UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS (UFG)
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA (IME)
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

SOFIA DE SIQUEIRA E SOUZA

O Quadrado Tensorial Não-Abeliano, Construções Relacionadas e p-Grupos

Goiânia
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[X] Dissertação [ ] Tese [ ] Outro*:_____________

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Sofia de Siqueira e Souza

3. Título do trabalho

O Quadrado Tensorial não-Abeliano, construções relacionadas e p-grupos

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **Sofia De Siqueira E Souza**, **Discente**, em 18/07/2024, às 11:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Ricardo Nunes De Oliveira**, **Professor do Magistério Superior**, em 18/07/2024, às 11:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4639629** e o código CRC **7163BDF4**.

Referência: Processo nº 23070.011532/2024-20 SEI nº 4639629

SOFIA DE SIQUEIRA E SOUZA

O Quadrado Tensorial Não-Abeliano, Construções Relacionadas e p-Grupos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Álgebra.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Nunes de Oliveira

Goiânia
2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Souza, Sofia de Siqueira e
O Quadrado Tensorial Não-Abeliano, Construções Relacionadas e p Grupos [manuscrito] / Sofia de Siqueira e Souza. - 2024.
LXXVI, 76 f.

Orientador: Prof. Ricardo Nunes de Oliveira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Matemática, Goiânia, 2024.
Bibliografia.
Inclui siglas, símbolos, tabelas.

1. Quadrado Tensorial Não-Abeliano de Grupos. 2. Comutadores. 3. Nilpotência. 4. p-Grupos Finitos. 5. p-Grupos Potent e Powerful. I. Oliveira, Ricardo Nunes de, orient. II. Título.

CDU 512.5

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 06 da sessão de Defesa de Dissertação de **Sofia de Siqueira e Souza**, que confere o título de **Mestra** em **Matemática**, na área de concentração em **Álgebra**.

Aos (18/03/2024) décimo oitavo dia do mês de março de dois mil e vinte e quatro, a partir da(s) 10:00h, via Web Videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada "**O Quadrado Tensorial não-Abeliano, construções relacionadas e p-grupos**". Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor **Ricardo Nunes de Oliveira – IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Emerson Ferreira de Melo – MAT/UnB**, membro titular externo; Professor Doutor **Raimundo de Araujo Bastos Junior – MAT/UnB**, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca não fizeram sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da **Dissertação**, tendo sido a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Ricardo Nunes de Oliveira – IME/UFG**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao(s) (18/03/2024) décimo oitavo dia do mês de março de dois mil e vinte e quatro.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **RAIMUNDO DE ARAUJO BASTOS JUNIOR**, **Usuário Externo**, em 05/08/2024, às 12:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Ricardo Nunes De Oliveira**, **Professor do Magistério Superior**, em 05/08/2024, às 12:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Emerson Ferreira de Melo**, **Usuário Externo**, em 08/08/2024, às 07:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4718025** e o código CRC **C6B40B1E**.

Referência: Processo nº 23070.011532/2024-20 SEI nº 4718025

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Sofia de Siqueira e Souza

.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço aos meus pais, por me proporcionarem condições e me apoiarem a seguir esse sonho. Minha gratidão e amor por vocês são eternos.

Ao meu namorado, Esaú, por sempre estar comigo, ser tão paciente e incentivador e por sempre vibrar tanto por cada uma das minhas conquistas.

Em especial às minhas amigas Ana Clara, Carina, Monalisa e Yasmin que me sempre me escutam, me ajudam a escrever e-mails e encontrar sinônimos. Obrigada pelo carinho e amizade.

Minha família, meu sogros, minha cunhada, meus amigos Bruna, Emily, Francinei, Isabela, Mahara, Mariana e Thulio. Cada conversa com vocês é uma felicidade. Obrigada por sempre se preocuparem e me ajudarem de alguma forma.

Ao meu orientador Ricardo Nunes de Oliveira, obrigada pela oportunidade de conhecer mais a Álgebra e pelo incentivo de seguir na carreira acadêmica.

A todos os professores, colegas e funcionários do IME. De alguma forma, cada um de vocês fez o meu amor pela matemática aumentar. A UFG vai sempre fazer parte do que sou. Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro durante esses anos.

Por fim, agradeço à Sofia de 2018 que teve a coragem de mudar de curso e nunca se deixar desistir do que ama de verdade, claro, com o apoio de cada um dos citados.

"Navegar é preciso, viver não é preciso."

Fernando Pessoa,
1914.

Resumo

Souza, S.S.. **O Quadrado Tensorial Não-Abeliano, Construções Relacionadas e p-Grupos**. Goiânia, 2024. 71p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Sejam G e G^{φ} grupos isomorfos. Estudamos o grupo $\nu(G)$, vendo que este é uma extensão do quadrado tensorial não abeliano de G, $G \otimes G$. Mostramos como $\nu(G)$ preserva propriedades do grupo G em questão. Estudamos também os p-grupos finitos *potent* e *powerful*. Provamos que o quadrado tensorial não abeliano de G e o k-ésimo termo da série central inferior de $\nu(G)$ são *potently embedded* em $\nu(G)$, quando G é um p-grupo finito *potent*. Mais ainda, para um primo ímpar p, se G é um p-grupo finito *potent*, então $\exp(\nu(G))$ divide $p \cdot \exp(G)$.

Palavras–chave

quadrado tensorial não-abeliano de grupos; comutadores; nilpotência; solubilidade; p-grupos finitos; p-grupos potent e powerful.

Abstract

Souza, S.S.. **The Non-Abelian Tensor Square, Related Constructions and p-Groups**. Goiânia, 2024. 71p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Let G and G^{φ} be two isomorphic groups. We study the group $\nu(G)$ that is an extension of the non-abelian tensor square of G, $G \otimes G$. We show how $\nu(G)$ preserves properties from the group G in question. We also study potent and powerful finite p-groups. We prove that the non-abelian tensor square of G and the k-th term of the lower central series of $\nu(G)$ are potently embedded in $\nu(G)$, when G is a potent finite p-group. Moreover, for an odd prime p, if G is a potent p-group, then $\exp(\nu(G))$ divides $p \cdot \exp(G)$.

Keywords

non-abelian tensor square of groups; commutatores; nilpotency; solubility; finite p-groups; potent and powerful p-groups.

Sumário

Introdução

Esta dissertação é baseada nos artigos [3] e [27]. Visamos o estudo da estrutura e das propriedades do grupo $\nu(G)$, quando G é um grupo finito. Em especial, estudamos como $\nu(G)$ se comporta quando G pertence a determinadas família de p-grupos finitos.

A definição do grupo $\nu(G)$ dada por Rocco em [27] é motivada pela sua relação com o quadrado tensorial não-abeliano do grupo G, denotado por $G \otimes G$, em um caso particular do produtor tensorial não-abeliano de grupos, apresentado pela primeira vez por Brown e Loday em [9]. Sejam G e H grupos e suponha que G age compativelmente em H e vice-versa, isto é, existem aplicações

$$\begin{array}{ccc} G \times H \to G & \text{e} & H \times G \to H \\ (g,h) \mapsto g^h & & (h,g) \mapsto h^g, \end{array}$$

de modo que, para todo $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$,

$$g^{(h^{g_1})} = ((g^{g_1^{-1}})^h)^{g_1} \tag{0-1}$$
$$h^{(g^{h_1})} = ((h^{h_1^{-1}})^g)^{h_1}, \tag{0-2}$$

onde ambos, G e H, agem em si mesmos por conjugação. Nessas condições, o produto tensorial não-abeliano $G \otimes H$, como foi definido por Brown e Loday em [9], é o grupo gerado por todos os símbolos $g \otimes h$, onde $g \in G$ e $h \in H$, satisfazendo as seguintes relações

$$\begin{aligned} gg_1 \otimes h &= (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) \\ g \otimes hh_1 &= (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}), \end{aligned}$$

para todo $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$.

Ainda em [9], é dado um significado topológico para o produto tensorial não-abeliano. Considere a aplicação $\rho' : G \otimes G \to G'$, dada por $g \otimes h \mapsto [g,h]$. Aqui,

$\mu(G)$ denota o núcleo $\ker(\rho')$. Conforme mostrado na Proposição 2.8 de [28],

$$1 \to \Delta(G) \to \mu(G) \to H_2(G) \to 1,$$

onde $\Delta(G) = \langle g \otimes g | g \in G \rangle$ e $H_2(G)$ é o segundo grupo de homologia de G. A aplicação ρ' corresponde à aplicação k de [9]. Em [24], foi provado que $H_2(G) \cong M(G)$, onde $M(G)$ é o Multiplicador de Schur de G.

Quando $G = H$, a ação por conjugação de G sobre si mesmo sempre satisfaz as equações (0-1) e (0-2). Por essa razão, o produto tensorial não-abeliano $G \otimes G$ pode sempre ser definido e o denotamos por quadrado tensorial não-abeliano de G.

Em [27], Rocco estabelece propriedades do quadrado tensorial não-abeliano de G por meio do estudo de $\nu(G)$, definido da seguinte forma:
Dados G e G^{φ} grupos, isomorfos via $\varphi : G \to G^{\varphi}, g \to g^{\varphi}$, para todo $g \in G$, defina

$$\nu(G) \ = \ \langle G, G^{\varphi} \mid [g, h^{\varphi}]^{k^{\epsilon}} = [g^k, (h^k)^{\varphi}], \ \forall g, h, k \in G, \epsilon \in \{1, \varphi\} \rangle.$$

No qual, para dados dois elementos $g, h \in G$, denotamos por g^h o conjugado de g por h, isto é, $h^{-1}gh$ e o comutador de g e h por $[g, h] = g^{-1}g^h$. Ainda em [27], Rocco prova que, se G é um grupo finito, então

- Se G é p-grupo, então $\nu(G)$ é p-grupo finito.
- Se G é nilpotente, então $\nu(G)$ é nilpotente.
- Se G é solúvel, então $\nu(G)$ é solúvel.

Provaremos que o subgrupo $\Upsilon(G) = [G, G^{\varphi}]$ de $\nu(G)$ é isomorfo ao quadrado tensorial não-abeliano de G. Desta forma, os cálculos em $G \otimes G$ podem ser realizados em $[G, G^{\varphi}]$, usando a teoria de comutadores para estudar a estrutura do quadrado tensorial não-abeliano de G. A partir disso, obtemos os seguintes resultados sobre a nilpotência e solubilidade do grupo $\nu(G)$.

Teorema A. Seja G um grupo nilpotente de classe c. Então $\nu(G)$ é um grupo nilpotente de classe no máximo $c + 1$.

Teorema B. Seja G um grupo solúvel de comprimento derivado l. Então $\nu(G)$ um grupo solúvel de comprimento derivado no máximo $l + 1$.

Os Teoremas A e B foram provados em [27].

Ademais, estudaremos os p-grupos finitos. O estudo moderno de p-grupos finitos se iniciou em 1933, com o artigo [18] publicado por Hall e continua sendo relevante até os dias de hoje. Em especial, estamos interessados em duas classes de p-grupos finitos, por possuírem propriedades desejáveis e estrutura similar à de grupos abelianos.

A primeira família que vamos apresentar é a dos p-grupos *powerful*. Em [22], Lubotzy e Mann desenvolveram a teoria de p-grupos finitos *powerful*. Um p-grupo finito é *powerful* se $G' \leq G^4$ para $p = 2$, ou $G' \leq G^p$ para p ímpar.

Em [2], Arganbright mostrou que se G é um p-grupo satisfazendo a condição $\gamma_{p-1}(G) \leq G^p$, com p ímpar, então G^p é exatamente o conjunto das p-ésimas potências de G. Essa relação originou a definição dos p-grupos *potent*. Dizemos que um p-grupo finito G é *potent* se $\gamma_{p-1}(G) \leq G^p$ para p ímpar, ou $G' \leq G^4$ para $p = 2$. A estrutura dessa classe de p-grupos foi desenvolvida por González-Sánchez e Jaikin-Zapirain, em [17] e é vista como uma generalização dos p-grupos *powerful*.

Estamos interessados nas propriedades de $\nu(G)$ quando G é um p-grupo finito, mais especificamente quando G é p-grupo *potent*. Mais ainda, o trabalho foca na questão do expoente do grupo $\nu(G)$.

Do Teorema A, obtemos uma expressão da série central inferior do grupo $\nu(G)$ que será importante para investigar a estrutura de $\nu(G)$ quando G é um p-grupo *potent*. Deste resultado, em conjunto com as demais relações que provamos ao decorrer desta trabalho, demonstraremos os Teoremas C e D, que fazem parte dos Resultados Principais de [3].

Teorema C. Seja p um primo e G p-grupo finito *potent*.

(a) O quadrado tensorial não abeliano $\Upsilon(G)$ é *potently embedded* em $\nu(G)$.

(b) Se $k \geq 2$, o k-ésimo termo da série central inferior $\gamma_k(\nu(G))$ é *potently embedded* em $\nu(G)$.

Teorema D. Seja p um primo ímpar e G p-grupo tal que $exp(G) = p^e$.

(a) Se G é potent, então $exp(\nu(G))$ divide p^{e+1}.

(b) Se $\gamma_{p-2}(G) \leq G^p$, então $\nu(G)$ é um p-grupo *potent*. Em particular, $\exp(\nu(G)) = p^e$.

Organizamos esta dissertação em 4 capítulos. No primeiro capítulo, apresentaremos conceitos e resultados básicos da teoria de grupos que serão necessários em nosso trabalho, baseados no estudo de [20], [23], [26] e [29]. Falaremos também sobre o produto tensorial não-abeliano de grupos. O segundo capítulo desenvolverá uma boa base sobre p-grupos finitos e, em particular, *powerful* e *potent*. Já no terceiro capítulo, definiremos o grupo $\nu(G)$ e provaremos diversos resultados sobre ele, totalmente embasados nos resultados do artigo de Rocco [27].

As duas primeiras seções do quarto capítulo serão compostas pelas provas dos Teoremas A, B, C e D. Por fim, daremos alguns exemplos de construções de $\nu(G)$ na última seção do capítulo 4.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar alguns conceitos e resultados da Teoria de Grupos que serão necessários para este trabalho, baseando-se principalmente em [20] e [26].

1.1 Comutadores e Subgrupo Comutador

Sejam x, y elementos de um grupo G. O conjugado de x por y é dado por $x^y = y^{-1}xy$. O comutador de x e y é definido por $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y$. De maneira mais geral, um comutador simples, de tamanho $n \geq 2$ é definido de forma recursiva pela regra $[x_1, ..., x_n] = [[x_1, ...x_{n-1}], x_n]$. Também é usada a notação $[x, {}_n y] = [x, y, ...y]$, com y aparecendo n vezes.

É importante notar que, para elementos de um grupo abeliano, qualquer comutador é 1. Também, para todo elemento $x \in G$, em um grupo G qualquer, temos que

$$[1, x] = 1^{-1}x^{-1}1x = x^{-1}x = 1.$$

Teorema 1.1 *[26, 5.1.5] Sejam x, y, z elementos de um grupo. Então*

(i) $[x, y] = [y, x]^{-1}$;

(ii) $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$ *e* $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$;

(iii) $[x, y^{-1}] = ([x, y]^{y^{-1}})^{-1}$ *e* $[x^{-1}, y] = ([x, y]^{x^{-1}})^{-1}$;

(iv) $[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = 1$ *(Identidade de Hall-Witt).*

Prova. Sejam x, y, z elementos de um grupo.

(i)

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = (y^{-1}x^{-1}yx)^{-1} = [y, x]^{-1}.$$

(ii)

$$\begin{aligned} [x,z]^y[y,z] = y^{-1}x^{-1}x^zyy^{-1}y^z &= (xy)^{-1}z^{-1}xzz^{-1}yz \\ &= (xy)^{-1}z^{-1}xyz \\ &= [xy,z]. \end{aligned}$$

A demonstração é análoga para $[x,yz] = [x,z][x,y]^z$.

(iii)

$$\begin{aligned} ([x,y]^{y^{-1}})^{-1} = (y[x,y]y^{-1})^{-1} &= y[x,y]^{-1}y^{-1} \\ &= y[y,x]y^{-1} \\ &= yy^{-1}y^xy^{-1} \\ &= [x,y^{-1}]. \end{aligned}$$

A demonstração é análoga para $[x^{-1},y] = ([x,y]^{x^{-1}})^{-1}$.

(iv) Tome $u = xzx^{-1}yx, v = yxy^{-1}zy$ e $w = zyz^{-1}xz$. Note que

$$[x,y^{-1},z]^y = u^{-1}v;\ \ [y,z^{-1},x]^z = v^{-1}w \text{ e } [z,x^{-1},y]^x = w^{-1}u,$$

logo,

$$\begin{aligned} [x,y^{-1},z]^y[y,z^{-1},x]^z[z,x^{-1},y]^x &= u^{-1}vv^{-1}ww^{-1}u \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Desta forma, podemos definir o subgrupo comutador de H e K, dois subgrupos não vazios de um grupo G, por

$$[H,K] = \langle [h,k] | h \in H, k \in K \rangle.$$

Observe, pelo item (i) do Teorema 1.1, que $[H,K] = [K,H]$. No caso particular em que os subgrupos H, K são iguais ao próprio grupo G, chamamos o subgrupo comutador $[G,G]$ de subgrupo derivado e este é denotado por G'.

De maneira mais geral, sejam $H_1, ...H_n$ subgrupos não vazios de G. Então, para $n \geq 2$,

$$[H_1, ...H_n] = [[H_1, ...H_{n-1}], H_n].$$

Ainda, é conveniente o uso da seguinte notação $[H,_n K] = [H, K, ..., K]$.

Teorema 1.2 *[12, Teorema 1.7] Seja G um grupo e $H, K, L \leq G$. Então*

(i) K *normaliza* H *se e somente se* $[H, K] \leq H$ *e* K *centraliza* H *se e somente se* $[H, K] = 1$.

(ii) $[H, K]^\sigma = [H^\sigma, K^\sigma]$ *para todo homomorfismo* $\sigma : G \to G^*$.

(iii) Se N *é um subgrupo normal de* G*, então* $[HN/N, KN/N] = [H, K]N/N$.

(iv) Se HK *é um subgrupo de* G *e* H *normaliza* L*, então* $[HK, L] = [H, L][K, L]$.

Prova.

(i) K *normaliza* H *se e somente se* $h^k \in H$*, para quaisquer* $h \in H$ *e* $k \in K$. *Então* $[h, k] = h^{-1}h^k \in H$*, para todo* $h \in H$ *e* $k \in K$*, se e somente se* $h^k \in H$*, que ocorre se e somente se* K *normaliza* H.

K *centraliza* H *se e somente se* $hk = kh$*, para quaisquer* $h \in H$ *e* $k \in K$. *Então* $[h, k] = h^{-1}k^{-1}hk = 1$*, para todo* $h \in H$ *e* $k \in K$*, se e somente se* $hk = kh$*, que ocorre se e somente se* K *centraliza* H.

(ii) Pela definição de homomorfismo, para quaisquer $h \in H$ *e* $k \in K$*, segue que*

$$\begin{aligned} [h, k]^\sigma = (h^{-1}k^{-1}hk)^\sigma &= (h^{-1})^\sigma (k^{-1})^\sigma h^\sigma k^\sigma \\ &= (h^\sigma)^{-1}(k^\sigma)^{-1}h^\sigma k^\sigma \\ &= [h^\sigma, k^\sigma]. \end{aligned}$$

Portanto, $[H, K]^\sigma = [H^\sigma, K^\sigma]$*, para todo homomorfismo* $\sigma : G \to G^*$.

(iii) A afirmação segue considerando o epimorfismo natural de G *em* G/N *e aplicando o item anterior.*

(iv) É fato que $[H, L][K, L] \leq [HK, L]$. *Para a outra inclusão veja que, para quaisquer* $k \in K$ *e* $l, l' \in L$*, temos que*

$$[k, l]^{l'} = [k, l']^{-1}[k, ll'] \in [K, L],$$

logo, L *normaliza* $[K, L]$. *Como* H *normaliza* L*, então* $[H, L]$ *também normaliza* $[K, L]$ *e, em particular,* $[H, L][K, L]$ *é um subgrupo. Agora, note que, para quaisquer* $h \in H$*,* $k \in K$ *e* $l \in L$*,*

$$[hk, l] = [h, l][h, l, k][k, l]$$

e como $[h, l, k] \in [H, L, K] \leq [L, K] = [K, L]$*, o resultado segue.*

□

O próximo resultado é conhecido como Lema dos Três Subgrupos.

Lema 1.3 *(Lema dos Três Subgrupos). Sejam H, K e L subgrupos de um grupo G. Se dois dos subgrupos comutadores $[H, K, L], [K, L, H]$ e $[L, H, K]$ estão contidos em um subgrupo normal de G, então o terceiro também está.*
Prova.

Considere o grupo quociente G/N e assuma $N = 1$. Suponha que $[H, K, L], [K, L, H,] \leq N$, então $[H, K, L] = [K, L, H] = 1$. Pela Identidade de Hall-Witt, temos que

$$[h, k^{-1}, l]^k [k, l^{-1}, h]^l [l, h^{-1}, k]^h = 1,$$

para todo $h \in H, k \in K$ e $l \in L$. Como $[h, k^{-1}, l] \in [H, K, L] = 1$ e $[k, l^{-1}, h] \in [K, L, H] = 1$, é claro que $[l, h^{-1}, k]^h = 1$, logo $[L, H, K] = 1$. Portanto, $[L, H, K]$ também está contido no grupo normal N. □

1.2 Grupos Solúveis e Nilpotentes

Agora, vamos apresentar duas classe de grupos baseadas em séries de grupos. Primeiramente, uma série (de comprimento finito) de um grupo G é uma sequência finita de subgrupos incluindo 1 e G, de modo que cada membro da sequência é um subgrupo normal de seu sucessor. Logo, uma série é escrita da seguinte forma

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_n = G,$$

de modo que cada G_i é chamado de termo da série e cada grupo quociente G_{i+1}/G_i é chamado de fator dessa série. Se todos os G_i são distintos, dizemos que essa série tem comprimento n.

Note que não é necessário que cada G_i seja um subgrupo normal de G, já que a normalidade não é uma relação transitiva.

Definição 1.4 *Um grupo G é dito solúvel se possui uma série abeliana, isto é, uma série $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_n = G$, onde cada fator G_{i+1}/G_i é abeliano.*
Se G é solúvel, o comprimento da menor série abeliana de G é chamado de comprimento derivado do grupo solúvel G.

Pela definição, vemos que G tem comprimento derivado 0 se e somente se G tem ordem 1. Também, todo grupo abeliano é solúvel e o grupo de permutação S_3 é um exemplo de um grupo solúvel não-abeliano.

Veja agora dois resultados elementares sobre grupos solúveis.

Proposição 1.5 *[26, 5.1.1] A classe dos grupos solúveis é fechada com respeito à formação de subgrupos, imagens e extensões de seus membros.*

Prova.

Seja G grupo solúvel com uma série abeliana $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_n = G$. Se H é um subgrupo de G, então pelo Segundo Teorema do Isomorfismo $H \cap G_{i+1}/H \cap G_i \cong (H \cap G_{i+1})G_i/G_i \leq G_{i+1}/G_i$, logo, $\{H \cap G_i \mid i = 0, 1, ...n\}$ é uma série abeliana de H e H é solúvel.

Se $N \trianglelefteq G$, então $G_{i+1}N/G_iN \cong G_{i+1}/G_{i+1} \cap (G_iN)$, que é imagem de G_{i+1}/G_i. Pelo Terceiro Teorema do Isomorfismo, $\{G_iN/N \mid i = 0, 1, ..., n\}$ é uma série abeliana de G/N tal que, por consequência, é solúvel.

A terceira afirmação é trivial.

□

Proposição 1.6 *[26, 5.1.2] O produto de dois subgrupos normais solúveis de um grupo G é um subgrupo solúvel de G.*

Prova.

Sejam $M \trianglelefteq G$ e $N \trianglelefteq G$, com M e N solúveis. Pela proposição anterior, $MN/N \cong M/M \cap N$ é solúvel, logo, MN é solúvel. □

Definiremos agora outro conceito baseado em séries de grupos que é a nilpotência de um grupo G.

Definição 1.7 *Um grupo G é chamado de nilpotente se possui uma série central, isto é, uma série normal $1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_n = G$ tal que $G_{i+1}/G_i \subset Z(G/G_i)$ para todo i.*

Se G é nilpotente, o comprimento da menor série central de G é chamado de classe de nilpotência de G.

Observe que o primeiro quociente G_1/G_0 está contido em $Z(G/G_0)$, logo, $1 \neq G_1 \leq Z(G)$. Desta forma, todo grupo nilpotente tem centro não trivial. Além disso, o grupo trivial é nilpotente de classe 0 e todo grupo abeliano é nilpotente de classe 1.

Perceba que, pelas definições, todo grupo nilpotente é solúvel. No entanto, a recíproca não é válida. O grupo de permutação S_3 é um exemplo de um grupo solúvel que não é nilpotente.

Veja o resultado elementar sobre grupos nilpotentes.

Proposição 1.8 *[26, 5.1.4] A classe de grupos nilpotentes é fechada sobre formação de subgrupos, imagens e produtos diretos finitos.*

Lembremos do subgrupo derivado de G denotado por G', gerado por todos os comutadores em G. Ao repetir esse processo de formação de subgrupos derivados, obtemos uma sequência descendente de subgrupos característicos da seguinte maneira

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} = G' \geq G^{(2)} \geq ...$$

onde $G^{(n+1)} = G^{(n)}$. Esta série é chamada de série derivada do grupo G e não necessariamente atinge 1 ou tem fim. Cada um dos fatores $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ é um grupo abeliano e o primeiro fator G/G' é o maior grupo quociente abeliano de G.

Lema 1.9 *[26, 5.1.8] Se $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_n = G$ é uma série abeliana de um grupo solúvel G, então $G^{(i)} \leq G_{n-1}$. Em particular, $G^{(n)} = 1$. O comprimento derivado de G é igual ao comprimento da série derivada de G.*
Prova.

A prova é feita por indução sobre i. Se $i = 0$, é claro que $G^{(0)} = G = G_n$. Assuma que $G^{(i)} \leq G_{n-1}$ é válido para i. Então

$$G^{(i+1)} = (G^{(i)})' \leq (G_{n-1})' \leq G_{n-(i+1)},$$

pois $G_{n-i}/G_{n-(i+1)}$ é abeliano. Segue que nenhuma série abeliana pode ser menor que a série derivada, isto é, o comprimento derivado de G é igual ao comprimento da série derivada de G. □

O Lema anterior implica em uma definição equivalente de solubilidade. Um grupo é solúvel se e somente se sua série derivada atinge o subgrupo identidade após um número finito de passos.

Existe outra forma natural de gerar uma sequência descendente de subgrupos comutadores de um grupo. A série central inferior de um grupo G é construída comutando cada termo repetidamente com o grupo G. Ela é definida por

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) = G' \geq \gamma_3(G) \geq ...$$

onde $\gamma_n(G) = [\gamma_{n-1}(G), G]$. Veja que cada $\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)$ está contido em $Z(G/\gamma_{n+1}(G))$. Como na série derivada, a série central inferior não necessariamente atinge 1.

Existe também uma sequência ascendente de subgrupos. A chamada série central superior de um grupo G é da seguinte forma

$$1 = \zeta_0(G) \leq \zeta_1(G) \leq \zeta_2(G) \leq ...$$

definida por $\zeta_{n+1}(G)/\zeta_n(G) = Z(G/\zeta_n(G))$. Veja que $\zeta_1(G) = Z(G)$. Além disso, a série não necessariamente atinge G, mas no caso em que é finita, esta série termina com um subgrupo chamado hipercentro.

Para um grupo G nilpotente, veja o resultado abaixo.

Teorema 1.10 *[26, 5.1.9] Se $1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_n = G$ é uma série central de um grupo nilpotente G, então*

(i) $\gamma_i(G) \leq G_{n-i+1}$, *em particular,* $\gamma_{n+1}(G) = 1$;

(ii) $G_i \leq \zeta_i(G)$, *em particular,* $\zeta_n(G) = G$;

(iii) classe de nilpotência de G = comprimento da série central superior de G = comprimento da série central inferior de G.

Prova.

(i) A prova é realizada por indução sobre i. Se $i = 1$, temos que

$$\gamma_1(G) = G = G_n = G_{n-1+1}.$$

Agora, assuma $\gamma_i(G) \leq G_{n-i+1}$ como hipótese de indução. Então

$$\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G] \leq [G_{n-i+1}, G]$$

Pela definição de nilpotência de G, $G_{n-i+1}/G_{n-i} \subset Z(G/G_{n-i})$, então $[G_{n-i+1}, G] \leq G_{n-i}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \gamma_{i+1}(G) \leq [G_{n-i+1}, G] &\leq G_{n-i} \\ &= G_{n-(i+1)+1}. \end{aligned}$$

(ii) Utilizando indução sobre i mais uma vez , se $i = 0$, vemos que

$$G_0 = 1 = \zeta_0(G).$$

Agora, assuma que $G_i \leq \zeta_i(G)$ é válido para i. Sabemos que $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$, logo, $[G_{i+1}, G] \leq G_i \leq \zeta_i(G)$. Então

$$G_{i+1}/\zeta_i(G) \leq Z(G/\zeta_i(G)) = \zeta_{i+1}(G)/\zeta_i(G),$$

logo, $G_{i+1} \leq \zeta_{i+1}(G)$.

(iii) Pelos itens (i) e (ii), as séries centrais inferior e superior são as menores séries centrais de G.

□

Em particular, um grupo é nilpotente se e somente se a série central inferior atinge o subgrupo identidade após um número finito de passos ou, equivalentemente, a série central superior atinge o próprio grupo após um número finito de passos.

Temos abaixo alguns resultados relacionados às séries que definimos acima.

Proposição 1.11 *[26, 5.1.11] Seja G um grupo, i e j inteiros positivos. Então*

(i) $G^{(j)} \leq \gamma_j(G)$;

(ii) $[\zeta_j(G), \gamma_i(G)] \leq \zeta_{j-i}(G)$, *se* $j \geq i$.

Prova.

(i) A prova é feita usando indução sobre j. Se $j = 1$, então

$$G^{(1)} = G = \gamma_1(G).$$

Assuma como hipótese de indução que $G^{(j)} \leq \gamma_j(G)$.

$$\begin{aligned} G^{(j+1)} = [G^{(j)}, G^{(j)}] &\leq [\gamma_j(G), G^{(j)}] \\ &\leq [\gamma_j(G), G] \\ &= \gamma_{j+1}(G). \end{aligned}$$

(ii) Utilizaremos indução sobre i. Se $i = 1$, vemos que

$$[\zeta_j(G), \gamma_1(G)] = [\zeta_j(G), G] \leq \zeta_{j-1},$$

pois, por definição, $\zeta_j(G)/\zeta_{j-1}(G) = Z(G/\zeta_{j-1}(G))$.
Agora, assuma como hipótese de indução que $[\gamma_i(G), \zeta_j(G)] \leq \zeta_{j-i}(G)$, se $j \geq i$. Sabemos que

$$[\gamma_{i+1}(G), \zeta_j(G)] = [\gamma_i(G), G, \zeta_j(G)]$$

e pelo Lemas dos Três Subgrupos, obtemos que

$$[\gamma_i(G), G, \zeta_j(G)] \leq [G, \zeta_j(G), \gamma_i(G)][\zeta_j(G), \gamma_i(G), G],$$

da normalidade do lado direito da expressão. Observe, pela definição da série central superior e pela hipótese de indução, que

$$\begin{aligned} [G, \zeta_j(G), \gamma_i(G)][\zeta_j(G), \gamma_i(G), G] &\leq [\zeta_{j-1}(G), \gamma_i(G)][\zeta_{j-i}(G), G] \\ &\leq \zeta_{j-1-i}(G) \\ &= \zeta_{j-(i+1)}(G). \end{aligned}$$

Portanto, $[\gamma_{i+1}(G), \zeta_j(G)] \leq \zeta_{j-(i+1)}(G)$, *como queríamos demonstrar.*

$\square$

O último resultado dessa seção segue do item (iii) do Teorema 1.2, que mostra uma característica da série central inferior de um grupo quociente G/N.

Teorema 1.12 *[12, Teorema 1.11] Seja G grupo e N um subgrupo normal de G. Então $\gamma_i(G/N) = \gamma_i(G)N/N$, para todo $i \geq 1$.*

1.3 Grupos Livres e Apresentação de Grupos

Nesta seção abordaremos os conceitos de grupos livres e apresentação de grupos, assim como algumas propriedades destes. Os resultados apresentados podem ser encontrados em [20], [23] e [26].

1.3.1 Grupos Livres

Definição 1.13 *Um grupo F é livre sobre um conjunto $X \subset F$ se, dado um grupo G qualquer e uma aplicação $\theta : X \to G$, existe um único homomorfismo $\theta' : F \to G$ que estende θ, isto é, $x^\theta = x^{\theta'}$, para todo $x \in X$, isto é, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "inc"] \arrow[d, "\theta"'] & F \arrow[dl, dotted, "\theta'"] \\ G & \end{tikzcd}$$

comuta. Deste modo, X é chamado de base de F e $|X|$ é o posto de F, denotado por $r(F)$.

Vejamos alguns resultados básicos envolvendo grupos livres.

Lema 1.14 *[20, Lema 1, Capítulo 1] Se F é livre sobre X, então X gera F.*

Prova.

Seja $H = \langle X \rangle$. Considere $\theta : X \to H$ a aplicação inclusão de X em H e $\theta' : F \to H$ a extensão de θ. Tome $i : H \to F$ a inclusão de H em F. Assim, $\theta' i : F \to F$ estende a inclusão $\theta i : X \to F$. Como θi é estendida à aplicação identidade em F, por unicidade, segue que $\theta' i = 1_F$. Isto implica que θ' é uma inclusão de F em H, logo, $F \subset H$ e por isso $F = H = \langle X \rangle$. Visualize o diagrama *abaixo.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "inc"] \arrow[d, "\theta"'] & F \arrow[dl, dotted, "\theta'"] \\ G \arrow[d, "i"] & \\ F. & \end{tikzcd}$$

□

Lema 1.15 *[20, Capítulo 1] Sejam F_1 e F_2 grupos livres em X_1 e X_2, com $F_1 \cong F_2$, então $|X_1| = |X_2|$. Reciprocamente, se F_1 e F_2 são livres em X_1 e X_2 com $|X_1| = |X_2|$, então $F_1 \cong F_2$.*

Prova.

Suponha que $|X_1| = |X_2|$, logo, existe uma bijeção $k : X_1 \to x_2$. Sejam α, β as extensões dadas da seguinte forma

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[d, "k"'] & F_1 \arrow[d, "\alpha"] \\ X_2 \arrow[r, "i_2"'] & F_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_2 \arrow[r] \arrow[d, "k^{-1}"'] & F_2 \arrow[d, "\beta"] \\ X_1 \arrow[r, "i_1"'] & F_1, \end{tikzcd}$$

onde i_1 e i_2 são as aplicações inclusão de $X_1 \hookrightarrow F_1$ e $X_2 \hookrightarrow F_2$, respectivamente. Desta forma, α é a extensão da aplicação $ki_2 : X_1 \to F_2$ e β é a extensão da aplicação $k^{-1}i_1 : X_2 \to F_1$, isto é, para quaisquer $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$, temos que $x_1^{\alpha} = x_1^{ki_2}$ e $x_2^{\beta} = x_2^{k^{-1}i_1}$.

Deste modo, dado $x_1 \in X_1$, temos que

$$x_1^{\alpha\beta} = (x_1^{ki_2})^{\beta} = (x_1^{k})^{k^{-1}i_1} = x_1^{i_1} = x_1,$$

logo, $\alpha\beta : F_1 \to F_1$ estende i_1. No entanto, o mesmo ocorre com a aplicação identidade 1_{F_1} em F_1. Pela unicidade da extensão, obtemos que $\alpha\beta = 1_{F_1}$.

Por argumentos análogos, verifica-se que $\beta\alpha = 1_{F_2}$. Portanto, α é isomorfismo com inverso β, concluindo que $F_1 \cong F_2$.

Agora, suponha que F_1 e F_2 são grupos livres em X_1 e X_2, tais que $F_1 \cong F_2$. Pela definição de grupo livre, existe uma bijeção entre o conjunto de todas as aplicações de X_i em G, denotado por $Map(X_i, G)$, e o conjunto de todos os homomorfismos de F_i em G, denotado por $Hom(F_i, G), i = 1, 2$. Tomando $G = \mathbb{Z}_2$ e usando o isomorfismo entre F_1 e F_2, segue que $|Hom(F_1, \mathbb{Z}_2)| = |Hom(F_2, \mathbb{Z}_2)|$, logo, $|Map(X_1, \mathbb{Z}_2)| = |Map(X_2, \mathbb{Z}_2)|$. Desta forma

$$|\mathbb{Z}_2|^{|X_1|} = |\mathbb{Z}_2|^{|X_2|}, \text{ isto é, } 2^{|X_1|} = 2^{|X_2|},$$

portanto, $|X_1| = |X_2|$*, como queríamos demonstrar.* □

No capítulo 1 de Johnson [20], podemos encontrar a construção de $F(X)$, que é a prova da existência de um grupo livre $F(X)$ com base X, para qualquer conjunto X. Para isso, precisamos construir o conjunto $X^{\pm} = \{x, x^{-1} | x \in X\}$ para definirmos o seguinte.

Definição 1.16 *O conjunto das* n*-uplas de elementos de* $X^{\pm}$*, dado por* $W_n = (X^{\pm})^{xn}$ *é chamado de conjunto das palavras de comprimento* $n \geq 0$ *em* $X^{\pm}$*, isto é, uma palavra* $a \in W_n$ *é da forma* $a = (x_1, x_2, ..., x_n)$*, onde cada* $x_i \in X^{\pm}$*.*

Definição 1.17 *Uma palavra* $a = (x_1, x_2, ..., x_n) \in W_n$ *é chamada de reduzida se não possui o par* x, x^{-1} *em posições adjacentes, em qualquer ordem. Denotamos o conjunto das palavras reduzidas de comprimento* n *por* $\tilde{W}_n$*.*

Por fim, definimos $F(X) = \bigcup_{n \geq 0} \tilde{W}_n$ e temos que

Teorema 1.18 *[20, Teorema 1, Capítulo 1] O grupo* $F(X)$ *de palavras reduzidas em* $X^{\pm}$ *é livre em* X*.*

Este Teorema tem como consequência dois resultados importantes que fornecem um ponto de partida para a teoria de apresentação de grupos.

Proposição 1.19 *[20, Proposição 3, Capítulo 1] Um grupo* F *é livre em* X *se e somente se*

(i) X *gera* F*, e*

(ii) nenhuma palavra reduzida em $X^{\pm}$ *de comprimento positivo é igual à 1.*

Prova.

Seja $\theta' : F(X) \to F$ *o homomorfismo que estende a inclusão* $\theta : X \to F$*. Então (i) e (ii) são respectivamente equivalentes às afirmações que* θ' *é sobrejetiva e injetiva. Por outro lado, se* F *é livre em* X*, a extensão* $\phi' : F \to F(X)$ *da inclusão* $\phi : X \to F(X)$ *é um inverso de* θ'*. Se* θ' *possui um inverso, este deve ser um isomorfismo e a liberdade de um grupo é invariante por isomorfismo. Desta forma,*

$$F \text{ é livre em } X \Leftrightarrow \theta' \text{ é uma bijeção} \Leftrightarrow \text{(i) e (ii) são satisfeitos.}$$

□

Proposição 1.20 *[20, Proposição 4, Capítulo 1] Todo grupo é isomorfo a um quociente de algum grupo livre.*

Prova.

Dado um grupo G, seja X o conjunto dos geradores de G (que sempre existe, basta tomarmos $X = G$). Seja $\theta' : F(X) \to G$ a extensão da inclusão $\theta : X \to G$. Note que $Im(\theta') = G$, pois $G = \langle X \rangle$, logo

$$G = Im(\theta') \cong F(X)/\ker(\theta'),$$

pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo. □

1.3.2 Apresentação de Grupos

Para essa seção, considere X um conjunto, $F = F(X)$ o grupo livre em X, R um subconjunto de F e $\overline{R}$ o fecho normal de R, isto é, o menor subgrupo normal de F que contém R. O grupo G denotará o grupo quociente $F/\overline{R}$. Com essas notações, podemos definir

Definição 1.21 *$G = \langle X|R \rangle$ é dita uma apresentação livre ou apenas uma apresentação do grupo G. Os elementos de X são chamados de geradores e os elementos de R são chamados de relatores da apresentação. G é finitamente apresentado se X e R são conjuntos finitos.*

A definição acima cria a noção de que os elementos $x \in X$ geram o grupo G, os relatores $r \in R$ são iguais à 1 em G e G é o maior grupo com estas propriedades. Em alguns momentos, é conveniente substituir R de uma apresentação $G = \langle X|R \rangle$ pelo conjunto $\{r = 1 \mid r \in R\}$, chamado de relações definidoras de G, onde uma relação em G é uma equação entre duas palavras do grupo.

Proposição 1.22 *[20, Proposição 1, Capítulo 4] Todo grupo possui uma apresentação e todo grupo finito possui uma apresentação finita.*
Prova.

Considere um grupo G, $X \subseteq G$ o conjunto dos geradores de G (que sempre existe, basta tomarmos $X = G$) e $\theta' : F(X) \to G$ o homomorfismo tomado na Proposição 1.20. Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, $G \cong F/\ker(\theta')$, logo, $G = \langle X|\ker(\theta') \rangle$, possui uma apresentação.

Se G é finito de ordem g, então X também é finito de ordem r. Assim, $\ker(\theta')$ é gerado pelo conjunto B de cardinalidade $(r-1)g+1$, pelo Teorema de Nielsen-Schreier. Como $\langle B \rangle = \ker(\theta') \trianglelefteq F(X)$, temos que $\langle B \rangle = \overline{B}$. Portanto $G = \langle X|B \rangle$, que é uma apresentação finita.

□

Proposição 1.23 *(Teste da Substituição) [20, Proposição 3, Capítulo 4] Seja uma apresentação $G = \langle X|R \rangle$, um grupo H e uma aplicação $\theta : X \to H$. Então θ se* *estende a um homomorfismo $\theta'' : G \to H$ se e somente se para todo $x \in X$ e $r \in R$, o resultado da substituição de x por x^θ em r dá a identidade de H.*

Um resultado útil no contexto de apresentação de grupos é dado na proposição abaixo.

Proposição 1.24 *[20, Proposição 4, Capítulo 4] Se G e H são grupos com apresentações $G = \langle X|R\rangle$ e $H = \langle Y|S\rangle$, então o produto direto $G \times H$ é dado por*

$$\langle X, Y|R, S, [X, Y]\rangle,$$

onde $[X, Y]$ denota o conjunto de todos os comutadores $[x, y]$ com $x \in X$ e $y \in Y$.

Prova.

Seja $D = \langle X, Y|R, S, [X, Y]\rangle$. Pelo Teste da Substituição, $X \hookrightarrow D$ e $Y \hookrightarrow D$ podem ser estendidas, respectivamente, à homomorfismos $\theta : G \to D$ e $\Psi : H \to D$. Além disso, $xy = yx$ é uma relação em D, então

$$x^\theta y^\Psi = y^\Psi x^\theta \text{ e } g^\theta h^\Psi = h^\Psi g^\theta,$$

para todo $g \in G$ e $h \in H$, visto que X gera G e Y gera H. Desta forma, vemos que existe o seguinte homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \alpha : G \times H & \to & D \\ (g, h) & \mapsto & g^\theta h^\Psi, \end{array}$$

que leva $(x, 1)$ em x e $(1, y)$ em y, para todo $x \in X$ e $y \in Y$, logo, leva os geradores de $G \times H$ nos geradores de D.

Por outro lado, considere a aplicação abaixo.

$$\begin{array}{rcl} f : X \cup Y & \to & G \times H \\ x & \mapsto & (x, 1) \\ y & \mapsto & (1, y). \end{array}$$

Seja r uma relação em D. Se $r \in R$, então $r^f = (r, 1) = (1, 1)$, pois $r = 1$ em G. Analogamente, se $r \in S$, então $r^f = (1, s) = (1, 1)$, pois $s = 1$ em H. Agora, se $r \in [X, Y]$, temos que $r^f = [x, y]^f$ para algum $x \in X$ e algum $y \in Y$. Note que

$$\begin{array}{rcl} r^f = [x^f, y^f] & = & (x^f)^{-1}(y^f)^{-1}x^f y^f \\ & = & (x^{-1}, 1)(y^{-1}, 1)(x, 1)(y, 1) \\ & = & (1, 1). \end{array}$$

Portanto, em qualquer caso, $r^f = (1,1)$*, o que implica que* f *satisfaz as condições do Teste de Substituição. Deste modo,* f *se estende a um homomorfismo* $\beta : D \to G \times H$ *que leva os geradores de* D *nos geradores de* $G \times H$*. Como* $\alpha\beta$ *e* $\beta\alpha$ *fixam o conjunto de geradores em* $G \times H$ *e em* D*, segue que* β *é inverso de* α*, concluíndo que* α *é isomorfismo.*

□

O conceito de apresentação de grupos também é utilizado para definir um novo tipo de produto entre grupos.

Definição 1.25 *Sejam* $G = \langle X|R\rangle$ *e* $H = \langle Y|S\rangle$ *dois grupos. O produto livre de* G *e* H *denotado por* $G * H$ *é dado pela seguinte apresentação*

$$G * H = \langle X, Y|R, S\rangle.$$

O produto livre de dois grupos não depende da apresentação dada para cada grupo. Veja o resultado a seguir.

Proposição 1.26 *Sejam* $G = \langle X|R\rangle$ *e* $H = \langle Y|S\rangle$ *dois grupos. O produto livre* $G * H$ *é unicamente determinado pelos grupos* G *e* H*. Além disso,* $G * H$ *é gerado por dois subgrupos* $\overline{G}$ *e* $\overline{H}$ *isomorfos à* G *e* H*, respectivamente, tais que* $\overline{G} \cap \overline{H} = 1$*.*
Prova.

Sejam $\overline{G} \cong G$ *e* $\overline{H} \cong H$ *com apresentações* $\overline{G} = \langle \overline{X}|\overline{R}\rangle$ *e* $\overline{H} = \langle \overline{Y}|\overline{S}\rangle$*, onde* $\overline{X} \cap \overline{Y} = 1$*. Considere os isomorfismos* $\alpha : G \to \overline{X}$ *e* $\beta : H \to \overline{Y}$*. Como* α *e* β *levam relações definidoras em relações definidoras, obtemos, pelo Teste de Substituição, o homomorfismo natural*

$$\begin{array}{rcl} \alpha * \beta : G * H & \to & \overline{X} * \overline{Y} \\ x & \mapsto & x^{\alpha} \\ y & \mapsto & y^{\beta}. \end{array}$$

Analogamente, temos o seguinte homomorfismo natural

$$\begin{array}{rcl} \alpha^{-1} * \beta^{-1} : \overline{X} * \overline{Y} & \to & G * H \\ \overline{x} & \mapsto & \overline{x}^{\alpha^{-1}} \\ \overline{y} & \mapsto & \overline{y}^{\beta^{-1}}. \end{array}$$

Já que $\alpha^{-1} * \beta^{-1}$ *é o inverso de* $\alpha * \beta$*, segue que* $G * H \cong \overline{G} * \overline{H}$*. Além disso, se* $z \in \overline{G} \cap \overline{H}$*, então o homomorfismo de* $G * H$ *em* G*, dado por* $g \mapsto g$ *e* $h \mapsto 1$*, leva* z

em 1, pois $z \in \overline{H}$. *Tal homomorfismo é injetivo em* $\overline{G}$, *portanto,* $z = 1$ *e* $\overline{G} \cap \overline{H} = 1$, *como queríamos demonstrar.*

□

Proposição 1.27 *Seja* $G * H$ *o produto livre de dois grupos não trivias. Então o subgrupo comutador* $[G, H]$ *de* $G * H$ *é normal. Ademais,* $[G, H]$ *é um grupo livre sobre* $\langle [g, h] | g \in G \backslash \{1\}, h \in H \backslash \{1\} \rangle$.

1.4 O Quadrado Tensorial Não-Abeliano de um Grupo

O Produto Tensorial Não-Abeliano foi introduzido por Brown e Loday em [9], em aplicações na teoria de homotopia. Ele generaliza o produto tensorial de dois grupos abelianos e seu estudo, do ponto de vista da teoria de grupos, se iniciou com Brown, Johnson e Robertson, em [8]. A seguir, vamos apresentar a noção do produto tensorial não-abeliano de grupos.

Definição 1.28 *Sejam* G *e* H *grupos. Uma ação à direita de* G *sobre* H *é um homomorfismo* $\theta : G \to Aut(H)$, *tal que, para cada* $g \in G$ *e* $h \in H$, *denotamos* $g^{\theta}(h) = h^g$. *Dizemos que* G *age sobre* H.

Em particular, G age sobre si mesmo por conjugação.

Definição 1.29 *Considere dois grupos* G *e* H, *tais que,* G *age sobre* H, H *age sobre* G *e cada um age sobre si mesmo por conjugação. Se, para todo* $g, g_1 \in G$ *e* $h, h_1 \in H$, *for satisfeito que*

$$g^{(h_1^g)} = ((g^{g_1^{-1}})^h)^{g_1} \text{ e } h^{(g_1^h)} = ((h^{h_1^{-1}})^g)^{h_1},$$

então G *e* H *agem compativelmente um sobre o outro.*

Definição 1.30 *Sejam* G *e* H *dois grupos que agem compativelmente um sobre o outro. O produto tensorial não-abeliano de* G *e* H, *denotado por* $G \otimes H$, *é o grupo gerado pelo símbolos* $g \otimes h$, *para todo* $g \in G$ *e* $h \in H$, *sujeito às seguintes relações*

$$gg_1 \otimes h = (g_1^g \otimes h_1^g)(g_1 \otimes h)$$

e

$$g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g_1^h \otimes h_1^h),$$

para todo $g, g_1 \in G$ *e* $h, h_1 \in H$.

Este produto generaliza o produto tensorial usual $G/G' \otimes_{(Z)} H/H'$ de grupos abelianizados. Perceba que a ação de G sobre si mesmo por conjugação é sempre compatível, logo, o produto tensorial não-abeliano $G \otimes G$ está sempre definido. Chamaremos $G \otimes G$ de quadrado tensorial não-abeliano de G.

Em [8], mais especificamente nas Proposições 13 e 14, Brown, Johnson e Robertson apresentaram uma descrição para o quadrado tensorial dos grupos dos Quatérnios Generalizados Q_m e dos Diedrais D_{2n}. Veja abaixo.

Exemplo 1.31 *Seja*

$$Q_m = \langle x, y | x^{2m} = y^4 = 1, x^{2m-1} = y^2, x^y = x^{-1} \rangle,$$

onde $m = 4r + k$ *e* $k = 0$ *ou* $k = 2$. *Então*

$$Q_m \otimes Q_m = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2m} \times \mathbb{Z}_{2+k} \times \mathbb{Z}_2.$$

Exemplo 1.32 *Seja*

$$D_{2n} = \langle x, y | x^n = 1 = y^2, y^x = y^{-1} \rangle.$$

Se n *é ímpar, então*

$$D_{2n} \otimes D_{2n} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_m.$$

e, se n *é par, então*

$$D_{2n} \otimes D_{2n} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Em [9, Seção 3], foi apresentado um significado topológico para o produto tensorial não-abeliano. Considere a aplicação $\rho' : G \otimes G \to G'$, dada por $g \otimes h \mapsto [g, h]$. Neste caso, $\mu(G)$ denota o núcleo $\ker(\rho')$. De acordo com [28, Proposição 2.8],

$$1 \to \Delta(G) \to \mu(G) \to H_2(G) \to 1,$$

onde $\Delta(G) = \langle g \otimes g | g \in G \rangle$ e $H_2(G)$ é o segundo grupo de homologia do grupo G. Aqui, a aplicação ρ' corresponde à aplicação k de [9].

Nosso objetivo com o quadrado tensorial é estudar um grupo que está relacionado a ele, o grupo $\nu(G)$ que será apresentado no capítulo 3.

CAPÍTULO 2

p-Grupos Finitos

Seja p um número primo. Um grupo G é um p-grupo se a ordem de cada um de seus elementos é uma potência de p. Desta forma, se G é finito, a ordem de G também é potência de p, $|G| = p^n, \ n \in \mathbb{N}$. É claro que qualquer subgrupo ou grupo quociente de um p-grupo finito é também p-grupo finito.

Neste capítulo estudaremos os p-grupos finitos e apresentaremos duas famílias importantes destes, que serão usadas nos resultados finais deste trabalho.

2.1 Propriedades Gerais

Nesta seção veremos algumas propriedades e características de p-grupos finitos. Os resultados dessa seção foram fundamentados em [13] e [17].

Lema 2.1 *Todo p-grupo finito é nilpotente.*
Prova.

Seja G um p-grupo finito. Se $|G| = 1$, é claro que G é nilpotente. Suponha que $|G| > 1$. Pela Equação das Classes, $Z(G) \neq 1$, logo, $G/Z(G)$ é nilpotente, por indução em $|G|$. Formando pré-imagens dos termos de uma série central de $G/Z(G)$ sob o homomorfismo natural $G \to G/Z(G)$ e adjuntando 1, construímos uma série central para G e G é nilpotente. □

Para todo p-grupo finito podemos definir dois subgrupos baseados na ordem e nas potências p-ésimas de seus elementos. Estes são importantes para estudarmos melhor a estrutura de p-grupos.

Definição 2.2 *Seja $n \in \mathbb{N}$ e G um p-grupo finito. Então*

$$G^{\{p^n\}} = \{g^{p^n} \mid g \in G\} \ e \ G^{p^n} = \langle G^{\{p^n\}} \rangle,$$

$$\Omega_{\{n\}}(G) = \{g \in G \mid g^{p^n} = 1\} \ e \ \Omega_n(G) = \langle \Omega_{\{n\}}(G) \rangle.$$

Teorema 2.3 *[12, Teorema 2.3] Se G é p-grupo finito abeliano, então*

(i) $\Omega_n(G) = \{g \in G \mid g^{p^n} = 1\}$;

(ii) $G^{p^n} = \{g^{p^n} \mid g \in G\}$;

(iii) $|G^{p^n}| = |G : \Omega_n(G)|\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Prova.

Considere $f : G \to G^{p^n}$ *definida por* $f(x) = x^{p^n}$. *É claro que* f *é um homomorfismo quando* G *é grupo abeliano.*

(i) *Note que* $Ker(f) = \{g \in G \mid g^{p^n} = 1\}$. *Logo,* $\Omega_n(G) = \langle Ker(f)\rangle$. *Tome* $x \in \Omega_n(G)$. *Então* $x^{p^n} = 1$, *e por isso* $x \in Ker(f)$. *Portanto,* $\Omega_n(G) \subset Ker(f)$. *Isso implica que*

$$\Omega_n(G) = \langle Ker(f)\rangle = Ker(f).$$

(ii) *Veja que* $Im(f) = \{g^{p^n} \mid g \in G\}$. *Logo,* $G^{p^n} = \langle Im(f)\rangle$. *Por outro lado,* $Im(f) \subset G^{p^n}$. *Isso implica que*

$$G^{p^n} = \langle Im(f)\rangle = Im(f).$$

(iii) *Do Teorema Fundamental do Homomorfismo, segue que* $|Im(f)| = |G : Ker(f)|$, *portanto*

$$|G^{p^n}| = |G : \Omega_n(G)|\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Perceba que se um grupo qualquer satisfaz as três condições do Teorema acima, não podemos afirmar que ele é abeliano.

Definição 2.4 *Um p-grupo finito é chamado de power-abeliano se satisfaz as 3 condições do Teorema 2.3.*

Agora, expressaremos uma série de fórmulas que mostram relações entre comutadores e potências de subgrupos normais de p-grupos finitos. Todas essas são consequências da *Fórmula de Compilação de Philip Hall.*

Teorema 2.5 *[11, Apêndice A] Sejam $x, y \in G$, G grupo qualquer e $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$x^n y^n = (xy)^n c_2^{\binom{n}{2}} ... c_i^{\binom{n}{i}} ... c_{n-1}^n c_n$$

onde $c_i \in \gamma_i(G)$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$.

Se consideramos $n = p^k$, para $k \in \mathbb{N}$, temos que o coeficiente binomial $\binom{p^k}{i}$ é divisível por p^{k-j} para $p^j \leq i \leq p^{j+1}$. Desta forma, obtemos a seguinte reformulação.

Teorema 2.6 *(Fórmula de Compilação de Philip Hall) Seja G grupo e $x, y \in G$. Então, para todo $k \geq 0$,*

$$(xy)^{p^k} \equiv x^{p^k} y^{p^k} (mod\ \gamma_2(H)^{p^k} \gamma_p(H)^{p^{k-1}} \gamma_{p^2}(H)^{p^{k-2}} ... \gamma_{p^k}(H)), \tag{2-1}$$

onde $H = \langle x, y \rangle$, e

$$[x, y]^{p^k} \equiv [x^{p^k}, y](mod\ \gamma_2(L)^{p^k} \gamma_p(L)^{p^{k-1}} \gamma_{p^2}(L)^{p^{k-2}} ... \gamma_{p^k}(L)), \tag{2-2}$$

onde $L = \langle x, [x, y] \rangle$.

Considerando uma quantidade finita de elementos de G, da primeira parte do Teorema, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2.7 *[17, Corolário 2.6] Seja G um grupo e $x_1, ..., x_r$ elementos de G. Então, para todo $k \geq 0$*

$$(x_1...x_r)^{p^k} \equiv x_1^{p^k} ... x_r^{p^k} (mod\ \gamma_2(H)^{p^k} \gamma_p(H)^{p^{k-1}} \gamma_{p^2}(H)^{p^{k-2}} ... \gamma_{p^k}(H)),$$

onde $H = \langle x_1, ..., x_r \rangle$.

Os próximos resultados podem ser encontrados em [13] e representam ferramentas muito importantes para as demonstrações dos nossos resultados futuros.

Lema 2.8 *[13, Lema 2.2] Seja G p-grupo finito e N, M subgrupos normais de G. Se $N \leq M[N, G]N^p$, então $N \leq M$.*
Prova.

Sejam M e N subgrupos normais de um p-grupo finito G. Assuma $M = 1$. Se $N \neq 1$, existe um subgrupo normal K de G tal que $|N : K| = p$. Como $K < N$ e $K, N \trianglelefteq G$, então $N/K \trianglelefteq G/K$. Sabemos que G/K é p-grupo e $|N : K| = p$, logo, $N/K \cap Z(G/N) \neq 1$, implicando que $N/K \leq Z(G/N)$. Assim, temos que $[G, N] \leq K$.

De fato, $|N/K| = p$, portanto, todo elemento de N/K tem ordem p. Note que, $(nK)^p = n^p K = K$, se e somente se $n^p \in K$. Desta forma, $N^p \leq K$. Em conclusão,

$$N \leq [N, G]N^p \leq K,$$

onde K está propriamente contido em N, assim, chegamos numa contradição. $\square$

Por consequência da Fórmula de Compilação de Philip Hall e do Lema anterior, obtemos o seguinte.

Teorema 2.9 *[13, Teorema 2.4] Seja G p-grupo finito e N, M subgrupos normais de G. Então*

$$[N^{p^k}, M] \equiv [N, M]^{p^k} (mod [M,_p N]^{p^{k-1}} [M,_{p^2} N]^{p^{k-2}} \ldots [M,_{p^k} N]),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.
Prova.

Sejam $n \in N$ e $m \in M$. Pelo Teorema 2.6, temos que

$$[n^{p^k}, m] \equiv [n, m]^{p^k} (mod\ \gamma_2(L)^{p^k} \gamma_p(L)^{p^{k-1}} \gamma_{p^2}(L)^{p^{k-2}} \ldots \gamma_{p^k}(L)),$$

onde $L = \langle n, [n, m] \rangle$. De fato, $\gamma_2(L) \leq [N, N, M]$, logo

$$\gamma_2(L)^{p^k} \leq [N, N, M]^{p^k} \leq [N, M]^{p^k}$$

e

$$\begin{aligned} \gamma_{p^i}(L)^{p^{k-i}} = [\gamma_2(L),_{p^i-2} (L)]^{p^{k-i}} &\leq [M, N, N,_{p^i-2} (L)]^{p^{k-i}} \\ &= [M,_{p^i} N]^{p^{k-i}}, \end{aligned}$$

para todo $i = 1, \ldots, k$. Deste modo, temos que

$$[n^{p^k}, m] \in [n, m]^{p^k} [N, M]^{p^k} \prod_{i=1}^{k} [M,_{p^i} N]^{p^{k-i}}.$$

Tomando todos os valores de N e M, obtemos que

$$[N^{p^k}, M] \leq [N, M]^{p^k} \prod_{i=1}^{k} [M,_{p^i} N]^{p^{k-i}}.$$

Para mostrar a outra inclusão, utilizaremos indução sobre a ordem de N. Se $|N| = 1$, é fato que a inclusão é satisfeita. Como $[N, M]$ é gerado por todos os comutadores $[n, m]$ com $n \in N$ e $m \in M$, por 2.6, vemos que

$$[N, M]^{p^k} \leq [N^{p^k}, M][M, N, N]^{p^k} \prod_{i=1}^{k} [M,_{p^i} N]^{p^{k-i}}.$$

Agora, por hipótese de indução sobre $[M, N]$*, temos que*

$$\begin{aligned} [[M,N],N]^{p^k} &\leq [[M,N]^{p^k},N]\prod_{i=1}^{k}[N,_{p^i}[M,N]]^{p^{k-i}} \\ &\leq [[M,N]^{p^k},N]\prod_{i=1}^{k}[M,_{p^i}N]^{p^{k-i}}, \end{aligned}$$

já que $[N, M] \leq [N, G] < N$*. Portanto,*

$$\begin{aligned} [N,M]^{p^k} &\leq [N^{p^k},M][M,N,N]^{p^k}\prod_{i=1}^{k}[M,_{p^i}N]^{p^{k-i}} \\ &\leq [N^{p^k},M][[M,N]^{p^k},N]\prod_{i=1}^{k}[M,_{p^i}N]^{p^{k-i}} \\ &\leq [N^{p^k},M][[N,M]^{p^k},G]\prod_{i=1}^{k}[M,_{p^i}N]^{p^{k-i}} \end{aligned}$$

e pelo Lema 2.8, a inclusão segue. Desta forma, a congruência

$$[N^{p^k},M] \equiv (mod\ [N,M]^{p^k}[M,_p N]^{p^{k-1}}[M,_{p^2} N]^{p^{k-2}} \ldots\ [M,_{p^k} N])$$

é válida, como queríamos demonstrar.

□

Por fim, o resultado abaixo é um caso particular do Teorema Principal provado por Fernández-Alcober em [13].

Teorema 2.10 *[13] Seja* G *p-grupo finito e* $k \geq 1$*. Assuma que* $\gamma_{k(p-1)}(G) \leq \gamma_r(G)^{p^s}$*, para* r *e* s *tais que* $k(p-1) < r + s(p-1)$*. Então o expoente* $\exp(\Omega_i(G))$ *é no máximo* p^{i+k-1} *para todo* i*.*

2.2 p-Grupos *Powerful*

Vamos apresentar agora a primeira família de p-grupos finitos, os p-grupos *powerful*. A teoria básica sobre esse tipo de grupo foi desenvolvida por Alexander Lubotzky e Avinoam Mann [22], em 1987. Os p-grupos *powerful* compartilham de algumas das características dos grupos abelianos, onde estes estão contidos nessa classe.

Para todo p-grupo finito, existe um subgrupo *powerful* cujo índice é limitado por uma função que depende da ordem do grupo. Essa propriedade deu importância a essa família.

Nesta seção, nos baseamos essencialmente em [11], [21] e [22].

Definição 2.11 *Um p-grupo finito G é powerful se p é ímpar e $G' \leq G^p$, ou se $p = 2$ e $G' \leq G^4$.*

Note que como G/G^2 é abeliano e G/G' é o maior quociente abeliano, segue que $G' \leq G^2$ em qualquer 2-grupo. Por este motivo a definição de p-grupo *powerful* para $p = 2$ é diferente de p ímpar.

Definição 2.12 *Um subgrupo N de um p-grupo finito G é powerfully embedded em G se p é ímpar e $[N, G] \leq N^p$, ou se $p = 2$ e $[N, G] \leq N^4$.*

Por abreviação, vamos escrever N $p.e$ G para N *powerfully embedded* em G. Note que, se N $p.e$ G, então N é normal em G e N é também um grupo *powerful.*

Uma das perguntas naturais ao estudarmos uma nova família de grupos é se suas propriedades são herdadas pelos seus subgrupos. No caso dos p-grupos *powerful* a resposta é não. Vejamos os exemplos a seguir.

Exemplo 2.13 *Considere D_8, o grupo diedral de simetrias do quadrado, onde $D_8 = \langle a, x | a^4 = x^2 = 1, a^{-1} = a^x \rangle$ e $|D_8| = 2^3$. Verifica-se que $D_8' = \langle a^2 \rangle$ e $D_8^4 = \{1\}$, então $D_8' \not\leq D_4^4$ e D_8 não é powerful. Agora, construiremos um p-grupo powerful que conterá uma cópia isomorfa de D_8 como subgrupo próprio.*

Defina o grupo $G = C_8 \times D_8$, tal que C_8 é um grupo cíclico de ordem 8 gerado por z e D_8 tem a apresentação definida acima. Veja que $N = \langle [a, x]^{-1} z^4 \rangle = \langle a^2 z^4 \rangle$ é um subgrupo normal de G. Considere o grupo quociente $K = G/N = (C_8 \times D_8)/N$. Observe que

$$\begin{aligned} K' = [K, K] = [G/N, G/N] = [G, G]N/N &= \langle a^2 N \rangle \\ &= \langle z^4 N \rangle \\ &\leq K^4, \end{aligned}$$

portanto, K é um p-grupo powerful. Agora, perceba que $H = \langle aN, xN \rangle \leq K$ é uma cópia isomorfa a D_8 pelo seguinte isomorfismo

$$\begin{aligned} D_8 &\to H \\ a &\mapsto aN \\ x &\mapsto xN. \end{aligned}$$

Como D_8 não é powerful, H também não é. Desta maneira, vemos que o p-grupo powerful G possui um subgrupo H não powerful.

Exemplo 2.14 *Considere p ímpar, então temos que*

$$\begin{aligned} G &= (C_{p^2} \times C_p) \rtimes C_p \\ &= \langle a, x, y | a^{p^2} = x^p = 1, y^{p^2} = a^p, [x, a] = a^p, [a, y] = [a, y] = 1 \rangle \end{aligned}$$

é powerful, já que $G' = G^p = C_p = \langle a^p \rangle$. Sabemos que todo p-grupo possui subgrupos normais de todas as ordens possíveis, logo existe $H \trianglelefteq G$ tal que $H = (C_p \times C_p) \rtimes C_p$. Perceba que H não é abeliano e seu expoente é p, então H não é powerful.

Se considerarmos $p = 2$, então

$$\begin{aligned} G &= (C_8 \times C_2) \rtimes C_2 \\ &= \langle a, x, y | a^4 = x^2 = 1, y^4 = a^2, [x, a] = a^2, [a, y] = [a, y] = 1 \rangle \end{aligned}$$

e $G' = G^p = C_p = \langle a^2 \rangle$, logo, G é powerful, enquanto $H = (C_4 \times C_2) \rtimes C_2$ subgrupo de G não é powerful.

Mais exemplos como esse podem ser encontrados em [21], Capítulo 6.

Apresentaremos agora propriedades de subgrupos $p.e$ em um p-grupo finito.

Teorema 2.15 *Seja G um p-grupo finito e M, N subgrupos normais powerfully embedded em G. Então $[N^p, M] = [N, M]^p$.*

Prova.

Separemos os casos em que p é um primo ímpar e $p = 2$. Suponha que $p > 2$. Pelo Teorema 2.9 e da hipótese que M é powerfully embedded em G, segue que

$$\begin{aligned} [N^p, M] \leq [N, M]^p [M,_p N] &\leq [N, M]^p [M, G,_{p-1} N] \\ &\leq [N, M]^p [M^p,_{p-1} N]. \end{aligned}$$

De fato, $[M^p,_{p-1} N] \leq [M^p, N, N]$, pois $p - 1 \geq 2$. Desta forma, obtemos que

$$\begin{aligned} [N^p, M] \leq [N, M]^p [M^p, N, N] &= [N, M]^p [[M^p, N], N] \\ &\leq [N, M]^p [[M, N]^p [N,_p M], N] \\ &\leq [N, M]^p [[M, N]^p, N][N,_p M, N] \\ &\leq [N, M]^p [[M, N]^p, G][N, G,_{p-1} M, N]. \end{aligned}$$

Verifica-se, utilizando a hipótese que N *é p.e em* G *e* $[M,N]^p \trianglelefteq G$*, que*

$$\begin{aligned}[N^p, M] \leq [N,M]^p[N,M]^p[N^p,_{p-1} M, N] &\leq [N,M]^p[N^p,M,M,N] \\ &\leq [N,M]^p[N^p,M,G,G] \\ &\leq [N,M]^p[N^p,M,G] \\ &= [N,M]^p[[N^p,M],G].\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.8, temos que $[N^p,M] \leq [N,M]^p$.

Por outro lado, $[N,M]^p \leq [N^p,M][M,_p N]$. *Como* M *é p.e em* G*, vemos que*

$$\begin{aligned}[N,M]^p \leq [N^p,M][M,_p N] &\leq [N^p,M][M,G,_{p-1} N] \\ &\leq [N^p,M][M^p,_{p-1} N] \\ &\leq [N^p,M][M^p,N,N].\end{aligned}$$

Da primeira inclusão, obtemos que $[M^p,N] \leq [M,N]^p$*, logo*

$$[N,M]^p \leq [N^p,M][M^p,N,N] \leq [N^p,M][[M,N]^p,N].$$

Segue pelo Lema 2.8 que $[N,M]^p \leq [N^p,M]$. *Portanto, se* $p > 2$*, temos que* $[N,M]^p = [N^p,M]$.

Considere agora o caso em que $p = 2$. *Do Teorema 2.9, sabemos que* $[N^2,M] \equiv [N,M]^2(mod[M,_2 N])$ *e pela hipótese de* M *p.e em* G*, observa-se que*

$$\begin{aligned}[N^2,M] \leq [N,M]^2[M,_2 N] &\leq [N,M]^2[M,G,N] \\ &\leq [N,M]^2[M^4,N].\end{aligned}$$

Mais uma vez, pelo Teorema 2.9, $[M^4,N] \equiv [M,N]^4(mod[N,_2 M]^2[N,_4 M])$. *Já que* N *é p.e em* G*, temos que*

$$\begin{aligned}[N^2,M] \leq [N,M]^2[M^4,N] &\leq [N,M]^2[M,N]^4[N,_2 M]^2[N,_4 M] \\ &\leq [N,M]^2[M,N]^4[N,M]^2[N,G,_3 M] \\ &\leq [N,M]^2[M,N]^4[N,M]^2[N^4,_3 M] \\ &\leq [N,M]^2[N^2,M,G].\end{aligned}$$

Desta forma, pelo Lema 2.8, $[N^2,M] \leq [N,M]^2$. *Além disso,* $[N,M]^2 \leq$

$[N^2, M][M,_2 N]$. *Como* N *e* M *são p.e em* G, *vemos que*

$$\begin{aligned}
[N, M]^2 \leq [N^2, M][M,_2 N] &\leq [N^2, M][M, G, N] \\
&\leq [N^2, M][M^4, N] \\
&\leq [N^2, M][M, N]^4[N,_2 M]^2[N,_4 M] \\
&\leq [N^2, M][M, N]^4[N, G, M]^2[N, G,_3 M] \\
&\leq [N^2, M][M, N]^4[N^4, M]^2[N^4,_3 M] \\
&\leq [N^2, M]([N, M]^2)^2.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 2.8, $[N, M]^2 \leq [N^2, M]$ *e concluímos que a igualdade é válida para* $p = 2$. □

Os próximos resultados mostram que, para um subgrupo N de um p-grupo finito G, tal que N é *p.e* em G, os subgrupo N^p e $[N, G]$ de N herdam essa propriedade.

Teorema 2.16 *[22, Teorema 1.1] Seja* G *p-grupo finito e* $N \leq G$ *tal que* N *é p.e em* G, *então* N^p *é p.e em* G.

Prova.

Considere o caso em que p *é ímpar. Pelo Teorema anterior,* $[N^p, G] = [N, G]^p$. *Como* N *é p.e em* G, *temos que*

$$[N^p, G] = [N, G]^p \leq (N^p)^p,$$

portanto, N^p *é p.e em* G.

Agora, seja $p = 2$. *Sabemos, pelo Teorema anterior e pela hipótese de* N *ser p.e em* G, *que*

$$[N^2, G] = [N, G]^2 \leq (N^4)^2.$$

De acordo com o Corolário 2.7, $(N^4)^2 \equiv N^8 (mod \gamma_2(N^4)^2\gamma_2(N^4))$, *logo,*

$$(N^4)^2 \leq N^8[N^4, G].$$

Além disso, $[N^4, G] \leq [(N^2)^2, G] \leq [N^2, G]^2[G,_2 N^2]$. *Portanto,*

$$\begin{aligned}
[N^2, G] \leq (N^4)^2 &\leq N^8[N^2, G]^2[G, G, N^2] \\
&\leq (N^2)^4[N^2, G]^2[N^2, G, G].
\end{aligned}$$

Utilizando o Lema 2.8, concluímos que $[N^2, G] \leq (N^2)^4$ *e* N^2 *é p.e em* G. □

Teorema 2.17 *[22, Teorema 1.1] Seja G p-grupo finito e M, N subgrupos normais powerfully embedded em G. Então $[N, G]$ e MN são powerfully embedded em G.*
Prova.

Para essa prova, usaremos o Teorema 2.15 e a hipótese de M, N serem powerfully embedded em G. Se $p > 2$, é fácil perceber que

$$[N, G, G] \leq [N^p, G] = [N, G]^p$$

e

$$[MN, G] \leq [M, G][N, G] \leq M^p N^p \leq (MN)^p.$$

Se $p = 2$, temos que

$$\begin{aligned} [N, G, G] \leq [N^4, G] &\leq [N, G]^4 [G,_2 N]^2 [G,_4 N] \\ &\leq [N, G]^4 [G, G, N]^2 [G, N, N, N] \\ &\leq [N, G]^4 [N, G, G]^2 [G, G, G, N] \\ &= [N, G]^4 [N, G, G, G][N, G, G]^2, \end{aligned}$$

logo, pelo Lema 2.8, $[N, G, G] \leq [N, G]^4$. Além disso,

$$[MN, G] \leq [M, G][N, G] \leq M^4 N^4 \leq (MN)^4.$$

Em conclusão, $[N, G]$ e MN são powerfully embedded em G. □

2.3 p-Grupos *Potent*

Em [2], Arganbright introduziu uma família de p-grupos finitos com a propriedade de que $\gamma_n(G) \leq \gamma_m(G)^p$, para $1 < n/m < p$, com n, m inteiros. Em [17], tomando o caso em que $n = p - 1$ e $m = 1$, González-Sánches e Jaikin-Zapirain definiram uma nova família de p-grupos finitos, chamada *potent*.

Definição 2.18 *Um p-grupo finito G é potent se p é ímpar e $\gamma_{p-1}(G) \leq G^p$, ou se $p = 2$ e $G' \leq G^4$.*

Perceba que a definição de p-grupo *potent* coincide com a definição de p-grupo *powerful* para os primos 2 e 3. Mais ainda, se G é p-grupo *powerful* com p ímpar, então $\gamma_{p-1}(G) \leq \gamma_2(G) = G' \leq G^p$, implicando que G é *potent*. No geral, a recíproca não é verdadeira. Os grupos cíclicos de ordem p são exemplos de p-grupo *potent*.

Vejamos alguns resultados sobre essa família de p-grupos.

Teorema 2.19 *Seja G um p-grupo potent. Então*

(i) Se $p = 2$, então $\gamma_{k+1}(G) \leq \gamma_k(G)^4$ e se $p > 2$, então $\gamma_{p-1+k}(G) \leq \gamma_{k+1}(G)^p$;

(ii) $\gamma_k(G)$ é potent, para todo $k \in \mathbb{N}$;

(iii) Se N é um subgrupo normal de G, então G/N é potent.

Prova.

Seja G p-grupo potent.

(i) Usaremos indução sobre k para as duas afirmações. Suponha que $p = 2$. Se $k = 1$, é trivial que $\gamma_2(G) = G' \leq G^4$, já que G é potent. Suponha por hipótese de indução que $\gamma_{k+1}(G) \leq \gamma_k(G)^4$. Deste modo

$$\gamma_{k+2}(G) = [\gamma_{k+1}(G), G] \leq [\gamma_k(G)^4, G].$$

Usando o Teorema 2.9 e o fato de que $k > 1$, verifica-se que

$$\begin{aligned} [\gamma_k(G)^4, G] &\leq [\gamma_k(G), G]^4 [G,_2 \gamma_k(G)]^2 [G,_4 \gamma_k(G)] \\ &\leq \gamma_{k+1}(G)^4 [G, \gamma_k(G), G]^2 [G, \gamma_k(G),_3 \gamma_k(G)] \\ &\leq \gamma_{k+1}(G)^4 \gamma_{k+2}(G)^2 [\gamma_{k+1}(G), G,_2 \gamma_k(G)] \\ &\leq \gamma_{k+1}(G)^4 \gamma_{k+2}(G)^2 [\gamma_{k+2}(G), G, \gamma_k(G)] \\ &\leq \gamma_{k+1}(G)^4 \gamma_{k+2}(G)^2 [\gamma_{k+2}(G), G, G] \\ &\leq \gamma_{k+1}(G)^4 \gamma_{k+2}(G)^2 [\gamma_{k+2}(G), G]. \end{aligned}$$

Portanto

$$\gamma_{k+2}(G) \leq \gamma_{k+1}(G)^4 \gamma_{k+2}(G)^2 [\gamma_{k+2}(G), G]$$

e pelo Lema 2.8, segue que $\gamma_{k+2}(G) \leq \gamma_{k+1}(G)^4$.
Agora, suponha que $p > 2$. Para $k = 0$, $\gamma_{p-1}(G) \leq G^p = \gamma_1(G)^p$, já que G é potent. Suponha por hipótese de indução que $\gamma_{p-1+k}(G) \leq \gamma_{k+1}(G)^p$. Veja que

$$\begin{aligned} \gamma_{p-1+k+1}(G) = [\gamma_{p-1+k}(G), G] &\leq [\gamma_{k+1}(G)^p, G] \\ &\leq [\gamma_{k+1}(G), G]^p [G,_p \gamma_{k+1}(G)] \\ &= \gamma_{k+2}(G)^p \gamma_{p(k+1)+1}(G), \end{aligned}$$

pelo Teorema 2.9. Perceba que

$$p(k+1) + 1 > (p-1)(k+1) + 1 = (p-1)k + p - 1 + 1 > k + p - 1 + 1,$$

logo, $p(k+1)+1 \geq p-1+k+2$ *e* $\gamma_{p(k+1)+1}(G) \leq \gamma_{p-1+k+2}(G)$*. Desta forma*

$$\begin{aligned}\gamma_{p-1+k+1}(G) &\leq \gamma_{k+2}(G)^p\gamma_{p(k+1)+1}(G)\\ &\leq \gamma_{k+2}(G)^p\gamma_{p-1+k+2}(G)\\ &= \gamma_{k+2}(G)^p[\gamma_{p-1+k+1}(G), G],\end{aligned}$$

e pelo Lema 2.8, segue que $\gamma_{p-1+k+1}(G) \leq \gamma_{k+2}(G)^p$*, como queríamos demonstrar.*

(ii) Suponha que $p = 2$*. Note que*

$$\begin{aligned}\gamma_k(G)' = [\gamma_k(G), \gamma_k(G)] &\leq [\gamma_k(G), G]\\ &= \gamma_{k+1}(G)\\ &\leq \gamma_k(G)^4,\end{aligned}$$

pelo item anterior. Assim, $\gamma_k(G)$ *é potent para todo* $k \in \mathbb{N}$*, se* $p = 2$*.*

Agora, suponha que $p > 2$*. Sabemos que* $\gamma_{p-1}(\gamma_k(G)) \leq \gamma_{k(p-1)}(G)$*, pelas propriedades de série central inferior de um grupo. Observe que*

$$\begin{aligned}\gamma_{p-1}(\gamma_k(G)) \leq \gamma_{k(p-1)}(G) &= \gamma_{(p-1)(k-1+1)}(G)\\ &= \gamma_{p-1+(k-1)(p-1)}(G).\end{aligned}$$

Pelo item anterior, tomando $k = (k-1)(p-1)$*, obtemos que*

$$\gamma_{p-1+(k-1)(p-1)}(G) \leq \gamma_{(k-1)(p-1)+1}(G)^p.$$

Note que, como $p-1 > 1$*, então* $(p-1)(k-1) > k-1$*, logo,* $(p-1)(k-1)+1 > k$*. Por isso,*

$$\gamma_{(p-1)(k-1)+1}(G) \leq \gamma_k(G),$$

portanto,

$$\begin{aligned}\gamma_{p-1}(\gamma_k(G)) \leq \gamma_{p-1+(k-1)(p-1)}(G) &\leq \gamma_{(k-1)(p-1)+1}(G)^p\\ &\leq \gamma_k(G)^p.\end{aligned}$$

Desta forma, vemos que $\gamma_k(G)$ *é potent para todo* $k \in \mathbb{N}$*.*

(iii) Seja N *um subgrupo normal de* G *e tome o grupo quociente* G/N*. Suponha*

que $p = 2$. Pela propriedade de subgrupo normal, temos que

$$[G/N, G/N] = [G, G]N/N \leq G^4N/N = (G/N)^4,$$

usando a hipótese de G ser potent. Portanto, G/N é potent. Agora, suponha que $p > 2$. Pelo Teorema 1.12, sabemos que $\gamma_k(G/N) = \gamma_k(G)N/N$, onde $k \geq 1$. Usando este fato e a hipótese de G ser p-grupo potent, temos que

$$\gamma_{p-1}(G/N) = \gamma_{p-1}(G)N/N \leq G^pN/N = (G/N)^p,$$

logo, G/N é potent.

□

Assim como definimos os subgrupos *powerfully embedded* na família dos p-grupos *powerful*, na família dos p-grupos *potent* considere a seguinte definição.

Definição 2.20 *Um subgrupo normal N de um p-grupo finito G é potently embedded em G se p é ímpar e $[N,_{p-2} G] \leq N^p$, ou se $p = 2$ e $[N, G] \leq N^4$.*

Perceba que se $p = 2$ ou $p = 3$, as definições de subgrupo *powerfully embedded* e *potently embedded* em algum grupo G são iguais. Por essa razão, nas demonstrações dos próximos dois resultados basta considerarmos o caso em que p é ímpar, visto que para $p = 2$ as afirmações já foram provadas nos Teoremas 2.15, 2.16 e 2.17.

Teorema 2.21 *Sejam N e M subgrupos potently embedded em G. Então $[N^p, M] = [N, M]^p$.*

Prova.

Considere $p > 2$. Usando o Teorema 2.9 e a hipótese de que M e N são *potently embedded* em G, obtemos que

$$\begin{aligned}
[N^p, M] \leq [N, M]^p[M,_p N] &\leq [N, M]^p[M,_{p-2} G, N, N] \\
&\leq [N, M]^p[M^p, N, N] \\
&\leq [N, M]^p[[M^p, N], N] \\
&\leq [N, M]^p[[M, N]^p[N,_p M], N] \\
&\leq [N, M]^p[[M, N]^p, N][[N,_p M], N] \\
&\leq [N, M]^p[M, N]^p[N,_p M] \\
&\leq [N, M]^p[N,_{p-2} G, M, M] \\
&\leq [N, M]^p[N^p, M, M].
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.8, segue que $[N^p, M] \leq [N, M]^p$. Para a segunda inclusão, utilizaremos novamente o Teorema 2.9 e a inclusão acima. Perceba que

$$\begin{aligned}[N, M]^p \leq [N^p, M][M,_p N] &\leq [N^p, M][M^p, N, N] \\ &\leq [N^p, M][[M, N]^p, N] \\ &\leq [N^p, M][[M, N]^p, G].\end{aligned}$$

Mais uma vez, pelo Lema 2.8, concluímos que $[N, M]^p \leq [N^p, M]$. $\square$

Teorema 2.22 *Seja G um p-grupo potent e N e M subgrupos potently embedded em G. Então*

(i) NM é potently embedded em G;
(ii) $[N, G]$ é potently embedded em G;
(iii) N^p é potently embedded em G.

Prova.

Considere $p > 2$.

(i) Sejam M, N dois subgrupos potently embedded em G. Note que

$$\begin{aligned}[NM,_{p-2} G] = [N,_{p-2} G][M,_{p-2} G] &\leq N^p M^p \\ &\leq (NM)^p.\end{aligned}$$

Além disso, MN é um subgrupo normal a G, já que M e N também são. Portanto, NM é potently embedded em G.

(ii) Observe que

$$\begin{aligned}[[N, G],_{p-2} G] = [N,_{p-2} G, G] &\leq [N^p, G] \\ &= [N, G]^p,\end{aligned}$$

pelo Teorema 2.21. Portanto, $[N, G]$ é potently embedded em G.

(iii) Do Teorema 2.9, segue que $[N^p,_{p-2} G] \leq [N,_{p-2} G]^p [_{p-2}G,_p N]$. Já que N é potently embedded em G, então

$$\begin{aligned}[N^p,_{p-2} G] \leq [N,_{p-2} G]^p [_{p-2}G,_p N] &\leq [N,_{p-2} G]^p [_{p-2}G, N] \\ &\leq (N^p)^p,\end{aligned}$$

logo, N^p é potently embedded em G.

$\square$

CAPÍTULO 3

O grupo $\nu(G)$

Neste capítulo, introduziremos o grupo $\nu(G)$, definido por Rocco em [27]. A motivação para o estudo deste é sua relação com o quadrado tensorial não-abeliano $G \otimes G$, a qual mostraremos em uma proposição deste capítulo. Apresentaremos uma série de resultados e propriedades do grupo $\nu(G)$, baseadas em [27].

Definição 3.1 *Sejam G e G^{φ} grupos isomorfos, via $\varphi : G \to G^{\varphi}, g \to g^{\varphi}$, para todo $g \in G$. Definimos o seguinte grupo*

$$\nu(G) \;=\; \langle G, G^{\varphi} \mid [g, h^{\varphi}]^{k^{\varphi}} = [g, h^{\varphi}]^{k} = [g^{k}, (h^{k})^{\varphi}],\ \forall g, h, k \in G\} \rangle.$$

Lema 3.2 *[27, Lema 2.1; 7, Lema 2.1] As seguintes relações são válidas em $\nu(G)$.*

(i) $[g, h^{\varphi}]^{[k,l^{\varphi}]} = [g, h^{\varphi}]^{[k,l]}$, $\forall g, h, k, l \in G$;

(ii) $[g, h, k^{\varphi}] = [g, h^{\varphi}, k] = [g, h^{\varphi}, k^{\varphi}] = [g^{\varphi}, h, k] = [g^{\varphi}, h, k^{\varphi}] = [g^{\varphi}, h^{\varphi}, k]$, $\forall g, h, k \in G$;

(iii) $[g, g^{\varphi}] \in Z(\nu(G)), \forall g \in G$;

(iv) $[g, h^{\varphi}][h, g^{\varphi}] \in Z(\nu(G)), \forall g, h \in G$;

(v) $[g, g^{\varphi}] = 1, \forall g \in G'$.

Prova.

(i) Usando as relações de $\nu(G)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
[g, h^{\varphi}]^{[k,l^{\varphi}]} &= [g, h^{\varphi}]^{k^{-1}l^{-\varphi}kl^{\varphi}} = [g^{k^{-1}}, (h^{k^{-1}})^{\varphi}]^{l^{-\varphi}kl^{\varphi}} \\
&= [(g^{k^{-1}})^{l^{-\varphi}}, ((h^{k^{-1}})^{l^{-\varphi}})^{\varphi}]^{kl^{\varphi}} \\
&= [(g^{k^{-1}})^{l^{-1}}, ((h^{k^{-1}})^{l^{-1}})^{\varphi}]^{kl^{\varphi}} \\
&= [((g^{k^{-1}})^{l^{-1}})^{k}, (((h^{k^{-1}})^{l^{-1}})^{k})^{\varphi}]^{l^{\varphi}} \\
&= [((g^{k^{-1}})^{l^{-1}})^{k}, (((h^{k^{-1}})^{l^{-1}})^{k})^{\varphi}]^{l} \\
&= [g^{k^{-1}l^{-1}kl}, (h^{k^{-1}l^{-1}kl})^{\varphi}] \\
&= [g, h^{\varphi}]^{k^{-1}l^{-1}kl} \\
&= [g, h^{\varphi}]^{[k,l]},
\end{aligned}$$

para todo $g, h, k, l \in G$.

(ii) Neste item, utilizando as relações de $\nu(G)$ juntamente com as relações de comutadores dadas no Teorema 1.1 e o item (i), temos que

$$\begin{aligned}
[g, h, k^{\varphi}] &= [[g, h], k^{\varphi}] \\
&= [g^{-1}g^{h}, k^{\varphi}] \\
&= [g^{-1}, k^{\varphi}]^{g^{h}}[g^{h}, k^{\varphi}] \\
&= [g^{-1}, k^{\varphi}]^{h^{-1}gh}[g^{h}, ((k^{h^{-1}})^{h})^{\varphi}] \\
&= [g^{-1}, k^{\varphi}]^{h^{-1}gh}[g, (k^{h^{-1}})^{\varphi}]^{h} \\
&= [g, k^{\varphi}]^{-g^{-1}h^{-1}gh}[g, (hkh^{-1})^{\varphi}]^{h} \\
&= [g, k^{\varphi}]^{-[g,h]}[g, (h^{-1})^{\varphi}]^{h}[g, (hk)^{\varphi}]^{h^{-1}h} \\
&= [g, k^{\varphi}]^{-[g,h]}[g, h^{\varphi}]^{-h^{-1}h}[g, (hk)^{\varphi}] \\
&= [g, k^{\varphi}]^{-[g,h]}[g, h^{\varphi}]^{-1}[g, k^{\varphi}][g, h^{\varphi}]^{k^{\varphi}} \\
&= [g, k^{\varphi}]^{-[g,h^{\varphi}]}[g, h^{\varphi}]^{-1}[g, k^{\varphi}][g, h^{\varphi}]^{k^{\varphi}} \\
&= [g, h^{\varphi}]^{-1}[g, k^{\varphi}]^{-1}[g, h^{\varphi}][g, h^{\varphi}]^{-1}[g, k^{\varphi}][g, h^{\varphi}]^{k^{\varphi}} \\
&= [g, h^{\varphi}]^{-1}[g, h^{\varphi}]^{k^{\varphi}} \\
&= [g, h^{\varphi}, k^{\varphi}].
\end{aligned}$$

Agora, usando as relações em $\nu(G)$, note que

$$\begin{aligned}
[g, h^{\varphi}, k^{\varphi}] &= [[g, h^{\varphi}], k^{\varphi}] \\
&= [g, h^{\varphi}]^{-1}[g, h^{\varphi}]^{k^{\varphi}} \\
&= [g, h^{\varphi}]^{-1}[g, h^{\varphi}]^{k} \\
&= [g, h^{\varphi}, k].
\end{aligned}$$

Portanto, $[g, h, k^{\varphi}] = [g, h^{\varphi}, k^{\varphi}] = [g, h^{\varphi}, k]$, para todo $g, h, k \in G$.
De forma análoga, usando argumentos simétricos, obtemos que $[g^{\varphi}, h, k] = [g^{\varphi}, h, k^{\varphi}] = [g^{\varphi}, h^{\varphi}, k]$, para todo $g, h, k \in G$. Para concluir o item perceba,

pelo item (iii) do Teorema 1.1 e pelas relações provadas logo acima que

$$\begin{aligned}
[g^{\varphi}, h, k] = [[h, g^{\varphi}]^{-1}, k] &= ([h, g^{\varphi}, k]^{[h,g^{\varphi}]^{-1}})^{-1} \\
&= [h, g^{\varphi}, k]^{-[h,g^{\varphi}]^{-1}} \\
&= [h, g^{\varphi}, k]^{-[h,g]^{-1}} \\
&= [h, g, k^{\varphi}]^{-[h,g]^{-1}} \\
&= [k^{\varphi}, [h, g]]^{[h,g]^{-1}} \\
&= (k^{-\varphi}(k^{\varphi})^{[h,g]})^{[h,g]^{-1}} \\
&= (k^{-\varphi})^{[h,g]^{-1}} k^{\varphi} \\
&= [[h, g]^{-1}, k^{\varphi}] \\
&= [g, h, k^{\varphi}],
\end{aligned}$$

para todo $g, h, k \in G$. Assim, todas as igualdades seguem.

(iii) *Verifica-se, pelo item (ii), que*

$$[g, g^{\varphi}, h] = [g, g, h^{\varphi}] = [[g, g], h^{\varphi}] = [1, h^{\varphi}] = 1,$$

para todo $g, h \in G$. Por outro lado,

$$1 = [g, g^{\varphi}, h] = [g, g^{\varphi}]^{-1} h^{-1} [g, g^{\varphi}] h,$$

logo, $[g, g^{\varphi}]h = h[g, g^{\varphi}]$, para todo $g, h \in G$. Portanto, $[g, g^{\varphi}] \in Z(\nu(G)), \forall g \in G$.

(iv) *Para todo $g, h \in G$, pelas relações do Teorema 1.1, vemos que*

$$\begin{aligned}
[gh, (gh)^{\varphi}] &= [g, (gh)^{\varphi}]^h [h, (gh)^{\varphi}] \\
&= [g, h^{\varphi}]^h [g, g^{\varphi}]^{h^{\varphi} h} [h, h^{\varphi}][h, g^{\varphi}]^{h^{\varphi}}.
\end{aligned}$$

Nota-se, pelo item (iii), que para qualquer $k \in \nu(G)$

$$\begin{aligned}
[g, g^{\varphi}]^k = k^{-1}[g, g^{\varphi}]k &= [g, g^{\varphi}]k^{-1}k \\
&= [g, g^{\varphi}].
\end{aligned}$$

Por essa razão

$$\begin{aligned}
[gh, (gh)^{\varphi}] &= [g, h^{\varphi}]^h [g, g^{\varphi}][h, h^{\varphi}][h, g^{\varphi}]^{h^{\varphi}} \\
&= [g, h^{\varphi}]^h [h, g^{\varphi}]^{h^{\varphi}} [g, g^{\varphi}][h, h^{\varphi}],
\end{aligned}$$

logo, de acordo com o item (iii)

$$[g,h^{\varphi}]^{h}[h,g^{\varphi}]^{h^{\varphi}} = [gh,(gh)^{\varphi}][h,h^{\varphi}]^{-1}[g,g^{\varphi}]^{-1} \in Z(\nu(G)).$$

Conjugando o lado esquerdo da igualdade por $h^{-\varphi}$ *e utilizando as relações definidas em* $\nu(G)$*, obtemos o seguinte*

$$\begin{aligned}
([g,h^{\varphi}]^{h})^{h^{-\varphi}}[h,g^{\varphi}]^{h^{\varphi}h^{-\varphi}} &= [g^{h},(h^{h})^{\varphi}]^{h^{-\varphi}}[h,g^{\varphi}] \\
&= [g^{h},(h^{h})^{\varphi}]^{h^{-1}}[h,g^{\varphi}] \\
&= [(g^{h})^{h^{-1}},((h^{h})^{h^{-1}})^{\varphi}][h,g^{\varphi}] \\
&= [g,h^{\varphi}][h,g^{\varphi}].
\end{aligned}$$

Por outro lado, conjugando o lado direito da igualdade por $h^{-\varphi}$*, é claro que*

$$[gh,(gh)^{\varphi}]^{h^{-\varphi}}[h,h^{\varphi}]^{-h^{-\varphi}}[g,g^{\varphi}]^{-h^{-\varphi}} = [gh,(gh)^{\varphi}][h,h^{\varphi}]^{-1}[g,g^{\varphi}]^{-1}.$$

Assim, concluímos que

$$[g,h^{\varphi}][h,g^{\varphi}] = [gh,(gh)^{\varphi}][h,h^{\varphi}]^{-1}[g,g^{\varphi}]^{-1} \in Z(\nu(G)),$$

para todo $g,h \in G$.

(v) Se $g \in G'$ *é um comutador simples, então* $g = [h,k]$ *para* $h,k \in G$*. De acordo com as relações de* $\nu(G)$ *e os itens (i) e (ii), verifica-se que*

$$\begin{aligned}
[g,g'] = [[h,k],[h,k]^{\varphi}] &= [h,k,[h,k]^{\varphi}] \\
&= [h,k^{\varphi},[h,k]] \\
&= [h,k^{\varphi}]^{-1}[h,k^{\varphi}]^{[}h,k] \\
&= [h,k^{\varphi}]^{-1}[h,k^{\varphi}]^{[}h,k^{\varphi}] \\
&= [h,k^{\varphi}]^{-1}[h,k^{\varphi}]^{-1}[h,k^{\varphi}][h,k^{\varphi}] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Já se considerarmos um elemento qualquer $g \in G'$*, de forma* $g = [h_1,k_1]...[h_r,k_r]$*, o resultado segue por indução sobre* $r \geq 1$.

□

Observe, pelo item (ii) acima, que todos estes subgrupos comutadores $[G,G,G^{\varphi}] = [G,G^{\varphi},G] = [G,G^{\varphi},G^{\varphi}] = [G^{\varphi},G,G] = [G^{\varphi},G,G^{\varphi}] = [G^{\varphi},G^{\varphi},G]$ são iguais em $\nu(G)$.

Lema 3.3 *[27, Lema 2.2] Sejam $a, b, x \in G$ tais que $[x, a] = [x, b] = 1$. Então $[a, b, x^{\varphi}] = [[a, b]^{\varphi}, x] = 1$.*

Prova.

Nota-se, pelo Lema 3.2 e relações definidas em $\nu(G)$, que

$$\begin{aligned} [a, b, x^{\varphi}] = [a, b^{\varphi}, x] &= [a, b^{\varphi}]^{-1}[a, b^{\varphi}]^{x} \\ &= [a, b^{\varphi}]^{-1}[a^{x}, (b^{x})^{\varphi}]. \end{aligned}$$

Por hipótese, $1 = [x, a] = a^{-x}a$, logo, $a = a^{x}$. De forma análoga, $b = b^{x}$. Desta maneira, verfica-se que

$$\begin{aligned} [a, b, x^{\varphi}] = [a, b^{\varphi}]^{-1}[a^{x}, (b^{x})^{\varphi}] &= [a, b^{\varphi}]^{-1}[a, b^{\varphi}] \\ &= 1. \end{aligned}$$

A segunda identidade é consequência da simetria do item (ii) do Lema 3.2.

□

Lema 3.4 *[27, Lema 2.3] Sejam g, h elementos de G tais que $[g, h] = 1$. Então*

(i) $[g^{n}, h^{\varphi}] = [g, h^{\varphi}]^{n} = [g, (h^{\varphi})^{n}]$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Se g e h são elementos de torção com ordens $|g|$ e $|h|$, respectivamente, então $|[g, h^{\varphi}]|$ divide $mdc(|g|, |h|)$.

Prova.

(i) A demonstração é dada por indução sobre $n \in \mathbb{Z}$. Primeiramente, considere $n \geq 0$. Se $n = 0$, é claro que as identidade são válidas e iguais a 1. Suponha que $[g^{n}, h^{\varphi}] = [g, h^{\varphi}]^{n} = [g, (h^{\varphi})^{n}]$ algum para $n > 0$. Deste modo, usando as relações em 1.1 e as relações definidas em $\nu(G)$, observe que

$$\begin{aligned} [g^{n+1}, h^{\varphi}] = [gg^{n}, h^{\varphi}] &= [g, h^{\varphi}]^{g^{n}}[g^{n}, h^{\varphi}] \\ &= [g^{g^{n}}, (h^{g^{n}})^{\varphi}][g^{n}, h^{\varphi}] \\ &= [g^{-n}gg^{n}, (h^{g^{n}})^{\varphi}][g^{n}, h^{\varphi}] \\ &= [g, (h^{g^{n}})^{\varphi}][g^{n}, h^{\varphi}]. \end{aligned}$$

Por hipótese, $h^g = h$, *logo*

$$\begin{aligned} h^{g^n} = g^{-n}hg^n = g^{-(n-1)}g^{-1}hgg^{n-1} &= g^{-(n-1)}hg^{n-1} \\ &= g^{-(n-2)}g^{-1}hgg^{n-2} \\ &= g^{-(n-2)}hg^{n-2} \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= h. \end{aligned}$$

Isso implica, juntamente com a hipótese de indução, que

$$\begin{aligned} [g^{n+1}, h^{\varphi}] &= [g, (h^{g^n})^{\varphi}][g^n, h^{\varphi}] \\ &= [g, h^{\varphi}][g, h^{\varphi}]^n \\ &= [g, h^{\varphi}]^{n+1}. \end{aligned}$$

Para a outra igualdade, utilizando os mesmos argumentos, temos que

$$\begin{aligned} [g, (h^{\varphi})^{n+1}] = [g, h^{\varphi}(h^{\varphi})^n] &= [g, (h^{\varphi})^n][g, h^{\varphi}]^{(h^{\varphi})^n} \\ &= [g, (h^{\varphi})^n][g, h^{\varphi}]^{h^n} \\ &= [g, (h^{\varphi})^n][g^{h^n}, (h^{h^n})^{\varphi}] \\ &= [g, (h^{\varphi})^n][g, h^{\varphi}]. \end{aligned}$$

Portanto, por hipótese de indução

$$[g, (h^{\varphi})^{n+1}] = [g, h^{\varphi}]^n[g, h^{\varphi}] = [g, h^{\varphi}]^{n+1}.$$

Agora, para $n < 0$, *note que*

$$\begin{aligned} [g, h^{\varphi}]^{-1} = [g^{-1}, h^{\varphi}]^g &= [(g^{-1})^g, (h^g)^{\varphi}] \\ &= [g^{-1}, h^{\varphi}]. \end{aligned}$$

Se $n < 0$, *então* $-n > 0$ *e as igualdades provadas acimas são válidas para* $-n$. *Perceba que*

$$\begin{aligned} [g^n, h^{\varphi}] = [(g^{-n})^{-1}, h^{\varphi}] &= [g^{-n}, h^{\varphi}]^{-1} \\ &= ([g, h^{\varphi}]^{-n})^{-1} \\ &= [g, h^{\varphi}]^n. \end{aligned}$$

Analogamente, por um argumento simétrico, $[g,(h^{\varphi})^n] = [g,h^{\varphi}]^n$*, como queríamos demonstrar.*

(ii) Sabemos que $|g|$ *e*$|h|$ *são números inteiros e* $|h| = |h^{\varphi}|$*. Portanto, pelo item (i)*

$$[g,h^{\varphi}]^{|g|} = [g^{|g|},h^{\varphi}] = [1,h^{\varphi}] = 1$$

e

$$[g,h^{\varphi}]^{|h|} = [g,(h^{\varphi})^{|h|}] = [g,1] = 1.$$

Concluindo que $|[g,h^{\varphi}]|$ *é finita e divide tanto* $|g|$ *quanto* $|h|$*, por consequência,* $|[g,h^{\varphi}]|$ *divide* $mdc(|g|,|h|)$*.*

□

Em [27], Rocco apresenta uma afirmação para a finitude de $\nu(G)$.

Proposição 3.5 *[27, Proposição 2.4] Seja G um grupo finito.*

- *Se* G *é* p*-grupo, então* $\nu(G)$ *é* p*-grupo finito.*
- *Se* G *é nilpotente, então* $\nu(G)$ *é nilpotente de classe finita.*
- *Se* G *é solúvel, então* $\nu(G)$ *é solúvel de comprimento derivado finito.*

A prova desta proposição é baseada na relação entre $\nu(G)$ e o grupo $\chi(G)$, introduzido por Sidki em [30]. Este é definido da seguinte forma

$$\chi(G) = \langle G, G^{\varphi} \mid [g,g^{\varphi}] = 1, \forall g \in G\rangle,$$

no qual G^{φ} é uma cópia isomorfa de G.

Em [30], Sidki mostra que $\chi(G)$ possui um subgrupo $R(G) = [G, L(G), G^{\varphi}]$, sendo $L(G) = [G,\varphi] = \langle g^{-1}g^{\varphi}, \forall g \in G\rangle$, de modo que a relação $[g,h^{\varphi}]^{k^{\varphi}} = [g^k,(h^k)^{\varphi}]$ é satisfeita em $\chi(G)/R(G)$ para todo $g,h,k \in G$.

Desta forma, existe um epimorfismo

$$\begin{array}{rcl} \rho : \nu(G) & \to & \chi(G)/R(G) \\ g & \mapsto & gR(G) \\ g^{\varphi} & \mapsto & g^{\varphi}R(G), \end{array}$$

definido para todo $g \in G$. De acordo com o item (iii) do Lema 3.2, $\ker(\rho)$ está contido em $Z(\nu(G)) \cap (\nu(G))'$.

Como em [30] temos o resultado de que, se G p-grupo finito, nilpotente finito ou solúvel finito, então $\chi(G)$ também é p-grupo finito, nilpotente finito ou solúvel finito, concluímos que a Proposição 3.5 é válida.

Para a próxima Proposição, considere N um subgrupo normal de G. Defina o grupo quociente $\overline{G} = G/N$ e denote por π o epimorfismo canônico de G em $\overline{G}$. Perceba que este origina outro epimorfismo $\widetilde{\pi}$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi} : \nu(G) &\to \nu(\overline{G}) \\ g &\mapsto \overline{g} \\ g^{\varphi} &\mapsto \overline{g^{\varphi}}, \end{aligned}$$

de modo que $\overline{G^{\varphi}} = G^{\varphi}/N^{\varphi}$ é identificado com $\overline{G}^{\varphi}$.

Proposição 3.6 *[27, Proposição 2.5] Seja N um subgrupo normal de G.*

(i) Então $[N, G^{\varphi}] \trianglelefteq \nu(G)$ e $[G, N^{\varphi}] \trianglelefteq \nu(G)$.

(ii) $\ker \widetilde{\pi} = [N, G^{\varphi}][G, N^{\varphi}].\langle N, N^{\varphi}\rangle$, onde o ponto denota produto semidireto interno.

Prova.

1. *Sejam $x \in N$ e $g, h \in G$, logo, $[x, g^{\varphi}] \in [N, G^{\varphi}]$. Veja que*

$$\begin{aligned} [x, g^{\varphi}]^h &= [x, g^{\varphi}][x, g^{\varphi}]^{-1}[x, g^{\varphi}]^h \\ &= [x, g^{\varphi}][x, g^{\varphi}, h] \\ &= [x, g^{\varphi}][x, g, h^{\varphi}] \\ &= [x, g^{\varphi}][x^{-1}x^g, h^{\varphi}]. \end{aligned}$$

Verifica-se, da normalidade de N que $x^{-1}x^g \in N$, logo, $[x^{-1}x^g, h^{\varphi}] \in [N, G^{\varphi}]$. Portanto, $[x, g^{\varphi}]^h \in [N, G^{\varphi}]$. Isso implica que G normaliza $[N, G^{\varphi}]$. Analogamente

$$\begin{aligned} [x, g^{\varphi}]^{h^{\varphi}} &= [x, g^{\varphi}][x, g^{\varphi}, h^{\varphi}] \\ &= [x, g^{\varphi}][x, g, h^{\varphi}] \\ &= [x, g^{\varphi}][x^{-1}x^g, h^{\varphi}] \in [N, G^{\varphi}], \end{aligned}$$

desta forma, G^{φ} normaliza $[N, G^{\varphi}]$. Concluímos que $[N, G^{\varphi}] \trianglelefteq \nu(G)$. O argumento para $[G, N^{\varphi}]$ é análogo.

2. *Denote $M = [N, G^{\varphi}][G, N^{\varphi}].\langle N, N^{\varphi}\rangle$. De fato*

$$\ker \widetilde{\pi} = \{g \in G,\ g^{\varphi} \in G^{\varphi} \mid \widetilde{\pi}(g) = \overline{g} = N,\ \widetilde{\pi}(g^{\varphi}) = \overline{g^{\varphi}} = N^{\varphi}\}.$$

Veja que, para todo $n \in N$ e $n^{\varphi} \in N^{\varphi}$

$$\widetilde{\pi}(n) = \overline{n} = nN = N \text{ e } \widetilde{\pi}(n^{\varphi}) = \overline{n^{\varphi}} = n^{\varphi}N^{\varphi} = N^{\varphi},$$

isto é, $N, N^{\varphi} \leq \ker \widetilde{\pi}$*. Assim,*

$$\begin{aligned} M = [N, G^{\varphi}][G, N^{\varphi}].\langle N, N^{\varphi}\rangle &\leq [\ker \widetilde{\pi}, G^{\varphi}][G, \ker \widetilde{\pi}] \ker \widetilde{\pi} \\ &\leq \ker \widetilde{\pi}, \end{aligned}$$

pela normalidade de $\ker \widetilde{\pi}$ *em* $\nu(G)$*. Mais ainda,* M *é um subgrupo normal de* $\nu(G)$ *e, em razão disso, podemos definir a seguinte função*

$$\begin{aligned} \theta : \overline{G} \cup \overline{G}^{\varphi} &\to \nu(G)/M \\ \overline{g} &\mapsto gM \\ \overline{g}^{\varphi} &\mapsto g^{\varphi}M. \end{aligned}$$

É claro que $N, N^{\varphi} \subseteq M$*, implicando que* θ *está bem definida. Além disso, é fácil perceber que as restrições de* θ *à* $\overline{G}$ *e* $\overline{G}^{\varphi}$ *são ambas homomorfismos. Desta forma, pela propriedade universal do produto livre, existe um único homorfismo* θ^* *que estende* θ *ao produto livre* $\overline{G} * \overline{G}^{\varphi}$*.*

Considere $g_1, g_2, g_3 \in G$*. Sabemos que as seguintes relações são válidas em* $\nu(\overline{G})$

$$\begin{aligned} [\overline{g_1}\ \overline{g_2}, \overline{g_3}^{\varphi}] &= [\overline{g_1}, \overline{g_3}^{\varphi}]^{\overline{g_2}}[\overline{g_2}, \overline{g_3}^{\varphi}] \\ &= [\overline{(g_1^{g_2})}, \overline{(g_3^{g_2})}^{\varphi}][\overline{g_2}, \overline{g_3}^{\varphi}] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [\overline{g_1}, (\overline{g_2}\ \overline{g_3})^{\varphi}] &= [\overline{g_1}, \overline{g_3}^{\varphi}][\overline{g_1}, \overline{g_2}^{\varphi}]^{\overline{g_3}^{\varphi}} \\ &= [\overline{g_1}, \overline{g_3}^{\varphi}][\overline{(g_1^{g_3})}, \overline{(g_2^{g_3})}^{\varphi}]. \end{aligned}$$

Aplicando-as em θ^**, obtemos que*

$$\begin{aligned} [\overline{g_1}\ \overline{g_2}, \overline{g_3}^{\varphi}]^{\theta^*} &= [g_1 M g_2 M, g_3^{\varphi} M] \\ &= [g_1 g_2, g_3^{\varphi}]M \\ &= [g_1, g_3^{\varphi}]^{g_2}[g_2, g_3^{\varphi}]M \\ &= [g_1^{g_2}, (g_3^{g_2})^{\varphi}][g_2, g_3^{\varphi}]M \\ &= [g_1^{g_2}, (g_3^{g_2})^{\varphi}]M[g_2, g_3^{\varphi}]M \\ &= [\overline{(g_1^{g_2})}, \overline{(g_3^{g_2})}^{\varphi}]^{\theta^*}[\overline{g_2}, \overline{g_3}^{\varphi}]^{\theta^*}. \end{aligned}$$

De maneira análoga, por simetria

$$[\overline{g_1}, (\overline{g_2}\ \overline{g_3})^{\varphi}]^{\theta^*} = [\overline{g_1}, \overline{g_3}^{\varphi}]^{\theta^*} [\overline{(g_1^{g_3})}, \overline{(g_2^{g_3})}^{\varphi}]^{\theta^*},$$

implicando que θ^* preserva essas relações. Deste modo, θ^* induz o homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\theta} : \nu(\overline{G}) & \to & \nu(G)/M \\ \overline{g} & \mapsto & \overline{g}^{\theta} \\ \overline{g}^{\varphi} & \mapsto & (\overline{g}^{\varphi})^{\theta}. \end{array}$$

Olhando por outro lado, o fato $M \leq \ker \widetilde{\pi}$ induz o epimorfismo

$$\begin{array}{rcl} \overline{\pi} : \nu(G)/M & \to & \nu(\overline{G}) \\ gM & \mapsto & \overline{g} \\ g^{\varphi}M & \mapsto & \overline{g}^{\varphi}, \end{array}$$

de forma que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
\ker \widetilde{\pi} \arrow[dr] & & \nu(G)/M \arrow[dd, "\overline{\pi}"] \\
& \nu(G) \arrow[ur] \arrow[dr, "\widetilde{\pi}"'] & \\
M \arrow[uu] \arrow[ur] & & \nu(\overline{G})
\end{tikzcd}$$

Observe que, fazendo a composição de $\widetilde{\theta}$ com $\overline{\pi}$, obtemos

$$(\overline{g})^{\widetilde{\theta}\overline{\pi}} = (gM)^{\overline{\pi}} = \overline{g}$$

e

$$(\overline{g}^{\varphi})^{\widetilde{\theta}\overline{\pi}} = (g^{\varphi}M)^{\overline{\pi}} = \overline{g}^{\varphi}.$$

Assim sendo, $\widetilde{\theta}\overline{\pi} = 1_{\nu(G)}$ e, por consequência, $\widetilde{\theta}$ é um isomorfismo. Portanto, $\nu(G)/M \cong \nu(\overline{G}) \cong \nu(G)/\ker \widetilde{\pi}$, concluindo que $M = \ker \widetilde{\pi}$.

$\square$

Considere o seguinte subgrupo de $\nu(G)$, dado por $\Upsilon(G) = [G, G^{\varphi}]$. Pelas relações definidas em $\nu(G)$, é fácil perceber que este subgrupo é normal. Uma das motivações para o estudo de $\nu(G)$ se dá em razão do subgrupo $\Upsilon(G)$ ser isomorfo ao quadrado tensorial não abeliano de G, como iremos provar em seguida.

Defina a seguinte aplicação τ por

$$\begin{aligned} \tau : G \otimes G &\to \Upsilon(G) \\ g \otimes h &\mapsto [g, h^{\varphi}]. \end{aligned}$$

Esta, por ser estendida à um epimorfismo, já que τ preserva as relações que definem $G \otimes G$. Com efeito, temos que

Proposição 3.7 *[27, Proposição 2.6] τ é um isomorfismo.*

Prova. O subgrupo comutador $\Upsilon(G) = [G, G^{\varphi}]$ do produto livre $G * G^{\varphi}$ é normal, livre e livremente gerado pelos comutadores $[g, h^{\varphi}]$, onde $g, h \in G \backslash \{1\}$.

Da normalidade de $\Upsilon(G)$ em $G * G^{\varphi}$, este admite as ações de G e G^{φ} por conjugação e as seguintes identidades são válidas

$$\begin{cases} [g, h^{\varphi}]^{k} = [gk, h^{\varphi}][k, h^{\varphi}]^{-1} \\ [g, h^{\varphi}]^{k^{\varphi}} = [g, k^{\varphi}]^{-1}[g, (hk)^{\varphi}] \end{cases}$$

para todo $g, h, k \in G$.

Agora, seja

$$R = \{[g, h^{\varphi}]^{k}[g^{k}, (h^{k})^{\varphi}]^{-1}, [g^{k}, (h^{k})^{\varphi}]([g, h^{\varphi}]^{k^{\varphi}})^{-1} \mid g, h, k \in G\}$$

e N o fecho normal de R. Podemos enxergar $\nu(G)$ como o quociente $G * G^{\varphi}/N$. Denote por $\overline{\alpha}$ o seguinte epimorfismo

$$\begin{aligned} \overline{\alpha} : G * G^{\varphi} &\to \nu(G) \\ g &\mapsto g \\ g^{\varphi} &\mapsto g^{\varphi}. \end{aligned}$$

Pelo Teste da Substituição, $\overline{\alpha}$ induz o seguinte isomorfismo α

$$\begin{aligned} \alpha : G * G^{\varphi}/N &\to \nu(G) \\ gN &\mapsto g \\ g^{\varphi}N &\mapsto g^{\varphi}. \end{aligned}$$

Verifica-se, pelo Teorema da Correspondência, o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
G * G^{\varphi}/N \arrow[r, "\alpha"] & \nu(G) \\
N[G, G^{\varphi}]/N \arrow[u] \arrow[r, "\delta_1"] & \Upsilon(G) \arrow[u] \\
N \arrow[u] \arrow[r] & \{1\} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

De fato, $N[G, G^{\varphi}]/N = [G, G^{\varphi}]/N$, *implicando em um isomorfismo entre* $[G, G^{\varphi}]/N$ *e* $\Upsilon(G)$. *Seja este isomorfismo* δ_1 *dado por* $([g, h^{\varphi}]N)^{\delta_1} = [g, h^{\varphi}]$, *para todo* $g, h \in G$.

Defina, para todo $g, h \in G$, *o epimorfismo*

$$\begin{array}{rcl} \mu : [G, G^{\varphi}] & \to & G \otimes G \\ [g, h^{\varphi}] & \mapsto & g \otimes h. \end{array}$$

Como $N^{\mu} = 1_{G \otimes G}$, *temos que* μ *induz um epimorfismo* δ *entre* $[G, G^{\varphi}]/N$ *e* $G \otimes G$, *dado por* $([g, h^{\varphi}]N)^{\delta} = g \otimes h$. *Observe o diagrama a seguir.*

$$\begin{tikzcd}
 & \Upsilon(G) \arrow[dl, "\delta_1^{-1}"'] \arrow[dd, "\psi = \delta_1^{-1}\delta"] \\
{[G, G^{\varphi}]/N} \arrow[dr, "\delta"'] & \\
 & G \otimes G
\end{tikzcd}$$

Vemos que $\psi = \delta_1^{-1}\delta$ *é um epimorfismo entre* $\Upsilon(G)$ *e* $G \otimes G$. *Por ora, tome* $g, h \in G$ *quaisquer. Obtemos que*

$$\begin{array}{rcl} (g \otimes h)^{\tau\psi} = ([g, h^{\varphi}])^{\psi} & = & ([g, h^{\varphi}])^{\delta_1^{-1}\delta} \\ & = & ([g, h^{\varphi}]N)^{\delta} \\ & = & g \otimes h \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} [g, h^{\varphi}]^{\psi\tau} = ([g, h^{\varphi}])^{\delta_1^{-1}\delta\tau} & = & ([g, h^{\varphi}]N)^{\delta\tau} \\ & = & (g \otimes h)^{\tau} \\ & = & [g, h^{\varphi}]. \end{array}$$

Em conclusão, $\tau\psi = 1_{G\otimes G}$ *e* $\psi\tau = 1_{\Upsilon(G)}$*, logo,* τ *é um isomorfismo.* $\square$

Encerramos essa seção com uma última Proposição.

Proposição 3.8 *[27, Proposição 2.7] Sobre as séries derivada, central superior e central inferior de um grupo* G*, verificam-se as seguintes afirmações.*

(i) $[\zeta_j(G), (G^\varphi)^{(j+1)}] = 1$*, para todo* $j \geq 0$*;*

(ii) $[\zeta_{j+1}(G), \gamma_j(G^\varphi)].[\gamma_j(G), \zeta_{j+1}(G^\varphi)] \in Z(\Upsilon(G))$*, para todo* $j \geq 1$*;*

(iii) $[\zeta_j(G), \gamma_j(G^\varphi)] \in Z(\nu(G))$*, para todo* $j \geq 1$*.*

Prova.

(i) Se $j = 0$*, então*

$$[\zeta_0(G), (G^\varphi)^{(1)}] = [1, G^\varphi] = 1.$$

No caso em que $j \geq 1$*, sabemos, pelos itens* (i) *e* (ii) *da Proposição 1.11, que* $[\zeta_j(G), G^{(j)}] \leq [\zeta_j(G), \gamma_j(G)] = 1$*. Assim, tomando* $x \in \zeta_j(G)$ *e* $a, b \in G^{(j)}$*, temos que*

$$[x, a] = [x, b] = 1.$$

Aplicando o Lema 3.3, obtemos que

$$[[a, b]^\varphi, x] = 1,$$

onde $[a, b]^\varphi \in [G^{(j)}, G^{(j)}]^\varphi = (G^\varphi)^{(j+1)}$*. Portanto,* $[(G^\varphi)^{(j+1)}, \zeta_j(G)] = 1$*.*

(ii) Sejam $z \in \zeta_{j+1}(G), g \in \gamma_j(G)$ *e* $g_1, g_2 \in G$*. Utilizando os itens* (i) *e* (ii) *do Lema 3.2, é claro que*

$$\begin{aligned} [[z, g^\varphi], [g_1, g_2^\varphi]] &= [z, g^\varphi]^{-1}[z, g^\varphi]^{[g_1, g_2^\varphi]} \\ &= [z, g^\varphi]^{-1}[z, g^\varphi]^{[g_1, g_2]} \\ &= [z, g^\varphi, [g_1, g_2]] \\ &= [z, g, [g_1, g_2]^\varphi]. \end{aligned}$$

De acordo com o item (ii) *da Proposição 1.11,* $[z, g] \in [\zeta_{j+1}(G), \gamma_j(G)] \leq \zeta_1(G) = Z(G)$ *para todo* $j \geq 1$*, implicando que*

$$[[z, g], g_1] = [[z, g], g_2] = 1.$$

Usando mais uma vez o Lema 3.3, obtemos

$$[[g_1, g_2]^\varphi, [z, g]] = 1,$$

logo,

$$[[z, g^\varphi], [g_1, g_2^\varphi]] = [z, g, [g_1, g_2]^\varphi] = 1.$$

Em conclusão, $[\zeta_{j+1}(G), \gamma_j(G^\varphi)]$ *é um elemento central em* $\Upsilon(G)$ *e, por simetria,* $[\gamma_j(G), \zeta_{j+1}(G^\varphi)]$ *também é central em* $\Upsilon(G)$*, para todo* $j \geq 1$.

(iii) *Dados* $z \in \zeta_j(G), g \in \gamma_j(G)$ *e* $h \in G$*, note que*

$$[z, g^\varphi, h] = [z, g, h^\varphi] = 1$$

e

$$[z, g^\varphi, h^\varphi] = [z, g, h^\varphi] = 1,$$

pois $[z, g] \in [\zeta_j(G), \gamma_j(G)] = 1$*, pela Proposição 1.11. Portanto,* $[\zeta_j(G), \gamma_j(G^\varphi)] \in Z(\nu(G))$*, para todo* $j \geq 1$.

$\square$

CAPÍTULO 4

Resultados Principais

Este capítulo tem como objetivo demonstrar alguns dos resultados principais obtidos nos artigos [27] e [3]. Os Teoremas A e B foram mostrados por Rocco em [27] como corolários dos seguintes teoremas.

Teorema 4.3 [10, Proposição 2.7] Para $i \geq 2$, o i-ésimo termo da série central inferior de $\nu(G)$ é dado por

$$\gamma_i(\nu(G)) = \gamma_i(G)\gamma_i(G^\varphi)[\gamma_{i-1}(G), G^\varphi].$$

Teorema 4.5 [27, Teorema 3.3] Para $i \geq 2$, o i-ésimo termo da série derivada de $\nu(G)$ é dado por

$$\nu(G)^{(i)} = G^{(i)}(G^\varphi)^{(i)}[G^{(i-1)}, (G^\varphi)^{(i-1)}].$$

Já os Teoremas C e D são resultados principais de [3].

4.1 Prova dos Teoremas A e B

Nesta seção, vamos provar uma série de resultados fundamentais para garantirmos as condições dos Teoremas A e B, que serão obtidos como os Corolários 4.4 e 4.6.

Teorema A. Seja G um grupo nilpotente de classe c. Então $\nu(G)$ é um grupo nilpotente de classe no máximo $c + 1$.

Teorema B. Seja G um grupo solúvel de comprimento derivado l. Então $\nu(G)$ um grupo solúvel de comprimento derivado no máximo $l + 1$.

Lema 4.1 *[10] O grupo $\nu(G)$ pode ser descrito como o seguinte produto semidireto de grupos*

$$\nu(G) = \Upsilon(G).G.G^{\varphi}.$$

Prova.

Podemos formar o produto semidireto $\Upsilon(G).G$ usando a ação de G sobre $\Upsilon(G)$ dada por $[g, h^{\varphi}]^k = [g^k, (h^k)^{\varphi}]$. Mais ainda, existe uma ação bem definida de G^{φ} em $\Upsilon(G).G$, que consiste em $([g, h^{\varphi}], k)^{k^{\varphi}} = ([g^k, (h^k)^{\varphi}], l)$, para todo $g, h, k, l \in G$.

Defina o seguinte homomorfismo

$$\begin{aligned} \Psi : \nu(G) &\rightarrow (\Upsilon(G).G).G^{\varphi} \\ g &\mapsto (1, g, 1) \\ g^{\varphi} &\mapsto (1, 1, g^{\varphi}). \end{aligned}$$

Considere o diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \Upsilon(G) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi'"] & \nu(G) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi"] & G \times G^{\varphi} \arrow[r] \arrow[d, "1_{GxG^{\varphi}}"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & G \otimes G \arrow[r] & (\Upsilon(G).G).G^{\varphi} \arrow[r] & G \times G^{\varphi} \arrow[r] & 1, \end{tikzcd}$$

tal que Ψ' é a restrição de Ψ à $\Upsilon(G)$. Pela Proposição 3.7, Ψ' é um isomorfismo, logo, Ψ é isomorfismo.

$\square$

Lema 4.2 *Se $\gamma_i(G)$ e $\gamma(G^{\varphi})$ são, respectivamente, os i-ésimos termos das séries centrais inferior de G e G^{φ} e $G^{(i)}$ e $(G^{\varphi})^{(i)}$ são, respectivamente, os i-ésimos termos das séries derivadas de G e G^{φ}, então*

(i) $\gamma_i(G^{\varphi}) = \gamma(G)^{\varphi}$, *para* $i \geq 1$;
(ii) $(G^{\varphi})^{(i)} = (G^{(i)})^{\varphi}$ *para* $i \geq 0$.

Prova.

(i) Utilizaremos indução sobre i. Se $i = 1$, então

$$\gamma_1(G^{\varphi}) = G^{\varphi} = \gamma_1(G)^{\varphi}.$$

Suponha que $\gamma_i(G^\varphi) = \gamma(G)^\varphi$. *Temos que*

$$\begin{aligned} \gamma_{i+1}(G^\varphi) = [\gamma_i(G^\varphi), G^\varphi] &= [\gamma_i(G)^\varphi, G^\varphi] \\ &= [\gamma_i(G), G]^\varphi \\ &= \gamma_{i+1}(G)^\varphi. \end{aligned}$$

(ii) A prova será realizada por indução sobre i. *Se* $i = 0$, *então*

$$(G^\varphi)^{(0)} = G^\varphi = (G^{(0)})^\varphi.$$

Suponha que $(G^\varphi)^{(i)} = (G^{(i)})^\varphi$. *Assim,*

$$\begin{aligned} (G^\varphi)^{(i+1)} = [(G^\varphi)^{(i)}, (G^\varphi)^{(i)}] &= [(G^{(i)})^\varphi, (G^{(i)})^\varphi] \\ &= [(G^{(i)}), (G^{(i)})]^\varphi \\ &= (G^{(i+1)})^\varphi. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.3 *[10, Proposição 2.7] Para* $i \geq 2$, *o i-ésimo termo da série central inferior de* $\nu(G)$ *é dado por*

$$\gamma_i(\nu(G)) = \gamma_i(G)\gamma_i(G^\varphi)[\gamma_{i-1}(G), G^\varphi].$$

Prova.

A prova é feita por indução sobre i. *Para* $i = 2$:

$$\gamma_2(\nu(G)) = [\nu(G), \nu(G)] = [\Upsilon(G).G.G^\varphi, \Upsilon(G).G.G^\varphi].$$

Pela item (iv) do Teorema 1.2 e (i) da Proposição 3.6, obtemos o seguinte

$$\begin{aligned} \gamma_2(\nu(G)) &= [\Upsilon(G).G.G^\varphi, \Upsilon(G).G.G^\varphi] \\ &= [\Upsilon(G), \Upsilon(G)][\Upsilon(G), G][\Upsilon(G), G^\varphi][G, \Upsilon(G)][G, G] \\ &\quad [G, G^\varphi][G^\varphi, \Upsilon(G)][G^\varphi, G][G^\varphi, G^\varphi] \\ &= [\Upsilon(G), \Upsilon(G)][\Upsilon(G), G][\Upsilon(G), G^\varphi][G, G]\Upsilon(G)[G^\varphi, G^\varphi] \\ &\leq \Upsilon(G)[\Upsilon(G), G][\Upsilon(G), G^\varphi][G, G][G^\varphi, G^\varphi]. \end{aligned}$$

Pelo item (ii) do Lema 3.2

$$\begin{aligned} [\Upsilon(G), G] = [G, G^\varphi, G] &= [G, G^\varphi, G^\varphi] \\ &= [\Upsilon(G), G^\varphi]. \end{aligned}$$

Por outro lado, $[\Upsilon(G), G] \leq \Upsilon(G)$ *em razão da normalidade de* $\Upsilon(G)$*. Portanto*

$$\begin{aligned} \gamma_2(\nu(G)) &\leq \Upsilon(G)[G,G][G^\varphi, G^\varphi] \\ &= \gamma_2(G)\gamma_2(G^\varphi)[\gamma_1(G), G^\varphi]. \end{aligned}$$

Agora, suponha por hipótese de indução que o i-ésimo termo da série central inferior de $\nu(G)$ *seja dado por*

$$\gamma_i(\nu(G)) = \gamma_i(G)\gamma_i(G^\varphi)[\gamma_{i-1}(G), G^\varphi].$$

Por consequência, temos que

$$\begin{aligned} [\gamma_i(\nu(G)), G] &\leq [\gamma_i(G)\gamma_i(G^\varphi)[\gamma_{i-1}(G), G^\varphi], G] \\ &\leq [\gamma_i(G), G][\gamma_i(G^\varphi), G][\gamma_{i-1}(G), G^\varphi, G] \\ &= \gamma_{i+1}(G)[\gamma_i(G^\varphi), G][\gamma_{i-1}(G), G^\varphi, G]. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$[\gamma_i(\nu(G)), G^\varphi] \leq \gamma_{i+1}(G^\varphi)[\gamma_i(G), G^\varphi][\gamma_{i-1}(G), G^\varphi, G^\varphi].$$

Perceba, pelo Lema 3.2, que

$$\begin{aligned} [\gamma_{i-1}(G), G^\varphi, G] &= [\gamma_{i-1}(G), G^\varphi, G^\varphi] \\ &= [\gamma_{i-1}(G), G, G^\varphi] \\ &= [\gamma_i(G), G^\varphi]. \end{aligned}$$

Desta forma, obtemos dessas duas inclusões que

$$\begin{aligned} \gamma_{i+1}(\nu(G)) &= [\gamma_i(\nu(G)), \nu(G)] \\ &\leq \gamma_{i+1}(G)\gamma_{i+1}(G^\varphi)[\gamma_i(G^\varphi), G][\gamma_i(G), G^\varphi]. \end{aligned}$$

Agora, resta mostrarmos a igualdade $[\gamma_i(G^\varphi), G] = [\gamma_i(G), G^\varphi]$*. Usaremos indução sobre* i*. Se* $i = 2$*, é claro que*

$$\begin{aligned} [\gamma_2(G^\varphi), G] = [G^\varphi, G^\varphi, G] &= [G^\varphi, G, G] \\ &= [G^\varphi, \gamma_2(G)], \end{aligned}$$

pelo Lema 3.2. Supondo que $[\gamma_i(G^\varphi), G] = [\gamma_i(G), G^\varphi]$ *vale para* i*, observe que*

$$\begin{aligned}[\gamma_{i+1}(G), G^\varphi] = [\gamma_i(G), G, G^\varphi] &= [\gamma_i(G), G^\varphi, G^\varphi] \\ &= [\gamma_i(G^\varphi), G, G^\varphi] \\ &= [\gamma_i(G^\varphi), G^\varphi, G] \\ &= [\gamma_{i+1}(G^\varphi), G].\end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que

$$\gamma_{i+1}(\nu(G)) \leq \gamma_{i+1}(G)\gamma_{i+1}(G^\varphi)[\gamma_i(G^\varphi), G],$$

como queríamos demonstrar.

□

Corolário 4.4 *[27, Corolário 3.2] Seja um G grupo nilpotente de classe c. Então* $\nu(G)$ *é nilpotente de classe no máximo* $c+1$*.*
Prova.

Como G tem classe de nilpotência igual a c, então $\gamma_{c+1}(G) = \gamma_{c+1}(G^\varphi) = 1$*. De fato,*

$$\begin{aligned}\gamma_{c+2}(\nu(G)) &= \gamma_{c+2}(G)\gamma_{c+2}(G^\varphi)[\gamma_{c+1}(G^\varphi), G] \\ &= 1.\end{aligned}$$

Concluindo que $\nu(G)$ *é nilpotente de classe no máximo* $c+1$*.* □

Teorema 4.5 *[27, Teorema 3.3] Para* $i \geq 2$*, o i-ésimo termo da série derivada de* $\nu(G)$ *é dado por*

$$\nu(G)^{(i)} = G^{(i)}(G^\varphi)^{(i)}[G^{(i-1)}, (G^\varphi)^{(i-1)}].$$

Prova.

De maneira análoga à prova do teorema anterior, a demonstração será feita por indução sobre i*. Se* $i = 2$

$$\begin{aligned}\nu(G)^{(2)} = [\nu(G), \nu(G)] &= \gamma_2(\nu(G)) \\ &= \Upsilon(G)[G, G][G^\varphi, G^\varphi],\end{aligned}$$

pelo Teorema 4.3. Por outro lado,

$$\Upsilon(G)[G, G][G^\varphi, G^\varphi] = G^{(2)}(G^\varphi)^{(2)}[G^{(1)}, (G^\varphi)^{(1)}].$$

Agora, assuma como hipótese de indução que

$$\nu(G)^{(i)} = G^{(i)}(G^{\varphi})^{(i)}[G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}].$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\nu(G)^{(i+1)} &= [\nu(G)^{(i)}, \nu(G)^{(i)}] \\
&= [G^{(i)}(G^{\varphi})^{(i)}[G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}], G^{(i)}(G^{\varphi})^{(i)}[G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}]] \\
&= [G^{(i)}, G^{(i)}][G^{(i)}, (G^{\varphi})^{(i)}][G^{(i)}, [G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}]] \\
&\quad [(G^{\varphi})^{(i)}, G^{(i)}][(G^{\varphi})^{(i)}, (G^{\varphi})^{(i)}][(G^{\varphi})^{(i)}, [G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}]] \\
&\quad [[G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}], G^{(i)}][[G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}], (G^{\varphi})^{(i)}] \\
&\quad [[G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}], [G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}]] \\
&= G^{(i+1)}(G^{\varphi})^{(i+1)}[G^{(i)}, (G^{\varphi})^{(i)}][G^{(i)}, [G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}]] \\
&\quad [(G^{\varphi})^{(i)}, [G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}]][[G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}], [G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}]].
\end{aligned}$$

Verifica-se, pelo item (iii) do Lema 3.2, que

$$\begin{aligned}
[G^{(i)}, [G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}]] &= [[G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}], G^{(i)}] \\
&= [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i)}] \\
&= [G^{(i)}, (G^{\varphi})^{(i)}]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[(G^{\varphi})^{(i)}, [G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}]] &= [[G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}], (G^{\varphi})^{(i)}] \\
&= [G^{(i-1)}, (G)^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i)}] \\
&= [G^{(i)}, (G^{\varphi})^{(i)}].
\end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
[[G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}], [G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}]] &= [G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}, [G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}]] \\
&= [(G^{\varphi})^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}, [G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}]] \\
&= [(G^{\varphi})^{(i)}, [G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}]] \\
&= [G^{(i)}, (G^{\varphi})^{(i)}],
\end{aligned}$$

pela igualdade anterior. Portanto,

$$\nu(G)^{(i+1)} = G^{(i+1)}(G^{\varphi})^{(i+1)}[G^{(i)}, (G^{\varphi})^{(i)}],$$

como queríamos demonstrar. □

Corolário 4.6 *[27, Corolário 3.4] Seja G um grupo solúvel de comprimento derivado l. Então $\nu(G)$ é solúvel de comprimento derivado no máximo $l+1$.*

Prova.

Como G tem comprimento derivado l, $G^{(l)} = (G^{\varphi})^{(l)} = 1$. Portanto

$$\begin{aligned} \nu(G)^{(l+1)} &= G^{(l+1)}(G^{\varphi})^{(l+1)}[G^{(l)}, (G^{\varphi})^{(l)}] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Em conclusão, $\nu(G)$ é solúvel de comprimento derivado no máximo l+1. □

4.2 Prova dos Teoremas C e D

Esta seção tem como objetivo apresentar e provar os resultados necessários para as demostrações dos Teoremas C e D.

Teorema C. Seja p um primo e G p-grupo finito potent.

(a) O quadrado tensorial não abeliano $\Upsilon(G)$ é potently embedded em $\nu(G)$.

(b) Se $k \geq 2$, o k-ésimo termo da série central inferior $\gamma_k(\nu(G))$ é potently embedded em $\nu(G)$.

Teorema D. Seja p um primo ímpar e G p-grupo tal que $exp(G) = p^e$.

(a) Se G é potent, então $exp(\nu(G))$ divide p^{e+1}.

(b) Se $\gamma_{p-2}(G) \leq G^p$, então $\nu(G)$ é um p-grupo potent. Em particular, $\exp(\nu(G)) = p^e$.

Vejamos a seguir um lema e uma proposição que serão usados diretamente para as provas dos resultados principais.

Lema 4.7 *[3, Lema 3.2] Seja k um inteiro positivo e G um grupo. Então*

$$[\Upsilon(G),_k \nu(G)] = [\gamma_{k+1}(G), G^{\varphi}].$$

Prova.

A prova é realizada por indução sobre k. Se $k = 1$, usando as relações definidas em $\nu(G)$ e o Lema 3.2, obtemos que

$$[\Upsilon(G), G] = [G, G^{\varphi}, G] = [G, G, G^{\varphi}] = [\gamma_2(G), G^{\varphi}]$$

e

$$[\Upsilon(G), G^{\varphi}] = [G, G^{\varphi}, G^{\varphi}] = [G, G, G^{\varphi}] = [\gamma_2(G), G^{\varphi}],$$

desta forma, $[\Upsilon(G), \nu(G)] = [\gamma_2(G), G^{\varphi}]$.
Agora, suponha que a igualdade $[\Upsilon(G),_k \nu(G)] = [\gamma_{k+1}(G), G^{\varphi}]$ *é válida para* k, *logo*

$$\begin{aligned}[\Upsilon(G),_{k+1} \nu(G)] = [\Upsilon(G),_k \nu(G), \nu(G)] &= [[\Upsilon(G),_k \nu(G)], \nu(G)] \\ &= [[\gamma_{k+1}(G), G^{\varphi}], \nu(G)] \\ &= [\gamma_{k+1}(G), G^{\varphi}, \nu(G)].\end{aligned}$$

Como $\gamma_{k+1}(G) \leq G$, *mais uma vez, usando o Lema 3.2, temos que*

$$[\gamma_{k+1}(G), G^{\varphi}, G] = [\gamma_{k+1}(G), G, G^{\varphi}]$$

e

$$[\gamma_{k+1}(G), G^{\varphi}, G^{\varphi}] = [\gamma_{k+1}(G), G, G^{\varphi}],$$

portanto

$$\begin{aligned}[\Upsilon(G),_{k+1} \nu(G)] = [\gamma_{k+1}(G), G^{\varphi}, \nu(G)] &= [\gamma_{k+1}(G), G, G^{\varphi}] \\ &= [\gamma_{k+2}(G), G^{\varphi}].\end{aligned}$$

□

Proposição 4.8 *[3, Proposição 3.3] Seja* p *um primo e* $n \in \mathbb{N}$, *onde* $p \geq 3$ *e* $1 < n < p$. *Suponha que* G *é* p*-grupo finito tal que* $\gamma_n(G) \leq G^p$. *Então*

(i) $\gamma_{n+1}(\nu(G)) \leq \gamma_2(G)^p \gamma_2(G^{\varphi})^p \Upsilon(G)^p$.
(ii) $[\Upsilon(G),_{n-1} \nu(G)] \leq \Upsilon(G)^p$.

Prova.

(i) Pelo Teorema 4.3,

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1}(\nu(G)) &= \gamma_{n+1}(G)\gamma_{n+1}(G^{\varphi})[\gamma_n(G), G^{\varphi}] \\ &= [\gamma_n(G), G][\gamma_n(G^{\varphi}), G^{\varphi}][\gamma_n(G), G^{\varphi}]\end{aligned}$$

e utilizando a hipótese $\gamma_n(G) \leq G^p$, *sabemos que*

$$\gamma_{n+1}(\nu(G)) \leq [G^p, G][(G^{\varphi})^p, G^{\varphi}][G^p, G^{\varphi}].$$

Agora, vamos mostrar que $[G^p, G] \leq \gamma_2(G)^p$. *Como* $n \leq p-1$ *e de acordo com o Teorema 2.9, obtemos que*

$$\begin{aligned}[G^p, G] \leq [G,G]^{p^1}[G,_p G] &= [G,G]^p[\gamma_{p-1}(G), G, G]\\ &\leq [G,G]^p[\gamma_n(G), G, G]\\ &\leq [G,G]^p[G^p, G, G]\\ &= [G,G]^p[[G^p, G], G].\end{aligned}$$

Perceba que, pela relação acima, podemos aplicar o Lema 2.8 tomando $N = [G^p, G]$ *e* $M = [G,G]^p$, *logo*

$$[G^p, G] \leq [G,G]^p = \gamma_2(G)^p.$$

Analogamente, $[(G^\varphi)^p, G^\varphi] \leq [G^\varphi, G^\varphi]^p = \gamma_2(G^\varphi)$. *Por fim, resta mostrarmos que* $[G^p, G^\varphi] \leq [G, G^\varphi]^p$. *Tome* $x, y \in G$, *a Fórmula de Compilação de Philip Hall nos garante que*

$$[x^p, y^\varphi] \equiv [x, y^\varphi]^p (mod\ \gamma_2(M)^p \gamma_p(M)),$$

onde $M = \langle x, [x, y^\varphi]\rangle$. *Note que*

$$\gamma_2(M)^p = [M,M]^p \leq M^p \leq [G, G, G^\varphi]^p \leq [G, G^\varphi]^p.$$

Já para $\gamma_p(M)$, *pelo Lema 4.7 e pelo fato de que* $n \leq p-1$, *veja que*

$$\begin{aligned}\gamma_p(M) = [M, M,_{p-2} M] &\leq [M,_{p-2} M]\\ &\leq [G, G^\varphi, G,_{p-2} \nu(G)]\\ &= [G, G^\varphi,_{p-2} \nu(G), \nu(G)]\\ &= [\gamma_{p-1}(G), G^\varphi, \nu(G)]\\ &\leq [\gamma_n(G), G^\varphi, \nu(G)]\\ &\leq [G^p, G^\varphi, \nu(G)].\end{aligned}$$

Portanto, considerando todos os elementos $x, y \in G$, *é fato que*

$$[G^p, G^\varphi] \leq [G, G^\varphi]^p [G^p, G^\varphi, \nu(G)].$$

Como $[G^p, G^\varphi]$ *e* $[G, G^\varphi]^p$ *são subgrupos normais de* $\nu(G)$, *podemos aplicar o Lema 2.8 tomando* $N = [G^p, G^\varphi]$ *e* $M = [G, G^\varphi]^p$. *Obtendo* $[G^p, G^\varphi] \leq [G, G^\varphi]^p$ *e concluindo o item* (i).

(ii) Por hipótese e de acordo com o Lema 4.7, é válido que

$$[\Upsilon(G),_{n-1}\nu(G)] = [\gamma_n(G), G^{\varphi}] \leq [G^p, G^{\varphi}].$$

Foi provado acima no item (i) que $[G^p, G^{\varphi}] \leq [G, G^{\varphi}]^p$, logo, o item (ii) está concluído.

□

Agora, estamos preparados para provar os Teoremas C e D.

Teorema C. Seja p um primo e G p-grupo finito potent.

(a) O quadrado tensorial não abeliano $\Upsilon(G)$ é potently embedded em $\nu(G)$.

(b) Se $k \geq 2$, o k-ésimo termo da série central inferior $\gamma_k(\nu(G))$ é potently embedded em $\nu(G)$.

Prova.

(a) Separe os casos para $p = 2$, e $p \geq 3$.
Se $p = 2$, então $G' \leq G^4$. Sabemos, pelo Lema 4.7, que

$$[\Upsilon(G), G] = [\gamma_2(G), G^{\varphi}] = [G, G, G^{\varphi}] = [G', G^{\varphi}].$$

Aplique o Teorema 2.9 e veja que

$$\begin{aligned} [G', G^{\varphi}] \leq [G^4, G^{\varphi}] &\leq [G, G^{\varphi}]^4 [G^{\varphi},_2 G]^2 [G^{\varphi},_4 G] \\ &= [G, G^{\varphi}]^4 [G', G^{\varphi}]^2 [G', G^{\varphi}, G']. \end{aligned}$$

Tomando $N = [G', G^{\varphi}]$, $M = [G, G^{\varphi}]^4$ e usando o Lema 2.8, concluímos que $[G', G^{\varphi}] \leq [G, G^{\varphi}]^4$, isto é, $[\Upsilon(G), G] \leq \Upsilon(G)^4$ e $\Upsilon(G)$ e *potently embedded* em $\nu(G)$.
Agora, considere os p-grupos *potent* com $p \geq 3$. Nas condições da Proposição 4.8, é possível tomar $n = p-1$, por consequência, pelo item (ii) desta, obtemos que $[\Upsilon(G),_{p-2}\nu(G)] \leq \Upsilon(G)^p$, isto é, $\Upsilon(G)$ é *potently embedded* em $\nu(G)$.

(b) A prova deste item será feita por indução sobre k. Primeiramente, suponha que p é um primo ímpar. Se $k = 2$, tomando $n = p - 1$ e aplicando o item (i) da Proposição 4.8, garantimos que

$$\begin{aligned} [\gamma_2(\nu(G)),_{p-2}\nu(G)] = \gamma_p(\nu(G)) &\leq \gamma_2(G)^p \gamma_2(G^{\varphi})^p [G, G^{\varphi}]^p \\ &= \gamma_2(\nu(G)). \end{aligned}$$

Suponha por hipótese de indução que $[\gamma_k(\nu(G)),_{p-2}\nu(G)] \leq \gamma_k(\nu(G))^p$. Assim, pelo Teorema 2.9

$$\begin{aligned}
[\gamma_{k+1}(\nu(G)),_{p-2}\nu(G)] &= [\gamma_k(\nu(G)), \nu(G),_{p-2}\nu(G)]\\
&= [\gamma_k(\nu(G)),_{p-2}\nu(G), \nu(G)]\\
&\leq [\gamma_k(\nu(G))^p, \nu(G)]\\
&\leq [\gamma_k(\nu(G)), \nu(G)]^p[\nu(G),_p\gamma_k(\nu(G))]\\
&= \gamma_{k+1}(\nu(G))^p[\nu(G), \gamma_k(\nu(G)),_{p-1}\nu(G)]\\
&= \gamma_{k+1}(\nu(G))^p[\gamma_{k+1}(\nu(G)),_{p-2}\nu(G), \nu(G)].
\end{aligned}$$

Tomando $N = [\gamma_{k+1}(\nu(G)),_{p-2}\nu(G)]$ e $M = \gamma_{k+1}(\nu(G))^p$, nas condições do Lema 2.8, vemos que $[\gamma_{k+1}(\nu(G)),_{p-2}\nu(G)] \leq \gamma_{k+1}(\nu(G))^p$, como queríamos demonstrar.

Analisaremos agora o caso em que $p = 2$. Se $k = 2$, Moravec provou em [25] que $\gamma_2(\nu(G))$ é *powerfully embedded* em $\nu(G)$, logo, $\gamma_2(\nu(G))$ é *potently embedded* em $\nu(G)$.

Suponha por hipótese de indução que $[\gamma_k(\nu(G)), \nu(G)] \leq \gamma_k(\nu(G))^4$. Pelo Teorema 2.9

$$\begin{aligned}
[\gamma_{k+1}(\nu(G)), \nu(G)] &= [\gamma_k(\nu(G)), \nu(G), \nu(G)]\\
&\leq [\gamma_k(\nu(G))^4, \nu(G)]\\
&\leq [\gamma_k(\nu(G)), \nu(G)]^4[\nu(G),_2\gamma_k(\nu(G))]^2[\nu(G),_4\gamma_k(\nu(G))].
\end{aligned}$$

Usando o Lema 2.8 para $N = [\gamma_{k+1}(\nu(G)), \nu(G)]$ e $M = [\gamma_k(\nu(G)), \nu(G)]^4$, segue que $[\gamma_{k+1}(\nu(G)), \nu(G)] \leq [\gamma_k(\nu(G)), \nu(G)]^4$.

□

Teorema D. Seja p um primo ímpar e G p-grupo tal que $exp(G) = p^e$.

(a) Se G é potent, então $exp(\nu(G))$ divide p^{e+1}.

(b) Se $\gamma_{p-2}(G) \leq G^p$, então $\nu(G)$ é um p-grupo potent. Em particular, $\exp(\nu(G)) = p^e$.

Prova.

(a) Note que

$$\gamma_{2(p-1)}(\nu(G)) = \gamma_{2p-2}(\nu(G)) = [\gamma_p(\nu(G)),_{p-2}\nu(G)].$$

Do item (b) do Teorema C, sabemos que, para qualquer primo p, $\gamma_p(\nu(G))$ é *potently embedded* em $\nu(G)$. Portanto,

$$\gamma_{2(p-1)}(\nu(G)) = [\gamma_p(\nu(G)),_{p-2} \nu(G)] \leq \gamma_p(\nu(G))^p.$$

Perceba que

$$2(p-1) = 2p - 2 < 2p - 1 = p + 1(p-1),$$

logo, tomando $k = 2, r = p$ e $s = 1$, podemos aplicar o Teorema 2.10 obtendo que $\exp(\Omega_e(\nu(G))$ divide $p^{e+2-1} = p^{e+1}$, onde $\Omega_e(\nu(G)) = \langle g \in \nu(G) \mid g^{p^e} = 1\rangle$. Como $\nu(G)$ é gerado por G e G^{φ}, é claro que $\exp(\nu(G)) = \exp(\Omega_e(\nu(G))$. Desta forma, $\exp(\nu(G))$ divide p^{e+1}.

(b) Por hipótese, $\gamma_{p-2}(G) \leq G^p$. Como $1 < p-2 < p$, nas condições da Proposição 4.8, tomamos $n = p-2$ e vemos que

$$\begin{aligned} \gamma_{p-1}(\nu(G)) &\leq \gamma_2(G)^p \gamma_2(G^{\varphi})^p [G, G^{\varphi}]^p \\ &= \gamma_2(\nu(G))^p \\ &\leq (\nu(G))^p, \end{aligned}$$

pelo Teorema 4.3. Portanto, $\nu(G)$ é p-grupo *potent*.
De [17], sabemos que p-grupos *potent* são *power*-abelianos sempre que p é um primo ímpar. Como $\nu(G)$ é gerado por G e G^{φ}, obtemos que $\exp(\nu(G)) = \exp(G) = p^e$.

□

O resultado a seguir é consequência imediata do Teorema D.

Corolário 4.9 *[3, Corolário 1.1] Seja $p \geq 5$ primo e G p-grupo finito powerful. Então $\nu(G)$ é p-grupo potent. Em particular,* $\exp(\nu(G)) = \exp(G)$.

Prova.
Observe que, para todo primo $p \geq 5$, $\gamma_{p-2}(G) \leq G' \leq G^p$, já que G é p-grupo finito *powerful*. Desta forma, pelo item (b) do Teorema D, $\nu(G)$ é p-grupo *potent* e, em particular, $\exp(\nu(G)) = \exp(G)$. □

4.3 Alguns Exemplos

Para finalizar, vamos apresentar nesta seção alguns exemplos de grupos $\nu(G)$ e $\Upsilon(G)$ e suas características, com o grupo G em questão variando. Todos esses foram calculados via GAP. Nas tabelas, $cl(G)$ e $dl(G)$ representam, respectivamente, a classe de nilpotência e o comprimento derivado do grupo G. Esses resultados podem ser encontrados em [1].

Para ilustrar os resultados que obtemos nos Teoremas A e B, veja o exemplo.

Exemplo 4.10 *Considere os grupos Diedrais com apresentação*

$$D_{2n} = \langle a, x | a^n = x^2 = 1, a^{-1} = a^x \rangle,$$

com n variando entre 2 e 8. Então

n	G	$cl(G)$	$dl(G)$	$\|\nu(G)\|$	$cl(\nu(G))$	$dl(\nu(G))$	$\Upsilon(G)$	$\|\Upsilon(G)\|$
2	D_4	1	Não	256	2	Não	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	16
3	D_6	Não	2	216	Não	2	$\mathbb{Z}_6$	6
4	D_8	2	Não	2048	3	Não	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	32
5	D_{10}	Não	2	1000	Não	2	$\mathbb{Z}_{10}$	10
6	D_{12}	Não	2	6912	Não	2	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	48
7	D_{14}	Não	2	2744	Não	2	$\mathbb{Z}_{14}$	14
8	D_{16}	3	Não	16384	4	Não	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	64

Quando G é um p-grupo *potent*, $\nu(G)$ não é necessariamente *potent*.

Exemplo 4.11 *Tomemos 2-grupo e 3-grupo cíclicos finitos. Confira abaixo.*

G	$\|G\|$	$cl(G)$	$\nu(G)$	$cl(\nu(G))$	$\|\nu(G)\|$	$\Upsilon(G)$	$\|\Upsilon(G)\|$
$\mathbb{Z}_2$	2	1	D_8	2	8	$\mathbb{Z}_2$	2
$\mathbb{Z}_3$	3	1	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_3$	2	27	$\mathbb{Z}_3$	3

Observe que $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_3$ são p-grupos potent, já que são cíclicos, gerados por 1, *com $\mathbb{Z}_2' = \{0\}$ e $\mathbb{Z}_3' = \{0\}$. No entanto, $\nu(\mathbb{Z}_2) \cong D_8$ e $\nu(\mathbb{Z}_3) \cong (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_3$ não são p-grupos potent.*

Por fim, analisemos o comportamento da construção $\nu(G)$ em outros p-grupos.

Exemplo 4.12

G	$\|G\|$	$cl(G)$	$\|\nu(G)\|$	$cl(\nu(G))$	$\Upsilon(G)$	$\|\Upsilon(G)\|$
$\mathbb{Z}_5$	5	1	125	2	$\mathbb{Z}_5$	5
$\mathbb{Z}_7$	7	1	343	2	$\mathbb{Z}_7$	7
$\mathbb{Z}_{11}$	11	1	1331	2	$\mathbb{Z}_{11}$	11
$\mathbb{Z}_{13}$	13	1	2197	2	$\mathbb{Z}_{13}$	13

Referências Bibliográficas

[1] ANDRADE, A. *Sobre uma Construção Relacionada ao Quadrado Tensorial não-Abeliano de um Grupo*. Universidade Federal de Goiás, Dissertação de Mestrado, 2011.

[2] ARGANBRIGHT, D. E. *The power-commutator structure of finite p-groups*. Pacific Journal of Mathematics 29 (1969), 11–17.

[3] BASTOS, R., DE MELO, E., GONÇALVES, N., AND NUNES, R. *Non-abelian tensor square and related constructions of p-groups*. Archiv der Mathematik 114 (2020), 481–490.

[4] BASTOS, R., NAKAOKA, I. N., AND ROCCO, N. R. *Finiteness conditions for the non-abelian tensor product of groups*. Monatshefte Fr Mathematik 171, (2017), 3-4.

[5] BASTOS, R., ROCCO, N. R., AND VIEIRA, E. R. *Finiteness of homotopy groups related to the non-abelian tensor product*. Annali di Matematica Pura ed Applicata. Series IV 198, 6 (2019), 2081–2091.

[6] BLYTH, R. D., FUMAGALLI, F., AND MORIGI, M. *Some structural results on the non-abelian tensor square of groups*. Journal Group Theory 13 (2010), 83–94.

[7] BLYTH, R. D., MORAVEC, P., MORSE, R. F., *On the nonabelian tensor squares of free nilpotent groups of finite rank*. Contemporary Mathematics 470, American Math. Soc., (2000), 27-44.

[8] BROWN, R., JOHNSON, D. L., AND ROBERTSON, E. F. *Some computations of nonabelian tensor products of groups*. Journal of Algebra 111, 1 (1987), 177–202.

[9] BROWN, R., AND LODAY, J.-L. *Van kampen theorems for diagrams of spaces*. Topology. An International Journal of Mathematics 26, 3 (1987), 311–335.

[10] BUENO, T. P., AND ROCCO, N. R. *On the q-tensor square of a group*. Journal of Group Theory 14, 5 (2011), 785–805.

[11] DIXON, J. D., DU SAUTOY, M. P. F., MANN A., SEGAL, D. *Analytic pro-p groups.* 2ª Edição, Cambridge University Press, 1999.

[12] FERNÁNDEZ-ALCOBER, G. A. *An introduction to finite p-groups: regular p-groups and groups of maximal class*, Matemática Contemporânea 20, (2001), 155-226.

[13] FERNÁNDEZ-ALCOBER, G. A., GONZÁLEZ-SÁNCHES, J., AND JAIKIN-ZAPIRAIN, A. *Omega subgroups of pro-p groups.* Israel Journal of Mathematics 166 (2008), 393–412.

[14] GILBERT, N. D. *The non-abelian tensor square of a free product of groups*, Arch. Math. 48, (1987), 369-375.

[15] GONÇALVES, N. N. *The q-tensor square and the group $\nu^q(G)$ for some families of finite p-groups, $q \geq 0$.* Universidade de Brasília, Tese de Doutorado, 2021.

[16] GONÇALVES, N. N. *Um estudo sobre p-grupos fnitos powerful e potent.* Universidade de Brasília, Dissertação de Mestrado, 2017.

[17] GONZÁLEZ-SÁNCHES, J., AND JAIKIN-ZAPIRAIN, A. *On the structure of normal subgroups of potent p-groups.* Journal of Algebra 276, 1 (2004), 193–209.

[18] HALL, P. *A contribution to the theory of groups of prime-power order.* Proc. London Math. Soc. 36, (1933), 29–95.

[19] HOLT, D. F., EICK, B., AND O'BRIEN, E. A. *Handbook of Computational Group Theory.* Chapman & HAll/CRC Press, United States, 2005.

[20] JOHNSON, D. L. *Presentations of Groups*, vol. 15. Cambridge University Press, United Kingdom, 1997.

[21] LEEDHAM-GREEN, C. R., AND MCKAY, S. *The Structure of Groups of Prime Power Order*, vol. 27. Clarendon Press, United Kingdom, 2002.

[22] LUBOTZKY, A., AND MANN, A. *Powerful p-groups. i. finite groups.* Journal of Algebra 105, 2 (1987), 484–505.

[23] MAGNUS, W., KARRAS, A. AND SOLITAR, D. *Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations*, Interscience, 1966.

[24] MILLER, C. *The second homology group of a group: relations among commutators.* Proc. Am. Math. Soc. 3, (1952), 588-595.

[25] Moravec, P. *Groups of prime power order and their nonabelian tensor squares*. Israel Journal of Mathematics 174, (2009), 19–28.

[26] Robinson, D. *A Course in the Theory of Groups*, vol. 80. Springer Science & Business Media, United Kingdom, 2012.

[27] Rocco, N. R. *On a construction related to the non-abelian tensor square of a group*. Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática. Nova Série 22, 1 (1991), 63–79.

[28] Rocco, N. R. *A presentation for a crossed embedding of finite solvable groups*. Communications in Algebra 22, 6 (1994), 1975–1998.

[29] Rotman, J. J. *An Introduction to the Theory of Groups*, Springer-Verlag, 1994.

[30] Sidki, S. *On weak permutability between groups*. Journal of Algebra 63, 1 (1980), 186–225.