

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

CARLOS ANTÔNIO FREITAS DA SILVA

**Construção explícita de métricas de
Einstein-Finsler com curvatura flag não
constante**

Goiânia
2015

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: Dissertação Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Carlos Antônio Freitas da Silva		
E-mail:	cafs15@hotmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor	Bolsista		
Agência de fomento:		Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:GO	CNPJ: 00889834/0001-08
Título:	Construção explícita de métricas de Einstein-Finsler com curvatura Flag não Constante		
Palavras-chave:	Estrutura de Finsler, Métricas de Einstein-Randers, Curvatura Flag, Curvatura de Ricci.		
Título em outra língua:	The Explicit Construction of Einstein-Finsler Metrics with Non-Constant Flag Curvature		
Palavras-chave em outra língua:	Finsler structure, Einstein-Randers metrics, flag curvature, Ricci curvature.		
Área de concentração:	Geometria		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	20/02/2015		
Programa de Pós-Graduação:	Matemática		
Orientador (a):	Romildo da Silva Pina		
E-mail:			
Co-orientador(a):*	Marcelo Almeida de Souza		
E-mail:			

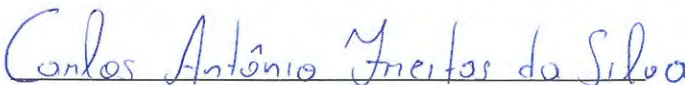
*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.


Assinatura do (a) autor (a)

Data: 16 / 03 / 2015

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

CARLOS ANTÔNIO FREITAS DA SILVA

Construção explícita de métricas de Einstein-Finsler com curvatura flag não constante

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Romildo da Silva Pina

Coorientador: Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza

Goiânia
2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

da Silva, Carlos Antônio Freitas
Construção explícita de Métricas de Einstein-Finsler com curvatura
flag não constante [manuscrito] / Carlos Antônio Freitas da Silva. - 2015.
lv, 55 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Romildo da Silva Pina; co-orientador Dr.
Marcelo Almeida de Souza.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de
Matemática e Estatística (IME) , Programa de Pós-Graduação em
Matemática, Goiânia, 2015.
Bibliografia.

1. Estrutura de Finsler. 2. Métricas de Einstein-Randers. 3.
Curvatura Flag. 4. Curvatura de Ricci. I. da Silva Pina, Romildo, orient.
II. de Souza, Marcelo Almeida, co-orient. III. Título.

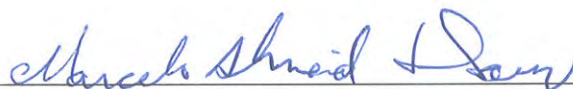
CARLOS ANTÔNIO DE FREITAS DA SILVA

**CONSTRUÇÃO EXPLÍCITA DE MÉTRICAS DE EINSTEIN -
FINSLER COM CURVATURA FLAG NÃO CONSTANTE**

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 20 de fevereiro de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



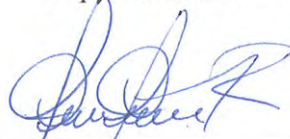
Prof. Dr. Romildo da Silva Pina
Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza
Instituto de Matemática e Estatística - UFG



Profa. Dra. Karoline Victor Fernandes
Departamento II – IFG



Prof. Dr. Carlos Maber Carrion Riveros
Departamento de Matemática - UnB

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Carlos Antônio Freitas da Silva

Graduou-se em Matemática na UFG - Universidade Federal de Goiás. Durante o Mestrado, na UFG - Universidade Federal de Goiás, foi bolsista da CAPES.

À minha família.

Agradecimentos

Ao longo deste trabalho contei com a colaboração de muitas pessoas. Entre elas, destaco meus agradecimentos aos professores Romildo e Marcelo Souza. Agradeço-lhes pelo apoio, pelas sugestões e orientações e, principalmente pela dedicação e paciência.

Agradeço aos professores do programa de pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás, em especial ao professor Maurício Donizeth Pieterzack que além de suas aulas, também foram fundamentais as suas dicas. Além disso, agradeço a professora Ivonildes Ribeiro pelos conselhos e por sua confiança.

Aqui destaco também a presença de meus colegas que se tornaram parceiros nessa luta e, cada um a seu modo, deu a sua contribuição nessa jornada. Entre eles destaco Ilton, Pedro Bonfim, Ademir, Jefferson, Fernando, Marcos Tsujii, Aderval, Lucyjane, Laredo, Paula e Mônica.

No âmbito institucional, registro, ainda, o apoio financeiro concedido pela CAPES.

Por fim, agradeço aos meus familiares em especial à minha mãe que me guiou, acreditou, confiou e criou todas as possibilidades para que eu realizasse essa tarefa.

Resumo

da SILVA, Carlos A. F. **Construção explícita de métricas de Einstein-Finsler com curvatura flag não constante**. Goiânia, 2015. 54p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho estudaremos a Geometria de Finsler. Em particular, estudaremos a Geometria de Randers que pode ser visto como a mais simples perturbação da Geometria Riemanniana. Além disso, veremos também que métricas de Randers podem ser obtidas como soluções do Problema Navegacional de Zermelo. Utilizaremos também resultados que caracterizam métricas de Randers com curvatura flag constante e métricas de Randers do tipo Einstein em termos do Problema Navegacional de Zermelo. Usando métricas de Randers vamos construir uma família a 3 parâmetros de métricas de Einstein-Finsler com curvatura flag não constante e para obter tal família utilizaremos um campo de Killing e uma métrica Riemanniana que é a métrica de Hawking Taub-NUT.

Palavras-chave

Estrutura de Finsler, Métricas de Einstein-Randers, Curvatura Flag, Curvatura de Ricci.

Abstract

da SILVA, Carlos A. F. **The explicit construction of Einstein-Finsler metrics with non-constant flag curvature.** Goiânia, 2015. 54p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this dissertation we will study Finsler Geometry. In particular, we will study Randers Geometry that which can be viewed as Riemannian Geometry with a perturbation. Furthermore Randers metrics are also obtained as solution to Zermelo's Navigation Problem. We will also use classification theorems of Randers metrics of constant flag curvature and Einstein Randers metrics in terms of Zermelo's Navigation Problem. Using Randers metrics we are going to construct a 3-parameter family of Einstein-Finsler metrics with non-constant flag curvature and to get such family we use a Killing vector field and a Riemannian metric which is the Hawking Taub-NUT metric.

Keywords

Finsler structure, Einstein-Randers metrics, flag curvature, Ricci curvature.

Sumário

1	Introdução	8
2	Geometria de Riemann-Finsler	10
2.1	Preliminares	10
2.2	Derivada de Lie	16
2.3	Espaços de Finsler	20
2.4	Problema Navegacional de Zermelo	24
3	Spray e Geodésicas	27
4	Curvatura Riemanniana	35
4.1	Curvatura Riemanniana em espaços de Finsler	35
4.2	Curvatura flag	38
5	Métrica de Einstein-Finsler	41
5.1	Métrica de Hawking Taub-NUT	41
5.2	Campo de Killing	45
5.3	Métrica de Einstein-Randers com Curvatura Flag não constante	49
	Referências Bibliográficas	53

Introdução

Em 1854 Riemann discutiu a ideia de introduzir uma estrutura métrica em uma variedade diferenciável M de dimensão n cujo elemento de comprimento de arco de uma curva diferenciável em M é

$$ds = F(x^1, \dots, x^n, dx^1, \dots, dx^n),$$

onde $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ é uma função diferenciável em $TM \setminus 0$ homogênea de grau um em y , onde $(x, y) \in TM$. Se $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ é uma curva em M , com $a \leq t \leq b$, então $\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b F(x(t), x'(t)) dt$ é o comprimento de arco da curva de a até b . A Geometria Riemanniana foi então desenvolvida em um caso especial cujo

$$F^2(x, y) = g_{ij}(x) y^i y^j. \quad (1-1)$$

O estudo sistemático do caso geral proposto por Riemann foi feito a mais de 60 anos depois, no ano de 1918, na tese de P. Finsler, o que dá origem ao nome *Geometria de Finsler*. A Geometria de Finsler é então a Geometria Riemanniana sem a restrição quadrática (1-1).

Na Geometria Riemanniana variedades (métricas) de Einstein têm sido amplamente estudadas e este conceito se estende de modo natural na Geometria de Finsler. Uma métrica de Finsler F em uma variedade M de dimensão n é do tipo Einstein se existe uma função escalar $K = K(x)$ em M tal que

$$\text{Ric}(y) = (n-1)KF^2(y),$$

ou seja, o tensor de Ricci é múltiplo do tensor métrico. Vários resultados foram obtidos para métricas de Randers que foram introduzidas por Randers em 1941 para discutir métricas assimétricas em espaços de dimensão 4 no estudo da relatividade geral e depois foram estudadas por vários físicos e matemáticos. Métricas de Randers são uma classe especial de métricas de Finsler que são obtidas por uma perturbação de uma métrica Riemanniana $\alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ por um termo linear $\beta(x, y) = b_i(x)y^i$ de tal forma que

$\|\beta\|_\alpha^* < 1$. Em variedades de dimensão 3, D. Bao e C. Robles mostraram que uma métrica de Randers é do tipo Einstein se, e somente se, tem curvatura flag constante. A curvatura flag na geometria de Finsler é análoga a curvatura seccional da geometria Riemanniana. Este resultado é também análogo no caso em que a variedade é Riemanniana, isto é, uma variedade Riemanniana de dimensão 3 é de Einstein se, e somente se, tem curvatura seccional constante. Outro resultado obtido por D. Bao, C. Robles e Z. Shen é o que caracteriza métricas de Randers com curvatura flag constante para variedades de dimensão $n \geq 2$. Assim, as métricas de Einstein-Randers para variedades de dimensão 3 são completamente determinadas.

Chern, S. S. acreditava que métricas de Einstein em geometria de Finsler seriam como no caso Riemanniano, ou seja, a curvatura flag de uma métrica de Einstein deveria ser constante e a partir daí foi proposto a busca de exemplos de métricas de Einstein com curvatura flag não constante.

O objetivo deste trabalho é construir uma família a 3-parâmetros de métricas de Einstein-Randers com curvatura flag não constante em um determinado subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^4$. Para fazer esta construção mostraremos que uma métrica de Randers pode também ser obtida como uma solução do Problema navegacional de Zermelo em uma variedade Riemanniana (M, g) que consiste basicamente em minimizar o tempo em que um objeto se desloca por meio de uma força interna de um ponto $p \in M$ para outro ponto $q \in M$ sujeito a uma outra força externa dada por um campo de vetores W . Podemos pensar nesse objeto como se fosse um navio navegando sobre o mar com a presença de uma brisa. Veremos que a expressão da métrica de Randers será obtida em termos da métrica g e das coordenadas do campo W . Depois basta considerar a métrica Riemanniana g como a métrica de Hawking Taub-NUT com um parâmetro e o campo W como um campo de Killing obtido de uma isometria a 2 parâmetros em \mathbb{R}^4 .

No Capítulo 2 faremos um estudo preliminar sobre variedades Riemannianas e introduziremos o conceito de estrutura de Finsler e também métricas de Randers. No Capítulo 3 apresentaremos a noção de sprays e geodésicas em variedades de Finsler. No Capítulo 4 será visto a noção de derivada direcional de campo de vetores e a curvatura Riemanniana em variedades de Finsler bem como a curvatura flag e o Tensor de Ricci. Por fim, no Capítulo 5 faremos a construção de uma família a 3 parâmetros de métricas de Einstein-Finsler com curvatura flag não constante.

Geometria de Riemann-Finsler

2.1 Preliminares

Nesta seção apresentaremos conceitos que serão utilizados nesta dissertação.

Definição 2.1 *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M tais que*

- (1) $\bigcup_\alpha \varphi_\alpha(U_\alpha) = M$;
- (2) *Para todo par α, β com $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ os conjuntos $\varphi_\alpha^{-1}(W)$ e $\varphi_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ são diferenciáveis;*
- (3) *A família $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições (1) e (2).*

Definição 2.2 *Seja M uma variedade diferenciável. Dizemos que uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é uma curva diferenciável em M . Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja \mathcal{D} o conjunto das funções diferenciáveis em p . O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \quad f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por T_pM . O conjunto T_pM com as operações usuais de funções, forma um espaço vetorial de dimensão n e a escolha de uma parametrização $\varphi : U \rightarrow M$ determina uma base associada em T_pM dada pelo conjunto $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_0, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_0 \right\} \subset T_pM$. A estrutura linear em T_pM assim definida não depende da parametrização φ . O espaço vetorial T_pM é chamado o espaço tangente de M em p . Usaremos a convenção de Einstein onde $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_pM$ indica o somatório em i .

Definição 2.3 Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente T_pM , que varia diferencialmente no seguinte sentido: se $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $\varphi(x^1, \dots, x^n) = q \in \varphi(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x^i}(q) = dx(0, \dots, 1, \dots, 0)$ então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}(q), \frac{\partial}{\partial x^j}(q) \right\rangle_p = g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$ é uma função diferenciável em U .

Esta definição não depende da escolha do sistema de coordenadas. Definiremos agora a noção de derivação de campos de vetores com certas propriedades.

Definição 2.4 Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$,
- ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$,
- iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Escolhendo um sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^n) em torno de $p \in M$ e escrevendo

$$X = u^i X_i, \quad Y = v^j X_j$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ temos que

$$\nabla_X Y = u^i v^j \nabla_{X_i} X_j + u^i X_i(v^j) X_j.$$

Fazendo $\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{ij}^k X_k$ obtemos

$$\nabla_X Y = \left(u^i v^j \Gamma_{ij}^k + X(v^k) \right) X_k.$$

Definição 2.5 Dizemos que uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana é compatível com a métrica se

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

As funções diferenciáveis $\Gamma_{ij}^k(x)$ são chamadas os símbolos de Christoffel. Podemos observar então que basta definir os símbolos de Christoffel para termos a conexão. Quando

desejamos que a conexão seja simétrica, isto é, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ e que também seja compatível com a métrica então os símbolos de Christoffel são dados pela expressão

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km},$$

onde g^{km} são os elementos da matriz inversa $[g_{km}]^{-1}$. Dizemos então que ∇ em (M, g) é a conexão Riemanniana.

Definição 2.6 A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Observe que se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, pois se indicarmos por $Z = (u^1, \dots, u^n)$ as componentes do campo Z nas coordenadas naturais de \mathbb{R}^n teremos que

$$\nabla_X Z = (Xu^1, \dots, Xu^n),$$

donde

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXu^1, \dots, YXu^n),$$

o que implica que

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z = 0.$$

Podemos portanto pensar em R como uma maneira de medir o quanto M deixa de ser Euclidiana.

Vamos escrever a curvatura em um sistema de coordenadas (U, φ) , em que M é uma variedade de dimensão 2 e sejam $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. Escrevemos

$$X = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad Y = v_1 X_1 + v_2 X_2, \quad Z = w_1 X_1 + w_2 X_2.$$

Usando as propriedades de linearidade da conexão temos

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= R(u_1 X_1 + u_2 X_2, Y)Z \\ &= u_1 R(X_1, Y)Z + u_2 R(X_2, Y)Z \\ &= u_1 R(X_1, v_1 X_1 + v_2 X_2)Z + u_2 R(X_2, v_1 X_1 + v_2 X_2)Z \\ &= u_1 v_1 R(X_1, X_1)Z + u_1 v_2 R(X_1, X_2)Z + u_2 v_1 R(X_2, X_1)Z + u_2 v_2 R(X_2, X_2)Z \end{aligned}$$

$$R(X, Y)Z = u_1 v_1 R(X_1, X_1)(w_1 X_1 + w_2 X_2) + u_1 v_2 R(X_1, X_2)(w_1 X_1 + w_2 X_2) \\ + u_2 v_1 R(X_2, X_1)(w_1 X_1 + w_2 X_2) + u_2 v_2 R(X_2, X_2)(w_1 X_1 + w_2 X_2)$$

e

$$R(X, Y)Z = u_1 v_1 w_1 R(X_1, X_1)X_1 + u_1 v_1 w_2 R(X_1, X_1)X_2 + u_1 v_2 w_1 R(X_1, X_2)X_1 \\ + u_1 v_2 w_2 R(X_1, X_2)X_2 + u_2 v_1 w_1 R(X_2, X_1)X_1 + u_2 v_1 w_2 R(X_2, X_1)X_2 \\ + u_2 v_2 w_1 R(X_2, X_2)X_1 + u_2 v_2 w_2 R(X_2, X_2)X_2.$$

Fazendo

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R^l_{ijk} X_l$$

obtemos que

$$R(X, Y)Z = u_1 v_1 w_1 \sum_l R^l_{111} X_l + u_1 v_1 w_2 \sum_l R^l_{112} X_l + u_1 v_2 w_1 \sum_l R^l_{121} X_l \\ + u_1 v_2 w_2 \sum_l R^l_{122} X_l + u_2 v_1 w_1 \sum_l R^l_{211} X_l + u_2 v_1 w_2 \sum_l R^l_{212} X_l \\ + u_2 v_2 w_1 \sum_l R^l_{221} X_l + u_2 v_2 w_2 \sum_l R^l_{222} X_l.$$

o que nos dá

$$R(X, Y)Z = \sum_{ijk} u_i v_j w_k \sum_l R^l_{ijk} X_l,$$

assim obtemos

$$R(X, Y)Z = \sum_{ijkl} R^l_{ijk} u_i v_j w_k X_l,$$

onde R^l_{ijk} são as componentes da curvatura R em (U, x) .Agora vamos obter R^l_{ijk} em termos dos coeficientes Γ^k_{ij} . Temos por definição que

$$R(X_i, X_j)X_k = \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k \\ = \nabla_{X_j} \left(\sum_l \Gamma^l_{ik} X_l \right) - \nabla_{X_i} \left(\sum_l \Gamma^l_{jk} X_l \right) \\ = \left(\sum_l \Gamma^l_{ik} \nabla_{X_j} X_l + \sum_l \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma^l_{ik} X_l \right) - \left(\sum_l \Gamma^l_{jk} \nabla_{X_i} X_l + \sum_l \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma^l_{jk} X_l \right) \\ = \left(\sum_l \Gamma^l_{ik} \sum_s \Gamma^s_{jl} X_s + \sum_l \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma^l_{ik} X_l \right) - \left(\sum_l \Gamma^l_{jk} \sum_s \Gamma^s_{il} X_s + \sum_l \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma^l_{jk} X_l \right)$$

sendo

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R^l_{ijk} X_l$$

então

$$\sum_l R^l_{ijk} X_l = \left(\sum_l \Gamma^l_{ik} \sum_s \Gamma^s_{jl} X_s + \sum_l \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma^l_{ik} X_l \right) - \left(\sum_l \Gamma^l_{jk} \sum_s \Gamma^s_{il} X_s + \sum_l \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma^l_{jk} X_l \right).$$

Fazendo o produto escalar com X_1, X_2 obtemos

$$\begin{aligned} R^1_{ijk} g_{11} + R^2_{ijk} g_{21} &= g_{11} \left[\sum_l \left(\Gamma^l_{ik} \Gamma^1_{jl} - \Gamma^l_{jk} \Gamma^1_{il} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma^1_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma^1_{jk} \right] \\ &\quad + g_{21} \left[\sum_l \left(\Gamma^l_{ik} \Gamma^2_{jl} - \Gamma^l_{jk} \Gamma^2_{il} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma^2_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma^2_{jk} \right] \\ R^1_{ijk} g_{12} + R^2_{ijk} g_{22} &= g_{12} \left[\sum_l \left(\Gamma^l_{ik} \Gamma^1_{jl} - \Gamma^l_{jk} \Gamma^1_{il} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma^1_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma^1_{jk} \right] \\ &\quad + g_{22} \left[\sum_l \left(\Gamma^l_{ik} \Gamma^2_{jl} - \Gamma^l_{jk} \Gamma^2_{il} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma^2_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma^2_{jk} \right] \end{aligned}$$

isso nos dá que as componentes R^s_{ijk} da curvatura R no sistema de coordenadas (U, φ) são dadas por

$$R^s_{ijk} = \sum_l \left(\Gamma^l_{ik} \Gamma^s_{jl} - \Gamma^l_{jk} \Gamma^s_{il} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma^s_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma^s_{jk}.$$

A partir da definição de curvatura obtemos a noção de curvatura seccional de uma variedade Riemanniana que generaliza a noção de curvatura Gaussiana das superfícies. Na verdade Riemann introduziu o noção de curvatura de uma maneira bastante geométrica mas a formulação que usaremos é por motivos técnicos para demonstração de teoremas.

Definição 2.7 Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p M$ tal que $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ , a curvatura seccional de σ em p é definida por

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{\sqrt{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}}.$$

A curvatura seccional $K(x, y)$ não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Definição 2.8 Dada uma variedade Riemanniana M e seja $v = z_n$ um vetor unitário em $T_p M$ onde $p \in M$ e tomemos um base ortonormal $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$ do hiperplano de $T_p M$

ortogonal à v . A curvatura de Ricci na direção de v é dada por

$$\text{Ric}_p(v) = \frac{1}{n-1} \sum_i \langle R(v, z_i)v, z_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Escolhendo $v \in T_pM$ unitário e uma base ortonormal $\{z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = v\}$ para T_pM o Tensor de Ricci é uma forma bilinear em T_pM definida por

$$\text{Ric}(v, y) = \frac{1}{n-1} \sum_j \langle R(v, z_j)y, z_j \rangle.$$

Dada uma variedade diferenciável M de dimensão n denotamos por TM o fibrado tangente de M . Cada elemento de TM é da forma (x, y) em que $x \in M$ e $y \in T_xM$. A projeção natural $\pi : TM \rightarrow M$ é dada por $\pi(x, y) = x$. O fibrado tangente é uma variedade de dimensão $2n$.

Definição 2.9 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Uma função $F = F(y)$ em V é chamada uma norma de Minkowski se tem as seguintes propriedades:*

1. $F(y) \geq 0$ para todo $y \in V$, e $F(y) = 0$ se, e somente se, $y = 0$;
2. $F(\lambda y) = \lambda F(y)$ para qualquer $y \in V$ e $\lambda > 0$;
3. F é de classe C^∞ em $V \setminus \{0\}$ tal que para qualquer $y \in V$, a forma bilinear simétrica g_y em V é um produto interno dado por

$$g_y(u, v) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} [F^2(y + su + tv)]_{s=t=0}.$$

O Produto interno g_y é chamado forma fundamental na direção de y . O par (V, F) é chamado *Espaço de Minkowski*.

Definição 2.10 *Uma função $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é positiva homogênea de grau r se para todo $\lambda > 0$ e $y \in \mathbb{R}^n$ tem-se $H(\lambda y) = \lambda^r H(y)$.*

O Teorema de Euler para funções homogêneas será uma ferramenta bastante utilizada no decorrer do trabalho.

Teorema 2.11 *Seja $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então H é positiva homogênea de grau r se, e somente se, $y^i H_{y^i}(y) = rH(y)$, onde $H_{y^i} = \frac{\partial H}{\partial y^i}$, $y = (y^1, \dots, y^n)$.*

Prova. Suponha que H satisfaz $H(\lambda y) = \lambda^r H(y)$ para todo λ positivo. Fixando y e derivando em relação ao parâmetro λ temos

$$y^i H_{y^i}(y) = r\lambda^{r-1} H(y).$$

Tomando $\lambda = 1$ obtemos $y^i H_{y^i}(y) = rH(y)$.

Reciprocamente, suponhamos que $y^i H_{y^i}(y) = rH(y)$. Fixando y e consideremos a função $H(\lambda y)$ com $\lambda > 0$. Pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{d}{d\lambda} H(\lambda y) = y^i H_{y^i}(\lambda y) = \frac{1}{\lambda} (\lambda y)^i H_{y^i}(\lambda y) = \frac{r}{\lambda} H(\lambda y),$$

o que nos dá a EDO

$$\frac{d}{d\lambda} H(\lambda y) - \frac{r}{\lambda} H(\lambda y) = 0.$$

Considere a solução da EDO $H(\lambda y) = C\lambda^r$ onde C é uma constante que depende de y fixado. Tomando $\lambda = 1$ temos que $C = H(y)$. Então

$$H(\lambda y) = C\lambda^r = \lambda^r H(y).$$

□

2.2 Derivada de Lie

Consideremos o teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais.

Teorema 2.12 *Se X é um campo C^∞ numa variedade M e $p \in M$ então existem um aberto $U \subset M$, $p \in U$, um número $\varepsilon > 0$, e uma aplicação $\varphi; (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M$ tais que a curva $t \mapsto \varphi(t, p)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ é a única trajetória de X que no instante $t = 0$ passa pelo ponto p para todo $p \in U$. A aplicação $\varphi_t(p) = \varphi(t, p)$ é chamada o fluxo de X em U .*

Fixando t com $|t| < \varepsilon$, a aplicação φ_t define um difeomorfismo de U em $\varphi(U)$ e $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$. Assim, o campo X gera um grupo G de difeomorfismos φ_t chamado de grupo local a 1 parâmetro de difeomorfismos. Considerando o conjunto das isometrias em M que gera um subgrupo de G chamado grupo a 1 parâmetro de isometrias.

Definição 2.13 *Se $\varphi : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo entre variedades diferenciáveis e X é um campo de vetores em M definimos o campo de vetores $Y = \varphi_* X$ em N por*

$$\varphi_* X := Y(p) = d\varphi(X(\varphi^{-1}(p))).$$

Definição 2.14 *Seja X um campo de vetores em M , dizemos então que X é um campo de Killing se para todo $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ a aplicação $\varphi_{t_0} : U \rightarrow M$ é uma isometria.*

Sejam M, N variedades diferenciáveis e considere $\varphi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável e $\omega = \omega_i dz^i$ uma 1-forma em N , definimos a pull back

$$\varphi^* \omega := \omega_i(\varphi(x)) \frac{\partial z^i}{\partial x^k} dx^k. \quad (2-1)$$

Analogamente, para $h = h_{ij} dz^i \otimes dz^j$ em $T^*M \otimes T^*M$

$$\varphi^* h = h_{ij} \frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial z^j}{\partial x^\ell} dx^k \otimes dx^\ell. \quad (2-2)$$

Para uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi^* f = f \circ \varphi. \quad (2-3)$$

Se $\varphi : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo e Y é um campo de vetores em N colocamos

$$\varphi^* Y := (\varphi^{-1})_* Y \quad (2-4)$$

Definição 2.15 *Sejam X um campo de vetores com um grupo de difeomorfismos locais a 1 parâmetro φ_t , e S um tensor em M . A derivada de Lie de S na direção de X é definida como*

$$L_X S := \frac{d}{dt} (\varphi_t^* S)|_{t=0}.$$

Teorema 2.16

i) Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então

$$L_X f = df(X) = X(f).$$

ii) Seja Y campo de vetores em M . Então

$$L_X Y = [X, Y].$$

iii) Seja $\omega = \omega_j dx^j$ uma 1-forma em M . Então para $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$L_X \omega = \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} X^i + \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \omega_i \right) dx^j.$$

Prova.

i)

$$L_X f = \frac{d}{dt} (\varphi_t^* f)|_{t=0} = \frac{d}{dt} (f \circ \varphi_t)|_{t=0} = df \circ X = \frac{\partial f}{\partial x^i} X^i = X(f)$$

ii) $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$\begin{aligned} L_X Y &= \frac{d}{dt}(\varphi_t^* Y)|_{t=0} = \frac{d}{dt}((\varphi_t)_* Y)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left(Y^i(\varphi_t) \frac{\partial \varphi_t^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} X^k \delta_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^i \left(-\frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}, \end{aligned}$$

sendo $\varphi_0 = id$ e $\frac{d}{dt}(\varphi_{-t})|_{t=0} = -X$

$$\begin{aligned} L_X Y &= \left(X^k \frac{\partial Y}{\partial x^k} - Y^k \frac{\partial X^j}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= [X, Y]. \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} L_X \omega &= \frac{d}{dt}(\varphi_t^* \omega)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\omega_j(\varphi_t) \frac{\partial \varphi_t^j}{\partial x^k} dx^k \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} X^i \delta_k^j dx^k + \omega_j \frac{\partial X^j}{\partial x^k} dx^k, \end{aligned}$$

sendo $\varphi_0 = id$ e $\frac{d}{dt}(\varphi_t)|_{t=0} = X$

$$L_X \omega = \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} X^i + \frac{\partial X^j}{\partial x^k} \omega_j \right) dx^k.$$

□

A derivada de Lie para um tensor arbitrário pode ser calculada. Por exemplo, se $h = h_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j$, seja $x = \varphi_t(z) \in M$ e escrevemos

$$\varphi_t(z) = (\varphi_t^1(z), \dots, \varphi_t^n(z)).$$

Teremos que

$$\varphi_t^* h = h_{ij}(\varphi_t(z)) \frac{\partial \varphi_t^i}{\partial z^k}(z) \frac{\partial \varphi_t^j}{\partial z^\ell}(z) dz^k \otimes dz^\ell.$$

Sendo

$$L_X h = \frac{d}{dt}(\varphi_t^* h)|_{t=0},$$

então segue da regra da cadeia e do produto que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\varphi_t^* h)|_{t=0} &= \left[\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^s}(\varphi_t(z)) \frac{\partial \varphi_t^s}{\partial t}(z) \frac{\partial \varphi_t^i}{\partial z^k}(z) \frac{\partial \varphi_t^j}{\partial z^\ell}(z) \right]_{t=0} dz^k \otimes dz^\ell \\
&+ h_{ij}(\varphi_t(z)) \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi_t^i}{\partial z^k}(z) \right) \cdot \frac{\partial \varphi_t^j}{\partial z^\ell}(z) + \frac{\partial \varphi_t^i}{\partial z^k}(z) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi_t^j}{\partial z^\ell}(z) \right) \right]_{t=0} dz^k \otimes dz^\ell \\
&= \left[\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^s}(\varphi_t(z)) X^s(z) \frac{\partial \varphi_t^i}{\partial z^k}(z) \frac{\partial \varphi_t^j}{\partial z^\ell}(z) \right]_{t=0} dz^k \otimes dz^\ell \\
&+ h_{ij}(\varphi_t(z)) \left[\frac{\partial}{\partial z^k} \left(\frac{\partial \varphi_t^i}{\partial t}(z) \right) \cdot \frac{\partial \varphi_t^j}{\partial z^\ell}(z) + \frac{\partial \varphi_t^i}{\partial z^k}(z) \cdot \frac{\partial}{\partial z^\ell} \left(\frac{\partial \varphi_t^j}{\partial t}(z) \right) \right]_{t=0} dz^k \otimes dz^\ell \\
&= \left[\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^s} X^s \frac{\partial \varphi_t^i}{\partial z^k} \frac{\partial \varphi_t^j}{\partial z^\ell} + h_{ij} \left(\frac{\partial X^i}{\partial z^k} \frac{\partial \varphi_t^j}{\partial z^\ell} + \frac{\partial \varphi_t^i}{\partial z^k} \frac{\partial X^j}{\partial z^\ell} \right) \right]_{t=0} dz^k \otimes dz^\ell.
\end{aligned}$$

Como $\varphi_0 = id$ então quando $k = i$ e $l = j$ tem-se

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^* h)|_{t=0} = \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^s} X^s dz^i \otimes dz^j + h_{ij} \frac{\partial X^i}{\partial z^k} dz^k \otimes dz^j + h_{ij} \frac{\partial X^j}{\partial z^l} dz^i \otimes dz^l.$$

Fazendo uma mudança nos índices escrevemos

$$L_X h = \left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} X^k + h_{kj} \frac{\partial X^k}{\partial z^i} + h_{ik} \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right) dz^i \otimes dz^j.$$

O teorema seguinte nos dá uma caracterização de campos de Killing.

Teorema 2.17 *Seja M uma variedade Riemanniana com uma métrica $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$. Então $X \in \mathcal{X}(M)$ é um campo de Killing se, e somente se,*

$$L_X g = 0. \tag{2-5}$$

Prova. De (2–5)

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^* g)|_{t=0} = 0. \tag{2-6}$$

Como a igualdade (2–6) é para todo ponto $x \in M$ obtemos que

$$\varphi_t^* g = g, \forall t \in I.$$

Portanto, os difeomorfismos φ_t são isometrias. Reciprocamente, se φ_t são isometrias então vale a igualdade (2–6), e portanto (2–5). \square

2.3 Espaços de Finsler

Na geometria de Finsler definimos o comprimento $\mathcal{L}(\gamma)$ de uma curva $\gamma : t \mapsto (x^1(t), \dots, x^n(t))$, $a \leq t \leq b$, diferenciável em uma variedade M de dimensão n por

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b F \left(x^1(t), \dots, x^n(t), \frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt} \right) dt,$$

onde $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ é uma função não negativa diferenciável em $TM \setminus 0$. Isto deve ser feito de tal modo que o comprimento não dependa da parametrização e uma condição suficiente para que isso aconteça é que para todo $\lambda > 0$ se tenha $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$. Desta forma, se $\beta(s)$ é uma reparametrização qualquer de $\gamma(t)$, então existe um difeomorfismo $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$, com $\varphi(s) = t$, $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$ tal que $\beta = \gamma \circ \varphi$. Então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\beta) &= \int_c^d F(\beta(s), \beta'(s)) ds = \int_c^d F(\gamma(\varphi(s)), \varphi'(s)\gamma'(\varphi(s))) ds \\ &= \int_c^d \varphi'(s) F(\gamma(\varphi(s)), \gamma'(\varphi(s))) ds = \int_a^b F(\gamma(t), \gamma'(t)) dt = \mathcal{L}(\gamma). \end{aligned}$$

Outra condição que impomos sobre a função F é que em um sistema de coordenadas locais a matriz

$$g_{ij}(x, y) = \left[\frac{1}{2} F^2 \right]_{y^i y^j}$$

seja positiva definida em todo ponto de $TM \setminus 0$.

Sobre essas condições podemos observar que para cada ponto $x \in M$ fixo $F_x(y) = F(x, y)$ é uma norma de Minkowski em $T_x M$.

Definição 2.18 *Seja M^n uma variedade diferenciável. A função $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ é estrutura de Finsler se*

- 1 (regularidade) F é C^∞ em $TM \setminus 0$
- 2 (homogeneidade positiva) $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$ para quaisquer $\lambda > 0$ e $(x, y) \in TM$
- 3 (convexidade forte) Em um sistema de coordenadas, $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_x M$ a matriz Hessiana

$n \times n$

$$g_{ij}(x, y) = \left[\frac{1}{2} F^2 \right]_{y^i y^j}$$

é positiva definida em $TM \setminus 0$.

Uma variedade M com uma estrutura de Finsler é chamada de variedade de Finsler ou espaço de Finsler e será denotado por (M, F) .

A matriz $g_{ij}(x, y)$ da definição é conhecida como o tensor fundamental e tem um significado geométrico. Como essa matriz depende de $x \in M$ e $y \in T_x M$, para cada ponto

$(x, y) \in TM \setminus 0$ temos um produto interno em T_xM na direção de y dado por

$$g := g_{ij}(x, y) dx^i \otimes dx^j. \quad (2-7)$$

Exemplo 2.19 (*Variedade Riemanniana*) Seja M^n uma variedade C^∞ . Uma métrica Riemanniana em M é uma família $\{\langle \cdot, \cdot \rangle_x, x \in M$ de produto interno em cada espaço T_xM tal que as funções

$$a_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_x$$

são diferenciáveis.

Em um sistema de coordenadas (φ, U) , sejam

$$u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

então

$$\langle u, v \rangle_x = u^i v^j \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_x = a_{ij}(x) u^i v^j.$$

Podemos escrever também na forma

$$\langle u, v \rangle_x = a_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j (u, v).$$

Através do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$, onde $x \in M$, definimos uma estrutura de Finsler F em TM para todo $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_xM$ dada por

$$F(x, y) = \sqrt{\langle y, y \rangle_x} = \sqrt{a_{ij}(x) y^i y^j}.$$

A função F é de fato uma estrutura de Finsler pois, para todo $\lambda > 0$ tem-se

$$F(x, \lambda y) = \sqrt{\langle \lambda y, \lambda y \rangle_x} = \sqrt{\lambda^2 \langle y, y \rangle_x} = \lambda \sqrt{\langle y, y \rangle_x} = \lambda F(x, y).$$

Além disso, a matriz

$$g_{ij}(x, y) = \left[\frac{1}{2} F^2 \right]_{y^i y^j} = \left[\frac{1}{2} a_{ij}(x) y^i y^j \right]_{y^i y^j} = a_{ij}(x)$$

é positiva definida. Observe que a matriz não depende de $y \in T_xM$, o produto interno depende apenas do ponto $x \in M$.

De maneira mais geral, como no Exemplo 2.19 quando temos uma família de produtos interno $g_{ij}(x, y)$ em cada espaço tangente T_xM , dependendo diferencialmente de x e um vetor não nulo $y \in T_xM$, invariante pela aplicação $y \mapsto \lambda y$, para $\lambda > 0$ e tal que

$(g_{ij})_{y^k}$ é totalmente simétrica em i, j e k podemos definir uma estrutura de Finsler dada por

$$F(x, y) := \sqrt{g_{pq}(x, y)y^p y^q}.$$

Exemplo 2.20 Seja $M = \mathbb{R}^4$ e para $a > 0$ definimos uma métrica $g_a = g_{ij}(x)y^i y^j$ em M dada por

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} B - A(x^2)^2 & Ax^1 x^2 & -Ax^2 x^4 & Ax^2 x^3 \\ Ax^1 x^2 & B - A(x^1)^2 & Ax^1 x^4 & -Ax^1 x^3 \\ -Ax^2 x^4 & Ax^1 x^4 & B - A(x^4)^2 & Ax^3 x^4 \\ Ax^2 x^3 & -Ax^1 x^3 & Ax^3 x^4 & B - A(x^3)^2 \end{pmatrix}, \quad (2-8)$$

onde

$$B = B(x) = a|x|^2 + 1 \quad A = A(x) = a \left(1 + \frac{1}{B}\right).$$

A métrica g_a é uma métrica Riemanniana chamada *métrica de Hawking Taub-NUT*. Observe que se $a = 0$ a matriz da métrica g_0 é a matriz identidade.

Exemplo 2.21 (*Espaço de Randers*) Seja M^n uma variedade n dimensional, um espaço de Randers é uma estrutura de Finsler F em TM da forma

$$F(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y),$$

onde

$$\alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j},$$

$$\beta(x, y) = b_i(x)y^i.$$

Os elementos $a_{ij}(x)$ são as componentes da métrica Riemanniana α e $b_i(x)$ as componentes da 1-forma β nas quais estão definidas em M . Se $\beta(x, y) = 0$ temos que F é uma métrica Riemanniana. Sendo $\beta(x, y)$ linear em y , não é possível obter um sinal fixo. Assim para que F seja positiva em $TM \setminus 0$ as componentes $b_i(x)$ devem ser controladas, então uma condição suficiente para que $F(x, y) > 0$ é que a norma dual com respeito à α seja

$$\|\beta\|_{\alpha}^* = \sqrt{a^{ij}b_i b_j} < 1,$$

onde a matriz $(a^{ij}) = (a_{ij})^{-1}$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\pm\beta \leq |\beta| = |b_i y^i| \leq \|b\| \|y\| < 1 \cdot \sqrt{a_{ij}y^i y^j} = \alpha.$$

Portanto, as condições da Definição 2.18 são satisfeitas. Vamos agora determinar os elementos da matriz

$$g_{ij} = \left[\frac{1}{2} F^2 \right]_{y^i y^j} = [F F_{y^i}]_{y^j} = F F_{y^i y^j} + F_{y^i} F_{y^j},$$

$$F(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x) y^i y^j} + b_i(x) y^i,$$

então

$$F_{y^i} = \frac{a_{ij} y^j}{\sqrt{a_{ij} y^i y^j}} + b_i = \frac{a_{ij} y^j}{\alpha} + b_i \quad (2-9)$$

Derivando 2 – 9 em relação a y^j obtemos

$$F_{y^i y^j} = \frac{a_{ij} \alpha - a_{ij} y^j [\alpha]_{y^j}}{\alpha^2} = \frac{a_{ij} \alpha^2 - a_{ij} y^j \cdot a_{ij} y^i}{\alpha^3},$$

e conseqüentemente

$$F F_{y^i y^j} = \frac{F}{\alpha} \left\{ a_{ij} - \frac{a_{ij} y^j \cdot a_{ij} y^i}{\alpha^2} \right\}.$$

Portanto,

$$g_{ij} = \frac{F}{\alpha} \left(a_{ij} - \frac{a_{ij} y^i a_{ij} y^j}{\alpha} \right) + \left(\frac{a_{ij} y^i}{\alpha} + b_i \right) \left(\frac{a_{ij} y^j}{\alpha} + b_j \right). \quad (2-10)$$

No caso em que $\alpha(x, y)$ é Euclidiana obtemos

$$g_{ij} = \frac{F}{\alpha} \left(a_{ij} - \frac{y^i y^j}{\alpha} \right) + \left(\frac{y^i}{\alpha} + b_i \right) \left(\frac{y^j}{\alpha} + b_j \right), \quad (2-11)$$

Exemplo 2.22 Seja $M = \mathbb{R}^2$ e considere $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$ e $C = (1, 0)$ no espaço de Randers especial no qual α é a métrica Euclidiana, e β tem componentes b_k constantes, $b_1 = 1/2$ e $b_2 = 0$ e

$$F(x, y) = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} + \frac{1}{2} \cdot y_1 + 0 \cdot y_2,$$

onde $x = (x_1, x_2) \in M = \mathbb{R}^2$ e $y = (y_1, y_2)$ é o vetor tangente à M em x . Vamos calcular o comprimento dos lados do triângulo ABC .

Primeiramente observe que

$$\|\beta\|_{\alpha}^* = \sqrt{a^{ij} b_i b_j} = \frac{1}{2} < 1.$$

Parametrizando o lado AB , $x(t) = (0, t)$, onde $t \in [0, 1]$ logo $y(t) = (y_1, y_2) = (0, 1)$. Segue

que

$$F(x(t), y(t)) = \sqrt{0^2 + 1^2} + \frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 1,$$

então o comprimento é dado por

$$\int_0^1 F(t) dt = \int_0^1 dt = 1.$$

Para o segmento AC fazemos $x(t) = (t, 0), t \in [0, 1]$, então $y(t) = (1, 0)$ e

$$F(t) = F(x(t), y(t)) = \frac{3}{2},$$

assim o comprimento é

$$\int_0^1 F(t) dt = \int_0^1 \frac{3}{2} dt = \frac{3}{2}.$$

Agora, parametrizamos o segmento CB por $x(t) = (1-t, t), t \in [0, 1]$, então $y(t) = (-1, 1)$ e segue que

$$\int_0^1 F(t) dt = \int_0^1 \sqrt{2} - \frac{1}{2} dt = \sqrt{2} - \frac{1}{2}.$$

Pelo Teorema de Euler podemos observar que sendo $g_{ij}(x, y) = [\frac{1}{2}F^2]_{y^i y^j}$, então

$$F^2(x, y) = g_{ij}(x, y)y^i y^j,$$

e a convexidade forte implica que F deve ser positiva para todo $y \neq 0$. A recíproca, entretanto, é falsa, a positividade de F não implica na convexidade forte.

Exemplo 2.23 *Seja*

$$F(x^1, x^2, y^1, y^2) = ((y^1)^2 + (y^2)^2)^{1/4}.$$

Temos que $F(x, y) > 0$ para todo $y \neq 0$, portanto para $y = (0, y^2)$ teremos

$$g_{ij}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

na qual não é positiva definida.

Além disso, concluímos também da expressão (2-7) que $F(x, y)^2 = g(y, y)$, isto é, a norma de Finsler do vetor $y \in T_x M$.

2.4 Problema Navegacional de Zermelo

Em 1931 Zermelo estudou o seguinte problema. *Suponha que um navio navega sobre o mar e um vento se aproxima. Como o capitão deve conduzir este navio, a fim de chegar a um determinado destino no menor tempo possível ?*

Este problema foi resolvido por Zermelo para o caso em que esse mar é um plano Euclidiano e D. Bao, C. Robles e Z. Shen no caso em que o mar é uma variedade Riemanniana (M, g) sob a hipótese em que o vento W é um brisa leve, isto é, $g(W, W) < 1$ e não depende do tempo. Neste caso em que a brisa W não depende do tempo, eles descobriram que o caminho minimizando o tempo de viagem são exatamente geodésicas de uma métrica de Randers. O Problema Navegacional de Zermelo é um método eficiente de estudar métricas de Randers com certas propriedades geométricas.

Considere uma variedade diferenciável M com uma métrica Riemanniana $g = g_{ij}(x)y^i y^j$. Suponhamos que o navio deve se mover de um ponto $p \in M$ para outro ponto $q \in M$ através de uma força interna (motor) V_x , e existe uma outra força externa (brisa) dada por um campo de vetores $W = W^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ em $T_x M$ tal que $g(W_x, W_x) = \|W\|_x < 1$. O problema consiste em determinar uma curva na qual o navio leva o menor tempo para se deslocar de um ponto a outro. Vamos considerar que

$$\|V\|_x = \|T - W\|_x = 1. \quad (2-12)$$

Assim, o navio deve fazer uma trajetória através da força resultante

$$T_x = V_x + W_x.$$

Devemos então controlar esta resultante multiplicando-a por um escalar F e assim obtendo uma nova resultante

$$y = F \cdot T_x.$$

Substituindo em (2 – 12) obtemos

$$\left\| \frac{y}{F} - W \right\|_x = 1$$

o que nos dá $\|y - F \cdot W\|_x = F$, o que é equivalente a resolver a equação

$$F(x, y) = \sqrt{g(x, y - F(x, y)W_x)}. \quad (2-13)$$

Para resolver a equação (2 – 13) podemos reescrevê-la na forma

$$F^2 = \langle y - FW, y - FW \rangle_x.$$

Assim, obtemos uma equação de segundo grau em F dada por

$$aF^2 + bF + c = 0,$$

onde

$$a = 1 - \langle W, W \rangle, \quad b = 2\langle y, W \rangle, \quad c = -\langle y, y \rangle.$$

Temos então que

$$F = \frac{-\langle y, W \rangle + \sqrt{\langle y, W \rangle^2 - \langle W, W \rangle \langle y, y \rangle + \langle y, y \rangle}}{1 - \langle W, W \rangle}.$$

Fazemos $F = \alpha + \beta$ onde

$$\alpha = \frac{\sqrt{\langle y, W \rangle^2 - \langle W, W \rangle \langle y, y \rangle + \langle y, y \rangle}}{1 - \langle W, W \rangle}, \quad \beta = \frac{-\langle y, W \rangle}{1 - \langle W, W \rangle}.$$

Desta forma,

$$\alpha(x, y) = \frac{\sqrt{(g_{ij}y^iW^j)^2 - g_{ij}W^iW^jg_{ij}y^iy^j + g_{ij}y^iy^j}}{1 - g_{ij}W^iW^j}.$$

Sejam $W_i = g_{ij}(x, y)W^j$ e $\lambda = 1 - W_iW^i$, então

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\sqrt{(W_iy^i)^2 + g_{ij}\lambda y^iy^j}}{\lambda} \\ &= \sqrt{\frac{W_iW_j}{\lambda^2}y^iy^j + \frac{g_{ij}}{\lambda}y^iy^j}, \end{aligned}$$

temos também que

$$\beta(x, y) = \frac{-\langle y, W \rangle}{1 - \langle W, W \rangle} = -\frac{W_i}{\lambda}y^i.$$

Assim, obtemos $\alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ e $\beta(x, y) = b_i(x)y^i$, onde

$$a_{ij} = \frac{g_{ij}}{\lambda} + \frac{W_iW_j}{\lambda^2}, \quad b_j = -\frac{W_j}{\lambda}, \quad (2-14)$$

e $W_i = g_{ij}W^j$ e $\lambda = 1 - W_iW^i$. Observe que usando $a^{ij} = \lambda(g^{ij} - W^iW^j)$ e $b^i = -\lambda W^i$, temos que

$$\|\beta\|_{\alpha}^* = \sqrt{a^{ij}b_ib_j} = g_{ij}W^iW^j = \|W\| < 1. \quad (2-15)$$

Portanto, $F = \alpha + \beta$ é uma métrica de Randers. Observamos que na ausência da brisa, isto é, quando $W = 0$ temos que F coincide com a métrica Riemanniana g .

Spray e Geodésicas

Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem homogêneo num conjunto aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ dado por

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0, \quad (3-1)$$

onde G^i 's satisfazem

$$G^i(x, \lambda y) = \lambda^2 G^i(x, y), \quad \lambda > 0. \quad (3-2)$$

Observe que pela homogeneidade de $G^i(x, y)$, qualquer solução $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ da equação (3-1) tem a seguinte propriedade: para todo $\lambda > 0$, $\tilde{x}(t) = x(\lambda t)$ é também uma solução da equação (3-1).

Seja G um campo de vetores em $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$ dado por

$$G(x, y) = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i},$$

onde (x^i, y^i) é um sistema de coordenadas em $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$. O campo G é chamado *spray* em \mathcal{U} .

Uma curva $x(t)$ é solução da equação (3-1) se, e somente se, o seu levantamento

$$\bar{x}(t) = \left(x(t), \frac{dx}{dt}(t) \right)$$

é uma curva integral de G em $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$.

Quando tivermos uma métrica de Finsler F definida em U , e até mesmo em uma variedade M como será visto mais adiante, o sistema de equações diferenciais de segunda ordem (3-1) é obtido do problema variacional de minimizar comprimento de curvas e também obtemos uma fórmula explícita para os coeficientes geodésicos.

Seja U aberto em \mathbb{R}^n . Considere a função $L = L(x, y)$ em $U \times \mathbb{R}^n$ satisfazendo:

- i) L é C^∞ em $U \times \{\mathbb{R}^n \setminus 0\}$
 ii) L é homogênea de grau 2, isto é

$$L(x, \lambda y) = \lambda^2 L(x, y), \quad \lambda > 0$$

- iii) Para todo $y \neq 0$, a matriz

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} L_{y^i y^j}$$

é não degenerada.

Por definição L é uma métrica de Finsler em U e podemos observar que $L(x, y) = F^2(x, y)$.

Considere $x(t)$ uma curva diferenciável em U que satisfaz o seguinte problema variacional

$$E(x) = \int L(x(t), x'(t)) dt = \text{extremo},$$

isto é, a curva $x(t)$ é um ponto crítico do potencial energia.

Utilizando a equação de Euler-Lagrange obtemos o sistema

$$L_{x^i} - \frac{d}{dt} [L_{y^i}] = 0 \quad (3-3)$$

Observe que:

$$\frac{d}{dt} [L_{y^i}] = L_{y^i x^k} \cdot y^k + L_{y^i y^j} \frac{d^2 x^j}{dt^2} = L_{y^i x^k} y^k + 2g_{ij} \frac{d^2 x^j}{dt^2}.$$

A equação (3-3) fica

$$L_{x^i} - L_{y^i x^k} y^k - 2g_{ij} \frac{d^2 x^j}{dt^2} = 0. \quad (3-4)$$

Seja $[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}$, colocando $-2g_{ij}$ em evidência na equação (3-4) temos que

$$-2g_{ij} \left\{ -\frac{1}{2} g^{ij} L_{x^i} + \frac{1}{2} g^{ij} L_{y^i x^k} y^k + \frac{d^2 x^j}{dt^2} \right\} = 0.$$

Fazendo

$$2G^j = \frac{g^{jl}}{2} \left\{ L_{y^l x^k} y^k - L_{x^l} \right\}, \quad (3-5)$$

obtemos

$$-2g_{ij} \left\{ 2G^j + \frac{d^2 x^j}{dt^2} \right\} = 0.$$

Concluimos então que a curva $x(t)$ satisfaz o sistema

$$2G^j + \frac{d^2x^j}{dt^2} = 0,$$

e por (3–5) os coeficientes G^j 's são dados explicitamente por

$$G^j = \frac{g^{jl}}{4} \left\{ L_{y^l x^k} y^k - L_{x^l} \right\},$$

ou

$$G^j = \frac{1}{4} g^{jl} \{ [F^2]_{y^l x^k} y^k - [F^2]_{x^l} \}.$$

Exemplo 3.1 Se $F(x, y) = \sqrt{g_{ij}(x)y^i y^j}$ é uma métrica Riemanniana a expressão dos coeficientes geodésicos é dada por

$$G^i(x, y) = \frac{1}{4} g^{il}(x) \left\{ 2 \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(x) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(x) \right\} y^j y^k,$$

onde $(g^{ij}(x)) := (g_{ij}(x))^{-1}$.

Consideramos o caso em que a dimensão é 2 e então escrevemos

$$F^2(x, y) = g_{11}(x)y^1 y^1 + 2g_{12}(x)y^1 y^2 + g_{22}(x)y^2 y^2.$$

Temos que

$$[F^2]_{x^1}(x, y) = \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}(x)y^1 y^1 + 2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}(x)y^1 y^2 + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}(x)y^2 y^2$$

$$[F^2]_{x^2}(x, y) = \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}(x)y^1 y^1 + 2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}(x)y^1 y^2 + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}(x)y^2 y^2$$

$$[F^2]_{x^1 y^1}(x, y) = 2\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}(x)y^1 + 2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}(x)y^2 \quad [F^2]_{x^1 y^2}(x, y) = 2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}(x)y^1 + 2\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}(x)y^2$$

$$[F^2]_{x^2 y^1}(x, y) = 2\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}(x)y^1 + 2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}(x)y^2 \quad [F^2]_{x^2 y^2}(x, y) = 2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}(x)y^1 + 2\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}(x)y^2.$$

Sendo

$$G^i(x, y) = \frac{1}{4} g^{i1} \{ [F^2]_{x^1 y^1} y^1 + [F^2]_{x^2 y^1} y^2 - [F^2]_{x^1} \} + \frac{1}{4} g^{i2} \{ [F^2]_{x^1 y^2} y^1 + [F^2]_{x^2 y^2} y^2 - [F^2]_{x^2} \},$$

então

$$\begin{aligned}
G^i(x, y) = & \frac{1}{4}g^{i1} \left\{ 2\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}(x)y^1y^1 + 2\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}(x)y^1y^2 + 2\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}(x)y^1y^2 + 2\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}(x)y^2y^2 \right. \\
& \left. - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}(x)y^1y^1 - 2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}(x)y^1y^2 - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}(x)y^2y^2 \right\} \\
& + \frac{1}{4}g^{i2} \left\{ 2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}(x)y^1y^1 + 2\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}(x)y^1y^2 + 2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}(x)y^1y^2 + 2\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}(x)y^2y^2 \right. \\
& \left. - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}(x)y^1y^1 - 2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}(x)y^1y^2 - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}(x)y^2y^2 \right\}. \tag{3-6}
\end{aligned}$$

Assim, a expressão dos coeficientes geodésicos em termos das derivadas parciais dos elementos $g_{ij}(x)$ é dada por

$$G^i(x, y) = \frac{1}{4}g^{il}(x) \left\{ 2\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(x) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(x) \right\} y^j y^k.$$

Note que da expressão (3–6) temos

$$\frac{\partial^2 G^i}{\partial y^1 \partial y^2} = \frac{1}{2}g^{i1} \left\{ \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}(x) + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}(x) - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}(x) \right\} + \frac{1}{2}g^{i2} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}(x) + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}(x) - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}(x) \right\}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 G^i}{\partial y^1 \partial y^2} = \frac{1}{2}g^{il} \left\{ \frac{\partial g_{2l}}{\partial x^1}(x) + \frac{\partial g_{1l}}{\partial x^2}(x) - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^l}(x) \right\} = \Gamma_{12}^i(x).$$

Assim, os coeficientes geodésicos de uma métrica Riemanniana estão relacionados com os símbolos de Christoffel pela expressão

$$G^i(x, y) = \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^i(x)y^j y^k. \tag{3-7}$$

Se os coeficientes geodésicos de uma métrica de Finsler são expressos por (3–7), isto é, são quadráticos em $y \in T_x M$, dizemos então que é uma métrica de Berwald.

Agora vamos estender a noção de *spray* para variedades.

Definição 3.2 *Seja M^n uma variedade de dimensão n . Um *spray* em M é um campo de vetores G em $TM \setminus \{0\}$ que num sistema de coordenadas locais (x^i, y^i) em TM é dado por*

$$G(x, y) = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i},$$

onde $G^i(x, y)$ são funções locais em TM que satisfazem

$$G^i(x, \lambda y) = \lambda^2 G^i(x, y), \quad \lambda > 0.$$

A curva $c(t) = (x^i(t), y^i(t))$ em $TM \setminus 0$ é uma curva integral de G se

$$\dot{c}(t) = G(x(t), y(t)).$$

Escrevendo $G(x, y) = (y^i, -2G^i(x, y))$, teremos que as coordenadas da curva integral $c(t)$ satisfazem

$$\dot{x}^i(t) = y^i(t) \quad \dot{y}^i(t) + 2G^i(x(t), y(t)) = 0. \quad (3-8)$$

Seja $\gamma(t) = (\pi \circ c)(t) = (x^i(t))$, onde π é a projeção $\pi : TM \setminus 0 \rightarrow M$, obtemos de (3-8) que suas coordenadas satisfazem os sistema

$$\ddot{x}^i(t) + 2G^i(x(t), \dot{x}(t)) = 0. \quad (3-9)$$

Reciprocamente se tivermos uma $\gamma = \gamma(t)$ em M satisfazendo (3-9), então o seu levantamento canônico é uma curva integral de G .

Definição 3.3 Uma curva regular γ em M é uma geodésica de G se é a projeção de uma curva integral de G em $TM \setminus 0$.

Exemplo 3.4 Considere o seguinte spray em \mathbb{R}^3

$$G = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} - 2(xu^2 + zw^2) \frac{\partial}{\partial v}.$$

Uma curva $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é uma geodésica de G se satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -2x \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - 2z \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= 0. \end{aligned}$$

Obtemos

$$c(t) = (a + ut, b + vt + \varphi(t), c + wt)$$

onde

$$\varphi(t) = -\frac{1}{3}(u^3 + w^3)t^3 - (au^2 - cw^2)t^2.$$

Exemplo 3.5 Considere o seguinte spray em \mathbb{R}^2

$$G = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} - \frac{v}{r} \sqrt{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{u}{r} \sqrt{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial v}$$

onde $r > 0$.

A geodésica $c(t) = (x(t), y(t))$ de G satisfaz

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{r} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \frac{dy}{dt} &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{r} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \frac{dx}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

Integrando obtemos

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda \sin\left(\frac{\lambda}{r}t + \theta\right), \quad \frac{dy}{dt} = -\lambda \cos\left(\frac{\lambda}{r}t + \theta\right),$$

onde $\lambda > 0$.

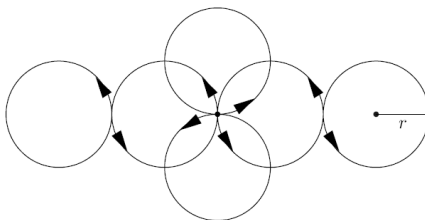


Figura 3.1

Integrando $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ tem-se

$$\begin{aligned}x(t) &= r \cos\left(\frac{\lambda}{r}t + \theta\right) - r \cos \theta + x(0), \\ y(t) &= r \sin\left(\frac{\lambda}{r}t + \theta\right) - r \sin \theta + y(0).\end{aligned}$$

Assim as geodésicas de G são círculos de raio r como na figura 3.1.

Um spray G em uma variedade M determina as suas geodésicas. Reciprocamente uma coleção de curvas parametrizadas com certas propriedades induz um spray.

Seja \mathcal{G} uma coleção de curvas parametrizadas $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ de classe C^∞ , com as seguintes propriedades

- (i) (existência) Para todo vetor $y \in T_x M$ e qualquer t_0 , existe uma curva $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ em \mathcal{G} com $t_0 \in (a, b)$ e $\gamma'(t_0) = y$;
- (ii) Para quaisquer curvas $\gamma(t), a < t < b$ e $\sigma(t), c < t < d$, se em algum $t_0 \in (a, b)$ e $t_1 \in (c, d)$, $\gamma'(t_0) = \sigma'(t_1)$, então

$$\gamma(t_0 + t) = \sigma(t_1 + t), \quad t \in (a - t_0, b - t_0) \cap (c - t_1, d - t_1)$$

(iii) (invariância) Para qualquer curva $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ em \mathcal{G} e qualquer $t_0 \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ a curva

$$\tilde{\gamma}(t) := \gamma(\lambda t + t_0), \quad \frac{a-t_0}{\lambda} < t < \frac{b-t_0}{\lambda}$$

está ainda em \mathcal{G} .

O par (M, \mathcal{G}) é chamado espaço de caminhos.

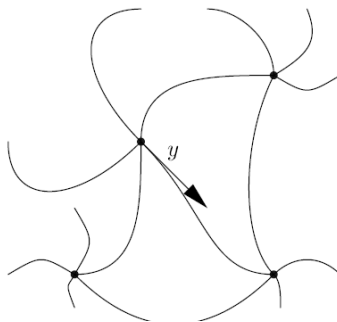


Figura 3.2: Caminhos.

Para um vetor $y \in T_x M$, seja $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ uma curva em \mathcal{G} com $\gamma'(0) = y$.

Defina

$$G^i(y) := -\frac{1}{2} \frac{d^2 \gamma^i}{dt^2}(0), \quad (3-10)$$

onde $(\gamma^i(t))$ são as coordenadas locais da curva $\gamma(t)$. De (iii) temos que para todo $\lambda > 0$ a curva $\sigma(t) = \gamma(\lambda t) \in \mathcal{G}$. Assim, $\sigma'(0) = \lambda y$ portanto

$$G^i(\lambda y) = -\frac{1}{2} \frac{d^2 \sigma^i}{dt^2}(0) = -\frac{1}{2} \lambda^2 \frac{d^2 \gamma^i}{dt^2}(0) = \lambda^2 G^i(y).$$

Qualquer curva $c : (a, b) \rightarrow M$ em \mathcal{G} satisfaz o sistema

$$\frac{d^2 c^i}{dt^2} + 2G^i\left(\frac{dc}{dt}\right) = 0 \quad (3-11)$$

Para provar (3-11), fixamos um número $t \in (a, b)$ e definimos

$$\gamma(s) := c(s+t), \quad a-t < s < b-t.$$

Por hipótese, $\gamma \in \mathcal{G}$ com

$$\frac{d\gamma}{ds}(0) = \frac{dc}{dt}(t).$$

Temos que

$$\frac{d^2 \gamma^i}{ds^2}(0) = \frac{d^2 c^i}{dt^2}(t).$$

Pela definição de G^i em (3–10), obtemos

$$G^i \left(\frac{dc}{dt}(t) \right) = G^i \left(\frac{d\gamma}{ds}(0) \right) = -\frac{1}{2} \frac{d^2\gamma^i}{ds^2}(0) = -\frac{1}{2} \frac{d^2c^i}{dt^2}(t).$$

Isto prova (3–11). Portanto

$$G := y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i},$$

é um spray em M tal que o conjunto de geodésicas de G é \mathcal{G} .

Definição 3.6 *Uma métrica de Finsler F em um aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ é dita projetivamente flat se todas as geodésicas são segmentos de retas em \mathcal{U} .*

Podemos observar da expressão (3–9) que uma métrica de Finsler é localmente projetivamente flat se os coeficientes de spray são todos nulos.

Teorema 3.7 *Uma métrica Riemanniana é projetivamente flat se, e somente se, tem curvatura seccional constante.*

Curvatura Riemanniana

Curvatura Riemanniana é um conceito central em geometria e foi introduzido primeiramente por Riemann em 1854 para métricas Riemannianas. Desde então, a geometria Riemanniana se tornou um dos ramos mais importantes da matemática moderna. Em 1926, L. Berwald estendeu o conceito de curvatura Riemanniana para métricas de Finsler.

4.1 Curvatura Riemanniana em espaços de Finsler

A curvatura Riemanniana de um espaço de Finsler é uma família de transformações em espaços tangentes. Pode ser definida através de variações de geodésicas. Esta aproximação é diferente da aproximação de Riemann e Berwald. Vamos primeiramente estender a noção de derivada direcional de campos de vetores em espaços de Finsler.

Seja (M, F) um espaço de Finsler. Em cada ponto $x \in M$, defina a aplicação

$$D : T_x M \times C^\infty(TM) \rightarrow T_x M$$

por

$$D_y U = \{dU^i(y) + U^j(x)N_j^i(y)\} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x,$$

onde $y \in T_x M$ e $U \in C^\infty(TM)$ e $N_j^i(y)$ são funções em TM definidas por

$$N_j^i(y) = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}(y).$$

Observação: Aqui as funções N_j^i dependem de x também.

Dizemos que $D_y U(x)$ é a derivada covariante de U em x na direção de y . A aplicação D tem as seguintes propriedades:

- (a) $D_y(U + V) = D_yU + D_yV$;
 (b) $D_y(fU) = df_x(y)U + f(x)D_yU$;
 (c) $D_{\lambda y}U = \lambda D_yU$, $\lambda > 0$.

Além disso, $D_yU(x) = 0$ para $y = 0$. A família $D = \{D_y\}_{y \in T_xM}$ é chamada conexão de F . Se D é linear isto é

(d) $D_{y+v}U = D_yU + D_vU$,

então D é chamada uma conexão afim em M .

Considere agora uma geodésica $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$. Uma aplicação de classe C^∞ , $H : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ é chamada uma *variação geodésica* se

$$H(0, t) = \gamma(t),$$

e para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a curva

$$\gamma_s(t) = H(s, t)$$

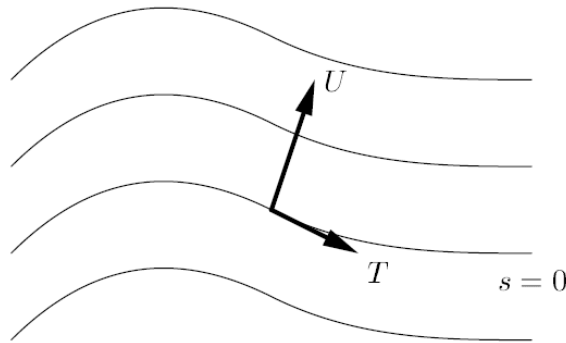
é uma geodésica.

Consideremos agora o campo variacional $\frac{\partial H}{\partial s}(s, t)$. Sendo para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $\gamma_s(t) = H(s, t)$ uma geodésica temos que

$$\frac{\partial^2 H^i}{\partial t^2} + 2G^i\left(H, \frac{\partial H}{\partial t}\right) = 0. \quad (4-1)$$

Sejam

$$T = T^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad U = U^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial H}{\partial s}.$$



A equação (4-1) fica

$$\frac{\partial T^i}{\partial t} + 2G^i(T) = 0. \quad (4-2)$$

Note que

$$\frac{\partial T^i}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial H^i}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H^i}{\partial s} \right) = \frac{\partial U^i}{\partial t}.$$

Derivando a equação (4-2) com em relação a s

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial T^i}{\partial t} + 2G^i(T) \right) = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial T^i}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial s} G^i(T) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T^i}{\partial s} + 2 \frac{\partial}{\partial s} G^i(T) = 0.$$

Observe que

$$\frac{\partial}{\partial s} [G^i(T)] = U^k \frac{\partial G^i}{\partial x^k}(T) + \frac{\partial U^j}{\partial t} \frac{\partial G^i}{\partial y^j}, \quad (4-3)$$

então

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial T^i}{\partial t} + 2G^i(T) \right) = \frac{\partial^2 U^i}{\partial t^2} + 2U^k \frac{\partial G^i}{\partial x^k}(T) + 2 \frac{\partial U^j}{\partial t} \frac{\partial G^i}{\partial y^j}(T) = 0,$$

de onde obtemos

$$\frac{\partial^2 U^i}{\partial t^2} = -2U^k \frac{\partial G^i}{\partial x^k}(T) - 2 \frac{\partial U^j}{\partial t} \frac{\partial G^i}{\partial y^j}(T). \quad (4-4)$$

Note também que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial G^i}{\partial y^j}(T) \right] &= T^k \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^k \partial y^j}(T) + \frac{\partial T^k}{\partial t} \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k}(T) \\ &= T^k \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^k \partial y^j}(T) - 2G^k(T) \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k}(T). \end{aligned} \quad (4-5)$$

Por outro lado, temos que

$$D_T D_T U = D_T \left[\left(\frac{\partial U^i}{\partial t} + U^j \frac{\partial G^i}{\partial y^j}(T) \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \right]. \quad (4-6)$$

Considere $D_T U = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, onde

$$V^i = \frac{\partial U^i}{\partial t} + U^j \frac{\partial G^i}{\partial y^j}(T).$$

Desta forma,

$$D_T D_T U = D_T V = \left[\left(\frac{\partial V^i}{\partial t} + V^j \frac{\partial G^i}{\partial y^j}(T) \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \right]. \quad (4-7)$$

Temos que

$$\frac{\partial V^i}{\partial t} = \frac{\partial^2 U^i}{\partial t^2} + \frac{\partial U^j}{\partial t} \frac{\partial G^i}{\partial y^j}(T) + U^j \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial G^i}{\partial y^j}(T) \right].$$

Substituindo as expressões (4-4) e (4-5) na última igualdade obtemos

$$\frac{\partial V^i}{\partial t} = -2U^k \frac{\partial G^i}{\partial x^k} - \frac{\partial U^j}{\partial t} \frac{\partial G^i}{\partial y^j} + U^j T^k \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^k \partial y^j} - 2U^j G^k \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k}. \quad (4-8)$$

Da expressão (4-7) temos que

$$\begin{aligned} D_T D_T U &= -U^k \left\{ 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^k} - T^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{\partial G^j}{\partial y^k} \right\} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= -U^k R_k^i(T) \frac{\partial}{\partial x^i}, \end{aligned}$$

onde

$$R_k^i(T) = 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^k} - T^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{\partial G^j}{\partial y^k}. \quad (4-9)$$

Para todo $y \in T_x M \setminus 0$, defina a transformação linear $R_y : T_x M \rightarrow T_x M$ por

$$R_y(v) = R_k^i(y) v^k \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x, \quad v = v^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Obtemos

$$D_T D_T U + R_T(U) = 0.$$

Restringindo a equação acima à curva γ obtemos uma equação para $J(t) = U(0, t)$,

$$D_\gamma D_\gamma J + R_\gamma(J) = 0.$$

A família de transformações

$$R = \{R_y : T_x M \rightarrow T_x M; y \in T_x M \setminus 0, x \in M\}$$

é chamada de *Curvatura Riemanniana*.

4.2 Curvatura flag

Seja $P \subset T_x M$ um subespaço de dimensão 2. Para cada vetor $y \in P \setminus 0$, definimos a *curvatura flag* em $T_x M$ por

$$K(P, y) = \frac{g(R_y(u), u)}{g(y, y)g(u, u) - g(y, u)^2},$$

onde $u \in P$ tal que os vetores y, u geram o subespaço P e g é o produto interno de Finsler na direção de y dado por $g(v, w) = g_{ij}(x, y) dx^i \otimes dx^j$, $v, w \in T_x M$.

A curvatura Flag é uma extensão natural da curvatura seccional de variedades Riemannianas para variedades de Finsler. O Teorema de Beltrami garante que uma métrica Riemanniana é projetivamente flat se, e somente se, tem curvatura seccional constante. Por outro lado, existem métricas de Finsler com curvatura flag constante nas quais não são projetivamente flat.

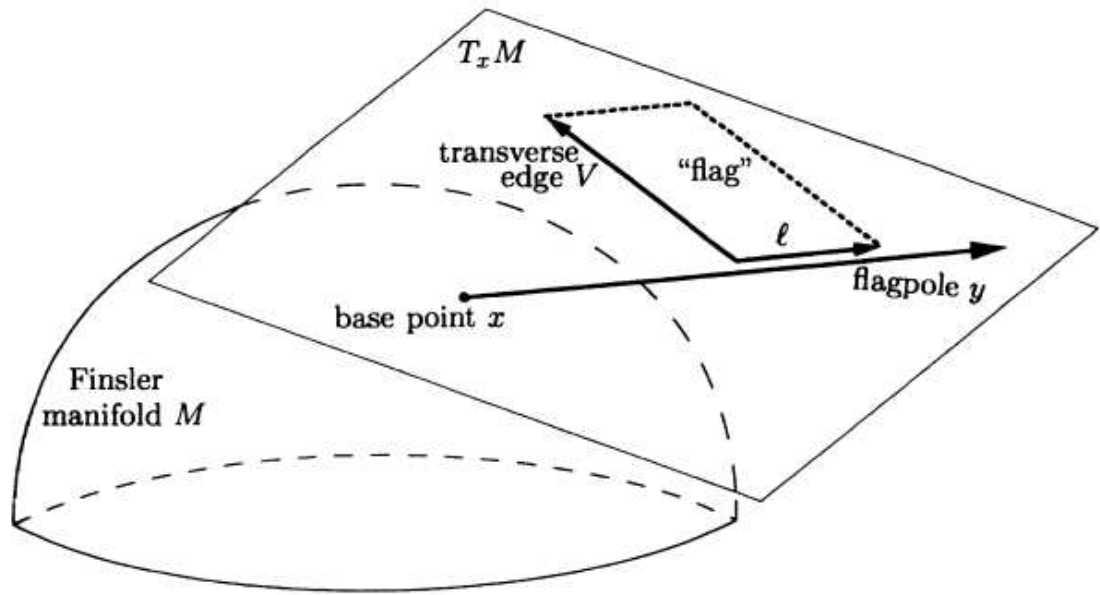


Figura 4.1: *curvatura flag*

Usando as transformações R_k^i obtidas em (4–9) definimos também uma função escalar $\text{Ric} : TM \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$ de homogeneidade $\text{Ric}(\lambda y) = \lambda^2 \text{Ric}(y)$ dada por

$$\text{Ric}(y) = \sum_{i=1}^n R_i^i(y).$$

Uma métrica de Finsler F em uma variedade n -dimensional é chamada de *métrica do tipo Einstein* se existe uma função escalar $K = K(x)$ em M tal que

$$\text{Ric} = (n-1)KF^2.$$

O próximo teorema apresenta uma classificação de métricas de Randers do tipo Einstein em termos do Problema Navegacional de Zermelo, [7].

Teorema 4.1 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $F = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j} + b_i(x)y^i$ a métrica de Randers obtida como solução do problema navegacional de Zermelo expressa em (2–14). Então (M, F) é Einstein com Ricci escalar $\text{Ric}(x) := (n-1)K(x)$ se, e somente se,*

i) *o campo de vetores W é uma homotetia infinitesimal, isto é, satisfaz a equação de Lie dada por*

$$W_{i;j} + W_{j;i} = -\sigma g_{ij}$$

ii) *a métrica Riemanniana g é de Einstein com Ricci escalar $(n-1)(K + \frac{1}{16}\sigma^2)$.*

Prova. Ver [7]. □

A expressão do item i) é chamada equação de Lie porque $W_{i;j} + W_{j;i}$ é a derivada de Lie de g na direção de W .

Uma consequência do Teorema 4.1 é que o Ricci escalar da métrica de Einstein F e g coincidem quando o campo W é de Killing [7]. As métricas de Randers com curvatura flag constante também foram classificadas por D. Bao, C. Robles e Z. Shen.

Teorema 4.2 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $F = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j} + b_i(x)y^i$ a métrica de Randers obtida do problema navegacional de Zermelo expressa em (2–14). Então F tem curvatura flag constante se, e somente se, g tem curvatura seccional constante e o campo W é uma homotetia infinitesimal.*

Prova. Ver [9]. □

Métrica de Einstein-Finsler

5.1 Métrica de Hawking Taub-NUT

A métrica de Hawking Taub-NUT surge a partir do estudo da teoria da gravitação. Espaços de Taub-NUT são soluções da equação de campo de Einstein que relaciona a métrica g_{ij} do espaço-tempo num ponto com a energia e pressão naquele ponto de espaço-tempo. A métrica é determinada pelas equações de campo

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = -KT_{ij}, \quad (5-1)$$

onde R_{ij} é o tensor de Ricci, R é a curvatura escalar, T_{ij} é o tensor energia e K é a constante gravitacional de Einstein. As equações (5-1) são equações diferenciais parciais de segunda ordem para g_{ij} e suas soluções envolvem funções no qual são determinadas de dados físicos expressos como valores iniciais ou valores de contorno. A métrica de Taub-NUT foi obtida por Abraham Haskel Taub (1950) e depois em 1963 por E. Newman, L. Tamburino, e T. Unti o que dá origem ao nome Taub-NUT.

Sejam (N^3, h) uma variedade orientada de dimensão 3 com curvatura constante, $M^4 = \mathbb{R} \times N^3$ e $\pi: M^4 \rightarrow N^3$ a projeção da segunda coordenada. Defina uma métrica Riemanniana g em M^4 por

$$g = u\pi^*(h) + u^{-1}(dt + A)^2,$$

onde u é uma função positiva diferenciável e A é uma 1-forma em N^3 . Então (M^4, g) é do tipo Einstein se, e somente se, u e A estão relacionadas pela equação monopólo da física matemática

$$du = - * dA$$

e (N^3, h) é flat, e no caso em que g é Ricci-flat, isto é, g tem curvatura Ricci zero. Para

$a \geq 0$, defina uma função harmônica em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ por

$$u_a(y) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{|y|} + a \right).$$

A construção feita acima nos dá a métrica Riemanniana de Hawking Taub-NUT $g_a (a > 0)$ ou a métrica Euclidiana $g_0 (a = 0)$. Note que a métrica g_a se estende por todo \mathbb{R}^4 , na verdade sua fórmula é dada explicitamente por

$$g_a = (a|x|^2 + 1)g_0 - \frac{a(a|x|^2 + 2)}{a|x|^2 + 1} (-x^2 dx^1 + x^1 dx^2 - x^4 dx^3 + x^3 dx^4)^2. \quad (5-2)$$

O que faremos agora é mostrar que a métrica de Hawking Taub-NUT $g_a = g_{ij}(x)y^i y^j$ em \mathbb{R}^4 não é localmente projetivamente flat. A matriz da métrica g_a é dada por

$$(g_{ij}(x)) = \begin{pmatrix} B - A(x^2)^2 & Ax^1 x^2 & -Ax^2 x^4 & Ax^2 x^3 \\ Ax^1 x^2 & B - A(x^1)^2 & Ax^1 x^4 & -Ax^1 x^3 \\ -Ax^2 x^4 & Ax^1 x^4 & B - A(x^4)^2 & Ax^3 x^4 \\ Ax^2 x^3 & -Ax^1 x^3 & Ax^3 x^4 & B - A(x^3)^2 \end{pmatrix},$$

onde

$$B = B(x) = a|x|^2 + 1 \quad A = A(x) = a \left(1 + \frac{1}{B} \right).$$

É suficiente mostrar que $G^i(x, y) \neq 0$ para algum i e para algum $(x, y) \in T\mathbb{R}^4$. Se $a = 0$ temos a métrica Euclidiana. Suponhamos então que $a \neq 0$ e para $i = 1$ temos

$$\begin{aligned} G^1(x, y) &= \frac{1}{4} g^{11} ([F^2]_{x^k y^1} y^k - [F^2]_{x_1}) + \frac{1}{4} g^{12} ([F^2]_{x^k y^2} y^k - [F^2]_{x_2}) \\ &\quad + \frac{1}{4} g^{13} ([F^2]_{x^k y^3} y^k - [F^2]_{x_3}) + \frac{1}{4} g^{14} ([F^2]_{x^k y^4} y^k - [F^2]_{x_4}). \end{aligned} \quad (5-3)$$

Cálculos

Note que,

$$\begin{aligned} [F^2]_{x^k} &= \frac{\partial g_{11}}{\partial x^k}(x) y^1 y^1 + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^k}(x) y^1 y^2 + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^k}(x) y^1 y^3 + \frac{\partial g_{14}}{\partial x^k}(x) y^1 y^4 + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^k}(x) y^2 y^1 + \dots \\ &\quad + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^k}(x) y^3 y^1 + \dots + \frac{\partial g_{41}}{\partial x^k}(x) y^4 y^1 + \dots + \frac{\partial g_{44}}{\partial x^k}(x) y^4 y^4. \end{aligned}$$

Temos que

$$[F^2]_{x^1y^1} = 2 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}(x)y^1 + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}(x)y^2 + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1}(x)y^3 + \frac{\partial g_{14}}{\partial x^1}(x)y^4 + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}(x)y^2 + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^1}(x)y^3 + \frac{\partial g_{41}}{\partial x^1}(x)y^4.$$

$$[F^2]_{x^2y^1} = 2 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}(x)y^1 + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}(x)y^2 + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^2}(x)y^3 + \frac{\partial g_{14}}{\partial x^2}(x)y^4 + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}(x)y^2 + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^2}(x)y^3 + \frac{\partial g_{41}}{\partial x^2}(x)y^4.$$

$$[F^2]_{x^3y^1} = 2 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}(x)y^1 + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^3}(x)y^2 + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3}(x)y^3 + \frac{\partial g_{14}}{\partial x^3}(x)y^4 + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^3}(x)y^2 + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^3}(x)y^3 + \frac{\partial g_{41}}{\partial x^3}(x)y^4.$$

$$[F^2]_{x^4y^1} = 2 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^4}(x)y^1 + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^4}(x)y^2 + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^4}(x)y^3 + \frac{\partial g_{14}}{\partial x^4}(x)y^4 + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^4}(x)y^2 + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^4}(x)y^3 + \frac{\partial g_{41}}{\partial x^4}(x)y^4.$$

Como $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$, então obtemos que

$$[F^2]_{x^1y^1} = 2 \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}(x)y^1 + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}(x)y^2 + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1}(x)y^3 + \frac{\partial g_{14}}{\partial x^1}(x)y^4 \right). \quad (5-4)$$

$$[F^2]_{x^2y^1} = 2 \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}(x)y^1 + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}(x)y^2 + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^2}(x)y^3 + \frac{\partial g_{14}}{\partial x^2}(x)y^4 \right). \quad (5-5)$$

$$[F^2]_{x^3y^1} = 2 \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}(x)y^1 + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^3}(x)y^2 + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3}(x)y^3 + \frac{\partial g_{14}}{\partial x^3}(x)y^4 \right). \quad (5-6)$$

$$[F^2]_{x^4y^1} = 2 \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^4}(x)y^1 + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^4}(x)y^2 + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^4}(x)y^3 + \frac{\partial g_{14}}{\partial x^4}(x)y^4 \right). \quad (5-7)$$

Para $x = (1, 0, 0, 0)$ temos que

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}(x) = 2a, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}(x) = 0, \quad \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1}(x) = 0, \quad \frac{\partial g_{14}}{\partial x^1}(x) = 0$$

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}(x) = 0, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}(x) = \frac{a^2 + 2a}{a + 1}, \quad \frac{\partial g_{13}}{\partial x^2}(x) = 0, \quad \frac{\partial g_{14}}{\partial x^2}(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}(x) = 0, & \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial x^3}(x) = 0, & \quad \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3}(x) = 0, & \quad \frac{\partial g_{14}}{\partial x^3}(x) = 0 \\ \frac{\partial g_{11}}{\partial x^4}(x) = 0, & \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial x^4}(x) = 0, & \quad \frac{\partial g_{13}}{\partial x^4}(x) = 0, & \quad \frac{\partial g_{14}}{\partial x^4}(x) = 0. \end{aligned}$$

Substituindo nas equações (5-4) (5-5) (5-6) e (5-7) tem-se que

$$[F^2]_{x^1y^1} = 4ay^1 \quad [F^2]_{x^2y^1} = \frac{2a^2 + 4a}{a+1}y^2 \quad [F^2]_{x^3y^1} = 0 \quad [F^2]_{x^4y^1} = 0.$$

Assim,

$$[F^2]_{x^ky^1}y^k = 4a(y^1)^2 + \left(\frac{2a^2 + 4a}{a+1}\right)(y^2)^2. \quad (5-8)$$

Por outro lado, temos que para $x = (1, 0, 0, 0)$

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} = \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} = \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} = \frac{\partial g_{31}}{\partial x^1} = 0$$

$$\frac{\partial g_{14}}{\partial x^1} = \frac{\partial g_{41}}{\partial x^1} = \frac{\partial g_{23}}{\partial x^1} = \frac{\partial g_{32}}{\partial x^1} = 0$$

$$\frac{\partial g_{24}}{\partial x^1} = \frac{\partial g_{42}}{\partial x^1} = \frac{\partial g_{34}}{\partial x^1} = \frac{\partial g_{43}}{\partial x^1} = 0.$$

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} = 2a$$

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{2a}{(a+1)^2}$$

Sendo

$$\begin{aligned} [F^2]_{x^1} &= \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}(x)y^1y^1 + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}(x)y^1y^2 + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1}(x)y^1y^3 + \frac{\partial g_{14}}{\partial x^1}(x)y^1y^4 + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}(x)y^2y^1 + \dots \\ &+ \frac{\partial g_{31}}{\partial x^1}(x)y^3y^1 + \dots + \frac{\partial g_{41}}{\partial x^1}(x)y^4y^1 + \dots + \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1}(x)y^4y^4, \end{aligned}$$

tem-se que

$$[F^2]_{x^1} = 2ay^1y^1 - \frac{2a}{(a+1)^2}y^2y^2 + 2ay^3y^3 + 2ay^4y^4 \quad (5-9)$$

Das expressões (5-8) e (5-9) obtemos

$$[F^2]_{x^ky^1}y^k - [F^2]_{x^1} = 4a(y^1)^2 + \left(\frac{2a^2 + 4a}{a+1}\right)(y^2)^2 - 2ay^1y^1 - \frac{2a}{(a+1)^2}y^2y^2 - 2ay^3y^3 - 2ay^4y^4.$$

Tome $y = (0, 0, 0, 1)$ temos que

$$[F^2]_{x^ky^1}y^k - [F^2]_{x^1} = -2a. \quad (5-10)$$

Agora, note que para $x = (1, 0, 0, 0)$ tem-se que

$$(g_{ij}(x)) = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix},$$

e portanto

$$g^{11} = \frac{1}{a+1}, \quad g^{12} = g^{13} = g^{14} = 0. \quad (5-11)$$

Substituindo (5-11) na expressão (5-3) temos que

$$G^1(x, y) = \frac{1}{4(a+1)} ([F^2]_{x^k y^1} y^k - [F^2]_{x^1}), \quad x = (1, 0, 0, 0). \quad (5-12)$$

E pela igualdade (5-10) temos que

$$G^1(x, y) = -\frac{2a}{4(a+1)} \neq 0, \quad y = (0, 0, 0, 1).$$

5.2 Campo de Killing

Agora vamos obter um campo de vetores induzido de uma aplicação $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ por

$$\phi_\theta = (\phi_\theta^1, \phi_\theta^2, \phi_\theta^3, \phi_\theta^4),$$

onde

$$\phi_\theta^T = A_\theta \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}$$

e para quaisquer $m, n > 0$

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(m\theta) & -\sin(m\theta) & 0 & 0 \\ \sin(m\theta) & \cos(m\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ 0 & 0 & \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}.$$

Assim, as coordenadas ϕ_θ^i são dadas por

$$y^1 = \phi_\theta^1(x) = \cos(m\theta)x^1 - \sin(m\theta)x^2, \quad y^2 = \phi_\theta^2(x) = \sin(m\theta)x^1 + \cos(m\theta)x^2$$

$$y^3 = \phi_\theta^3(x) = \cos(n\theta)x^3 - \sin(n\theta)x^4, \quad y^4 = \phi_\theta^4(x) = \sin(n\theta)x^3 + \cos(n\theta)x^4$$

Lema 5.1 Para todo $y = \phi_\theta(x) \in \mathbb{R}^4$ tem-se que

$$|y|^2 = \sum_{i=1}^4 (y^i)^2 = \sum_{i=1}^4 (x^i)^2 = |x|^2.$$

Prova. Temos que para todo $y = \phi_\theta(x) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} |y|^2 &= (\cos(m\theta)x^1 - \sin(m\theta)x^2)^2 + (\sin(m\theta)x^1 + \cos(m\theta)x^2)^2 \\ &\quad + (\cos(n\theta)x^3 - \sin(n\theta)x^4)^2 + (\sin(n\theta)x^3 + \cos(n\theta)x^4)^2 \\ &= (\cos(m\theta)x^1)^2 + (\sin(m\theta)x^2)^2 + (\sin(m\theta)x^1)^2 + (\cos(m\theta)x^2)^2 \\ &\quad + (\cos(n\theta)x^3)^2 + (\sin(n\theta)x^4)^2 + (\sin(n\theta)x^3)^2 + (\cos(n\theta)x^4)^2 \\ &= \cos^2(m\theta)((x^1)^2 + (x^2)^2) + \sin^2(m\theta)((x^1)^2 + (x^2)^2) \\ &\quad + \cos^2(n\theta)((x^3)^2 + (x^4)^2) + \sin^2(n\theta)((x^3)^2 + (x^4)^2) \\ &= (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = |x|^2. \end{aligned}$$

□

Lema 5.2 A aplicação ϕ_θ é uma isometria segundo a métrica g_a .

Prova. Para provar que ϕ_θ é uma isometria é suficiente verificar que para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^4$ tem-se que

$$\langle u, v \rangle_p = \langle d\phi_p \cdot u, d\phi_p \cdot v \rangle_{\phi(p)}, \quad p \in \mathbb{R}^4.$$

Como ϕ é uma aplicação linear então basta verificar que

$$\langle u, v \rangle_p = \langle \phi \cdot u, \phi \cdot v \rangle_{\phi(p)}.$$

Fazendo $u = v = x$ tem-se

$$|x|_{G(p)} = |y|_{G(q)}, \quad q = \phi(p) \quad y = A_\theta \cdot x$$

i. e.,

$$y^T G(q) y = A_\theta^T(x) G(q) A_\theta(x) = x^T G(p) x,$$

onde $G(x) = g_{ij}(x)$. Isto é equivalente a mostrar que

$$A_\theta^T G(q) A_\theta = G(p). \quad (5-13)$$

Considere a matriz $(h_{ij}(q)) = H(q)$ dada

$$H(q) = \begin{pmatrix} q^2 q^2 & -q^1 q^2 & q^2 q^4 & -q^2 q^3 \\ -q^1 q^2 & q^1 q^1 & -q^1 q^4 & q^1 q^3 \\ q^2 q^4 & -q^1 q^4 & q^4 q^4 & -q^3 q^4 \\ -q^2 q^3 & q^1 q^3 & -q^3 q^4 & q^3 q^3 \end{pmatrix}. \quad (5-14)$$

Note que

$$G(q) = B(q)I - A(q)H(q). \quad (5-15)$$

Pelo Lema 1 temos que

$$A(p) = A(q) \quad B(p) = B(q). \quad (5-16)$$

Usando as igualdades (5-13), (5-15) e (5-16), obtemos

$$\begin{aligned} A_\theta^T G(q) A_\theta &= A_\theta^T [B(p)I - A(p)H(q)] A_\theta \\ &= A_\theta^T B(p) I A_\theta - A_\theta^T A(p) H(q) A_\theta. \end{aligned}$$

Observe que

$$A_\theta^T = A_\theta^{-1},$$

então

$$A_\theta^T G(q) A_\theta = B(p)I - A(p)[A_\theta^T H(q) A_\theta]. \quad (5-17)$$

Basta agora mostrar que

$$A_\theta^T H(q) A_\theta = H(p).$$

Para facilitar a notação, escrevemos

$$q^k q^s = q_{sk}, \quad a = \sin(m\theta), \quad b = \cos(m\theta), \quad u = \cos(n\theta), \quad v = \sin(n\theta).$$

Desta forma, utilizando o fato que $q = \theta(p)$ temos que

$$q^1 = bp^1 - ap^2, \quad q^2 = ap^1 + bp^2$$

$$q^3 = up^3 - vp^4, \quad q^4 = vp^3 + up^4$$

e

$$A_\theta = \begin{pmatrix} b & -a & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & -v \\ 0 & 0 & v & u \end{pmatrix} \quad H(q) = \begin{pmatrix} q_{22} & -q_{12} & q_{24} & -q_{23} \\ -q_{12} & q_{11} & -q_{14} & q_{13} \\ q_{24} & -q_{14} & q_{44} & -q_{34} \\ -q_{23} & q_{13} & -q_{34} & q_{32} \end{pmatrix}.$$

Calculando $A_\theta^T H(q)$ obtemos

$$A_\theta^T H(q) = \begin{pmatrix} q_{22}b - q_{12}a & -q_{12}b + q_{11}a & q_{24}b - q_{14}a & -q_{23}b + q_{13}a \\ -q_{22}a - q_{12}b & q_{12}a + q_{11}b & -q_{24}a - q_{14}b & q_{23}a + q_{13}b \\ q_{24}u - q_{23}v & -q_{14}u + q_{13}v & q_{44}u - q_{34}v & -q_{34}u + q_{32}v \\ -q_{24}v - q_{23}u & q_{14}v + q_{13}u & -q_{44}v - q_{34}u & q_{34}v + q_{32}u \end{pmatrix}.$$

Calculando os elementos da matriz $(a_{ij})_{4 \times 4} = A_\theta^T H(q) A_\theta$ obtemos

$$\begin{aligned} a_{11} &= (q_{22}b - q_{12}a)b + (-q_{12}b + q_{11}a)a \\ &= q_{22}b^2 - 2q_{12}ab + q_{11}a^2 \\ &= (ap^1 + bp^2)^2 b^2 - 2(bp^1 - ap^2)(ap^1 + bp^2)ab + (bp^1 - ap^2)^2 a^2 \\ &= b^4(p^2)^2 + 2a^2b^2(p^2)^2 + a^4(p^2)^2 \\ &= (p^2)^2(a^2 + b^2)^2 \\ &= (p^2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= -(q_{22}b - q_{12}a)a + (-q_{12}b + q_{11}a)b \\ &= -q_{22}ab + q_{12}a^2 - q_{12}b^2 + q_{11}ab \\ &= -(ap^1 + bp^2)^2 ab + (bp^1 - ap^2)(ap^1 + bp^2)(a^2 - b^2) + (bp^1 - ap^2)^2 ab \\ &= -a^4 p^1 p^2 - 2a^2 b^2 p^1 p^2 - b^4 p^1 p^2 \\ &= -p^1 p^2 (a^2 + b^2)^2 \\ &= -p^1 p^2 \end{aligned}$$

De maneira análoga obtemos

$$a_{13} = a_{31} = p^2 p^4, \quad a_{14} = a_{41} = -p^2 p^3, \quad a_{21} = a_{12} = -p^1 p^2$$

$$a_{23} = a_{32} = -p^1 p^4, \quad a_{24} = a_{42} = p^1 p^3, \quad a_{34} = a_{43} = -p^3 p^4$$

$$a_{22} = p^1 p^1, \quad a_{33} = p^4 p^4, \quad a_{44} = p^3 p^3.$$

Portanto, $a_{ij} = h_{ij}(p)$. □

Considere agora o campo induzido para cada $x = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4$ fixo

$$W_x = \frac{d}{d\theta}[\phi_\theta(x)] \Big|_{\theta=0} = \frac{d\phi_\theta^j}{d\theta} \Big|_{\theta=0} \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_x.$$

De onde se obtém

$$W = -mx^2 \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_x + mx^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_x - nx^4 \frac{\partial}{\partial x^3} \Big|_x + nx^3 \frac{\partial}{\partial x^4} \Big|_x \quad (5-18)$$

é um campo de Killing.

5.3 Métrica de Einstein-Randers com Curvatura Flag não constante

Nesta seção vamos obter uma família a 3-parâmetros de métricas de Randers do tipo Einstein com curvatura flag não constante. No caso em que a dimensão é 3 uma variedade é de Einstein se, e somente se, tem curvatura flag constante. Faremos então para variedades de dimensão 4 usando o campo de Killing obtido na expressão (5-18) e a métrica Riemanniana de Hawking Taub-NUT.

Consideramos agora a métrica de Randers obtida do problema navegacional de Zermelo dada na expressão (2-14) em \mathbb{R}^4 com a métrica Riemanniana $g_a = g_{ij}(x)y^i y^j$ sendo a métrica de Hawking Taub-NUT dada em (5-2) e o campo de vetores W como sendo o campo de Killing dado por

$$W = \sum_i^4 W^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

onde

$$W^1 = -mx^2, \quad W^2 = mx^1, \quad W^3 = -nx^4, \quad W^4 = nx^3.$$

Vamos encontrar condições suficientes para construção de métrica de Einstein-Finsler em termos da navegação. Uma condição que impomos sobre o campo W é que para cada $x \in \mathbb{R}^4$

$$g_a(W_x, W_x) = \|W\|_x < 1.$$

De (5 – 2) temos que

$$\|W\|_x = B(W^1)^2 + B(W^2)^2 + B(W^3)^2 + B(W^4)^2 - A(m(x^2)^2 + m(x^1)^2 + n(x^4)^2 + n(x^3)^2)^2$$

Seja $\sigma = m(x^1)^2 + m(x^2)^2 + n(x^3)^2 + n(x^4)^2$, então

$$\begin{aligned} \|W\|_x &= B(W^1)^2 + B(W^2)^2 + B(W^3)^2 + B(W^4)^2 - A\sigma \cdot \sigma \\ &= B(W^1)^2 + B(W^2)^2 + B(W^3)^2 + B(W^4)^2 - A\sigma \cdot (m(x^1)^2 + m(x^2)^2 + n(x^3)^2 + n(x^4)^2) \\ &= B(W^1)^2 + B(W^2)^2 + B(W^3)^2 + B(W^4)^2 - A\sigma m(x^1)^2 - A\sigma m(x^2)^2 - A\sigma n(x^3)^2 - A\sigma n(x^4)^2 \\ &= B(W^1)^2 + B(W^2)^2 + B(W^3)^2 + B(W^4)^2 - A\frac{\sigma}{m}(W^2)^2 - A\frac{\sigma}{m}(W^1)^2 - A\frac{\sigma}{n}(W^4)^2 - A\frac{\sigma}{n}(W^3)^2 \end{aligned} \quad (5-19)$$

$$\|W\|_x = \left(B - A\frac{\sigma}{m}\right) [(W^1)^2 + (W^2)^2] + \left(B - A\frac{\sigma}{n}\right) [(W^3)^2 + (W^4)^2] \quad (5-20)$$

Sejam

$$p = \max\{m, n\}, \quad q = \min\{m, n\}, \quad p - q = |m - n|,$$

como $\sigma = m(x^1)^2 + m(x^2)^2 + n(x^3)^2 + n(x^4)^2$, então $\sigma \geq q|x|^2$. Assim, obtemos

$$\frac{\sigma}{m} \geq \frac{p}{q}|x|^2, \quad \frac{\sigma}{n} \geq \frac{p}{q}|x|^2. \quad (5-21)$$

De (5 – 19) e (5 – 21) obtemos

$$\begin{aligned} \|W\|_x &\leq B(W^1)^2 + B(W^2)^2 + B(W^3)^2 + B(W^4)^2 - \frac{p}{q}|x|^2 A \left((W^1)^2 + (W^2)^2 + (W^3)^2 + (W^4)^2 \right) \\ &= \left(B - \frac{p}{q}|x|^2 A \right) \left((W^1)^2 + (W^2)^2 + (W^3)^2 + (W^4)^2 \right) \\ &= \left(B - \frac{p}{q}|x|^2 A \right) \left(m^2(x^2)^2 + m^2(x^1)^2 + n^2(x^4)^2 + n^2(x^3)^2 \right). \end{aligned} \quad (5-22)$$

Como $p = \max\{m, n\}$ e substituindo A e B em (5–22) obtemos

$$\begin{aligned} \|W\|_x &\leq p^2|x|^2 \left(a|x|^2 + 1 - \frac{p}{q}|x|^2 a \frac{a|x|^2 + 2}{a|x|^2 + 1} \right) \\ &= \frac{|x|^2}{1 + a|x|^2} (p + 2a|m - n||x|^2 + a^2|m - n||x|^4) := f(x). \end{aligned} \quad (5-23)$$

Logo, $f(x) < 1$ é uma condição suficiente para que $g_a(W_x) < 1$.

Seja $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^4 | f(x) < 1\}$, onde

Teorema 5.3 *Seja $F(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j} + b_i(x)y^i$ uma função em $T\Omega \rightarrow [0, \infty)$ em $T\Omega$ expressa por (2–14) em termos da métrica de Hawking Taub-NUT g_a e do campo de vetores $W_{m,n}$. Então F tem as seguintes propriedades:*

- (i) F é uma métrica de Randers;
- (ii) F é do tipo Einstein com Ricci constante igual a zero;
- (iii) F tem curvatura flag não constante.

Prova. De (5–23) temos que $g_a(W_x, W_x) < 1$ e pela igualdade (2–15) concluímos que $\|\beta\| = \|W\|_x < 1$ o que implica que F é métrica de Randers. O item ii) é uma consequência imediata do Teorema 4.1 juntamente com Teorema 2.17. Para provar iii) já verificamos que métrica g_a não é localmente projetivamente flat. Pelo Teorema de Bonnet-Beltrami, uma métrica Riemanniana é projetivamente flat se, e somente se, tem curvatura seccional constante. Então a métrica g_a não tem curvatura seccional constante. Agora, usando o teorema de classificação de métricas de Randers com curvatura flag constante, Teorema 4.2, concluímos que F tem curvatura flag não constante. \square

A Geometria de Finsler e a Teoria de Sprays têm diversas aplicações, como por exemplo na Geometria da Informação, Física e Biologia. Neste trabalho estudamos a Geometria de Finsler, que segundo Chern pode ser considerada como a Geometria Riemanniana sem a restrição quadrática. Vários resultados foram generalizados para Geometria de Finsler mas alguns resultados são diferentes na Geometria de Finsler, como por exemplo Chern acreditava que métricas de Finsler seriam do tipo Einstein se, e somente se, a curvatura flag fosse constante sendo que a curvatura flag é uma extensão natural da curvatura seccional da geometria Riemanniana para geometria de Finsler. Para dimensão menor ou igual a 3 este fato é como no caso Riemanniano para métricas de Randers e então para buscar contra exemplo foi necessário subir a dimensão. Em particular estudamos a Geometria de Randers que pode ser visto como a mais simples perturbação da Geometria Riemanniana onde a métrica é perturbada por uma fator aditivo linear. Além disso, métricas de Randers também podem ser obtidas como soluções do Problema Navegacional de Zermelo. Utilizamos também resultados

que caracterizam métricas de Randers com curvatura flag constante e métricas de Randers do tipo Einstein em termos do Problema Navegacional de Zermelo. Usando métricas de Randers construímos uma família a 3 parâmetros de métricas de Einstein-Finsler com curvatura flag não constante e para obter tal família utilizamos um campo de Killing e uma métrica Riemanniana que é a métrica de Hawking Taub-NUT.

Referências Bibliográficas

- [1] MO, Xiaohuan. *An Introduction to Finsler Geometry*. Peking University Series in Mathematics vol. **1**, China 2006.
- [2] BAO, David Dai-Wai; CHERN, Shiing-Shen; SHEN, Zhongmin. *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*. Graduate Texts in Mathematics **200**, Springer-Verlag, New York, Inc., 2000.
- [3] CHERN, Shiing-Shen; SHEN, Zhongmin. *Riemann-Finsler Geometry*. World Scientific, Nankai Tracts in Mathematics, Vol. 6.
- [4] GUO, Enli; MO, Xiaohuan; ZHANG, Xianqiang. *The Explicit Construction of Einstein-Finsler Metrics with Non-Constant Flag Curvature*. SIGMA **5** (2009), 045, 7 pages.
- [5] CHENG, Xinuye; SHEN, Zhongmin. *Finsler Geometry. An approach via Randers spaces*. 2012.
- [6] SHEN, Z. *Differential Geometry of Spray on Finsler Spaces*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.
- [7] ROBLES, C. *Einstein metrics of Randers Type*. Ph.D Thesis, British Columbia University, Canada, 2003.
- [8] CARMO, Manfredo P. *Geometria Riemanniana* Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2011, 5 edição.
- [9] BAO, D., ROBLES, C., SHEN, Z. *Zermelo Navigation on Riemannian Manifolds J. Differential Geom.* **66** (2004), 377-435, math. DG/0311233.
- [10] KRONHEIMER, P. B. *Monopoles and Taub-Nut Metrics*, M. Sc. Dissertation, Oxford 1985.
- [11] TAUB, A. H. *Empty space-times admitting a three parameter group of motions*. Annals of Mathematics, Second Series **53**: 472-490.(1951).

-
- [12] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, (1983).
- [13] HAWKING S. W. *Gravitational Instanton*. Phys. Lett. A **60** (1977), 81-83.
- [14] JOST, Jürgen. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer (1995).