UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

LÍVIO JOSÉ VELASCO

Superfícies de Weingarten Generalizadas do Tipo Rotacional no 3-Espaço Euclidiano

Goiânia
2011

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	LÍVIO JOSÉ VELASCO				
E-mail:					
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	[ ]Sim	[X] Não			
Vínculo empregatício do autor					
Agência de fomento:				Sigla:	
País:		UF:		CNPJ:	
Título:	Superfícies de Weingarten Generalizadas do Tipo Rotacional no 3-Espaço Euclidiano				
Palavras-chave:	Superfícies Weingarten Generalizadas, Superfícies de Rotações				
Título em outra língua:	Generalized Weingarten Surfaces of Rotation in 3-Euclidiano Space				
Palavras-chave em outra língua:	Generalized Weingarten Surfaces, Rotation surfaces				
Área de concentração:	Geometria e Topologia				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	01/03/2011				
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado em Matemática				
Orientador (a):	Dr. Armando Mauro Vasquez Corro				
E-mail:					
Co-orientador (a):*					
E-mail:					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Liberação para disponibilização?[1] [x] total [ ] parcial

Em caso de disponibilização parcial, assinale as permissões:

[ ] Capítulos. Especifique: _____

[ ] Outras restrições: _____

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O Sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Lívio José Velasco

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 02 / 03 / 2011

[1] Em caso de restrição, esta poderá ser mantida por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Todo resumo e metadados ficarão sempre disponibilizados.

LÍVIO JOSÉ VELASCO

Superfícies de Weingarten Generalizadas do Tipo Rotacional no 3-Espaço Euclidiano

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro

Goiânia
2011

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

Velasco, Lívio José.
V433s Superfícies de Weingarten Generalizadas do Tipo Rotacional no 3-Espaço Euclidiano [manuscrito] / Lívio José Velasco. - 2011.
54 f.

Orientador: Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Institulo de Matemática e Estatístical, 2011.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras, abreviaturas, siglas e tabelas.
Apêndices.

1.Weingarten Generalizada 2.Superfície de Rotação
I. Título.

CDU: 514.752

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Lívio José Velasco

Graduou–se em Matemática na UFG - Universidade Federal de Goiás. Durante sua graduação, foi monitor no departamento de Matemática da UFG e bolsista quando aluno de mestrado pela UFG.

LÍVIO JOSÉ VELASCO

SUPERFÍCIES DE WEINGARTEN GENERALIZADAS DO TIPO ROTACIONAL NO 3-ESPAÇO EUCLIDIANO

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 01 de março de 2011, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Marcelo Lopes Ferro

Prof. Dr. Marcelo Lopes Ferro
Departamento de Matemática e Física-PUC/GO

Prof. Dr. Max Valério Lemes
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Agradecimentos

À Deus por conceder-me a vida, e sempre abençoá-la.

Aos meus pais, Wilton e Zildene pelo apoio e incentivo.

À minha namorada, Ariany, pela compreensão.

Ao professor Dr. Armando Mauro Vasquez Corro, primeiramente por ter aceito a orientar-me, depois pela escolha do tema. Além da dedicação, paciência e ensinamentos proporcionados para a realização do trabalho.

Aos professores que contribuíram para esta conquista, em especial ao professor Dr. Romildo da Silva Pina que durante toda a graduação foi um grande concelheiro e incentivador.

Aos demais familiares e amigos.

Aos colegas do curso de mestrado que com paciência compartilharam várias vezes seus conhecimentos.

Aos funcionários do Instituto de Matemática e Estatística da UFG, pela atenção a todo o tempo de convívio.

Aos professores Dr. Max Valério Lemes e Dr. Marcelo Lopes Ferro que fizeram parte da banca examinadora e pelas sugestões dadas para melhoria do trabalho.

Resumo

Velasco, Lívio José. **Superfícies de Weingarten Generalizadas do Tipo Rotacional no 3-Espaço Euclidiano**. Goiânia, 2011. 57p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho estudamos as superfícies de rotações S que são Weingarten generalizada, nas quais a curvatura gaussiana K e curvatura média H de tais superfícies satisfazem a seguinte relação $(\omega^2-\rho^2)K+2\omega H+1=0$, onde ω e ρ são funções harmônicas com respeito a forma quadrática $\sigma = II+\omega III$ e II, III são a segunda e terceira forma quadrática da superfície. Inspirados no trabalho de *Schief* [15], obtemos uma caracterização destas superfícies determinadas por funções que satisfazem um sistema de equações diferenciais ordinárias, como aplicação provamos que com uma condição adicional essas superfícies são esferas.

Palavras–chave

Superfícies Weingarten Generalizadas, Superfícies de Rotação.

Abstract

Velasco, Lívio José. **Generalized Weingarten Surfaces of Rotation in 3-Euclidiano Space**. Goiânia, 2011. 57p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work, we study the surfaces of rotation S which are Weingarten general, in which the Gaussian curvature K and mean curvature H of this surface satisfies the following relationship $(\omega^2 - \rho^2)K + 2\omega H + 1 = 0$, where ω and ρ are harmonic functions with respect to the quadratic form $\sigma = II + \omega III$ and II, III are the surface's second and third quadratic form. Inspired by the work of *Schief* [15], we obtain a characterization of these surfaces determined by functions satisfying a system of ordinary differential equations, as application we prove that with an additional condition these surfaces are spheres.

Keywords

Generalized Weingarten Surfaces, Rotation Surfaces.

Sumário

introdução **10**

1 Preliminares **12**
- 1.1 Superfícies Regulares 12
- 1.2 Primeira Forma Fundamental; Aplicação Normal de Gauss; Segunda Forma Fundamental 14
- 1.3 Linhas de Curvatura; Curvatura Gaussiana e Curvatura média 17
- 1.4 Superfícies de Rotações 27
- 1.5 Parametrizações Isotérmicas; Isometrias e Aplicações Conformes 31
- 1.6 Laplaciano 34

2 Superfície de Weingarten generalizada de Revolução **40**
- 2.1 Superfícies Paralelas 40
- 2.2 Superfícies Weingarten Generalizada de Classe 2 45
- 2.3 Caracterização das Superfícies de Rotações que são Weingarten Generalizada de Classe 2 48

Referências Bibliográficas **56**

Introdução

A interação entre geometria diferencial e equações diferenciais parciais tem sido estudada desde os séculos passados. Inicialmente essa relação foi estudada para superfícies com curvatura gaussiana e média constantes, gerando assim uma grande atividade de pesquisa nesta área, olhar [7], [8] e [14]. O estudo inicial desse assunto pode ser encontrado, nos livros clássicos de *Lie, Darboux, Goursat, Bianchi, Bächlund, E. Cartan*. Este relacionamento esta baseado no fato das propriedades locais das variedades serem expressas em termos de equações diferenciais parciais, ver [1], [2], [3], [4], e [13]. Os autores mencionados anteriormente introduziram transformações entre superfícies que preservam a curvatura gaussiana constante, assim como a curvatura média constante, [17], [12] e [16]. As transformações mais conhecidas são, transformações de *Bäcklund, Ribaucour, de Guichard*.

A correspondência entre certas classes de variedades e a equação diferencial associada pode ser útil em dois caminhos. Conhecendo a geometria da variedade podemos obter soluções para as equações. Inversamente, podemos obter propriedades geométricas, ou até mesmo provar a não existência de certas estruturas geométricas conhecendo as soluções das equações diferenciais correspondentes.

Certas propriedades geométricas das superfícies com curvatura gaussiana constante $K > 0$, podem ser expressas em termos da seguinte equação diferencial,

$$\Delta\phi = K senh\,\phi.$$

Esta equação é conhecida como equação se sine-Gordon elíptica. Também é conhecido que as superfície Weingarten linear que satisfaz a relação

$$1 + 2aH + (1 + a^2)K = 0,$$

onde a é constante, tem como equação diferencial associada

$$\Delta\phi = \frac{1}{1+a^2} sen(\phi + c),$$

onde c é uma constante. Olhar [17].

Além dos autores, *Campos, Cartan, Moore, Bianchi, Bobenko*, e outros que estudaram as superfícies com curvatura gaussiana constante, *Bobenko* estudou ainda superfícies na quais a curvatura gaussiana satisfaz

$$K = \frac{1}{\rho^2},$$

onde ρ é harmonica com respeito a segunda forma quadrática.

Nosso objetivo é estudar as superfícies introduzidas por *Schief* em [15], na qual a curvatura gaussiana K e curvatura média H satisfaz a seguinte relação

$$(\omega^2 - \rho^2)K + 2\omega H + 1 = 0,$$

onde ω e ρ são funções harmônicas com respeito a forma quadrática $\sigma = II + \omega III$ e II, III são a segunda e terceira forma quadrática da superfície S. Tais superfícies são denominadas superfícies Weingarten generalizada de classe 2. Elas generalizam as superfícies de curvatura gaussiana constante positiva, e as estudadas por *Bobenko* (no caso em que $\omega = 0$). Motivados pelo trabalho de *Schief*, obtivemos resultados mais gerais que os obtidos por *Schief*, no caso particular quando as superfícies são de rotação.

No capítulo 1, apresentamos conceitos de geometria Diferencial, em especial na seção 4, que será a essência utilizada no capítulo subsequente.

No capítulo 2, introduzimos algumas definições que serão fundamentais na seção 3 ao caracterizarmos as superfícies de rotação que são Weingarten generalizada de classe 2. Apresentamos uma caracterização destas superfícies determinadas por funções que satisfazem um sistema de equações diferenciais ordinárias, como aplicação provamos que com uma condição adicional essas superfícies são esferas.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo abordamos algumas definições e resultados sobre a geometria das superfícies, baseado em [10], os quais serão úteis nos próximos capítulos. Iniciamos com a definição de Superfícies Regulares, posteriormente introduzimos os seguintes conceitos: Primeira forma fundamental; Aplicação Normal de Gauss; Segunda Forma Fundamental. Na terceira seção, iniciamos com Linhas de Curvaturas e finalizamos com o estudo das curvaturas Gaussiana e Média, respectivamente. Na seção 1.4 estudamos um pouco das Superfícies de Revolução utilizando os conceitos das seções anteriores, no qual se baseará o estudo do presente trabalho. Na seção 1.5 exibiremos definições e alguns resultados com respeito as Parametrizações Isotérmicas, Isometrias e Aplicações Conformes. Finalizamos com a seção 1.6, expondo a expressão do laplaciano de uma função com relação a uma dada métrica.

1.1 Superfícies Regulares

Iniciamos com algumas definições. Definimos o que vem a ser uma variedade diferenciável, imersão, mergulho e a seguir superfícies regulares.

Definição 1.1 *Uma **variedade diferenciável de dimensão n** é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $X_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que:*

i) $\bigcup_\alpha X_\alpha(U_\alpha) = M$.

ii) Para todo par α, β, *com* $X_\alpha(U_\alpha) \bigcap X_\beta(U_\beta) = W \neq \phi$, *os conjuntos* $X_\alpha^{-1}(W)$ *e* $X_\beta^{-1}(W)$ *são abertos em* $\mathbb{R}^n$ *e as aplicações* $X_\alpha^{-1} \circ X_\beta$ *são diferenciáveis.*

iii) A família $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}$ *é máxima relativamente às condições i) e ii).*

O par (U_α, X_α) é chamada uma parametrização de M em $p \in X_\alpha(U_\alpha)$.

Definição 1.2 *Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensão m e n, respectivamente. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \to N$ é uma **imersão** se $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se além disso, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N, dizemos que φ é um **mergulho**.*

A seguir fornecemos a definição de superfícies regulares, que são casos particulares de variedades diferenciáveis.

Definição 1.3 *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ é uma* ***superfície regular*** *se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $X : U \to V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:*

i) X é diferenciável.

ii) X é um homeomorfismo.

iii) Para todo $q \in U$, a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetiva.

A aplicação $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ é chamada uma parametrização ou um sistema de coordenadas (locais) em uma vizinhança de $X(q) = p$. A vizinhança $V \cap S$ de p é chamada uma vizinhança coordenada.

Analisemos a matriz da aplicação linear dX_q nas bases canônicas $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ de $\mathbb{R}^2$ com coordenadas (u,v) e $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (0,1,0)$ e $f_3 = (0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ com coordenadas (x,y,z).

Seja $q = (u_0, v_0)$. O vetor e_1 é tangente à curva $u \to (u, v_0)$ cuja imagem por X é a curva

$$u \to (x(u,v_0), y(u,v_0), z(u,v_0)).$$

Esta curva é chamada curva coordenada $v = v_0$ e está contida em S, tendo em $X(q)$ o vetor tangente

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial X}{\partial u},$$

onde as derivadas são calculadas em (u_0, v_0) e um vetor é indicado pelas suas componentes na base $\{f_1, f_2, f_3\}$. Pela definição de diferencial,

$$dX_q(e_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial X}{\partial u}.$$

Analogamente, usando a curva coordenada $u = u_0$ (imagem por X da curva $v \to (u_0, v)$), obtemos

$$dX_q(e_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial X}{\partial v}.$$

Portanto, a matriz da aplicação linear dX_q nas bases consideradas é,

$$\mathbf{dX_q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

A condição *iii*) da definição 1.3 pode ser expressa equivalentemente da seguinte forma: os dois vetores coluna da matriz de dX_q são linearmente independentes, o que significa que o produto vetorial $\dfrac{\partial X}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial X}{\partial v}$ é não nulo.

1.2 Primeira Forma Fundamental; Aplicação Normal de Gauss; Segunda Forma Fundamental

Nesta seção vamos definir a primeira forma fundamental, aplicação normal de Gauss e a segunda forma fundamental.

Um vetor w tangente à superfície S, $w \in T_pS$, é o vetor tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, com $p = \alpha(0) = X(u_0, v_0)$ em um ponto $X(q) = p \in S$. Assim, w é expresso como $w = \alpha'(0) = X_u du + X_v dv$, onde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X(U) \subset S$ é uma aplicação diferenciável que descreve uma curva em S, com $\alpha(0) = p$.

Denotaremos por T_pS o plano tangente à superfície S em p, que pela condição *iii*) da definição de superfície regular é exatamente o conjunto de vetores tangentes às curvas parametrizadas de S, passando por p.

Definição 1.4 *Uma **forma bilinear e simétrica** é uma aplicação $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_2, w_1 \rangle$ e $\langle\ ,\ \rangle$ é linear em w_1 e w_2.*

Definição 1.5 *Seja $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica. Consideremos a função $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $L(w) = \langle w, w \rangle$, para todo $w \in \mathbb{R}^n$. Esta função de uma variável é denominada **forma quadrática sobre** $\mathbb{R}^n$ associada à forma bilinear $\langle\ ,\ \rangle$.*

O produto interno natural do $\mathbb{R}^3 \supset S$, induz em cada plano tangente T_pS de uma superfície regular S um produto interno, que indicaremos por $\langle\ ,\ \rangle_p$. Se $w_1, w_2 \in T_pS \subset \mathbb{R}^3$, então $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ é igual ao produto interno de w_1 e w_2 como vetores em $\mathbb{R}^3$. A esse produto interno, que é uma forma bilinear e simétrica, corresponde uma forma quadrática $I_p : T_pS \to \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0.$$

Definição 1.6 *A forma quadrática I_p em T_pS definda por $I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0$, é chamada a **primeira forma fundamental** da superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$.*

A primeira forma fundamental é antes de tudo uma forma de dizer que a superfície S herda o produto interno natural do $\mathbb{R}^3$.

Vamos agora expressar a primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ associada a uma parametrização $X(u, v)$ em p. Como um vetor tangente $w \in T_pS$ é o vetor tangente

a uma curva parametrizada $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, com $p = \alpha(0) = X(u_0, v_0)$, obtemos

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \left\langle \alpha'(0), \alpha'(0) \right\rangle_p \\ &= \langle X_u du + X_v dv, X_u du + X_v dv \rangle_p \\ &= \langle X_u, X_u \rangle_p (du)^2 + 2 \langle X_u, X_v \rangle_p du dv + \langle X_v, X_v \rangle_p (dv)^2 \\ &= E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2, \end{aligned}$$

onde os valores das funções envolvidas são calculados em $t = 0$, e

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_u \rangle_p, \\ F(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_v \rangle_p, \\ G(u_0, v_0) &= \langle X_v, X_v \rangle_p \end{aligned}$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ de T_pS. Fazendo p variar na vizinhança coordenada correspondente a $\{X_u, X_v\}$, obtemos funções $E(u,v)$, $F(u,v)$, $G(u,v)$ que são diferenciáveis nessa vizinhança.

De agora em diante, omitiremos o índice p na indicação do produto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$ ou da forma quadrática I_p, quando for claro pelo contexto a que ponto nos referimos.

Dada uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ de uma superfície regular S em um ponto, podemos escolher, para cada ponto de $X(U)$, um vetor normal unitário pela regra

$$N(q) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}(q),\ q \in X(U).$$

Temos então uma aplicação diferenciável $N : X(U) \to \mathbb{R}^3$ que associa a cada $q \in X(U)$ um vetor normal unitário $N(q)$.

Se $V \subset S$ é um conjunto aberto em S e $N : V \to \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável que associa a cada $q \in V$ um vetor normal unitário em q, dizemos que N é um campo diferenciável de vetores normais unitários em V.

Nem toda superfície admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definidos sobre toda a superfície. Mas quando tal fato se verificar dizemos que a superfície regular é orientável. A escolha do campo N é chamada uma orientação de S. É claro que toda superfície é localmente orientável. E a orientação é uma propriedade global (das superfícies que são orientáveis).

Daqui pra frente vamos nos referir a uma superfície S como sendo uma superfície regular orientável e orientada.

Definição 1.7 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação N. A aplicação diferenciável $N : S \to \mathbb{R}^3$ toma seus valores na esfera unitária*

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1\}.$$

Logo, $N : S \to S^2$. Esta aplicação é conhecida como ***aplicação normal de Gauss de*** *S.*

A diferencial dN_p de N em $p \in S$ é uma aplicação linear de T_pS em T_pS^2. Como os espaços T_pS e T_pS^2 são isomorfos, podemos olhar a dN_p como uma aplicação linear em T_pS, ou seja, $dN_p : T_pS \to T_pS$.

Para cada curva parametrizada $\alpha(t)$ em S, com $\alpha(0) = p$, consideramos a curva parametrizada $N \circ \alpha(t) = N(t)$ na esfera S^2; isso equivale a restringir o vetor normal N à curva $\alpha(t)$. O vetor tangente $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$ é um vetor de T_pS. Ele mede a taxa de variação do vetor normal N, restrito à curva $\alpha(t)$ em $t = 0$. Assim, a dN_p mede quanto N se afasta de $N(p)$ em uma vizinhança de p. Esta medida é caracterizada por uma aplicação linear.

Proposição 1.8 *A diferencial $dN_p : T_pS \to T_pS$ da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.*

Demonstração. Como dN_p é linear, basta verificar que $\langle dN_p(w_1), w_2\rangle = \langle w_1, dN_p(w_2)\rangle$ para uma base $\{w_1, w_2\}$ de T_pS. Seja $X(u,v)$ uma parametrização de S em p e $\{X_u, X_v\}$ a base associada de T_pS. Se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva parametrizada em S, com $\alpha(0) = p$, temos

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(X_u u' + X_v v') \\ &= \frac{d}{dt} N(u(t), v(t)) \ em\ t = 0 \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0); \end{aligned}$$

como $dN_p(X_u) = N_u$ e $dN_p(X_v) = N_v$, basta mostrar que

$$\langle N_u, X_v\rangle = \langle X_u, N_v\rangle.$$

Derivando $\langle N, X_u\rangle = 0$ e $\langle N, X_v\rangle = 0$, em relação a u e v, respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \langle N_v, X_u\rangle + \langle N, X_{uv}\rangle = 0, \\ \langle N_u, X_v\rangle + \langle N, X_{vu}\rangle = 0. \end{aligned}$$

Logo, igualando as duas equações acima temos

$$\langle N_v, X_u\rangle + \langle N, X_{uv}\rangle = \langle N_u, X_v\rangle + \langle N, X_{vu}\rangle,$$

ou seja, como $\langle N, X_{uv}\rangle = \langle N, X_{vu}\rangle$ temos que

$$\langle N_u, X_v\rangle = \langle N_v, X_u\rangle.$$

□

Sendo $dN_p : T_pS \to T_pS$ uma aplicação linear auto-adjunta podemos associar a dN_p uma forma quaqrática Q em $T_p(S)$, dada por $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$. Para darmos uma interpretação geométrica desta forma quadrática, precisamos de algumas definições.

Definição 1.9 *A forma quadrática II_p, definida em T_pS por $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$ é chamada a* ***segunda forma fundamental*** *de S em p.*

1.3 Linhas de Curvatura; Curvatura Gaussiana e Curvatura média

Nesta seção discorreremos os conceitos de linhas de curvaturas, curvatura gaussiana e curvatura média. Para isto, iniciaremos com a seguinte definição.

Definição 1.10 *Seja C uma curva regular em S passando por $p \in S$, k a curvatura de C em p, e $cos\theta = \langle n, N \rangle$, onde n é o vetor normal a C e N é o vetor normal a S em p. O número $k_n = kcos\theta$ é chamado a* ***curvatura normal*** *de $C \subset S$ em p.*

k_n é o comprimento da projeção do vetor kn sobre a normal à superfície em p, com um sinal dado pela orientação N de S em p.

Observação 1.11 *A curvatura normal de C não depende da orientação de C, mas inverte o sinal com uma mudança de orientação da superfície.*

Considere uma curva regular $C \subset S$ parametrizada por $\alpha(s)$, onde s é o comprimento de arco de C com $\alpha(0) = p$. Se indicarmos por $N(s)$ a restrição do vetor normal N à curva $\alpha(s)$, teremos $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$, donde

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle N(0), \alpha''(0) \rangle \\ &= \langle N, kn \rangle (p) = k_n(p). \end{aligned}$$

Portanto, o valor da segunda forma fundamental II_p em um vetor unitário $v \in T_pS$ é igual à curvatura normal de uma curva regular passando por p e tangente a v. Assim, segue-se o resultado abaixo.

Proposição 1.12 *(Meusnier) Todas as curvas de uma superfície S que têm, em um ponto $p \in S$, a mesma reta tangente têm, neste ponto, a mesma curvatura normal.*

A proposição acima nos permite falar em curvatura normal ao longo de uma dada direção em p. Dado um vetor unitário $v \in T_pS$, a interseção de S com o plano contendo v e $N(p)$ é chamada a seção normal de S em p segundo v. Em uma vizinhança de p, uma seção normal de S em p é uma curva regular plana em S, cujo vetor normal n em p é $\pm N(p)$ ou zero; a sua curvatura é, portanto, igual ao valor absoluto da curvatura normal segundo v em p. Assim, a proposição acima afirma que o valor absoluto da curvatura normal em p de uma curva $\alpha(s)$ é igual à curvatura da seção normal de S em p, segundo $\alpha'(0)$.

O teorema abaixo nos diz que para cada $p \in S$ existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pS tal que $dN_p(e_1) = -k_1e_1$, $dN_p(e_2) = -k_2e_2$. Além disso, k_1 e k_2 $(k_1 \geq k_2)$ são o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental II_p restrita ao círculo unitário de T_pS, ou seja, são os valores extremos da curvatura normal em p.

Teorema 1.13 *Seja $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear auto-adjunta. Então existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^n$ tais que $A(e_1) = \lambda_1 e_1$, $A(e_2) = \lambda_2 e_2$, (isto é, e_1 e e_2 são auto-vetores, e λ_1, λ_2 são auto-valores de A). Na base $\{e_1, e_2\}$, a matriz de A é diagonal e os elementos λ_1 e λ_2, $\lambda_1 \geq \lambda_2$, da diagonal são o máximo e o mínimo, respectivamente, da forma quadrática $Q(w) = \langle Aw, w\rangle$ sobre o círculo unitário de $\mathbb{R}^n$.*

Definição 1.14 *O máximo da curvatura normal, k_1, e o mínimo da curvatura normal, k_2, são chamados **curvaturas principais** em p; as direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos auto-vetores e_1 e e_2 são chamadas **direções principais** em p.*

Por exemplo, no plano, todas as direções em todos os pontos são principais. O mesmo acontece com uma esfera. Em ambos os casos, isto vem do fato de que a segunda forma fundamental, em todos os pontos, restrita a vetores unitários, é constante. Assim, todas as direções são extremos para a curvatura normal.

Definição 1.15 *Se uma curva regular e conexa C em S é tal que para todo $p \in C$ a reta tangente a C é uma direção principal em p, então dizemos que C é uma linha de curvatura de S.*

Proposição 1.16 ***(Olinde Rodrigues)*** *Uma condição necessária e suficiente para que uma curva conexa e regular C em S seja uma linha de curvatura de S é que*

$$N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t),$$

para qualquer parametrização $\alpha(t)$ de C, onde $N(t) = N \circ \alpha(t)$ e $\lambda(t)$ é uma função diferenciável de t. Nesse caso, $-\lambda(t)$ é a curvatura (principal) segundo $\alpha'(t)$.

Demonstração. Basta observar que se $\alpha'(t)$ está contido em uma direção principal, então $\alpha'(t)$ é um auto-vetor de dN e

$$dN(\alpha'(t)) = N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t).$$

A recíproca é imediata.

□

O conhecimento das curvaturas principais em p permite calcular a curvatura normal segundo uma direção dada de T_pS. De fato, se $v \in T_pS$ e $|v| = 1$, seja $\{e_1, e_2\}$ uma ortonormal de T_pS, podemos escrever

$$v = e_1 cos\theta + e_2 sen\theta,$$

onde θ é o ângulo de e_1 a v na orientação de T_pS. A curvatura normal k_n na direção de v é dada por

$$\begin{aligned} k_n = II_p(v) &= -\langle dN_p(v), v\rangle \\ &= -\langle dN_p(e_1 cos\theta + e_2 sen\theta), e_1 cos\theta + e_2 sen\theta\rangle \\ &= \langle e_1 k_1 cos\theta + e_2 k_2 sen\theta, e_1 cos\theta + e_2 sen\theta\rangle \\ &= k_1 cos^2\theta + k_2 sen^2\theta. \end{aligned}$$

A expressão $k_1 cos^2\theta + k_2 sen^2\theta$ é conhecida como fórmula de Euler. Ela é a expressão da segunda forma fundamental na base $\{e_1, e_2\}$.

Dada uma aplicação linear $A : V \to V$ em um espaço vetorial de dimensão 2 e dada uma base $\{v_1, v_2\}$ de V, lembramos que determinante de A e traço de A é dado por

$$\begin{aligned} det\, A &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \\ Tr\, A &= a_{11} + a_{22}, \end{aligned}$$

onde (a_{ij}) é a matriz de A na base $\{v_1, v_2\}$. Esses números não dependem da base escolhida, sendo, portanto, associados à aplicação linear A.

No nosso caso, o determinante de dN é o produto $(-k_1)(-k_2) = k_1k_2$, e o traço de dN é $-(k_1 + k_2)$. Se mudamos a orientação da superfície, o determinante não muda (aqui é fundamental o fato da dimensão ser par); o traço, porém, muda de sinal.

Definição 1.17 *Seja $p \in S$ e seja $dN_p : T_pS \to T_pS$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de dN_p é chamdo a* ***Curvatura Gaussiana*** *K de S em p. O negativo da metade do traço de dN é chamado a* ***Curvatura Média*** *de S em p.*

Logo temos as seguintes expressões para a curvatura Gaussiana K e para a curvatura média H

$$K = k_1 k_2, \qquad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Definição 1.18 *Um ponto p de uma superfície S é dito um ponto:*

i) ***Elíptico*** *se $det(dN_p) > 0$.*

ii) ***Hiperbólico*** *se $det(dN_p) < 0$.*

iii) ***Parabólico*** *se $det(dN_p) = 0$, com $dN_p \neq 0$.*

iv) ***Planar*** *se $dN_p = 0$.*

A classificação acima não depende da orientação escolhida para S.

Cada ponto tem, conforme sua natureza, suas particularidades em relação às curvaturas principais. Por exemplo em um ponto hiperbólico, a curvatura Gaussiana é negativa. Logo, as curvaturas principais têm sinais contrários e, portanto, existem curvas passando pelo ponto p cujos vetores normais em p apontam para lados diferentes do plano tangente à superfície S em p.

Definição 1.19 *Seja p um ponto em S. Uma* ***direção assintótica*** *de S em p é uma direção de T_pS para a qual a curvatura normal é nula. Uma* ***curva assintótica*** *de S é uma curva conexa e regular $C \subset S$ tal que para cada $p \in C$ a reta tangente a C em p é uma direção assintótica.*

Logo, pela definição temos que em um ponto elíptico não existem direções assintóticas.

Uma interpretação geométrica para as direções assintóticas é dada pela indicatriz de Dupin. Vejamos.

Definição 1.20 *Seja p um ponto de S. A* ***indicatriz de Dupin*** *em p é o conjunto de vetores de T_pS tais que $II_p(w) = \pm 1$.*

Para escrever as equações da indicatriz de Dupin de uma maneira conveniente, sejam (ε, η) as coordenadas cartesianas de T_pS na base ortonormal $\{e_1, e_2\}$, onde e_1 e e_2 são autovetores de dN_p. Dado $w \in T_pS$, considere γ e θ como se fosse coordenadas polares definidas por $w = \gamma v$, com $|v| = 1$ e $v = e_1 cos\theta + e_2 sen\theta$, se $\gamma \neq 0$. Pela fórmula de Euler,

$$\begin{aligned} \pm 1 = II_p(w) &= \gamma^2 II_p(v) \\ &= k_1 \gamma^2 cos^2\theta + k_2 \gamma^2 sen^2\theta \\ &= k_1 \varepsilon^2 + k_2 \eta^2, \end{aligned}$$

onde $w = \varepsilon e_1 + \eta e_2$. Assim, as coordenadas (ε, η) de um ponto da indicatriz de Dupin satisfazem a equação

$$k_1 \varepsilon^2 + k_2 \eta^2 = \pm 1;$$

logo, a indicatriz de Dupin é a união de cônicas em T_pS. Notamos que a curvatura normal ao longo da direção determinada por w é

$$k_n(v) = II_p(v) = \pm\frac{1}{\gamma^2}.$$

Para um ponto hiperbólico, k_1 e k_2 têm sinais opostos. A indicatriz de Dupin é então formada por duas hipérboles com um par comum de linhas assintóticas. Ao longo das direções assintóticas, a curvatura normal é nula; elas são, portanto, direções assintóticas. Isso justifica a teminologia e mostra que um ponto hiperbólico tem exatamente duas direções assintóticas.

Para um ponto parabólico, uma das curvaturas principais é nula, e a indicatriz de Dupin degenera em um par de retas paralelas. A direção comum dessas retas é a única direção assintótica no ponto em questão.

Definiremos a seguir um conceito relacionado com o de direção assintótica.

Definição 1.21 *Seja p um ponto de uma superfície S. Dois vetores não nulos w_1, $w_2 \in T_pS$ são conjugados se $\langle dN_p(w_1), w_2\rangle = \langle w_1, dN_p(w_2)\rangle = 0$. Duas direções r_1, r_2 em p são conjugadas se um par de vetores não nulos w_1, w_2, paralelos, respectivamente, a r_1 e r_2, são conjugados.*

As direções conjugadas não depende da escolha dos vetores w_1 e w_2 em r_1 e r_2.

Segue-se da definição que as direções principais são conjugadas e que uma direção assintótica é conjugada de si mesma.

Obteremos agora as expressões da segunda forma fundamental e da diferencial da aplicação de Gauss, em um sistema de coordenadas locais.

Todas as parametrizações $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ consideradas nesta seção são compatíveis com a orientação N de S; ou seja, em $X(U)$, temos que $N = \dfrac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}$.

Seja $X(u,v)$ uma parametrização em um ponto $p \in S$ de uma superfície S, e seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em S, com $\alpha(0) = p$. Por conveniência e simplificação da notação, todas as funções que aparecerem serão tomadas no ponto p.

O vetor tangente a $\alpha(t)$ em p é $\alpha' = X_u u' + X_v v'$ e

$$dN(\alpha') = dN(X_u u' + X_v v') = N_u u' + N_v v'$$

Como N_u e N_v pertencem a T_pS, temos

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}X_u + a_{21}X_v, \\ N_v &= a_{12}X_u + a_{22}X_v, \end{aligned} \tag{1-1}$$

e portanto,

$$dN(\alpha') = (a_{11}u' + a_{12}v')X_u + (a_{21}u' + a_{22}v')X_v;$$

ou seja,

$$dN\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Isto mostra que, na base $\{X_u, X_v\}$, dN é dada pela matriz $\left(a_{ij}\right)$, i, $j = 1, 2$. Esta matriz não é necessariamente simétrica, a não ser que $\{X_u, X_v\}$ seja uma base ortonormal.

Por outro lado, a expressão da segunda forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ é dada por

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') = -\left\langle dN(\alpha'), \alpha' \right\rangle &= -\langle N_u du + N_v dv, X_u du + X_v dv \rangle \\ &= e(du)^2 + 2f du dv + g(dv)^2, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle, \\ f &= -\langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle, \\ g &= -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Os coeficientes e, f e g são chamados coeficientes da segunda forma fundamental.

Obtemos agora os valores de a_{ij} em termos dos coeficientes e, f, g. Apartir de (1-1) obtemos

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -f &= \langle N_u, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -f &= \langle N_v, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\ -g &= \langle N_v, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G, \end{aligned}$$

onde E, F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\left\{X_x, X_y\right\}$. As relações acima para os coeficientes e, f e g podem ser expressas em forma matricial por

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \tag{1-2}$$

donde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1},$$

Com um simples cálculo pode-se mostrar que

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

e portanto temos as seguintes expressões para os coeficientes a_{ij} da matriz de dN na base $\{X_u, X_v\}$:

$$a_{11} = \frac{fF-eG}{EG-F^2} \qquad a_{12} = \frac{gF-fG}{EG-F^2}$$

$$a_{21} = \frac{eF-fE}{EG-F^2} \qquad a_{22} = \frac{fF-gE}{EG-F^2},$$

As expressões para N_u e N_v com os valores dos $a_{ij's}$ obtidos acima são conhecidas como equações de Weingarten. Vejamos então como ficam as expressões das equações de Weingarten.

$$N_u = \frac{fF-eG}{EG-F^2}X_u + \frac{eF-fE}{EG-F^2}X_v$$

$$N_v = \frac{gF-fG}{EG-F^2}X_u + \frac{fF-gE}{EG-F^2}X_v.$$

Usando (1-2) obtemos a seguinte expressão para a curvatura Gaussiana

$$K = det(a_{ij}) = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}. \tag{1-3}$$

Para uma expressão da curvatura média em termos dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental, lembremos que $-k_1$ e $-k_2$ são os autovalores de dN, e k_1 e k_2, satisfazem à equação

$$dN(v) = -kv = -kI(v), \quad \text{para algum } v \in T_pS,\ v \neq 0,$$

onde I é a aplicação indentidade. Decorre que a aplicação linear $dN + kI$ não é invertível e, portanto, tem determinante nulo. Assim,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}+k \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$k^2 + k(a_{11}+a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0.$$

Como k_1 e k_2 são raízes da equação quadrática acima, temos que

$$H = \frac{1}{2}(k_1+k_2) = -\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22}) = \frac{1}{2}\frac{eG-2fF+gE}{EG-F^2}, \tag{1-4}$$

o que implica

$$k^2 - 2Hk + K = 0,$$

e portanto,

$$k = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

A partir da relação acima, segue-se que, escolhendo $k_2(q) \leq k_1(q)$, $q \in S$, as funções k_1 e k_2 são contínuas em S. Além disso, k_1 e k_2 são diferenciáveis em S, com uma possível exceção dos pontos de S onde $k_1 = k_2$, ou seja, $H^2 = K$. Tais pontos são conhecidos como ***pontos umbílicos***.

Observemos agora um fato local geral para superfíces. Dada a natureza de alguns pontos, podemos observar a posição de uma superfície S em relação ao plano tangente T_pS. Ilustremos este fato na seguinte proposição.

Proposição 1.22 *Seja $p \in S$ um ponto elíptico de uma superfície S. Então existe uma vizinhança V de p em S tal que todos os pontos de V estão do mesmo lado do plano tangente T_pS. Seja p um ponto hiperbólico. Então em cada vizinhança V de p existem pontos de ambos os lados de T_pS.*

Demonstração. Seja $X(u,v)$ uma parametrizãção em p, com $X(0,0) = p$. A distância d, de um ponto $q = X(u,v)$ ao plano tangente T_pS é dada por

$$d = \langle X(u,v) - X(0,0), N(p) \rangle.$$

Como $X(u,v)$ é diferenciável, temos a fórmula de Taylor:

$$X(u,v) = X(0,0) + X_u u + X_v v + \frac{1}{2}\left(X_{uu}u^2 + 2X_{uv}uv + X_{vv}v^2\right) + \overline{R},$$

onde as derivadas são calculadas em $(0,0)$ e o resto $\overline{R}$ satisfaz a condição

$$lim \frac{\overline{R}}{u^2 + v^2} = 0 \quad (u,v) \to (0,0).$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} d &= \langle X(u,v) - X(0,0), N(p) \rangle \\ &= \frac{1}{2}\left\{\langle X_{uu}, N(p)\rangle u^2 + 2\langle X_{uv}, N(p)\rangle uv + \langle X_{vv}, N(p)\rangle v^2\right\} + R \\ &= \frac{1}{2}(eu^2 + 2fuv + gv^2) + R = \frac{1}{2} II_p(w) + R, \end{aligned}$$

onde $w = X_u u + X_v v$, $R = \left\langle \overline{R}, N(p) \right\rangle$, $lim\left(\dfrac{R}{|w|^2}\right) = 0$ com $w \to 0$.

Em um ponto elíptico p, $II_p(w)$ tem sinal fixo. Portanto, para todo (u,v) suficiente próximo a p, d tem o mesmo sinal que $II_p(w)$; isto é, todos os pontos (u,v) estão do mesmo lado de T_pS.

Para um ponto hiperbólico p, em cada vizinhança de p existem pontos (u,v) e $(\overline{u},\overline{v})$ tais que $II_p\left(\frac{w}{|w|}\right)$ e $II_p\left(\frac{\overline{w}}{|\overline{w}|}\right)$ têm sinais opostos; tais pontos pertencem, portanto, a lados distintos de T_pS. Observe que $\overline{w} = X_u\overline{u} + X_v\overline{v}$.

□

Em geometria diferencial temos alguns exemplos de superfícies que são bastante interessantes pela sua simples representação e pela conexão com a teoria das equações diferenciais. É o caso das superfícies mínimas, cuja importância se deu devido à algumas questões não triviais ainda não terem sido esclarecidas, o que chamou a atenção.

Definição 1.23 *Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é **mínima** se a sua Curvatura Média é identicamente nula para cada uma de suas parametrizações.*

A expressão da segunda forma fundamental em coordenadas locais é particularmante útil para estudar as direções assintóticas.

Seja $X(u,v)$ uma parametrização de $p \in S$, com $X(0,0) = p$, e sejam $e(u,v) = e$, $f(u,v) = f$, e $g(u,v) = g$ os coeficientes da segunda forma fundamental nesta parametrização.

Lembramos da definição 1.19 que uma curva regular conexa C em uma vizinhança coordenada X é uma assintótica se e somente se, para uma parametrização qualquer $\alpha(t) = X(u(t),v(t))$, $t \in I$, de C temos $II_p(\alpha'(t)) = 0$, para todo $t \in I$; isto é, se e somente se

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0, \qquad t \in I.$$

A equação acima é conhecida como equação diferencial das linhas assintóticas.

Uma condição necessária e suficiente para uma parametrização em uma vizinhança de um ponto hiperbólico ($eg - f^2 < 0$) ser tal que as curvas coordenadas da parametrização sejam linhas assintóticas é que $e = g = 0$.

De fato, se ambas as curvas $u = constante$, $v = v(t)$ e $u = u(t)$, $v = constante$ satisfazem a equação das linhas assintóticas, temos que $e = g = 0$. Reciprocamente, se vale esta última condição e $f \neq 0$, a equação das linhas assintóticas se reduz a $fx'y' = 0$, que é evidentemente satisfeita pelas curvas coordenadas.

Passemos agora às direções principais, mantendo as notações já estabelecidas.

Uma curva regular conexa C em uma vizinhança coordenada de $\mathbf{X}$ é uma linha de curvatura se e somente se para uma parametrização qualquer $\alpha(t) = \mathbf{X}(u(t),v(t))$, $t \in C$ temos

$$dN(\alpha'(t)) = \lambda(t)\alpha'(t).$$

Segue-se que as funções $u'(t)$ e $v'(t)$ satisfazem o sistema de equações

$$\frac{fF-eG}{EG-F^2}u' + \frac{gF-fG}{EG-F^2}v' = \lambda u',$$

$$\frac{eF-fE}{EG-F^2}u' + \frac{fF-gE}{EG-F^2}v' = \lambda v'.$$

Eliminando λ no sistema acima, obtemos a equação diferencial das linhas de curvatura,

$$(fE-eF)(u')^2 + (gE-eG)u'v' + (gF-fG)(v')^2 = 0,$$

que pode ser escrita de maneira simétrica, como

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

Utilizando o fato das direções principais serem ortogonais, decorre facilmente da equação acima que *uma condição necessária e suficiente para que as curvas coordenadas de uma parametrização sejam linhas de curvatura é que* $F = f = 0$.

Daremos agora uma interpretação geométrica da curvatura Gaussiana em termos da aplicação de Gauss $N : S \to S^2$ é a que segue.

Sejam S e $\overline{S}$ duas superfícies regulares orientadas. Seja $\varphi : S \to \overline{S}$ uma aplicação diferenciável e suponha que para algum $p \in S$, $d\varphi_p$ seja não singular. Dizemos que φ preserva orientação em p se dada uma base positiva $\{w_1, w_2\}$ em T_pS, então $\{d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\}$ é uma base positiva em $T_p\overline{S}$. Se $\{d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\}$ não é uma base positiva, dizemos que φ reverte orientação em p.

Observamos agora que tanto S como a esfera unitária são mergulhadas em $\mathbb{R}^3$. Logo, uma orientação N em S induz uma orientação N em S^2. Seja $p \in S$ tal que dN_p é não-singular. Como, para uma base $\{w_1, w_2\}$ em T_pS,

$$dN_p(w_1) \wedge dN_p(w_2) = det(dN_p)(w_1 \wedge w_2) = Kw_1 \wedge w_2,$$

a aplicação de Gauss N preserva a orientação em $p \in S$ se $K(P) < 0$. Intuitivamente, isso significa o seguinte: uma orientação de T_pS induz uma orientação para pequenas curvas fechadas em S, em torno de p; a imagem por N dessas curvas terá orientação igual ou oposta às primeiras curvas, conforme o ponto seja elíptico ou hiperbólico, respectivamente.

1.4 Superfícies de Rotações

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ o conjunto obtido ao girarmos uma curva regular plana C em torno de um eixo no plano que não encontra a curva, vamos considerar o plano xz como o plano da curva e o eixo Oz como o eixo de rotação. Seja

$$x = \varphi(u), \;\; z = \psi(u), \;\; a < u < b, \;\; \varphi(u) > 0,$$

uma parametrização para C e denote por v o ângulo de rotação em torno do eixo Oz. Assim obtemos a aplicação

$$X(u,v) = (\varphi(u)cosv, \varphi(u)senv, \psi(u))$$

do conjunto aberto $U = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2; a < u < b, 0 < v < 2\pi\right\}$ em S.

Como S pode ser inteiramente coberta por parametrizações similares, segue-se que S é uma superfície regular, chamada *superfície de rotação*. A curva C é chamada de *curva geratriz* de S, e o eixo Oz é o *eixo de rotação* de S. Os círculos descritos pelos pontos de C são chamados de *paralelos* de S, e as várias posições de C sobre S são os chamados *meridianos* de S.

Observação 1.24 *Há um pequeno problema com a nossa definição de superfície de rotação. Se $C \subset \mathbb{R}^2$ é uma curva regular fechada e plana, que é simétrica em relação a um eixo r de $\mathbb{R}^3$, então, girando C em torno de r, obtemos uma superfície. Pode-se mostrar que essa superfície é regular, e caberia chamá-la de superfície de rotação (quando C é um círculo e r contém um diâmetro de C, a superfície é uma esfera). Para incluí-la em nossa definição, teríamos que excluir dois de seus pontos, a saber, os pontos onde r encontra C. Por razões técnicas, queremos manter a terminologia prévia e iremos chamar as superfícies acima de* superfícies de rotações estendidas.

Utilizando a definição acima e os conceitos das seções anteriores calcularemos a curvatura gaussiana e média de uma *superfície de rotação* na seguinte proposição.

Proposição 1.25 *Consideremos a superfície de rotação dada por*

$$X(u,v) = (\varphi(u)cosv, \varphi(u)senv, \psi(u)), \tag{1-5}$$

onde $a < u < b$, $0 < v < 2\pi$, $\varphi(u) > 0$. Então os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais são:

$$\begin{aligned} E &= (\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2; \\ F &= 0; \\ G &= (\varphi(u))^2. \end{aligned} \tag{1-6}$$

$$\begin{aligned} e &= \frac{\varphi'(u)\psi''(u)-\varphi''(u)\psi'(u)}{\sqrt{(\varphi'(u))^2+(\psi'(u))^2}}; \\ f &= 0; \\ g &= \frac{\varphi(u)\psi'(u)}{\sqrt{(\varphi'(u))^2+(\psi'(u))^2}}. \end{aligned} \tag{1-7}$$

O vertor normal é

$$N=\left(\frac{-\psi'(u)cosv}{\sqrt{(\varphi'(u))^2+(\psi'(u))^2}},\frac{-\psi'(u)senv}{\sqrt{(\varphi'(u))^2+(\psi'(u))^2}},\frac{\varphi'(u)}{\sqrt{(\varphi'(u))^2+(\psi'(u))^2}}\right). \tag{1-8}$$

Além disso a curvatura gaussiana K e média H são expressas por

$$K=\frac{\psi'(u)(\varphi'(u)\psi''(u)-\varphi''(u)\psi'(u))}{\varphi(u)(\varphi'(u)^2+\psi'(u)^2)^2}; \tag{1-9}$$

$$H=\frac{1}{2}\frac{\varphi(\varphi'\psi''-\varphi''\psi')+\psi'((\varphi')^2+(\psi')^2)}{\varphi((\varphi')^2+(\psi')^2)^{3/2}}. \tag{1-10}$$

Demonstração. A fim de obter os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, calculemos as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de X com respeito a u e v. Onde são dadas por

$$\begin{aligned} X_u &= (\varphi'(u)cosv,\varphi'(u)senv,\psi'(u)); \\ X_v &= (-\varphi(u)senv,\varphi(u)cosv,0); \\ X_{uu} &= (\varphi''(u)cosv,\varphi''(u)senv,\psi''(u)); \\ X_{uv} &= (-\varphi'(u)senv,\varphi'(u)cosv,0); \\ X_{vv} &= (-\varphi(u)cosv,-\varphi(u)senv,0). \end{aligned}$$

Assim os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u,X_v\rangle \\ &= \langle(\varphi'(u)cosv,\varphi'(u)senv,\psi'(u)),(\varphi'(u)cosv,\varphi'(u)senv,\psi'(u))\rangle \\ &= (\varphi'(u))^2+(\psi'(u))^2; \\ F &= \langle X_u,X_v\rangle \\ &= \langle(\varphi'(u)cosv,\varphi'(u)senv,\psi'(u)),(-\varphi(u)senv,\varphi(u)cosv,0)\rangle \\ &= 0; \\ G &= \langle X_v,X_v\rangle \\ &= \langle(-\varphi(u)senv,\varphi(u)cosv,0),(-\varphi(u)senv,\varphi(u)cosv,0)\rangle \\ &= \varphi(u))^2sen^2v+(\varphi(u))^2cos^2v \\ &= (\varphi(u))^2. \end{aligned}$$

Calculemos neste passo o valor de N, no qual iremos utilizá-lo no cálculo dos coeficientes

da segunda forma fundamental. Temos que

$$X_u \times X_v = (-\varphi(u)\psi'(u)cosv, -\varphi(u)\psi'(u)senv, \varphi(u)\varphi'(u)).$$

Donde,

$$|X_u \times X_v| = \varphi(u)\sqrt{(\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2}.$$

Logo N é dado por,

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \left(\frac{-\psi'(u)cosv}{\sqrt{(\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2}}, \frac{-\psi'(u)senv}{\sqrt{(\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2}}, \frac{\varphi'(u)}{\sqrt{(\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2}} \right).$$

Assim os valores dos coeficientes da segunda forma fundamental são expressos por

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2}} \langle (-\psi'(u)cosv, -\psi'(u)senv, \varphi'(u)), (\varphi''(u)cosv, \varphi''(u)senv, \psi''(u)) \rangle \\ &= \frac{\varphi'(u)\psi''(u) - \varphi''(u)\psi'(u)}{\sqrt{(\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \langle N, X_{uv} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2}} \langle (-\psi'(u)cosv, -\psi'(u)senv, \varphi'(u)), (-\psi'(u)cosv, -\psi'(u)senv, \varphi'(u)) \rangle \\ &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= \langle N, X_{vv} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2}} \langle (-\psi'(u)cosv, -\psi'(u)senv, \varphi'(u)), (-\varphi(u)cosv, -\varphi(u)senv, 0) \rangle \\ &= \frac{\varphi(u)\psi'(u)}{\sqrt{(\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2}}. \end{aligned}$$

Como, por (1-3) e (1-4)

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad e \quad H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

então substituindo as expressões encontradas para E, F, G, e, f e g concluímos que

$$K = \frac{\psi'(u)(\varphi'(u)\psi''(u) - \varphi''(u)\psi'(u))}{\varphi(u)(\varphi'(u)^2 + \psi'(u)^2)^2}.$$

e,

$$H = \frac{1}{2}\frac{\varphi(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi') + \psi'((\varphi')^2 + (\psi')^2)}{\varphi((\varphi')^2 + (\psi')^2)^{3/2}}.$$

Como queríamos mostrar.

□

Observação 1.26 *Como $F = f = 0$, concluímos que os paralelos $(u = const.)$ e os meridianos $(v = const.)$ de uma superfície de rotação são linhas de curvaturas.*

Tendo em vista que

$$K = \frac{\psi'(u)(\varphi'(u)\psi''(u) - \varphi''(u)\psi'(u))}{\varphi(u)(\varphi'(u)^2 + \psi'(u)^2)^2}$$

e que φ é positiva, segue-se que os pontos parabólicos são dados por $\psi' = 0$ (a reta tangente à curva geratriz é perpendicular ao eixo de revolução) ou $\psi'\varphi'' - \varphi''\psi' = 0$ (a curvatura da curva geratriz é zero). Um ponto que satisfaz as duas condições é um ponto planar, já que essas condições implicam que $e = f = g = 0$.

Convém exibir ainda uma outra expressão para a curvatura Gaussiana. Suponhamos que a curva geratriz é parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, que

$$(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$$

Diferenciando $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$, obtemos $\varphi'\varphi'' = -\psi'\psi''$. Assim,

$$K = \frac{\psi'(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi')}{\varphi} = -\frac{(\psi')^2\varphi'' + (\varphi')^2\varphi''}{\varphi} = -\frac{\varphi''}{\varphi}$$

A equação acima é uma expressão conveniente para a curvatura Gaussiana de uma superfície de rotação. Ela pode ser usada, por exemplo, para determinar as superfícies de rotações com curvatura Gaussiana constante.

Para o cálculo das curvaturas principais, faremos primeiro uma observação geral: *se a parametrização de uma superfície regular é tal que $F = f = 0$, então as curvaturas principais são dadas por $\frac{e}{E}$ e $\frac{g}{G}$.* De fato, nesse caso, a curvatura Gaussiana e a curvatura Média sao dadas por

$$K = \frac{eg}{EG}, \qquad H = \frac{1}{2}\frac{eG + gE}{EG}.$$

A nossa afirmação decorre imediatamente do faro de K ser o produto e $2H$ a soma das curvaturas principais.

Assim, as curvaturas principais de uma superfície de rotação quando a curva geratiz é não pca são dadas por

$$\frac{e}{E} = \frac{\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'}{((\varphi')^2 + (\psi')^2)^{3/2}}$$

$$\frac{g}{G} = \frac{\psi'}{\varphi\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}}.$$

1.5 Parametrizações Isotérmicas; Isometrias e Aplicações Conformes

Vamos agora obter uma interpretação para o vetor curvatura média.

Definição 1.27 *Uma superfície parametrizada regular $X = X(u,v)$ é chamada* isotérmica *se $\langle X_u, X_u\rangle = \langle X_v, X_v\rangle$ e $\langle X_u, X_v\rangle = 0$.*

Proposição 1.28 *Seja $X = X(u,v)$ uma superfície parametrizada regular e suponha que X é isotérmica. Então*

$$X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2\mathbf{H},$$

onde $\lambda^2 = \langle X_u, X_u\rangle = \langle X_v, X_v\rangle$, e $\mathbf{H} = HN$ o vetor curvatura média.

Demonstração. Como X é isotérmica, $\langle X_u, X_u\rangle = \langle X_v, X_v\rangle$ e $\langle X_u, X_v\rangle = 0$. Derivando, obtemos

$$\langle X_{uu}, X_u\rangle = \langle X_{vu}, X_v\rangle = -\langle X_u, X_{vv}\rangle.$$

Logo,

$$\langle X_{uu} + X_{vv}, X_u\rangle = 0$$

Analogamente,

$$\langle X_{uu} + X_{vv}, X_v\rangle = 0$$

Segue-se que $X_{uu} + X_{vv}$ é paralelo a N. Como X é isotérmica,

$$H = \frac{1}{2}\frac{g+e}{\lambda^2}.$$

Assim,

$$2\lambda^2 H = g + e = \langle N, X_{uu} + X_{vv}\rangle;$$

donde,

$$X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2\mathbf{H}.$$

□

Definição 1.29 *O Laplaciano* $\Delta\phi$ *de uma função diferinciável* $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é definido por* $\Delta\phi = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial v^2}$, $(u,v) \in U$. *Dizemos que* ϕ *é* harmônica *em* U *se* $\Delta\phi = 0$.

A partir da proposição acima, obtemos:

Corolário 1.30 *Seja* $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ *uma superfície parametrizada e suponha que* X *é isotérmica. Então* X *é mínima se e somente se as suas funções coordenadas* x, u, z *são harmônicas.*

Veremos que muitos outros conceitos importantes associados a uma superfície regular dependem apenas da primeira forma fundamental. Convém, portanto, formular de maneira precisa o que significa dizer que duas superfícies têm a mesma primeira forma fundamental.

No que segue, S e $\overline{S}$ denotam sempre superfícies regulares.

Definição 1.31 *Uma aplicação* $\varphi : S \to \overline{S}$ *é chamada uma* ***isometria*** *se* φ *é um difeomorfismo e para todo* $p \in S$ *e todos os pares* w_1, $w_2 \in T_pS$, *temos*

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \left\langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \right\rangle_{\varphi(p)}.$$

Dizemos então que as superfícies S *e* $\overline{S}$ *são* ***isométricas***.

Um difeomorfismo φ é uma isometria se a diferencial $d\varphi$ preserva o produto interno. Se φ é uma isometria, temos que

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \left\langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \right\rangle_{\varphi(p)} = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)).$$

para todo $w \in T_pS$. Reciprocamente, se um difeomorfismo φ preserva a primeira forma fundamental, ou seja,

$$I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)), \text{ para todo } w \in T_pS.$$

então

$$\begin{aligned} 2\langle w_1, w_2 \rangle_p &= I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2) \\ &= I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1 + w_2)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_{(p)} w_2) \\ &= 2\left\langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \right\rangle_{\varphi(p)}, \end{aligned}$$

e φ é, portanto, uma isometria.

Definição 1.32 *Uma aplicação* $\varphi : S \to \overline{S}$ *de uma vizinhança* V *de* $p \in S$ *é uma* ***isometria local*** *em* p *se existe uma vizinhança* $\overline{V}$ *de* $\varphi(p) \in \overline{S}$ *tal que* $\varphi : V \to \overline{V}$ *é uma isometria. Se existir uma isometria local em* $\overline{S}$ *para todo ponto* $p \in S$, *diz-se que a superfície* S *é localmente isométrica a* $\overline{S}$. S *e* $\overline{S}$ *são localmente isométricas se* S *é localmente isométrica a* $\overline{S}$ *e* $\overline{S}$ *é* ***localmente isométrica*** *a* S.

Se $\varphi : S \to \overline{S}$ é um difeomorfismo e uma isometria local para todo $p \in S$, então φ é uma isometria (globalmente). No entanto, nem todo par de superfícies S e $\overline{S}$ que são localmente isométricas são (globalmente) isométricas.

Vamos generalizar o argumento dado acima para obter um critério para isometria local em termos de coordenadas locais.

Proposição 1.33 *Suponha a existência de parametrizações $X : U \to S$ e $\overline{X} : U \to \overline{S}$ tais que $E = \overline{E}$, $F = \overline{F}$, $G = \overline{G}$ em U. Então a aplicação $\varphi = \overline{X} \circ X^{-1} : X(U) \to \overline{S}$ é uma isometria local.*

A noção de isometria é o conceito natural de equivalência para propriedades métricas das superfícies regulares. Da mesma maneira que superfícies difeomorfas são equivalentes do ponto de vista da diferenciabilidade, as superfícies isométricas são equivalentes sob o ponto de vista métrico.

É possível definir outros tipos de equivalências no estudo de superfícies.É importante introduzir a equivalência conforme, que discutiremos sumariamente a seguir.

Definição 1.34 *Um difeomorfismo $\phi : S \to \overline{S}$ é chamada uma aplicação conforme se para todo $p \in S$ e quaisquer $v_1, v_2 \in T_pS$ temos*

$$\langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2)\rangle_{\varphi(p)} = \lambda^2(p)\langle v_1, v_2\rangle_p,$$

onde λ^2 é uma função diferenciável em S que nunca se anula; as superfícies S e $\overline{S}$ são então chamadas conformes. Uma aplicação $\varphi : V \to \overline{S}$ de uma vizinhança V de $p \in S$ em $\overline{S}$ é uma aplicação conforme local em p se existe uma vizinhança $\overline{V}$ de $\varphi(p)$ tal que $\varphi : V \to \overline{V}$ é uma aplicação conforme. Se para cada $p \in S$, existe uma aplicação conforme local em p, a superfície S é localmente conforme a $\overline{S}$.

O significado geométrico da definição acima é que ângulos são preservados por aplicações conformes.

De fato, sejam $\alpha : I \to S$ e $\beta : I \to S$ duas curvas em S que se intersectam em digamos, $t = 0$. O ângulo θ entre elas em $t = 0$ é dado por

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha', \beta'\rangle}{|\alpha'||\beta'|}, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Uma aplicação conforme $\varphi : S \to \overline{S}$ aplica estas curvas em curvas $\varphi \circ \alpha : I \to \overline{S}$, $\varphi \circ \beta :\to \overline{S}$, que se intersectam para $t = 0$, fazendo um ângulo dado por

$$cos\overline{\theta} = \frac{\langle d\varphi(\alpha'), d\varphi(\beta')\rangle}{|d\varphi(\alpha')||d\varphi(\beta')|} = \frac{\lambda^2\langle \alpha', \beta'\rangle}{\lambda^2 \mid \alpha' \mid\mid \beta' \mid} = \cos\theta,$$

como afirmado. Não é difícil mostrar que esta propriedade caracteriza as aplicações localmente conformes.

A proposição seguinte é um análogo da Prop.1.31 para aplicações conformes, cuja a demonstração não será exibida.

Proposição 1.35 *Sejam $X : U \to S$ e $\overline{X} : U \to \overline{S}$ parametrizações tais que $E = \lambda^2\overline{E}$, $F = \lambda^2\overline{F}$, $G = \lambda^2\overline{G}$ em U, onde λ^2 é uma função diferenciável em U que nunca se anula. Então a aplicação $\overline{X} \circ X^{-1} : X(U) \to \overline{S}$ é uma aplicação conforme local.*

Vê-se facilmente que conformidade local é uma relação transitiva; isto é, se S_1 é localmente conforme a S_2 e S_2 é localmente conforme a S_3, então S_1 é localmente conforme a S_3.

A propriedade mais importante das aplicações conformes é dada pelo seguinte teorema, cuja demonstração será omitida.

Teorema 1.36 *Duas superfícies regulares quaisquer são localmente conformes.*

A demonstração é baseada na possibilidade de parametrizar uma vizinhança de qualquer ponto de uma superfície regular de tal modo que os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \lambda^2(u,v) > 0, \quad F = 0, \quad G = \lambda^2(u,v).$$

Um tal sistema de coordenadas é chamado *isotérmico*. Admitindo a existência de um sistema isotérmico de coordenadas para uma superfície regular S, S é evidentemente localmente conforme a um plano e, por composição, localmente conforme a qualquer outra superfície.

A prova de que existem sistemas isotérmicos de coordenadas para qualquer superfície regular é delicada e não será apresentada aqui. O leitor interessado pode consultar L. Bers, *Riemann Surfaces*, New York University, Institute of Mathematical sciences, New York, 1957 – 1958, pp. 15 – 35.

1.6 Laplaciano

Nesta seção definiremos o gradiente, o divergente e o laplaciano.

Definição 1.37 *Seja S uma superfície geométrica. Dado $f \in \mathcal{D}(S)$, definimos o* gradiente *de f como sendo o campo vetorial $grad f$ definido em S por*

$$< grad f(p), w >= df_p(w), \; p \in S \; e \; w \in T_pS.$$

Para obtermos uma expressão de $grad f$ em coordenadas locais $(u,v) \in U$ escrevemos $grad f = a\dfrac{\partial}{\partial u} + b\dfrac{\partial}{\partial v}$, onde $a = a(u,v)$ e $b = b(u,v)$, $(u,v) \in U$. Além disso, escreveremos $f_u = \dfrac{\partial f}{\partial u}$ e $f_v = \dfrac{\partial f}{\partial v}$. Assim, para $p \in x(U)$

$$\begin{aligned} f_u &= df\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) \\ &= \left\langle a\frac{\partial}{\partial u} + b\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u}\right\rangle \\ &= aE + bF. \end{aligned} \tag{1-11}$$

De maneira análoga obtém-se

$$f_v = aF + bG. \tag{1-12}$$

Resolvendo o sistema fornecido por (1-11) e (1-12) concluímos que

$$a = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} \quad \text{e}$$

$$b = \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2}.$$

Portanto,

$$grad f = \left(\frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2}\right)\frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2}\right)\frac{\partial}{\partial v}. \tag{1-13}$$

Definição 1.38 *Seja S uma superfície geométrica. Dado $Y \in \mathfrak{X}(S)$ definimos a* divergência *de Y com sendo a função*

$$\begin{aligned} divY : S &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto divY(p) = \textit{traço da aplicação linear } w \mapsto \nabla_w Y(p) \end{aligned}$$

onde $w \in T_pS$ e ∇ denota a conexão Riemanniana de S.

Se colocarmos $Y = \alpha\dfrac{\partial}{\partial u} + \beta\dfrac{\partial}{\partial v}$, onde $\alpha = \alpha(u,v)$ e $\beta = \beta(u,v)$, $(u,v) \in U$, pode-se mostrar que

$$divY = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left((\alpha\sqrt{EG - F^2})_u + (\beta\sqrt{EG - F^2})_v\right) \tag{1-14}$$

em coordenadas $(u,v) \in U$. De fato, dado $p \in x(U)$ defina $T : T_pS \to T_pS$ por

$$T(w) = \nabla_w Y(p) = \nabla_w\left(\alpha\frac{\partial}{\partial u} + \beta\frac{\partial}{\partial v}\right)(p), \; w \in T_pS. \tag{1-15}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} T(\frac{\partial}{\partial u}(p)) &= \gamma\frac{\partial}{\partial u}(p)+\tau\frac{\partial}{\partial v}(p) \text{ e} \\ T(\frac{\partial}{\partial v}(p)) &= \lambda\frac{\partial}{\partial u}(p)+\delta\frac{\partial}{\partial v}(p) \end{aligned}$$

onde γ, τ, λ e δ são constantes reais, teremos

$$divY(p)=\gamma+\delta. \tag{1-16}$$

Omitindo o ponto p para simplificar a notação, observe que

$$\begin{aligned} \left\langle T(\frac{\partial}{\partial u}),\frac{\partial}{\partial u}\right\rangle &= \gamma E+\tau F \text{ e} \\ \left\langle T(\frac{\partial}{\partial u}),\frac{\partial}{\partial v}\right\rangle &= \gamma F+\tau G \end{aligned}$$

de maneira que

$$\gamma=\frac{\left\langle T(\frac{\partial}{\partial u}),\frac{\partial}{\partial u}\right\rangle G-\left\langle T(\frac{\partial}{\partial u}),\frac{\partial}{\partial v}\right\rangle F}{EG-F^2}. \tag{1-17}$$

Analogamente encontra-se

$$\delta=\frac{\left\langle T(\frac{\partial}{\partial v}),\frac{\partial}{\partial v}\right\rangle E-\left\langle T(\frac{\partial}{\partial v}),\frac{\partial}{\partial u}\right\rangle F}{EG-F^2}. \tag{1-18}$$

Por outro lado, escrevendo $\alpha_u=\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}$ e $\beta_u=\dfrac{\partial\beta}{\partial u}$, segue de (1-15) que

$$\begin{aligned} T(\frac{\partial}{\partial u}) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\beta\frac{\partial}{\partial v}\right) \\ &= \alpha\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial u}+\beta\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial v}+\alpha_u\frac{\partial}{\partial u}+\beta_u\frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

e da mesma forma

$$T(\frac{\partial}{\partial v})=\alpha\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial u}+\beta\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial v}+\alpha_v\frac{\partial}{\partial u}+\beta_v\frac{\partial}{\partial v}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\left\langle T(\frac{\partial}{\partial u}),\frac{\partial}{\partial u}\right\rangle &= \left\langle \alpha\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial u}+\beta\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial v}+\alpha_u\frac{\partial}{\partial u}+\beta_u\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial u}\right\rangle \\
&= \alpha\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\right\rangle+\beta\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial u}\right\rangle+\alpha_u E+\beta_u F \qquad (1\text{-}19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle T(\frac{\partial}{\partial u}),\frac{\partial}{\partial v}\right\rangle &= \left\langle \alpha\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial u}+\beta\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial v}+\alpha_u\frac{\partial}{\partial u}+\beta_u\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial v}\right\rangle \\
&= \alpha\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}\right\rangle+\beta\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial v}\right\rangle+\alpha_u F+\beta_u G \qquad (1\text{-}20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle T(\frac{\partial}{\partial v}),\frac{\partial}{\partial u}\right\rangle &= \left\langle \alpha\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial u}+\beta\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial v}+\alpha_v\frac{\partial}{\partial u}+\beta_v\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial u}\right\rangle \\
&= \alpha\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\right\rangle+\beta\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial u}\right\rangle+\alpha_v E+\beta_v F \qquad (1\text{-}21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle T(\frac{\partial}{\partial v}),\frac{\partial}{\partial v}\right\rangle &= \left\langle \alpha\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial u}+\beta\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial v}+\alpha_v\frac{\partial}{\partial u}+\beta_v\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial v}\right\rangle \\
&= \alpha\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}\right\rangle+\beta\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial v}\right\rangle+\alpha_v F+\beta_v G. \qquad (1\text{-}22)
\end{aligned}$$

Segue diretamente da simetria e da compatibilidade da conexão ∇ que

$$\begin{aligned}
\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial u}\right\rangle &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\right\rangle &&= \tfrac{E_u}{2} \\
\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial v}\right\rangle &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\right\rangle &&= \tfrac{E_v}{2} \\
&\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial v}\right\rangle &&= \tfrac{G_u}{2} \\
&\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}\right\rangle &&= \tfrac{G_v}{2} \\
&\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial u}\right\rangle &&= F_u-\tfrac{E_v}{2} \\
&\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}\right\rangle &&= F_v-\tfrac{G_u}{2}.
\end{aligned}$$

Substituindo estas expressões em (1-19), (1-20), (1-21), (1-22) e voltando em (1-17) e (1-18) teremos

$$\begin{aligned}
\gamma &= \alpha_u+\frac{\alpha\left(E_uG-2F_uF+E_vF\right)+\beta\left(E_vG-G_uF\right)}{2\left(EG-F^2\right)} \quad \text{e} \\
\delta &= \beta_v+\frac{\alpha\left(G_uE-E_vF\right)+\beta\left(G_vE-2F_vF+G_uF\right)}{2\left(EG-F^2\right)}.
\end{aligned}$$

Finalmente, (1-16) nos garante que

$$\begin{aligned} divY &= \alpha_u + \frac{\alpha(E_uG-2F_uF+E_vF)+\beta(E_vG-G_uF)}{2\left(EG-F^2\right)} \\ &+ \beta_v + \frac{\alpha(G_uE-E_vF)+\beta(G_vE-2F_vF+G_uF)}{2\left(EG-F^2\right)} \\ &= \frac{2\alpha_u(EG-F^2)+\alpha(E_uG+G_uE-2F_uF)}{2(EG-F^2)} \\ &+ \frac{2\beta_v(EG-F^2)+\beta(E_vG-+G_vE-2F_vF)}{2(EG-F^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left((\alpha\sqrt{EG-F^2})_u + (\beta\sqrt{EG-F^2})_v\right). \end{aligned}$$

De posse da expressão do divergente em coordenadas locais podemos destacar a seguinte proposição.

Proposição 1.39 *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $Y \in \mathfrak{X}(S)$ um campo vetorial. Se $\{e_1, e_2\}$ forma um referencial ortonormal tangente a S então*

$$divY = \langle dY(e_1), e_1\rangle + \langle dY(e_2), e_2\rangle$$

onde $\langle .,. \rangle$ denota o produto interno canônico do $\mathbb{R}^3$.

Demonstração. Se denotarmos por ∇ a conexão Riemanniana de S, é possível verificar que $\nabla_w Y(p) = dY_p(w)^T$ para todo $p \in S$ e $w \in T_pS$, onde $dY_p(w)^T$ representa a componente tangencial de $dY_p(w)$. Dessa forma, fixado $p \in S$, defina $T : T_pS \to T_pS$ por

$$T(w) = \nabla_w Y(p) = dY_p(w)^T.$$

Como $\{e_1, e_2\}$ forma um referencial ortonormal tangente a S, concluímos que

$$\begin{aligned} divY(p) &= \langle T(e_1), e_1\rangle_p + \langle T(e_2), e_2\rangle_p \\ &= \left\langle dY_p(e_1)^T, e_1\right\rangle_p + \left\langle dY_p(e_2)^T, e_2\right\rangle_p \\ &= \left\langle dY_p(e_1), e_1\right\rangle(p) + \left\langle dY_p(e_2), e_2\right\rangle(p). \end{aligned}$$

□

Definição 1.40 *Seja S uma superfície geométrica. Dado $f \in \mathcal{D}(S)$, definimos o* laplaciano *de f com sendo a função*

$$\begin{aligned} \Delta_S f : S &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto \Delta f(p) = div(grad f)(p) \end{aligned}$$

Proposição 1.41 *Se* $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$. *Então*

$$\Delta_S f = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\left(\frac{f_u G - f_v F}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_u + \left(\frac{f_v E - f_u F}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_v\right). \tag{1-23}$$

Demonstração. Basta utilizarmos as expressões obtidas em (1-13) e (1-14), donde segue o resultado.

Observação 1.42 *Observemos que, se* $E = G$ *e* $F = 0$, *então (1-23) se reduz a*

$$\Delta_S f = \frac{1}{\sqrt{E}}(f_{uu} + f_{vv}).$$

E mais, $\Delta_S f = 0$ *se, e somente se,* $\Delta f = 0$.

No decorrer de nosso trabalho, onde não houver conflitos de notação, escreveremos simplesmente Δf para denotar o laplaciano da função $f : S \to \mathbb{R}$.

CAPÍTULO 2

Superfície de Weingarten generalizada de Revolução

Neste capítulo temos como principal objetivo estudar uma classe de superfícies, as superfícies de Weingarten generalizadas S, na qual a curvatura gaussiana K e a curvatura média H de S satisfazem uma relação do tipo $(\omega^2-\rho^2)K+2\omega H+1=0$, onde ω,ρ são funções harmônicas com respeito a forma quadrática $\sigma = II+\omega III$, sendo II e III a segunda e a terceira forma quadrática da superfície em questão.

Na primeira seção definimos a terceira forma fundamental, superfícies paralelas e exibimos um resultado de motivação para as próximas seções.

Na segunda seção definimos o que vem a ser uma superfície Weingarten generalizada, juntamente com o fato desta superfície ser de classe 2, além de exibirmos resultados úteis para a conclusão do trabalho.

Por último, na seção 3, classificamos as superfícies de rotações que são Weingarten generalizadas de classe 2.

2.1 Superfícies Paralelas

Consideremos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Seja S uma superfície parametrizada e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$, U aberto, uma parametrização de S. Se a posição do vetor na superfície S é denotado por $X = X(u,v)$ onde u, v são as coordenadas locais, então a superfície é determinada a menos de posição no espaço pelas primeira e segunda formas fundamentais

$$I = \langle dX, dX\rangle = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

$$II = -\langle dN, dX\rangle = edu^2 + 2fdudv + gdv^2.$$

Aqui, $N = \dfrac{X_u \times X_v}{\mid X_u \times X_v \mid}$ representa a normal unitária a superfície.

Sempre que for claro pelo contexto omitiremos as coordenadas u e v dos coeficientes da primeira, segunda ou terceira formas fundamentais.

Para nossos propósitos, é conveniente introduzir a terceira forma fundamental, que constitui a forma quadrática da representação esférica da superfície S:

$$III = \langle dN, dN \rangle = \mathcal{E} du^2 + 2\mathcal{F} du dv + \mathcal{G} dv^2,$$

onde os coeficientes $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ são expressos por:

$$\mathcal{E}(u,v) = \langle dN(X_u), dN(X_u) \rangle;$$

$$\mathcal{F}(u,v) = \langle dN(X_u), dN(X_v) \rangle;$$

$$\mathcal{G}(u,v) = \langle dN(X_v), dN(X_v) \rangle.$$

Observação 2.1 *Dado a forma quadrática*

$$\sigma = II + \omega III = \mathcal{E}^* du^2 + 2\mathcal{F}^* du dv + \mathcal{G}^* dv^2 \tag{2-1}$$

Então,

$$\mathcal{E}^* = k_1 E(-1 + \omega k_1), \quad \mathcal{F}^* = k_1 F(-1 + \omega k_2), \quad \mathcal{G}^* = k_2 G(-1 + \omega k_2). \tag{2-2}$$

Onde $k_1 = \dfrac{e}{E}$ *e* $k_2 = \dfrac{g}{G}$, *são as curvaturas principais.*

De fato,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^*(u,v) &= \sigma(X_u, X_u) \\
&= -\langle dN(X_u), X_u \rangle + \omega \langle dN(X_u), dN(X_u) \rangle \\
&= -\langle N_u, X_u \rangle + \omega \langle N_u, N_u \rangle \\
&= -k_1 \langle X_u, X_u \rangle + \omega k_1^2 \langle X_u, X_u \rangle \\
&= -k_1 E + \omega k_1^2 E \\
&= k_1 E(-1 + \omega k_1), \quad k_1 = \frac{e}{E};
\end{aligned}$$

Assim como,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^*(u,v) &= \sigma(X_u, X_v) \\
&= -\langle dN(X_u), X_v \rangle + \omega \langle dN(X_u), dN(X_v) \rangle \\
&= -\langle N_u, X_v \rangle + \omega \langle N_u, N_v \rangle \\
&= -k_1 \langle X_u, X_v \rangle + \omega k_1 k_2 \langle X_u, X_v \rangle \\
&= -k_1 F + \omega k_1 k_2 F \\
&= k_1 F(-1 + \omega k_2), \quad k_1 = \frac{e}{E}, \quad k_2 = \frac{g}{G};
\end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^*(u,v) &= \sigma(X_v,X_v)\\
&= -\langle dN(X_v),X_v\rangle + \omega\langle dN(X_v),dN(X_v)\rangle\\
&= -\langle N_v,X_v\rangle + \omega\langle N_v,N_v\rangle\\
&= -k_2\langle X_v,X_v\rangle + \omega k_2^2\langle X_v,X_v\rangle\\
&= -k_2G + \omega k_2^2 G\\
&= k_2G(-1+\omega k_2), \quad k_2 = \frac{g}{G}.
\end{aligned}$$

É notável que as três formas fundamentais são dependentes. Mostremos este fato na seguinte proposição.

Proposição 2.2 *As três formas fundamentais satisfazem a seguinte relação*

$$KI - 2HII + III = 0,$$

onde K e H são as curvaturas gaussiana e média, respectivamente.

Demonstração. Sejam $p \in S$ e $X(u,v)$ uma parametrização local em p, e k_1, k_2 as curvaturas principais em p. Sejam e_1 e e_2 as direções principais ortonormais associadas, então podemos escrever $v \in T_pS$ da seguinte forma

$$v = e_1\cos\theta + e_2 sen\theta.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
I_p(v) &= \langle e_1\cos\theta + e_2 sen\theta, e_1\cos\theta + e_2 sen\theta\rangle\\
&= 1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
II_p(v) &= -\langle dN_p(v),v\rangle\\
&= -\langle dN_p(e_1\cos\theta + e_2 sen\theta), e_1\cos\theta + e_2 sen\theta\rangle\\
&= k_1\cos^2\theta + k_2 sen^2\theta;
\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
III_p(v) &= \langle dN_p(v),dN_p(v)\rangle\\
&= \langle dN_p(e_1\cos\theta + e_2 sen\theta), dN_p(e_1\cos\theta + e_2 sen\theta\rangle\\
&= k_1^2\cos^2\theta + k_2^2 sen^2\theta,
\end{aligned}$$

já que $dN_P(e_i) = -k_ie_i$ e $\langle e_i,e_i\rangle = \delta_{ij}$.
Como K é o produto e $2H$ é a soma das curvaturas principais, concluímos que:

$$\begin{aligned}
KI - 2HII + III &= k_1k_2 - (k_1+k_2)(k_1\cos^2\theta + k_2 sen^2\theta) + k_1^2\cos^2\theta + k_2^2 sen^2\theta\\
&= k_1k_2 - k_1k_2 sen^2\theta - k_1k_2\cos^2\theta\\
&= k_1k_2 - k_1k_2\\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Daremos agora a definição do que vem a ser uma superfície paralela.

Definição 2.3 *Uma superfície $\overline{S}$ é dita ser uma superfície paralela a uma dada superfície S, se a relação*

$$\overline{X} = X + cN$$

é satisfeita, onde $c = cte$ denota a distância entre as superfícies S e $\overline{S}$.

A partir de agora assumiremos que as curvas coordenadas coincidem com as linhas de curvatura, isto é, $F = f = 0$, de forma que podemos usar as fórmulas de Rodrigues [11],

$$X_u = -\rho_1 N_u, \qquad X_v = -\rho_2 N_v$$

onde $\rho_1 = \dfrac{1}{k_1}$ e $\rho_2 = \dfrac{1}{k_2}$ são os raios de curvaturas associados.

Observação 2.4 *Podemos ver em [15] que os vetores normais N de S e $\overline{N}$ de$\overline{S}$ coincidem. Com efeito, da definição* 2.3 *temos*

$$\overline{X} = X + cN.$$

Derivando a expressão acima com respeito a u depois a v, e usando o fato das curvas coordenadas coincidirem com as linhas de curvatura obtemos

$$\overline{X}_u = (1 + ck_1)X_u \quad \overline{X}_v = (1 + ck_1)X_v.$$

Isto mostra que o os vetores $\overline{X}_u$ e $\overline{X}_v$ são multiplos de X_u e X_v, respectivamente. □

Teorema 2.5 *Sejam S uma superfície parametrizada e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$, U aberto, uma parametrização de S com curvatura gaussiana $K = \pm\dfrac{1}{\rho^2}$, sejam também $\overline{S}$ uma superfície paralela a S e $\overline{X} : \overline{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \overline{S}$, $\overline{U}$ aberto, uma parametrização de $\overline{S}$. Então, $\overline{X}$ satisfaz*

$$(c^2 \pm \rho^2)\overline{K} + 2c\overline{H} + 1 = 0.$$

Demonstração. Em termos das curvaturas principais $k_1 = \dfrac{e}{E}$, $k_2 = \dfrac{g}{G}$, os raios de curvaturas associados são dados por

$$\rho_1 = \frac{1}{k_1} = \frac{E}{e}, \qquad \rho_2 = \frac{1}{k_2} = \frac{G}{g},$$

respectivamente. Do fato de $\overline{S}$ ser paralela a S temos,

$$\overline{X} = X + cN.$$

Diferenciando a equação acima com respeito a u, depois a v e usando as fórmulas de Rodrigues, obtemos:

$$\overline{X}_u = X_u + cN_u = -(\rho_1 - c)N_u$$

e,

$$\overline{X}_v = X_v + cN_v = -(\rho_2 - c)N_v$$

Logo, a superfície $\overline{S}$ também é parametrizada de forma que as curvas coordenadas são linhas de curvatura, e os raios de curvaturas associados as curvaturas principais de $\overline{X}$ são

$$\overline{\rho}_1 = (\rho_1 - c), \quad \overline{\rho}_2 = (\rho_2 - c).$$

Assim,

$$\overline{\rho}_1 + c = \rho_1, \quad \overline{\rho}_2 + c = \rho_2.$$

Donde,

$$(\overline{\rho}_1 + c)(\overline{\rho}_2 + c) = \rho_1\rho_2. \tag{2-3}$$

Utilizando o fato que,

$$\overline{K} = \overline{k}_1\overline{k}_2, \tag{2-4}$$

e,

$$2\overline{H} = \overline{k}_1 + \overline{k}_2 = \left(\frac{1}{\overline{\rho}_1} + \frac{1}{\overline{\rho}_2}\right), \tag{2-5}$$

temos:

$i)$ Caso S é hiperbólica $(K < 0)$.

Seja $K = -\dfrac{1}{\rho^2} < 0$. De (2-3),

$$(\overline{\rho}_1 + c)(\overline{\rho}_2 + c) = -\rho^2.$$

Usando a propriedade distributiva do lado esquerdo da igualdade acima, temos

$$\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2 + c(\overline{\rho}_1 + \overline{\rho}_2) + c^2 = -\rho^2,$$

agora multiplicando ambos os membros acima por $\dfrac{1}{\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2}$, chegamos a

$$1 + c\left(\frac{1}{\overline{\rho}_1} + \frac{1}{\overline{\rho}_2}\right) + (c^2 + \rho^2)\frac{1}{\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2} = 0$$

Donde, pelas expressões de $\overline{K}$ e $2\overline{H}$ dadas por anteriormente (2-4) e (2-5), concluímos

que

$$(c^2+\rho^2)\overline{K}+2c\overline{H}+1=0.$$

De modo análogo, considerando que:
ii) Se S é elíptica $(K>0)$, com $K=\dfrac{1}{\rho^2}$, obtemos

$$(c^2-\rho^2)\overline{K}+2c\overline{H}+1=0.$$

Portanto $\overline{X}$ satisfaz,

$$(c^2\pm\rho^2)\overline{K}+2c\overline{H}+1=0.$$

□

Assim, as superfícies que são paralelas as superfícies pseudo-esféricas $(\rho=cte)$ constituem um caso particular das superfícies de Weingarten com curvaturas principais $\overline{k}_1=\dfrac{1}{\overline{\rho}_1}$, $\overline{k}_2=\dfrac{1}{\overline{\rho}_2}$, funcionalmente dependentes.

Em particular, se $c=\pm\rho$. Então $\overline{S}$ tem curvatura média constante $2\overline{H}=\pm\dfrac{1}{\rho}$ e sua distância a superfície S é $\pm\rho$. Esta observação se deve a *Bonnet*, [11].

O objetivo de agora em diante é mostrar as superfícies de revoluções S, as quais admitem a relação

$$(\omega^2-\rho^2)K+2H\omega+1=0,$$

onde ω, ρ são funções harmônicas com respeito a σ.

2.2 Superfícies Weingarten Generalizada de Classe 2

As superfícies que caracterizamos nesta seção é apenas uma das classes das superfícies de Weingarten generalizada. Estas superfícies foram introduzidas por *Schief*, e elas generalizam as superfícies de Weingarten linear.

A seguinte definição caracteriza as superfícies de Weingarten generalizadas de classe 2 e será fundamental no decorrer do trabalho.

Definição 2.6 *Dizemos que S é uma superfície de Weingarten generalizada de classe 2 se existe uma função ω que é harmônica com respeito a σ, e uma função ρ definida pela relação*

$$(\omega^2-\rho^2)K+2H\omega+1=0, \tag{2-6}$$

que também é hamônica com respeito a σ.

Como trataremos apenas das superfícies de Weingarten generalizada de classe 2 que são de rotação, obtemos os coeficientes da forma quadrática σ dada por (2-2).

Observação 2.7 *Seja S uma superfície de rotação dada por (1-5), então os coeficientes da forma quadrática $\sigma = II + \omega III$ são dados por:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^* &= \frac{(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi')[-((\varphi')^2 + (\psi')^{3/2}) + \omega(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi')]}{((\varphi')^2 + (\psi')^2)^2}, \\
\mathcal{F}^* &= 0, \\
\mathcal{G}^* &= \frac{\psi'(-\varphi\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2} + \omega\psi')}{(\varphi')^2 + (\psi')^2}.
\end{aligned} \tag{2-7}$$

Com efeito, usando (2-2), (1-6) e (1-7) temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^* &= \frac{\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}}\left(-1 + \omega\frac{\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'}{((\varphi')^2 + (\psi')^2)^{3/2}}\right) \\
&= \frac{\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}}\left(\frac{-((\varphi')^2 + (\psi')^2)^{3/2} + \omega(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi')}{((\varphi')^2 + (\psi')^2)^{3/2}}\right) \\
&= \frac{(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi')[-((\varphi')^2 + (\psi')^{3/2}) + \omega(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi')]}{((\varphi')^2 + (\psi')^2)^2};
\end{aligned}$$

Como $F = 0$ usando (2-2),

$$\mathcal{F}^* = 0;$$

De modo análogo, usando novamante (2-2), (1-6) e (1-7), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^* &= \frac{\varphi\psi'}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}}\left(-1 + \omega\frac{\varphi\psi'}{\varphi^2\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}}\right) \\
&= \frac{\psi'(-\varphi\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2} + \omega\psi')}{(\varphi')^2 + (\psi')^2}.
\end{aligned}$$

Lema 2.8 *Seja a superfície de rotação dada por*

$$X(u,v) = (\varphi(u)cosv, \varphi(u)senv, \psi(u)),$$

com $u \in I \subset \mathbb{R}$, I aberto, $0 < v < 2\pi$ e $\varphi(u) > 0$. Sejam ainda,

$$\begin{aligned}
\varphi'(u) &= h(u)cos(\eta(u)) \\
\psi'(u) &= h(u)sen(\eta(u)).
\end{aligned} \tag{2-8}$$

Onde h e η são função de u, com $h(u) \geq 0$ $\forall$ u. Então a curvatura gaussiana K e a curvatura média H são dados por

$$K = \frac{\eta'(u)sen(\eta(u))}{\varphi(u)h(u)}; \tag{2-9}$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{\varphi(u)\eta'(u) + h(u)sen(\eta(u))}{\varphi(u)h(u)}. \tag{2-10}$$

Além disso, os coeficientes da forma quadrática σ *são dados por*

$$\mathcal{E}^* = \eta'[\omega\eta' - h], \quad \mathcal{F}^* = 0, \quad \mathcal{G}^* = sen(\eta)[\omega sen(\eta) - \varphi]. \tag{2-11}$$

Demonstração. Omitiremos a coordenada u. Para isto, basta lembrarmos que as funções φ, ψ, h e η são funções somente de u. Usando (2-8), obtemos

$$\varphi'^2 + \psi'^2 = h^2cos^2(\eta) + h^2sen^2(\eta) = h^2. \tag{2-12}$$

Logo, usando (1-6), temos

$$E = h^2, \quad F = 0, \quad G = \varphi^2. \tag{2-13}$$

Para calcularmos os coeficientes da segunda forma fundamental, derivamos as equações dadas em (2-8) com respeito a u, isto é,

$$\varphi'' = h'cos(\eta) - h\eta'sen(\eta),$$

$$\psi'' = h'sen(\eta) + h\eta'cos(\eta).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \varphi'\psi'' - \varphi''\psi' &= hcos(\eta)[h'sen(\eta) + h\eta'cos(\eta)] - [h'cos(\eta) - h\eta'sen(\eta)]hsen(\eta) \\ &= h^2\eta'cos^2(\eta) + h^2\eta'sen^2(\eta) \\ &= h^2\eta', \end{aligned} \tag{2-14}$$

Substituindo (2-12) e (2-14) em (1-7), obtemos

$$e = \frac{\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}} = h\eta'.$$

De (1-7),

$$f = 0.$$

Usando (2-12) e (2-8) em (1-7), obtemos

$$g = \frac{\varphi\psi'}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}} = \frac{\varphi hsen(\eta)}{h} = \varphi sen(\eta).$$

Substituindo (2-12), (2-14) e (2-8) em (1-9), temos

$$K = \frac{hsen(\eta)(h^2\eta')}{\varphi h^4} = \frac{\eta' sen(\eta)}{\varphi h}$$

Analogamente, usando (2-12), (2-14) e (2-8) em (1-10), obtemos

$$H = \frac{1}{2}\frac{h^2\eta'\varphi + h^2 hsen(\eta)}{\varphi h^3} = \frac{1}{2}\frac{\varphi\eta' + hsen(\eta)}{\varphi h}.$$

Usando (2-7), (2-12) e (2-14), temos

$$\mathcal{E}^* = \frac{h^2\eta'(\omega h^2\eta' - h^3)}{h^4} = \eta'(\omega\eta' - h),$$

Por (2-7)

$$\mathcal{F}^* = 0,$$

Finalmente usando (2-7), (2-12), (2-14) e (2-8), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^* &= \frac{hsen(\eta)[\omega hsen(\eta) - \varphi h]}{h^2} \\ &= sen(\eta)[\omega sen(\eta) - \varphi]. \end{aligned}$$

De onde segue o resultado. □

2.3 Caracterização das Superfícies de Rotações que são Weingarten Generalizada de Classe 2

Motivados pelo trabalho de *Schief* em [15], obtivemos resultados mais gerais e demonstraremos os que coincidem de formas diferentes. Em especial o corolário 2.11.

Teorema 2.9 *Seja S uma superfície de rotação parametrizada por*

$$X(u,v) = (\varphi(u)cosv, \varphi(u)senv, \psi(u)),$$

onde $u \in I \subset \mathbb{R}$, I aberto, $0 < v < 2\pi$ e $\varphi(u) > 0$. Com curvatura gaussiana

$$K = \frac{1}{\rho^2},$$

onde ρ é uma função de u, não constante. Então ρ é harmônica com respeito a segunda forma fundamental se, e somente se, existe $\eta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não identicamente nula, tal que

$$(\rho\eta')' = \rho sen(\eta)cos(\eta), \quad \rho sen\eta \geq 0, \quad \rho'' = 0,$$
$$\varphi(u) = \rho(u)\eta'(u) \quad e \quad \psi(u) = \int \rho(u)sen^2(\eta(u))du.$$

Demonstração. Defina,

$$\varphi' = hcos(\eta), \qquad \psi' = hsen(\eta).$$

Como no Lema anterior com $h = h(u)$, por (2-9) temos

$$K = \frac{\eta' sen(\eta)}{\varphi h}. \tag{2-15}$$

Como

$$K = \frac{1}{\rho^2} \tag{2-16}$$

Igualando as expressões (2-16) e (2-15), temos

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\eta' sen(\eta)}{\varphi h}$$

Donde,

$$\varphi = \frac{\rho^2\eta' sen(\eta)}{h}. \tag{2-17}$$

Considerando σ isotérmica e o fato que $\omega = 0$, temos

$$\varphi hsen(\eta) = h^2\eta',$$

donde,

$$\varphi = \frac{h\eta'}{sen(\eta)}. \tag{2-18}$$

Fazendo (2-17) igual a (2-18), temos

$$h = \rho sen(\eta). \tag{2-19}$$

Agora substituindo (2-19) em (2-17), obtemos

$$\varphi = \rho\eta'.$$

Diferenciando a equação acima, temos

$$\varphi' = (\rho\eta')', \tag{2-20}$$

Por outro lado,

$$\varphi' = hcos(\eta). \tag{2-21}$$

Logo substituindo (2-19) em (2-21), depois fazendo (2-20) igual a (2-21) e simplificando a equação obtida, obtemos

$$(\rho\eta')' = \rho sen(\eta)cos(\eta).$$

Como,

$$\psi' = hsen(\eta)$$

Usando (2-19)

$$\psi' = \rho sen^2(\eta).$$

Donde,

$$\psi = \int \rho sen^2(\eta)du.$$

□

No caso em que $\rho = cte$, a classificação das superfícies de rotação com curvatura gaussiana constante se encontra em [10].

Para enunciarmos o caso geral, façamos a seguinte observação: Consideraremos o vetor normal unitário a superfície S por

$$N = \delta\frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$$

donde as curvaturas principais k_1, k_2 podem ser expressas por $k_1 = \delta\dfrac{e}{E}$ e $k_2 = \delta\dfrac{g}{G}$, com $\delta = \pm 1$. Neste caso consideramos ω e ρ funções harmônicas com respeito a σ.

Teorema 2.10 *Uma superfície de rotação S parametrizada por*

$$X(u,v) = (\varphi(u)cosv, \varphi(u)senv, \psi(u)),$$

isométrica com respeito a σ, onde $u \in I \subset \mathbb{R}$, I aberto, $0 < v < 2\pi$ e $\varphi(u) > 0$, é de Weingarten generalizada de classe 2 com $\rho''(u) = \omega''(u) = 0$ se, e somente se, existem funções $h(u)$ e $\eta(u)$ satisfazendo as seguintes relações

$$\begin{aligned} \varphi'(u) &= h(u)cos(\eta); \\ \psi'(u) &= h(u)sen(\eta); \end{aligned} \tag{2-22}$$

$$(\omega^2-\rho^2)\eta' sen(\eta)+\delta\omega(\varphi\eta'+hsen(\eta))+\varphi h=0; \tag{2-23}$$

$$\eta'[\omega\eta'-\delta h]=sen(\eta)[\omega sen(\eta)-\delta\varphi]. \tag{2-24}$$

Neste caso $h=h(u)$ é dado por

$$h=\frac{-2\omega sen^2(\eta)\pm\sqrt{4\omega^2 sen^4(\eta)-4(\eta')^2[\omega^2(sen^2(\eta)-\eta'^2)+(\omega^2-\rho^2)sen^2(\eta)]}}{2\delta\eta'}. \tag{2-25}$$

Demonstração. Por hipótese,

$$\begin{aligned}\varphi'(u) &= h(u)cos(\eta)\\ \psi'(u) &= h(u)sen(\eta).\end{aligned}$$

Então pelo Lema anterior, de (2-9), (2-10), (2-11) e considerando a o fato precedente ao enunciado do teorema, obtemos

$$K=\frac{\eta' sen(\eta)}{\varphi h} \tag{2-26}$$

$$2H=\delta\frac{\varphi\eta'+hsen(\eta)}{\varphi h}. \tag{2-27}$$

$$\mathcal{E}^*=\eta'[\omega\eta'-\delta h],\quad \mathcal{F}^*=0,\quad \mathcal{G}^*=sen(\eta)[\omega sen(\eta)-\delta\varphi] \tag{2-28}$$

Da equação (2-6), temos

$$(\omega^2-\rho^2)K+2H\omega+1=0.$$

Substituindo as equações (2-26) e (2-27), obtemos

$$(\omega^2-\rho^2)\eta' sen(\eta)+\delta\omega(\varphi\eta'+hsen(\eta))+\varphi h=0.$$

Agora fazendo $\mathcal{E}^*=\mathcal{G}^*$ em (2-28), temos

$$\eta'[\omega\eta'-\delta h]=sen(\eta)[\omega sen(\eta)-\delta\varphi].$$

Isolando φ em (2-23) e (2-24), respectivamente obtemos

$$\varphi=-\frac{[(\omega^2-\rho^2)\eta'+\delta\omega h]sen(\eta)}{h+\delta\omega\eta'}, \tag{2-29}$$

e,

$$\varphi = \frac{\omega(sen^2(\eta - \eta'^2) + \delta h\eta')}{\delta sen(\eta)} \tag{2-30}$$

Façamos agora (2-29) igual a (2-30). Obtendo

$$-\frac{[(\omega^2 - \rho^2)\eta' + \delta\omega h]sen(\eta)}{h + \delta\omega\eta'} = \frac{\omega(sen^2(\eta - \eta'^2) + \delta h\eta')}{\delta sen(\eta)}$$

donde,

$$-[(\omega^2 - \rho^2)\eta' + \delta\omega h]\delta sen^2(\eta) = (h + \delta\omega\eta')[\omega(sen^2(\eta - \eta'^2) + \delta h\eta')].$$

Reescrevendo a equação acima de modo conveniente, temos

$$\delta\eta' h^2 + 2\omega sen^2(\eta)h + \delta\omega^2\eta'(sen^2(\eta) - \eta'^2) + \delta(\omega^2 - \rho^2)\eta' sen^2(\eta) = 0$$

Logo h é dado por

$$h = \frac{-2\omega sen^2(\eta) \pm \sqrt{4\omega^2 sen^4(\eta) - 4(\eta')^2[\omega^2(sen^2(\eta) - \eta'^2) + (\omega^2 - \rho^2)sen^2(\eta)]}}{2\delta\eta'}.$$

□

Para finalizar apresentamos um importante resultado, que ao exigirmos que a superfície fosse isotérmica com respeito a σ obtivemos uma condição necessária para a conclusão do mesmo.

Corolário 2.11 *Seja S uma superfície Weingarten generalizada de classe 2 de rotação parametrizada por*

$$X(u,v) = (\varphi(u)cosv, \varphi(u)senv, \psi(u)),$$

com $u \in I \subset \mathbb{R}$, I aberto, $0 < v < 2\pi$, $\varphi(u) > 0$ e considere $N = -\frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$. Se existem funções $h(u)$ e $\eta(u)$ satisfazendo as seguintes relações

$$\begin{aligned} \varphi'(u) &= h(u)cos(\eta), \\ \psi'(u) &= h(u)sen(\eta), \end{aligned} \tag{2-31}$$

$$\eta'^2 = sen^2(\eta), \tag{2-32}$$

e,

$$(\rho\eta')' = \rho sen(\eta)cos(\eta) - \omega' sen(\eta) \tag{2-33}$$

Então X é uma esfera.

Demonstração. Consideremos $\delta = -1$ na equação (2-25) teremos,

$$h = \frac{2\omega sen^2(\eta) + \varepsilon\sqrt{4\omega^2 sen^4(\eta) - 4(\eta')^2[\omega^2(sen^2(\eta) - \eta'^2) + (\omega^2 - \rho^2)sen^2(\eta)]}}{2\eta'}$$

Como por hipótese,

$$\eta'^2 = sen^2(\eta).$$

Obtemos

$$h = \frac{2\omega\eta'^2 + \varepsilon\sqrt{4\eta'^2\rho^2 sen^2(\eta)]}}{2\eta'}$$

que extraindo a raiz e simplificando os termos,

$$h = \omega\eta' + \varepsilon\rho sen(\eta). \tag{2-34}$$

De (2-32), temos

$$\eta'^2 = sen^2(\eta).$$

Logo,

$$\eta' = \varepsilon sen(\eta), \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{2-35}$$

Multiplicando por ε ambos os lados da equação acima temos

$$\varepsilon\eta' = sen(\eta), \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{2-36}$$

Substituindo (2-36) em (2-34), obtemos

$$h = (\omega + \rho)\eta'. \tag{2-37}$$

e (2-37) em (2-31) temos,

$$\begin{aligned} \varphi' &= (\omega + \rho)\eta' cos(\eta), \\ \psi' &= (\omega + \rho)\eta' sen(\eta). \end{aligned}$$

Integrando as equações acima com respeito a u, resulta

$$\begin{aligned} \varphi &= \int (\omega + \rho)\eta' cos(\eta) du, \\ \psi &= \int (\omega + \rho)\eta' sen(\eta) du. \end{aligned} \tag{2-38}$$

Novamente, por hipótese, temos

$$(\rho\eta')' = \rho sen(\eta)cos(\eta) - \omega' sen(\eta)$$

Assim,

$$\rho'\eta' + \rho\eta'' = \rho sen(\eta)cos(\eta) - \omega' sen(\eta) \tag{2-39}$$

Derivando a equação (2-32) em relação a u, obtemos

$$\eta'\eta'' = \eta' sen(\eta)cos(\eta)$$

Simplificando, temos

$$\eta'' = sen(\eta)cos(\eta). \tag{2-40}$$

Substituindo (2-35) e (2-40) em (2-39) e simplificando os termos comuns temos,

$$\varepsilon\rho' sen(\eta) = -\omega' sen(\eta)$$

Assim,

$$(\varepsilon\rho' + \omega')sen(\eta) = 0$$

Como $\eta \neq 0$, implica

$$(\varepsilon\rho' + \omega') = 0$$

Sem perda de generalidade considere $\varepsilon = 1$. Assim,

$$(\rho' + \omega') = 0 \tag{2-41}$$

Donde,

$$(\rho + \omega) = c_1$$

onde c_1 é constante. Integrando as equações de (2-38) em u, temos

$$\begin{aligned} \varphi &= \int (\omega+\rho)\eta' cos(\eta)du = (\omega+\rho)sen(\eta) - \int (\omega'+\rho')sen(\eta)du, \\ \psi &= \int (\omega+\rho)\eta' sen(\eta)du = -(\omega+\rho)cos(\eta) - \int (\omega'+\rho')cos(\eta)du. \end{aligned}$$

Pela equação (2-41), resulta

$$\begin{aligned} \varphi &= (\omega+\rho)sen(\eta) \\ \psi &= -(\omega+\rho)cos(\eta). \end{aligned}$$

Portanto, X pode ser reescrita da seguinte forma

$$X(u,v) = ((\omega+\rho)sen(\eta)cos(v), (\omega+\rho)sen(\eta)sen(v), -(\omega+\rho)cos(\eta))$$

Donde,

$$X(u,v) = c_1(sen(\eta)cos(v), sen(\eta)sen(v), -cos(\eta)),$$

com $c_1 = (\omega+\rho)$. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] BACKLUND, A. ***Concerning surfaces with constant negative curvature translated by***. E.M.Coddington New Era Printing Co., Lancaster pa, 1905.

[2] BEALS, R.;RABELO, M. K. ***Backlund transformations and inverse scattering solutions for some pseudo-spherical surface equations***. Stud. Appl. Math. 81, 125-151, 1989.

[3] BIANCHI, L. ***Sulla transformazione di Bäcklund per le superficie pseudos-feriche***. Rend. Acc. Naz. Lincei 5, 3-12, 1892.

[4] BIANCHI, L. ***Sulla teoria delle transformazione delle superficie a curvatura constante***. Ann. di Mate. Pura ed Appl. 3, 185-298, 1899.

[5] BOBENKO A.I., EITNER, U; A.V., K. ***Harmonic inverse mean curvature surfaces and Painlevé equations***. Geometria Dedicata, 1997.

[6] BONNET, E. ***Mémoire sur la theorie des surfaces applicables sur une surfaces donee***. JI École Pol, Paris(1867),XLII Cahier, 72-92, 1867.

[7] CAMPOS, P. ***Submanifolds of Constant Non Negative Curvature***. Mat. Contem. 4, 55-73, 1993.

[8] CARTAN, E. ***Sur les varietés à courbures constantes d'un espace euclidien ou non euclidien***. Bull. Soc. Math. France 47, 125-160, 1919.

[9] CARTAN, E. ***Sur la couples de surfaces applicables avec conservation des courbures principales***. Bull. Soc. Math.,66,55-85, 1942.

[10] DOCARMO, M. P. ***Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies***. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), R.J., 2005.

[11] EISENHART, L. ***A treatrise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces***. Dove, New York, 1960.

[12] EISENHART, L. ***Transformation of Surfaces***. Princeton University Press, 1962.

[13] KAMRAN, N. TENENBLAT, K. ***On differential equations describing pseudo-spherical surfeces***. J. Diff. Eq. 115, 75-98, 1995.

[14] MOORE, J. ***Submanifolds of constant positive curvature***. Duke Mth. J. 44, 449-484, 1977.

[15] SCHIEF, W. ***On Laplace-Darboux-type sequences of generalized Weingarten serfaces***. J. Mat., V.41, N.9, 6566-6599, 2000.

[16] TENENBLAT, K. ***Transformações de superfícies a aplicações***. XIII Col. Bras. de Mat. IMPA, 1981.

[17] TENENBLAT, K. ***Transformations of Manifolds and Applications to Differential Equqtions***. IMPA, RJ, Brazil, July 8-19, 1996.