Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Matemática Financeira: Aprendendo a Usar Essa Poderosa Ferramenta no Dia a Dia

Simão Pedro Júnior

Goiânia

2013

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Simão Pedro Júnior					
E-mail:	simaojrnet@hotmail.com					
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [X]Sim [ ] Não						
Vínculo empregatício do autor	Secretaria Estadual de Educação - Goiânia - GO					
Agência de fomento:	Cordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior				Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	DF	CNPJ:	00889834/0001-08	
Título:	Matemática Financeira: Aprendendo a Usar Essa Poderosa Ferramenta no Dia a Dia					
Palavras-chave:	Problemas do Cotidiano, Investimentos, Ensino e Aprendizagem, Matemática Financeira.					
Título em outra língua:	Financial Mathematics: Learning to Use This Powerfull Tool in Day-to-Day					
Palavras-chave em outra língua:	Daily problems, Investments, Teaching and Learning, Financial Mathematics.					
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico					
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	11/04/2013					
Programa de Pós-Graduação:	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT					
Orientador (a):	Prof. Dr. Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos					
E-mail:	fabianoftds@yahoo.com.br					
Co-orientador(a):*						
E-mail:						

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Simão Pedro Júnior

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 14 / 05 / 2013

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Simão Pedro Júnior

Matemática Financeira: Aprendendo a Usar Essa Poderosa Ferramenta no Dia a Dia

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos

Goiânia

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

P372m

Pedro Júnior, Simão.

Matemática financeira [manuscrito] : aprendendo a usar essa poderosa ferramenta no dia a dia / Simão Pedro Júnior. - 2013.

59 f.

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.

Bibliografia.

1. Matemática financeira – Ensino e aprendizagem. 2. Investimentos. I. Título.

CDU: 51:336

Simão Pedro Júnior

Matemática Financeira: Aprendendo a Usar essa Poderosa Ferramenta no Dia a Dia

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 11 de abril de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Rui Seimetz
UnB/

Prof. Dr. Geci José Pereira da Silva
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Simão Pedro Júnior graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG) e atualmente é Professor do Ensino Médio do Colégio Estadual do Setor Sudoeste de Goiânia - GO.

Dedico este trabalho a minha esposa, Aline, por toda confiança, carinho e motivação para vencer cada página da vida e também por compartilhar comigo sucessos e insucessos ao longo desses vinte anos que estamos juntos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida e por ter me dado forças para alcançar mais esta vitória.

Aos meus pais, Simão e Espedita (in memorian), por serem responsáveis pela construção do meu caráter.

A minha esposa, Aline, por acreditar na minha capacidade e pelo apoio nos momentos de dificuldades.

As minhas filhas, Letícia e Gabriela, por serem a minha maior riqueza.

As minhas irmãs, Érika e Lara, pelo amor e carinho dispensados a mim.

Aos colegas do curso, pelo constante aprendizado durante o nosso convívio.

Aos professores que a mim repassaram seus conhecimentos, fazendo com que meu desenvolvimento fosse o melhor possível.

Ao professor Fabiano pela orientação, compromisso e dedicação.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pelo suporte financeiro durante o Curso de Mestrado.

Resumo

O objetivo deste trabalho é servir de guia para que os professores possam orientar e enriquecer sua prática pedagógica de maneira adequada, além de capacitar o leitor para resolver problemas do cotidiano, tais como: avaliar empréstimos, entender e optar sobre investimentos, dentre outros semelhantes. Com isto, destacar a importância de se processar o seu ensino e aprendizagem. Consideramos que esse é um assunto de grande relevância no dia a dia das pessoas , principalmente, após a estabilização da economia brasileira em virtude do plano real, onde as pessoas passaram a ter acesso facilitado a linhas de crédito, adquirindo financiamentos e empréstimos com maior freqüência. Isso justifica uma sólida aprendizagem e futura aplicação da Matemática Financeira. Por meio de seu estudo, o leitor pode ser preparado para realizar transações comerciais e financeiras que ocorrem no seu dia a dia, como optar pela melhor forma de pagamento, à vista ou a prazo, analisar alternativas de investimentos, entender o funcionamento do mercado financeiro, organizar suas finanças pessoais etc.

Palavras-chave: Problemas do Cotidiano, investimentos, Ensino e Aprendizagem, Matemática Financeira.

Abstract

The goal of this work is to serve as a guide so that teachers can orientate and enrich their pedagogical practice in an appropriate manner as well as to enable readers to solve problems of their daily lives, such as: evaluating loans, understand and decide on investments, among other similar. With this, emphasize the importance of processing your teaching and learning. We believe that this is a matter of great importance in the daily lives of people, especially after the stabilization of the Brazilian economy because the real plan, where people now have easier access to credit, acquiring Financing and loans with higher frequency. This justifies a solid learning and future application of Financial Mathematics. Through their study, students can be prepared to perform commercial and financial transactions that occur in your daily life, such as choosing the best form of payment, cash or term, analyzing investment alternatives, understand the functioning of financial markets organize your personal finances etc.

Keywords: Daily problems, Investments, Teaching and Learning , Financial Mathematics.

Sumário

1 Introdução

Inicialmente quero justificar o uso do termo ferramenta no título deste trabalho. De acordo com o Wikipédia, a enciclopédia livre, o termo ferramenta deriva do latim *ferramenta* que significa dispositivo, utensílio ou mecanismo, físico ou intelectual, utilizado para facilitar a realização de tarefas diversas. Portanto, a Matemática Financeira pode ser considerada uma ferramenta, pois é um dispositivo intelectual usado para facilitar a execução de diversas atividades no âmbito financeiro. Dito isso, a partir de agora dissertaremos sobre essa poderosa ferramenta que é a Matemática Financeira.

Com o advento da globalização e do neoliberalismo, cada vez mais a população é influenciada por uma cultura que busca o consumismo em detrimento ao acúmulo de dinheiro. O desejo de acompanhar a maioria e não querer ficar para trás tem induzido muitos a contrairem dívidas, que às vezes, levam anos para serem pagas.

Em linhas gerais, é tácito que com o crescimento da economia brasileira e a estabilização da inflação, gerou-se a oportunidade de pessoas de quaisquer classes sociais terem acesso a bens de consumo, bem como a obtenção de linhas de crédito com mais facilidade. Essa facilidade combinada com as ofertas de produtos e serviços veiculadas de forma agressiva e exaustiva nos diversos meios de comunicação, está produzindo um ciclo consumista e de endividamento sem controle.

Segundo Eker [4], o modelo financeiro de uma pessoa consiste numa combinação dos seus pensamentos, dos seus sentimentos e das suas ações em questões de dinheiro. E esse modelo é formado fundamentalmente da informação ou programação que a pessoa recebeu no passado, sobretudo quando era criança. Essa programação ou condicionamento tem como fontes primárias: pais, irmãos, amigos, autoridades, professores, líderes religiosos, mídia e cultura.

Notamos que a falta de instrução financeira, a associação do dinheiro ao prazer imediato e a falta de planejamento da vida econômica se tornaram uma constante na realidade da maioria das pessoas. Então, podemos inferir que esse tripé tem servido de suporte para o endividamento e o fracasso financeiros de grande parte da população. Portanto, a grande dificuldade das pessoas em lidar com dinheiro advém do modelo financeiro formado em suas mentes.

Conforme Kiyosaki [6], em decorrência da falta de práxis educacionais em nosso país, no que tange ao desenvolvimento das habilidades e competências financeiras dos seus cidadãos, conclui-se que a escola, nesse sentido, não tem logrado êxito. Afinal, percebemos a falha na aquisição de conhecimentos específicos que capacitem os alunos a serem bem-sucedidos na administração de suas finanças.

O fato da Matemática Financeira possuir diversas aplicações no atual cenário econômico e em situações presentes no dia a dia das pessoas, como: financiamentos de imóveis e automóveis, realização de empréstimos, compras a crediário ou com cartão de crédito, aplicações financeiras, investimentos em ações, decidir por uma compra a prazo ou à vista, entre outras situações, faz com que ela tenha relevante importância na formação dos aprendizes.

É dentro dessa perspectiva que brotou a idéia de realizarmos um trabalho que contemplasse a Matemática Financeira, não como um conjunto de fórmulas, regras e problemas sem contextualização com a realidade das pessoas, mas como uma ferramenta poderosa, capaz de promover o planejamento da vida econômica e auxiliar na tomada de decisão frente a uma operação financeira. Assim, os cidadãos saberão administrar e investir seus recursos financeiros, promovendo uma melhor estruturação pessoal e familiar.

Portanto, o intuito deste trabalho é servir de ignição para esse processo de despertamento e aprendizagem, preparando o leitor para analisar situações comerciais e financeiras do seu cotidiano de maneira crítica, desempenhando, assim, o seu papel de cidadão consciente dos seus direitos e deveres. Para alcançar as metas citadas, estruturamos o trabalho da seguinte forma: inicialmente, abordaremos os principais aspectos históricos da Matemática Comercial e Financeira, bem como alguns mecanismos do funcionamento do mercado financeiro. A partir daí, introduziremos os aspectos teóricos da Matemática Financeira de forma objetiva, exemplificando-os com casos práticos, e em seguida, mostraremos e analisaremos algumas situações vivenciadas no cotidiano em que a aplicação do conhecimento financeiro é fundamental para o entendimento, julgamento e tomada de decisão, tais como:

- Comparação entre as diversas opções de investimentos;
- Utilização do crédito (cartão de crédito, crédito pessoal, cheque especial, etc.);
- Observação de operações de empréstimos e de financiamentos de bens duráveis

(eletrodomésticos, automóveis e imóveis);

- Analisar a melhor forma de compra, à vista ou a prazo, conforme situação-problema;

- Construção de um plano de aposentadoria complementar;

- Formação de um fundo para atender uma necessidade futura.

Na seção a seguir destacaremos a história da Matemática Comercial e Financeira e o funcionamento do mercado financeiro, por entender que esse recurso didático é importante para o processo de ensino aprendizagem.

2 Aspectos Históricos e o Funcionamento do Mercado Financeiro

Por meio da história da Matemática Comercial e Financeira o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores frente ao conhecimento matemático. O aluno reconhecerá a Matemática como uma criação humana, que surgiu a partir da busca de soluções para resolver problemas do cotidiano, conhecerá as preocupações dos vários povos em diferentes momentos históricos, identificando a utilização da Matemática em cada um deles e estabelecerá comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente. Dito isso, discorreremos em seguida sobre essa valiosa ferramenta.

2.1 A História da Matemática Comercial e Financeira

Ao longo da História o homem percebeu uma relação entre o dinheiro e o tempo. Gonçalves [7] aponta, dentre as várias definições existentes, um conceito para a Matemática Financeira como a ciência que estuda a evolução do dinheiro no tempo. Esta evolução, se refere ao conceito de juros, que é uma definição muito antiga, divulgada e utilizada ao longo da existência humana. Desde a época dos sumérios antigos, há registro de tábuas matemáticas utilizadas para mediar as transações comerciais; demostrando a familiarização com conceitos que são usados atualmente, tais como: contratos legais e usuais, faturas, recibos, notas promissórias, crédito, juros simples e compostos, hipotecas, escrituras de vendas e endosso.

Também ligado ao conceito de juros e ao uso da Matemática Comercial e Financeira, está o surgimento dos bancos. Essa instituição passou a ser necessária para mediar, com um certo grau de garantia, as relações comerciais entre as pessoas possuidoras de muito dinheiro e as que precisavam de empréstimos. Os juros eram devidos à utilização do dinheiro recebido ou, mais especificamente, era a "compensação" do temor de quem havia emprestado e se exposto a grande risco. Sendo assim, os juros passaram a ser chamados de usurário, o dinheiro emprestado, de capital do usurário e o credor, de usureiro. O responsável pelo câmbio monetário exercia sua profissão sentado num banco de madeira em algum lugar do mercado; daí o início dos termos "banqueiro" e "banco".

Os pioneiros na criação dos bancos na História foram os sacerdotes. Havia o costume nos cidadãos egípcios, babilônios, gregos e romanos de confiarem seu ouro à Igreja. Com a criação do "Banco do Espírito Santo" , a Igreja Católica estimulava a arrecadação dos fiéis para satisfazer as "necessidades" do Papa e emprestava dinheiro a juros altos. Lançou um anátema e condenou às masmorras da inquisição os cidadãos que emprestassem dinheiro; porém, não conseguiu conter a avidez por ganhos e lucros nas pessoas, muito menos o próprio desenvolvimento do comércio que exigia a criação de uma ampla rede bancária.

As cidades-estado da Itália, com seu vasto comércio, foram pioneiras nessas atividades. O primeiro banco privado foi fundado em 1157, em Veneza. Logo na sequência, nos séculos XIII, XIV e XV, é criada uma rede bancária e a igreja foi obrigada a aceitar a realidade. Assim, os bancos foram um dos grandes responsáveis pelo aprimoramento da Matemática Comercial e Financeira. Nos dias de hoje, dentro de um banco, continuam existindo pessoas que tem dinheiro excedente para guardar e pessoas que precisam de dinheiro para investir em seus negócios. Assim, o banco oferece tanto um lugar seguro e rentável para as pessoas que tem dinheiro, quanto empréstimos para as pessoas que deles necessitam. Nestas transações, o banco lucra com a diferença gerada entre os juros que recebem das pessoas que tomam emprestado e os juros que pagam às pessoas que guardam seu dinheiro, esta diferença recebe o nome de *spread*. Esse valor não deve ser negativo, pois se o for, indicará que o banco está pagando um juro maior para quem guardou o dinheiro e recebendo juro menor de quem lhe deve, ou está emprestando para pessoas com negócios ruins. Afim de que isso não ocorra, existem leis que protegem os que depositam seu dinheiro no banco e autoridades que fiscalizam o cumprimento dessas leis. Pode-se observar então, que ao longo do tempo, o que mudou foi a forma de controlar as negociações financeiras para reduzir os riscos; um dos mecanismos exigidos é o conhecimento da Matemática Financeira.

Com o crescente interesse pela educação e o incremento da atividade comercial no Renascimento, surgiram os os primeiros textos populares de aritmética. A Aritmética de Treviso, publicada em 1478, é a obra mais antiga de aritmética e o primeiro livro da matemática impresso no mundo ocidental. Percebe-se, que a Matemática Financeira esteve presente ao logo da história, apenas realizada com diferentes recursos. Os procedimentos usados antigamente para o cálculo dos juros e a obtenção do lucro, praticamente não mudaram, apenas foram acrescidos de garantias para diminuir os riscos tanto para os clientes como para os bancos. Cada país, encarrega-se de estabelecer um conjunto de órgãos que regulamenta, fiscaliza e executa as operações necessárias à circulação da moeda e do crédito na economia, compondo o Sistema Financeiro Nacional (SFN).

No Brasil, o SFN é composto por diversas instituições, podendo ser dividido em dois subsistemas. O primeiro é o normativo, formado por instituições que estabelecem as normas e diretrizes de funcionamento, além de definir os parâmetros para a intermediação financeira e fiscalizar a atuação das instituições operativas. É composto por: Conselho Monetário Nacional (CMN), Banco Central do Brasil (BACEN), Comissão de Valores Mobiliários (CVM) e pelas Instituições Especiais (Banco do Brasil, BNDES e Caixa Econômica Federal). O segundo sistema é o operativo, que é composto por instituições que atuam na intermediação financeira e tem como função a transferência de recursos entre fornecedores de fundos e os tomadores de recursos, a partir de regras, diretrizes e parâmetros definidos pelo subsistema normativo. Estão nessa categoria as instituições financeiras bancárias e não bancárias, o Sistema Brasileiro de Poupança e Empréstimo (SBPE), além das instituições não financeiras e auxiliares. O subsistema operativo é subordinado à regulamentação estabelecida pelo Conselho Monetário nacional (CMN) e pelo Banco Central do Brasil (BACEN).

Sabendo que o sistema financeiro é constituído por um conjunto de instituições e instrumentos financeiros que possibilitam a transferência de recursos dos ofertadores para os tomadores e criam condições para que os títulos tenham liquidez no mercado, a seguir vamos detalhar o funcionamento do mercado financeiro.

2.2 O Funcionamento do Mercado Financeiro

O processo pelo qual as pessoas interessadas em vender algum produto ou serviço interagem com pessoas que querem comprar esse mesmo produto ou serviço é denominado mercado. Depois de analisadas as suas opções compradores e vendedores, realizam a transação que melhor atende às suas necessidades, estabelecendo um valor de equilíbrio num processo conhecido como lei de oferta e procura. Esse príncipio pode ser aplicada a qualquer mercado. No mercado financeiro, ocorre o mesmo mecanismo, relacionado, entretanto, ao seu produto específico: o uso do dinheiro no tempo (Oliveira e Pacheco,[2]).

O crescimento da economia está intimamente ligado ao investimento em produção. O fato é que de um lado estão as empresas que, de um modo geral, precisam complementar seus recursos, que são escassos, com recursos de terceiros. Do outro lado do processo, estão os investidores que, muitas da vezes, possuem excesso de recursos; com isso, para que se desenvolva uma relação financeira entre eles, é necessário que o interesse de ambas as partes seja atendido. Para as empresas (tomadores de recursos) os recursos visam financiar seus investimentos com o objetivo de aumentar a sua produção, já para os investidores (poupadores), emprestar seus recursos significa remunerá-los. Dessa forma, quando ambos se encontram, cada lado analisa suas alternativas e conclui a transação a um determinado montante, prazo e juro. Vale ressaltar que a relação pode se inverter, ou melhor, os poupadores podem desempenhar o papel de tomadores de recursos enquanto que os tomadores de recursos podem desempenhar o papel de poupadores.

Porém, a conclusão dessa transação é um processo complicado, pois os interesses, na maioria das vezes, não são compatíveis. Frente a essa dificuldade é que surgiu a necessidade de se criar um agente intermediário (mercado financeiro) especializado em conciliar interesses de poupadores e tomadores de recursos. Suas principais funções são: intermediação financeira, redução do risco de inadimplência, redução do risco por meio da especialização e definição mais clara do preço do dinheiro.

O crescimento da economia depende muito da eficiência do mercado financeiro, prova disso, é que quando ele opera de forma eficiente as empresas têm acesso facilitado a recursos mais baratos, estimulando a produção e o consumo de mercadorias. Por outro lado, a ineficiência do mercado financeiro provoca a redução dos investimentos, desacelerando a economia. Por isso, os governos dos países dedicam total atenção aos seus mercados financeiros e criam instituições para regulá-los.

A intermediação financeira entre o poupador e o tomador de empréstimos pode ocorrer de forma direta ou indireta. No caso da intermediação direta, a instituição financeira capta os recursos do poupador, sob a forma de depósito em conta corrente ou poupança, depósitos a prazo (CDB/RDB), entre outras, e os repassa ao tomador de empréstimos. Nessa forma de intermediação, não há o contato direto entre o investidor e o tomador de recursos, sendo assim, a instituição financeira exerce um papel fundamental nessa relação, pois é a garantidora do investimento feito pelo poupador. Já na intermediação indireta, a instituição financeira atua simplesmente como prestadora de serviço, colocando em contato direto poupador e tomador de empréstimos. Nessa intermedição, a instituição financeira atua no campo do mercado de capitais com a função de captar recursos para o tomador de empréstimos através da emissão de título de dívida (debênture ou nota promissória) e localiza investidores interessados em adquirir esses títulos emitidos. Sendo assim, o papel dela se resume em emitir títulos e distribuí-los, não garantindo o retorno do investimento ao poupador. Por esses seviços prestados a instituição financeira recebe uma taxa ou *fee*.

O mercado financeiro pode ser dividido em quatro segmentos:

- ✓ Mercado monetário: por meio dele ocorre as operações, a curto prazo, em que o governo controla os meios de pagamentos, via operação de mercado aberto, operações de desconto e depósitos compulsórios. As operações são de curto prazo.
- ✓ Mercado de crédito: por meio dele ocorre operações, a curto e médio prazo, envolvendo instituições financeiras com a missão de capitalizar as empresas e financiar o consumo. Os bancos atuam na intermediação direta, ou seja, são devedores dos investidores e credores dos tomadores de empréstimos na instituição.
- ✓ Mercado cambial: por meio dele ocorre a operação de troca de moedas.
- ✓ Mercado de capitais: por meio dele ocorre as operações, a longo prazo, em que o banco atua na intermediação indireta, ou seja, emite e distribui títulos (ações, debêntures, notas promissórias, etc)

A partir de agora vamos apresentar alguns aspectos teóricos de forma bastante simples, objetiva e didática, amparada em casos práticos e exemplos resolvidos.

3 Aspectos Introdutórios da Matemática Financeira

De acordo com Tosi [1], o objetivo principal da matemática financeira é nos munir de todo um aparato técnico e teórico que nos ajude a: comparar diversas alternativas de empréstimos e investimentos; analisar a evolução do dinheiro ao longo do tempo, determinando o valor dos rendimentos referentes a sua aplicação financeira, ou melhor, o valor dos juros associados; constatar e criticar fraudes; tomar decisões; dentre outras.

Portanto, nesta seção, vamos dar enfoque aos principais conceitos que regem a matemática financeira, bem como as terminologias e informações práticas, objetivas e atualizadas, imprescindíveis para a leitura e compreensão das diversas situações encontradas no mercado financeiro. Além disso, para exemplificar a aplicação dos conceitos, vamos nos amparar em situações-problema que explorem as modalidades de operações realizadas no mercado brasileiro, tanto em termos de investimentos, quanto de financiamentos e empréstimos; dessa forma, estaremos mostrando a teoria sendo aplicada de forma imediata em experiências vivenciadas no dia a dia, ou seja, em situações reais.

Dentro desse enfoque de ensino-aprendizagem, vamos aproveitar a oportunidade e utilizar as calculadoras, comum ou científica, na resolução dos problemas propostos, pois atualmente é bastante natural a utilização de calculadoras e computadores no ambiente escolar. Com essas ferramentas, o aluno pode se concentrar mais nas estratégias de um problema, nas descobertas, nas relações entre os conceitos matemáticos, deixando os cálculos para que a máquina execute; pois, acreditamos que os recursos tecnológicos podem ser utilizados como elementos de apoio para o ensino, fontes de aprendizagem e como ferramentas para o desenvolvimento de habilidades.

3.1 Conceitos e Exemplos

Dentro do enfoque de apresentar a teoria de forma bastante simples e direta, seguindo uma sequência lógica quanto ao inter-relacionamento dos assuntos e seus respectivos graus de complexidade, amparado em exemplos, casos práticos e problemas resolvidos, vamos partir do estudo da porcentagem, que é o pré-requisito mais importante para o desenvolvimento da Matemática Financeira.

3.1.1 Porcentagem

Porcentagem é um termo bastante difundido no dia a dia , prova disso, são os dados estatísticos, a presença desta disciplina nas escolas, os jornais impressos, os telejornais, as revistas, as propagandas, as atividades econômicas, etc.

O símbolo "%" significa "por cento", daí, "x%" indica que, de cada cem partes, tomamos "x" partes. Por exemplo,

30% significa que, de cada 100 partes, tomamos 30 partes. Note que

$30\%\,(\text{forma percentual}) = \dfrac{30}{100}\,(\text{forma fracionária}) = 0,03\,(\text{forma decimal ou unitária}).$

Além disso, multiplicando-se a taxa na forma decimal ou unitária por 100, obteremos a taxa percentual e dividindo-se a taxa percentual por 100 obteremos a taxa na forma decimal ou unitária.

Exemplo 3.1. *0,25·100=25, o que significa 25% e 40%=40/100=0,4.*

Vejamos um exemplo contextualizado.

Exemplo 3.2. *A partir desta terça-feira (1/1/2013) o valor do salário mínimo, que atualmente é de R$ 622,00, aumenta em 9%. O reajuste foi anunciado pelo governo na semana passada. Diante dessa informação, pergunta-se:*

a) Qual o valor do aumento?

Solução pela calculadora comum:

Pressione	*Visor*	*Significado*
622 × 9%	*55,98*	*Calcula 9% de R$ 622,00*

Matematicamente, temos: 9% de R$ 622,00, que equivale a (9/100)· 622=5598/100=R$ 55,98.

b) Qual será o novo valor do salário mínimo?

Solução pela calculadora comum:

Pressione	*Visor*	*Significado*
622 + 9%	*677,98*	*Calcula R$ 622,00 aumentado em 9%*

Solução Matemática: R$ 622,00 acrescido do valor encontrado no item (a) nos dá 622,00 + 55,98 = R$ 677,98.

Uma pergunta que surge nesse momento é "como resolver o item (b), pela solução Matemática, sem usar o resultado encontrado no item (a)?" Podemos recorrer a um importante conceito, o Fator de Atualização, que será objeto de estudo na próxima seção.

Como foi dito acima, a seguir abordaremos o estudo sobre o Fator de Atualização por ser um dos segredo da Matemática Financeira.

3.1.2 Fator de Atualização

O Fator de Atualização corrige o Valor Principal (PV), aumentando-o ou reduzindo-o, e é classificado em Fator de Aumento ou Fator de Redução. Para entendermos o que são esses fatores, previamente vamos fixar o seguinte princípio:

"o Valor Principal (PV), que é a base de cálculo, é diretamente proporcional a 1."

Com isso, se sobre o Valor Principal (PV) incidir uma taxa unitária (i), aumentando-o, obteremos um Valor Atual (VA) que será diretamente proporcional ao Fator de Aumento $(1 + i)$. Caso contrário, o Valor Atual (VA) será diretamente proporcional ao Fator de Redução $(1 - i)$. Consequentemente, os fatores que representam aumentos são maiores que 1 e os que representam reduções são menores que 1. A conclusão é

✓Para operações de aumento, temos a seguinte relação: $\dfrac{VA}{(1+i)} = \dfrac{PV}{1}$, o que nos fornece a expressão

$$\boxed{VA = PV \cdot (1 + i).}$$

✓Para operações de redução (desconto), temos a seguinte relação: $\dfrac{VA}{(1-i)} = \dfrac{PV}{1}$, de onde obtemos

$$\boxed{VA = PV \cdot (1 - i).}$$

É importante comentarmos que o Valor Principal (PV) pode ser considerado o Valor Inicial, assim como, O Valor Atual (VA) pode ser considerado o Valor Final. E ainda, vale ressaltar que Salvo qualquer menção em contrário, sempre que em alguma fórmula de nosso trabalho usarmos o símbolo i, estaremos nos referindo à taxa unitária ou decimal e não à percentual.

Agora, vamos retomar o item (b) do Exemplo 3.2, e resolvê-lo matematicamente, ou seja, usando a relação $VA = PV \cdot (1 + i)$, com a taxa unitária $i = 0,09$, obtemos $VA = R\$677,98$.

O próximo exemplo diz respeito a uma taxa presente no nosso cotidiano.

Exemplo 3.3. *Em Goiânia, o valor do IPTU tem desconto de 10% para pagamentos à vista. Se o valor do IPTU de uma residência for de R$ 450,00 e o pagamento for à vista, pergunta-se:*

a) Qual será o valor do desconto?

Solução pela calculadora comum:

Pressione	*Visor*	*Significado*
450 x 10%	*45*	*Calcula 10% de R$ 450,00*

Solução Matemática: 10% de R$ 450,00 equivalem a (10/100)· 450,00 = 4500/100 = R$ 45,00.

b) Qual será o valor a ser desembolsado?

Solução pela calculadora comum :

Pressione	*Visor*	*Significado*
450 - 10%	*405*	*Calcula R$ 450,00 descontado de 10%*

Solução Matemática: R$ 450,00 subtraído do valor encontrado no item (a) teremos: 450,00 - 45,00= R$ 405,00.

Pela relação $VA = PV \cdot (1 - i)$*, obtemos a mesma resposta, pois* $i = 10\%$*; logo,*

$$VA = 450,00 \cdot (1 - 0,1) = 450,00 \cdot 0,9 = R\$405,00.$$

Os dois próximos exemplos referem-se à aquisição de bens de consumo.

Exemplo 3.4. *Uma loja está vendendo um determinado eletrodoméstico nas seguintes condições:*

✓ *à vista com 10% de desconto sobre o valor de tabela, ou*

✓ *a prazo: o valor de tabela é dividido em duas parcelas iguais e consecutivas, vencendo a primeira no ato da compra e a segunda, 30 dias após o pagamento da primeira.*

Qual a taxa percentual cobrada pela loja nas vendas a prazo?

Vamos trabalhar com a hipótese de que o valor de tabela (Valor Principal) seja de R$ 100,00.

Como é uma operação de desconto, a relação $VA = PV \cdot (1 - i)$ *com* $i = 10\%$*, nos dá* $VA = R\$90,00$*, que é o valor à vista do bem.*

Para o pagamento a prazo, como são duas parcelas iguais, teremos R$ 50,00 no ato da compra e R$ 50,00 para 30 dias. O valor financiado é a diferença entre o valor à vista e a entrada; logo, R$ 90,00 - R$ 50,00 = R$ 40,00.

Portanto, em 30 dias, o comprador terá que desembolsar R$ 50,00 pelos R$ 40,00 financiados.

Como teremos um aumento, vamos usar a relação, $VA = PV \cdot (1+i)$*, para calcular a taxa percentual pedida. Segue que*

$$50,00 = 40,00 \cdot (1 + i) \Rightarrow i = 25\%.$$

Exemplo 3.5. *Uma mercadoria era vendida no mês de março por R$ 150,00. No mês de abril, foi reajustada em 10%, e em maio, em 15%. Pergunta-se:*

a) Qual o valor do produto após esses dois aumentos?

Solução pela calculadora comum:

Pressione	*Visor*	*Significado*
150 + 10% +15%	*189,75*	*Calcula 150 aumentado sucessivamente de 10% e 15%*

Solução matemática: como se trata de aumento, usaremos a relação

$$VA = PV \cdot (1 + i).$$

O valor atual após o primeiro aumento é $VA = 150 \cdot 1,1 = R\$165,00$ *e o valor atual após o segundo aumento é* $VA = 165 \cdot 1,15 = R\$189,75$*. Logo, o valor do produto é de R$ 189,75.*

b) Qual o percentual total de aumento acumulado que sofreu tal mercadoria no período?

O nosso objetivo agora, é encontrar a taxa percentual que aplicada, uma única vez, em R$ 150,00, resulta em R$ 189,75; ou seja, queremos um aumento único que seja equivalente aos dois aumentos sucessivos.

Tratando-se de um aumento, vamos usar a relação $VA = PV \cdot (1 + i)$ *para obter*

$$189,75 = 150,00 \cdot (1 + i) \Rightarrow i = 26,5\%.$$

Note que os aumentos são calculados uns sobre os outros (princípio que rege a capitalização composta) e que a taxa percentual total de aumento não é obtida simplesmente pela soma das taxas percentuais de aumentos aplicadas sobre as bases de cálculo. No exemplo anterior, a taxa total de aumento percentual foi de 26,5%, e não 25% (10%+15%). A taxa de 25% estaria correta se ambos os aumentos (10% e 15%) fossem aplicados à mesma base de cálculo inicial (príncipio que rege a capitalização simples), ou seja, R$ 150,00. Nesse caso, os aumentos não seriam sucessivos, e sim simultâneos.

Uma pergunta natural é: Como resolver o item (a), pela solução matemática, sem precisar de duas etapas? E se fossem vários aumentos sucessivos?

Aplicando a fórmula $VA = PV \cdot (1 + i)$ de forma recorrente, deduziremos uma fórmula geral. Para a dedução da fórmula é importante notarmos que o Valor Atual (VA) de uma etapa será o Valor Principal (PV) da etapa seguinte:

$$\begin{aligned} VA_1 &= PV \cdot (1 + i_1) \\ VA_2 &= VA_1 \cdot (1 + i_2) \\ &\vdots \\ VA &= VA_{n-1} \cdot (1 + i_n). \end{aligned}$$

Multiplicando-se as equações membro a membro, encontraremos

$$\boxed{VA = PV \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n)} \quad (1)$$

Observe que para taxas iguais ($i_1 = i_2 = \ldots = i_n = i$), teremos $VA = PV \cdot (1+i)^n$, que é justamente a fórmula para o cálculo do montante a juros compostos.

Agora, vamos retomar o item (a) do Exemplo 3.5 e resolvê-lo matematicamente com uma única etapa, ou seja, usando a relação (1). Ocorreram dois aumentos sucessivos, portanto

$$VA = 150,00 \cdot (1,1) \cdot (1,15) = R\$189,75.$$

Por analogia, concluímos que para descontos sucessivos, vale a fórmula

$$\boxed{\text{VA} = \text{PV} \cdot (1 - \text{i}_1) \cdot (1 - \text{i}_2) \cdot (1 - \text{i}_3) \cdot ... \cdot (1 - \text{i}_n).} \tag{2}$$

De forma geral, podemos usar a igualdade (1) para os casos em que certo valor inicial sofre aumentos e descontos sucessivos; para tanto, basta usarmos as taxas de desconto sendo negativas. O próximo exemplo aborda essa questão.

Exemplo 3.6. *Observe abaixo os dados coletados a respeito da variação do dólar em dias e horários diferentes.*

22/05/2012 - 12:01 - Dólar sobe 0,15% e vale R$ 2,0440

22/05/2012 - 16:43 - Dólar encerra em alta de 1,76%

23/05/2012 - 16:42 - Dólar fecha em queda de 1,64%

24/05/2012 - 16:43 - Dólar fecha em queda de 0,59%

(Fonte: http://www.financeone.com.br/moedas/cotacões-do-dolar#).

De acordo com as informações acima, responda:

a) Qual era a cotação do dólar imediatamente antes do aumento de 0,15% ?

Tratando-se de uma operação de aumento, utilizaremos $VA = PV \cdot (1 + i)$ para obter

$$2,044 = PV \cdot (1,0015) \Rightarrow PV = R\$2,041.$$

Note que um procedimento errado seria descontar 0,15% de R$ 2,044 com o intuito de voltar ao valor antes do aumento. Desse fato, tiramos uma lição fundamental: "a taxa que leva o valor presente ao valor futuro não é a mesma que traz o valor futuro para o valor presente."

b) Qual a cotação do dólar imediatamente após a queda de 0,59% ?

Observe que $PV = R\$2,041$; $i_1 = 0,15\% = 0,0015$; $i_2 = 1,76\% = 0,0176$; $i_3 = -1,64\% = -0,0164$ e $i_4 = -0,59\% = -0,0059$.

Esse é um problema de operações sucessivas, com aumentos e reduções. Recorrendo a (1) e lembrando que são dois aumentos e dois descontos, obtemos

$$VA = 2,041 \cdot (1 + 0,0015) \cdot (1 + 0,0176) \cdot (1 - 0,0164) \cdot (1 - 0,0059) = R\$2,033.$$

Solução pela calculadora comum :

Pressione	*Visor*	*Significado*
2,041 + 0,15% + 1,76% - 1,64% - 0,59%	*2,033*	*Calcula operações sucessivas*

A partir da próxima seção vamos analisar a evolução do dinheiro ao longo do tempo. Para tanto, vamos abordar inicialmente o conceito de juro.

3.1.3 Juros

Segundo Lapponi [5], o juro possui diversos conceitos. Por exemplo, o dicionário Houaiss define o juro como a quantia que remunera um credor pelo uso do seu dinheiro por parte de um devedor durante um período de tempo determinado, ou como a renda ou rendimento de capital investido. Portanto, se um investidor empresta seu dinheiro a um tomador de empréstimo, ele deixa de dispor desse capital por um certo prazo para receber uma recompensa por esse sacrifício denominada juro.

Para calcularmos o valor dos juros são necessários os seguintes fatores:

- ✓ Capital ou valor principal: valor em dinheiro envolvido numa transação financeira, que será emprestado ou aplicado em determinada data.
- ✓ Taxa de juros: é o custo ou remuneração percentual paga pelo uso do dinheiro por certo prazo.
- ✓ Tempo ou período: prazo em determinada unidade de tempo (dia, mês, ano, etc.), em que o capital foi empregado a determinada taxa de juros.

Vale ressaltar que:

- ✓ Juros exatos são aqueles calculados em relação ao ano civil (também chamado de ano-calendário), que é o ano de 366 ou 365 dias, caso seja ou não bissexto e com meses de 28, 29, 30 ou 31 dias.

- ✓ Juros comerciais ou ordinários são aqueles calculados sobre o ano comercial, que é o ano de 360 dias com meses de 30 dias. É muito utilizado em operações financeiras. Neste trabalho, até que se fale o contrário, será usada essa convenção.

- ✓ O ano civil é utilizado para a contagem dos dias e o ano comercial é utilizado para o cálculo das taxas de juros.

- ✓ Regime de capitalização: refere-se ao processo de formação dos juros, que poderá ser simples ou composto. A incorporação desses juros ao capital é o que denominamos de montante, ou seja, montante $=$ capital $+$ juros .

Por meio do próximo exemplo vamos mostrar a diferença entre juros simples e compostos.

Exemplo 3.7. *Um capital de R$ 1000,00 é aplicado por 5 anos à taxa de 20% ao ano. Pede-se:*

a) construa uma tabela que mostre a evolução do dinheiro pelo regime de capitalização simples e deduza uma fórmula geral para o cálculo do valor dos juros simples.

b) construa uma tabela que mostre a evolução do dinheiro pelo regime de capitalização composta e deduza uma fórmula geral para o cálculo do montante a juros compostos.

Para resolver o item (a), lembre-se que no regime de capitalização simples o valor dos juros em cada período é calculado aplicando-se a taxa de juros sempre sobre o valor *do capital inicial. Veja:*

Período	*Juros Simples*	*Montante*
0		*Capital inicial =R\$1000,00*
1	*R\$ 1000,00 · 0,2=R\$ 200,00*	*R\$ 1000,00+R\$ 200,00=R\$ 1200,00*
2	*R\$ 1000,00 · 0,2=R\$ 200,00*	*R\$ 1200,00+R\$ 200,00=R\$ 1400,00*
3	*R\$ 1000,00 · 0,2=R\$ 200,00*	*R\$ 1400,00+R\$ 200,00=R\$ 1600,00*
4	*R\$ 1000,00 · 0,2=R\$ 200,00*	*R\$ 1600,00+R\$ 200,00=R\$ 1800,00*
5	*R\$ 1000,00 · 0,2=R\$ 200,00*	*R\$ 1800,00+R\$ 200,00=R\$ 2000,00*

O valor dos juros em cada período é constante e vale $C \cdot i$. *Sendo* J *a soma dos juros de* n *períodos, deduzimos que:*

$$\boxed{J = C \cdot i \cdot n,}$$

onde

J *é o valor dos juros simples,* C *é o capital inicial,* i *é a taxa de juros na forma decimal ou unitária e* n *é o prazo expresso na mesma unidade de tempo da taxa de juros. Lembrando que*

$$\boxed{M = C + J,}$$

onde M *é o montante,* C *é o capital e* J *são os juros.*

Para o item (b), recorde-se que no regime de capitalização composta o valor dos juros em cada período é calculado aplicando-se a taxa de juros sempre sobre o montante do *período anterior. Veja:*

Período	*Juros compostos*	*Montante*
0		*Capital inicial =R\$1000,00*
1	*R\$ 1000,00 · 0,2=R\$ 200,00*	*R\$ 1000,00+R\$ 200,00=R\$ 1200,00*
2	*R\$ 1200,00 · 0,2=R\$ 240,00*	*R\$ 1200,00+R\$ 240,00=R\$ 1440,00*
3	*R\$ 1440,00 · 0,2=R\$ 288,00*	*R\$ 1440,00+R\$ 288,00=R\$ 1728,00*
4	*R\$ 1728,00 · 0,2=R\$ 345,60*	*R\$ 1728,00+R\$ 345,60=R\$ 2073,60*
5	*R\$ 2073,60 · 0,2=R\$ 414,72*	*R\$ 2073,60+R\$ 414,72=R\$ 2488,32*

Pela definição de juros compostos e usando a recorrência, temos: $M_1 = C + (C \cdot i)$*; daí,*

$$\begin{aligned} M_1 &= C \cdot (1+i) \\ M_2 &= M_1 \cdot (1+i) \\ &\vdots \\ M &= M_{n-1} \cdot (1+i). \end{aligned}$$

Multiplicando-se membro a membro as equações, encontraremos:

$$M = C \cdot (1+i) \cdot (1+i) \cdot \ldots \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^n,$$

onde i *é a taxa de juros na forma decimal ou unitária e* n *é o prazo ou número de períodos, expresso na mesma unidade de tempo da taxa de juros.*

Note que o valor dos juros simples e dos juros compostos é igual no primeiro período de capitalização; porém, após esse período, o valor dos juros compostos é superior ao valor dos juros simples. Logo é razoável perguntar: Quando o valor dos juros simples é maior que o valor dos juros compostos?

Para responder a essa pergunta analisaremos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.8. *Qual o montante a ser pago em um empréstimo de R\$ 100.000,00, pelo prazo de 15 dias corridos, a uma taxa de 20% ao mês? Faça os cáculos tanto no regime de capitalização simples quanto no de composta.*

Lembre-se de que a taxa de juros e o prazo devem estar na mesma unidade de tempo. Os dados do problema são: $i = 0,2\,a.m.$, *n=15 dias = 0,5 mês e* $C = R\$100.000,00$. *O cálculo dos juros simples é* $J = C \cdot i \cdot n = \ldots = R\$10.000$. *Dessa forma o montante, pelo regime de capitalização simples, é dado por*

$$M = C + J = R\$110.000,00.$$

calculando o montante pelo regime de capitalização composta:

$$M = C{\cdot}(1{+}i)^n = 100.000{\cdot}(1{+}0,2)^{0,5} = 100.000{\cdot}\sqrt{1,2} = 100.000{\cdot}1,09544 = R\$109.544,00.$$

Note que o valor dos juros simples é superior ao dos juros compostos para períodos menores do que 1. Para visualizar esse resultado observe o gráfico a seguir:

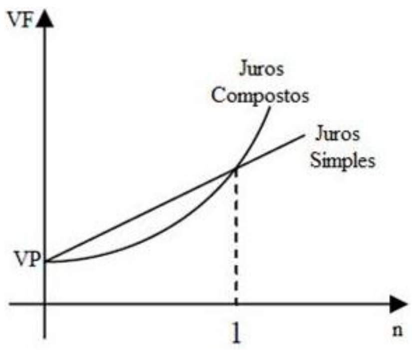

Figura 1: Gráfico comparativo entre Juros Simples e Juros Compostos.

Na próxima seção destacaremos as principais propriedades do regime de capitalização simples.

3.1.4 Regime de capitalização simples

Já vimos no item (a) do exemplo 3.7, a definição de capitalização simples e a dedução da fórmula que calcula o valor dos juros simples. Vamos agora, apresentar conclusões importantes a respeito desse tipo de capitalização.

- ✓ O valor dos juros em cada período é constante, pois a taxa de juros sempre é aplicada sobre o valor inicial.

- ✓ Os juros crescem linearmante com o prazo, caracterizando uma função afim. De fato; sabemos que $J = C \cdot i \cdot n$; como o capital (C) e a taxa (i) são constantes, podemos escrever $J_n = C \cdot i \cdot n$; isto é, J é uma função linear.

- ✓ Analogamente à observação anterior, o montante cresce linearmente com o prazo, pois $M_n = C \cdot (1 + i \cdot n)$.

- ✓ Para n inteiro, tanto os juros quanto os montantes, formam uma progressão aritmética de razão $C \cdot i$.

- ✓ As taxas de juros proporcionais são equivalentes.

Precisamos formalizar os conceitos de taxas proporcionais e taxas equivalentes.

✓Duas taxas são proporcionais quando os seus valores guardam uma proporção com o tempo a que elas se referem. Para fazer o cálculo, é preciso reduzir o tempo a uma mesma unidade. Problemas envolvendo taxas proporcionais podem ser resolvidos por meio de Regra de Três simples.

- ✓ Denominam-se taxas equivalentes aquelas que, aplicadas a um mesmo valor presente, geram um mesmo montante, para um mesmo intervalo de tempo.

- ✓ Pode-se compatibilizar o período (n) ou a taxa (i), alterando uma ou outra variável, uma vez que as relações são proporcionais.

Vejamos uma aplicação desses conceitos.

Exemplo 3.9. *Guilherme aplicou R$ 1200,00 a juros simples comerciais, à taxa de 60% a.s.(ao semestre), de 15/06 a 23/09 do mesmo ano.*

a) Qual a taxa mensal proporcional à taxa dada?

Como 1 sementre equivale a 6 meses, basta fazer $\frac{60}{6} = 10$*, encontrando uma taxa de 10% a.m.*

b) Qual a taxa anual proporcional à taxa dada?

Como 1 ano é equivalente a 2 semestres, basta fazer $2 \cdot 60 = 120$*, encontrando uma taxa de 120% a.a.*

c) Qual o montante obtido para cada uma das taxas encontradas nos itens a e b?

Primeiramente, vamos contar os dias usando o ano civil; lembrando-se que o primeiro dia deve ser excluído. Assim, Junho terá 15 dias, Julho terá 31 dias, Agosto terá 31 dias e Setembro terá 23 dias. Logo o dinheiro rendeu durante 100 dias

Vamos calcular o montante usando a taxa de taxa de 10% a.m.

Como os juros são comerciais, temos que: 1 mês equivale a 30 dias; daí, 100 dias equivale a $\frac{100}{30}$ *mês. Aplicando os dados na fórmula* $M = C \cdot (1 + i \cdot n)$*, teremos*

$$M = 1200 \cdot (1 + 0,1 \cdot \frac{100}{30}) = 1200 \cdot \frac{4}{3} = R\$1600,00.$$

Agora,vamos calcular o montante usando a taxa de 120% a.a. = 1,2 a.a.

Como os juros são comerciais, temos que 1 ano equivale a 360 dias; daí, 100 dias equivale a $\frac{100}{360}$ *ano. Aplicando os dados na fórmula:* $M = C \cdot (1 + i \cdot n)$*, teremos:*

$$M = 1200 \cdot (1 + 1,2 \cdot \frac{100}{360}) = 1200 \cdot \frac{4}{3} = R\$1600,00.$$

Concluímos que as taxas de 120% a.a. e de 10% a.m. são proporcionais e equivalentes.

Uma observação importante, é que o regime de juros simples é utilizado apenas nas operações de curtíssimo prazo (Cheque Especial, boleto de condomínio, carnês de lojas, etc) e no processo de desconto comercial simples de títulos.

Se uma pessoa deve uma quantia em dinheiro numa data futura, é normal que entregue ao credor um título de crédito, que é o comprovante dessa dívida. Todo título de crédito tem uma data de vencimento; porém, o devedor pode resgatá-lo antecipadamente, obtendo com isso um abatimento denominado desconto. Portanto, o desconto é uma das mais comuns aplicações da regra de juro e por esse motivo trataremos desse assunto em seguida.

3.1.5 Desconto simples

Vamos supor que você tenha em mãos um cheque pré-datado para três meses no valor de R$ 800,00 e necessite trocá-lo hoje. É claro que receberá, por ele, um valor inferior a R$ 800,00. Esse cheque, então, estará sendo descontado. Assim, em uma operação de desconto chamamos de N, ao valor nominal, de face ou futuro (valor do título na data do vencimento) e de A, ao valor atual ou descontado (valor do título na data do desconto).

O desconto é a diferença entre o valor nominal de um título (duplicata, nota promissória, letra de câmbio, cheque pré-datado, etc.) e seu respectivo valor atual; ou seja,

$$\boxed{D = N - A}$$

O desconto simples é efetuado com base no regime de capitalização simples. Nessa modalidade está incluído o desconto comercial ou bancário (ou "por fora") e o desconto matemático ou racional (ou "por dentro").

Neste trabalho não será contemplado o estudo do desconto racional simples, pois não tem sido utilizado no cálculo dos produtos do mercado financeiro brasileiro. Por outro lado, o desconto comercial simples é amplamente aplicado. Denominamos de desconto comercial simples (D) o equivalente ao juro simples (J), produzido pelo valor nominal do título (N) durante o tempo de antecipação (n) a uma taxa de desconto (i) fixa. Sendo assim, concluímos que: se $J = C \cdot i \cdot n$, então

$$\boxed{D = N \cdot i \cdot n,}$$

onde D é o desconto, N é o valor nominal, i é a taxa de desconto e n é o tempo de antecipação. Consequentemente, se $D = N - A$ e $D = N \cdot i \cdot n$, então

$$\boxed{A = N \cdot (1 - i \cdot n),}$$

onde A é o valor atual, N é o valor nominal, i é a taxa de desconto e n, o tempo de antecipação.

Analisando a fórmula do desconto comercial simples, observa-se que ele deve ser usado com bastante cuidado, uma vez que, em situações de taxas e prazos elevados o valor do desconto pode ser superior ao valor do título. Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.10. *Uma empresa deseja descontar uma única duplicata de valor nominal R$ 10.000,00 com vencimento previsto para 39 dias corridos. Sabendo que o banco realiza tais operações cobrando uma taxa de desconto de 3% a.m., IOF, imposto sobre operações financeiras que é aplicado sobre o valor atual, à alíquota de 0,0041% ao dia e adicional fixo de 0,38%, tarifa de cobrança de R$ 6,00 por título descontado e tarifa de contratação de R$ 60,00, calcule:*

a) O valor do desconto:

Aplicando a fórmula $D = N \cdot i \cdot n$, *com* $N = 10.000$, $n = 39$ *dias e* $i = 3\%$ *a.m., obtemos*

$$D = R\$390,00.$$

b) Valor atual no ato da contratação:

Utilizando o fato de que $D = N - A$, *com* $D = 390$ *e* $N = 10.000$, *temos*

$$A = R\$9.610,00.$$

c) O valor do IOF:

$$\begin{aligned} IOF(\textit{por 39 dias}) &= 0,000041 \cdot 9.610 \cdot 39 = R\$15,37. \\ IOF(\textit{adicional fixo}) &= 0,0038 \cdot 9.610 = R\$36,52. \\ IOF(\textit{total}) &= 15,37 + 36,52 = R\$51,89. \end{aligned}$$

d) O valor líquido (VL), que é o valor nominal subtraído do desconto e dos encargos (IOF e tarifas), creditado na conta corrente da empresa:

$$VL = N - D - IOF(\textit{total}) - tarifas = 10.000 - 390 - 51,89 - 6 - 60 = R\$9.492,11.$$

e) A taxa mensal efetiva de juros compostos paga pela empresa nessa operação.

Na verdade a operação de desconto é uma operação de empréstimo, onde, o valor nominal e o valor líquido creditado são, respectivamente, o montante e o capital.

Portanto, no caso em questão, a empresa toma emprestado um capital de R$ 9.492,11 por 39 dias, a uma taxa mensal composta, e vai pagar por isso um montante de R$ 10.000,00 ao banco. Logo, essa taxa composta é justamente a taxa efetiva pedida.

Sabendo que 39 dias $= \dfrac{39}{30}$ *meses = 1,3 meses e recorrendo à fórmula* $M = C{\cdot}(1{+}i)^n$*, encontramos*

$$i = 4,09\% a.m.$$

Uma vez que todos os encargos financeiros dessa operação são cobrados no ato da contratação, o custo efetivo total para o tomador é superior ao informado por meio da taxa de desconto (3% a.m.).

O regime de capitalização que vamos estudar a seguir é o mais comumente usado no sistema financeiro e, portanto, o mais útil para cálculos de problemas do dia a dia.

3.1.6 Regime de capitalização composta

Já vimos no item (b) do Exemplo 3.7, a definição de capitalização composta e a dedução da fórmula que calcula o valor do montante. Vamos Então, apresentar conclusões importantes a respeito desse tipo de capitalização.

- ✓ O valor dos juros para o período atual de cálculo é obtido pela aplicação da taxa de juros sobre o montante acumulado até o início desse período. Com isso, o valor dos juros crescem exponencialmente ao longo do tempo. Sabemos que $M = C \cdot (1 + i)^n$ e $M = C + J$, logo, $J = C \cdot [(1 + i)^n - 1]$.
- ✓ O montante cresce exponencialmente com o prazo, pois: $M = C \cdot (1 + i)^n$.
- ✓ Para n inteiro, os montantes formam uma PG de razão $(1 + i)$.
- ✓ As taxas de juros equivalentes não são proporcionais. Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.11. *Um capital de R$ 100,00, aplicado a uma taxa de 10% ao mês, gerou R$ 313,84 no final de um ano. Qual a taxa semestral necessária para fazer esse mesmo capital produzir esse mesmo montante em um ano?*

Como a taxa é semestral e o prazo é anual, vamos encontrar o prazo semestral. Temos que 1 ano equivale a 2 semestres; logo

$$M = C \cdot (1+i)^n \Rightarrow i = 77,16\% a.s.$$

Portanto, as taxas i = 10% a.m. e i = 77,16% a.s. são equivalentes e não proporcionais.

É importante atentarmos para dois fatos.

i) Nos juros compostos é sempre indicado converter a unidade de tempo do prazo para a unidade de tempo da taxa.

ii) O cálculo de taxas equivalentes, na capitalização composta, não se resume a uma simples divisão ou multiplicação de taxas, como ocorre na capitalização simples.

Questionamento que surge nesse momento: "como calcular taxas equivalentes a juros compostos"?

Vamos supor que uma taxa anual i_a e uma taxa mensal i_m sejam equivalentes, ou seja, geram o mesmo montante M quando aplicadas a um mesmo capital C, num mesmo intervalo de tempo n. Para facilitar o entendimento vamos adotar o intervalo de tempo como sendo de 1 ano. Com isso, temos

$$\begin{aligned} M &= C \cdot (1+i_a)^1 \\ &\text{e} \\ M &= C \cdot (1+i_m)^{12}. \end{aligned}$$

Logo,

$$(1+i_a)^1 = (1+i_m)^{12}.$$

Se for dada a taxa mensal, calculamos a anual. Para isso, basta isolarmos i_a. De fato,

$$i_a = (1+i)^{\frac{12}{1}} - 1.$$

Analogamente, se for dada a taxa anual, calculamos a mensal:

$$i_m = (1+i)^{\frac{1}{12}} - 1.$$

Generalizando, encontramos a seguinte fórmula

$$\boxed{i_q = (1+i)^{\frac{q}{t}} - 1,}$$

onde i_q corresponde à taxa que eu quero, i_t é a taxa que eu tenho, q é o período da taxa que eu quero e t é o período da taxa que eu tenho.

É importante ressaltar que q e t devem estar na mesma unidade de tempo.

Exemplo 3.12. *Qual a taxa anual equivalente a juros compostos a 5% a.m.?*

Dados: $i_t = 5\%\, a.m = 0,05\, a.m.$, $t = 1$ *mês e* $q = 1\, ano = 12\, meses.$

Aplicando a fórmula: $i_q = (1+i)^{\frac{q}{t}} - 1$, *temos*

$$i_q = (1+0,05)^{\frac{12}{1}} - 1 = (1,05)^{12} - 1 = 0,7959 = 79,59\% a.a.$$

Exemplo 3.13. *Quanto uma pessoa deve aplicar hoje, para ter acumulado, a título de juros, a quantia de R\$ 15.000,00 daqui a 24 meses? Considere que a aplicação foi realizada a uma taxa de juros de 1% ao mês, segundo o regime de capitalização composta.*

Os dados do problema são: $J = R\$15.000,00$, $n = 24$ *meses e* $i = 1\%\, ao\ mês = 0,01\, a.m.$. *Assim,*

$$J = C \cdot [(1+i)^n - 1] \Rightarrow C = R\$55.610,21.$$

Atualmente, no mercado financeiro, existe uma série de terminologias e conceitos sobre as taxas de juros que muitas vezes confundem os próprios profissionais das instituições especializadas. Portanto, na seção a seguir, procuraremos abordar, de forma simples e clara, o conceito de mais algumas terminologias existentes, uma vez que outras já foram estudadas anteriormente .

3.1.7 Estudo das taxas

Taxa Nominal é aquela cujo período de capitalização não coincide com aquele a que ela se refere. Para resolvermos problemas que trazem em seu enunciado uma taxa nominal, adotamos, por convenção, que a taxa por período de capitalização seja proporcional à taxa nominal.

Exemplo 3.14. *Qual o montante de um capital de R\$ 5.000,00 no fim de 2 anos, com juros compostos de 24% ao ano capitalizados trimestralmente? Sabemos que* $C = R\$5.000,00$*,* $n = 8\,trimestres$ *e* $i = 0,24\,a.a.$*(taxa nominal); logo,* $i = \dfrac{0,24}{4} = 0,06\,a.t.$*(taxa por período de capitalização). Dessa forma,*

$$M = C \cdot (1+i)^n = 5.000 \cdot (1+0,06)^8 = 5.000 \cdot (1,06)^8 = R\$7.969,00.$$

Taxa Efetiva (i_f): é a que representa o custo ou remuneraçao efetiva total da operação financeira em pauta, tomando-se como base de cálculo o valor do capital que realmente foi recebido ou desembolsado na data da contratação.

É evidente que, ao adotarmos a convenção, a taxa paga não é a oferecida e, sim, maior. Essa é a taxa efetiva (i_f).

A taxa efetiva (i_f), que é definida no mesmo período da taxa nominal, é equivalente a taxa por período de capitalização.

Exemplo 3.15. *Um banco emprestou a importância de R\$ 35.000,00 por 2 anos. Sabendo que o banco cobra uma taxa composta de 36% ao ano, com capitalização semestral, qual a taxa efetiva anual e qual o montante a ser devolvido ao final dos 2 anos?*

O enunciado nos dá: $C = R\$35.000,00$*,* $n = 4\,semestres$ *e* $i = 0,18\,a.s.$ *Desejamos conhecer* M *e* i_q*. Sabemos que*

$$\begin{aligned} i_q &= (1+i)^{\frac{q}{t}} - 1 \\ i_q &= (1+0,18)^{\frac{1\ ano}{1\ semestre}} - 1 \\ i_q &= (1,18)^{\frac{2\ semestres}{1\ semestre}} - 1 \\ i_q &= 0,3924 = 39,24\% a.a. \end{aligned}$$

Vamos calcular o montante usando a taxa efetiva, mas poderia ser usada a taxa por período de capitalização, uma vez que são equivalentes.

$$M = C \cdot (1+i)^n = 35.000 \cdot (1+0,3924)^2 = 35.000 \cdot (1,3924)^2 = R\$67.857,22.$$

Dando sequência ao estudo das taxas, vamos mostrar a relação entre Taxa Real (I_r), Taxa Aparente (I_a) e Taxa de Inflação (I_i); porém, antes, devemos saber que:

Inflação é o fenômeno do aumento persistente e generalizado dos preços de bens e de serviços, com consequente perda do poder aquisitivo da moeda e, taxa aparente, é aquela que vigora nas operações correntes. Essa taxa é formada por dois componentes: um correspondente à inflação e outro correspondente ao juro real. Dito isso, observe a demonstração abaixo.

Sendo C o capital inicial, I_r a taxa real, I_a a Taxa Aparente e I_i a Taxa de Inflação, podem acontecer os seguintes casos:

- Com uma inflação igual a zero e uma taxa de juros I_r, o capital inicial se transformará, ao final de um período, em $C \cdot (1 + I_r)$.

- Com uma taxa de inflação I_i, o capital inicial, ao final de um período, equivalerá a $C \cdot (1 + I_i)$.

- Com uma taxa de juros I_r e uma taxa de inflação I_i, simultâneamente, o capital inicial equivalerá a $C \cdot (1 + I_r) \cdot (1 + I_i)$.

- Com uma taxa aparente I_a, o capital inicial se transformará, ao final de um período, em $C \cdot (1 + I_a)$.

Como as duas últimas expressões sao equivalentes, já que ambas traduzem o valor efetivamente recebido, temos: $C \cdot (1 + I_a) = C \cdot (1 + I_r) \cdot (1 + I_i)$; daí,

$$\boxed{(1 + I_a) = (1 + I_r) \cdot (1 + I_i)}$$

Exemplo 3.16. *Um empréstimo foi feito a uma taxa de 32% ao ano. sabendo que a inflação nesse ano foi de 21%, calcule a taxa real anual.*

Como $I_a = 0,32\, a.a.$ *e* $I_i = 0,21\, a.a.$*, basta aplicar a igualdade anterior, para obter* $I_r = 9\%\, a.a.$*.*

Note que quando a taxa aparente é menor do que a taxa de inflação significa redução do poder de compra, ou seja, desvalorização do dinheiro.

O conceito de desconto no regime de capitalização composta é o mesmo do desconto simples, entretanto, empregamos o desconto composto para operações a longo prazo, já que a aplicação do desconto simples comercial, nesse caso, pode levar-nos a resultados sem nexo. Veja isso, com mais detalhe na seção seguinte.

3.1.8 Desconto composto

O desconto composto é efetuado com base no regime de capitalização composta, ou seja, utilizando-se taxas de juros exponenciais. Nessa modalidade, a exemplo do desconto simples, estão incluídos o desconto racional e o desconto comercial ou bancário.

Como no mercado financeiro brasileiro, o desconto composto comercial tem demonstrado pouca aplicação prática, vamos omitir o seu estudo neste trabalho. Dito isso, vamos nos dedicar ao estudo do desconto composto racional que será de suma importância em assuntos futuros.

Desconto racional composto, por dentro ou real ocorre quando o valor do desconto é calculado segundo os conceitos de valor atual (A) e valor futuro (N) a juros compostos. Nessa modalidade, o valor do desconto pode ser definido como a diferença entre o valor nominal do título (valor futuro) e seu respectivo valor presente (valor atual), ou seja, $D = N - A$. Por definição, a relação entre o valor nominal e o valor atual é dada pela fórmula da capitalizaçao composta: $M = C \cdot (1 + i)^n$, onde o montante (M) é o valor nominal (N); assim como, o capital (C) é o valor atual (A); com isso, podemos dizer que o valor nominal (N) é o montante do valor atual (A). Então, a fórmula pode ser escrita da seguinte forma:

$$\boxed{N = A \cdot (1 + i)^n,}$$

onde N, A, i e n correspondem, respectivamente, ao valor nominal do título, ao valor atual do título, à taxa de juros e ao prazo.

Exemplo 3.17. *Um título de R\$ 60.000,00 foi resgatado vinte meses antes de seu vencimento a uma taxa de juros de 5% ao mês. Calcule o valor atual e o desconto desse título segundo os conceitos de desconto racional composto e desconto comercial simples.*

Dados: $N = R\$60.000,00$, $n = 20\,meses$ *e* $i = 5\%\,a.m.$.

Recorrendo aos conceitos de desconto racional composto e desconto comercial simples, respectivamente, obtemos

$$N = A \cdot (1 + i)^n \Rightarrow A = R\$22.613,36 \;\; e \;\; D = 60.000 - 22.613,36 \Rightarrow D = R\$37.386,64.$$

$$D = N \cdot i \cdot n \Rightarrow D = R\$60.000,00 \;\; e \;\; D = N - A \Rightarrow A = 0.$$

Esse resultado confirma a limitação da aplicação do desconto comercial simples. Por isso, em situações de inflação alta e prazos longos, as operações de desconto simples devem ser substituídas por operações de desconto composto, evitando as distorções demonstradas nesse exemplo.

Para efeito de uma melhor compreensão dos próximos assuntos é importante sabermos que ao deslocarmos um capital para o futuro, estamos fazendo uma capitalização, ou seja, colocando juros nesse capital. Por outro lado, quando deslocamos um capital para o passado, estamos fazendo uma descapitalização, ou seja, retirando os juros que estão embutidos nesse capital.

Vamos, na próxima seção, aprender a calcular o valor de uma dívida (ou de um empréstimo, ou valor à vista de uma mercadoria); para tanto, aplicaremos a descapitalização.

3.1.9 Valor atual de um conjunto de capitais

De modo geral, dado um conjunto de valores monetários N_1 na data 1, N_2 na data 2, N_3 na data 3, e assim por diante até o valor N_n na data n, chamamos de valor atual desse conjunto, a uma taxa i, ao valor indicado por A, que, aplicado a taxa i, gera as rendas N_1, N_2,...,N_n; isto é:

$$A = \frac{N_1}{(1+i)^1} + \frac{N_2}{(1+i)^2} + \frac{N_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{N_n}{(1+i)^n}.$$

Exemplo 3.18. *Uma pessoa tem dívidas de R\$ 2.000,00, R\$ 3.500,00 e R\$ 5.000,00 que vencem dentro de 2, 5 e 6 meses, respectivamente. Quanto devera aplicar hoje, a juros compostos e à taxa de 1% a.m., para poder pagar os compromissos?*

O problema nos dá: $i = 0,01\, a.m.$, $N_2 = R\$2.000,00$ *e* $n = 2\, meses$, $N_5 = R\$3.500,00$ *e* $n = 5\, meses$, $N_6 = R\$5.000,00$ *e* $n = 6\, meses$. *Portanto,*

$$A = \frac{N_1}{(1+i)^1} + \frac{N_2}{(1+i)^2} + \frac{N_3}{(1+i)^3} = \frac{2.000}{(1,01)^2} + \frac{3.500}{(1,01)^5} + \frac{5000}{(1,01)^6} = R\$10.000,95.$$

Portanto, o valor a ser aplicado é R\$ 10.000,95.

Neste trabalho, por seu caráter elementar, abordaremos, a partir de agora, apenas as rendas (sucessões de prestações ou de depósitos) certas, constantes e periódicas. Portanto, observe as definições seguintes de acordo com Crespo [3].

- ✓ Rendas certas: ocorrem quando o número de prestações ou depósitos, seus vencimentos e seus respectivos valores são prefixados.

- ✓ Rendas constantes: ocorrem quando o valor de todas as prestações ou depósitos são iguais.

- ✓ Rendas periódicas: ocorrem quando o período (mês, trimestre, ano, etc) da renda é sempre o mesmo.

A seguinte informação é útil: Quanto à data do vencimento do primeiro termo (prestação ou depósito), uma renda certa pode ser postecipada, antecipada ou diferida.

- ✓ Renda postecipada: ocorre quando o vencimento do primeiro termo se dá no fim do primeiro período a contar da data zero, isto é, da data da assinatura do contrato.

- ✓ Renda antecipada: ocorre quando o vencimento do primeiro termo se dá na data zero.

- ✓ Renda diferida: ocorre quando o vencimento do primeiro termo se dá no fim de um determinado número de períodos (período de carência), a contar da data zero.

Vamos, na próxima seção, aprender a calcular o valor de uma dívida (ou de um empréstimo, ou valor à vista de uma mercadoria) que será paga em prestações periódicas de quantias constantes, sobre as quais incide a mesma taxa, para tanto, aplicaremos a descapitalização.

3.1.10 Sequência uniforme de pagamentos periódicos

Consideremos um valor financiado (atual) A que deve ser pago em n prestações iguais de valor N nas datas $1, 2, 3, \ldots, n$ (renda postecipada) e suponhamos que a taxa de juros compostos cobrada no financiamento seja i por período de tempo. Chamamos esse conjunto de sequência uniforme de pagamentos periódicos. Podemos indicar o valor atual das prestações, representado por A, aplicado à taxa i, como sendo

$$A = \frac{N}{(1+i)^1} + \frac{N}{(1+i)^2} + \frac{N}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{N}{(1+i)^n}.$$

Considerando que o 2º membro dessa expressão é a soma dos termos de uma progressão geométrica finita, cuja razão é $q = \dfrac{1}{1+i}$ e cujo 1º termo é $a_1 = \dfrac{N}{1+i}$, obtemos

$$A = N \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}. \tag{3}$$

Se a primeira prestação for paga no ato (renda antecipada), teremos um valor financiado (atual) A que deve ser pago em n prestações iguais de valor N nas datas $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Supondo que a taxa de juros compostos cobrada no financiamento seja i por período de tempo, segue que

$$A = \frac{N}{(1+i)^0} + \frac{N}{(1+i)^1} + \frac{N}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{N}{(1+i)^{n-1}}.$$

Somando os n primeiros termos da PG de razão $q = \dfrac{1}{1+i}$ e 1º termo $a_1 = N$, obteremos a seguinte fórmula

$$\boxed{A = N \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}}$$

Exemplo 3.19. *Um banco concedeu um empréstimo para uma pessoa adquirir um carro. O pagamento deveria ser feito em 12 prestações mensais de R$ 1.400,00 cada uma, sem entrada (renda postecipada). Qual o valor do empréstimo sabendo-se que a taxa de juros compostos cobrado pelo banco foi de 3% a.m.?*

Dados: $N = R\$1.400,00$, $i = 0,03\,a.m.$ *e* $n = 12$ *prestações. Daí, segue que*

$$A = N \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = 1.400 \cdot \frac{(1,03)^{12} - 1}{0,03(1,03)^{12}} = R\$13.936,50.$$

Exemplo 3.20. *Qual seria o valor do empréstimo, no exemplo anterior, se a primeira prestação fosse paga no ato (renda antecipada)? E se a primeira prestação fosse paga 3 meses depois de realizado o empréstimo (renda diferida)?*

Primeiramente, vamos calcular o valor do empréstimo no caso em que a primeira prestação é paga no ato da operação.

$$A = N \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = 1.400 \cdot (1,03) \cdot \frac{(1,03)^{12} - 1}{0,03(1,03)^{12}} = R\$14.354,60.$$

Agora, vamos calcular o valor do empréstimo no caso em que a primeira prestação é paga 3 meses depois de realizada a operação. Como a 1ª prestação é paga na data

3, vamos calcular o valor do empréstimo na data 2 (A_2). Para tanto, vamos usar a fórmula $A = N \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$ *e obter* $A_2 = R\$13.936,50$.

Agora, vamos descapitalizar $A_2 = R\$13.936,50$ *dois períodos, para obtermos o seu valor na data zero (A_0). Para tanto, basta usarmos a fórmula* $M = C \cdot (1+i)^n$*, obtendo* $A_0 = R\$13.136,49$.

Na próxima seção veremos como determinar o montante constituído por depósitos periódicos de quantias constantes sobre as quais incide a mesma taxa.

3.1.11 Montante de uma Sequência uniforme de depósitos periódicos

Consideremos n depósitos mensais iguais a N, nas datas $1, 2, 3, \ldots, n$ (renda postecipada), rendendo juros compostos, a uma taxa i mensal. Queremos saber qual a soma dos M montantes desses depósitos na data n (isto é, logo após ter sido feito o último depósito).

O montante do 1º depósito na data n é $N \cdot (1+i)^{(n-1)}$ e o montante do 2º depósito na data n é $N \cdot (1+i)^{(n-2)}$. Procedendo de modo análogo com os outros depósitos, obtemos o montante do último depósito na data n, que vale N. Assim,

$$M = N \cdot (1+i)^{(n-1)} + N \cdot (1+i)^{(n-2)} + N \cdot (1+i)^{(n-3)} + \ldots + N.$$

Os termos do 2º membro dessa expressão constituem uma Progressão Geométrica cuja razão vale $q = \dfrac{1}{1+i}$ e cujo 1º termo é $a_1 = N \cdot (1+i)^{(n-1)}$. Logo,

$$\boxed{M = N \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.}$$

Se o primeiro depósito for feito na data zero(renda antecipada), teremos n depósitos mensais iguais a N, nas datas $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$, rendendo juros compostos, a uma taxa i mensal. Queremos saber qual a soma dos M montantes desses depósitos na data n (isto é, um período após ter sido feito o último depósito). Dessa forma,

$$M = N \cdot (1+i)^n + N \cdot (1+i)^{(n-1)} + \ldots + N \cdot (1+i);$$

e então

$$\boxed{M = N \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.}$$

Exemplo 3.21. *Uma pessoa deposita mensalmente R$ 600,00 num fundo que rende juros compostos, à taxa de 1,5% a.m. Qual será seu montante no instante imediatamente após (renda postecipada) o 30º depósito?*

Dados: $N = R\$600,00$, $i = 0,015$ *a.m.* e $n = 30$ *depósitos. Assim,*

$$M = N \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 600 \cdot \frac{(1,015)^{30} - 1}{0,015} = R\$22.520,00.$$

Exemplo 3.22. *Qual seria o montante, no exemplo anterior, um período após(renda antecipada) o 30º depósito?*

$$M = N \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 600 \cdot (1,015) \cdot \frac{(1,015)^{30} - 1}{0,015} = R\$22.857,80.$$

Nos sistemas de amortização de um empréstimo a longo prazo, regra geral, os juros são sempre cobrados sobre o saldo devedor, o que significa considerar apenas o regime de juros compostos. Desse modo, o não pagamento de uma prestação, isto é, o não pagamento do juro em um dado período redunda em um saldo devedor maior, já que está sendo calculado juro sobre juro. Na próxima seção estudaremos os sistemas de amortização tradicionais.

3.1.12 Sistemas de amortização

Quando contraímos uma dívida, devemos saldá-la por meio do pagamento do principal e juros contratados. Os critérios para amortização de dívidas podem obedecer a diversos métodos.

Na devolução de um empréstimo, cada prestação é composta de duas parcelas: uma referente ao pagamento de juros e outra referente à cota de amortização.

Se P_k é a k-ésima prestação paga, temos: $P_k = J_k + A_k$, sendo E o valor do empréstimo recebido e P_1 o valor da primeira prestação paga. Assim, $P_1 = J_1 + A_1$.

A parcela de juros J_1 corresponde aos juros calculados sobre E e a cota de amortização A_1 irá gerar um saldo devedor S_1 dado por $S_1 = E - A_1$. Como, $P_2 = J_2 + A_2$, onde, J_2 são os juros calculados sobre S_1 e A_2 gera o saldo devedor S_2, já que $S_2 = S_1 - A_2$.

De forma geral, $P_k = J_k + A_k$, onde J_k são os juros calculados sobre S_{k-1} e A_k gera o saldo devedor S_k, já que $S_k = S_{k-1} - A_k$. As diferentes formas de devolução de um empréstimo é o que denominamos de sistema de amortização. Dentre essas formas utilizadas na prática, destacam-se as quatro a seguir.

1 - Pagamento do principal e juros no final da operação

Nesse sistema, a dívida será paga no vencimento por meio de uma única prestação, contendo o valor do principal mais os juros do período. Os juros serão calculados segundo o regime de capitalização contratado (simples ou composto). Tal sistema já foi visto anteriormente.

2 - Sistema americano de amortização

Nesse sistema, há o pagamento periódico dos juros e a amortização do principal se dá no final da operação, conforme demonstrado no exemplo a seguir.

Exemplo 3.23. *Uma pessoa tomou emprestada de um banco a quantia de R$ 100.000,00, pelo prazo de 5 meses, comprometendo-se a pagar, no final de cada mês, juros de 10% e o total do principal, junto com a última parcela de juros, no final do contrato. Construir uma tabela demonstrando mensalmente o estado da dívida e os valores pagos a título de juros e principal.*

Como $E = R\$100.000,00$, $i = 0,1\ a.m.$ *e o valor dos juros mensais vale principal*$\times$ *taxa, obtemos*

$$J_{mensal} = 100.000 \cdot 0,1 = R\$10.000,00.$$

Tabela demonstrando o estado mensal da dívida

Período (k)	*prestação (P_k)*	*juros (J_k)*	*amortização (A_k)*	*saldo devedor (S_k)*
0	———	———	———	*R$ 100.000,00*
1	*R$ 10.000,00*	*R$ 10.000,00*	———	*R$ 100.000,00*
2	*R$ 10.000,00*	*R$ 10.000,00*	———	*R$ 100.000,00*
3	*R$ 10.000,00*	*R$ 10.000,00*	———	*R$ 100.000,00*
4	*R$ 10.000,00*	*R$ 10.000,00*	———	*R$ 100.000,00*
5	*R$ 110.000,00*	*R$ 10.000,00*	*R$ 100.000,00*	———
Total	*R$ 150.000,00*	*R$ 50.000,00*	*R$ 100.000,00*	———-

No Brasil, esse sistema de amortização é pouco usado, devido aos riscos de crédito assumidos pelo financiador, uma vez que a maior parte da dívida será recebida somente no final do contrato. Da mesma forma, em momentos de incerteza com relação à flutuação da taxa de juros no mercado, os financiadores preferem não expor seu capital por prazos muito longos, em função da relação entre risco e retorno.

3 - Sistema de Amortização Constante (SAC)

Esse sistema, amplamente utilizado no Brasil nos financiamentos imobiliários, consiste, como o próprio nome diz, em amortizar o principal da dívida por meio de parcelas constantes e sucessivas, obtidas pela divisão do valor do empréstimo pelo número de prestações do contrato. O valor de cada prestação sucessiva no SAC é composto por uma parcela de juros vencidos, calculados sobre o saldo devedor, e outra correspondente a uma parcela fixa a título de amortização de capital.

Exemplo 3.24. *Um empréstimo de R\$ 100.000,00 deverá ser pago por meio de 5 parcelas mensais e sucessivas vencendo a primeira 30 dias após a contratação, segundo o Sistema de Amortização constante (SAC). Sabendo que a taxa de juros cobrada em tal operação foi de 10% ao mês, construa uma tabela demonstrando mensalmente o estado da dívida.*

Sabemos que $E = R\$100.000,00$*,* $i = 10\%$ *a.m. e* $n = 5$ *parcelas. Pela definição de SAC,* $A = \dfrac{E}{n}$*; dessa forma,*

$$A = \frac{100.000}{5} = R\$20.000.$$

A tabela abaixo mostra a evolução mensal da dívida.

Período (k)	*prestação* (P_k)	*juros* (J_k)	*amortização* (A_k)	*saldo devedor* (S_k)
0	————	————-	————-	*R\$ 100.000,00*
1	*R\$ 30.000,00*	*R\$ 10.000,00*	*R\$ 20.000,00*	*R\$ 80.000,00*
2	*R\$ 28.000,00*	*R\$ 8.000,00*	*R\$ 20.000,00*	*R\$ 60.000,00*
3	*R\$ 26.000,00*	*R\$ 6.000,00*	*R\$ 20.000,00*	*R\$ 40.000,00*
4	*R\$ 24.000,00*	*R\$ 4.000,00*	*R\$ 20.000,00*	*R\$ 20.000,00*
5	*R\$ 22.000,00*	*R\$ 2.000,00*	*R\$ 20.000,00*	————
Total	*R\$ 130.000,00*	*R\$ 30.000,00*	*R\$ 100.000,00*	————

Observamos que no SAC o saldo devedor do empréstimo decresce em progressão aritmética e por conseguinte os valores dos juros e da prestação também decrescem em razão fixa. Dessa forma, podemos deduzir as seguintes fórmulas:

$$\boxed{S_k = S_0 - A_k \cdot k,} \tag{4}$$

onde S_k é o saldo devedor após o pagamento da k-ésima prestação, S_0 é o saldo devedor inicial (valor do empréstimo), A_k é o valor da amortização do período k e k é o período.

$$\boxed{J_k = S_{k-1} \cdot i,} \tag{5}$$

onde J_k é o valor do juro do período k, S_{k-1} é o saldo devedor após o pagamento da $(k-1)$-ésima prestação e i é a taxa de juro.

$$\boxed{P_k = J_k + A_k,} \tag{6}$$

onde P_k equivale ao valor da prestação do período k, J_k corresponde ao valor do juro do período k e A_k é o valor da amortização do período k.

Vejamos no próximo exemplo a aplicação das fórmulas deduzidas acima.

Exemplo 3.25. *Utilizando os dados do Exemplo anterior, calcule o valor do saldo devedor após o pagamento da terceira parcela e o valor da quarta prestação. Primeiramente, vamos determinar o saldo devedor após o pagamento da terceira parcela aplicando a fórmula (4). Obviamente,* $k = 3$*; logo,* $S_3 = R\$40.000,00$.

Agora, vamos determinar o valor da quarta prestação usando, respectivamente, as relações (5) e (6). Como $k = 4$*, segue que* $J_4 = R\$4.000,00$ *e então,* $P_4 = 4.000 + 20.000 = R\$24.000,00$.

Vale observar o seguinte:

✓ Os valores das parcelas e do saldo devedor são, geralmente, reajustados mensalmente pelo mesmo índice de atualização das cadernetas de poupança.

✓ Nesse sistema, o valor das prestações tende a decrescer com o decorrer do tempo, caso não haja índices muito elevados de atualização monetária.

- ✓ A maioria dos bancos exige que o valor da prestação inicial comprometa no máximo entre 20% e 30% do valor da renda líquida familiar do financiado. Dessa forma, como os valores das parcelas são decrescentes, ajustam-se, de forma mais adequada, à curva de atualização salarial, diminuindo o risco de inadimplência.

- ✓ As parcelas de um financiamento imobiliário possuem em sua composição os seguintes componentes: amortização, juros, seguro de morte ou invalidez permanente, seguro de danos físicos ao imóvel e tarifa de serviços de administração.

4 - Sistema Price ou francês de amortização

Esse sistema consiste no pagamento da dívida por meio de prestações de valores iguais, com periodicidade constante e com termos vencidos (postecipados). Nesse sistema, cada prestação contém uma parcela de juros e outra de principal amortizado. O valor das prestações é obtido por meio da fórmula (3)

Exemplo 3.26. *Um empréstimo no valor de R$ 100.000,00 deve ser liquidado por meio do pagamento de 5 prestações iguais e mensais, vencendo a primeira 30 dias após a data da contratação, por meio do Sistema Francês de Amortização. Sabendo que a taxa de juros cobrada foi de 10% ao mês, calculemos o valor das prestações a serem pagas. Veja que* $A = R\$100.000,00$*,* $n = 5$ *parcelas e* $i = 0,1$ *a.m.; daí,*

$$A = N \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \Rightarrow N = R\$26.379,75.$$

Iremos agora, construir uma tabela demonstrando o estado mensal da dívida, contemplando o valor dos juros pagos, amortização do principal e saldo devedor imediatamente após o pagamento de cada prestação. Para tanto, devemos considerar que cada prestação contém o valor do juro, calculado sobre o saldo devedor da dívida existente no *final do período imediatamente anterior, e uma parcela do principal a ser amortizado.*

Período (k)	*prestação (P_k)*	*juros (J_k)*	*amortização (A_k)*	*saldo devedor (S_k)*
0	——————	—————-	—————-	*R$ 100.000,00*
1	*R$ 26.379,75*	*R$ 10.000,00*	*R$ 16.379,75*	*R$ 83.620,25*
2	*R$ 26.379,75*	*R$ 8.362,02*	*R$ 18.017,73*	*R$ 65.602,52*
3	*R$ 26.379,75*	*R$ 6.560,25*	*R$ 19.819,50*	*R$ 45.783,02*
4	*R$ 26.379,75*	*R$ 4.578,30*	*R$ 21.801,45*	*R$ 23.981,57*
5	*R$ 26.379,75*	*R$ 2.398,16*	*R$ 23.981,57*	——————
Total	*R$ 131.898,75*	*R$ 31.898,75*	*R$ 100.000,00*	——————

A tabela nos diz que o valor da amortização do principal vai aumentando à medida que as prestações vão vencendo, fazendo com que o saldo devedor, ao longo do tempo, fique menor. Além disso, o valor dos juros contido em cada parcela vai tornando-se menor, em função da diminuição do saldo devedor ao longo do tempo.

Caso desejássemos saber o saldo devedor após o pagamento da k-ésima prestação, deveríamos calcular o valor atual das $(n-k)$ parcelas restantes pela fórmula (3), e consequentemente, obteríamos

$$\boxed{S_k = N \cdot \frac{(1+i)^{n-k}-1}{i(1+i)^{n-k}},}$$

onde S_k corresponde ao saldo devedor após o pagamento da k-ésima prestação, N é o valor das prestações, n equivale ao número de prestações, k é o período e i é a taxa de juro. Dessa forma, podemos calcular os juros contidos na k-ésima prestação por meio da igualdade abaixo.

$$\boxed{J_k = S_{k-1} \cdot i,}$$

onde J_k corresponde ao valor do juro do período k, S_{k-1} corresponde ao saldo devedor após o pagamento da $(k-1)$- ésima prestação e i equivale à taxa de juro. Com isso, podemos calcular a amortização contida na k-ésima prestação através da relação

$$\boxed{A_k = P_k - J_k.}$$

Na igualdade acima, P_k é o valor da prestação do período k, J_k é o valor do juro do período k e A_k equivale ao valor da amortização do período k.

Exemplo 3.27. *Com base nos dados do exemplo anterior, vamos calcular o saldo devedor após o pagamento da terceira parcela, o valor dos juros contidos na quarta prestação e o valor da amortização contida na quarta prestação. Calculando o saldo devedor após o pagamento da terceira parcela* $(k = 3)$*, obtemos* $S_3 = R\$45.783,02$. *Calculando o valor dos juros contidos na quarta prestação* $(k = 4)$ *temos que* $J_4 = R\$4.578,30$ *e, calculando o valor da amortização contida na quarta prestação* $(k = 4)$*, concluímos que* $A_4 = R\$21.801,45$

Vale ressaltar que:

- ✓ Geralmente as prestações são postecipadas, caso contrário, o problema fará referência à data do primeiro pagamento.
- ✓ Na Tabela Price, quando a taxa estiver referida a um período de tempo diferente do período das prestações, essa será uma taxa nominal.
- ✓ A primeira prestação será maior no SAC.
- ✓ No Sistema Americano são pagas as maiores cotas referentes aos juros(o saldo devedor permanece constante).

Finalmente, de posse de todo aparato técnico que foi desenvolvido, vamos mostrar a sua utilidade para o planejamento financeiro.

4 Aplicações

Nesta seção, utilizaremos as ferramentas anteriormente expostas para aplicarmos em diversas situações do cotidiano que envolvem Matemática financeira com o intuito de orientar o leitor a tomar decisões inteligentes, entender as operações financeiras, e administrar e investir melhor o seu dinheiro a fim de fazê-lo render mais. Para isso, serão apresentados três exemplos práticos.

Exemplo 4.1. ***Construção de um plano de aposentadoria complementar***

Digamos que você tenha como objetivo financeiro atingir uma renda de R$ 5.000,00 por mês após se aposentar. Então, para garantir essa renda você pode escolher, por exemplo, o caminho à seguir. Antes de apresentar os cálculos, é preciso esclarecer que a renda de R$ 5.000,00 por mês, atualizada pela inflação, será proporcionada pelo rendimento da poupança formada após o prazo que será exposto abaixo.

Considerando que, com um bom patrimônio formado, não será difícil manter uma média de rendimentos líquidos de 0,5% ao mês na aposentadoria, vamos calcular o montante (massa crítica) a ser acumulado; para tanto, basta realizarmos a seguinte operação: $M = \dfrac{5000}{0,005} = R\$1.000.000,00$. *Podemos agora, explicar a primeira opção, que consiste em* ***investir R$ 931,78 por mês a juros líquidos de 0,3% ao mês durante quarenta anos****.*

Para mostrar a evolução da aplicação proposta, vamos usar a fórmula que nos fornece o montante de uma sequência uniforme de depósitos periódicos, em que o primeiro depósito se dá na data zero (renda antecipada). Sabemos que $M = R\$1.000.000,00$, $i = 0,003$ *a.m. e* $n = 480$ *meses; assim,*

$$M = N \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow N = R\$931,78.$$

As opções abaixo geram o mesmo rendimento:

- *Investir R$ 2.842,59 por mês a juros líquidos (obtidos após descontar a inflação e o imposto de renda) de 0,3% ao mes durante vinte anos.*
- *Investir R$ 84,16 por mês a juros líquidos de 1,0% ao mês durante quarenta anos.*
- *Investir R$ 1.000,85 por mês a juros líquidos de 1,0% ao mês durante vinte anos.*

Perceba que os juros e o tempo fazem muita diferença. Hoje, investimentos tradicionais (fundos, CDBs, títulos do governo) rendem cerca de 0,3% ao mês líquidos. Para conseguir rendimentos melhores, tem de recorrer a ativos de risco, como ações ou outras formas de investimentos que valham mais na venda do que na compra. Em alguns meses você percebará que obter algo em torno de 1% ao mês nos mercados de ações, imóveis ou similares requer estratégias relativamente simples, basta adquirir certa experiência, acompanhar as notícias e acreditar nas empresas mais sólidas, comprando ações principalmente quando estiverem baratas, o que ocorre nos períodos que pessimistas costumam chamar de crises.

Seguindo uma estratégia e mantendo-se informados, você poderá estar aposentado com um salário superior ao que ganha hoje em bem menos tempo do que imagina. É claro que quanto mais cedo você começar a poupar, menos penoso será o processo e que a taxa de rendimento é fundamental para definir o valor final de um investimento a longo prazo.

Exemplo 4.2. ***Comparando as alternativas para aquisição de um carro zero-quilômetro***

Suponhamos que você tenha como objetivo adquirir um automóvel - GOL(G6) 1.0 4P básico, pintura sólida (O valor do bem cotado junto a SAGA veículos foi de R\$ 27.790,00 no dia 08/02/2013). Vamos apresentar três opções. A primeira delas consiste em fazer um financiamento em 36 meses, usando o Sistema Price com renda postecipada (que é o mais comum), com taxa média de juros de 1,5% ao mês (cotação feita no Banco do Brasil no dia 08/02/2013). Temos: $A = R\$27.790,00$, $i = 0,015$ *a.m. e* $n = 36$ *meses. O valor das parcelas é* $N = R\$1.004,70$ *(basta aplicar a fórmula* $A = N \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$.

A vantagem dessa estratégia é que o bem é adquirido imediatamente; a desvantagem consiste nos juros altos e gasto médio mensal de R\$ 300,00 (seguro+IPVA+manutenção+outros). Concluímos que o gasto mensal com a aquisição imediatamente do bem é de R\$ 1.304,70 e o desembolso total vale $1.304,70 \cdot 36 = R\$46.969,20$.

Vale ressaltar que o valor médio do bem após os três anos de uso equivale a 75% do valor do novo (R\$ 20.842,50 pela tabela FIPE); logo, a perda total (desembolso total - valor médio do bem após os três anos) resulta em R\$ 26.126,70.

A segunda opção é o consórcio de 36 meses, usando o Sistema Price com renda postecipada e taxa de juros de 0,5% ao mês (cotado junto a SAGA consórcios). Posto que $A = R\$27.790,00$*,* $i = 0,005$ *a.m. e* $n = 36$ *meses, obtemos o valor das parcelas assim:*

$$A = N \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \Rightarrow N = R\$845,43.$$

É importante saber que: o valor da parcela é corrigido pela fábrica de acordo com o valor do bem; os juros são mais baixos que de um financiamento; o bem não é adquirido imediatamente, mas por meio de sorteios mensais ou lances.

A terceira e última alternativa é investir na caderneta de poupança o valor que se gastaria com a aquisição imediata do bem. Utilizando a fórmula que nos fornece o montante de uma sequência uniforme de depósitos periódicos e postecipados, temos

$$M = N \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow M = R\$50.532,97.$$

Optando por esta alternativa, o investimento feito durante os três anos permite comprar o automóvel com sobras (alternativamente, você poderia comprar o carro em um prazo menor e gastando menos).

Com esse exemplo pretendemos incentivar as pessoas a receber juros em vez de pagar; mas, para isso, deve-se deixar de consumir no presente para economizar e investir, em prol de acumular dinheiro para ser usado no futuro.

Exemplo 4.3. ***Substitutição de dívidas***

Ao precisar de dinheiro, uma alternativa interessante pode ser a venda de um bem para obtenção de recursos imediatos. Por exemplo, se você tiver uma dívida de R$ 10.000,00 no cartão de crédito e possuir na garagem um veículo já quitado com valor igual ou superior, pode vender seu automóvel e comprar um outro financiado. Esta prática não elimina a dívida, mas garante o pagamento de juros bem menores do que aqueles que você pagaria em muitas outras modalidades de empréstimo. Hoje os juros de um financiamento de automóveis não chegam a passar dos 2% ao mês. Mas note que esta não deve ser uma prática a ser incentivada, uma vez que se está perdendo um bom valor em juros. Deve ser considerada apenas como uma alternativa ao empréstimo, quando este se faz essencial.

Veja as alternativas de financiamento e empréstimo na tabela abaixo.

Tipo de crédito	*Juros médios mensais**
Cartões de crédito	*12,81%*
Financeiras	*10,15%*
Cheque especial	*8,47%*
Emprétimo pessoal	*3,74%*
Emprétimo cooperativo	*2,37%*
Empréstimo consignado	*1,98%*
Financiamento de autos	*1,92%*
Financiamento imobiliário	*1,16%*
Emprétimo familiar(CDI)	*0,7%*

Fonte: Ipead/UFMG, na internet, em http://www.ipead.face.ufmg.br/ em 07/2012

O exemplo nos dá alternativas, mas o ideal é sempre fugir dos financiamentos e empréstimos. Quando não houver alternativa, deve-se optar pelo mais barato sempre.

5 Considerações Finais

Numa nação em que transações financeiras são frequentes, conceitos básicos de Matemática Financeira não podem estar ausentes na formação dos cidadãos. Segundo Kiyosaki [6] as escolas se concentram nas habilidades acadêmicas, mas não nas habilidades financeiras, ou seja, não se ensina sobre dinheiro nas escolas. Consideramos que esse fato é bastante preocupante pois os conteúdos de Matemática Financeira têm grande importância na vida de qualquer cidadão que necessita compreender o mundo do trabalho, do consumo, das finanças, dos investimentos , inserindo-se nele de forma crítica e consciente.

No entanto, não se trata apenas de incluir alguns tópicos de Matemática Financeira no rol de conteúdos do Ensino Médio, mas é necessário abordá-los em diferentes momentos da vida estudantil, em qualquer nível, e em situações-problema que permitam aos alunos atribuir-lhes significados e perceber a importância das ferramentas matemáticas para resolvê-las. Outro aspecto que não pode ser esquecido refere-se às possibilidades que a abordagem dessas temáticas abrem para o uso de recursos tecnológicos, como por exemplo, a preparação dos estudantes para utilização de calculadoras e planilhas eletrônicas.

Todas as pessoas precisam desenvolver as suas próprias capacidades e preferências, bem como interpretar as mais variadas situações e tomar decisões fundamentais relativas à sua vida pessoal, social ou familiar. A educação em Matemática Financeira pode contribuir, de um modo significativo e insubstituível, para ajudar as pessoas a tornarem-se indivíduos não dependentes, mas, pelo contrário, competentes, críticos e confiantes nos aspectos essenciais em que a sua vida se relaciona com a matemática. Isto implica que todas as crianças e jovens devem desenvolver a sua capacidade de usar a matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar, assim como a auto-confiança necessária para fazê-lo. Apropriar-se, mesmo que de maneira bastante elementar, de conceitos e procedimentos da Matemática Financeira, é sem dúvida, condição necessária para a politização, no sentido amplo, do cidadão. Faz parte das condições básicas para sua inserção crítica na sociedade.

Portanto, face ao acima exposto, este trabalho procurou explorar de forma simples, objetiva e didática, aspectos essenciais que devem ser abordados em um curso elementar sobre Matemática Financeira. E ainda, esperamos encontrar, principalmente nos leitores dedicados, a ressonância dos resultados a que se propôe este trabalho, em face da praticidade e objetividade com que tal assunto é tratado. É claro, que em nenhum momento tivemos a pretensão de esgotar o assunto, haja visto, a magnitude do mesmo.

Referências

[1] *Tosi, Armando José.* **Matemática financeira com ênfase em produtos bancários**. 3ª ed.- São Paulo: Atlas, 2009.

[2] *Oliveira, Gilson Alves de ; Pacheco, Marcelo Marques.* **Mercado financeiro**. São Paulo-SP: Editora Fundamento Educacional, 2005.

[3] *Crespo, Antônio Arnot.* **Matemática comercial e financeira fácil**. 14ª ed. São Paulo: Saraiva, 2009.

[4] *Eker, T. Harv.* **Os segredos da mente milionária**. Rio de Janeiro: sextante, 2006.

[5] *Lapponi, Juan Carlos ; Lapponi, André Luís Galvão.* **Matemática financeira: redesenho organizacional para o crescimento e desempenho máximos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

[6] *Kiyosaki, Robert T.* **Pai rico, pai pobre: o que os ricos ensinam a seus filhos sobre dinheiro**. Rio de Janeiro: Elsevier, 71ª reimpressão, 2000.

[7] *Gonçalves, Jean Pínton.* **História da Matemática Comercial e Financeira**. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/historia/matfinanceira.php >. Acesso em: 03 jan. 2013.