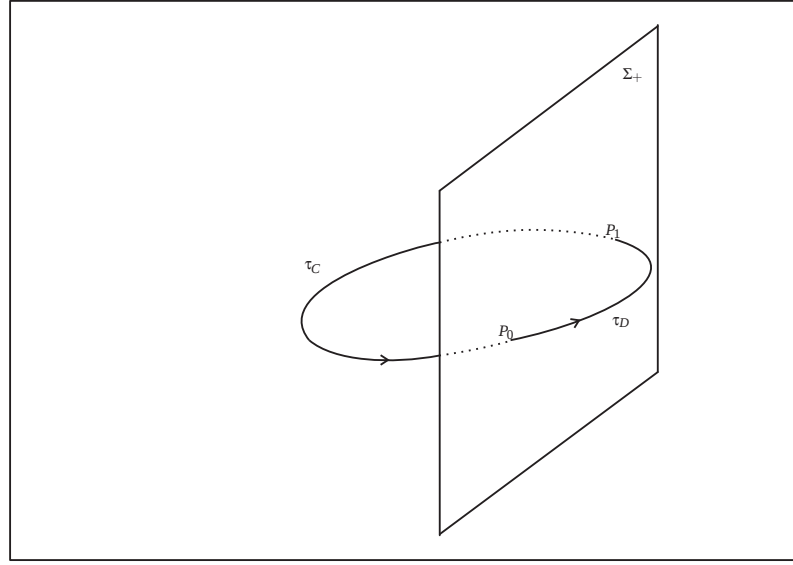


Figura 3.3: Esquema ilustrando uma órbita periódica bi-zonal.

para garantir a existência de ciclos limite é mostrar que algum dos sistemas tem uma solução isolada pois, assim, teremos uma órbita periódica isolada, ou seja, um ciclo limite.

3.2.1 Aplicações de Poincaré

Neste contexto podemos definir aplicações, conforme visto no Capítulo 2, com a finalidade de analisar a estabilidade dos ciclos determinados pelo método das *closing equations*.

Como antes, analisaremos primeiro o caso tri-zonal e posteriormente faremos as adaptações necessárias para o caso bi-zonal.

Seja Γ uma órbita periódica tri-zonal, simétrica com respeito a origem, do sistema (3-3) que intersecta transversalmente o plano Σ_+ nos pontos P_0 e P_1 e o plano Σ_- nos pontos P_2 e P_3 .

Seja ϕ o fluxo do sistema (3-3) e, assumamos, que $\phi(\tau_0, P_0) = P_1$ para um tempo $\tau_0 > 0$ e $\phi(\tau_1, P_1) = P_2$ para um tempo $\tau_1 > 0$. Da condição de transversalidade podemos garantir a existência de vizinhanças abertas, U_0 e U_1 , de P_0 e P_1 , respectivamente, e uma aplicação $\tau_D : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tau_D(P_0) = \tau_0$ e $\phi(\tau_D(P), P) \in U_1 \cap \Sigma_+$ para todo $P \in U_0 \cap \Sigma_+$.

Denotamos por Π_D a aplicação na zona $\mathcal{D}$ associada a órbita periódica Γ , ou seja,

$$\begin{aligned} \Pi_D : U_0 \cap \Sigma_+ &\rightarrow U_1 \cap \Sigma_+ \\ P &\mapsto \phi(\tau_D(P), P). \end{aligned}$$

De forma análoga, garantimos a existência de vizinhanças, V_1 e V_2 , de P_1 e P_2 , respectivamente, e uma aplicação $\tau_C : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tau_C(P_1) = \tau_1$ e $\phi(\tau_C(P), P) \in V_2 \cap \Sigma_-$.

Denotamos por Π_C a aplicação na zona CC associada a órbita Γ , ou seja,

$$\begin{aligned}\Pi_C : V_1 \cap \Sigma_+ &\rightarrow V_2 \cap \Sigma_- \\ P &\mapsto \phi(\tau_C(P), P).\end{aligned}$$

Dados pontos $P \in \Sigma_+$ e $\bar{P} \in \Sigma_-$ existem únicos p e $\bar{p}$ em $\mathbb{R}^2$ tais que

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} \in \Sigma_+, \quad \bar{P} = \begin{bmatrix} -1 \\ \bar{p} \end{bmatrix} \in \Sigma_-.$$

Chamamos p e $\bar{p}$ de coordenadas reduzidas de P e $\bar{P}$, respectivamente. Então, se $\tilde{P} = \Pi_D(P)$ e $\tilde{\bar{P}} = \Pi_C(\tilde{P})$, associadas as aplicações Π_D e Π_C podemos considerar

$$\begin{aligned}\Pi_D : \mathbb{P}_2(U_0 \cap \Sigma_+) &\rightarrow \mathbb{P}_2(U_1 \cap V_1 \cap \Sigma_-) \\ p &\mapsto \Pi_D(p) = \tilde{p},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\pi_C : \mathbb{P}_2(U_1 \cap V_1 \cap \Sigma_+) &\rightarrow \mathbb{P}_2(V_2 \cap \Sigma_-) \\ \tilde{p} &\mapsto \pi(\tilde{p}) = \bar{p},\end{aligned}$$

onde $\mathbb{P}_2$ é a projeção canônica associada as duas últimas coordenadas.

Podemos redefinir os tempos de volta nas zonas $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}$ em função das coordenadas reduzidas e sem perda de generalidade podemos denotá-los por $\tau_D(p_0) = \tau_D(P_0)$ e $\tau_C(p_1) = \tau_C(P_1)$, respectivamente.

Com base nestes dados podemos definir

$$\begin{aligned}\Pi_1 : U_0 \cap \Sigma_+ &\rightarrow V_2 \cap \Sigma_- \\ P &\mapsto \Pi_1(P) = (\Pi_C \circ \Pi_D)(P),\end{aligned}$$

ou equivalentemente, $\Pi_1(P) = \phi(\tau_D(P) + \tau_C(\Pi_D(P)), P)$.

Do mesmo modo definimos

$$\begin{aligned}\pi_1 : \mathbb{P}_2(U_0 \cap \Sigma_+) &\rightarrow \mathbb{P}_2(V_2 \cap \Sigma_-) \\ p &\mapsto \pi_1(p) = (\pi_C \circ \Pi_D)(p).\end{aligned}$$

Aplicando um raciocínio análogo definimos aplicações Π_2 e π_2 em vizinhanças de P_2 e p_2 , respectivamente, com $\Pi_2(P) \in \Sigma_+$ e $\pi_2(p) \in \mathbb{P}_2(\Sigma_+)$. Assim definimos as aplicações de Poincaré

$$\begin{aligned}\Pi : U_0 \cap \Sigma_+ &\rightarrow \Sigma_+ \\ P &\mapsto \Pi(P) = (\Pi_2 \circ \Pi_1(P)),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\pi: \mathbb{P}_2(U_0 \cap \Sigma_+) &\rightarrow \mathbb{P}(\Sigma_+) \\ p &\mapsto \pi(p) = (\pi_2 \circ \pi_1(p)).\end{aligned}$$

Devido a simetria do sistema devemos ter $P_4 = \Pi_2(P_2) = -\Pi_1(-P_2) = -\Pi_1(-\Pi_1(P_0))$ e portanto $\Pi = (-\Pi_1) \circ (-\Pi_1)$ e, conseqüentemente, $\pi(p_0) = (-\pi_1) \circ (-\pi_1)(p_0)$.

A demonstração da proposição seguinte é muito extensa e não será mostrada aqui, mas pode ser encontrada de forma bem detalhada em [18].

Proposição 3.5 *Seja Γ uma órbita periódica simétrica tri-zonal do sistema (3-3), começando no ponto $P_0 = (1, p_0)$ e passando através de $P_1 = (1, p_1)$ com $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^2$, e $\tau_D > 0$, $\tau_C > 0$ os tempos de volta nas zonas $x > 1$ e $|x| \leq 1$, respectivamente. Considere as matrizes*

$$Q_C = \begin{bmatrix} 1 & D_p \tau_C(p_1) \\ 0 & D_p \pi_C(p_1) \end{bmatrix}, \quad Q_E = \begin{bmatrix} -1 & D_p \tau_D(p_0) \\ 0 & D_p \Pi_D(p_1) \end{bmatrix},$$

então, o produto das matrizes $M = e^{A_1 \tau_C(p_1)} e^{A_2 \tau_D(p_0)}$ é semelhante a matriz

$$Q_C Q_E = \begin{bmatrix} -1 & D_p \tau_D(p_0) + D_p \tau_C(p_1) D_p \Pi_D(p_0) \\ 0 & D_p \pi_2(p_1) D_p \pi_1(p_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & D_p \tau(p_0) \\ 0 & D_p \pi(p_0) \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos analisar o caso bi-zonal. Consideremos P_0 , P_1 e P_2 em Σ_+ , novamente, a transversalidade da órbita considerada e a continuidade do fluxo nos permite definir, em subconjuntos adequados de Σ_+ , aplicações Π_1 e Π_2 definidas em uma vizinhança de P_0 e P_1 tais que $\Pi_1(P_0) = P_1$ e $\Pi_2(P_1) = P_2$. Como queremos analisar uma órbita periódica devemos ter $P_2 = P_0$. Daí em uma vizinhança U de P_0 temos definida a aplicação de Poincaré $\Pi: U \rightarrow \Sigma_+$ com $\Pi(P_0) = \Pi_2 \circ \Pi_1(P_0)$.

Além disso, podemos definir as aplicações reduzidas Π_D e π_C tais que $\Pi_D(p_0) = p_1$ e $\pi_C(p_1) = p_0$, e sua composição $\pi = \pi_C \circ \Pi_D$. Definimos também, funções $\tau_D(p_0)$ e $\tau_C(p_1)$ como sendo o tempo necessário para a órbita por estes pontos voltarem a encontrar o plano de separação e $\tau(p_0) = \tau_D(p_0) + \tau_C(\Pi_D(p_0))$ para o tempo total gasto pela órbita periódica para retornar ao ponto inicial P_0 .

Um resultado análogo a Proposição 3.5 pode ser estabelecido para o caso bi-zonal, a demonstração deste fato também é extensa, ligeiramente diferente do caso tri-zonal e pode ser encontrada de forma detalhada em [2].

Proposição 3.6 *Assuma que o sistema (3-11) tenha uma órbita periódica transversal ao plano Σ_+ através dos pontos $(1, p_0)$ e $(1, p_1)$. Então, o produto das matrizes*

$$Q_C Q_E = \begin{bmatrix} 1 & D_p \tau_C(p_1) \\ 0 & D_p \pi_C(p_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & D_p \tau_D(p_0) \\ 0 & D_p \Pi_D(p_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & D_p \tau(p_0) \\ 0 & D_p \pi(p_0) \end{bmatrix}$$

é semelhante a matriz $M = e^{A_1 \tau_C(p_1)} e^{A \tau_D(p_0)}$.

Observemos que a matriz $Q_C Q_E$ da Proposição 3.5 tem um autovalor igual a -1 e os outros dois são os autovalores da diferencial da aplicação de Poincaré π . Do mesmo modo, na Proposição 3.6 temos um autovalor igual a 1 e os outros dois são os autovalores da diferencial da aplicação de Poincaré π .

Então, para determinar a estabilidade de uma órbita periódica nas condições estabelecidas, devemos saber se estes autovalores estão ou não dentro do círculo unitário. As proposições 3.5 e 3.6 são ferramentas importantes neste sentido e para auxiliar nesta análise temos o seguinte Lema.

Lema 3.7 *As soluções da equação $x^2 - px + q = 0$ estão dentro do círculo unitário se, e somente se, $|q| < 1$ e $|p| < q + 1$;*

Demonstração. Sabemos que esta equação tem duas raízes no corpo dos números complexos $\mathbb{C}$, denotemos por x_1 e x_2 tais raízes. Assim, temos $p = x_1 + x_2$ e $q = x_1 x_2$.

($\Rightarrow$) Assumamos que $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$. Dividiremos em dois casos:

(1º) Se $p^2 - 4q < 0$, então $x_1 = a + bi$ e $x_2 = a - bi$ com $b \neq 0$. Temos então $|q| = |x_1 x_2| < 1$, $|q| = q = a^2 + b^2$ e

$$\begin{aligned} 0 < (q - 1)^2 &= q^2 - 2q + 1 \Rightarrow q^2 + 1 > 2q \\ &\Rightarrow (q + 1)^2 = q^2 + 2q + 1 > 4q > p^2 \\ &\Rightarrow |p| < |q + 1| = q + 1. \end{aligned}$$

(2º) Se $p^2 - 4q \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} (1 - x_1^2)(1 - x_2^2) &> 0 \Rightarrow 1 + q^2 > x_1^2 + x_2^2 \\ &\Rightarrow (q + 1)^2 > p^2 \\ &\Rightarrow |p| < |q + 1| = q + 1. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Assumamos agora que, $|q| < 1$ e $|p| < q + 1$. Como $|q| = |x_1||x_2| < 1$ temos $|x_1| < 1$ ou $|x_2| < 1$. Sem perda de generalidade, suponhamos $|x_2| < 1$. De $|p| < 1 + q$ temos

$$\begin{aligned} |x_1 + x_2|^2 &< (q + 1)^2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 < (x_1 x_2)^2 + 1 \\ &\Rightarrow x_1^2(1 - x_2^2) < 1 - x_2^2 \\ &\Rightarrow x_1^2 < 1 \\ &\Rightarrow |x_1| < 1. \end{aligned}$$

□

- Como vimos, a matriz M na Proposição 3.5 tem um autovalor igual a -1 , se os outros dois são λ_1 e λ_2 e escrevemos $p = \lambda_1 + \lambda_2$, $q = \lambda_1 \lambda_2$ então, $\text{tr}(M) = p - 1$ e $\det(M) = -q$. Dessa forma a equação característica de M deve ser $(\lambda + 1)(\lambda^2 - p\lambda + q) = 0$ e λ_1, λ_2 são os autovalores de $D_p\pi(p_0)$. Do Lema 3.7 estes autovalores estão no interior do círculo unitário quando

$$|\det(M)| < 1 \quad \text{e} \quad |\text{tr}(M) + 1| < 1 - \det(M). \quad (3-14)$$

Os autovalores da aplicação de Poincaré, π , são λ_1 e λ_2 logo, se as condições em (3-14) são satisfeitas podemos concluir que a órbita em questão é estável.

- Para o caso bi-zonal a análise é análoga. A matriz M da Proposição 3.6 tem um autovalor igual a 1, se λ_1 e λ_2 são os outros dois autovalores então, escrevendo $p = \lambda_1 + \lambda_2$ e $q = \lambda_1 \lambda_2$ vemos que $\text{tr}(M) = 1 + p$, $\det(M) = q$ e a equação característica de M é $(\lambda - 1)(\lambda^2 - p\lambda + q) = 0$. Assim, λ_1, λ_2 são os autovalores da derivada $D_p\pi(p_0)$ e do Lema 3.7 ambas estão no interior do círculo unitário quando

$$|\det(M)| < 1 \quad \text{e} \quad |\text{tr}(M) - 1| < 1 + \det(M). \quad (3-15)$$

Portando, se as condições (3-15) são satisfeitas temos que a órbita em questão é estável.

Uma Família Especial de Campos Vetoriais

Neste Capítulo estudamos uma família especial de campos vetoriais dada na forma generalizada de Liénard vista no Capítulo 3 e utilizamos o método das *closing equations* para determinar a existência de ciclos limite.

Mais precisamente, exibimos uma família a dois parâmetros de campos vetoriais seccionalmente lineares, simétricos com três zonas e mostramos a coexistência de quatro ciclos limite, sendo dois tri-zonais e dois bi-zonais, para esta família.

Os resultados apresentados são de caráter local, exceto o Teorema 4.5 que tem caráter global.

4.1 Caracterização do Sistema

Consideramos o sistema na forma de Lure

$$\dot{X} = F(X) = A(\mu)X + b_\varepsilon(\mu)\text{sat}(x) \quad (4-1)$$

onde $X = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$, e a função saturação é dada por

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 1 \\ x & \text{if } |x| \leq 1 \\ -1 & \text{if } x < -1 \end{cases}.$$

Estamos considerando a derivada com respeito ao tempo τ e as partes linear e não linear são dadas, respectivamente, por

$$A(\mu) = \begin{bmatrix} -6\mu & -1 & 0 \\ 11\mu^2 & 0 & -1 \\ -6\mu^3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$b_\varepsilon(\mu) = \begin{bmatrix} 6\mu - \varepsilon \\ 1 - 11\mu^2 - \varepsilon^2 \\ 6\mu^3 + \varepsilon + \varepsilon^3 \end{bmatrix}.$$
(4-2)

Assim, este sistema está na forma generalizada de Liénard apresentada no Capítulo 3.

Como antes, denotaremos por Σ_- e Σ_+ os planos $x = -1$ e $x = 1$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ as regiões onde $x < -1$, $|x| \leq 1$ e $x > 1$, respectivamente. Desta forma, este sistema tem as seguintes propriedades:

- (i) O sistema é simétrico com respeito a origem, i.e., $F(-X) = -F(X)$.

De fato, temos que

$$\begin{aligned} F(X) &= A(\mu)X + b(\mu, \varepsilon)\text{sat}(x) \\ &= \begin{cases} A(\mu)X - b(\mu, \varepsilon), & \text{se } x < -1 \\ A(\mu)X + b(\mu, \varepsilon)x, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ A(\mu)X + b(\mu, \varepsilon), & \text{se } x > 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} F(-X) &= \begin{cases} -A(\mu)X - b(\mu, \varepsilon), & \text{se } -x < -1 \\ -A(\mu)X - b(\mu, \varepsilon)x, & \text{se } -1 \leq -x \leq 1 \\ -A(\mu)X + b(\mu, \varepsilon), & \text{se } -x > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -(A(\mu)X + b(\mu, \varepsilon)), & \text{se } x > 1 \\ -(A(\mu)X + b(\mu, \varepsilon)x), & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -(A(\mu)X - b(\mu, \varepsilon)), & \text{se } x < -1 \end{cases} \\ &= -F(X). \end{aligned}$$

- (ii) Nas zonas onde $|x| > 1$ o sistema se torna

$$\dot{X} = A(\mu)X + \text{sign}(x)b_\varepsilon(\mu),$$

assim a parte linear, em ambas as zonas, é dada pela matriz $A(\mu)$ com três autovalores reais, a saber, $-\mu$, -2μ e -3μ , então o equilíbrio é um nó atrator sempre que $\mu > 0$.

- (1) Para $x < -1$ temos

- Se $\mu \neq 0$ o equilíbrio deste sistema é

$$X_{\varepsilon}^{-} = \left(-1 - \varepsilon \frac{1 + \varepsilon^2}{6\mu^3}, \varepsilon + \varepsilon \frac{1 + \varepsilon^2}{\mu^2}, -1 + \varepsilon^2 - 11\varepsilon \frac{1 + \varepsilon^2}{6\mu} \right),$$

se consideramos $\mu > 0$, este equilíbrio está em $\mathcal{E}$ apenas quando $\varepsilon > 0$, caso contrário, temos um equilíbrio virtual;

- Se $\mu = 0$ só teremos equilíbrios se $\varepsilon = 0$, a saber, a semireta $(x, 0, -1)$ com $x < -1$ é composta por equilíbrios do campo.

(2) Para $x > 1$ temos

- Se $\mu \neq 0$ o equilíbrio deste sistema é

$$X_{\varepsilon}^{+} = \left(1 + \varepsilon \frac{1 + \varepsilon^2}{6\mu^3}, -\varepsilon - \varepsilon \frac{1 + \varepsilon^2}{\mu^2}, 1 - \varepsilon^2 + 11\varepsilon \frac{1 + \varepsilon^2}{6\mu} \right),$$

se consideramos $\mu > 0$, este equilíbrio está em $\mathcal{D}$ apenas quando $\varepsilon > 0$, caso contrário, temos um equilíbrio virtual;

- Se $\mu = 0$ só teremos equilíbrios se $\varepsilon = 0$, a saber, a semireta $(x, 0, 1)$ com $x > 1$ é composta por equilíbrios do campo.

(iii) Na região onde $|x| \leq 1$ o sistema é linear e se reduz a

$$\dot{X} = B_{\varepsilon} X = \begin{bmatrix} -\varepsilon & -1 & 0 \\ 1 - \varepsilon^2 & 0 & -1 \\ \varepsilon + \varepsilon^3 & 0 & 0 \end{bmatrix} X, \quad (4-3)$$

onde os autovalores da matriz B_{ε} são ε e $-\varepsilon \pm i$.

- Se $\varepsilon = 0$ o segmento $(x, 0, x)$ com $|x| \leq 1$ é composto por equilíbrios do campo;
- Se $\varepsilon \neq 0$ o único equilíbrio é a origem, logo temos duas variedades invariantes uma unidimensional (estável se $\varepsilon < 0$ e instável se $\varepsilon > 0$) e uma bidimensional (estável se $\varepsilon > 0$ e instável se $\varepsilon < 0$).

Além da simetria com respeito a origem podemos observar a invariância do campo com respeito a outra transformação conforme a seguinte proposição.

Proposição 4.1 O sistema (4-1) - (4-2) é invariante sob a seguinte transformação:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x, & y &\rightarrow -y, & z &\rightarrow z, \\ \tau &\rightarrow -\tau, & \mu &\rightarrow -\mu, & \varepsilon &\rightarrow -\varepsilon. \end{aligned}$$

Demonstração. Fazendo $x_1 = x, y_1 = -y, z_1 = z, \tau = -\tau, \mu = -\mu, \varepsilon = -\varepsilon$ e observando que $\dot{x}_1 = \dot{x}, \dot{y}_1 = -\dot{y}$ e $\dot{z}_1 = \dot{z}$ obtemos $\dot{X}_1 = A(\mu_1)X_1 + b_{\varepsilon_1}(\mu_1) \text{sat}(x_1)$. Portanto o sistema

é invariante por esta transformação. $\square$

Tendo em vista a Proposição 4.1 podemos restringir nosso estudo dos casos onde $\mu \neq 0$ ao caso $\mu > 0$. E a seguinte proposição segue diretamente das propriedades enunciadas acima.

Proposição 4.2 *Assuma que $\mu > 0$ no sistema (4-1)-(4-2). Então,*

- (a) *Para $\varepsilon < 0$ o único equilíbrio do sistema é a origem, tendo uma variedade estável unidimensional e uma variedade instável bidimensional;*
- (b) *Se $\varepsilon = 0$ então todos os pontos do segmento $\{(x, 0, x); |x| \leq 1\}$ são equilíbrios do sistema;*
- (c) *Se $\varepsilon > 0$ os equilíbrios do sistema são a origem e os pontos*

$$X_{\varepsilon}^{\pm} = \pm \left(1 + \varepsilon \frac{1 + \varepsilon^2}{6\mu^3}, -\varepsilon - \varepsilon \frac{1 + \varepsilon^2}{\mu^2}, 1 - \varepsilon^2 + 11\varepsilon \frac{1 + \varepsilon^2}{6\mu} \right).$$

A origem tem uma variedade instável unidimensional e uma variedade estável bidimensional. Os outros dois equilíbrios são nós estáveis.

Para os casos onde $\mu = 0$ temos o seguinte resultado.

Proposição 4.3 *Assuma que $\mu = 0$ no sistema (4-1)-(4-2). Então,*

- (a) *Para $\varepsilon \neq 0$ o único equilíbrio é a origem;*
- (b) *Para $\varepsilon = 0$ os equilíbrios do sistema constituem uma poligonal formada pelo segmento $\{(x, 0, x); |x| \leq 1\}$ e pelas semiretas $\{(x, 0, -1); x < -1\}$ e $\{(x, 0, 1); x > 1\}$. Além disso, se k é uma constante arbitrária então todo plano da forma $z = k$ é invariante pelo fluxo do sistema, e para $|k| < 1$ tal plano invariante é completamente folheado por órbitas periódicas.*

Demonstração. O item (a) segue direto da Proposição 4.2.

Para o item (b), a primeira afirmação segue das propriedades citadas anteriormente. Se $\varepsilon = \mu = 0$ temos $\dot{z} = 0$, logo os planos $z = k$, com $k \in \mathbb{R}$, é invariante pelo fluxo do campo. Se $|k| < 1$, o plano $z = k$ intersecta o segmento de equilíbrios no ponto $(k, 0, k)$ e os autovalores da parte linear são 0 e $\pm i$ e o resultado segue. $\square$

No que segue, restringimos a análise ao caso $\mu > 0$ e começamos estudando o sistema (4-3) quando $\varepsilon = 0$. Neste caso, a solução do sistema na região $\mathcal{C}$ com $X(0) = (x_1, y_1, z_1)^T$ é dada por

$$X(\tau) = e^{B_0\tau} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \tau & -\text{sent} \tau & 1 - \cos \tau \\ \text{sent} \tau & \cos \tau & -\text{sent} \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad (4-4)$$

então, esta órbita está contida no círculo,

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x - z_1)^2 + y^2 = (x_1 - z_1)^2 + y_1^2, z = z_1\}. \quad (4-5)$$

Assim, podemos observar que, para $\varepsilon = 0$, toda solução não constante do sistema (4-3) estendida para todo o espaço $\mathbb{R}^3$ é periódica. No entanto, este sistema deve ser considerado apenas na região $\mathcal{C}$, então apenas as órbitas periódicas totalmente contidas na região central são órbitas periódicas do sistema (4-1)-(4-2). Deste modo, temos uma região com forma de dois cones sólidos completamente folheada por órbitas periódicas do sistema, estes cones tem como base comum o disco $\{x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$, como na Figura 4.1.

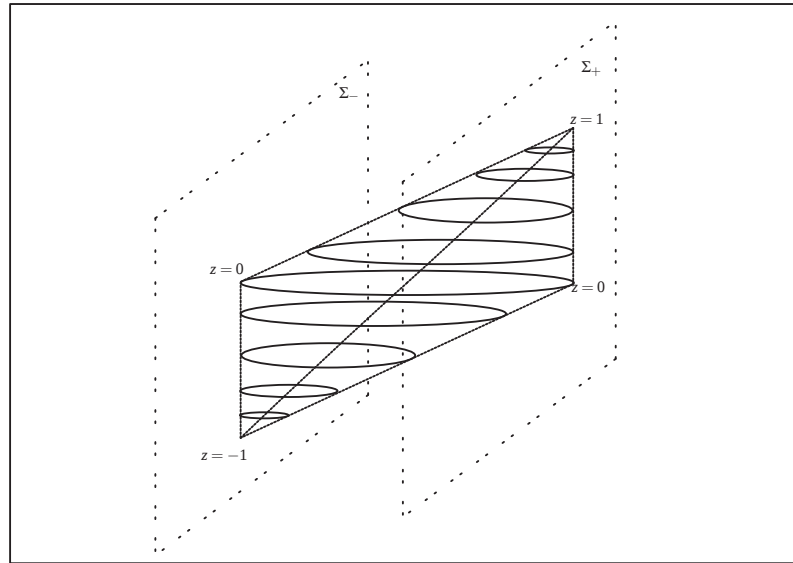


Figura 4.1: Cones folheados de órbitas periódicas do sistema (4-1)-(4-2), com $\mu > 0$ e $\varepsilon = 0$.

A estrutura das órbitas periódicas da Figura 4.1 independe do valor de μ . Quando fazemos $\varepsilon \neq 0$, ainda que pequeno, estas órbitas periódicas desaparecem, porém algumas delas podem gerar ciclos limite. Então, nosso principal objetivo é analisar o surgimento de órbitas periódicas para $\varepsilon \neq 0$ e pequeno.

Se a existência de ciclos limite bifurcados da estrutura dada na Figura 4.1 é provada, temos aí uma bifurcação parecida com a do tipo dobra-Hopf apresentada no Capítulo 2, o surgimento de uma órbita periódica, a partir, da perturbação de um sistema com um autovalor nulo e dois imaginários puros. Uma diferença visível neste caso é que

temos apenas um sólido folheado por órbitas periódica e não temos o espaço todo, como no caso diferenciável.

Uma análise completa relacionando os casos diferenciável e contínuo é uma tarefa difícil e requer um olhar mais profundo do que o dado aqui, visto que um desdobramento completo do caso contínuo e não diferenciável ainda não é conhecido.

Como visto anteriormente, os ciclos limite do sistema em questão devem cruzar pelo menos um dos planos, Σ_- ou Σ_+ . Denotaremos por ${}^2\Gamma_{(\mu,\varepsilon)}^{s,u}$ e ${}^3\Gamma_{(\mu,\varepsilon)}^{s,u}$ os ciclos limite bi-zonais e tri-zonais, onde s, u denotam estável e instável, respectivamente.

Para estudar a existência de tais ciclos utilizamos o método das *closing equations* introduzido no Capítulo 3 sobre o qual fazemos um breve resumo, enunciando alguns resultados que serão necessários nas demonstrações dos teoremas deste Capítulo.

O próximo resultado será útil para determinarmos as expensões dos teoremas que seguem.

Lema 4.4 *Seja $\eta = \xi^n \rho(\xi)$, com n ímpar, e ρ é uma função real analítica em uma vizinhança da origem e tal que $\rho(0) = \rho_0 \neq 0$. Então, existe uma função real, χ , analítica em uma vizinhança da origem, com $\chi(0) \neq 0$, tal que $\xi = \eta^{1/n} \chi(\eta^{1/n})$.*

Demonstração. Como n é ímpar podemos escolher ω tal que $\xi = \zeta\omega$ com $\zeta = \eta^{1/n}$, assim

$$\eta = (\zeta\omega)^n \rho(\zeta\omega) = \eta \omega^n \rho(\zeta\omega).$$

Como η é não identicamente nulo, temos $\omega^n \rho(\zeta\omega) = 1$. Definamos $H(\zeta, \omega) = \omega^n \rho(\zeta\omega) - 1$. Logo, $H(0, \rho_0^{-1/n}) = 0$ e

$$H_\omega(0, \rho_0^{-1/n}) = (n\omega^{n-1}\rho(\zeta\omega) + \omega^n \rho'(\zeta\omega)\zeta) |_{(0, \rho_0^{-1/n})} = n\rho_0^{1/n} \neq 0.$$

Então, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança de 0 onde está unicamente definida $\omega = \chi(\zeta)$ com $H(\zeta, \chi(\zeta)) = 0$. Agora, $\omega = \chi(\zeta) \Rightarrow \xi = \eta^{1/n} \chi(\eta^{1/n})$. $\square$

4.2 Ciclos Limite Tri-zonais

O objetivo aqui é mostrar a existência de ciclos limite Γ simétricos com respeito a origem. Assim, se Γ é um destes ciclos e $P \in \Gamma$ então $-P \in \Gamma$ e como Γ deve cruzar pelo menos um dos planos de separação, Γ deverá cruzar os dois planos de separação e então é um ciclo limite tri-zonal. Logo, deve existir um ponto $P_0 = (1, y_0, z_0) = (1, p_0) \in \Gamma \cap \Sigma_+$ tal que, quando o tempo cresce a órbita irá pertencer a região $\mathcal{D}$ até cruzar novamente o plano Σ_+ no ponto $P_1 = (1, y_1, z_1) = (1, p_1)$ depois de um tempo $\tau_D > 0$. Então, esta

órbita segue pela região $\mathcal{C}$ até encontrar o plano Σ^- no ponto $P_2 = -P_0$ após um tempo $\tau_C > 0$ entrando na região $\mathcal{E}$ até encontrar novamente Σ_- em $P_3 = -P_1$ após o tempo $\tau_D > 0$ e finalmente segue pela região $\mathcal{C}$ até encontrar novamente Σ_+ no ponto P_0 após o tempo $\tau_C > 0$, veja Figura 3.1 no Capítulo 3. Com esta notação estabelecida e observando o campo que estamos analisando devemos ter $y_0 < 0$ e $y_1 > 0$.

A estrutura das órbitas periódicas apresentadas na Figura 4.1 não depende do valor de μ e, ainda assim, podemos observar que, quando $\varepsilon = 0$, um ciclo limite bifurca para um valor crítico de μ sem quebrar esta estrutura, como será mostrado no teorema seguinte.

Teorema 4.5 *Considere o sistema (4-1)-(4-2) com $\varepsilon = 0$ e $\mu > 0$. Para $\mu = 1$ um ciclo limite simétrico com respeito à origem bifurca do círculo $\{(x, y, z); x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ e persiste para $\mu > 1$, sendo hiperbólico, estável e denotado por ${}^3\Gamma_{(\mu, \varepsilon)}^s$. Além disso, definindo*

$$u = u(\mu) = \frac{2\mu^2 - \sqrt{(\mu^2 - 1)(3\mu^2 + 1)}}{\mu^2 + 1} \in (2 - \sqrt{3}, 1), \quad (4-6)$$

o ciclo limite ${}^3\Gamma_{(\mu, \varepsilon)}^s$ tem período

$$T = 2 \arctan \left(\frac{(1 - u^2) \sqrt{(1 + u^2)(4u - 1 - u^2)}}{1 - 2u - 2u^2 - 2u^3 + u^4} - \frac{2}{\mu} \ln(u) \right), \quad (4-7)$$

e, sucessivamente, passa pelos pontos $P_0 = (1, y_0, z_0)$, $P_1 = (1, y_1, z_1)$, $P_2 = -P_0$ e $P_3 = -P_1$ com

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{2(1 - u)}{\mu(1 + u)(1 - 4u + u^2)}, & z_0 &= -\frac{\mu(1 - u)^2}{2} y_0 \\ y_1 &= -u^2 y_0, & z_1 &= -z_0. \end{aligned} \quad (4-8)$$

Demonstração. Para $\varepsilon = 0$ e $\mu > 0$ a solução do sistema na região $\mathcal{D}$ pelo ponto $P_0 = (1, y_0, z_0)$ é

$$X(\tau) = e^{A(\mu)\tau} \left[\begin{bmatrix} 1 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e a solução na região $\mathcal{C}$ pelo ponto P_1 é

$$X(\tau) = e^{B(\varepsilon)\tau} \begin{bmatrix} 1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

Então, as equações (3-9) e (3-10) se tornam, respectivamente

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 - 1 \end{bmatrix} = e^{A(\mu)\tau_D} \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 \\ z_0 - 1 \end{bmatrix}. \quad (4-9)$$

e

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -y_0 \\ -z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\tau_C) & -\sin(\tau_C) & 1 - \cos(\tau_C) \\ \sin(\tau_C) & \cos(\tau_C) & -\sin(\tau_C) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}. \quad (4-10)$$

O objetivo agora é determinar y_0 , z_0 , y_1 , z_1 , τ_C e τ_D , com $y_0 < 0$, $y_1, \tau_C, \tau_D > 0$, satisfazendo (4-9)-(4-10).

Com a finalidade de simplificar os cálculos façamos $u = e^{-\mu\tau_D}$, assim

$$e^{A(\mu)\tau_D} = \frac{u}{2\mu^2} \begin{bmatrix} \mu^2(1-8u+9u^2) & \mu(1-u)(1-3u) & (1-u)^2 \\ \mu^3(1-u)(27u-5) & \mu^2(-5+16u-9u^2) & \mu(1-u)(3u-5) \\ 6\mu^4(1-u)(1-3u) & 6\mu^3(1-u)^2 & 2\mu^2(3-3u+u^2) \end{bmatrix}.$$

Logo, observando que $\mu, \tau_D > 0$ e daí $0 < u < 1$, de (4-9) obtemos

$$\mu(1-3u)y_0 + (1-u)(z_0-1) = 0, \quad (4-11)$$

$$2\mu y_1 - \mu u(-5+16u-9u^2)y_0 - u(1-u)(3u-5)(z_0-1) = 0, \quad (4-12)$$

$$z_1 - 1 - 3\mu u(1-u)^2 y_0 - u(3-3u+u^2)(z_0-1) = 0. \quad (4-13)$$

De (4-10) temos $z_1 = -z_0$ e de (4-11), (4-13) e (4-12) obtemos

$$y_0 = \frac{2(1-u)}{\mu(1+u)(1-4u+u^2)}, \quad z_0 = -\frac{\mu(1-u)^2}{2} y_0 \quad \text{e} \quad y_1 = -u^2 y_0.$$

Por outro lado, a órbita por P_1 , na região C , está contida no círculo

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x - z_1)^2 + y^2 = (1 - z_1)^2 + y_1^2, z = z_1\}$$

e como $-P_0$ está nesta órbita segue que

$$(-1 - z_1)^2 + y_0^2 = (1 - z_1)^2 + y_1^2,$$

substituindo as expressões de y_0, y_1, z_0, z_1 obtemos

$$u^2 + 1 + \mu^2(u^2 - 4u + 1) = 0.$$

Logo,

$$u_{\pm} = u_{\pm}(\mu) = \frac{2\mu^2 \pm \sqrt{(\mu^2 - 1)(3\mu^2 + 1)}}{\mu^2 + 1}.$$

Observemos que $u'_+ > 0$ e $u'_- < 0$ quando $\mu > 1$, $\lim_{\mu \rightarrow 1+} u_{\pm}(\mu) = 1$ e $\lim_{\mu \rightarrow \infty} u_{\pm}(\mu) = 2 \pm \sqrt{3}$. Assim, para que $0 < u < 1$ devemos ter $u(\mu) = u_-(\mu) \in (2 - \sqrt{3}, 1)$. Quando $\mu = 1$ temos $z_0 = z_1 = 0$, $y_0 = y_1$ e o círculo em questão é $\{(x, y, z); x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$. Então, para cada valor do parâmetro $\mu > 1$ temos uma única solução do sistema, que corresponde a um ciclo limite que bifurca deste círculo.

Das duas primeiras equações de (4-10) temos

$$\begin{bmatrix} 1 - z_1 & -y_1 \\ y_1 & 1 - z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\tau_C) \\ \sin(\tau_C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - z_1 \\ -y_0 \end{bmatrix}.$$

Substituindo os valores de y_1 e z_1 obtemos

$$\cos(\tau_C) = \frac{z_0^2 - 1 + u^2 y_0^2}{(1 + z_0)^2 + u^4 y_0^2} = \frac{1 - 2u - 2u^2 - 2u^3 + u^4}{4u^2}$$

e

$$\sin(\tau_C) = y_0 \frac{z_0(u^2 - 1) - (u^2 - 1)}{(1 + z_0)^2 + u^4 y_0^2} = \frac{1 - u^2}{4u^2} \sqrt{(1 + u^2)(4u - 1 - u^2)}.$$

Daí,

$$\tau_C = \arctan \left(\frac{(1 - u^2) \sqrt{(1 + u^2)(4u - 1 - u^2)}}{1 - 2u - 2u^2 - 2u^3 + u^4} \right)$$

e da definição de u temos $\tau_D = -\frac{1}{\mu} \ln(u)$. Uma vez, que o período da órbita em questão é $T = 2(\tau_C + \tau_D)$ obtemos a expressão desejada para T .

Resta analisar a estabilidade deste ciclo. De acordo com a observação feita após a Proposição 3.7 do Capítulo 3 basta encontrarmos o traço e o determinante da matriz $M = e^{B_0 \tau_C(p_1)} e^{A(\mu) \tau_D(p_0)}$.

Para encontrarmos o $\det(M)$ basta observarmos que, como os autovalores de $A(\mu)$ são $-\mu$, -2μ , e -3μ e os autovalores de B_0 são 0 e $\pm i$ temos

$$\det(e^{A(\mu) \tau_D(p_0)}) = e^{-\mu \tau_D} e^{-2\mu \tau_D} e^{-3\mu \tau_D} = u^6$$

e

$$\det(e^{B_0 \tau_C(p_1)}) = 1,$$

assim, $\det(M) = u^6$.

Com a ajuda de um software de manipulação algébrica (aqui utilizamos o Maple)

podemos calcular o valor do traço, e obtemos

$$\text{tr}(M) = 3u^4 - 3u^2 - 1.$$

Uma vez que $0 < u < 1$ temos $|\det(M)| < 1$ e $|\text{tr}(M) + 1| - 1 + \det(M) = (u-1)^3(u+1)^3 < 0$ e portanto o ciclo limite é estável.

□

Agora, consideramos o caso onde $\varepsilon \neq 0$. Observamos que, como o ciclo limite obtido no Teorema 4.5 é hiperbólico, ele persiste a pequenas perturbações do sistema, i.e., ele persiste se $|\varepsilon|$ é pequena. Os teoremas seguintes garantem a existência de um ciclo limite adicional, simétrico com respeito a origem, para $\varepsilon \neq 0$.

Teorema 4.6 *Considere o sistema (4-1)-(4-2) com $0 < \mu \neq 1$ e $\gamma = \mu(1 - \mu^2) \neq 0$. Para $\varepsilon = 0$ o sistema sofre uma bifurcação de um ciclo limite tri-zonal, que surge da configuração de órbitas periódicas que existe na zona central para $\varepsilon = 0$, um ciclo limite aparece para $\gamma\varepsilon < 0$ e $|\varepsilon|$ suficientemente pequena. Tal ciclo é simétrico com respeito a origem e bifurca do círculo $\{(x, y, z); x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$. Além disso, este ciclo limite tem período*

$$T = 2\pi - \pi \frac{1 - 11\mu^2}{3\gamma} \varepsilon + O(\varepsilon^{5/3}), \quad (4-14)$$

e passa pelo ponto $(1, y_0, z_0)$, com

$$\begin{aligned} y_0 &= \left(\frac{\pi}{4\gamma}\right)^{1/3} \varepsilon^{1/3} - \mu \left(\frac{\pi^2}{2\gamma^2}\right)^{1/3} \varepsilon^{2/3} + O(\varepsilon) \\ z_0 &= -\frac{\pi\mu^3}{2\gamma} \varepsilon + \left(\frac{\pi}{4\gamma}\right)^{1/3} \varepsilon^{4/3} + O(\varepsilon^{5/3}) \end{aligned} \quad (4-15)$$

Em particular, se $\mu > 1$ (respectivamente $\mu < 1$) então o ciclo limite bifurca para $\varepsilon > 0$ (respectivamente $\varepsilon < 0$), é instável e denotado por ${}^3\Gamma_{(\mu, \varepsilon)}^u$ (respectivamente estável e denotado por ${}^3\Gamma_{(\mu, \varepsilon)}^s$).

Demonstração. A ideia aqui é buscar por órbitas periódicas começando no ponto $P_0 = (1, y_0, z_0)$, seguindo para a zona onde $x > 1$, chegando no ponto $P_1 = (1, y_1, z_1)$ após um tempo τ_D e, ao invés de continuar através de P_1 para chegar em $-P_0$, vamos integrar com tempo revertido a partir de P_0 e chegar em $-P_1$ após um tempo $-\tau_C$. Assim, facilitamos as aproximações de y_1 e z_1 . A solução do sistema na zona $\mathcal{D}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \\ z(\tau) \end{bmatrix} = e^{A(\mu)\tau} \begin{bmatrix} 1 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} - X_\varepsilon^+ + X_\varepsilon^+, \quad (4-16)$$

com X_ε^+ como definido na Proposição 4.2. E a solução na região C começando em P_0 com o tempo revertido é

$$\begin{bmatrix} x_b(\tau) \\ y_b(\tau) \\ z_b(\tau) \end{bmatrix} = e^{-B(\varepsilon)\tau} \begin{bmatrix} 1 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}. \quad (4-17)$$

Para que estas expressões sejam soluções aceitáveis do sistema devemos ter $x(\tau) \geq 1$ para todo $0 \leq \tau \leq \tau_D$ e $|x_b(\tau)| \leq 1$ para $0 \leq \tau \leq \tau_C$. Seja $\mathbf{w} = (\tau_C, \varepsilon, y_0, z_0, \tau_D)$ e, das equações (4-16)-(4-17), obtemos o sistema de equações $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{w}) = 0$ com

$$\begin{aligned} \hat{G}_1(\mathbf{w}) &= x(\tau_D) - 1, \\ \hat{G}_2(\mathbf{w}) &= x_b(\tau_C) + 1, \\ \hat{G}_3(\mathbf{w}) &= y(\tau_D) + y_b(\tau_C), \\ \hat{G}_4(\mathbf{w}) &= z(\tau_D) + z_b(\tau_C). \end{aligned} \quad (4-18)$$

Assim temos um sistema não linear com quatro equações e cinco incógnitas cujas soluções aceitáveis com $\tau_C > 0$, $\tau_D > 0$ e $y_0 < 0$ correspondem a órbitas periódicas simétricas com respeito a origem.

O sistema (4-18) tem um ramo de soluções para $\mathbf{w}_s = (\pi, 0, y_0, 0, 0)$ com $y_0 \in \mathbb{R}$, mas observemos que para $y_0 < 0$, $z_0 = 0$ e $\frac{\pi}{2} < \tau < \pi$

$$x_b(\tau) = \cos(\tau) + y_0 \sin(\tau) < 0.$$

Dado $y_0 < 0$ existe $\tau_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ tal que

$y_0 < -\frac{1 + \cos(\tau)}{\sin(\tau)} < 0$ se $\tau \in (\tau_0, \pi)$ pois, $-\frac{1 + \cos(\tau)}{\sin(\tau)} \rightarrow 0$ quando $\tau \rightarrow \pi$. Logo $x_b(\tau) < -1$ e $|x_b(\tau)| > 1$ e portanto, o ramo não corresponde a uma solução do sistema.

Mas, felizmente, podemos fatorar a primeira equação, e eliminar o fator $1 - e^{-\mu\tau_D}$ e considerar as *closing equations* modificadas

$$G_1(\mathbf{w}) = \frac{\mu}{1 - e^{-\mu\tau_D}} \hat{G}_1(\mathbf{w}), \quad G_i(\mathbf{w}) = \hat{G}_i(\mathbf{w}), \quad i = 2, 3, 4. \quad (4-19)$$

Agora o sistema (4-19) tem uma solução $\bar{\mathbf{w}} = (\pi, 0, 0, 0, 0)$ que corresponde ao círculo $\{(x, y, z); x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$. Escolhendo τ_D como parâmetro de bifurcação, podemos escrever as *closing equations* como $\mathbf{G}(\mathbf{v}, \tau_D) = 0$, com $\mathbf{v} = (\tau_C, \varepsilon, y_0, z_0)$ e buscamos parametrizar $\mathbf{v}$ em termos de τ_D . A matriz Jacobiana é

$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{G}(\bar{\mathbf{v}}, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -\pi & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (4-20)$$

onde $\bar{\mathbf{v}} = (\pi, 0, 0, 0)$ e esta matriz tem posto máximo, logo podemos aplicar o Teorema da Função Implícita e obter, numa vizinhança de $\tau_D = 0$, uma única aplicação $\mathbf{v}(\tau_D) = (\tau_C(\tau_D), \varepsilon(\tau_D), y_0(\tau_D), z_0(\tau_D))$ tal que $\mathbf{G}(\mathbf{v}(\tau_D), \tau_D) = 0$. E, após alguns cálculos, obtemos

$$\tau_C = \pi - \tau_D + \frac{1 - 11\mu^2}{12}\tau_D^3 - \frac{3 - 115\mu^2 + 182\mu^4}{240}\tau_D^5 + O(\tau_D^6), \quad (4-21)$$

$$\varepsilon = \frac{\mu(\mu^2 - 1)}{2\pi}\tau_D^3 + \frac{\mu - 7\mu^3 + 2\mu^5}{8\pi}\tau_D^5 + O(\tau_D^6), \quad (4-22)$$

$$y_0 = -\frac{1}{2}\tau_D - \frac{\mu}{2}\tau_D^2 + \frac{12\mu - 11\mu^2\pi - 12\mu^3}{24\pi}\tau_D^3 - \frac{7\mu^3}{24}\tau_D^4 - \frac{20\mu - 200\mu^3 + 61\mu^4\pi + 60\mu^5}{240\pi}\tau_D^5 + O(\tau_D^6), \quad (4-23)$$

$$z_0 = \frac{\mu^3}{4}\tau_D^3 + \frac{\mu - \mu^3}{4\pi}\tau_D^4 + \frac{2\mu^2 - 2\mu^4 + \mu^5\pi}{8\pi}\tau_D^5 + O(\tau_D^6). \quad (4-24)$$

Da expressão de ε temos $\varepsilon = \tau_D^3 \rho(\tau_D)$, com ρ analítica em uma vizinhança da origem, e $\rho(0) \neq 0$ pois, $\gamma = \mu(\mu^2 - 1) \neq 0$, logo utilizando o Lema 4.4 podemos garantir a existência de uma função real analítica, χ , tal que $\tau_D = \varepsilon^{1/3} \chi(\varepsilon^{1/3})$ e obtemos

$$\tau_D(\varepsilon) = -\left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^{1/3} \varepsilon^{1/3} - \frac{(\mu - 7\mu^3 + 2\mu^5)\pi}{6\gamma^2} \varepsilon + O(\varepsilon^{4/3}).$$

Esta é a expressão do tempo gasto pela órbita na zona $\mathcal{D}$ e assumindo $\tau_D > 0$ devemos ter $\gamma\varepsilon < 0$. Substituindo esta expressão nas expansões de y_0 , e z_0 obtemos as expressões desejadas. Fazendo o mesmo para τ_C obtemos

$$\tau_C(\varepsilon) = \pi + \left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^{1/3} \varepsilon^{1/3} + \left(\frac{(\mu - 7\mu^3 + 2\mu^5)\pi}{6\gamma^2} \varepsilon - \pi \frac{1 - 11\mu^2}{6\gamma}\right) \varepsilon + O(\varepsilon^{5/3}).$$

Para cada valor dos parâmetros ε e μ , com $\gamma\varepsilon < 0$ e $|\varepsilon|$ suficientemente pequena, temos um ciclo limite com período $T = 2(\tau_D + \tau_C)$ e, assim,

$$T = \pi - \pi \frac{1 - 11\mu^2}{6\gamma} \varepsilon + O(\varepsilon^{5/3}).$$

Resta analisar a estabilidade. Novamente utilizaremos a observação feita após o Lema 3.7 do Capítulo 3 e para isto precisamos encontrar o traço e o determinante da matriz M .

Temos que $M = e^{B(\varepsilon)\tau_C(p_1)} e^{A(\mu)\tau_D(p_0)}$ e os autovalores de $A(\mu)$ e $B(\varepsilon)$ são $-\mu$, -2μ , -3μ e ε , $-\varepsilon \pm i$, respectivamente. Logo,

$$\det(e^{A(\mu)\tau_D(p_0)}) = e^{-6\mu\tau_D} \quad \text{e} \quad \det(e^{B(\varepsilon)\tau_C(p_1)}) = e^{-\varepsilon\tau_C}.$$

Utilizando a expressão de τ_C dada em (4-21) e a expansão em séries da potência da função exponencial obtemos

$$\det(M) = \det\left(e^{A(\mu)\tau_D(p_0)}\right) \det\left(e^{B(\varepsilon)\tau_C(p_1)}\right) = 1 - 6\mu\tau_D + O(\tau_D^2)$$

e

$$\text{tr}(M) = -1 + 6\mu(1 - 2\mu^2)\tau_D + O(\tau_D^2).$$

Assumindo que $0 < \tau_D \ll 1$ e $\mu > 0$, temos $0 < \det(M) < 1$ e

$$|\text{tr}(M) + 1| - 1 + \det(M) = \begin{cases} -12\mu^3\tau_D + O(\tau_D^2), & \text{se } 0 < \mu \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -12\mu(1 - \mu^2)\tau_D + O(\tau_D^2), & \text{se } \mu > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Assim, esta expressão é negativa se $0 < \mu < 1$, resultando num ciclo limite estável, e é positiva se $\mu > 1$, resultando num ciclo limite instável e a prova fica concluída. $\square$

As expressões em séries de potência obtidas neste Teorema e nos teoremas que seguem são obtidas utilizando a ideia dada no Apêndice com a ajuda de um software, aqui utilizamos o Maple.

Vale ressaltar que o ciclo limite do Teorema 4.6 aparece quando $\varepsilon > 0$ se $\gamma < 0$, i.e., quando $\mu > 1$, e aparece para $\varepsilon < 0$ quando $\mu < 1$.

Os ciclos limite, ${}^3\Gamma_{(\mu,\varepsilon)}^u$ do Teorema 4.6 para $\mu > 1$ e ${}^3\Gamma_{(\mu,\varepsilon)}^s$ do Teorema 4.5 que persiste da perturbação do ciclo ${}^3\Gamma_{(\mu,0)}^s$ para $\mu > 1$ e $0 < \varepsilon \ll 1$, são diferentes pois um é instável e o outro estável. Então temos a coexistência de dois ciclos limite simétricos com respeito a origem para o sistema (4-1)-(4-2).

As hipóteses do Teorema 4.6 não são satisfeitas se $\mu = 1$ uma vez que, neste caso, temos $\gamma = 0$. Porém, uma bifurcação análoga ocorre para este valor do parâmetro como podemos ver no seguinte resultado.

Teorema 4.7 *Considere o sistema (4-1)-(4-2) com $\mu = 1$. Para $\varepsilon = 0$ o sistema sofre uma bifurcação de um ciclo limite tri-zonal, que surge da configuração de órbitas periódicas que existe na zona central para $\varepsilon = 0$, um ciclo limite aparece para $\varepsilon < 0$ e $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno. Tal ciclo é simétrico com respeito a origem e bifurca do círculo $\{(x,y,z); x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$. Além disso, este ciclo limite é estável e será denotado por ${}^3\Gamma_{(\mu,\varepsilon)}^s$, tem período*

$$T = 2\pi + \frac{5}{3}(2\pi)^{3/5}\varepsilon^{3/5} + O(\varepsilon^{4/5}), \quad (4-25)$$

e passa pelo ponto $(1, y_0, z_0)$, com

$$\begin{aligned} y_0 &= \left(\frac{\pi}{16}\right)^{1/5} \varepsilon^{1/5} - \left(\frac{\pi^2}{8}\right)^{1/5} \varepsilon^{2/5} + O(\varepsilon^{3/5}), \\ z_0 &= -\frac{1}{2} \frac{\pi^3}{4} \varepsilon^{1/5} + \left(\frac{\pi}{16}\right)^{1/5} \varepsilon^{6/5} + O(\varepsilon^{7/5}). \end{aligned} \quad (4-26)$$

Demonstração. Procedendo de forma análoga a demonstração do Teorema 4.6 considerando $\mu = 1$ obtemos

$$\tau_C = \pi - \frac{5}{6} \tau_D^3 - \frac{7}{24} \tau_D^5 + \frac{239}{1008} \tau_D^7 + O(\tau_D^8), \quad (4-27)$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{2\pi} \tau_D^5 - \frac{5}{12\pi} \tau_D^7 + O(\tau_D^8), \quad (4-28)$$

$$\begin{aligned} y_0 &= -\frac{1}{2} \tau_D - \frac{1}{2} \tau_D^2 - \frac{11}{24} \tau_D^3 - \frac{7}{24} \tau_D^4 + \frac{120 - 61\pi}{240\pi} \tau_D^5 - \frac{121}{720} \tau_D^6 + \frac{18480 - 5947\pi}{40320\pi} \tau_D^7 \\ &\quad + O(\tau_D^8), \end{aligned} \quad (4-29)$$

$$z_0 = \frac{1}{4} \tau_D^3 + \frac{1}{8} \tau_D^5 + \frac{1}{4\pi} \tau_D^6 + \frac{240 + 71\pi}{960\pi} \tau_D^7 + O(\tau_D^8). \quad (4-30)$$

Usando o Lema 4.4 obtemos,

$$\tau_D = -(2\pi)^{1/5} \varepsilon^{1/5} + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi^3}{4}\right)^{1/5} \varepsilon^{3/5} + O(\varepsilon),$$

substituindo este valor em (4-29) e (4-30) obtemos as expressões esperadas para y_0 e z_0 , respectivamente. Substituindo em (4-27) obtemos

$$\tau_C = \pi + (2\pi)^{1/5} \varepsilon^{1/5} + \frac{2}{3} (2\pi)^{3/5} \varepsilon^{3/5} + O(\varepsilon^{4/5}),$$

com isto,

$$T = 2(\tau_D + \tau_C) = 2\pi + \frac{5}{3} (2\pi)^{3/5} \varepsilon^{3/5} + O(\varepsilon^{4/5}).$$

Agora vamos analisar a estabilidade do ciclo. Utilizando a expressão de τ_C e ε dadas em (4-27) e (4-28), respectivamente, e expandindo a função exponencial em série de potências de τ_D obtemos

$$\det(M) = 1 - 6\tau_D + 18\tau_D^2 - 36\tau_D^3 + O(\tau_D^4) \quad \text{e} \quad \text{tr}(M) = -1 - 6\tau_D + 18\tau_D^2 - 16\tau_D^3 + O(\tau_D^4).$$

Note que, como $0 < \tau_D \ll 1$, temos $\varepsilon < 0$, $0 < \det(M) < 1$ e $|\text{tr}(M) + 1| - 1 + \det(M) = -20\tau_D^3 + O(\tau_D^4) < 0$ portanto, da observação feita após o Lema 3.7 temos que o ciclo é estável. $\square$

4.3 Ciclos Limite Bi-zonais

Consideramos agora os ciclos limite bi-zonais. Como vimos anteriormente, é suficiente considerar o seguinte sistema,

$$\dot{X} = \begin{cases} A(\mu)X + b(\mu, \varepsilon), & \text{se } x \geq 1, \\ B(\varepsilon)X, & \text{se } x < 1. \end{cases} \quad (4-31)$$

Desta forma devemos buscar por ciclos limite do sistema (4-31) contidos na região $x \in (-1, \infty)$.

Quando $\varepsilon = 0$ um cone folheado de órbitas periódicas do sistema (4-31) é obtido como uma extensão, para $x \leq -1$ do resultado mostrado na Figura 4.1, veja Figura 4.2. Como antes, todas estas órbitas periódicas são círculos pertencentes aos planos da forma $z = k$, com $k < 1$. Em particular, uma órbita periódica contida no cone, com $0 \leq z < 1$, também é uma órbita periódica para o sistema (4-1)-(4-2).

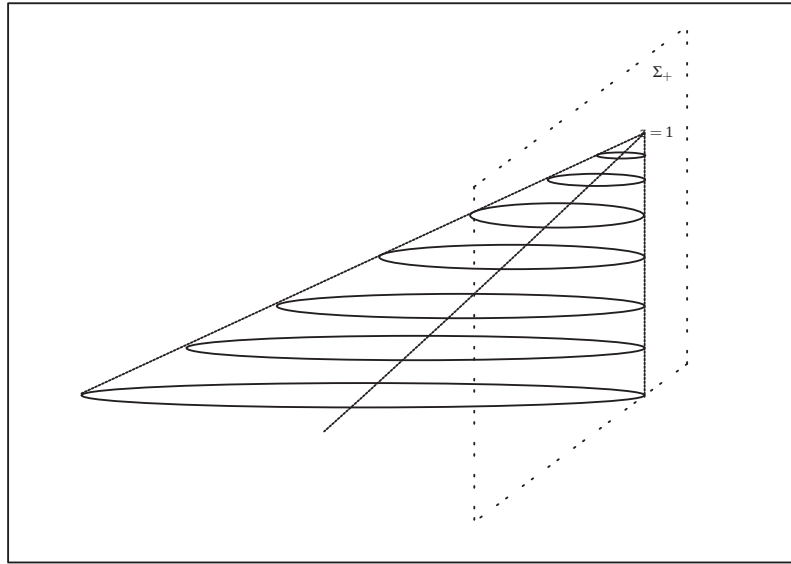


Figura 4.2: Cone folheado de órbitas periódicas do sistema (4-31), com $\mu > 0$ e $\varepsilon = 0$.

Mostraremos que um ciclo limite do sistema (4-31) pode surgir para $\varepsilon \neq 0$ de uma órbita periódica do bordo do cone, isto é, de um círculo horizontal com centro em $(z, 0, z)$ e raio $1 - z$. Assim, se $|\varepsilon|$ é suficientemente pequeno e $0 < z < 1$ teremos que a primeira coordenada do ciclo limite bifurcado está no intervalo $x \in (-1, \infty)$ e conseqüentemente o ciclo limite do sistema (4-31) é também um ciclo limite do sistema (4-1)-(4-2). Além disso, a simetria desse sistema força a existência de um ciclo limite simétrico, agora na região $x \in (-\infty, 1)$.

No que segue, a fim de reduzir notação, introduzimos os seguintes parâmetros:

$$\delta = \mu^2 - 1, \quad \hat{z} = \frac{\mu^2}{\delta + \mu^2},$$

com $2\mu^2 - 1 \neq 0$.

Teorema 4.8 *Assuma que $\mu > 0$ e $(\mu - 1)(2\mu^2 - 1) > 0$ no sistema (4-31). Então, para $\varepsilon = 0$, o sistema sofre uma bifurcação de um ciclo limite bi-zonal. Quando $0 < \mu < 1/\sqrt{2}$ um ciclo limite estável aparece para $\varepsilon < 0$. Quando $\mu > 1$ um ciclo limite estável aparece para $\varepsilon > 0$. Em ambos os casos o ciclo limite bifurca do círculo,*

$$(x - \hat{z})^2 + y^2 = (1 - \hat{z})^2, \quad z = \hat{z},$$

passa pelo ponto $(1, y_0, z_0)$, com

$$\begin{aligned} y_0 &= -\frac{\delta}{\delta + \mu^2} \left(\frac{\pi}{2\mu\delta} \right)^{1/3} \varepsilon^{1/3} - \frac{(2\pi^2\mu\delta)^{1/3}}{\delta + \mu^2} \varepsilon^{2/3} + O(\varepsilon), \\ z_0 &= \frac{\mu^2}{\delta + \mu^2} + \frac{\mu^2(5\delta + 4)}{(\delta + \mu^2)^2} \left(\frac{\pi}{2\mu\delta} \right)^{2/3} \varepsilon + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (4-32)$$

e seu período é dado por

$$T = 2\pi - \frac{11\mu^2 + 10}{3\mu\delta} \pi \varepsilon + O(\varepsilon^{4/3}).$$

Demonstração. Seguindo o mesmo raciocínio utilizado na demonstração do Teorema 4.6 para construir as *closing equations*, com $X_b(\tau_C) = P_1$ obtemos

$$\begin{aligned} \hat{G}_1(w) &= x(\tau_D) - 1, \\ \hat{G}_2(w) &= x_b(\tau_C) - 1, \\ \hat{G}_3(w) &= y(\tau_D) - y_b(\tau_C), \\ \hat{G}_4(w) &= z(\tau_D) - z_b(\tau_C). \end{aligned} \quad (4-33)$$

Os zeros (isolados) do sistema (4-33), com $y_1, \tau_C, \tau_D > 0$ e $y_0 < 0$, correspondem a ciclos limite do sistema (4-31). Temos que $w = (2\pi, 0, y_0, z_0, 0)$ é uma superfície de soluções de (4-33), mas devemos ter $x(\tau) \geq 1$ para todo $0 \leq \tau \leq \tau_D$ e $x_b(\tau) < 1$ para todo $0 \leq \tau \leq \tau_C$, o que não ocorre e portanto esta superfície não corresponde a soluções periódicas do sistema. De fato, temos $x_b(\tau) = (1 - z_0) \cos \tau + z_0 + y_0 \operatorname{sen} \tau$ e $\lim_{\tau \rightarrow 2\pi^-} \frac{1 - \cos \tau}{\operatorname{sen} \tau} = 0$ assim, tomando $y_0 < 0$ e $z_0 < 1$, existe $\frac{3\pi}{2} < \tau_0 < 2\pi$ tal que $0 > \frac{1 - \cos \tau}{\operatorname{sen} \tau} > \frac{y_0}{1 - z_0}$ para todo $\tau_0 \leq \tau < 2\pi$, logo

$$y_0 \operatorname{sen} \tau > (1 - z_0)(1 - \cos \tau) = 1 - z_0 - (1 - z_0) \cos \tau \Rightarrow x_b(\tau) > 1,$$

para todo $\tau_0 \leq \tau < 2\pi$. Como antes, tentando remover estas soluções indesejáveis podemos considerar o sistema modificado

$$G_1(w) = \frac{\mu}{1 - e^{-\mu\tau_D}} \hat{G}_1(w), \quad G_i(w) = \hat{G}_i(w), \quad i = 2, 3, 4. \quad (4-34)$$

Continuamos com um sistema $G(w) = 0$, tendo quatro equações e cinco incógnitas e, agora, com um ramo de solução $\hat{w} = (2\pi, 0, 0, \hat{z}, 0)$ para todo $\hat{z} \in \mathbb{R}$, porém, como observamos anteriormente, estas soluções só correspondem a órbitas periódicas do sistema se $\hat{z} < 1$. O objetivo agora será determinar para quais valores de $\hat{z}$ um ciclo limite bifurca para $\varepsilon \neq 0$. Para isto, consideremos τ_D como parâmetro de bifurcação e escrevamos $G(w) = G(v, \tau_D) = 0$, onde $v = (\tau_C, \varepsilon, y_0, z_0)$, agora devemos parametrizar v em termos de τ_D . Vejamos,

$$D_v G(\hat{v}, 0) = L = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2\pi(1 - 2\hat{z}) & 0 & 0 \\ 1 - \hat{z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi\hat{z} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $\hat{v} = (2\pi, 0, 0, \hat{z})$. A matriz L não tem posto máximo, $\text{posto}(L) = 3$ quando $\hat{z} \neq 1$, então podemos utilizar o método de redução de Liapunov Schmidt, explicado no Capítulo 2, adotamos aqui a mesma notação. Vamos encontrar uma base para $\text{Im}(L)$, para seu complemento ortogonal N e para $\text{Nuc}(L)$. Seja $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4$ assim

$$Lu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1 - \hat{z}) \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 2\pi(1 - 2\hat{z}) \\ 0 \\ 2\pi\hat{z} \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (u_2 + u_3).$$

Logo, uma base para $\text{Im}(L)$ é $\mathcal{B}_{\text{Im}(L)} = \{(0, 0, 1, 0)^T, (0, 1 - 2\hat{z}, 0, \hat{z})^T, (1, 0, 0, 0)^T\}$. Analogamente, obtemos uma base para $\text{Nuc}(L)$, $\mathcal{B}_{\text{Nuc}(L)} = \{(0, 0, 0, 1)^T\}$.

Se $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in N$ então u deve ser ortogonal a cada um dos vetores da base $\mathcal{B}_{\text{Im}(L)}$ e assim chegamos que u deve ser um múltiplo do vetor $(0, \hat{z}, 0, 2\hat{z} - 1)^T$ assim $\mathcal{B}_N = \{(0, \hat{z}, 0, 2\hat{z} - 1)^T\}$ deve ser uma base para N .

Consideremos P a matriz que tem como coluna os vetores de $\mathcal{B}_{\text{Im}(L)}$, assim a matriz projeção ortogonal, $Q_{\text{Im}(L)}$, sobre $\text{Im}(L)$ é dada por

$$Q_{\text{Im}(L)} = P(P^T P)^{-1} P^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v(1-2\hat{z})^2 & 0 & v\hat{z}(1-2\hat{z}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & v(1-2\hat{z})\hat{z} & 0 & v\hat{z}^2 \end{bmatrix},$$

onde $v = ((1-2\hat{z})^2 + \hat{z}^2)^{-1}$. Da mesma forma, se $\bar{P}$ é a matriz coluna formada pelo vetor da base $\mathcal{B}_N$ temos a matriz projeção ortogonal, Q_N , sobre N

$$Q_{\text{Im}(L)} = P(P^T P)^{-1} P^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v\hat{z}^2 & 0 & -v(1-2\hat{z})^2\hat{z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v(1-2\hat{z})\hat{z} & 0 & -v(1-2\hat{z})^2\hat{z} \end{bmatrix}.$$

Agora, $G(v, \tau_D) = 0$ se, e somente se, $G(v, \tau_D)$ anula as duas projeções, $Q_{\text{Im}(L)}$ e Q_N , isto é,

$$G(v, \tau_D) = 0 \Leftrightarrow Q_{\text{Im}(L)} G(v, \tau_D) = 0 \text{ e } Q_N G(v, \tau_D) = 0.$$

Desta equivalência, resulta que as soluções de $G(v, \tau_D) = 0$ devem satisfazer

$$(G_1, v(1-2\hat{z})((1-2\hat{z})G_2 + \hat{z}G_4), G_3, v\hat{z}((1-2\hat{z})G_2 + \hat{z}G_4))^T = 0, \quad (4-35)$$

e

$$(0, v\hat{z}(\hat{z}G_2 - (1-2\hat{z})G_4), 0, v(1-2\hat{z})(-\hat{z}G_2 + (1-2\hat{z})G_4))^T = 0. \quad (4-36)$$

Assumindo que $\hat{z}(1-2\hat{z}) \neq 0$, de (4-35) obtemos $\Phi(v, \tau_D) = 0$ onde

$$\begin{aligned} \Phi_1(v, \tau_D) &= G_1(v, \tau_D), \\ \Phi_2(v, \tau_D) &= (1-2\hat{z})G_2 + \hat{z}G_4, \\ \Phi_3(v, \tau_D) &= G_3(v, \tau_D), \end{aligned} \quad (4-37)$$

e, de (4-36) temos

$$g(v, \tau_D) = \hat{z}G_2 - (1-2\hat{z})G_4 = 0. \quad (4-38)$$

Utilizando a decomposição $\mathbb{R}^4 = \text{Nuc}(L) + M$ escrevemos $v = (0, 0, 0, z_0) + (\tau_C, \varepsilon, y_0, 0)$. Lembrando que $(2\pi, 0, 0, \hat{z}, 0)$ é solução e, considerando $\tau = \tau_C - 2\pi$ e $z = z_0 - \hat{z}$, temos $v = (2\pi, 0, 0, \hat{z}) + (\tilde{v}, z)$ onde $\tilde{v} = (\tau, \varepsilon, y_0)$. Nas novas variáveis escrevemos

as equações em (4-37) como $\Phi(\tilde{v}, z, \tau_D) = 0$, com $\Phi(0, 0, 0) = 0$. A matriz Jacobiana é

$$D_{\tilde{v}}\Phi(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2\pi(5\hat{z}^2 - 4\hat{z} + 1) & 0 \\ 1 - \hat{z} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e esta matriz tem posto máximo. Consequentemente, existe uma aplicação $\tilde{v}(z, \tau_D) = (\tau(z, \tau_D), \varepsilon(z, \tau_D), y_0(z, \tau_D))$, tal que $\Phi(\tilde{v}(z, \tau_D), z, \tau_D) = 0$. E temos,

$$\tau = -\tau_D - \frac{11\mu^2 - 1}{12}\tau_D^3 - \frac{\mu(3\hat{z} - 1)(2\mu^2\hat{z} - \hat{z} - \mu^2)}{4(1 - 4\hat{z} + 5\hat{z}^2)}\tau_D^4 + \text{h.o.t.},$$

$$\varepsilon = -\frac{\mu(\hat{z} - 1)(\mu^2\hat{z} + 2\hat{z} - 1)}{4\pi(5\hat{z}^2 - 4\hat{z} + 1)}\tau_D^3 - \frac{\mu(3\hat{z} - 1)(\mu^2\hat{z} + 2\hat{z} - 1)}{4\pi(5\hat{z}^2 - 4\hat{z} + 1)^2}\tau_D^3 z + \text{h.o.t.},$$

$$y_0 = \frac{\hat{z} - 1}{2}\tau_D + \frac{1}{2}\tau_{EZ} + \frac{\mu(\hat{z} - 1)}{2}\tau_D^2 + \frac{\mu}{2}\tau_D^2 z + \frac{\mu(\hat{z} - 1)(55\mu\pi\hat{z}^2 - 44\mu\pi\hat{z} + 6\mu^2\hat{z} + 12\hat{z} + 11\mu\pi - 6)}{24\pi(5\hat{z}^2 - 4\hat{z} + 1)}\tau_D^3 + \text{h.o.t.}.$$

Substituindo estas séries na equação reduzida (4-38), obtemos

$$g(v, \tau_D) = \frac{\mu(1 - \hat{z})[\mu^2 - (2\mu^2 - 1)\hat{z}]}{2}\tau_D^3 + \frac{\mu(1 - \mu^2 - 4\hat{z} + 5\mu^2\hat{z} + 6\hat{z}^2 - 12\mu^2\hat{z}^2 - 5\hat{z}^3 + 10\mu^2\hat{z}^3)}{2(1 - 4\hat{z} + 5\hat{z}^2)}\tau_D^3 z + \text{h.o.t.}.$$

Uma vez que, estamos assumindo $\hat{z} \neq 1$, a condição $g(v, \tau_D) = 0$ nos dá

$$\hat{z} = \frac{\mu^2}{2\mu^2 - 1} = \frac{\mu^2}{\delta + \mu^2}.$$

Substituindo este valor na expressão de $g(v, \tau_D)$, τ , ε e y_0 obtemos

$$g(v, \tau_D) = \frac{(1 - \mu^2)\mu}{2}\tau_D^3 z + \frac{\mu(\mu^2 + 1)(2\mu^2 - 1)^2}{2(\mu^4 + 1)}\tau_D^3 z^2 + \frac{\mu^3(\mu^2 - 1)(5\mu^2 - 1)}{8(1 - 2\mu^2)^2}\tau_D^5 + \text{h.o.t.},$$

$$\tau = -\tau_D - \frac{11\mu^2 - 1}{12}\tau_D^3 - \frac{\mu(1 - 2\mu^2)^2(1 + \mu^2)}{4(1 + \mu^4)}\tau_D^4 z - \frac{182\mu^4 - 115\mu^2 + 3}{240}\tau_D^5 + \text{h.o.t.},$$

$$\varepsilon = \frac{\mu(\mu^2 - 1)}{4\pi} \tau_D^3 - \frac{\mu(1 - 2\mu^2)^2(\mu^2 + 1)}{4\pi(1 + \mu^4)} \tau_D^3 z - \frac{\mu(\mu^2 + 1)(\mu^2 + 2)(2\mu^2 - 1)^3}{4\pi(\mu^4 + 1)^2} \tau_D^3 z^2 + \frac{\mu(\mu^2 - 1)(2\mu^6 + 7\mu^2 - 1)}{16\pi(2\mu^2 - 1)} \tau_D^5 + \text{h.o.t.},$$

$$y_0 = \frac{1 - \mu^2}{2(2\mu^2 - 1)} \tau_D + \frac{1}{2} \tau_{EZ} + \frac{\mu(1 - \mu^2)}{2(2\mu^2 - 1)} \tau_D^2 + \frac{\mu}{2} \tau_D^2 z + \frac{\mu(1 - \mu^2)(12\mu^2 + 11\mu\pi - 6)}{24\pi(2\mu^2 - 1)} \tau_D^3 + \text{h.o.t.}.$$

Se $\mu > 0$ e $(\mu - 1)(2\mu^2 - 1) > 0$ o primeiro coeficiente da expressão de y_0 é negativo, como queríamos. Então devemos ter $\mu > 1$ ou $0 < \mu < 1/\sqrt{2}$ e olhando para a expressão de ε temos $\varepsilon < 0$ e $\varepsilon > 0$, respectivamente.

Da equação $g(v, \tau_D) = 0$, calculamos a expansão de z em termos de τ_D e chegamos em

$$z = \frac{\mu^2(5\mu^2 - 1)}{4(2\mu^2 - 1)^2} \tau_D^2 + \frac{\mu^4(\mu^2 + 1)(5\mu^2 - 1)^2}{16(\mu^2 - 1)(\mu^4 + 1)(1 - 2\mu^2)^2} \tau_D^4 + O(\tau_D^5).$$

Substituindo na expressão de ε obtemos

$$\varepsilon = \frac{\mu(\mu^2 - 1)}{4\pi} \tau_D^3 - \frac{7\mu^3 - 2\mu^5 - \mu}{16\pi} \tau_D^5 + O(\tau_D^6).$$

Pelo Lema 4.4 invertamos a série acima e obtemos

$$\tau_D = \left(\frac{4\pi}{\mu(\mu^2 - 1)} \right)^{1/3} \varepsilon^{1/3} - \frac{(2\mu^4 - 7\mu^2 + 1)\pi}{3\mu(\mu^2 + 1)^2(\mu^2 - 1)^2} \varepsilon + O(\varepsilon^{4/3}),$$

e assim,

$$z_0 = \hat{z} + z = \frac{\mu^2}{2\mu^2 - 1} + \frac{\mu^2(5\mu^2 - 1)}{(2\mu^2 - 1)^2} \left(\frac{\pi}{2\mu(\mu^2 - 1)} \right)^{2/3} \varepsilon^{2/3} + O(\varepsilon),$$

$$y_0 = \frac{1 - \mu^2}{2\mu^2 - 1} \left(\frac{\pi}{2\mu(\mu^2 - 1)} \right)^{1/3} \varepsilon^{1/3} - \frac{1}{2\mu^2 - 1} (2\pi^2 \mu(\mu^2 - 1))^{1/3} \varepsilon^{2/3} + O(\varepsilon),$$

$$\tau_C = 2\pi - \left(\frac{4\pi}{\mu(\mu^2 - 1)} \right)^{1/3} \varepsilon^{1/3} - \frac{\mu(9\mu^4 - \mu^2 + 4)\pi}{3(\mu^6 - \mu^4 + \mu^2 - 1)} \varepsilon + O(\varepsilon^{4/3}).$$

Utilizando a igualdade $\delta = \mu^2 - 1$, as expressões para y_0 e z_0 seguem e o período

$T = \tau_C + \tau_D$ se torna

$$\begin{aligned} T &= 2\pi - \frac{\pi(11\mu^2 - 1)}{3\mu(\mu^2 - 1)}\varepsilon + O(\varepsilon^{4/3}) \\ &= 2\pi - \frac{11(\mu^2 - 1) + 10}{3\mu(\mu^2 - 1)}\pi\varepsilon + O(\varepsilon^{4/3}) \\ &= 2\pi - \frac{11\delta + 10}{3\mu\delta}\pi\varepsilon + O(\varepsilon^{4/3}). \end{aligned}$$

Agora vamos analisar a estabilidade dos ciclos utilizando a observação feita após o Lema 3.7 no Capítulo 3. Utilizando as expressões de ε , τ_C , y_0 e z_0 como série de potências de τ_D obtemos

$$\det(M) = 1 - 6\mu\tau_D + 18\mu^2\tau_D^2 + \frac{\mu - 73\mu^3}{2}\tau_D^3 + \frac{-\mu - 12\pi\mu^2 + 228\pi\mu^4}{4\pi}\tau_D^4 + O(\tau_D^5)$$

e

$$\begin{aligned} \text{tr}(M) &= 3 - 6\mu\tau_D - 2(1 - \mu^2)\tau_D^2 + \frac{\mu}{2}(11 + 37\mu^2)\tau_D^3 \\ &\quad + \frac{6\pi + 3\mu - 56\pi\mu^2 - 3\mu^3 - 478\pi\mu^4 + 72\pi\mu^6}{12\pi}\tau_D^4 + O(\tau_D^5), \end{aligned}$$

assim,

$$|\text{tr}(M) - 1| - 1 - \det(M) = -2(\mu^2 + 1)\tau_D^2 + 5\mu(10\mu^2 + \mu)\tau_D^3 + O(\tau_D^4).$$

Esta expressão é negativa para τ_D pequeno, logo os ciclos limite são estáveis. $\square$

Como mencionado anteriormente, este resultado pode ser transferido para o sistema original quando $0 < \hat{z} < 1$. Se $\mu > 0$, então $\hat{z}$ pertence ao intervalo $(0, 1)$ apenas quando $\mu > 1$, e então temos $\frac{1}{2} < \hat{z} < 1$. Assim, o próximo resultado segue diretamente do Teorema 4.8.

Teorema 4.9 *Assuma que $\mu > 1$ no sistema (4-1)-(4-2). Então, para $\varepsilon = 0$, o sistema sofre uma bifurcação de um ciclo limite bi-zonal. Um par de ciclos limite simétricos aparece para $\varepsilon > 0$.*

Com esses Teoremas concluímos que para $\mu > 1$ e ε pequeno e positivo temos a existência, simultânea, de quatro ciclos limite: dois bi-zonais estáveis simétricos e dois tri-zonais ${}^3\Gamma_{(\mu,\varepsilon)}^u$ e ${}^3\Gamma_{(\mu,\varepsilon)}^s$, veja Figura 4.3.

Reunindo os resultados encontrados e, lembrando que os ciclos bi-zonais aparecem aos pares, podemos sintetizar os resultados conforme a Figura 4.4.

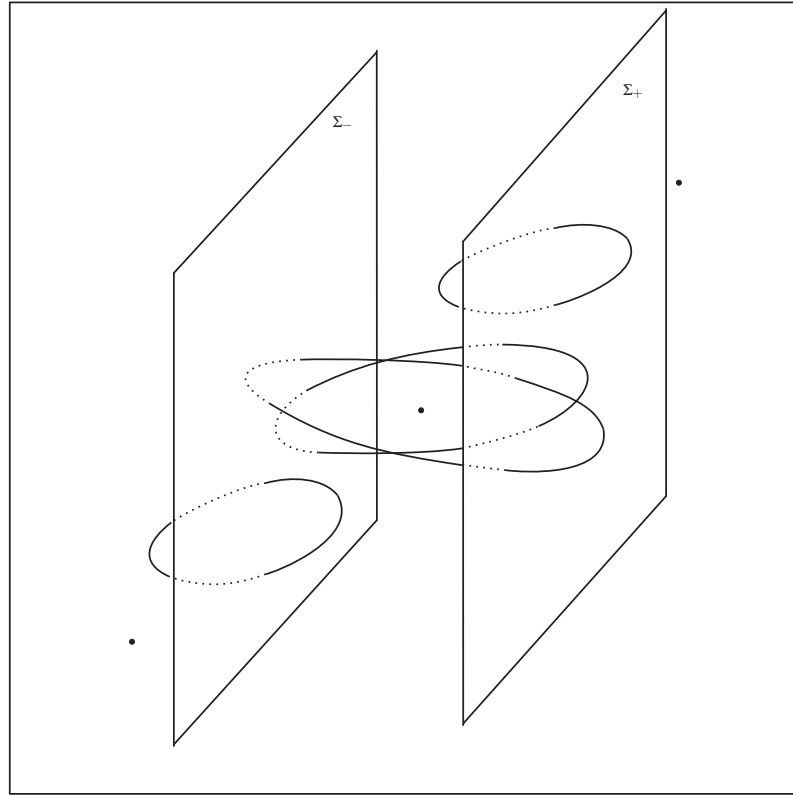


Figura 4.3: Esboço de quatro ciclos limite para o sistema (1-1)-(1-2), com $\mu > 1$ e $0 < \varepsilon \ll 1$.

Podemos observar que para $\mu > 1$ e $\varepsilon > 0$ os equilíbrios $X_\varepsilon^\pm$ são nós estáveis e o par de ciclos limite bizonais encontrados são também estáveis, assim seria natural a existência de objetos invariantes organizando a dinâmica das orbitas do campo. Com base nisto no artigo [15] é apresentada a seguinte conjectura.

Conjectura 1 Se $\mu > 1$ então, dos dois pontos localizados nos vértices do cone duplo (Figura 4.1) quando $\varepsilon = 0$, próximo aos equilíbrios $X_\varepsilon^\pm$, ocorre uma bifurcação de um par ciclos limite bi-zonais para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

	$\varepsilon < 0$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon > 0$
$0 < \mu < \frac{1}{\sqrt{2}}$	${}^3\Gamma_{(\mu,\varepsilon)}^s - {}^2\Gamma_{(\mu,\varepsilon)}^s$	-	-
$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \mu < 1$	${}^3\Gamma_{(\mu,\varepsilon)}^s$	-	-
$\mu = 1$	${}^3\Gamma_{(\mu,\varepsilon)}^s$	-	-
$\mu > 1$	${}^3\Gamma_{(\mu,\varepsilon)}^s$	${}^3\Gamma_{(\mu,\varepsilon)}^s$	${}^3\Gamma_{(\mu,\varepsilon)}^s - {}^3\Gamma_{(\mu,\varepsilon)}^u$ $- {}^2\Gamma_{(\mu,\varepsilon)}^s$

Figura 4.4: Esquema ilustrando a existência de ciclos limite para o sistema (4-1)-(4-2), com $|\varepsilon| \ll 1$.

Aplicação: O Oscilador de Chua

O oscilador de Chua é o circuito eletrônico autônomo mais simples apresentando comportamento caótico e sua relevância vem do fato de ele ser o primeiro sistema físico para o qual a presença de caos foi provada matematicamente.

Fazemos uma breve descrição do sistema obtido a partir deste circuito e mostramos que este é realizável pela família estudada no Capítulo 4. Para melhores explicações e detalhes sobre a dinâmica deste circuito ver, por exemplo, [17], [12], [13], [5].

5.1 O Circuito

O oscilador de Chua é formado por cinco elementos lineares, dois capacitores, um indutor e dois resistores, e um resistor não linear chamado diodo de Chua, ver [12] and [13].

Este circuito pode gerar fenômenos caóticos e é canônico no sentido que o campo vetorial associado é qualitativamente equivalente a uma grande classe de circuitos associados a sistemas tri-dimensionais. Um esquema para este circuito é mostrado na Figura 5.1.

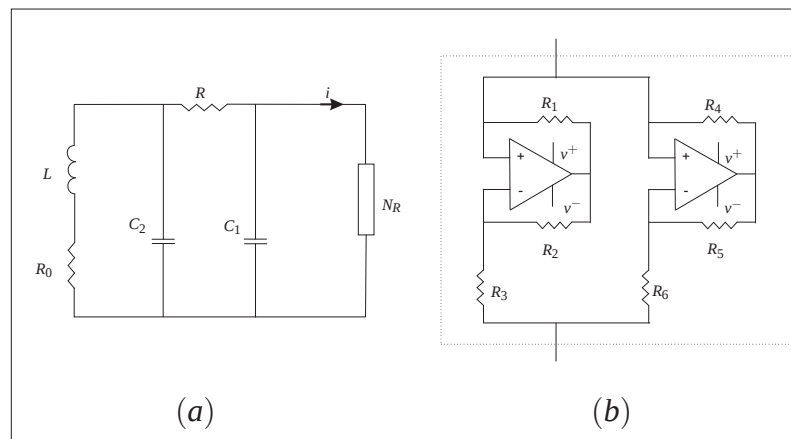


Figura 5.1: (a) Esquema do oscilador de Chua. (b) Implementação da condutância não-linear N_R .

As equações de estado deste oscilador são dadas por

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{C_1}(G(v_2 - v_1) - f(v_1)),$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{C_2}(G(v_1 - v_2) + i_3), \quad (5-1)$$

$$\frac{di_3}{dt} = -\frac{1}{L}(v_2 + R_0 i_3),$$

onde v_1 e v_2 são as tensões nos capacitores C_1 e C_2 , i_3 é a corrente através do indutor L , $G = 1/R$ e $F(v_1) = G_b v_1 + \frac{1}{2}(G_a - G_b)(|v_1 + E| - |v_1 - E|)$ é a característica $v - i$ (voltagem-corrente) do resistor não linear N_R com inclinação igual a G_a na região central e G_b nas outras duas regiões, ver Figura 5.2.

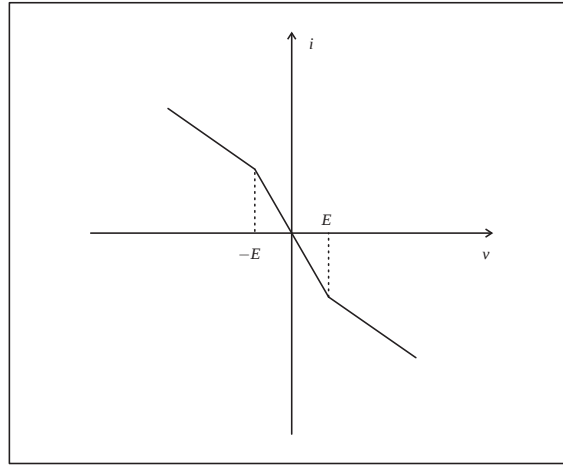


Figura 5.2: Curva característica $v - i$ de N_R .

Consideremos as seguintes variáveis

$$X = \frac{v_1}{E}, \quad Y = \frac{v_2}{E}, \quad Z = i_3 \left(\frac{R}{E} \right)$$

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1}, \quad \beta = \frac{R^2 C_2}{L}, \quad \gamma = \frac{R R_0 C_2}{L},$$

$$a = R G_a, \quad b = R G_b, \quad \tau = \frac{t}{|R C_2|},$$

(5-2)

$$k = \begin{cases} 1, & \text{se } R C_2 > 0, \\ -1, & \text{se } R C_2 < 0. \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\frac{dX}{d\tau} = \frac{1}{E} \frac{dv_1}{dt} \frac{dt}{d\tau},$$

$$\frac{dY}{d\tau} = \frac{1}{E} \frac{dv_2}{dt} \frac{dt}{d\tau},$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = \frac{R}{E} \frac{di_3}{dt} \frac{dt}{d\tau},$$

e as equações do sistema são,

$$\frac{dX}{d\tau} = k\alpha(Y - X - f(X)),$$

$$\frac{dY}{d\tau} = k(X - Y + Z), \quad (5-3)$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = k(-\beta Y - \gamma Z),$$

com $f(X) = bX + \frac{1}{2}(a - b)(|X + 1| - |X - 1|) = bX + \text{sat}(X)$.

Para mais detalhes sobre esta forma ver, por exemplo, [5] e [6].

5.2 Realização do Oscilador de Chua em uma Família a 2 Parâmetros

Mostramos agora que o oscilador de Chua (5-3) é realizável na família estudada no Capítulo 4. Para ver isto façamos a mudança de coordenadas

$$X = x, \quad \alpha Y = -(1 + \gamma)x - y, \quad \alpha Z = (\gamma^2 - \beta)x + \gamma y + z,$$

que está bem definida desde que $\alpha \neq 0$.

Assim,

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \dot{x}, \\ \alpha \dot{Y} &= -(1 + \gamma)\dot{x} - \dot{y}, \\ \alpha \dot{Z} &= (\gamma^2 - \beta)\dot{x} + \gamma\dot{y} + \dot{z}, \end{aligned}$$

onde $(\cdot)$ denota a derivada com respeito ao tempo τ . Substituindo os valores de $\dot{X}$, $\dot{Y}$ e $\dot{Z}$ dados em (5-3) e os valores de X , Y e Z dados pela mudança de coordenadas chegamos em

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(1 + \gamma + \alpha b)x - y + \alpha(b - a)\text{sat}(x), \\ \dot{y} &= (\gamma + \beta + \alpha(1 - (1 + \gamma)b))x - z - \alpha(1 + \gamma)(b - a)\text{sat}(x), \\ \dot{z} &= \alpha(\gamma + (\gamma + \beta)b)x + \alpha(\gamma + \beta)(b - a)\text{sat}(x). \end{aligned} \quad (5-4)$$

Agora, queremos que este sistema tenha a forma do sistema (4-1)-(4-2). Para que isto ocorra, devemos ter que os coeficientes das matrizes da parte linear sejam iguais, logo para $|x| \leq 1$ obtemos

$$-\varepsilon = -1 - \gamma - \alpha a, \quad (5-5)$$

$$1 - \varepsilon^2 = -\alpha + \beta + \gamma + \alpha(1 + \gamma)a, \quad (5-6)$$

$$\varepsilon + \varepsilon^3 = \alpha\gamma - \alpha(\beta + \gamma)a, \quad (5-7)$$

e para $|x| > 1$,

$$-6\mu = -1 - \gamma - \alpha b, \quad (5-8)$$

$$11\mu^2 = -\alpha + \beta + \gamma + \alpha(1 + \gamma)b, \quad (5-9)$$

$$6\mu^3 = \alpha\gamma - \alpha(\beta + \gamma)b. \quad (5-10)$$

Se $b = a$ o sistema (5-3) se torna linear o que não é de nosso interesse, sendo assim, assumiremos que $b \neq a$. Para mostrar que, de fato, esse circuito é realizável na família em questão, devemos determinar valores dos parâmetros ε e μ que satisfazem as equações acima, vejamos.

Subtraindo as equações (5-14) de (5-5), (5-9) de (5-6) e (5-10) de (5-7) obtemos

$$6\mu - \varepsilon = \alpha(b - a), \quad (5-11)$$

$$1 - \varepsilon - 11\mu^2 = -\alpha(1 + \gamma)(b - a), \quad (5-12)$$

$$\varepsilon + \varepsilon^3 - 6\mu^3 = \alpha\gamma - \alpha(\beta + \gamma)b. \quad (5-13)$$

Uma vez que $\alpha(b - a) \neq 0$ a equação (5-11) implica que $6\mu - \varepsilon \neq 0$. Então, dividindo as equações (5-12) por (5-11) e (5-13) por (5-11) obtemos

$$\gamma = \frac{\mu^2 - 6\mu - 1 + \varepsilon + \varepsilon^2}{6\mu - \varepsilon}, \quad \beta = \frac{6\mu^3 - 11\mu^2 + 6\mu + 1 - \varepsilon^2\varepsilon^3}{6\mu - \varepsilon}.$$

Também da equação (5-11) podemos ver que $\alpha b = \alpha a + 6\mu - \varepsilon$ e substituindo a expressão de γ em (5-5) encontramos $\alpha a = (1 - 11\mu^2 + 6\mu\varepsilon - 2\varepsilon^2)/(6\mu - \varepsilon)$. Substituindo esses valores e as expressões de β e γ em (5-6) encontramos

$$\alpha = -\frac{1 + 14\mu^2 + 85\mu^4 - (12\mu + 60\mu^3)\varepsilon - (1 + 3\mu^2)\varepsilon^2 + 2\varepsilon^4}{(6\mu - \varepsilon)^2}.$$

Finalmente, considerando (5-7) e eliminando o fator não nulo $6\mu - \varepsilon$, chegamos na equação

$$\begin{aligned} &1 + 6\mu + 3\mu^2 + 84\mu^3 - 105\mu^4 + 510\mu^5 - 539\mu^6 \\ &+ (-1 - 18\mu - 86\mu^2 - 72\mu^3 - 445\mu^4 + 378\mu^5)\varepsilon + (-1 + 6\mu + 55\mu^2 + 42\mu^3 + 56\mu^4)\varepsilon^2 \\ &+ (1 + 6\mu + 3\mu^2 - 102\mu^3)\varepsilon^3 + (3 + 12\mu + 42\mu^3)\varepsilon^4 - 2\varepsilon^5 - 3\varepsilon^6 = 0. \end{aligned} \quad (5-14)$$

Com a ajuda de um software podemos calcular as raízes desta equação quando $\varepsilon = 0$, e obtemos apenas duas raízes reais simples $\mu_1 \approx -0,1330331157$ e $\mu_2 \approx 0,9390551142$. Agora, derivando a equação (5-14) com relação a μ e avaliando em $(\mu, \varepsilon) = (\mu_i, 0)$, com $i = 1, 2$, verificamos que esta derivada não se anula e podemos aplicar o Teorema da Função Implícita para garantir a existência de dois ramos de solução para esta equação, isto significa que temos dois ramos onde o circuito de Chua é realizado pela família que estudamos.

Apêndice - Cálculo de Séries

Nos Teoremas do Capítulo 4 encontramos as expressões dos parâmetros em séries de potências de algum dos outros parâmetro. Neste apêndice damos a ideia usada para obter estas séries, que são calculadas com o auxílio de algum software de manipulação algébrica como, por exemplo, o Maple, que foi utilizado neste trabalho.

Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5$ e o ponto $p = (1, 2)$. Suponhamos que queremos determinar as soluções de $f(x, y) = 0$, obtendo y como uma função de x , numa vizinhança do ponto p e que não seja possível fazer isto diretamente. Temos que $f_y(p) = 4 \neq 0$ então, pelo Teorema da Função Implícita existe uma única função $y = g(x)$, definida em uma vizinhança de $x = 1$, a qual tem a mesma classe de diferenciabilidade de f , (analítica para o nosso estudo).

A ideia agora é considerar $y = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)^2 + a_3(x - 1)^3 + \dots$ e substituir este valor na equação $x^2 - 5 = -y^2$ assim obtemos uma igualdade entre dois polinômios na indeterminada x logo, igualando os coeficientes destes polinômios encontramos os valores de a_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, tantos quantos necessitarmos. Em geral, não é simples de se calcular esses coeficientes e é necessário o uso de um software que nos auxilie nas contas, em todo este trabalho o Maple foi utilizado nesse contexto. Para esta função específica obtemos

$$y = 2 - \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{5}{16}(x - 1)^2 - \frac{5}{64}(x - 1)^3 - \frac{45}{1024}(x - 1)^4 - \frac{95}{4096}(x - 1)^5 + O((x - 1)^6).$$

A diferença para encontrar as séries das demonstrações dos Teoremas do Capítulo 4 é, que lá, temos um sistema de equações mas o procedimento é análogo, apenas com um pouco mais de trabalho e uma noção básica de uso do software.

Referências Bibliográficas

- [1] ANDRONOV, A. A; VITT, A. A; KHAIKIN, S. E. **Theory of Oscillators**. Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [2] CARMONA, V. **Bifurcaciones en sistemas dinámicos lineales a trozos**. 282p(Tesis Doctoral):Universidad de Sevilla – Departamento de Matemática Aplicada II, 2002.
- [3] CARMONA, V; FREIRE, E; PONCE, E; TORRES, F. **On simplifying and classifying piecewise-linear systems**. IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl., 49(5):609–620, 2002.
- [4] CHOW, S. N; HALE, J. K. **Methods of Bifurcation Theory**. Springer-Verlag, New York, first edition, 1982.
- [5] CHUA, L. O; LIN, G. N. **Canonical realization of chua’s circuit family**. IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl., 37(7):885–902, 1990.
- [6] CHUA, L. O; WU, C. W; HUANG, A; ZHONG, G. Q. **A universal circuit for studying and generating chaos - part i: Routs to chaos**. IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl., 40(10):132–144, 1993.
- [7] DEMAZURE, M. **Bifurcations and Catastrophes - Geometry of Solutions to Nonlinear Problems**. Springer-Verlag, New York, second edition, 2000.
- [8] DIBERNARDO, M; BUDD, C. J; CHAMPNEYS, A. R; KOWALCZYK, P. **Piecewise-smooth Dynamical Systems - Theory and Applications (Applied Mathematical Sciences; 163)**. Springer-Verlag, London, first edition, 2008.
- [9] FILIPPOV, A. F. **Differential Equations with Discontinuos Righthand Sides**. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, first edition, 1988.
- [10] GOLUBITSKY, M; SCHAEFFER, D. G. **Singularities and Groups in Bifurcation Theory (Applied Mathematical Sciences; 51)**. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [11] GUCKENHEIMER, J; HOLMES, P. **Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields (Applied Mathematical Sciences; 42)**. Springer-Verlag, New York, first edition, 1983.

- [12] KENNEDY, M. P. **Robust op amp realization of chua's circuit.** Frequenz, 46(3-4):66–80, 1992.
- [13] KENNEDY, M. P. **Three steps to chaos-part ii: A chua's circuit primer.** IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl., 40(10):657–674, 1993.
- [14] KUZNETSOV, Y. A. **Elements of Applied Bifurcation Theory.** Springer-Verlag, New York, third edition, 2004.
- [15] LLIBRE, J; PONCE, E; ROS, J; TORRES, F. **On the fold-hopf bifurcation for continuous piecewise linear differential systems with symmetry.** Chaos, 20(033119):1–13, 2010.
- [16] PERKO, L. **Differential Equations and Dynamical Systems.** Springer-Verlag, New York, second edition, 1996.
- [17] PIKVA, L; WU, C. W; HUANG, A. **Chua's oscillator: A compendium of chaotic phenomena.** Journal of the Franklin Institute, 331B(6):705–741, 1994.
- [18] ROS, F. J. **Estudio del comportamiento dinámico de sistemas autónomos tridimensionales lineales a trozos.** 229(Tesis Doctoral):Universidad de Sevilla – Departamento de Matemática Aplicada II, 2003.
- [19] SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.** Projeto Euclides, Rio de Janeiro, first edition, 1979.