



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS (UFG)
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA (IME)
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)



RAFAEL URZEDO PINTO

O Algoritmo de Euclides e os feijões: uma proposta de sequência didática

GOIÂNIA

2026



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Rafael Urzedo Pinto

3. Título do trabalho

O Algoritmo de Euclides e os feijões: uma proposta de sequência didática

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

- a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
- b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Mario Jose De Souza, Professor do Magistério Superior**, em 14/04/2026, às 17:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rafael Urzedo Pinto, Discente**, em 16/04/2026, às 15:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site

[https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0)

[acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **6084987** e o código CRC **04151267**.

RAFAEL URZEDO PINTO

O Algoritmo de Euclides e os feijões: uma proposta de sequência didática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática e Estatística(IME), da Universidade Federal de Goiás(UFG), como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza

GOIÂNIA
2026

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Pinto, Rafael Urzedo
O Algoritmo de Euclides e os feijões: uma proposta de sequência didática [manuscrito] / Rafael Urzedo Pinto. - 2026.
XCVII, 97 f.: il. 2026

Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2026.

Ilustrações.

Apêndice.

Bibliografia.

Inclui: siglas, símbolos, tabelas, algoritmos, lista de figuras.

1. Máximo Divisor Comum. 2. Sequência Didática. 3. Educação Matemática. 4. Algoritmo de Euclides. 5. Divisibilidade.

I. Souza, Mário José de, orient. II. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 04 da sessão de Defesa de Dissertação de **Rafael Urzedo Pinto**, que confere o título de Mestre em Matemática, na área de concentração em **Matemática do Ensino Básico**.

Aos nove dias do mês de abril de dois mil e vinte e seis, a partir das 10h:30, na **Sala Geraldo Ávila**, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **“O Algoritmo de Euclides e os feijões: uma proposta de sequência didática”**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Mário José de Souza (IME/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora o Professor Doutor Humberto de Assis Climaco (IME/UFG), membro titular externo e o Professor Doutor Matheus Moreira da Silva (CEPAE), membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Mário José de Souza, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos nove dias do mês de abril de dois mil e vinte e seis.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Mario Jose De Souza, Professor do Magistério Superior**, em 14/04/2026, às 17:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Humberto De Assis Climaco, Coordenador de Curso**, em 17/04/2026, às 10:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Matheus Moreira Da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 17/04/2026, às 18:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **6084917** e o código CRC **DD12CDAD**.

Referência: Processo nº 23070.015665/2026-37

SEI nº 6084917

À minha família, pelo apoio incondicional, aos meus alunos, fonte permanente de inspiração, e aos professores do curso, pela sólida formação acadêmica proporcionada.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, pela saúde e pela perseverança ao longo desta trajetória.

À minha família, pelo apoio incondicional, compreensão e incentivo constantes, fundamentais para a concretização deste trabalho.

Aos meus alunos, que diariamente me motivam a buscar práticas pedagógicas mais significativas e reflexivas.

Aos professores do PROFMAT - UFG, pela sólida formação acadêmica proporcionada, pelas contribuições teóricas e pelo compromisso com a qualidade do ensino.

Ao meu orientador, Professor Dr. Mário José pela orientação segura, pelas leituras atentas e pelas contribuições essenciais ao desenvolvimento desta pesquisa.

À UFG – Universidade Federal de Goiás e aos colegas de curso, pelo apoio, convivência acadêmica e colaboração ao longo desta formação. Em especial, aos amigos Fábio Maia e Soryane, companheiros de viagem semana após semana até Goiânia, cuja parceria e incentivo tornaram essa caminhada mais leve e significativa.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste Curso.

O fator mais importante influenciando o aprendizado é o que o aluno já sabe. Averiguar esse conhecimento e dá-lo significado relevante em termos desse conhecimento torna possível a aprendizagem significativa.

David Ausubel,
Psicologia Educacional: uma visão cognitiva.

Resumo

Urzedo Pinto, Rafael. **O Algoritmo de Euclides e os feijões: uma proposta de sequência didática**. Goiânia, 2026. 97p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Esta dissertação investiga a articulação entre o rigor estrutural do Algoritmo de Euclides e uma proposta de transposição didática fundamentada na utilização de feijões como recurso manipulável para o ensino de divisibilidade e máximo divisor comum no 7º ano do Ensino Fundamental. A partir da compreensão histórico-epistemológica do algoritmo de Euclides, sistematizado nos Livros VII a IX de Os Elementos, de Euclides de Alexandria, busca-se superar a abordagem mecanizada tradicionalmente presente no ensino de procedimentos aritméticos, promovendo a reconstrução pedagógica de sua estrutura lógica e de suas propriedades invariantes. A fundamentação teórica apoia-se na tradição histórico-epistemológica da Matemática e em referenciais da aprendizagem significativa e da mediação pedagógica, que sustentam a construção progressiva do conhecimento por meio de experiências cognitivamente organizadas. A pesquisa caracteriza-se como estudo qualitativo, com aplicação de uma Sequência Didática estruturada em três momentos articulados: investigação empírica de divisores mediante agrupamentos concretos; identificação e análise de divisores comuns; e formalização do algoritmo como generalização conceitual do processo explorado. A Sequência Didática sustenta que a manipulação concreta favorece a compreensão da dinâmica interativa inerente à divisão euclidiana, possibilitando que a formalização simbólica emerja como síntese conceitual de uma experiência previamente estruturada. Ao integrar a ação manipulativa, a sistematização progressiva e a abstração formal, a proposta favorece a internalização das relações de divisibilidade que fundamentam o Algoritmo de Euclides, propõe a superação da mera reprodução procedimental e orienta a aprendizagem para a compreensão estrutural dos conceitos matemáticos.

Palavras-chave

Algoritmo de Euclides; Divisibilidade; Máximo divisor comum; Sequência didática; Educação Matemática.

Abstract

Urzedo Pinto, Rafael. **The Euclidean Algorithm and Beans: A Didactic Sequence Proposal**. Goiânia, 2026. 97p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

This dissertation investigates the articulation between the structural rigor of the Euclidean Algorithm and a didactic transposition proposal grounded in the use of beans as a manipulable resource for teaching divisibility and the greatest common divisor in the 7th grade of Elementary Education. Based on the historical-epistemological understanding of the algorithm, systematized in Books VII to IX of Elements by Euclid of Alexandria, the study seeks to overcome the traditionally mechanized approach to teaching arithmetic procedures by promoting a pedagogical reconstruction of its logical structure and invariant properties. The theoretical framework is grounded in the historical tradition of Mathematics and in references from meaningful learning theory and pedagogical mediation, which support the progressive construction of knowledge through cognitively structured experiences. The research is characterized as a qualitative study, involving the implementation of a Didactic Sequence organized into three articulated stages: empirical investigation of divisors through concrete groupings; identification and analysis of common divisors; and formalization of the algorithm as a conceptual generalization of the explored process. The findings indicate that concrete manipulation enhances the understanding of the iterative dynamics inherent in Euclidean division, allowing symbolic formalization to emerge as a conceptual synthesis of a previously structured experience. The Educational Product demonstrates feasibility for implementation in different regional contexts, contributing to structurally grounded mathematical learning.

Keywords

Euclidean Algorithm; Divisibility; Greatest Common Divisor; Didactic Sequence; Mathematics Education.

Sumário

Lista de Figuras	14
Introdução	15
1 A História da Aritmética e a Construção dos Conceitos de Divisibilidade	18
2 O Ensino de Aritmética, Divisibilidade e o Algoritmo de Euclides nos Documentos Curriculares Brasileiros	22
2.1 A Aritmética nos Documentos Curriculares Brasileiros	22
2.2 A BNCC e o Ensino de Divisibilidade	22
2.3 Os PCN e a Compreensão Conceitual em Matemática	24
2.4 Fundamentação Teórica da Proposta Didática	25
2.4.1 A Aprendizagem Significativa de Ausubel	25
2.4.2 A Perspectiva Histórico-Cultural de Vygotsky	25
2.4.3 As Contribuições de Dante	25
2.5 O Algoritmo de Euclides no Ensino da Divisibilidade	26
2.6 Metodologias Ativas e Mediação Docente	26
2.7 Indicativos	27
3 Divisibilidade	29
3.1 O conjunto dos números inteiros	29
3.2 Estrutura Algébrica dos Inteiros	30
3.3 Ordenação no Conjunto dos Números Inteiros	32
3.4 Princípio da Indução Finita	37
3.5 A Divisão no Conjunto dos Números Inteiros	39
3.5.1 O Algoritmo da Divisão	39
3.5.2 Divisibilidade	43
3.6 O Máximo Divisor Comum	45
3.6.1 O Algoritmo de Euclides	53
4 Metodologia	59
4.1 Caracterização da Pesquisa	59
4.2 Fundamentação Teórica da Proposta	60
4.3 Descrição da Sequência Didática	61
4.4 Estrutura da Sequência Didática	62
4.4.1 Exploração Empírica	62
4.4.2 Identificação de Regularidades	63
4.4.3 Formalização do Algoritmo de Euclides	63
4.5 Procedimentos de Avaliação	64

4.6	Limitações da Pesquisa	65
4.7	Considerações Metodológicas Finais	65
5	O Jogo	67
5.1	Apresentação do Produto Educacional	67
5.2	Público-alvo	69
5.3	Objetivos do Produto	69
5.3.1	Objetivo geral	69
5.3.2	Objetivos específicos	69
5.4	Alinhamento à Base Nacional Comum Curricular	70
5.5	Materiais Necessários	70
5.6	Organização Didática	72
5.7	Descrição das Etapas do Jogo	73
5.7.1	Etapa 1 – Agrupamento e exploração da divisão	73
5.7.2	Etapa 2 – Identificação de divisores comuns	76
5.7.3	Etapa 3 - O Jogo: <i>O Algoritmo de Euclides e os Feijões</i>	76
5.7.4	Etapa 4 – Desafio matemático	81
5.7.5	Etapa 5 – Sistematização e formalização	85
5.8	Avaliação	86
5.9	Síntese do Produto Educacional	87
	Referências Bibliográficas	91
A	LISTA DE EXERCÍCIOS - APLICAÇÕES	93

Lista de Figuras

1.1	Representação de Euclides de Alexandria.	19
5.1	Conjunto FNDE - CJA 06	67
5.2	Tabuleiro	71
5.3	<i>Tabela de Vivência da Divisibilidade</i>	71
5.4	<i>Personagens do M.D.C</i>	72
5.5	Vivência da Divisibilidade do número 8	74
5.6	Vivência da Divisibilidade do número 9	74
5.7	Vivência da Divisibilidade do número 12	75
5.8	(Máximo Divisor Comum - MDC (9,8)=1	78
5.9	(Máximo Divisor Comum - MDC (12,8)=4	79
5.10	(Máximo Divisor Comum - MDC (12,9)=3	80
5.11	Exemplo 3.29	82
5.12	Exemplo 3.30	83
5.13	Exemplo 3.31	84

Introdução

A Aritmética constitui um dos domínios fundantes da organização sistemática do pensamento matemático, estruturando-se a partir de relações formais de divisibilidade, decomposição e ordem no conjunto dos números naturais e inteiros. Entre essas relações, destaca-se a noção de máximo divisor comum, cuja determinação envolve propriedades essenciais da divisão euclidiana e da estrutura algébrica dos inteiros.

Historicamente, a primeira sistematização rigorosa desse procedimento encontra-se na obra *Os Elementos*, de Euclides de Alexandria, redigida por volta do século III antes da era cristã, marco inaugural da organização axiomática do conhecimento matemático. Nos Livros VII a IX, dedicados à teoria dos números, apresenta-se um método geral para determinar o maior divisor comum entre dois números naturais, procedimento atualmente denominado Algoritmo de Euclides.

O núcleo conceitual desse algoritmo baseia-se na seguinte propriedade: o maior divisor comum entre dois números naturais permanece inalterado quando se substitui o maior deles pelo resto obtido na divisão do primeiro pelo segundo. Tal invariância garante que, ao repetir sucessivamente o processo de divisão, obtém-se uma sequência finita de restos estritamente decrescente, a qual culmina no surgimento de um resto nulo. O último resto não nulo corresponde, precisamente, ao máximo divisor comum dos números considerados.

Sob o ponto de vista estrutural, o Algoritmo de Euclides revela que a divisibilidade não é mera listagem de fatores comuns, mas expressão de uma dinâmica iterativa fundamentada em propriedades formais dos inteiros. A importância desse resultado transcende o cálculo elementar, constituindo base para desenvolvimentos posteriores da álgebra e da teoria dos números.

Conforme observa [Boyer 2012]), a contribuição central de Euclides não se limita à apresentação de resultados matemáticos, mas reside na organização dedutiva e sistemática do conhecimento disponível à época. De modo semelhante, [Eves 2011] destaca que o tratamento da divisibilidade nos livros aritméticos de *Os Elementos* evidencia sofisticação lógica que antecipa estruturas formais consolidadas apenas muitos séculos depois. Nesse contexto, o algoritmo deve ser compreendido como

procedimento racional fundamentado em propriedades demonstráveis, e não como simples regra operacional.

Entretanto, a tradição escolar frequentemente reduziu algoritmos clássicos a sequências mecânicas de execução, dissociadas de sua fundamentação conceitual. Tal perspectiva favorece a aprendizagem instrumental, na qual o estudante executa procedimentos sem compreender as estruturas que lhes conferem validade lógica.

No contexto da Educação Básica brasileira, a Base Nacional Comum Curricular [BRASIL 2018] enfatiza o desenvolvimento do raciocínio lógico, da argumentação matemática e da resolução de problemas envolvendo múltiplos e divisores, especialmente no sétimo ano do Ensino Fundamental. Essas orientações demandam abordagens que promovam a compreensão das relações numéricas subjacentes aos algoritmos, superando a mera aplicação técnica.

É nesse cenário que se insere a presente investigação, cujo objetivo consiste em articular o rigor histórico e estrutural do Algoritmo de Euclides a uma proposta didática fundamentada na manipulação concreta de feijões como recurso mediador da aprendizagem. A utilização desse material não se reduz a estratégia lúdica, mas configura-se como instrumento epistemológico de transposição didática, possibilitando ao estudante reconstruir empiricamente a lógica da divisão euclidiana.

Ao organizar feijões em agrupamentos sucessivos, os estudantes representam concretamente a formação de quocientes e a obtenção de restos, visualizando o processo iterativo que caracteriza o algoritmo. A repetição desse procedimento com as quantidades remanescentes reproduz, em nível empírico, a dinâmica de redução sucessiva que conduz à identificação do divisor comum máximo. Dessa forma, a experiência manipulativa antecede e fundamenta a formalização conceitual, promovendo a internalização progressiva da estrutura lógica do procedimento.

Sob a perspectiva teórica, essa proposta dialoga com a noção de mediação na aprendizagem, segundo a qual o conhecimento é construído por meio de instrumentos culturais que organizam a atividade cognitiva [Vygotsky 2008]. Convergentemente, a teoria da aprendizagem significativa sustenta que novos conceitos são assimilados quando podem ancorar-se em estruturas cognitivas previamente estabelecidas [Ausubel 2003]. A manipulação concreta dos feijões, ao tornar visível a estrutura da divisibilidade, constitui elemento organizador dessa ancoragem conceitual.

A Sequência Didática elaborada neste trabalho estrutura-se em três momentos progressivos: investigação empírica de divisores por meio de agrupamentos exatos; identificação de divisores comuns e comparação de decomposições; e formalização do Algoritmo de Euclides como generalização do processo explorado. Essa organização respeita uma progressão cognitiva que parte da ação concreta, transita pela sistematização conceitual e culmina na abstração teórica.

Assim, a presente dissertação propõe não apenas o ensino de um algoritmo clássico, mas a reconstrução pedagógica de sua estrutura lógica, integrando história da matemática, fundamentação teórica da aprendizagem e prática investigativa em sala de aula. Ao aproximar o pensamento euclidiano da realidade escolar contemporânea, busca-se reafirmar o caráter racional, demonstrativo e investigativo da Matemática, superando a dicotomia entre rigor formal e experiência concreta.

A História da Aritmética e a Construção dos Conceitos de Divisibilidade

A Aritmética constitui um dos campos mais antigos da Matemática, tendo se desenvolvido a partir de necessidades práticas relacionadas à contagem, à medição e à repartição de bens nas primeiras civilizações. Antes da formalização simbólica dos números e das operações, os procedimentos aritméticos estavam diretamente ligados à manipulação concreta de objetos, como pedras, sementes e outros artefatos naturais, utilizados para representar quantidades discretas. Segundo [Boyer 2012], a Matemática, em seus primórdios, não surgiu como uma ciência abstrata, mas como uma resposta direta às demandas cotidianas das sociedades antigas.

Registros históricos indicam que civilizações como a egípcia e a babilônica já empregavam técnicas de partilha e agrupamento para resolver problemas práticos, o que revela uma compreensão intuitiva da divisibilidade, ainda que não expressa em termos formais. Essas práticas evidenciam que conceitos como divisão exata, resto e proporcionalidade antecedem a sistematização teórica da Aritmética e se apoiam fortemente na experiência concreta [Eves 2011]).

A consolidação da Aritmética como corpo teórico sistematizado na Grécia Antiga constitui um marco decisivo na história da Matemática. A escola pitagórica já atribuía aos números um papel estruturante na compreensão do mundo, investigando propriedades como paridade, divisibilidade e classificações numéricas. Entretanto, é com Euclides que tais investigações assumem forma dedutiva rigorosa. Nos Livros VII, VIII e IX dos *Elementos*, a teoria da divisibilidade é organizada a partir de definições precisas e proposições demonstradas logicamente [Euclides 2009]. Conforme destaca [Boyer 2012], essa sistematização representa a passagem da prática aritmética empírica para uma teoria fundamentada em princípios gerais.

Nesse contexto, destaca-se a formulação do método para determinação do máximo divisor comum, conhecido como Algoritmo de Euclides, apresentado no Livro VII, Proposição 2 dos *Elementos*. Conforme Euclides [Euclides 2009, p. X, Livro VII, Prop. 2]:

“Dados dois números que não são primos entre si, encontrar o maior divisor comum. Se o menor mede o maior, então o menor é o maior divisor comum; mas, se não, subtraia o menor do maior repetidamente até que reste um número que meça o anterior; e esse será o maior divisor comum.”

Tal proposição explicita um procedimento baseado em subtrações sucessivas — posteriormente reinterpretado como divisões sucessivas — evidenciando uma propriedade fundamental da divisibilidade: a invariância do máximo divisor comum ao longo do processo. Assim, a abordagem euclidiana não apenas resolve um problema aritmético específico, mas também estabelece um método geral, de caráter algorítmico, que permanece central na teoria dos números até a contemporaneidade.



Figura 1.1: Representação de Euclides de Alexandria.

O Algoritmo de Euclides, descrito originalmente por meio de subtrações sucessivas e posteriormente interpretado como processo de divisões sucessivas com resto, constitui um dos exemplos mais notáveis dessa estrutura dedutiva. Seu princípio central estabelece que, dados dois números naturais a e b , com $a > b$, se

$$a = bq + r,$$

então

$$(a, b) = (b, r).$$

Tal propriedade de invariância garante que o máximo divisor comum pode ser determinado por reduções sucessivas, até que o resto se anule. Segundo Eves

(2011), a elegância desse procedimento reside na economia conceitual que combina simplicidade operacional e rigor lógico.

Entretanto, a solidez desse método não se limita ao domínio aritmético estrito. A teoria das proporções desenvolvida no Livro V dos *Elementos*, fortemente influenciada por Eudoxo de Cnido, fornece-lhe fundamento conceitual mais amplo. O chamado Axioma de Eudoxo estabelece que, dadas duas grandezas positivas, existe um múltiplo de uma delas que excede a outra. Em formulação moderna, tal princípio pode ser expresso como: para quaisquer $a, b > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$na > b.$$

Esse enunciado corresponde ao princípio arquimediano, cuja função é assegurar a comparabilidade entre grandezas e impedir a existência de quantidades infinitesimais no sistema considerado [Boyer 2012].

A articulação entre o Axioma de Eudoxo e o Algoritmo de Euclides revela a profundidade estrutural da matemática grega. Ao garantir que qualquer grandeza pode ser superada por múltiplos sucessivos, o axioma fornece a base lógica que sustenta processos de redução progressiva. No âmbito da Aritmética, tal redução manifesta-se na substituição reiterada do maior número pelo resto da divisão, processo que conduz à determinação do máximo divisor comum. Desse modo, a redução euclidiana pode ser interpretada como expressão aritmética de um princípio geral de comparabilidade e exaustão.

Sob o ponto de vista epistemológico, observa-se que a matemática grega opera pela integração entre fundamento axiomático e procedimento operacional. O algoritmo não é apresentado como técnica isolada, mas como consequência de propriedades previamente estabelecidas. Conforme assinala [Eves 2011], essa característica distingue a tradição grega de outras culturas matemáticas antigas, nas quais predominavam métodos práticos desvinculados de justificativas formais. Assim, o Algoritmo de Euclides representa não apenas instrumento de cálculo, mas paradigma de racionalidade dedutiva.

Essa compreensão histórica possui implicações relevantes para o ensino contemporâneo da divisibilidade. Ao explicitar os fundamentos teóricos que sustentam o algoritmo, evidencia-se que o máximo divisor comum não decorre de manipulação técnica arbitrária, mas de propriedades estruturais dos números inteiros. A apresentação do algoritmo como resultado de um longo processo de sistematização conceitual contribui para superar abordagens mecanicistas, permitindo que o estudante reconheça na Aritmética escolar a continuidade de uma tradição teórica que remonta à Antiguidade clássica.

[Boyer 2012] destaca que muitos algoritmos clássicos da Aritmética, origi-

nalmente desenvolvidos como respostas a problemas fundamentais relacionados à medida, à proporção e à estrutura dos números, passaram a ser ensinados, ao longo da história da educação matemática, como procedimentos essencialmente técnicos. Esse processo de transmissão descontextualizada contribuiu para a consolidação de uma tradição escolar marcada pela mecanização do ensino aritmético, na qual a aprendizagem se reduz, em grande medida, à execução de regras operatórias, sem a devida compreensão dos princípios matemáticos que as fundamentam.

Sob a perspectiva da História da Matemática, tal distanciamento evidencia uma ruptura entre o saber matemático historicamente produzido e o saber matemático escolar. Conceitos como divisibilidade e máximo divisor comum (MDC), que desempenharam papel central na organização da Aritmética desde a Antiguidade, especialmente no âmbito da matemática grega, passaram a ser apresentados no ensino básico de forma predominantemente algorítmica, dissociados de suas origens conceituais e de seu significado matemático. Esse cenário, ainda presente no ensino contemporâneo, reforça a necessidade de abordagens que resgatem o sentido histórico e estrutural desses conceitos, favorecendo uma compreensão mais consistente e articulada da Aritmética escolar.

Nesse sentido, a proposta metodológica desta pesquisa dialoga diretamente com a História da Aritmética ao resgatar o percurso epistemológico do conhecimento matemático: do concreto ao abstrato. O uso de objetos discretos (grãos de *feijões*, grãos de milho, tampinhas, pedras, etc.) como material manipulativo remete às práticas ancestrais de contagem e partilha, enquanto o Algoritmo de Euclides representa a formalização teórica dessas ações. Ao vivenciar atividades que envolvem repartições sucessivas com objetos discretos, o aluno reconstrói, em nível escolar, um processo semelhante ao desenvolvimento histórico da Aritmética, favorecendo a compreensão conceitual do algoritmo.

Assim, ao integrar a História da Aritmética ao ensino de divisibilidade, a sequência didática proposta não se limita à contextualização histórica, mas assume uma função epistemológica e pedagógica. Essa abordagem permite que os estudantes compreendam os conceitos matemáticos como construções humanas, historicamente situadas, e não como regras arbitrárias. Desse modo, a articulação entre feijões, jogos e o Algoritmo de Euclides revela-se coerente tanto do ponto de vista histórico quanto didático, fortalecendo a aprendizagem significativa e o sentido do conhecimento matemático na Educação Básica.

O Ensino de Aritmética, Divisibilidade e o Algoritmo de Euclides nos Documentos Curriculares Brasileiros

2.1 A Aritmética nos Documentos Curriculares Brasileiros

O ensino da Aritmética, especialmente no que se refere aos conceitos de divisibilidade e máximo divisor comum (MDC), ocupa papel estruturante na formação matemática dos estudantes da Educação Básica. Esses conteúdos constituem a base conceitual para aprendizagens posteriores, como frações, razão e proporção, álgebra elementar e resolução de problemas, sendo amplamente contemplados nos principais documentos curriculares brasileiros, a saber: a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [BRASIL 2018] e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) [BRASIL 1998].

De forma convergente, esses documentos defendem um ensino de Matemática que supere a repetição mecânica de algoritmos, priorizando a compreensão conceitual, o raciocínio lógico, a investigação matemática e a resolução de problemas. Tal perspectiva aproxima-se das contribuições de [Vygotsky 2008], ao valorizar a mediação e a construção social do conhecimento no processo de aprendizagem.

Tal orientação curricular dialoga diretamente com a teoria da aprendizagem significativa proposta por [Ausubel 2003] e com as contribuições de Dante [Dante 2012], especialmente no que se refere ao uso de jogos, materiais manipuláveis e à mediação docente como elementos centrais do processo de ensino e aprendizagem.

2.2 A BNCC e o Ensino de Divisibilidade

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), enquanto documento normativo, estabelece os direitos de aprendizagem e desenvolvimento dos estudantes ao

longo da Educação Básica, orientando a organização dos currículos e das práticas pedagógicas em âmbito nacional. No componente curricular Matemática, a BNCC propõe uma abordagem que ultrapassa a mera execução de procedimentos, enfatizando o desenvolvimento do pensamento lógico, da argumentação e da capacidade de resolver problemas, por meio da articulação entre conhecimentos conceituais, procedimentais e atitudinais [BRASIL 2018].

Essa orientação implica compreender a Matemática não apenas como um conjunto de técnicas operatórias, mas como um campo de conhecimento que envolve a construção de significados, a identificação de padrões, a elaboração de conjecturas e a validação de estratégias. Nesse sentido, o ensino deve favorecer a participação ativa dos estudantes, promovendo situações em que possam investigar, argumentar, comunicar ideias e refletir sobre os processos envolvidos na resolução de problemas.

No Ensino Fundamental, a Aritmética encontra-se predominantemente inserida na unidade temática Números, sendo reconhecida como eixo estruturante da formação matemática. Os conceitos de divisibilidade, em particular, desempenham papel fundamental nesse processo, pois constituem base para a compreensão de conteúdos posteriores, como frações, razão e proporção, álgebra elementar e funções. Além disso, tais conceitos contribuem para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da capacidade de generalização, aspectos essenciais para a formação matemática dos estudantes.

Para o 7º ano, a BNCC prevê o desenvolvimento de habilidades relacionadas à resolução de problemas envolvendo múltiplos e divisores, números primos e compostos, bem como o cálculo do mínimo múltiplo comum (MMC) e do máximo divisor comum (MDC). Contudo, mais do que a execução de algoritmos, enfatiza-se a necessidade de compreensão das relações numéricas subjacentes, a identificação de regularidades e a construção de estratégias próprias de resolução. Essa perspectiva valoriza o entendimento conceitual e a autonomia intelectual dos estudantes, em detrimento da mera aplicação mecânica de procedimentos [BRASIL 2018].

Adicionalmente, a BNCC destaca a importância da argumentação matemática como competência fundamental, incentivando os estudantes a justificar procedimentos, validar resultados e comunicar suas ideias de forma clara e coerente. Tal orientação reforça a necessidade de práticas pedagógicas que promovam o diálogo, a interação e a construção coletiva do conhecimento, aproximando o ensino da Matemática de uma perspectiva investigativa e reflexiva.

Dessa forma, o ensino da divisibilidade e do máximo divisor comum, quando orientado pelas diretrizes da BNCC, deve ser concebido como um processo que integra compreensão conceitual, investigação e formalização progressiva. Isso implica a adoção de estratégias didáticas que possibilitem a transição do concreto ao abs-

trato, favorecendo a construção de significados e a internalização dos conceitos matemáticos, em consonância com abordagens teóricas contemporâneas da Educação Matemática.

2.3 Os PCN e a Compreensão Conceitual em Matemática

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), embora não possuam caráter normativo obrigatório, exerceram — e ainda exercem — significativa influência sobre a prática pedagógica, bem como sobre a elaboração de currículos e materiais didáticos no contexto da Educação Básica brasileira. No campo da Educação Matemática, os PCN defendem um ensino orientado pela compreensão conceitual, pela comunicação matemática e pela resolução de problemas, em contraposição a práticas centradas exclusivamente na memorização e reprodução de procedimentos [BRASIL 1998].

Essa perspectiva implica reconhecer a Matemática como uma construção humana, na qual o estudante deve ser capaz não apenas de executar técnicas, mas de compreender, argumentar, estabelecer relações e comunicar ideias matemáticas de forma significativa. Nesse sentido, a resolução de problemas assume papel estruturante, configurando-se não apenas como estratégia didática, mas como eixo organizador do ensino, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio lógico e da autonomia intelectual.

No âmbito dos Anos Finais do Ensino Fundamental, a Aritmética é apresentada como um dos pilares da formação matemática, sendo responsável por sustentar a compreensão de conceitos mais avançados. Dentre os conteúdos aritméticos, o estudo da divisibilidade destaca-se como elemento fundamental para a consolidação do pensamento aritmético, uma vez que envolve a análise de propriedades numéricas, a identificação de regularidades e a construção de generalizações.

Além disso, a abordagem da divisibilidade possibilita o estabelecimento de conexões com diferentes campos da Matemática, como a álgebra e a resolução de problemas, contribuindo para uma formação mais integrada e significativa. Dessa forma, ao enfatizar a compreensão conceitual e a articulação entre diferentes ideias matemáticas, os PCN reforçam a necessidade de práticas pedagógicas que superem o ensino mecanizado, promovendo a construção ativa do conhecimento pelos estudantes [BRASIL 1998].

2.4 Fundamentação Teórica da Proposta Didática

2.4.1 A Aprendizagem Significativa de Ausubel

À luz da teoria da aprendizagem significativa, essa convergência curricular adquire maior densidade teórico-didática. Para Ausubel, a aprendizagem ocorre de forma efetiva quando novos conhecimentos se relacionam, de maneira substantiva e não arbitrária, aos conhecimentos prévios presentes na estrutura cognitiva do aprendiz [Ausubel 2003].

No ensino da divisibilidade, isso implica partir de ideias já consolidadas, como contagem, agrupamento e divisão intuitiva, permitindo que os estudantes construam progressivamente os conceitos de divisor, múltiplo, MMC e MDC.

A utilização de materiais manipuláveis, como feijões e outros objetos discretos, constitui estratégia coerente com essa fundamentação teórica. Ao representar quantidades discretas, esses materiais possibilitam a visualização concreta de agrupamentos, repartições sucessivas e restos, favorecendo a ancoragem cognitiva dos conceitos matemáticos.

2.4.2 A Perspectiva Histórico-Cultural de Vygotsky

Além da perspectiva cognitivista ausubeliana, a proposta dialoga com a abordagem histórico-cultural de [Vygotsky 2008], para quem o desenvolvimento das funções psicológicas superiores ocorre por meio da mediação social e do uso de instrumentos culturais.

Nesse contexto, o material manipulável atua como instrumento mediador que possibilita a internalização progressiva dos conceitos matemáticos. Ao interagir com os colegas e com a orientação do professor, o estudante transita da ação concreta para a abstração formal, movimento que se insere na dinâmica da Zona de Desenvolvimento Proximal.

2.4.3 As Contribuições de Dante

A proposta também se apoia nas contribuições de Dante [Dante 2012], que problematiza abordagens centradas na repetição técnica e defende a valorização da resolução de problemas e das situações investigativas no ensino da Matemática.

Ao integrar o Algoritmo de Euclides a uma proposta investigativa mediada por feijões, cria-se um ambiente didático que favorece a formulação de hipóteses, a comparação de estratégias e a argumentação matemática.

2.5 O Algoritmo de Euclides no Ensino da Divisibilidade

A fundamentação teórica apresentada sustenta a introdução do *Algoritmo de Euclides* como culminância de um processo de construção conceitual.

O princípio da invariância do máximo divisor comum, expresso pela relação

$$(a, b) = (b, r), \quad \text{quando } a = bq + r,$$

pode ser compreendido inicialmente por meio de reorganizações sucessivas de agrupamentos concretos.

Nesse sentido, o algoritmo não se apresenta como técnica isolada, mas como sistematização lógica de propriedades previamente exploradas pelos estudantes, reforçando a ancoragem cognitiva e evitando a aprendizagem mecânica.

2.6 Metodologias Ativas e Mediação Docente

A mediação docente assume papel central no desenvolvimento de práticas pedagógicas orientadas à aprendizagem significativa. Nessa perspectiva, cabe ao professor não apenas organizar situações de ensino, mas atuar intencionalmente como mediador do processo de construção do conhecimento, selecionando estratégias, recursos e intervenções que favoreçam a atribuição de significados pelos estudantes. Tal atuação implica mobilizar conhecimentos prévios, propor desafios cognitivos progressivos e orientar a reflexão sobre os procedimentos adotados, promovendo a explicitação de raciocínios e a construção de argumentos matemáticos [Ausubel 2003, Vygotsky 2008].

Sob a ótica da teoria da aprendizagem significativa, essa mediação requer a organização de conteúdos de forma hierarquizada e potencialmente significativa, de modo que novos conceitos se ancorem em estruturas cognitivas já existentes. Por sua vez, na perspectiva histórico-cultural, a intervenção docente se concretiza por meio da mediação simbólica e social, em que a interação entre pares, o uso da linguagem e a utilização de instrumentos — como materiais manipuláveis — desempenham papel fundamental na internalização dos conceitos matemáticos [Vygotsky 2008].

Nesse contexto, a adoção de metodologias ativas configura-se como estratégia coerente com tais fundamentos teóricos, uma vez que desloca o foco do ensino transmissivo para a participação efetiva do estudante na construção do conhecimento. Práticas como a resolução de problemas, a investigação matemática, o trabalho colaborativo e o uso de materiais manipuláveis possibilitam a criação

de ambientes de aprendizagem nos quais os estudantes formulam hipóteses, testam estratégias, confrontam ideias e constroem generalizações.

Essa abordagem encontra respaldo nas orientações da Base Nacional Comum Curricular e dos Parâmetros Curriculares Nacionais, que enfatizam o desenvolvimento do pensamento crítico, da argumentação e da autonomia intelectual, bem como a articulação entre conhecimentos conceituais e procedimentais [BRASIL 1998, BRASIL 2018]. Assim, a mediação docente, articulada às metodologias ativas, constitui elemento fundamental para a superação de práticas centradas na repetição mecânica, favorecendo uma aprendizagem mais reflexiva, significativa e socialmente construída.

2.7 Indicativos

Dessa forma, o ensino da divisibilidade e do máximo divisor comum, quando fundamentado nos documentos curriculares oficiais e articulado às perspectivas teóricas de Ausubel, Vygotsky e Dante, deixa de se configurar como um conteúdo meramente operacional. Passa, então, a constituir-se como um espaço privilegiado para a promoção da aprendizagem significativa, para o desenvolvimento do pensamento matemático e para a construção de práticas pedagógicas mais reflexivas, críticas e epistemologicamente fundamentadas.

Nessa perspectiva, o processo de ensino e aprendizagem ultrapassa a simples transmissão de procedimentos, assumindo um caráter investigativo, no qual os estudantes são convidados a mobilizar conhecimentos prévios, estabelecer relações, formular conjecturas e validar estratégias. A compreensão dos conceitos de divisibilidade e do máximo divisor comum, nesse contexto, emerge da interação entre diferentes formas de representação — concreta, simbólica e discursiva — favorecendo a construção progressiva de significados e a consolidação do raciocínio lógico.

Além disso, a articulação entre fundamentos teóricos e orientações curriculares evidencia a importância da mediação docente como elemento estruturante do processo educativo. Cabe ao professor organizar situações didáticas que promovam a participação ativa dos estudantes, incentivando o diálogo, a argumentação e a reflexão sobre os procedimentos adotados, em um ambiente que valorize o erro como parte constitutiva da aprendizagem. Tal postura pedagógica contribui para o desenvolvimento da autonomia intelectual e da capacidade de análise crítica, aspectos essenciais à formação matemática.

Nesse sentido, o ensino da divisibilidade deixa de ser compreendido como um conjunto de técnicas isoladas e passa a integrar um campo de investigação no qual conceitos, propriedades e procedimentos se articulam de forma significativa.

A formalização do máximo divisor comum, inclusive por meio do Algoritmo de Euclides, passa a representar a culminância de um percurso de construção conceitual, no qual o estudante reconhece regularidades, compreende relações numéricas e atribui sentido aos procedimentos matemáticos.

Por fim, essa abordagem evidencia que a aprendizagem matemática, quando orientada por princípios teóricos consistentes e alinhada às diretrizes curriculares, contribui não apenas para o domínio de conteúdos específicos, mas também para a formação de sujeitos capazes de pensar matematicamente, argumentar de forma consistente e utilizar o conhecimento em diferentes contextos. Assim, consolida-se uma perspectiva de ensino que valoriza a compreensão, a investigação e a construção ativa do conhecimento, em oposição a práticas mecanizadas e descontextualizadas.

Diante desse percurso histórico, epistemológico e pedagógico, torna-se necessário avançar para uma abordagem mais formal dos conceitos de divisibilidade, de modo a explicitar sua estrutura matemática e suas propriedades fundamentais. Assim, no capítulo seguinte, serão apresentados os fundamentos teóricos da divisibilidade no âmbito da Matemática formal, contemplando definições, propriedades e resultados que sustentam o estudo do máximo divisor comum e do Algoritmo de Euclides. Essa transição do enfoque histórico-didático para o tratamento formal busca evidenciar a unidade do conhecimento matemático, articulando a construção conceitual à sua sistematização rigorosa.

Divisibilidade

Neste capítulo estabelecem-se as definições e propriedades fundamentais da divisibilidade no conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} , bem como a noção de resto associada à divisão euclidiana. Apresenta-se o Algoritmo da Divisão como resultado basilar, o qual garante que, dados inteiros a e $b \neq 0$, existem únicos inteiros q e r tais que

$$a = bq + r, \quad \text{com } 0 \leq r < |b|.$$

A partir desse Algoritmo desenvolvem-se os conceitos de máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, bem como o algoritmo de Euclides, formulado como um procedimento finito e eficaz para a determinação do máximo divisor comum de dois inteiros.

3.1 O conjunto dos números inteiros

O ponto de partida deste trabalho é o estudo do conjunto dos números inteiros (\mathbb{Z}) (abreviatura do termo alemão *zahlen*, cujo significado é número ou algarismo). Os números inteiros surgiram da necessidade de ampliação do conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, devido à dificuldade em se efetuar a subtração entre quaisquer dois elementos de \mathbb{N} , por exemplo, não se tinha a formalização sobre como subtrair 5 de 2, além da inclusão ou não do *zero*.

Assim, esse novo conjunto a ser formado por números naturais, números negativos e zero, herda as operações e a relação de ordem ($<$) do conjunto dos números naturais, podendo ser assim representado:

$$\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\},$$

em que o conjunto $-\mathbb{N}$ é formado pelos números simétricos dos elementos de \mathbb{N} , isto é,

$$-\mathbb{N} = \{\dots, -3, -2, -1\}.$$

Em \mathbb{Z} estão definidas duas operações (as quais chamaremos de usuais): a adição (+) e a multiplicação (\cdot),

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (a, b) \longmapsto a + b,$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (a, b) \longmapsto a \cdot b.$$

3.2 Estrutura Algébrica dos Inteiros

O conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} , munido das operações de adição e multiplicação, satisfaz as seguintes propriedades, as quais serão assumidas, neste trabalho, como axiomas:

- (a) **Boa definição das operações:** para quaisquer $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$, se $a = a'$ e $b = b'$, então

$$a + b = a' + b' \quad \text{e} \quad a \cdot b = a' \cdot b'.$$

- (b) **Comutatividade:** para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$a + b = b + a \quad \text{e} \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

- (c) **Associatividade:** para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$, vale

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{e} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

- (d) **Existência de elementos neutros:** existe $0 \in \mathbb{Z}$ tal que, para todo $a \in \mathbb{Z}$,

$$a + 0 = a,$$

e existe $1 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a \cdot 1 = a.$$

Assim, 0 é o elemento neutro da adição e 1 é o elemento neutro da multiplicação.

- (e) **Existência de elementos simétricos:** para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe $b \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a + b = 0.$$

Tal elemento é denominado simétrico aditivo de a e é denotado por $b = -a$.

(f) **Distributividade:** para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Um conjunto munido das operações de adição e multiplicação que satisfaz as propriedades (a) a (f) é denominado um *anel*. Como existem diversos conjuntos numéricos que satisfazem esses axiomas, tais como os conjuntos dos números racionais e reais, observa-se que tais propriedades não são exclusivas do conjunto dos números inteiros. O que distingue a estrutura de \mathbb{Z} da desses outros conjuntos são propriedades adicionais, particularmente aquelas relacionadas à ordem e à divisibilidade. A partir das propriedades acima, é possível deduzir diversos resultados fundamentais, entre os quais destacamos o seguinte.

Proposição 3.1. Para todo $a \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$a \cdot 0 = 0.$$

Demonstração. Pela propriedade (d), tem-se $0 = 0 + 0$. Aplicando a propriedade distributiva (f), obtemos

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0.$$

Somando o simétrico aditivo de $a \cdot 0$ a ambos os lados da igualdade e utilizando as propriedades (c), (d) e (e), segue que

$$0 = -(a \cdot 0) + (a \cdot 0 + a \cdot 0) = (-(a \cdot 0) + a \cdot 0) + a \cdot 0 = 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0.$$

Logo, $a \cdot 0 = 0$. □

Proposição 3.2. A adição em \mathbb{Z} é compatível e cancelativa com respeito à igualdade, isto é, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$,

$$a = b \iff a + c = b + c.$$

Demonstração. Suponha que $a = b$. Pela propriedade (a) da boa definição das operações, é possível adicionar c a ambos os lados da igualdade, obtendo-se

$$a + c = b + c.$$

Reciprocamente, suponha que $a + c = b + c$. Somando o simétrico aditivo de c a ambos os membros da igualdade e utilizando as propriedades associativa e de existência do simétrico, conclui-se que $a = b$. □

Dados dois inteiros $a, b \in \mathbb{Z}$, quando somamos a com o simétrico aditivo de b , realizamos a operação usualmente denominada *subtração*, isto é,

$$a + (-b) = a - b.$$

Diz-se, então, que $a - b$ é o resultado da subtração de a por b .

3.3 Ordenação no Conjunto dos Números Inteiros

As propriedades algébricas anteriormente estabelecidas são fundamentais para a introdução da estrutura de ordem no conjunto dos números inteiros, a qual permite comparar seus elementos. Para tanto, faz-se necessário admitir que o conjunto dos números naturais \mathbb{N} satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) **Fechamento em relação à adição e ao produto:** o conjunto \mathbb{N} é fechado para as operações de adição e multiplicação, isto é, para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$, tem-se

$$a + b \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad a \cdot b \in \mathbb{N}.$$

- (b) **Tricotomia:** quaisquer dois elementos de \mathbb{Z} são sempre comparáveis, isto é, dados $a, b \in \mathbb{Z}$, exatamente uma das seguintes possibilidades ocorre:

- i. $a = b$;
- ii. $b - a \in \mathbb{N}$;
- iii. $a - b \in \mathbb{N}$.

Quando a possibilidade (ii) é satisfeita, diz-se que a é menor do que b , e simboliza-se $a < b$. Analogamente, a possibilidade (iii) equivale a $a > b$. Dessa forma, a tricotomia pode ser reescrita afirmando-se que, dados $a, b \in \mathbb{Z}$, uma, e somente uma, das seguintes condições é verificada:

- i. $a = b$;
- ii. $a < b$ (isto é, $b - a \in \mathbb{N}$);
- iii. $b < a$ (isto é, $a - b \in \mathbb{N}$).

Diz-se que a é maior do que b quando $a - b \in \mathbb{N}$, e indica-se por $a > b$. Além disso, como $0 \in \mathbb{N}$, segue que $a > 0$ se, e somente se, $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Pode-se escrever

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\} \quad \text{e} \quad -\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n < 0\}.$$

Logo, $a > 0$ se, e somente se, $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

A relação $<$, assim definida no conjunto dos números inteiros, é denominada *relação de ordem* e satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) **Transitividade:** para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$;
- (b) **Cancelamento da adição:** para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a + c < b + c$, então $a < b$;
- (c) **Cancelamento da multiplicação por escalar positivo:** para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$, com $c > 0$, se $ac < bc$, então $a < b$;
- (d) **Compatibilidade da multiplicação com a igualdade:** para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$ e $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, se $ac = bc$, então $a = b$.

Demonstração. (a) Suponha que $a < b$ e $b < c$. Então $b - a \in \mathbb{N}$ e $c - b \in \mathbb{N}$. Como \mathbb{N} é fechado para a adição, segue que

$$(b - a) + (c - b) = c - a \in \mathbb{N},$$

donde $a < c$.

- (b) Se $a + c < b + c$, então $(b + c) - (a + c) = b - a \in \mathbb{N}$. Logo, $a < b$.
- (c) Se $ac < bc$ com $c > 0$, então $bc - ac = c(b - a) \in \mathbb{N}$. Pelo fechamento de \mathbb{N} e pelo fato de $c > 0$, segue que $b - a \in \mathbb{N}$, isto é, $a < b$.
- (d) Suponha que $ac = bc$ com $c \neq 0$. Então $ac - bc = c(a - b) = 0$. Pela tricotomia, tem-se uma das seguintes possibilidades:
 - i. $a - b = 0$, o que implica $a = b$;
 - ii. $a - b > 0$, o que implicaria $c(a - b) > 0$, contradição;
 - iii. $a - b < 0$, o que implicaria $c(a - b) < 0$, contradição.

Logo, necessariamente $a = b$.

□

A relação de ordem usual em \mathbb{Z} confere a esse conjunto a estrutura de um domínio de integridade ordenado. Recorde-se que um domínio de integridade é um anel comutativo com unidade no qual não existem divisores de zero, isto é, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$, a igualdade $ab = 0$ implica necessariamente que $a = 0$ ou $b = 0$. Nesse contexto, a ordem em \mathbb{Z} é compatível com as operações algébricas, no sentido de que, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$, e, adicionalmente, se $0 \leq a$ e $0 \leq b$, então $0 \leq ab$. Essas propriedades asseguram a coerência entre a estrutura algébrica e a estrutura de ordem, permitindo o desenvolvimento consistente de argumentos envolvendo divisibilidade e o máximo divisor comum.

Como $0 \in \mathbb{N}$, tem-se que $a - a = 0$. Em particular, segue que $a \not< a$. Além disso, se $a \neq b$, então $a - b \neq 0$. Consequentemente, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a \neq b$, tem-se $a \neq b \iff a < b$ ou $b < a$.

Temos também uma relação de ordem, que denotaremos por \leq e \geq . Tais relações são definidas por $a \leq b$ se, e somente se, $a < b$ ou $a = b$, e $a \geq b$ se, e somente se, $a > b$ ou $a = b$. Observa-se que $a \leq b$ se, e somente se, $b - a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. É fácil verificar que essa nova relação é uma relação de ordem, pois satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) **Reflexividade:** para todo $a \in \mathbb{Z}$, tem-se $a \leq a$;
- (b) **Antissimetria:** para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$, se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$;
- (c) **Transitividade:** para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$.

Introduz-se agora a importante noção de *valor absoluto*. Define-se a função valor absoluto $|\cdot| : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ da seguinte forma:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0, \\ -a, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Observa-se que, para todo $a \in \mathbb{Z}$, tem-se $|a| \geq 0$ e $|a| = 0$ se, e somente se, $a = 0$. O número inteiro $|a|$ é denominado *módulo* de a .

A função valor absoluto satisfaz as seguintes propriedades básicas: para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se:

- (a) $|a| = |-a|$;
- (b) $|a| \leq c$ se, e somente se, $-c \leq a \leq c$;
- (c) $-|a| \leq a \leq |a|$;
- (d) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (*desigualdade triangular*).

As propriedades acima indicam que a noção de valor absoluto dos números inteiros coincide com aquelas observadas nos conjuntos dos números racionais e reais. O conjunto dos números inteiros, no entanto, apresenta subconjuntos particularmente relevantes, que serão introduzidos a seguir.

- (a) **Conjunto \mathbb{Z} dos inteiros não nulos:**

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots;$$

- (b) **Conjunto \mathbb{Z}_0 dos inteiros não negativos:**

$$\mathbb{Z}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\};$$

- (c) **Conjunto \mathbb{Z}^+ dos inteiros positivos:**

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

(d) **Conjunto \mathbb{Z}^- dos inteiros não positivos:**

$$\mathbb{Z}^- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\};$$

(e) **Conjunto \mathbb{Z}_- dos inteiros negativos:**

$$\mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1\}.$$

Fazem-se necessárias, ainda, algumas definições fundamentais.

Definição 3.3. Diz-se que um subconjunto $S \subset \mathbb{Z}$ é *limitado inferiormente* se existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $c \leq s$ para todo $s \in S$. Além disso, se existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \leq s$ para todo $s \in S$ e tal que $m \in S$, então m é denominado o *menor elemento* de S , e denota-se $m = \min S$.

Observa-se que, se $S \subset \mathbb{Z}$ possui menor elemento, então esse elemento é único. Com efeito, se a e a' são menores elementos de S , então $a \leq a'$ e $a' \leq a$, donde segue que $a = a'$.

No conjunto dos números inteiros, tais propriedades fundamentais permitem introduzir um axioma adicional, que será utilizado ao longo deste trabalho e que se denomina *Princípio da Boa Ordenação*. Esse princípio constitui uma das características que distinguem o conjunto dos números inteiros (bem como dos naturais) dos conjuntos dos números racionais e reais.

Lema 3.4 (Princípio da Boa Ordenação). Se S é um subconjunto não vazio de \mathbb{Z} que é limitado inferiormente, então S possui um menor elemento.

Demonstração. Pela definição de conjunto limitado inferiormente, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $c \leq s$ para todo $s \in S$. Consideremos o conjunto

$$T = \{s - c \mid s \in S\} \subset \mathbb{Z}.$$

Observa-se que $T \subset \mathbb{Z}_0$ e que T é não vazio. Pelo Princípio da Boa Ordenação aplicado aos inteiros não negativos, o conjunto T possui um menor elemento, digamos $t_0 \in T$. Logo, existe $s_0 \in S$ tal que $t_0 = s_0 - c$.

Afirmamos que s_0 é o menor elemento de S . De fato, para qualquer $s \in S$, tem-se $s - c \in T$, de modo que

$$t_0 \leq s - c,$$

o que implica

$$s_0 \leq s.$$

Portanto, s_0 é o menor elemento de S , isto é, $s_0 = \min S$. □

Observe-se que qualquer subconjunto não vazio de \mathbb{Z} que seja limitado inferiormente possui menor elemento. Em contrapartida, tal propriedade não se verifica nos conjuntos dos números racionais ou reais. Por exemplo, o conjunto dos números racionais estritamente positivos não possui menor elemento, pois, dado qualquer número racional positivo q , o número $q/2$ é um racional positivo estritamente menor que q .

De modo análogo, o conjunto dos números reais estritamente positivos também não possui menor elemento. Assim, o Princípio da Boa Ordenação não é válido nesses conjuntos.

O Princípio da Boa Ordenação permite demonstrar diversas propriedades fundamentais dos números inteiros. Apresentamos, a seguir, algumas dessas consequências.

Proposição 3.5. Seja $a \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq a < 1$. Então $a = 0$ ou $a = 1$.

Demonstração. Suponha-se $a \in \mathbb{Z}$ com $0 < a < 1$. Queremos mostrar que tal situação é impossível. Como $a > 0$, tem-se $a \in \mathbb{Z}^+$. Além disso, o conjunto \mathbb{Z}^+ é limitado inferiormente e não vazio, logo possui menor elemento, digamos $m = \min \mathbb{Z}^+$. Como $a \in \mathbb{Z}^+$, segue que $m \leq a < 1$. Multiplicando a desigualdade $m < 1$ por 1, obtemos $0 < m < 1$, o que é uma contradição, pois não existem inteiros estritamente entre 0 e 1. Portanto, $a = 0$ ou $a = 1$. \square

Corolário 3.6. Dado $a \in \mathbb{Z}$ qualquer, não existe inteiro estritamente entre a e $a+1$.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista um inteiro n tal que $a < n < a+1$. Subtraindo a de todos os termos da desigualdade, obtém-se

$$0 < n - a < 1,$$

o que contradiz a proposição anterior. Logo, tal inteiro não existe. \square

Corolário 3.7. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Se $a < b$, então $a + 1 \leq b$.

Demonstração. Suponha-se que $a < b$ e que $b < a + 1$. Então teríamos

$$a < b < a + 1,$$

o que contradiz o corolário anterior. Logo, deve ocorrer $a + 1 \leq b$. \square

Corolário 3.8. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$. Então $|b| \geq 1$.

Demonstração. Como $b \neq 0$, tem-se $b > 0$ ou $b < 0$. Em ambos os casos, segue que $|b| \in \mathbb{Z}^+$, e pela proposição anterior, tem-se $|b| \geq 1$. \square

Corolário 3.9. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$. Então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n \leq \frac{a}{b} < n + 1.$$

Demonstração. Como $b \neq 0$, considere-se o número real $\frac{a}{b}$. Pelo Princípio da Boa Ordenação aplicado ao conjunto

$$S = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq \frac{a}{b}\},$$

segue que S possui um maior elemento n . Assim, tem-se

$$n \leq \frac{a}{b} < n + 1,$$

como desejado. □

3.4 Princípio da Indução Finita

Uma das mais importantes consequências do Princípio da Boa Ordenação é o *Princípio da Indução Matemática*, também conhecido como *Princípio da Indução Finita*. Tal princípio fornece uma ferramenta fundamental para a demonstração de proposições definidas no conjunto dos números naturais.

No que segue, seja $p(n)$ uma proposição em n , isto é, uma afirmação cujo valor lógico depende do inteiro n . Denotaremos por verdadeiro ou falso o valor lógico assumido por $p(n)$.

Para que uma proposição seja considerada verdadeira para todos os inteiros positivos, é necessário verificar a validade das seguintes afirmações:

$$p(1), p(2), p(3), p(4), \dots$$

A realização desse processo, entretanto, é inviável quando o conjunto de valores de n é infinito. Assim, utiliza-se o *Princípio da Indução Finita* como método lógico para demonstrar que uma proposição $p(n)$ é verdadeira para todo inteiro $n \geq n_0$, com n_0 fixado.

Esse método consiste na verificação dos seguintes passos:

- (i) **Passo inicial:** verificar que $p(n_0)$ é verdadeira;
- (ii) **Passo indutivo:** para todo $n \geq n_0$, mostrar que a validade de $p(n)$ implica a validade de $p(n + 1)$.

Concluídos esses dois passos, segue que $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Teorema 3.10 (Primeiro Princípio da Indução). Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ e seja $p(n)$ uma proposição definida em \mathbb{N} . Suponha que:

- (i) $p(n_0)$ é verdadeira;
- (ii) para todo $n \geq n_0$, se $p(n)$ é verdadeira, então $p(n+1)$ também é verdadeira.

Então, $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Demonstração. A prova é feita por contradição. Suponha que exista $m \geq n_0$ tal que $p(m)$ é falsa. Considere o conjunto

$$S = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0 \text{ e } p(n) \text{ é falsa} \}.$$

Por hipótese, S é não vazio. Pelo Princípio da Boa Ordenação, S possui um menor elemento, digamos m_0 . Como $p(n_0)$ é verdadeira, tem-se $m_0 > n_0$, logo $m_0 - 1 \geq n_0$.

Pela minimalidade de m_0 , a proposição $p(m_0 - 1)$ é verdadeira. Pelo passo indutivo, segue que $p(m_0)$ também deveria ser verdadeira, o que contradiz a definição de m_0 . Logo, tal m não existe, e $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$. \square

Uma variante importante do Princípio da Indução Finita é o chamado *Princípio da Indução Completa* ou *Segundo Princípio da Indução*, particularmente útil quando a validade de uma proposição depende de todos os casos anteriores.

Teorema 3.11 (Segundo Princípio da Indução). Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ e seja $p(n)$ uma proposição definida em \mathbb{N} . Suponha que:

- (i) $p(n_0)$ é verdadeira;
- (ii) para todo $n > n_0$, se $p(k)$ é verdadeira para todo k tal que $n_0 \leq k \leq n$, então $p(n+1)$ é verdadeira.

Então, $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Demonstração. Considere-se a proposição $q(n)$ definida por:

$$q(n) : \text{“}p(k) \text{ é verdadeira para todo } k \text{ tal que } n_0 \leq k \leq n\text{”}.$$

Observa-se que $q(n_0)$ é verdadeira, pois $p(n_0)$ é verdadeira por hipótese. Suponha agora que $q(n)$ seja verdadeira. Pelo item (ii), segue que $p(n+1)$ é verdadeira, logo $q(n+1)$ também é verdadeira. Pelo Primeiro Princípio da Indução, conclui-se que $q(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Em particular, $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$. \square

Conclui-se, portanto, pelo Primeiro Princípio da Indução, que a proposição $p(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Muitos dos resultados apresentados a seguir serão provados utilizando-se, de forma recorrente, o Princípio da Indução Finita em suas duas formas (induições simples e completa), ferramenta fundamental na Teoria dos Números.

3.5 A Divisão no Conjunto dos Números Inteiros

Como vimos, no conjunto dos números inteiros as operações de adição e multiplicação estão bem definidas, ou seja, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, tem-se $a + b \in \mathbb{Z}$ e $ab \in \mathbb{Z}$. No entanto, o quociente entre dois inteiros pode não pertencer ao conjunto dos inteiros. Ainda assim, a noção de divisão pode ser introduzida de forma rigorosa, considerando-se a existência de quociente e resto associados a essa operação.

Neste sentido, a divisão euclidiana não deve ser compreendida como uma operação interna em \mathbb{Z} , mas como uma relação fundamental que associa dois inteiros a outros dois inteiros, satisfazendo propriedades específicas. Tal conceito será formalizado a partir do *Algoritmo da Divisão*, cujas consequências são centrais para o estudo da divisibilidade e de diversos resultados da Teoria dos Números.

3.5.1 O Algoritmo da Divisão

Definição 3.12. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$. Diz-se que b divide a , ou que a é múltiplo de b , se existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a = bc.$$

Nesse caso, escreve-se $b \mid a$.

Exemplo 3.13. (a) $5 \mid 35$, pois $35 = 5 \cdot 7$. Logo, 35 é múltiplo de 5;

(b) $2 \nmid 35$, pois não existe inteiro c tal que $35 = 2c$.

Naturalmente, da definição acima decorre que, se $b \mid a$, então a é múltiplo de b . Entretanto, o recíproco não é verdadeiro: nem todo inteiro é divisor de outro. Além disso, observa-se que a relação de divisibilidade não constitui uma relação de ordem total em \mathbb{Z} .

Antes de prosseguirmos, enunciaremos uma propriedade fundamental da divisibilidade.

Proposição 3.14. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$. Se $b \mid a$, então existe um único inteiro $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = bc$.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que a afirmação seja falsa, isto é, que para todo natural n , $a < b + n$. Logo, o conjunto

$$S = \{b + n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

é formado apenas por números naturais. Assim, pelo Princípio da Boa Ordenação, S possui menor elemento, digamos $m = \min S$. Como $m \in S$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m = b + n_0$. Por outro lado, observa-se que

$$m - b = n_0 \geq 1.$$

Como $m - b \in \mathbb{N}$, segue que $m - b + 1 \in \mathbb{N}$. Assim,

$$b + (n_0 - 1) = m - 1 \in S,$$

o que contradiz a minimalidade de m . Logo, a afirmação é verdadeira. \square

A Propriedade anterior pode ser interpretada como segue: dado qualquer número inteiro, existe sempre um inteiro imediatamente maior e um inteiro imediatamente menor que ele. Em particular, não existem lacunas entre dois inteiros consecutivos.

Teorema 3.15 (Teorema da Divisão Euclidiana). Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$. Existem únicos inteiros q e r tais que

$$a = bq + r, \quad \text{com } 0 \leq r < |b|.$$

Os inteiros q e r são denominados, respectivamente, *quociente* e *resto* da divisão de a por b .

Demonstração. Considere o conjunto

$$S = \{a - bx \mid x \in \mathbb{Z}, a - bx \geq 0\}.$$

Inicialmente, provemos que S é não vazio. Pela Propriedade 3.14, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a < b + n|b|$. Logo,

$$a - bn < |b|.$$

Como $|b| > 0$, segue que $a - bn \geq 0$ para algum $n \in \mathbb{Z}$, e portanto $S \neq \emptyset$.

Como $S \subset \mathbb{Z}$ e é limitado inferiormente por 0, pelo Princípio da Boa Ordenação, S possui um menor elemento, que denotaremos por r . Assim, existe

$q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$r = a - bq,$$

com $r \geq 0$.

Resta mostrar que $r < |b|$. Suponha, por absurdo, que $r \geq |b|$. Então,

$$r - |b| \geq 0.$$

Como $|b| = b$ ou $|b| = -b$, segue que existe $q' \in \mathbb{Z}$ tal que

$$r - |b| = a - bq',$$

o que implica $r - |b| \in S$. Mas $r - |b| < r$, o que contradiz a minimalidade de r . Logo, $0 \leq r < |b|$.

Finalmente, suponha que existam inteiros q_1, q_2, r_1, r_2 tais que

$$a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2, \quad \text{com } 0 \leq r_1, r_2 < |b|.$$

Então

$$b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1.$$

Como $|r_2 - r_1| < |b|$, segue que $r_2 - r_1 = 0$, isto é, $r_1 = r_2$, e conseqüentemente $q_1 = q_2$. Portanto, o quociente e o resto são únicos. \square

Da igualdade

$$b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$$

segue que

$$|r_2 - r_1| = |b| |q_1 - q_2|.$$

Como $0 \leq r_1, r_2 < |b|$, tem-se $|r_2 - r_1| < |b|$, o que implica $q_1 - q_2 = 0$ e, conseqüentemente, $r_1 = r_2$. Isso conclui a demonstração da unicidade do quociente e do resto. \square

Observa-se que o Teorema da Divisão Euclidiana permanece válido mesmo quando o dividendo a é negativo. Uma das razões dessa generalidade é que o resto r satisfaz a condição $0 \leq r < |b|$.

Antes do estabelecimento da condição $0 \leq r < |b|$, era possível obter restos distintos para uma mesma decomposição da forma $a = bq + r$. Por exemplo, na divisão de -17 por 3 , existem as seguintes possibilidades:

$$-17 = 3(-5) + (-2), \quad \text{pois } -2 < 3,$$

ou ainda,

$$-17 = 3(-6) + 1, \quad \text{pois } 1 < 3.$$

De fato,

$$3(-5) = -15 \Rightarrow -15 + (-2) = -17,$$

e

$$3(-6) = -18 \Rightarrow -18 + 1 = -17.$$

Observe que, se exigirmos apenas a condição $r < 3$, ambos os restos (-2 e 1) satisfazem tal desigualdade. Logo, sem impor que o resto seja não negativo, a decomposição não é única.

Contudo, aplicando corretamente o Algoritmo da Divisão Euclidiana, isto é,

$$-17 = 3q + r, \quad 0 \leq r < 3,$$

como $r \in \{0, 1, 2\}$, a única possibilidade válida é

$$-17 = 3(-6) + 1,$$

pois

$$0 \leq 1 < 3.$$

Assim, a condição $0 \leq r < |b|$ garante a unicidade do quociente e do resto. O Teorema da Divisão Euclidiana impõe a condição $0 \leq r < |b|$, o que elimina ambiguidade e torna a divisão bem definida no conjunto dos números inteiros.

Lema 3.16. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e seja $m \in \mathbb{Z}$ um inteiro positivo. Então a soma e o produto dos restos da divisão de a e b por m têm o mesmo resto que a soma e o produto de a e b , respectivamente, na divisão por m .

Demonstração. Sejam $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$. Efetuando a divisão com resto de ambos os números por a , obtemos

$$b_1 = aq_1 + r_1 \quad \text{e} \quad b_2 = aq_2 + r_2,$$

com $0 \leq r_1, r_2 < a$. Então,

$$\begin{aligned} b_1 b_2 &= (aq_1 + r_1)(aq_2 + r_2) \\ &= a^2 q_1 q_2 + aq_1 r_2 + aq_2 r_1 + r_1 r_2 \\ &= a(aq_1 q_2 + q_1 r_2 + q_2 r_1) + r_1 r_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Seja

$$q = aq_1 q_2 + q_1 r_2 + q_2 r_1.$$

Assim, da equação (3.1), temos

$$b_1 b_2 = aq + r_1 r_2. \quad (3.2)$$

Agora, dividimos $r_1 r_2$ por a , obtendo

$$r_1 r_2 = ap + r, \quad 0 \leq r < a. \quad (3.3)$$

Das equações (3.2) e (3.3), segue que

$$b_1 b_2 = a(q + p) + r, \quad 0 \leq r < a. \quad (3.4)$$

Portanto, das expressões (3.3) e (3.4), concluímos que o resto da divisão de $b_1 b_2$ por a é o mesmo que o resto da divisão de $r_1 r_2$ por a . O caso da soma é demonstrado de maneira análoga. \square

A principal vantagem do resultado acima é que, em problemas envolvendo números muito grandes, é possível substituir tais números por seus restos na divisão por um inteiro fixado, simplificando consideravelmente os cálculos.

3.5.2 Divisibilidade

A divisão inteira ocorre quando o resto é zero, isto é, quando o divisor é um fator do dividendo. Nesse caso, estabelece-se a relação de divisibilidade. A seguir, apresentamos alguns resultados importantes acerca dessa noção.

Proposição 3.17. Quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, valem as seguintes propriedades:

- (a) $a \mid 0$, para todo $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
- (b) se $a \mid 1$, então $a = \pm 1$;
- (c) se $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (b + c)$;
- (d) se $a \mid b$ e $c \in \mathbb{Z}$, então $a \mid (bc)$;
- (e) se a e b são positivos e $a \mid b$, então $0 < a \leq b$.

Demonstração. (a) Por definição, $a \mid 0$ significa que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $0 = a \cdot k$.

Basta tomar $k = 0$ para concluir que $a \mid 0$.

(b) Suponha que $a \mid 1$. Então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $1 = a \cdot k$. Como $a, k \in \mathbb{Z}$, as únicas possibilidades são $a = 1$ ou $a = -1$.

(c) Se $a \mid b$ e $a \mid c$, então existem $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$b = ak_1 \tag{3.5}$$

e

$$c = ak_2. \tag{3.6}$$

Substituindo (3.5) e (3.6) em $b + c$, obtemos

$$b + c = ak_1 + ak_2 = a(k_1 + k_2),$$

o que implica $a \mid (b + c)$.

(d) Se $a \mid b$, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ak$. Para qualquer $c \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$bc = (ak)c = a(kc),$$

donde segue que $a \mid (bc)$.

(e) Suponha que $a \mid b$ e que a e b sejam positivos. Então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ak$. Como $a > 0$ e $b > 0$, segue que $k > 0$, e portanto $a \leq b$.

(f) Se $a \mid b$, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ak$. Tomando valores absolutos, obtemos

$$|b| = |a||k|,$$

donde segue que $|a| \mid |b|$. Reciprocamente, se $|a| \mid |b|$, então $|b| = |a|k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, o que implica $b = a(\pm k)$ e, portanto, $a \mid b$.

(g) Se $a \mid b$ e $a \mid c$, então existem $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$b = ak_1, \tag{3.7}$$

$$c = ak_2. \tag{3.8}$$

Multiplicando (3.7) por $x \in \mathbb{Z}$ e (3.8) por $y \in \mathbb{Z}$ e somando membro a membro, obtemos

$$bx + cy = a(xk_1 + yk_2).$$

Logo, $a \mid (bx + cy)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$.

□

(c) Suponha que $a \mid (b \pm c)$. Então existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b \pm c = ak_1. \quad (3.9)$$

Como $a \mid b$, existe $k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b = ak_2. \quad (3.10)$$

Substituindo (3.10) em (3.9), obtemos

$$ak_2 \pm c = ak_1,$$

o que implica

$$c = a(k_1 - k_2).$$

Logo, $a \mid c$.

(d) Se $a \mid b$ e $b \mid a$, então existem $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$b = ak_1 \quad \text{e} \quad a = bk_2.$$

Substituindo a primeira igualdade na segunda, obtemos

$$a = ak_1k_2.$$

Como $a \neq 0$, segue que $k_1k_2 = 1$. Logo, $k_1 = k_2 = 1$ ou $k_1 = k_2 = -1$, o que implica $a = b$ ou $a = -b$. Em particular, $|a| = |b|$.

Isto finaliza a demonstração. \square

Se a divide b , isto é, se $b = ac$ para algum $c \in \mathbb{Z}$, então $a = \frac{b}{c}$. Do mesmo modo, $-a$ também divide b . Logo, se a é um divisor de b , então $-a$ também o é.

Observa-se, ainda, que os divisores de um inteiro $b \neq 0$ ocorrem sempre em pares da forma $\pm d$. Além disso, como todo divisor d de b satisfaz $|d| \leq |b|$, segue que um inteiro diferente de zero possui apenas um número finito de divisores.

3.6 O Máximo Divisor Comum

Nesta seção abordaremos um conceito fundamental que surge em diversos problemas de divisibilidade: o de *máximo divisor comum*. Tal conceito refere-se aos inteiros positivos que dividem simultaneamente dois ou mais inteiros e desempenha papel central no estudo da aritmética dos números inteiros.

Um problema simples pode ser utilizado como motivação para a introdução desse conceito.

Exemplo 3.18. Em uma escola, duas turmas da 7^a série participarão de uma olimpíada interna de Matemática. A turma do 7^o Ano A possui 48 estudantes, enquanto a turma do 7^o Ano B possui 60 estudantes. A coordenação deseja formar grupos com o mesmo número de estudantes, de modo que cada grupo seja composto apenas por alunos da mesma turma. Qual deve ser o maior número possível de estudantes em cada grupo?

Denotemos por d o número de estudantes em cada grupo. Pela natureza do problema, d deve ser um inteiro positivo.

Os 48 estudantes do 7^o Ano A serão distribuídos em grupos com d estudantes cada um. Logo,

$$48 = dn,$$

para algum $n \in \mathbb{Z}^+$. Assim, d deve ser um divisor positivo de 48, isto é,

$$d \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}.$$

De modo análogo, os 60 estudantes do 7^o Ano B serão distribuídos em grupos com d estudantes cada um, o que implica

$$60 = dm,$$

para algum $m \in \mathbb{Z}^+$. Portanto, d deve ser um divisor positivo de 60, isto é,

$$d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}.$$

Como d deve dividir simultaneamente 48 e 60, segue que

$$d \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}.$$

Calculando a interseção, obtemos

$$d \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}.$$

Como se deseja que o número de estudantes em cada grupo seja o maior possível, conclui-se que

$$d = 12.$$

Assim, o 7º Ano A será dividido em

$$48 \div 12 = 4$$

grupos, e o 7º Ano B será dividido em

$$60 \div 12 = 5$$

grupos, todos com 12 estudantes.

Observa-se que 12 é o maior divisor comum de 48 e 60, sendo denominado o *máximo divisor comum* desses dois inteiros.

Essas observações conduzem à definição a seguir.

Definição 3.19. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com a e b não nulos. O *máximo divisor comum* entre a e b , denotado por (a, b) , é o maior inteiro positivo que divide simultaneamente a e b .

Diz-se que um inteiro positivo d divide a e b , isto é, $d \mid a$ e $d \mid b$. Um inteiro $d \in \mathbb{Z}$ é denominado *máximo divisor comum* entre a e b se satisfaz as seguintes condições:

- (i) $d > 0$;
- (ii) $d \mid a$ e $d \mid b$;
- (iii) se d' é um inteiro tal que $d' \mid a$ e $d' \mid b$, então $d' \mid d$.

Exemplo 3.20. O número 3 é o máximo divisor comum entre 12 e 9. De fato, $3 > 0$, $3 \mid 12$ e $3 \mid 9$. Além disso, qualquer divisor comum de 12 e 9 divide 3, conforme a condição (iii). Observe-se ainda que o conjunto dos divisores comuns de 12 e 9 é $\{\pm 1, \pm 3\}$.

Seguem algumas propriedades básicas do conceito de máximo divisor comum.

Proposição 3.21. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, não ambos nulos. Então valem as seguintes afirmações:

- (a) Se d e d' são máximos divisores comuns de a e b , então $d = d'$, isto é, o máximo divisor comum é único;
- (b) Qualquer que seja $a \in \mathbb{Z}$, tem-se $(a, 0) = |a|$;
- (c) Se d é o máximo divisor comum entre a e b , então d também é o máximo divisor comum entre $-a$ e $-b$;
- (d) Se a é múltiplo de b , então $(a, b) = |b|$.

Demonstração. (a) Da definição, tanto d quanto d' são positivos e dividem a e b .

Pela condição (iii), tem-se $d \mid d'$ e $d' \mid d$. Logo, $d = d'$.

(b) Os divisores comuns de a e 0 são precisamente os divisores de a . O maior divisor positivo de a é $|a|$, logo $(a, 0) = |a|$.

(c) Se $d \mid a$ e $d \mid b$, então $d \mid (-a)$ e $d \mid (-b)$. Como os conjuntos de divisores comuns de (a, b) e $(-a, -b)$ coincidem, segue que seus máximos divisores comuns são iguais.

(d) Se $a = bk$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, então todo divisor de b divide a . Logo, o conjunto dos divisores comuns de a e b coincide com o conjunto dos divisores de b . Assim, o maior divisor comum positivo é $|b|$, isto é, $(a, b) = |b|$.

□

É imediato verificar que a definição de máximo divisor comum entre dois números inteiros não nulos coincide com aquela usualmente apresentada nos livros de Aritmética. Ressalte-se, entretanto, que essa definição garante a existência, a unicidade e a possibilidade de expressar o máximo divisor comum de a e b de forma aritmética, como será visto a seguir, por meio de uma combinação linear envolvendo esses inteiros.

Teorema 3.22 (Teorema de Bézout). Seja d o máximo divisor comum entre a e b . Então existem inteiros $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$d = ma + nb.$$

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, não ambos nulos. Considere o conjunto

$$S = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}, ma + nb > 0\}.$$

O conjunto S é não vazio, pois existem combinações lineares positivas de a e b . Pelo Princípio da Boa Ordenação, S possui um menor elemento, que denotaremos por d .

Mostremos que $d = (a, b)$. Pela definição de d , existem $m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$d = m_0a + n_0b.$$

Dividamos a por d . Pelo Teorema da Divisão Euclidiana, existem inteiros q e r tais que

$$a = dq + r, \quad 0 \leq r < d.$$

Substituindo a expressão de d , obtemos

$$r = a - dq = a - (m_0a + n_0b)q = a(1 - m_0q) + b(-n_0q).$$

Logo, r é uma combinação linear inteira de a e b . Pela minimalidade de d , segue que $r = 0$, e portanto $d \mid a$.

De modo análogo, dividindo b por d conclui-se que $d \mid b$. Assim, d é um divisor comum de a e b .

Se c é um divisor comum qualquer de a e b , então $c \mid (ma + nb)$ para todos $m, n \in \mathbb{Z}$. Em particular, $c \mid d$. Logo, d é o maior divisor comum positivo entre a e b , isto é, $d = (a, b)$. \square

A demonstração acima mostra não apenas que o máximo divisor comum entre dois números inteiros pode ser expresso como uma combinação linear desses números, mas também que ele é o menor inteiro positivo que pode ser obtido como combinação linear inteira de a e b .

O Teorema de Bézout é uma das ferramentas centrais na resolução de problemas envolvendo o máximo divisor comum. Esse resultado foi provado pela primeira vez por Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581–1638), sendo conhecido também como *Teorema da Identidade de Bézout*. A seguir, apresentamos algumas consequências importantes desse teorema.

Proposição 3.23. Sejam $a, b, d \in \mathbb{N}$, com $a, b \neq 0$. Então valem as seguintes afirmações:

- (a) Se $d \mid a$ e $d \mid b$, então $d \mid (a, b)$;
- (b) $(\lambda a, \lambda b) = |\lambda| (a, b)$, para todo $\lambda \in \mathbb{Z}$;
- (c) Se $d \mid a$ e $d \mid b$, então

$$\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \right) = \frac{1}{d} (a, b).$$

Consequentemente,

$$\left(\frac{a}{(a, b)}, \frac{b}{(a, b)} \right) = 1;$$

- (d) $(a, b) = 1$ se, e somente se, existem inteiros $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ma + nb = 1;$$

- (e) **(Lema de Gauss)** Se $(a, b) = 1$ e $a \mid bc$, então $a \mid c$.

Demonstração. (a) A afirmação decorre imediatamente da igualdade

$$(a, b) = ma + nb,$$

obtida no Teorema de Bézout.

(b) Inicialmente, observamos que

$$(\lambda a, \lambda b) = |\lambda| (a, b),$$

para todo $\lambda \in \mathbb{Z}$. Usando o item (a) e o fato de que $\lambda > 0$, a igualdade acima implica

$$\begin{aligned} (\lambda a, \lambda b) &= \min\{\lambda(ma + nb) \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \lambda \min\{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \lambda(a, b). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Logo, a propriedade vale para todo $\lambda \in \mathbb{Z}$.

(c) A afirmação segue diretamente da equação (3.11), pois, se $(a, b) = d$, então

$$\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1.$$

(d) Suponha que $(a, b) = 1$. Pelo Teorema de Bézout, existem inteiros $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ma + nb = 1.$$

Suponha ainda que $a \mid bc$. Então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $bc = ak$. Multiplicando a igualdade de Bézout por c , obtemos

$$mac + nbc = c.$$

Substituindo $bc = ak$, segue que

$$mac + nak = a(mc + nk),$$

e, portanto, $a \mid c$.

(e) Se $a \mid bc$ e $(a, b) = 1$, então, pelo item anterior, conclui-se que $a \mid c$, o que completa a demonstração do Lema de Gauss. □

Dois inteiros a e b são chamados *primos entre si* se

$$(a, b) = 1.$$

A noção de inteiros primos entre si desempenha papel central na Teoria dos Números, especialmente no estudo da fatoração em primos, da aritmética modular e dos critérios de divisibilidade. Em particular, listar explicitamente todos os divisores de números inteiros grandes para verificar se são primos entre si torna-se rapidamente inviável, o que justifica a importância dos resultados teóricos desenvolvidos nesta seção.

Listar todos os divisores de dois números inteiros grandes para determinar o máximo divisor comum pode tornar-se inviável. Nesta seção, apresentamos um resultado fundamental que permite calcular o máximo divisor comum de maneira eficiente.

Teorema 3.24. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, e sejam q e r , respectivamente, o quociente e o resto da divisão de a por b , isto é,

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

Então,

$$(a, b) = (b, r).$$

Demonstração. Suponha $d = (a, b)$. Como $d \mid a$ e $d \mid b$, segue que

$$d \mid (a - bq) = r.$$

Logo, d é divisor comum de b e r , o que implica

$$d \leq (b, r).$$

Por outro lado, seja $d' = (b, r)$. Como $d' \mid b$ e $d' \mid r$, segue que

$$d' \mid (bq + r) = a.$$

Logo, d' é divisor comum de a e b , o que implica

$$d' \leq (a, b).$$

Portanto, conclui-se que $(a, b) = (b, r)$. □

O teorema acima fornece o fundamento teórico do *Algoritmo de Euclides*, que consiste em aplicar sucessivamente a igualdade

$$(a, b) = (b, r)$$

até que o resto seja zero. Nesse caso, o último divisor não nulo é o máximo divisor comum.

Exemplo 3.25. Utilizando o Teorema da Divisão Euclidiana, determinemos $(252, 198)$.

Aplicamos o Algoritmo de Euclides, efetuando divisões sucessivas. Inicialmente, dividimos 252 por 198:

$$252 = 198 \cdot 1 + 54,$$

com $0 \leq 54 < 198$. Logo,

$$(252, 198) = (198, 54).$$

Em seguida, dividimos 198 por 54:

$$198 = 54 \cdot 3 + 36,$$

com $0 \leq 36 < 54$. Assim,

$$(198, 54) = (54, 36).$$

Prosseguindo, dividimos 54 por 36:

$$54 = 36 \cdot 1 + 18,$$

com $0 \leq 18 < 36$. Portanto,

$$(54, 36) = (36, 18).$$

Finalmente, dividimos 36 por 18:

$$36 = 18 \cdot 2 + 0.$$

Como o último resto não nulo é 18, concluímos que

$$(252, 198) = 18.$$

A identidade acima decorre imediatamente do item (c) da Proposição 3.24.

Este exemplo ilustra um resultado muito importante de Euclides, cuja demonstração apresentamos a seguir.

Lema 3.26. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e seja $d \in \mathbb{Z}$ tal que $(a, b) = d$. Então existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que

$$(a, b) = (a, b - ac).$$

Demonstração. Seja $d = (a, b)$. Como $d \mid a$ e $d \mid b$, segue que $d \mid (b - ac)$. Logo, d é um divisor comum de a e $b - ac$.

Reciprocamente, suponha que d' seja um divisor comum de a e $b - ac$. Então $d' \mid a$ e $d' \mid (b - ac)$, o que implica que $d' \mid (b - ac + ac) = b$. Assim, d' é divisor comum de a e b . Portanto, $(a, b) = (a, b - ac)$. \square

O método de efetuar divisões sucessivas com o objetivo de encontrar o máximo divisor comum entre dois inteiros foi demonstrado por Euclides nos *Elementos*, livro VII, e é conhecido como *Algoritmo de Euclides*. [Euclides 2009, p. X, Livro VII, Prop. 2]:

“Dados dois números que não são primos entre si, encontrar o maior divisor comum. Se o menor mede o maior, então o menor é o maior divisor comum; mas, se não, subtraia o menor do maior repetidamente até que reste um número que meça o anterior; e esse será o maior divisor comum.”

3.6.1 O Algoritmo de Euclides

Na formulação moderna, o Algoritmo de Euclides é apresentado como um procedimento baseado em divisões sucessivas com resto, permitindo a determinação do máximo divisor comum de dois números inteiros positivos.

Teorema 3.27. Dados dois inteiros positivos a e b , com $a > b$, aplicamos sucessivamente a divisão euclidiana para obter a seguinte sequência de igualdades:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, & 0 \leq r_1 < b, \\ b &= r_1q_2 + r_2, & 0 \leq r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, & 0 \leq r_3 < r_2, \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, & 0 \leq r_n < r_{n-1}, \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Então,

$$(a, b) = r_n,$$

isto é, o último resto não nulo é o máximo divisor comum entre a e b .

Demonstração. Inicialmente, observamos que o processo de divisões sucessivas descrito em (3.12) é finito. De fato, a sequência de restos

$$b > r_1 > r_2 > \cdots > r_n \geq 0$$

é estritamente decrescente e formada por inteiros não negativos, logo não pode ser infinita.

Aplicando sucessivamente o lema anterior, obtemos:

$$(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \cdots = (r_{n-1}, r_n).$$

Como $r_n \mid r_{n-1}$ e $r_n \mid r_n$, segue que $(r_{n-1}, r_n) = r_n$. Portanto,

$$(a, b) = r_n.$$

□

Do item (c) da Proposição 3.24, tem-se que

$$(a, b) = (a, r_1) = (r_1, r_2) = \cdots = (r_{n-1}, r_n).$$

Isso prova o que queríamos. □

Podemos resumir o Algoritmo de Euclides para o cálculo do máximo divisor comum da seguinte forma.

Sejam a e b dois inteiros não nulos. Para calcular (a, b) , iniciamos dividindo o maior pelo menor, obtendo um quociente e um resto. Em seguida, divide-se o divisor anterior pelo resto obtido, e assim sucessivamente, até que o resto seja nulo. O último resto não nulo obtido nesse processo é o máximo divisor comum de a e b .

O processo de divisões sucessivas pode também ser utilizado para determinar os inteiros $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ma + nb = (a, b).$$

Vejamos agora outros exemplos que podem ser resolvidos aplicando o algoritmo de Euclides.

Exemplo 3.28. Encontre o Máximo Divisor Comum de $a = 56$ e $b = 15$.

Aplicando o Algoritmo de Euclides, efetuamos as divisões sucessivas:

$$\begin{aligned}56 &= 15 \cdot 3 + 11, \\15 &= 11 \cdot 1 + 4, \\11 &= 4 \cdot 2 + 3, \\4 &= 3 \cdot 1 + 1, \\3 &= 1 \cdot 3 + 0.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Como 1 é o último resto não nulo, concluimos que

$$(56, 15) = 1.$$

Portanto, 56 e 15 são primos entre si.

Exemplo 3.29. Determine o Máximo Divisor Comum de $a = 84$ e $b = 30$.

Aplicando o Algoritmo de Euclides, efetuamos as divisões sucessivas:

$$\begin{aligned}84 &= 30 \cdot 2 + 24, \\30 &= 24 \cdot 1 + 6, \\24 &= 6 \cdot 4 + 0.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Como o último resto não nulo é 6, conclui-se que

$$(84, 30) = 6.$$

Na sequência, serão apresentadas aplicações do Algoritmo de Euclides em situações-problema, cujas resoluções serão conduzidas mediante o método das divisões sucessivas, evidenciando a operacionalização do procedimento no cálculo do máximo divisor comum.

Exemplo 3.30. Joana está preparando kits de doces para distribuir entre alguns convidados. Há 36 brigadeiros e 42 cajuzinhos. Ela deseja separá-los em pratos, de modo a utilizar a menor quantidade possível de pratos, garantindo que todos tenham a mesma quantidade de doces e sem misturar os tipos. Determine quantos doces devem ser colocados em cada prato e quantos pratos serão necessários para cada tipo de doce.

Para que todos os pratos tenham a mesma quantidade de doces e seja utilizado o menor número possível de pratos, é necessário determinar o máximo divisor comum entre 36 e 42.

Aplicando o Algoritmo de Euclides, temos:

$$42 = 36 \cdot 1 + 6$$

$$36 = 6 \cdot 6 + 0$$

Como o último resto não nulo é 6, segue que:

$$(42, 36) = 6$$

Ou seja, Joana deverá colocar **6 doces em cada prato**.

Logo,

$$36 \text{ brigadeiros} \Rightarrow 36 \div 6 = 6 \text{ pratos}$$

$$42 \text{ cajuzinhos} \Rightarrow 42 \div 6 = 7 \text{ pratos}$$

Exemplo 3.31. Um evento de corrida de equipes irá acontecer no próximo final de semana. Ao todo, 88 pessoas se inscreveram, sendo 60 mulheres e 28 homens. Para as duas modalidades, feminina e masculina, as equipes devem possuir sempre o mesmo e o maior número possível de atletas, sem misturar homens e mulheres em uma mesma equipe. Determinar o número de atletas em cada equipe.

Para que as equipes tenham o mesmo e o maior número possível de atletas, é necessário determinar o máximo divisor comum entre 60 e 28.

Aplicando o Algoritmo de Euclides, temos:

$$60 = 28 \cdot 2 + 4$$

$$28 = 4 \cdot 7 + 0$$

Como o último resto não nulo é 4, conclui-se que:

$$(60, 28) = 4$$

Ou seja, O número de atletas em cada equipe será de **4**.

Exemplo 3.32. Três alunos resolveram dividir encomendas de sabonetes idênticos para compradores diferentes. Um pedido contém 72 sabonetes e o outro 28 sabonetes. Deseja-se acondicionar os sabonetes em embalagens idênticas, com a mesma quantidade de sabonetes em cada uma, de modo a utilizar o maior número possível

de sabonetes por embalagem. Determinar quantos sabonetes devem ser colocados em cada embalagem?

Para resolver o problema, determinamos o máximo divisor comum entre 72 e 28 por meio do Algoritmo de Euclides Estendido, que além de calcular o MDC, permite escrevê-lo como combinação linear desses números.

Aplicando o Algoritmo de Euclides, temos:

$$72 = 28 \cdot 2 + 16,$$

$$28 = 16 \cdot 1 + 12,$$

$$16 = 12 \cdot 1 + 4,$$

$$12 = 4 \cdot 3 + 0.$$

Logo,

$$(72, 28) = 4.$$

Agora, reescrevemos o último resto não nulo como combinação linear de 72 e 28. Da terceira divisão,

$$4 = 16 - 12.$$

Da segunda divisão, temos

$$12 = 28 - 16,$$

logo,

$$4 = 16 - (28 - 16) = 2 \cdot 16 - 28.$$

Da primeira divisão,

$$16 = 72 - 2 \cdot 28.$$

Substituindo, obtemos

$$4 = 2(72 - 2 \cdot 28) - 28 = 2 \cdot 72 - 5 \cdot 28.$$

Assim, existem inteiros x e y tais que

$$4 = 2 \cdot 72 - 5 \cdot 28.$$

Conclusão. O máximo divisor comum entre 72 e 28 é 4, de modo que devem ser colocados **4 sabonetes em cada embalagem**.

Ao longo dos capítulos anteriores, buscou-se construir uma base teórica sólida para a compreensão do ensino da divisibilidade e do máximo divisor comum,

articulando diferentes dimensões do conhecimento matemático e pedagógico. Inicialmente, apresentou-se o desenvolvimento histórico da Matemática, com ênfase na constituição da Aritmética desde suas origens empíricas até sua sistematização dedutiva na Grécia Antiga, destacando-se o papel do Algoritmo de Euclides como expressão paradigmática da racionalidade matemática. Em seguida, analisaram-se as orientações dos documentos curriculares brasileiros, especialmente a Base Nacional Comum Curricular e os Parâmetros Curriculares Nacionais, evidenciando a centralidade da Aritmética na formação matemática e a necessidade de práticas pedagógicas que priorizem a compreensão conceitual, a resolução de problemas e o desenvolvimento do pensamento lógico. Posteriormente, aprofundou-se o estudo da divisibilidade sob o ponto de vista da Matemática formal, contemplando suas definições, propriedades e relações estruturais, de modo a fundamentar teoricamente o ensino do máximo divisor comum e do Algoritmo de Euclides.

Diante desse percurso, torna-se necessário explicitar os caminhos metodológicos que orientam a construção da proposta didática apresentada neste trabalho. Assim, o capítulo seguinte dedica-se à descrição da natureza da pesquisa, de seus fundamentos metodológicos e da organização da sequência didática proposta, evidenciando a articulação entre os referenciais teóricos discutidos e sua aplicação no contexto do ensino da Matemática. Busca-se, desse modo, estabelecer uma ponte consistente entre teoria e prática, assegurando que a proposta pedagógica esteja epistemologicamente fundamentada e didaticamente estruturada.

Metodologia

4.1 Caracterização da Pesquisa

Esta pesquisa caracteriza-se como qualitativa, de natureza teórico-propositiva, com abordagem exploratória e descritiva. Tal delineamento metodológico mostra-se adequado ao objetivo central do estudo, que consiste na elaboração, sistematização e fundamentação de uma proposta de ensino voltada à compreensão do máximo divisor comum (MDC), a partir do Algoritmo de Euclides e do uso de materiais manipuláveis, em especial como estratégia para favorecer a construção de significados matemáticos.

A opção pela abordagem qualitativa justifica-se pelo fato de que este tipo de investigação privilegia a compreensão dos fenômenos educacionais em sua complexidade, considerando os processos de ensino e aprendizagem em sua dimensão dinâmica, contextual e interpretativa. Diferentemente de abordagens quantitativas, que se concentram na mensuração e generalização de resultados, a pesquisa qualitativa permite analisar, de maneira aprofundada, os fundamentos teóricos que sustentam práticas pedagógicas, bem como as potencialidades didáticas de determinadas propostas de ensino.

No que se refere à natureza teórico-propositiva, destaca-se que o estudo não se limita à análise de dados empíricos, mas dedica-se à construção de uma proposta didática fundamentada em referenciais consolidados da Educação Matemática. Nesse sentido, busca-se articular contribuições de teorias da aprendizagem e de abordagens didáticas que valorizam a compreensão conceitual, a mediação pedagógica e o papel ativo do estudante na construção do conhecimento matemático.

A abordagem exploratória evidencia-se na medida em que o estudo investiga possibilidades de ensino do MDC para além dos métodos tradicionais, frequentemente marcados por procedimentos mecânicos e descontextualizados. Ao explorar o uso do Algoritmo de Euclides em conjunto com materiais manipuláveis, pretende-se ampliar as formas de abordagem desse conteúdo, favorecendo uma compreensão mais significativa e conceitualmente estruturada.

Por sua vez, o caráter descritivo manifesta-se na sistematização detalhada da proposta pedagógica elaborada, contemplando a organização de uma sequência didática, a definição de objetivos de aprendizagem, a descrição das atividades, dos recursos didáticos e das estratégias de mediação docente. Tal descrição busca oferecer subsídios para que a proposta possa ser compreendida, analisada e, eventualmente, adaptada a diferentes contextos educacionais.

Ressalta-se que o presente estudo não envolve aplicação empírica em contexto de sala de aula, configurando-se, portanto, como uma investigação centrada na elaboração teórica de uma sequência didática. Ainda assim, a proposta é construída de modo a dialogar com a prática docente, considerando situações plausíveis de ensino e aprendizagem, bem como as orientações curriculares vigentes.

Por fim, destaca-se que a construção da proposta fundamenta-se em referenciais teóricos da Educação Matemática que enfatizam a aprendizagem significativa, a mediação pedagógica e o uso de recursos didáticos como instrumentos de construção do conhecimento. Nesse sentido, a sequência didática proposta busca promover a transição do concreto ao abstrato, permitindo que o estudante compreenda o Algoritmo de Euclides não apenas como um procedimento operacional, mas como uma construção lógica fundamentada em propriedades matemáticas.

4.2 Fundamentação Teórica da Proposta

A construção da sequência didática fundamenta-se em três eixos teóricos principais: a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, a perspectiva histórico-cultural de Vygotsky e as contribuições de Dante para o ensino de Matemática por meio da resolução de problemas. A articulação desses referenciais permite estruturar uma proposta pedagógica que valoriza a construção ativa do conhecimento, a mediação docente e a compreensão conceitual dos conteúdos matemáticos.

Segundo [Ausubel 2003], a aprendizagem torna-se significativa quando novas informações estabelecem relações não arbitrárias e substantivas com conhecimentos previamente existentes na estrutura cognitiva do sujeito, denominados subsunçores. Nessa perspectiva, o ensino deve partir de ideias já consolidadas pelos estudantes, favorecendo a ancoragem de novos conceitos. No contexto desta pesquisa, a utilização de materiais manipuláveis, como os feijões, constitui uma estratégia didática que possibilita a construção de significados a partir de experiências concretas, funcionando como elemento mediador entre o conhecimento intuitivo e a formalização matemática. Assim, busca-se promover uma transição gradual do concreto ao abstrato, essencial para a compreensão do máximo divisor comum e do Algoritmo de Euclides.

Sob a perspectiva histórico-cultural, [Vygotsky 2008] destaca o papel central da mediação pedagógica e das interações sociais no desenvolvimento cognitivo. O autor enfatiza que a aprendizagem ocorre inicialmente no plano social (interpsicológico), para posteriormente se internalizar no plano individual (intrapsicológico). Nesse sentido, a noção de zona de desenvolvimento proximal (ZDP) torna-se fundamental, pois evidencia o potencial de aprendizagem que pode ser alcançado com o auxílio de um mediador mais experiente. A organização das atividades em grupos, proposta nesta sequência didática, visa potencializar tais interações, favorecendo a troca de estratégias, a argumentação e a construção coletiva do conhecimento matemático.

As contribuições de [Dante 2012] reforçam a importância da resolução de problemas como eixo estruturador do ensino de Matemática. Ao propor situações que desafiem os estudantes a pensar, investigar e argumentar, essa abordagem rompe com práticas tradicionais centradas na repetição de procedimentos mecânicos. No contexto desta proposta, a resolução de problemas é concebida como um meio para desenvolver o raciocínio lógico, a autonomia intelectual e a capacidade de generalização, aspectos essenciais para a compreensão do Algoritmo de Euclides não apenas como um procedimento operacional, mas como um processo lógico fundamentado em propriedades matemáticas.

Dessa forma, a integração desses três referenciais teóricos sustenta uma proposta didática que valoriza a construção de significados, a interação social e a problematização como elementos centrais do processo de ensino e aprendizagem, contribuindo para uma abordagem mais compreensiva e significativa dos conceitos de divisibilidade e máximo divisor comum.

4.3 Descrição da Sequência Didática

A sequência didática proposta foi elaborada para turmas do 7^o ano do Ensino Fundamental, em consonância com as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), especialmente no que se refere ao desenvolvimento do pensamento algébrico e à compreensão das propriedades dos números naturais [BRASIL 2018]. Destacam-se, nesse contexto, habilidades relacionadas à análise de regularidades, à generalização de padrões e ao estudo das relações de divisibilidade, fundamentais para a compreensão do máximo divisor comum.

A proposta está organizada em três aulas de 50 minutos, nas quais os estudantes são distribuídos em grupos de três a quatro participantes. Essa organização visa favorecer a interação social e a construção coletiva do conhecimento, conforme pressupostos da perspectiva histórico-cultural [Vygotsky 2008]. As atividades utili-

zam feijões como material manipulável, com o objetivo de representar concretamente processos de agrupamento, divisibilidade e cálculo do máximo divisor comum, possibilitando a construção de significados a partir da experiência prática [Ausubel 2003].

A utilização de materiais manipuláveis, nesse contexto, não se restringe a um recurso ilustrativo, mas constitui um elemento estruturante do processo de aprendizagem, favorecendo a transição do pensamento concreto ao abstrato e contribuindo para a compreensão conceitual dos conteúdos matemáticos. Tal abordagem está alinhada às orientações didáticas que valorizam a experimentação, a investigação e a resolução de problemas como estratégias de ensino [Dante 2012].

O professor assume o papel de mediador do processo de aprendizagem, orientando as atividades, incentivando a argumentação e promovendo a sistematização dos conhecimentos construídos pelos estudantes. Essa mediação é essencial para que as experiências vivenciadas nas atividades sejam progressivamente formalizadas, permitindo que os estudantes avancem em direção à compreensão do Algoritmo de Euclides como um procedimento fundamentado em propriedades matemáticas e não apenas como uma técnica operatória.

Por fim, destaca-se que a sequência didática busca articular momentos de exploração, discussão e formalização, promovendo um ambiente de aprendizagem que valoriza a participação ativa dos estudantes e o desenvolvimento do raciocínio lógico, em consonância com os princípios da BNCC e com abordagens contemporâneas da Educação Matemática.

4.4 Estrutura da Sequência Didática

A sequência didática está organizada em três momentos articulados:

4.4.1 Exploração Empírica

Neste primeiro momento, os estudantes realizam atividades práticas com feijões, organizando-os em grupos de diferentes tamanhos, com o objetivo de identificar divisores de números naturais. Essa etapa visa mobilizar conhecimentos prévios e promover a construção inicial do conceito de divisibilidade, favorecendo a ancoragem de novos conteúdos em estruturas cognitivas já existentes, conforme os pressupostos da aprendizagem significativa [Ausubel 2003].

A exploração concreta por meio da manipulação de materiais possibilita que os estudantes estabeleçam relações entre a ação prática e a construção conceitual, permitindo compreender a divisibilidade como resultado de agrupamentos exatos, sem a presença de sobras. Nesse sentido, os feijões funcionam como mediadores didá-

ticos, facilitando a transição do pensamento intuitivo para formas mais elaboradas de raciocínio matemático.

Além disso, a organização das atividades em pequenos grupos favorece a interação social, a troca de ideias e a construção coletiva de estratégias, aspectos centrais na perspectiva histórico-cultural do desenvolvimento humano [Vygotsky 2008]. A partir dessas interações, os estudantes são incentivados a explicitar seus raciocínios, comparar procedimentos e validar resultados, o que contribui para o desenvolvimento da argumentação matemática.

Nesse momento inicial, o professor assume um papel fundamental como mediador, observando as estratégias utilizadas pelos estudantes, propondo questionamentos e orientando a sistematização das ideias emergentes. Tal mediação é essencial para conduzir os estudantes à percepção de regularidades nos agrupamentos realizados, favorecendo a identificação dos divisores e preparando o terreno para a formalização posterior dos conceitos envolvidos.

Dessa forma, essa etapa inicial configura-se como um momento de investigação e exploração, no qual o foco não está na aplicação de algoritmos, mas na construção de significados, constituindo base essencial para o desenvolvimento das etapas subsequentes da sequência didática.

4.4.2 Identificação de Regularidades

Na segunda etapa, os estudantes analisam os resultados obtidos nas atividades anteriores, buscando identificar padrões e regularidades relacionadas aos divisores comuns entre diferentes números. Esse processo de comparação e reflexão favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e da capacidade de generalização, permitindo que os estudantes avancem de uma compreensão empírica para uma organização mais sistematizada dos conceitos matemáticos.

A partir da observação dos agrupamentos realizados, os estudantes são conduzidos a perceber que determinados números compartilham divisores comuns, o que possibilita a construção inicial da ideia de máximo divisor comum. Nesse contexto, o professor atua como mediador, orientando as discussões, incentivando a argumentação e promovendo a sistematização das regularidades identificadas, preparando o caminho para a formalização do conceito nas etapas seguintes.

4.4.3 Formalização do Algoritmo de Euclides

No terceiro momento, ocorre a sistematização do conhecimento, com a introdução formal do Algoritmo de Euclides como método para determinação do máximo divisor comum. A partir das regularidades identificadas nas etapas

anteriores, os estudantes são conduzidos à compreensão do algoritmo como um procedimento estruturado, baseado em divisões sucessivas, que permite determinar o maior divisor comum entre dois números naturais.

Nesse processo, a transição do concreto para o abstrato é mediada pelo professor, que retoma as experiências realizadas com os materiais manipuláveis e as articula com a linguagem simbólica da Matemática. Os estudantes são incentivados a compreender não apenas as etapas do procedimento, mas também o significado das operações envolvidas, reconhecendo a relação entre os restos obtidos nas divisões e a preservação dos divisores comuns.

Além disso, esse momento busca promover a formalização do conceito, permitindo que os estudantes avancem da experimentação para a generalização. O professor orienta a organização dos registros, a explicitação das ideias e a construção de uma síntese conceitual, consolidando o Algoritmo de Euclides como um método eficiente e fundamentado para o cálculo do máximo divisor comum.

4.5 Procedimentos de Avaliação

Na segunda etapa, os estudantes analisam os resultados obtidos nas atividades anteriores, buscando identificar padrões e regularidades relacionadas aos divisores comuns entre diferentes números. Esse processo de análise e comparação favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e da capacidade de generalização, aspectos essenciais para a consolidação do pensamento matemático.

A partir da observação dos agrupamentos realizados, os estudantes são conduzidos a perceber que determinados números compartilham divisores comuns, o que possibilita a introdução, de forma intuitiva, da ideia de máximo divisor comum. Nesse momento, ocorre a transição do conhecimento empírico para uma compreensão mais sistematizada, à medida que os estudantes passam a estabelecer relações entre diferentes situações e a organizar suas conclusões.

Além disso, a interação entre os estudantes desempenha papel central nesse processo, pois a troca de ideias e a argumentação coletiva contribuem para a organização do pensamento e para a construção do conhecimento. O professor atua como mediador, orientando as discussões, propondo questionamentos e auxiliando na sistematização das regularidades identificadas, preparando o caminho para a formalização do conceito de máximo divisor comum nas etapas subsequentes.

Adicionalmente, esse momento favorece o desenvolvimento da linguagem matemática, na medida em que os estudantes são incentivados a expressar suas ideias com maior precisão, utilizando termos e representações adequadas. A verbalização dos procedimentos e a organização dos registros escritos contribuem para a

consolidação dos conceitos trabalhados, permitindo que os estudantes avancem na construção de um pensamento matemático mais estruturado e comunicável.

4.6 Limitações da Pesquisa

Como limitação do estudo, destaca-se a ausência de aplicação da sequência didática em contexto real de sala de aula, o que impossibilita a realização de análises empíricas acerca de seus impactos no processo de aprendizagem dos estudantes. Nesse sentido, não foi possível observar, de forma direta, as interações em sala, as estratégias adotadas pelos alunos nem as possíveis dificuldades emergentes durante a execução das atividades propostas.

Dessa forma, a proposta apresentada configura-se como um modelo teórico, passível de adaptação, aplicação e validação em investigações futuras que contemplem sua implementação em contextos educacionais reais. Espera-se que estudos posteriores possam analisar sua efetividade, bem como propor ajustes e aprimoramentos a partir de evidências empíricas, contribuindo para o fortalecimento de práticas pedagógicas no ensino de Matemática.

4.7 Considerações Metodológicas Finais

A metodologia adotada busca articular fundamentos teóricos e organização didática, resultando na elaboração de uma proposta estruturada para o ensino da divisibilidade e do máximo divisor comum. Tal articulação evidencia a preocupação em integrar conhecimentos matemáticos e pedagógicos, de modo a favorecer uma abordagem que vá além da simples aplicação de procedimentos, priorizando a compreensão conceitual dos conteúdos.

Espera-se que esta sequência didática possa contribuir para a superação de abordagens mecanizadas no ensino de Matemática, promovendo uma aprendizagem mais significativa e contextualizada. Além disso, pretende-se que a proposta sirva como subsídio para a prática docente e como base para futuras pesquisas e aplicações em sala de aula, possibilitando sua adaptação a diferentes realidades educacionais.

Ao longo dos capítulos anteriores, buscou-se construir uma base teórica consistente para a compreensão do ensino da divisibilidade e do máximo divisor comum, articulando diferentes dimensões do conhecimento matemático e pedagógico. Inicialmente, apresentou-se o desenvolvimento histórico da Aritmética, com ênfase na sistematização promovida por Euclides nos Livros VII, VIII e IX dos *Elementos*, evidenciando a transição de práticas empíricas para uma abordagem dedutiva e rigorosa.

Na sequência, discutiram-se os fundamentos teóricos da aprendizagem, com destaque para a teoria da aprendizagem significativa e para a perspectiva histórico-cultural, enfatizando o papel da mediação, da interação e da construção de significados no processo educativo. Tais referenciais foram articulados às contribuições da resolução de problemas como estratégia didática, reforçando a importância de práticas que estimulem o raciocínio, a investigação e a autonomia dos estudantes.

Posteriormente, analisaram-se as orientações curriculares vigentes, com base na Base Nacional Comum Curricular, destacando-se as competências e habilidades relacionadas ao ensino da divisibilidade no Ensino Fundamental, bem como a necessidade de abordagens que superem a aprendizagem mecânica e promovam a compreensão conceitual.

Diante desse percurso teórico, torna-se necessário explicitar os caminhos metodológicos adotados para a elaboração da proposta didática apresentada neste trabalho. Assim, o presente capítulo tem como objetivo descrever a natureza da pesquisa, seus fundamentos metodológicos e a organização da sequência didática proposta, evidenciando a articulação entre teoria e prática no contexto do ensino da Matemática.

Adicionalmente, são delineados os princípios que orientam a construção da proposta pedagógica, a qual será detalhada no capítulo seguinte, no qual se apresenta o produto educacional resultante desta investigação, consolidando o percurso formativo e investigativo desenvolvido ao longo do estudo.

O Jogo

5.1 Apresentação do Produto Educacional

Este Produto Educacional consiste em um jogo pedagógico de tabuleiro estruturado, intitulado *O Algoritmo de Euclides e os Feijões*, desenvolvido pelo autor com o objetivo de apoiar o ensino de divisibilidade, divisão euclidiana e máximo divisor comum (MDC) no 7^o ano do Ensino Fundamental. O tabuleiro pode ser confeccionado nas dimensões do conjunto CJA 6–FNDE (60 cm × 45 cm), favorecendo sua utilização em ambiente escolar e garantindo melhor visualização e interação entre os estudantes.



Figura 5.1: Conjunto FNDE - CJA 06

É mister destacar que o jogo “O Algoritmo de Euclides e os Feijões” pode ser caracterizado como um jogo educativo formalizado de natureza pedagógica, uma vez que não se configura como adaptação de um jogo preexistente, mas como uma proposta original, concebida com elevado grau de ineditismo e intencionalidade didática. Tal recurso foi planejado com o propósito de desenvolver habilidades cognitivas específicas, sobretudo aquelas relacionadas aos conceitos de divisibilidade e máximo

divisor comum, articulando a manipulação concreta à progressiva formalização matemática. Nessa perspectiva, o jogo preserva, em sua essência, o papel instrucional, constituindo-se como uma estratégia de ensino cuidadosamente estruturada para favorecer a autorreflexão dos estudantes acerca de seus próprios processos de aprendizagem, conduzindo-os a uma postura mais ativa, crítica e significativa. Ademais, mantém o caráter lúdico inerente às atividades dessa natureza, sem dissociá-lo dos objetivos formativos, conforme destacam [Cleophas, Cavalcanti e Soares 2018] (p. 39)

A proposta fundamenta-se no uso de material concreto, especificamente feijões, como recurso didático para favorecer a construção de significado dos conceitos matemáticos abordados. A exploração com os feijões permite que os estudantes visualizem agrupamentos, realizem retiradas sucessivas e compreendam, de maneira concreta, o processo de divisão euclidiana e a determinação do máximo divisor comum. Dessa forma, o jogo articula ludicidade, experimentação e formalização conceitual, contribuindo para a construção progressiva do raciocínio matemático.

Ressalta-se que, embora o produto possa ser confeccionado em formato estruturado, o docente poderá adaptá-lo conforme a realidade da escola, utilizando materiais simples e de fácil acesso, como cartolina, EVA, papel pardo ou outros recursos disponíveis. Também é possível desenhar o tabuleiro em espaços externos, como pátios ou calçadas, utilizando giz, ampliando as possibilidades metodológicas e tornando a atividade ainda mais dinâmica e participativa. Essa flexibilidade reforça o caráter acessível e replicável da proposta, permitindo sua implementação em diferentes contextos educacionais.

Do ponto de vista pedagógico, o jogo articula atividades lúdicas, investigação matemática e momentos de sistematização conceitual, promovendo a participação ativa dos estudantes e a construção progressiva do conhecimento. A experiência empírica dos feijões possibilita a visualização concreta das relações de divisibilidade e do processo de divisão euclidiana, favorecendo a compreensão das operações envolvidas. Paralelamente, a mediação docente orienta a transição do registro concreto para a linguagem matemática simbólica formal, culminando na compreensão estruturada do máximo divisor comum e do Algoritmo de Euclides.

O Produto Educacional encontra-se em consonância com as orientações da Base Nacional Comum Curricular, ao priorizar o desenvolvimento do raciocínio lógico, da resolução de problemas e da argumentação matemática. Além disso, valoriza práticas pedagógicas que integrem múltiplas representações — concreta, pictórica e simbólica — que podem favorecer a integração significativa de novos conhecimentos e a consolidação conceitual. Nesse sentido, o jogo configura-se como instrumento didático que articula teoria, prática e currículo, contribuindo para o

fortalecimento do ensino de Matemática no Ensino Fundamental e para a superação de abordagens meramente mecanicistas.

5.2 Público-alvo

O produto destina-se prioritariamente a estudantes do 7^o ano do Ensino Fundamental, etapa em que se aprofundam os estudos relacionados à divisibilidade, aos múltiplos, aos divisores e ao máximo divisor comum. Além disso, dirige-se a professores de Matemática da Educação Básica que buscam estratégias didáticas capazes de articular ludicidade, uso de materiais manipuláveis e formalização conceitual, promovendo uma aprendizagem mais significativa e reflexiva.

A proposta fundamenta-se na integração entre experimentação concreta e sistematização simbólica, favorecendo a compreensão gradual dos conceitos aritméticos. O uso de recursos como feijões e outros objetos discretos possibilita a visualização de agrupamentos, repartições e processos de redução sucessiva, contribuindo para que os estudantes compreendam as propriedades da divisibilidade não apenas como procedimentos operatórios, mas como relações estruturais entre números naturais.

Embora estruturado com foco no 7^o ano, o material apresenta caráter flexível, podendo ser adaptado a diferentes contextos pedagógicos. Dessa forma, pode ser utilizado como instrumento de revisão, reforço ou aprofundamento em outras etapas da escolarização, inclusive no Ensino Médio, sempre que se fizer necessário retomar e consolidar conceitos fundamentais da Aritmética.

5.3 Objetivos do Produto

5.3.1 Objetivo geral

Promover a compreensão dos conceitos de divisibilidade e do Algoritmo de Euclides por meio de um jogo educativo baseado em material concreto, estimulando o raciocínio lógico, a argumentação matemática e a participação ativa dos estudantes no processo de aprendizagem.

5.3.2 Objetivos específicos

- Compreender a divisão como repartição e medida;
- Reconhecer relações de divisibilidade entre números naturais;
- Determinar o máximo divisor comum de dois números naturais;
- Vivenciar o Algoritmo de Euclides de forma concreta e progressiva;

- Relacionar a experiência lúdica à formalização matemática.

5.4 Alinhamento à Base Nacional Comum Curricular

O Produto Educacional está alinhado à Unidade Temática *Números*, prevista para o 7º ano do Ensino Fundamental, contemplando as seguintes habilidades da BNCC:

- **EF07MA01:** Resolver e elaborar problemas envolvendo múltiplos e divisores, incluindo máximo divisor comum (MDC) e mínimo múltiplo comum (MMC);
- **EF07MA02:** Reconhecer e utilizar relações de divisibilidade entre números naturais;
- **EF07MA03:** Resolver problemas que envolvam o cálculo do resto da divisão euclidiana, interpretando seus significados;
- **EF07MA06:** Desenvolver estratégias de cálculo, estimativas e argumentação lógica na resolução de problemas.

5.5 Materiais Necessários

Para a aplicação do jogo, são necessários os seguintes materiais:

- Feijões de duas variedades diferentes - feijões da Região (aproximadamente 100 unidades por grupo, 50 de cada variedade);
- Tabuleiro - JOGO: *Algoritmo de Euclides e os Feijões*;

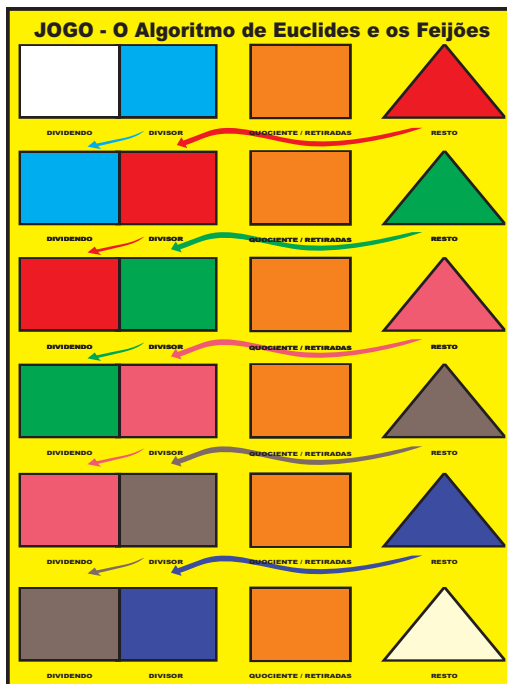


Figura 5.2: Tabuleiro

ESCOLA:				
PROFESSOR(A):				
ALUNO(A):				
	PERSONAGENS DA DIVISÃO			
	DIVIDENDO	DIVISOR	QUOCIENTE	RESTO
A				
B				
C				
D				
E				
F				
G				
H				
I				
J				
K				
L				
M				
N				
O				

Figura 5.3: Tabela de Vivência da Divisibilidade

ESCOLA:				
PROFESSOR(A):				
ALUNO(A):				
PERSONAGENS DO M.D.C				
	DIVIDENDO	DIVISOR	QUOCIENTE	RESTO
A	a =	b =	q ₁ =	r ₁ =
B	b =	r ₁ =	q ₂ =	r ₂ =
C	r ₁ =	r ₂ =	q ₃ =	r ₃ =
D	r ₂ =	r ₃ =	q ₄ =	r ₄ =
E	r ₃ =	r ₄ =	q ₅ =	r ₅ =
F	r ₄ =	r ₅ =	q ₆ =	r ₆ =
G	r ₅ =	r ₆ =	q ₇ =	r ₇ =
H	r ₆ =	r ₇ =	q ₈ =	r ₈ =
I	r ₇ =	r ₈ =	q ₉ =	r ₉ =
J	r ₈ =	r ₉ =	q ₁₀ =	r ₁₀ =
K	r ₉ =	r ₁₀ =	q ₁₁ =	r ₁₁ =
L	r ₁₀ =	r ₁₁ =	q ₁₂ =	r ₁₂ =
M	r ₁₁ =	r ₁₂ =	q ₁₃ =	r ₁₃ =
N	r ₁₂ =	r ₁₃ =	q ₁₄ =	r ₁₄ =
O	r ₁₃ =	r ₁₄ =	q ₁₅ =	r ₁₅ =
M.D.C (_____, _____) = _____				

Figura 5.4: *Personagens do M.D.C*

- Lápis e Borracha.

5.6 Organização Didática

A sequência didática foi concebida para ser desenvolvida ao longo de duas a quatro aulas de cinquenta minutos cada, com a turma organizada em grupos de três a quatro estudantes. Nesse contexto, o professor assume o papel de mediador do processo de aprendizagem, atuando na orientação das atividades propostas, no estímulo à argumentação matemática e na observação sistemática das estratégias mobilizadas pelos alunos durante a resolução das situações-problema.

Essa perspectiva fundamenta-se na concepção sociointeracionista de Lev Vygotsky, para quem o desenvolvimento cognitivo ocorre por meio das interações sociais mediadas culturalmente, sendo a aprendizagem potencializada quando o estudante atua na chamada Zona de Desenvolvimento Proximal, com o apoio de pares mais experientes ou do professor [Vygotsky 2008]. A organização dos estudantes em pequenos grupos favorece a troca de ideias, a negociação de significados e o desenvolvimento da linguagem matemática, aspectos fundamentais para a compreensão dos conceitos de divisibilidade e do Máximo Divisor Comum

Adicionalmente, a proposta articula-se à teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel, ao considerar que a aprendizagem ocorre de forma mais

eficaz quando novos conteúdos são relacionados, de maneira não arbitrária e substantiva, aos conhecimentos prévios já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz (AUSUBEL, 2003). Nesse sentido, o uso de situações-problema contextualizadas e de materiais manipuláveis contribui para a construção de significados matemáticos mais estáveis, favorecendo a compreensão conceitual e a retenção do conhecimento.

5.7 Descrição das Etapas do Jogo

5.7.1 Etapa 1 – Agrupamento e exploração da divisão

Nesta fase inicial da sequência didática, os estudantes recebem uma quantidade previamente definida de feijões, o Tabuleiro- *Jogo: O Algoritmo de Euclides e os feijões* e a *Tabela de Vivência da Divisibilidade*. Compete ao docente indicar os números que serão investigados nesse momento, como, por exemplo, 8, 9 e 12. A partir desses valores, os alunos são orientados a distribuir os feijões em agrupamentos de igual cardinalidade, examinando sistematicamente as condições de divisibilidade.

A proposta consiste em organizar os feijões conforme o número indicado em cada cartão, verificando a possibilidade de constituir agrupamentos completos ou a eventual presença de sobras. As conclusões obtidas devem ser registradas na tabela de vivência de Divisibilidade, de modo a sistematizar as observações realizadas durante a atividade.

O objetivo central desta etapa é promover a compreensão inicial da ideia de divisibilidade a partir da experiência empírica com materiais manipuláveis. Ao distribuir os feijões no *Tabuleiro*, os alunos vivenciam empiricamente as situações de divisão exata e de divisão com resto, construindo progressivamente as noções de divisor, quociente e resto.

O professor atua como mediador do processo, incentivando o diálogo, a formulação de hipóteses e a argumentação matemática, em consonância com a perspectiva sociointeracionista de Lev Vygotsky, que destaca a importância da mediação na construção do conhecimento. Ademais, a atividade favorece a aprendizagem que internalizem significado, conforme defendido por David Ausubel, ao ancorar os novos conceitos em experiências concretas e cognitivamente relevantes.

Como ilustração, apresenta-se a representação da organização dos feijões diretamente no Tabuleiro correspondente aos números 8, 9 e 12, evidenciando a formação — ou não — de agrupamentos completos.

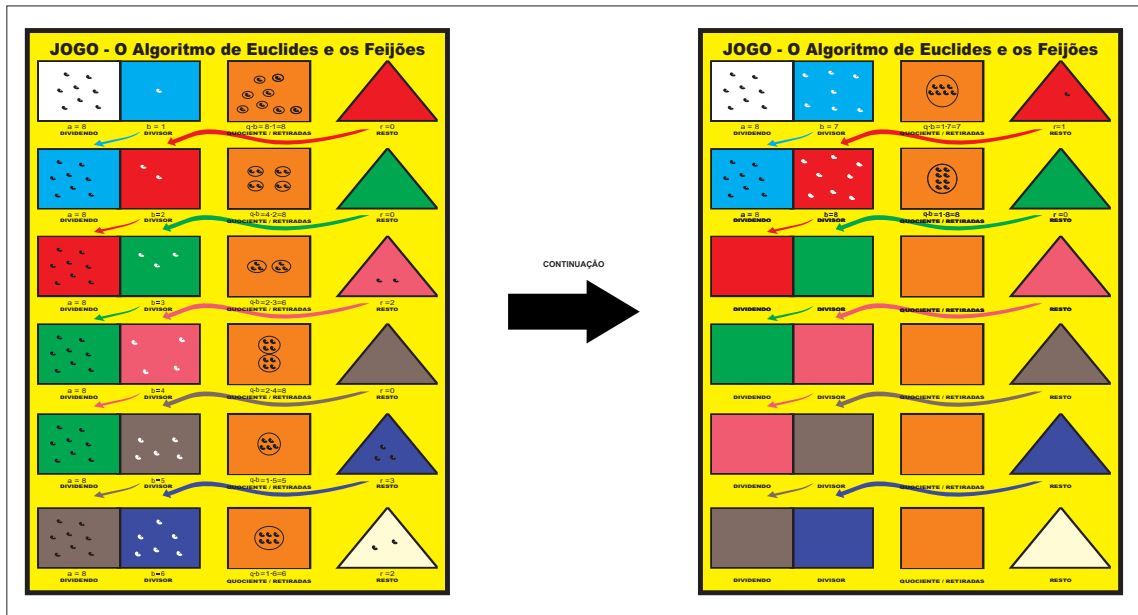


Figura 5.5: Vivência da Divisibilidade do número 8

No caso do número 8, os feijões podem ser organizados em 2 grupos de 4, 4 grupos de 2 ou 8 grupos de 1, sem ocorrência de sobras. Entretanto, ao se tentar distribuí-los em 3, 5 ou 7 grupos de mesma quantidade, verifica-se a presença de resto, o que demonstra que tais números não são divisores de 8. Essa análise permite aos estudantes apreender, de forma concreta, o conceito de divisão exata, compreendida como aquela em que a partição se realiza integralmente, sem excedentes.

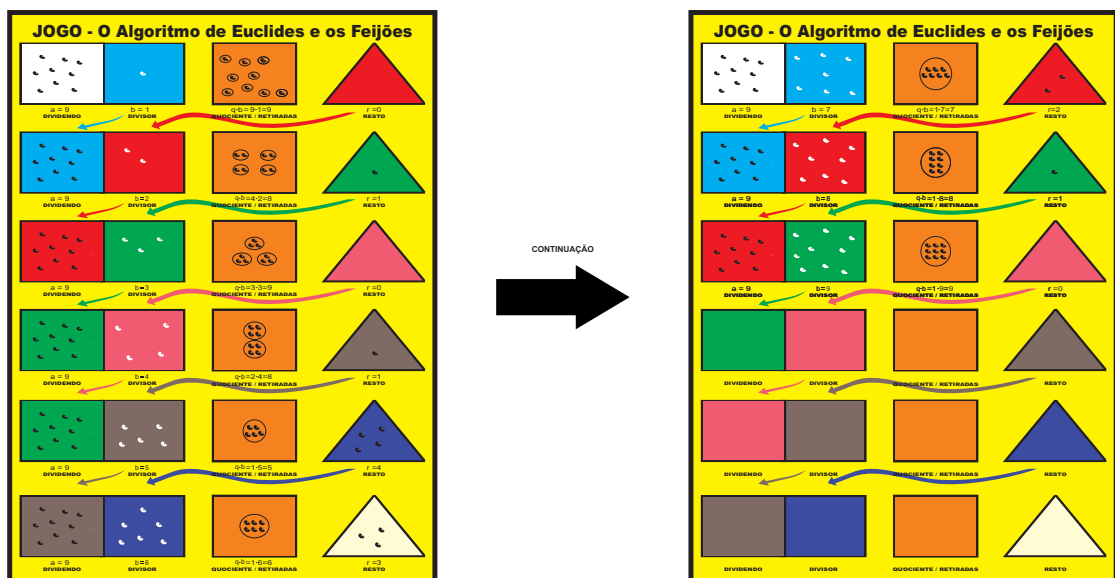


Figura 5.6: Vivência da Divisibilidade do número 9

No caso do número 9, observam-se formações completas quando os feijões

são organizados em 3 grupos de 3 ou em 9 grupos de 1, sem ocorrência de sobras. Entretanto, ao se tentar distribuí-los em 2, 4,5,6,7 ou 8 grupos de igual cardinalidade, constata-se a presença de resto, o que demonstra que tais números não são divisores de 9. Essa verificação contribui para a consolidação da divisibilidade como propriedade vinculada à possibilidade de partição integral, isto é, sem excedentes.

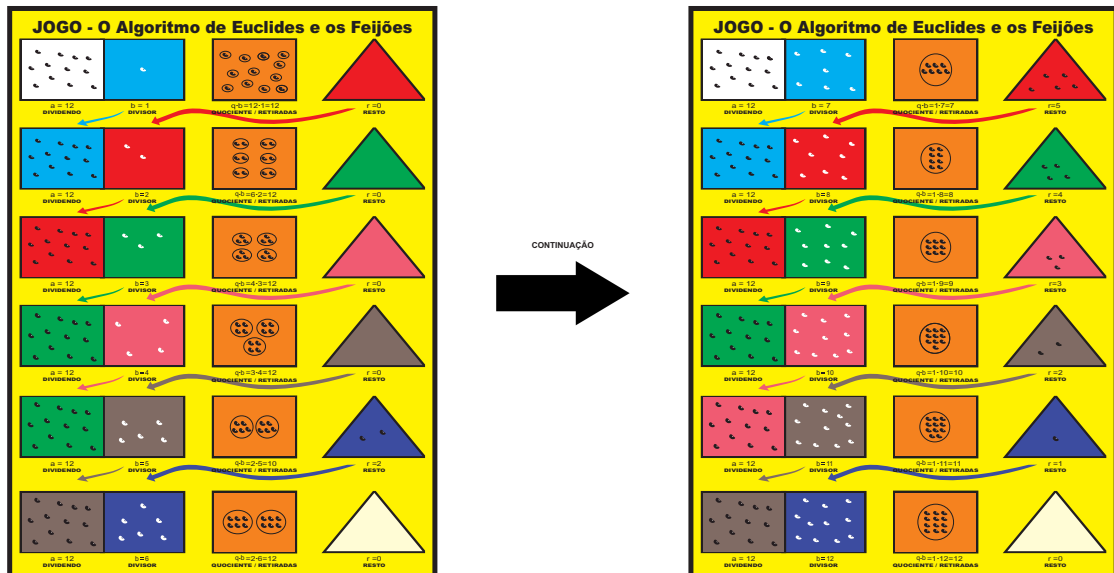


Figura 5.7: Vivência da Divisibilidade do número 12

No caso do número 12, observa-se maior diversidade de agrupamentos completos, tais como 2 grupos de 6, 3 grupos de 4, 4 grupos de 3, 6 grupos de 2 e 12 grupos de 1, sem ocorrência de sobras. Essa variedade favorece a identificação de um conjunto mais amplo de divisores, possibilitando comparações entre os diferentes casos analisados.

A exploração das representações no tabuleiro-base favorece a consolidação do conceito de divisor, ao possibilitar que os estudantes estabeleçam, de forma empírica, a correspondência entre divisibilidade e ausência de resto na partição. Essa compreensão inicial sustenta a posterior sistematização do máximo divisor comum e a introdução do Algoritmo de Euclides.

Trata-se do momento inaugural da sequência didática, em que o conhecimento matemático se estrutura a partir da ação concreta e da experimentação orientada. A manipulação dos feijões antecede a formalização simbólica, constituindo base conceitual consistente para a abordagem do algoritmo da divisão e para o aprofundamento teórico subsequente.

5.7.2 Etapa 2 – Identificação de divisores comuns

Nesta etapa da sequência didática, os grupos trabalham com dois números naturais distintos — por exemplo, 9 e 12 — utilizando os feijões como recurso manipulável para testar, de forma sistemática, os possíveis divisores de cada número.

Por meio da organização dos feijões em agrupamentos de mesma quantidade, os estudantes investigam quais quantidades permitem a divisão exata, isto é, sem ocorrência de resto. No caso do número 9, identificam-se como divisores naturais os números 1, 3 e 9, pois apenas essas quantidades possibilitam a formação de grupos completos. De modo análogo, para o número 12, os estudantes verificam que seus divisores naturais são 1, 2, 3, 4, 6 e 12.

Os resultados obtidos são registrados pelos próprios alunos, que organizam as informações em tabelas ou esquemas comparativos, destacando os divisores comuns aos dois números analisados. Nesse processo, identificam que 1 e 3 são divisores comuns de 9 e 12.

Esse movimento investigativo favorece a construção gradual da noção de divisor comum, uma vez que os estudantes passam a reconhecer regularidades e a estabelecer relações entre diferentes decomposições possíveis de um mesmo conjunto. A mediação do professor é fundamental nesse momento, incentivando a argumentação matemática, a validação coletiva das conclusões e o uso de linguagem adequada, em consonância com a perspectiva sociointeracionista de Lev Vygotsky.

Do ponto de vista pedagógico, essa etapa tem como finalidade preparar conceitualmente os estudantes para a compreensão do máximo divisor comum, ao permitir que percebam, entre os divisores comuns encontrados, aquele de maior valor — neste caso, o número 3. Assim, antes da introdução formal do algoritmo, os alunos constroem a ideia central do conceito a partir da experiência concreta e da reflexão orientada, o que dialoga com a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel.

5.7.3 Etapa 3 - O Jogo: *O Algoritmo de Euclides e os Feijões*

Nesta fase da atividade, os estudantes representam, por meio de feijões, dois números naturais distintos, iniciando o procedimento pelo maior deles. A materialização das quantidades permite que o processo de divisão euclidiana seja experimentado concretamente. A partir dessa representação, realizam-se retiradas sucessivas de agrupamentos cujo tamanho corresponde ao menor número inicialmente considerado, estabelecendo uma correspondência direta entre a ação física de retirar grupos e a operação simbólica da divisão com resto.

No desenvolvimento do procedimento, o número que atua como divisor em uma determinada iteração passa a assumir o papel de dividendo na etapa subsequente, enquanto o resto obtido na repartição anterior torna-se o novo divisor. Esse encadeamento reproduz, no plano concreto, o princípio de invariância do máximo divisor comum, segundo o qual, se

$$a = bq + r,$$

então

$$(a, b) = (b, r).$$

O processo é reiterado sucessivamente até que o resto se torne nulo; nesse momento, identifica-se o último divisor não nulo como o máximo divisor comum dos números inicialmente representados.

Por meio dessa dinâmica, os estudantes vivenciam concretamente o Algoritmo de Euclides, compreendendo-o não como sequência mecânica de operações, mas como construção lógica fundamentada nas propriedades da divisibilidade dos números naturais. A formalização simbólica surge, assim, como sistematização de uma experiência previamente manipulada e analisada.

Para ilustrar esta fase da sequência didática, apresenta-se, a seguir, a dinâmica de determinação do máximo divisor comum dos números trabalhados anteriormente, considerados dois a dois. Em particular, serão analisados os cálculos de $\text{MDC}(9, 8)$, $\text{MDC}(12, 8)$ e $\text{MDC}(12, 9)$, explicitando-se cada etapa do procedimento e a correspondente transição do plano manipulativo para o registro algébrico-formal.

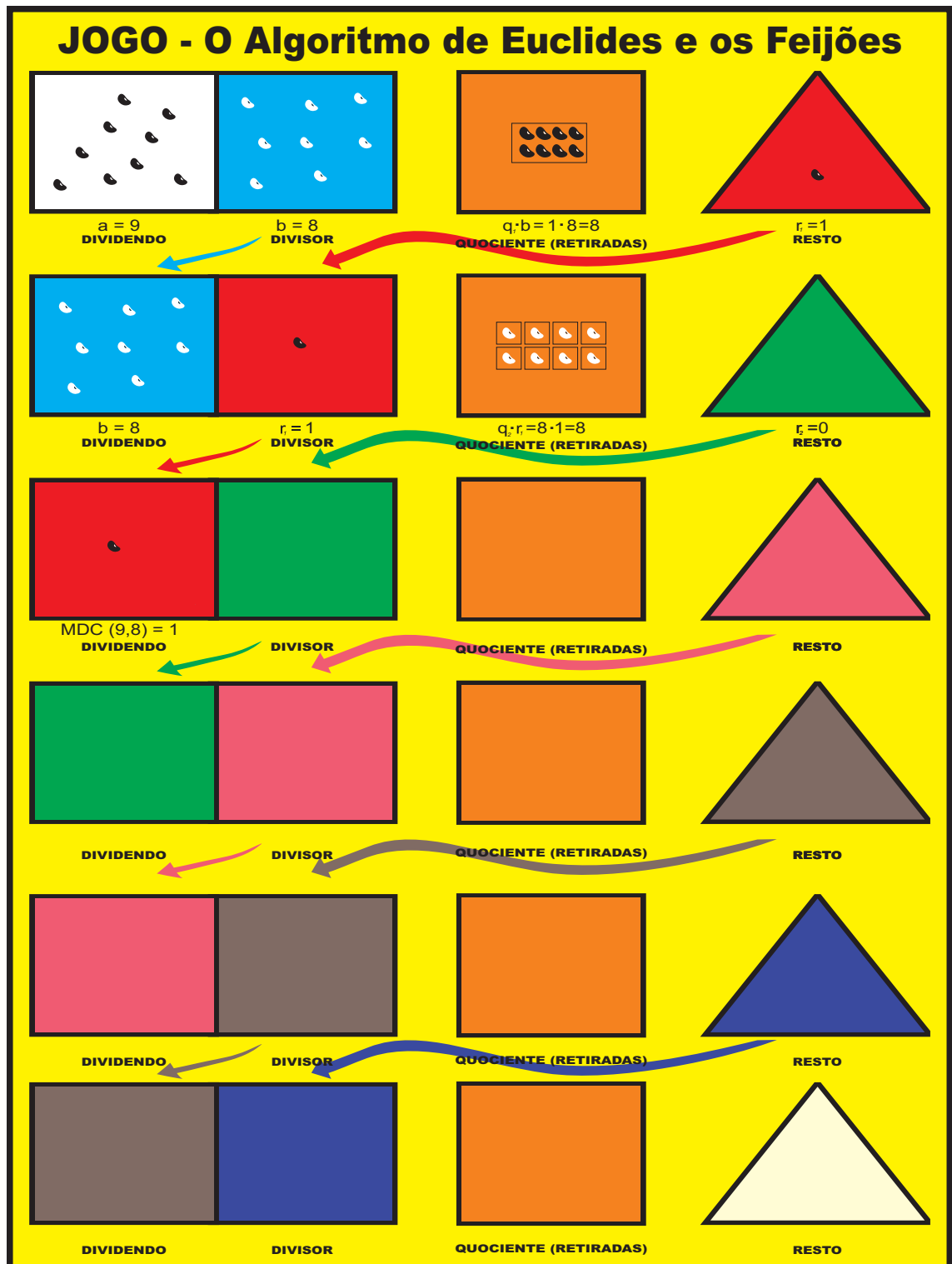


Figura 5.8: (Máximo Divisor Comum - MDC $(9,8)=1$)

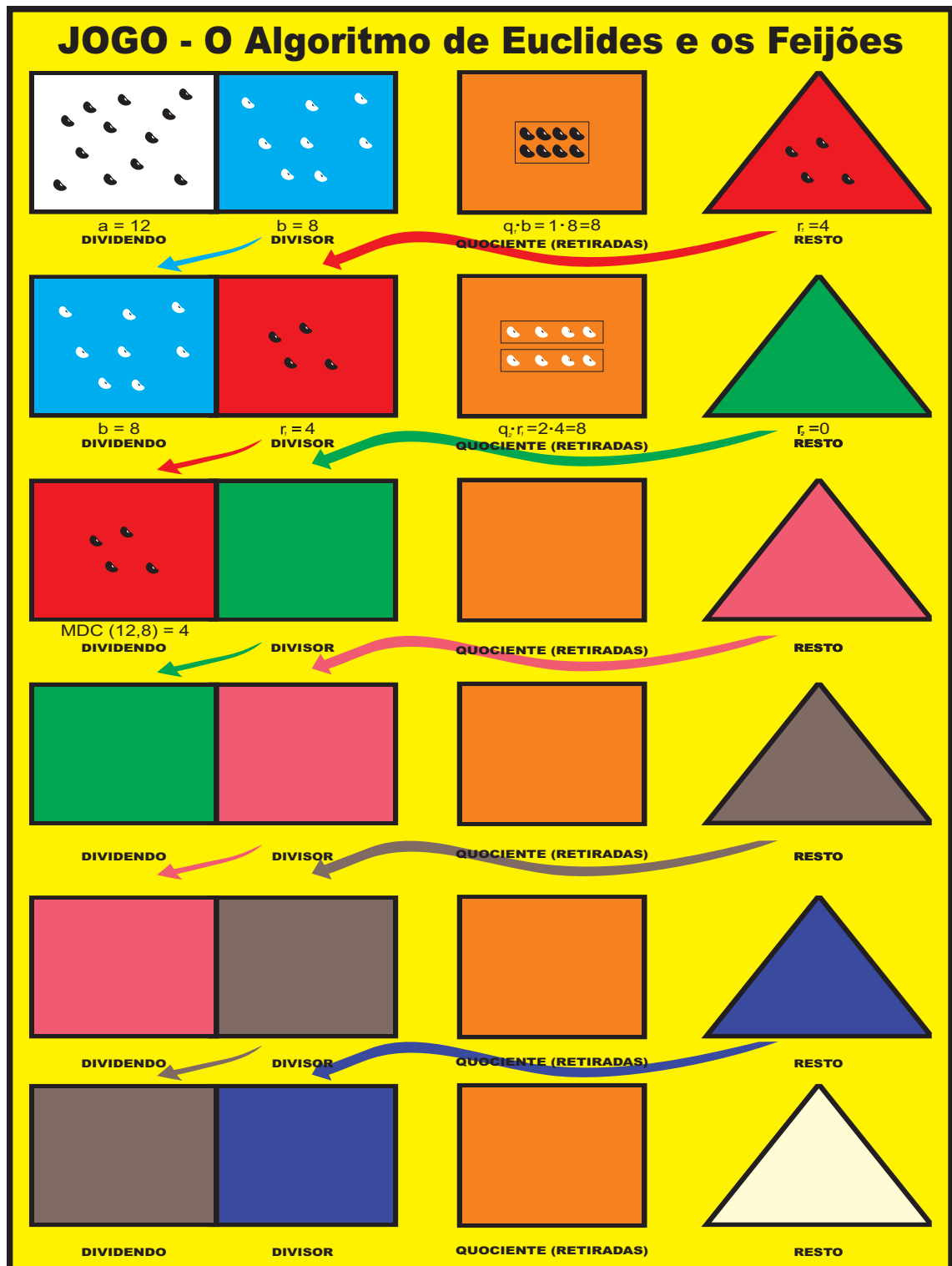


Figura 5.9: (Máximo Divisor Comum - MDC (12,8)=4

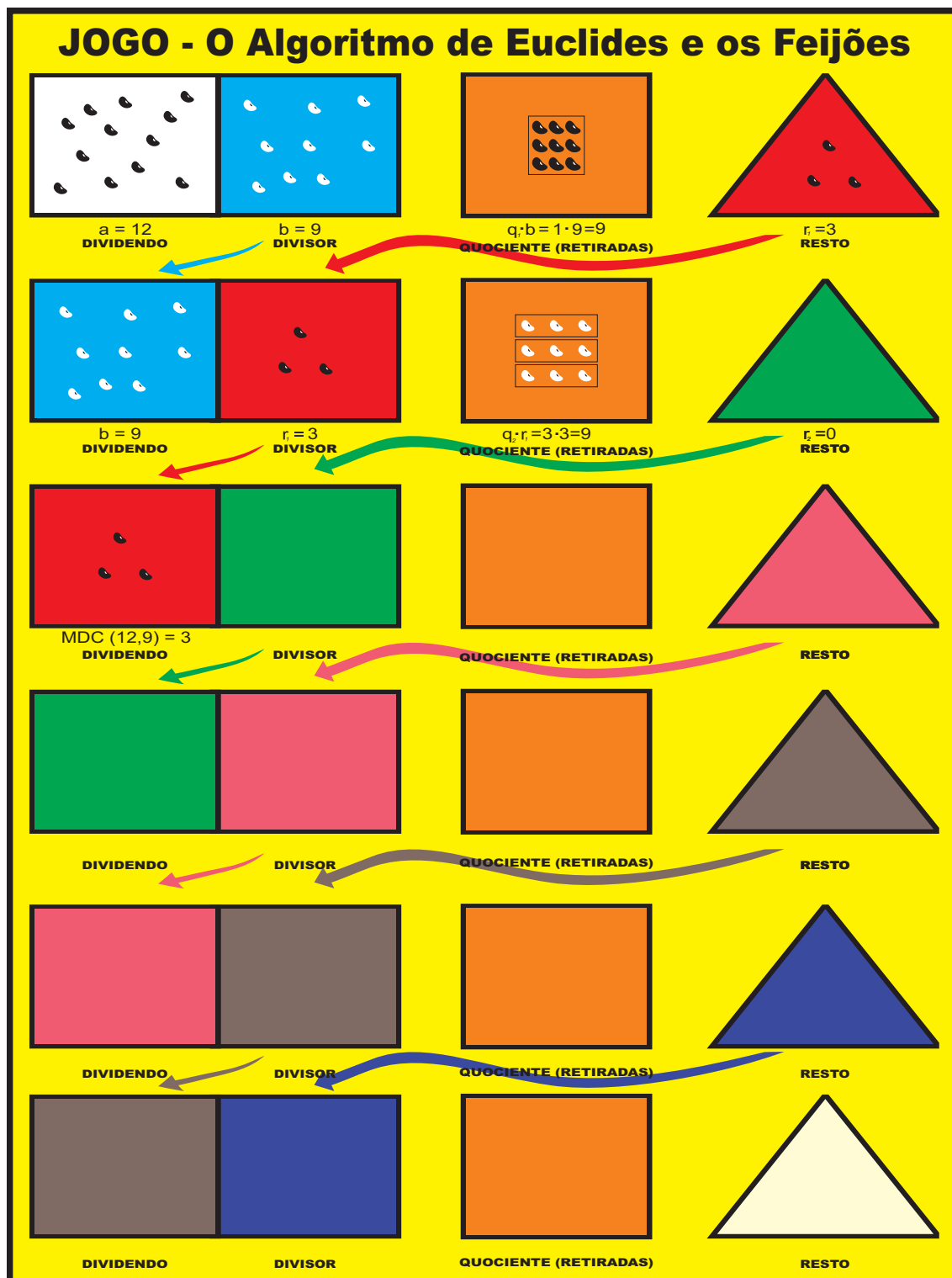


Figura 5.10: (Máximo Divisor Comum - MDC (12,9)=3

Adicionalmente, essa metodologia favorece o desenvolvimento do raciocínio dedutivo, na medida em que os estudantes passam a reconhecer regularidades no processo de redução sucessiva dos números. Ao observar que o máximo divisor comum permanece inalterado a cada iteração, mesmo com a diminuição dos valores

envolvidos, os alunos constroem gradualmente a compreensão da propriedade de invariância que fundamenta o algoritmo. Essa percepção contribui para a consolidação do conceito de divisibilidade como relação estrutural entre números, superando a visão restrita de cálculo operacional.

Sob o ponto de vista didático, a articulação entre manipulação concreta, investigação orientada e posterior formalização simbólica promove uma aprendizagem mais consistente e reflexiva. O estudante deixa de executar procedimentos de forma automática e passa a compreender o encadeamento lógico que sustenta cada etapa do processo. Tal percurso metodológico fortalece a autonomia intelectual, estimula a argumentação matemática e prepara o terreno para a introdução formal do algoritmo em sua notação simbólica, assegurando que a generalização algébrica seja resultado de uma construção conceitual efetivamente compreendida.

5.7.4 Etapa 4 – Desafio matemático

Nesse momento didático, os estudantes são desafiados a resolver situações-problema contextualizadas que envolvem a determinação do maior número possível de grupos iguais ou situações de repartição equitativa, utilizando o máximo divisor comum como ferramenta matemática central. As situações propostas exigem a mobilização dos conceitos previamente construídos, favorecendo a aplicação do conhecimento em contextos significativos. Pode-se, de maneira prática, utilizar o Jogo *O Algoritmo de Euclides e os Feijões* para determinar as soluções dos problemas apresentados no Capítulo 3, especificamente nos Exemplos 3.30, 3.31 e 3.32.

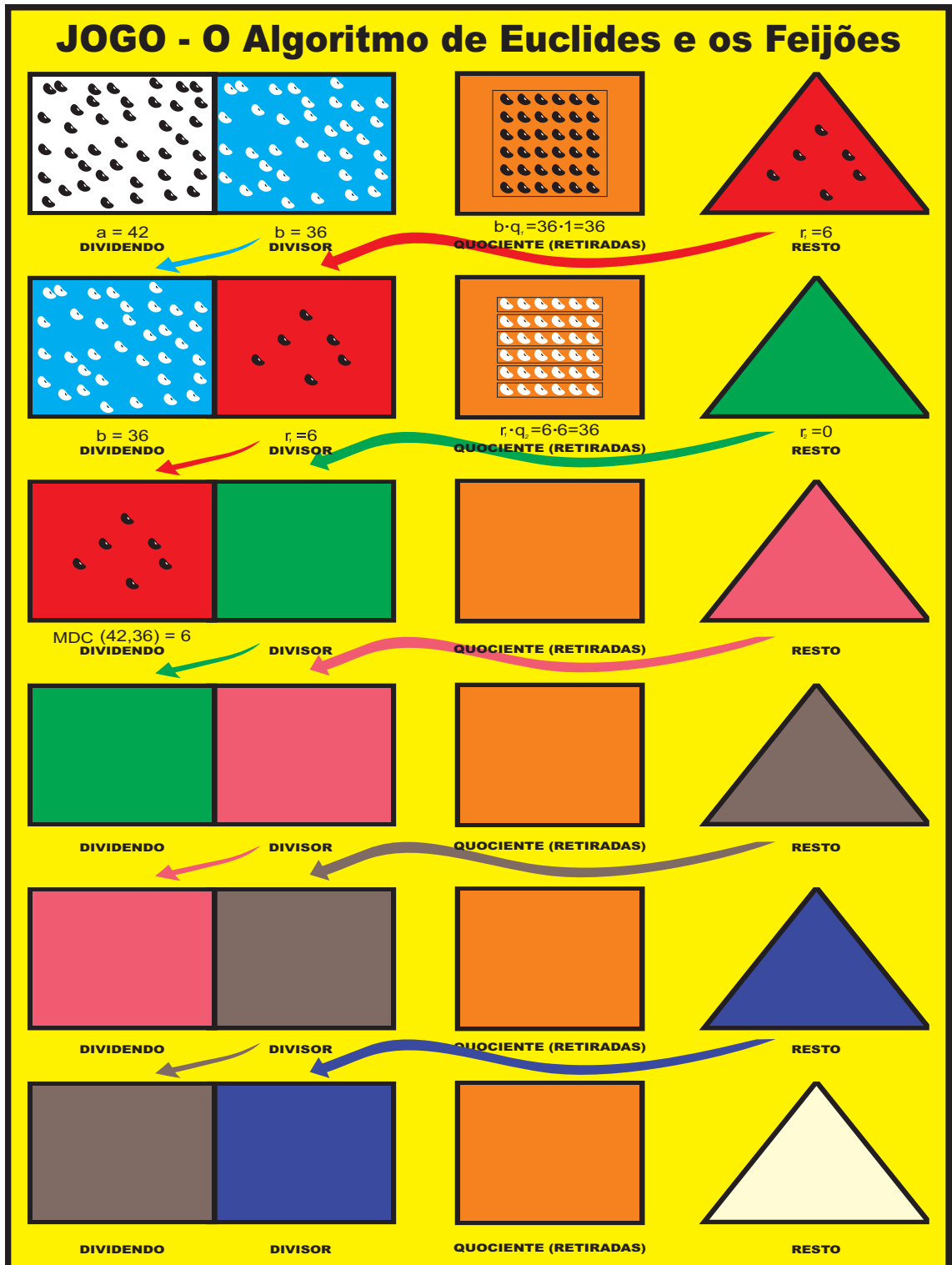


Figura 5.11: Exemplo 3.29

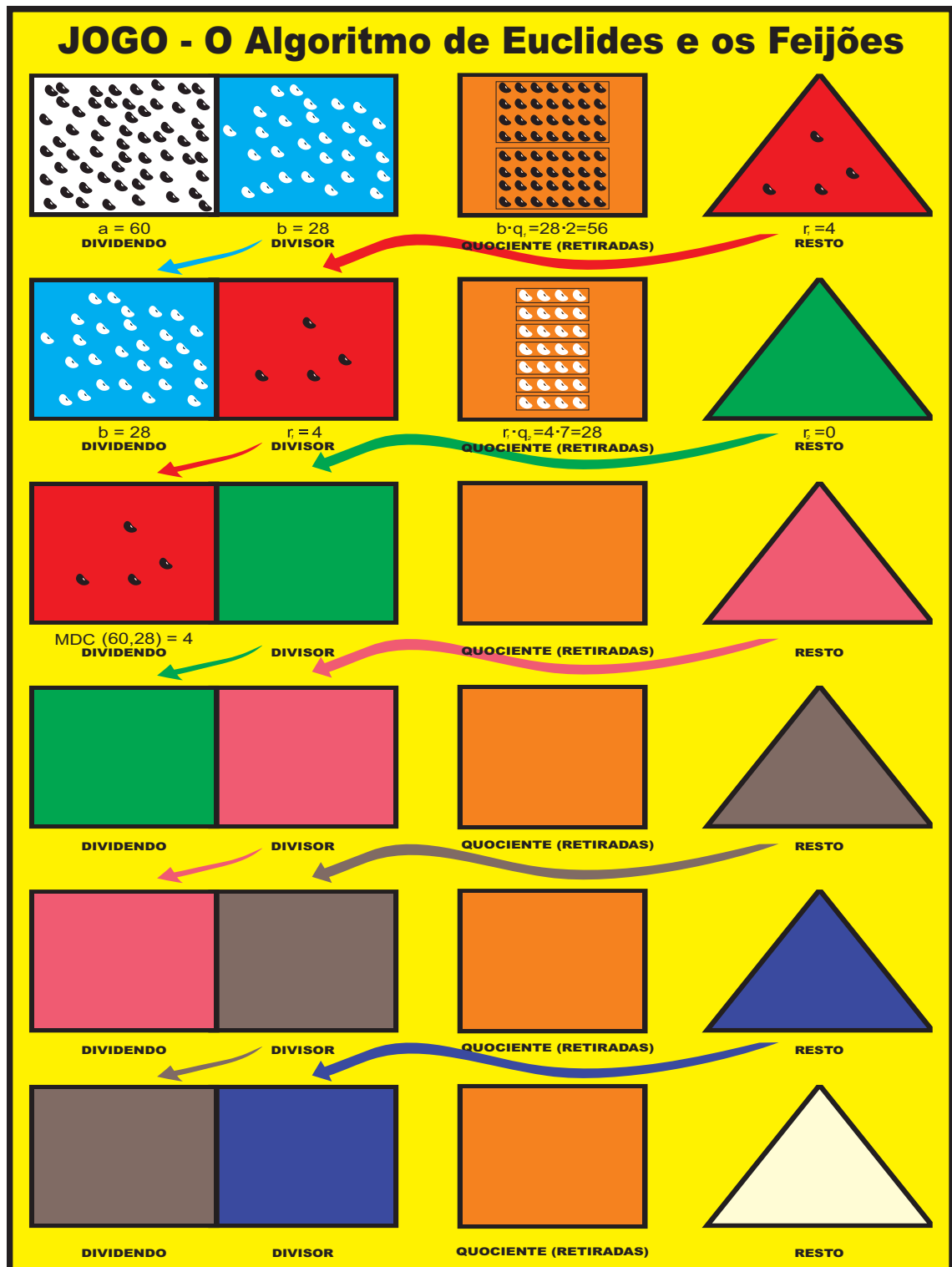


Figura 5.12: Exemplo 3.30

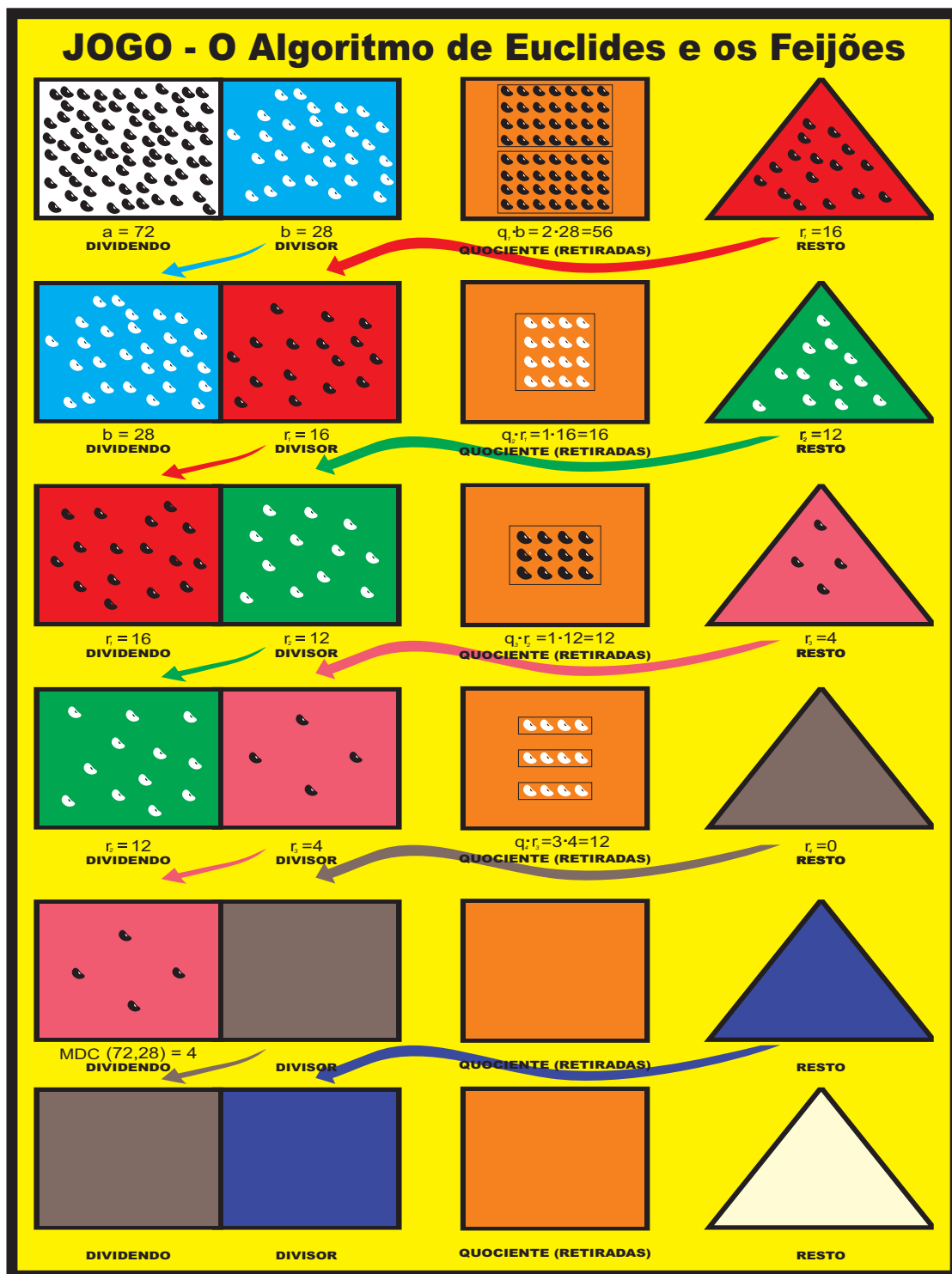


Figura 5.13: Exemplo 3.31

Essa fase favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de argumentação e da tomada de decisões fundamentadas, em consonância com as habilidades EF07MA05 e EF07MA06 da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que orientam, respectivamente, a resolução de problemas envolvendo

números naturais por meio das ideias de múltiplos e divisores, bem como a utilização do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum na resolução de situações práticas, a partir da compreensão das relações numéricas estabelecidas.

5.7.5 Etapa 5 – Sistematização e formalização

Na etapa final da sequência didática, o professor promove uma discussão coletiva com o objetivo de sistematizar e formalizar os conceitos matemáticos abordados ao longo das atividades, em especial as noções de divisor, máximo divisor comum e o Algoritmo de Euclides. Esse momento caracteriza-se pela transição do conhecimento construído de forma empírica e exploratória para a linguagem matemática simbólica convencional, possibilitando aos estudantes compreenderem a estrutura formal dos conceitos trabalhados.

Tal procedimento dialoga com a perspectiva da institucionalização do saber matemático, na qual o professor assume a responsabilidade de validar, organizar e generalizar os conhecimentos produzidos pelos alunos durante as situações didáticas, conferindo-lhes estatuto matemático formal. Ao retomar as estratégias utilizadas pelos grupos, o docente valoriza os diferentes caminhos percorridos, promove comparações entre procedimentos e evidencia regularidades, conduzindo os estudantes à compreensão do Algoritmo de Euclides como um método sistemático e eficiente para a determinação do máximo divisor comum.

Nesse contexto, a discussão coletiva favorece o desenvolvimento da argumentação matemática, uma vez que os alunos são incentivados a justificar suas escolhas, explicar raciocínios e interpretar os resultados obtidos à luz das propriedades dos números inteiros. A mediação do professor torna-se fundamental para orientar a passagem da linguagem natural e dos registros concretos para a linguagem simbólica, garantindo a precisão conceitual e a clareza das definições matemáticas apresentadas.

Como forma de consolidar a aprendizagem, os estudantes realizam registros escritos individuais, nos quais organizam os conceitos formalizados, descrevem procedimentos e resolvem situações-problema relacionadas ao conteúdo estudado. Esses registros constituem importante instrumento de avaliação formativa, permitindo ao professor acompanhar o nível de compreensão conceitual alcançado pelos alunos, identificar possíveis dificuldades e planejar intervenções pedagógicas futuras. Além disso, o registro individual contribui para o desenvolvimento da autonomia intelectual, da organização do pensamento matemático e da capacidade de comunicar ideias de maneira clara e coerente.

5.8 Avaliação

A avaliação desenvolve-se de forma contínua, processual e formativa ao longo de toda a sequência didática, acompanhando o percurso de aprendizagem dos estudantes e considerando não apenas os resultados finais, mas, sobretudo, os processos cognitivos envolvidos na resolução das situações-problema. Nessa perspectiva, a avaliação assume um papel essencial na compreensão de como os estudantes constroem significados matemáticos, permitindo ao professor acompanhar o desenvolvimento das ideias, das estratégias e das formas de raciocínio mobilizadas ao longo das atividades. Tal abordagem rompe com modelos tradicionais centrados exclusivamente na verificação de respostas corretas, valorizando o processo de aprendizagem em sua totalidade.

Nesse sentido, são observados critérios como a participação ativa dos estudantes nas atividades propostas, as estratégias matemáticas mobilizadas, a qualidade e a clareza dos registros escritos, bem como a capacidade de argumentação, generalização e formalização dos conceitos matemáticos trabalhados [Luckesi 2011]. A análise desses elementos possibilita uma compreensão mais ampla do desenvolvimento dos estudantes, evidenciando não apenas o que aprenderam, mas como aprenderam, quais dificuldades enfrentaram e quais avanços foram alcançados ao longo da sequência didática.

Além disso, a avaliação é concebida como instrumento de mediação pedagógica, na medida em que orienta a ação docente e subsidia a tomada de decisões ao longo do processo de ensino. A partir das evidências coletadas, o professor pode propor intervenções mais adequadas, retomar conceitos, aprofundar discussões ou reorganizar estratégias didáticas, garantindo que as necessidades de aprendizagem dos estudantes sejam contempladas. Dessa forma, a avaliação deixa de ser um momento isolado e passa a integrar, de maneira orgânica, o desenvolvimento das atividades.

Tal concepção avaliativa encontra respaldo nas orientações da Base Nacional Comum Curricular, que compreende a avaliação como parte indissociável do processo de ensino e aprendizagem, voltada à compreensão do desenvolvimento das competências e habilidades dos estudantes e ao redirecionamento das práticas pedagógicas. Nesse contexto, a avaliação formativa assume caráter diagnóstico e orientador, possibilitando ao professor identificar avanços e dificuldades, promover intervenções pedagógicas oportunas e favorecer a progressiva consolidação dos conceitos de divisibilidade e máximo divisor comum.

Por fim, destaca-se que a avaliação proposta valoriza a construção de um ambiente de aprendizagem no qual o erro é compreendido como parte integrante do processo de construção do conhecimento. Ao considerar os equívocos como

oportunidades de aprendizagem, promove-se uma postura investigativa por parte dos estudantes, incentivando a reflexão, a revisão de estratégias e o aprimoramento do raciocínio matemático, contribuindo para o desenvolvimento de uma aprendizagem mais autônoma, crítica e significativa.

5.9 Síntese do Produto Educacional

O jogo *O Algoritmo de Euclides e os Feijões* configura-se como um recurso didático-pedagógico que articula, de maneira integrada, elementos de ludicidade, o uso de material concreto e a progressiva formalização conceitual. Essa articulação possibilita a construção de significados matemáticos mais consistentes, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático, da capacidade de argumentação e da compreensão das relações de divisibilidade no 7^o ano do Ensino Fundamental.

Ao promover a exploração de objetos concretos associada à resolução de situações-problema, o jogo favorece a participação ativa dos estudantes e a mobilização de conhecimentos prévios, aspecto central para a aquisição significativa dos conteúdos matemáticos. Ademais, a transição orientada do registro concreto para a linguagem simbólica formal permite que os alunos compreendam o Algoritmo de Euclides não apenas como um procedimento mecânico, mas como um método fundamentado em propriedades dos números inteiros, fortalecendo a compreensão conceitual e a autonomia intelectual.

Considerações Finais

A presente investigação buscou estabelecer uma articulação rigorosa entre a estrutura formal do Algoritmo de Euclides e uma proposta de transposição didática fundamentada na experiência empírica de feijões como instrumento mediador da aprendizagem no ensino de divisibilidade e máximo divisor comum no sétimo ano do Ensino Fundamental.

De acordo com a análise estrutural do objeto matemático, evidenciou-se que o Algoritmo de Euclides não deve ser compreendido como simples procedimento operacional, mas como expressão de uma propriedade estrutural dos inteiros, cuja validade decorre da invariância do máximo divisor comum sob sucessivas reduções obtidas por meio da divisão euclidiana. Trata-se de um resultado cuja origem remonta à organização dedutiva estabelecida nos Livros VII a IX de *Os Elementos*, marco histórico da consolidação de um modelo axiomático de construção do conhecimento matemático.

A análise desenvolvida reafirma que a Matemática escolar, quando desvinculada de sua estrutura lógica e histórica, tende a converter algoritmos em sequências mecânicas de execução, esvaziadas de significado conceitual. A proposta aqui apresentada buscou superar essa dicotomia por meio da reconstrução pedagógica da lógica euclidiana, permitindo que o estudante experienciasse concretamente a dinâmica iterativa que caracteriza o processo de determinação do máximo divisor comum.

Sob a perspectiva cognitiva, a manipulação dos feijões configurou-se como instrumento de mediação que possibilitou a visualização empírica da formação de agrupamentos sucessivos, da redução progressiva das quantidades e da identificação do divisor comum máximo como elemento invariável ao longo do processo. A formalização simbólica, nesse contexto, emergiu como generalização teórica de um procedimento previamente compreendido, e não como imposição externa de uma regra algorítmica.

A Sequência Didática estruturada em momentos progressivos — investigação empírica, sistematização conceitual e formalização algorítmica — demonstrou coerência interna e alinhamento às orientações curriculares nacionais, particular-

mente no que se refere ao desenvolvimento do raciocínio lógico, da argumentação e da resolução de problemas envolvendo conceitos de divisibilidade e MDC - Máximo Divisor Comum. Tal organização respeitou uma progressão conceitual que parte da experiência concreta e culmina na abstração formal.

Importa destacar, ainda, a viabilidade estrutural e a ampla possibilidade de implementação do Produto Educacional em diferentes realidades escolares do país. A utilização de feijões como recurso manipulável apresenta custo praticamente inexistente, fácil aquisição e acessibilidade universal, independentemente da região geográfica ou das condições socioeconômicas da instituição escolar. Essa simplicidade material constitui, paradoxalmente, uma de suas maiores potencialidades pedagógicas, pois demonstra que a qualidade da aprendizagem matemática não depende necessariamente de recursos tecnológicos sofisticados, mas da intencionalidade didática e da organização metodológica do trabalho docente.

Não obstante, é necessário explicitar uma limitação desta pesquisa. Refere-se ao recorte conceitual adotado, circunscrito ao ensino de divisibilidade e máximo divisor comum. Embora o Algoritmo de Euclides possua desdobramentos relevantes em campos mais amplos da teoria dos números, tais extensões não foram objeto de aplicação empírica nesta investigação. Acrescente-se que a eficácia da proposta depende da mediação docente, variável que pode influenciar significativamente os resultados obtidos em diferentes contextos educacionais.

Do ponto de vista epistemológico, reconhece-se que toda transposição didática implica processos de simplificação e adaptação. A reconstrução escolar do Algoritmo de Euclides não reproduz integralmente o rigor demonstrativo da tradição matemática clássica, mas constitui aproximação pedagógica orientada por finalidades formativas. Essa tensão entre formalismo e acessibilidade didática é inerente à educação matemática e exige permanente reflexão crítica.

Apesar dessas limitações, considera-se que o trabalho contribui para o fortalecimento de práticas pedagógicas que preservam a estrutura lógica do conhecimento matemático sem abdicar de estratégias mediadoras que favoreçam a compreensão conceitual. Ao integrar história da matemática, fundamentação teórica da aprendizagem e prática investigativa em sala de aula, a pesquisa reafirma a possibilidade de um ensino de Aritmética simultaneamente rigoroso, significativo e socialmente acessível.

Como perspectivas futuras, propõe-se a ampliação da proposta para outros conteúdos da Teoria dos Números, bem como a realização de estudos com amostragem ampliada e aplicação sistemática em diferentes contextos regionais do país, a fim de examinar a robustez metodológica, a validade externa e a consistência dos resultados em escala mais abrangente. Investigações conduzidas em distintas redes

de ensino e em variadas realidades socioculturais poderão fornecer evidências adicionais acerca da estabilidade da abordagem e de sua capacidade de adaptação a diferentes cenários educacionais, fortalecendo sua potencial generalização.

A consolidação de práticas pedagógicas que articulem rigor formal e experiência concreta configura-se como caminho promissor para a superação de uma aprendizagem meramente instrumental. Ao favorecer a compreensão das estruturas lógicas subjacentes aos conceitos aritméticos, tais abordagens contribuem para a formação de estudantes capazes de reconhecer a Matemática como sistema coerente de relações, propriedades e invariantes, e não apenas como repertório de procedimentos operatórios. Nesse sentido, a proposta desenvolvida aponta para uma educação matemática orientada pela compreensão estrutural, pela fundamentação conceitual e pela democratização do acesso ao conhecimento, independentemente das condições regionais em que seja implementada.

Referências Bibliográficas

- [Alves 2001]ALVES, E. M. S. *A ludicidade e o ensino de Matemática*. Campinas: Papyrus, 2001.
- [Ausubel 2003]AUSUBEL, D. P. *Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva*. Lisboa: Plátano, 2003.
- [Ausubel, Novak e Hanesian 1980]AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. *Psicologia educacional*. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980. Tradução da 2ª edição de *Educational Psychology: A Cognitive View*.
- [Boyer 2012]BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.
- [BRASIL 1998]BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, DF: MEC, 1998.
- [BRASIL 2018]BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018.
- [Cleophas, Cavalcanti e Soares 2018]CLEOPHAS, M. d. G.; CAVALCANTI, E. L. D.; SOARES, M. H. F. B. Afinal de contas, é jogo educativo, didático ou pedagógico no ensino de química/ciências? colocando os pingos nos "is". In: CLEOPHAS, M. d. G.; SOARES, M. H. F. B. (Ed.). *Didatização lúdica no ensino de Química/Ciências: teorias de aprendizagem e outras interfaces*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018. p. 33–43.
- [Dante 2012]DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de matemática*. 12. ed. São Paulo: Ática, 2012.
- [Domingues e Iezzi 2003]DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. *Álgebra Moderna*. São Paulo: Saraiva, 2003.
- [Euclides 2009]EUCLIDES. *Os Elementos*. São Paulo: Editora UNESP, 2009. Original do século III a.C.
- [Eves 2011]EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2011.

- [Gomes 2023]GOMES, J. d. O. S. *A aritmética modular e o ensino de divisibilidade no 6o ano do ensino fundamental por meio de jogos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2023. Dissertação (Mestrado em Matemática – PROFMat).
- [Grando 2000]GRANDO, R. C. *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.
- [Hefez 2016]HEFEZ, A. *Aritmética*. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- [Lima, Wagner e Pellegrini 2013]LIMA, E. L.; WAGNER, E.; PELLEGRINI, P. C. *Aritmética*. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- [Luckesi 2011]LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar*. São Paulo: Cortez, 2011.
- [Vygotzky 2008]VYGOTSKY, L. S. *A formação social da mente*. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2008.

LISTA DE EXERCÍCIOS - APLICAÇÕES

1. Organização de Kits Escolares

Uma escola recebeu 84 cadernos e 60 lápis para montar kits idênticos para os alunos, utilizando todo o material.

- (a) Quantos kits podem ser montados?
- (b) Quantos cadernos e lápis haverá em cada kit?

RESOLUÇÃO 1 Aplicando o Algoritmo de Euclides, efetuamos as divisões sucessivas:

$$84 = 60 \cdot 1 + 24,$$

$$60 = 24 \cdot 2 + 12,$$

$$24 = 12 \cdot 2 + 0.$$

Como o último resto não nulo é 12, concluímos que

$$(84, 60) = 12.$$

Comentário: O MDC determina o maior número de grupos iguais que podem ser formados utilizando todo o material.

Resposta da Letra a: 12 kits

Resposta da Letra b: $84/12 = 7$ cadernos e $60/12 = 5$ lápis por kit

2. Distribuição de Alimentos

Uma instituição possui 96 kg de arroz e 144 kg de feijão para montar cestas básicas idênticas, utilizando tudo o que foi doado.

- (a) Qual o maior número de cestas que pode ser montado?
- (b) Quantos quilos de arroz e feijão haverá em cada cesta?

RESOLUÇÃO 2

Aplicando o Algoritmo de Euclides, efetuamos as divisões sucessivas:

$$144 = 96 \cdot 1 + 48,$$

$$96 = 48 \cdot 2 + 0.$$

Como o último resto não nulo é 48, concluímos que

$$(96, 144) = 48.$$

Comentário: Como se deseja montar o maior número possível de cestas idênticas, calcula-se o MDC entre as quantidades.

Resposta da Letra a: 48 cestas

Resposta da Letra b: $96/48 = 2$ kg de arroz e $144/48 = 3$ kg de feijão por cesta.

3. Organização de Turmas

Uma escola possui 72 meninas e 54 meninos para formar equipes separadas por gênero, com o mesmo número máximo de estudantes por equipe.

- (a) Quantos alunos haverá em cada equipe?
- (b) Quantas equipes serão formadas no total?

RESOLUÇÃO 3

Aplicando o Algoritmo de Euclides, efetuamos as divisões sucessivas:

$$72 = 54 \cdot 1 + 18,$$

$$54 = 18 \cdot 3 + 0.$$

Como o último resto não nulo é 18, concluímos que $(72, 54) = 18$.

Comentário: O número de alunos por equipe deve dividir simultaneamente 72 e 54, sendo o maior possível.

Resposta da Letra a: 18 alunos por equipe

Resposta da Letra b: $72/18 = 4$ equipes de meninas e $54/18 = 3$ equipes de meninos. Total: 7 equipes.

4. Piso de Cerâmica

Um pedreiro precisa revestir uma área retangular de 6 metros por 9 metros com ladrilhos quadrados de mesmo tamanho, sem recortes.

- (a) Qual o maior lado possível do ladrilho?
- (b) Quantos ladrilhos serão necessários?

RESOLUÇÃO 4

Aplicando o Algoritmo de Euclides, efetuamos as divisões sucessivas:

$$9 = 6 \cdot 1 + 3,$$

$$6 = 3 \cdot 2 + 0.$$

Como o último resto não nulo é 3, concluímos que

$$(9, 6) = 3.$$

Comentário: O lado do ladrilho corresponde ao maior divisor comum das dimensões do retângulo.

Resposta da Letra a: Lado do ladrilho: 3 m

Resposta da Letra b: $(6/3) \times (9/3) = 6$ ladrilhos.

5. Corte de Barras de Ferro

Uma serralheria possui duas barras de ferro, uma com 150 cm e outra com 210 cm. Deseja-se cortá-las em pedaços de mesmo comprimento, sem sobras e com o maior tamanho possível.

(a) Qual deve ser o comprimento de cada pedaço?

(b) Quantos pedaços serão obtidos ao todo?

RESOLUÇÃO 5 Aplicando o Algoritmo de Euclides, efetuamos as divisões sucessivas:

$$210 = 150 \cdot 1 + 60,$$

$$150 = 60 \cdot 2 + 30,$$

$$60 = 30 \cdot 2 + 0.$$

Como o último resto não nulo é 30, concluímos que

$$(150, 210) = 30.$$

Comentário: O comprimento máximo dos pedaços deve dividir exatamente ambas as barras.

Resposta da Letra a: 30 cm

Resposta da Letra b: $150/30 = 5$ e $210/30 = 7$. Total : 12 pedaços.

6. Produção de Pacotes Industriais

Uma fábrica produz 420 parafusos e 315 porcas por hora. Deseja-se montar pacotes idênticos contendo apenas esses itens, utilizando toda a produção de uma hora.

(a) Qual o maior número de pacotes que pode ser montado?

(b) Quantas unidades de cada item haverá em cada pacote?

RESOLUÇÃO 6 Aplicando o Algoritmo de Euclides, efetuamos as divisões sucessivas:

$$420 = 315 \cdot 1 + 105,$$

$$315 = 105 \cdot 3 + 0.$$

Como o último resto não nulo é 105, concluímos que

$$(420, 315) = 105.$$

Comentário: O MDC fornece o maior número de pacotes iguais possíveis.

Resposta da Letra a: 105 pacotes

Resposta da Letra b: $420/105 = 4$ parafusos e $315/105 = 3$ porcas por pacote.

7. Organização de Filas

Em um evento, há 128 adultos e 160 crianças. Deseja-se organizar filas separadas, com o mesmo número máximo de pessoas por fila, sem misturar adultos e crianças.

(a) Quantas pessoas haverá em cada fila?

(b) Quantas filas serão formadas?

RESOLUÇÃO 7 Aplicando o Algoritmo de Euclides, efetuamos as divisões sucessivas:

$$160 = 128 \cdot 1 + 32,$$

$$128 = 32 \cdot 4 + 0.$$

Como o último resto não nulo é 32, concluímos que

$$(128, 160) = 32.$$

Comentário: Cada fila deve ter o maior número possível de pessoas, dividindo exatamente as quantidades disponíveis.

Resposta da Letra a: 32 pessoas por fila

Resposta da Letra b: $128/32 = 4$ filas de adultos e $160/32 = 5$ filas de crianças. Total: 9 filas.

8. Divisão de Terreno

Um terreno retangular possui 56 metros de largura e 98 metros de comprimento. O proprietário deseja dividi-lo em lotes quadrados, todos com a mesma medida de lado, de modo que não haja sobra de área.

(a) Qual deverá ser a medida do lado de cada lote?

(b) Quantos lotes quadrados serão formados?

RESOLUÇÃO 8

Para que os lotes sejam quadrados e tenham a maior medida possível de lado, é necessário determinar o máximo divisor comum de 56 e 98.

Aplicando o Algoritmo de Euclides, efetuamos as divisões sucessivas:

$$98 = 56 \cdot 1 + 42,$$

$$56 = 42 \cdot 1 + 14,$$

$$42 = 14 \cdot 3 + 0.$$

Comentário: O maior lado possível do lote corresponde ao maior divisor comum das dimensões do terreno, neste caso, o último resto não nulo é 14, concluímos que

$$(56, 98) = 14.$$

Resposta da Letra a : A medida do lado de cada lote quadrado será 14 metros.

Resposta da Letra b: O número de lotes formados será dado por

$$\frac{56}{14} \times \frac{98}{14} = 4 \times 7 = 28.$$

1

¹Recomenda-se que, para a resolução das atividades propostas nesta lista, docente e discentes utilizem o jogo **O Algoritmo de Euclides e os Feijões**.