

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

JOHN ELBER GÓMEZ DAZA

**Superfícies Mínimas e curvatura de
Gauss de Conóides em Espaços de
Finsler com (α, β) -métricas**

Goiânia
2014

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: ☒ **Dissertação** ☐ **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a): John Elber Gómez Daza			
E-mail: eagomezdaza@gmail.com			
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? ☒ Sim ☐ Não			
Vínculo empregatício do autor			
Agência de fomento:		Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior	Sigla: Capes
País:	Brasil	UF:GO	CNPJ: 00.889.834/0001-08
Título: Superfícies Mínimas e curvatura de Gauss de Conóides em Espaços de Finsler com (α, β) -métricas			
Palavras-chave: Imersão Isométrica, Subvariedade Mínima, Conóides, Curvatura de Gauss.			
Título em outra língua: Minimal Surfaces and Gauss Curvature of Conoid in Finsler Spaces with (α, β) -metrics			
Palavras-chave em outra língua: Isometrical Immersion, Minimal Submanifold, Conoids, Gauss Curvature.			
Área de concentração:		Geometria	
Data defesa: (dd/mm/aaaa)		28/03/2014	
Programa de Pós-Graduação:		Mestrado em Matemática	
Orientador (a): Marcelo Almeida de Souza			
E-mail: msouza_2000@yahoo.com			

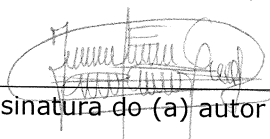
*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM ☐ NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.


Assinatura do (a) autor (a)

Data: 28 / 03 / 2014 .

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

JOHN ELBER GÓMEZ DAZA

Superfícies Mínimas e curvatura de Gauss de Conóides em Espaços de Finsler com (α, β) -métricas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Mestrado em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza

Goiânia
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

G633s Gómez Daza, John Elber.
Superfícies mínimas e curvatura de Gauss de conóides
em espaços de Finsler com (α, β) -métricas [manuscrito] /
John Elber Gómez Daza. - 2014.
82 f. : il., figs.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2014.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras.

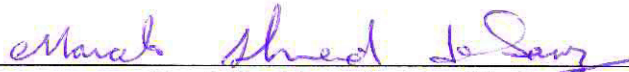
1. Imersão isométrica. 2. Subvariedade mínima. 3.
Conóides. 4. Gauss, Curvatura de. I. Título.

CDU: 514.77

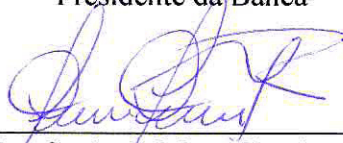
JOHN ELBER GÓMEZ DAZA

**SUPERFÍCIES MÍNIMAS E CURVATURA DE GAUSS DE
CONÓIDES EM ESPAÇOS DE FINSLER COM (α, β) -
MÉTRICAS**

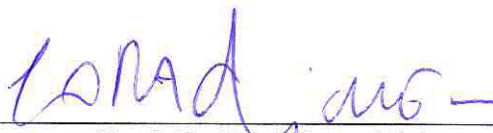
Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 28 de março de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Carlos Maber Carrión Riveros
Departamento de Matemática - UnB



Prof. Dr. Levi Rosa Adriano
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

John Elber Gómez Daza

Graduou-se em Matemática pela UNICAUCA - Universidad del Cauca. Durante o Mestrado, na UFG - Universidade Federal de Goiás, foi bolsista da CAPES. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Geometria.

A meus pais Libardo e Graciela
e a meu irmão Javier.

Agradecimentos

A Deus por sempre ter me iluminado e protegido permitindo-me chegar até aqui.

Ao meu orientador, professor Dr. Marcelo Almeida de Souza, pela oportunidade de crescimento científico e intelectual, pelo incentivo, paciência e confiança em mim depositada.

Aos meus pais por seus ensinamentos, valores e conselhos que em nenhuma instituição poderia obter. Por me apoiarem em todas as minhas escolhas, estarem presentes em todas as etapas de minha vida e por terem me dado o melhor exemplo de amor e carinho.

A meu irmão por ser meu melhor amigo e pessoa na qual sempre irei me espelhar.
A Karime porque o amor é necessário para continuar.

Aos meus amigos pelo companheirismo, pelas conversas e por deixarem esta etapa mais prazerosa.

A Daniel Antonio Pimenta, pelas correções gramaticais e ortográficas.

A todos os professores do programa de pós graduação em Matemática do IME da UFG, por contribuírem em minha formação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (Capes) pelo apoio financeiro.

Deus é o Geômetra Onipotente para quem o mundo é imenso problema matemático.

Leibniz.

Resumo

Gómez Daza, John Elber. **Superfícies Mínimas e curvatura de Gauss de Conóides em Espaços de Finsler com (α, β) -métricas**. Goiânia, 2014. 82p. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho consideramos (α, β) -métricas do tipo $F = \alpha\phi(\frac{\beta}{\alpha})$, onde α é a métrica euclidiana, ϕ é uma função positiva suave sobre um intervalo simétrico $I = (-b_0, b_0)$ e β é uma 1-forma de norma b , $0 \leq b < b_0$, sobre uma variedade de Finsler M . Estudamos superfícies mínimas nestes espaços (M, F) com respeito à forma volume de Holmes-Thompson e apresentamos uma equação que caracteriza as hipersuperfícies mínimas em um espaço geral (α, β) -Minkowski. Mostramos que os conóides no espaço tridimensional com β na direção do eixo $\tilde{y}^3$ são mínimas se, e somente se, é um helicóide ou um plano, provamos também que a curvatura de Gauss do conóide em um espaço tridimensional de Randers-Minkowski pode ser positiva em superfícies mínimas. Finalmente apresentamos uma equação diferencial ordinária que caracteriza superfícies mínimas de rotação e um exemplo de superfície mínima de rotação.

Palavras-chave

Imersão Isométrica, Subvariedade Mínima, Conóides, Curvatura de Gauss

Abstract

Gómez Daza, John Elber. **Minimal Surfaces and Gauss Curvature of Conoid in Finsler Spaces with (α, β) -metrics**. Goiânia, 2014. 82p. MSc. Dissertation. Departamento de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

We consider (α, β) -metric $F = \alpha\phi(\frac{\beta}{\alpha})$, where α is the euclidean metric, ϕ is a smooth positive function on a symmetric interval $I = (-b_0, b_0)$ and β is a 1-form with the norm b , $0 \leq b < b_0$, on the Finsler manifold M . We study the minimal surfaces on these spaces with respect to the Holmes-Thompson volume form and we present the equation that characterize the minimal hypersurfaces in general Minkowski space. We prove that the conoids in three-dimensional space are minimal if and only if is a helicoid or a plane, also we show that the Gauss curvature of conoid in Randers-Minkowski 3-space is not always nonpositive on minimal surfaces. Finally, an ordinary differential equation that characterizes minimal surfaces of revolution and an example of minimal surface of rotation are given.

Keywords

Isometrical Immersion, Minimal Submanifold, Conoids, Gauss Curvature.

Sumário

Lista de Figuras	10
1 Geometria de Finsler	13
1.1 Preliminares	13
1.2 Formas Diferenciáveis	15
1.3 Métrica de Finsler	17
1.4 Resultado para o determinante de g_{ij}	24
1.5 Imersão isométrica	25
2 Equações de estrutura na Geometria de Finsler	29
2.1 O fibrado vetorial p^*TM	29
2.2 A conexão de Chern	36
2.3 Métrica de Sasaki em SM	38
2.4 A forma Volume nos Espaços de Finsler	40
3 Superfícies mínimas em (α, β) –espaços	43
3.1 Imersão Mínima	43
3.2 Curvatura média	53
3.3 Espaços de Finsler com (α, β) –métricas	57
3.4 Hipersuperfícies mínimas em (α, β) -espaços	59
4 Aplicações	63
4.1 Conóide	63
4.2 Curvatura de Gauss do conóide em 3-espaço de Randers-Minkowski	69
4.3 Superfícies de Rotação	75
Referências Bibliográficas	81

Lista de Figuras

1.1	Variedades diferenciáveis	14
2.1	Fibrado vetorial	31
4.1	Conóides	63
4.2	Superfícies de Rotação	75
4.3	Superfícies mínimas de rotação	79

Introdução

O estudo das superfícies mínimas começou com Lagrange [9]. Em sua famosa autobiografia publicada em 1762, desenvolveu um algoritmo para o cálculo das variações. Lagrange propôs o problema de encontrar uma superfície de área mínima, com fronteira dada por uma curva fechada sem auto-interseções. Desde então, aumentou o número de estudos sobre superfícies mínimas.

Euler obteve uma superfície mínima de revolução nomeada de catenóide, a partir da rotação da catenária em relação ao eixo central (além do plano é a única superfície mínima de revolução). Meusnier (1776) introduziu na equação diferencial de Lagrange a condição adicional, que as “curvas de nível” $f(x, y) = \text{const}$ fossem retas. A solução neste caso, será um helicóide. Depois de um longo tempo Scherk (1835) obteve novas superfícies. Ele introduziu na equação de Lagrange a condição que as variáveis deveriam ser “separadas”, ele supôs que $f(x, y) = g(x) + h(y)$. Depois do trabalho de Costa (1982) sobre superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ aumentou o número de estudos a respeito deste tema. Costa, em sua Tese de Doutorado no IMPA, obteve as equações do *terceiro exemplo*, trabalhando com a representação de Weierstrass para as funções definidas em um toro. Ele obteve uma superfície mínima completa conformemente equivalente ao toro menos três pontos, onde dois dos fins da superfície são do tipo catenóide (no sentido em que se afastam para o infinito) e o terceiro fim se aproxima assintoticamente de um plano que está a uma distância finita (tais fins são chamados planares).

A formulação variacional que modela o problema fornece como solução superfícies que são pontos críticos do funcional volume, mas o termo mínima ficou fortemente associado a estas superfícies, de forma que as soluções são chamadas de superfícies mínimas. A ideia de minimizar volume é generalizada para variedades Riemannianas e consequentemente para variedades Finslerianas, e é assim que Shen no seu trabalho [15] estudou subvariedades de uma variedade Finsleriana e introduziu o conceito da forma curvatura média $\mathcal{H}_f$ para uma imersão $f : M^n \rightarrow M^m$, introduzindo de modo natural o conceito de imersão mínima, mas Shen não apresentou exemplos. Os primeiros exemplos para imersões mínimas na geometria de Finsler baseados na forma de volume de Buseman-Hausdorff foram apresentados por Souza no seu trabalho [20]. Porém, He e Shen mostram que qualquer superfície mínima no espaço de Randers $(M, \alpha + \beta)$ com

respeito à forma volume de Holmes-Thompson também é mínima no espaço Riemanniano (M, α) .

Este trabalho está baseado nos artigos [8], [13] e [22], onde estudamos o elemento volume de Holmes-Thompson, caracterizando as imersões mínimas do conóide e superfícies de rotação, na direção do eixo x^3 em espaços de Finsler com (α, β) -métricas do tipo $F = \alpha \phi(\frac{\beta}{\alpha})$, onde α é a métrica euclidiana, ϕ é uma função positiva suave sobre um intervalo simétrico $I = (-b_0, b_0)$ e β é uma 1-forma de norma b , $0 \leq b < b_0$, em uma equação que envolve uma integral.

Dividimos este trabalho em quatro capítulos. No Capítulo 1, apresentamos conceitos e alguns exemplos das estruturas de Finsler, juntamente com os resultados básicos que serão utilizados nos capítulos posteriores. Damos uma breve introdução às formas diferenciáveis que serão usadas nas equações da estrutura de Finsler.

No Capítulo 2, é apresentada a conexão de Chern, obtida pela diferenciação exterior da forma de Hilbert, (uma seção global do fibrado co-vetorial p^*T^*M). A conexão de Chern é de torção nula e quase compatível com a métrica que coincide com a conexão de Levi-Civita quando a estrutura de Finsler é Riemanniana. Assim a expressão obtida para os símbolos de Christoffel de segunda espécie em Finsler é análoga à expressão dos símbolos de Christoffel obtidos no caso Riemanniano. Considerando a orientação para a conexão, se obtém uma métrica Riemanniana induzida pelo pull-back da métrica de Sasaki de TM_0 em SM , sendo assim possível definir o elemento volume de Holmes-Thompson.

No Capítulo 3, apresentamos o teorema de classificação para as hipersuperfícies mínimas, e calculando a variação de volume, obtemos superfícies mínimas não triviais no caso de Minkowski.

No Capítulo 4, caracterizamos as hipersuperfícies mínimas do conóide e do tipo rotação de uma curva plana em torno do eixo fixado, ou seja, para o conóide e para as superfícies de rotação em um espaço de Mikowski com uma (α, β) -métrica, obtemos a solução da equação que caracteriza as superfícies mínimas.

Geometria de Finsler

O nome “Geometria de Finsler” veio da tese de doutorado de Paul Finsler, sobre o título de “**Curvas e Superfícies em espaços gerais**” em 1918, sob orientação de Carathéodory. Finsler retomou o caso geral deixado por Riemann, pois ele não considerava que o caso geral dava uma nova luz ao problema. Mais S.S. Chern [4] costumava dizer que a geometria de Finsler não é uma generalização da geometria Riemanniana, é melhor descrevê-la como a geometria Riemanniana sem a restrição quadrática.

Na estrutura apropriada, um grande número de resultados se generalizam facilmente de espaços Riemannianos para espaços Finslerianos e as evidências mostram que a “restrição quadrática” é raramente necessária. A geometria de Finsler também é uma ferramenta essencial para aplicações em Biologia, Teoria de Controle, Engenharia e Física. Em particular, P. L. Antonelli tem usado a geometria de Finsler para modelar a evolução de organismos coloniais.

1.1 Preliminares

Neste capítulo, introduziremos algumas definições e fatos básicos sobre a geometria de Finsler. No decorrer do trabalho, usaremos a notação da convenção de Einstein, isto é pares de índices repetidos indicam somatória, por exemplo, $y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ denotará $\sum_{i=1}^n y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Definição 1.1 *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas suaves, $x_i : U_i \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_i de $\mathbb{R}^n$ em M tais que:*

1. $\bigcup_i x_i(U_i) = M$;
2. Para todo par i, j com $x_i(U_i) \cap x_j(U_j) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_i^{-1}(W)$ e $x_j^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_i^{-1} \circ x_j^{-1}$ são diferenciáveis (fig 1.1);
3. A família $\{(U_i, x_i)\}$ é máxima relativamente às condições (1) e (2).

O par (U_i, x_i) (ou a aplicação x_i) com $p \in x_i(U_i)$ é chamado uma *parametrização* (ou sistema de coordenadas) de M em p ; $x_i(U_i)$, é então chamada uma *vizinhança* coordenada em p . Uma família $\{(U_i, x_i)\}$ satisfazendo (1) e (2) é chamada uma *estrutura diferenciável* em M .

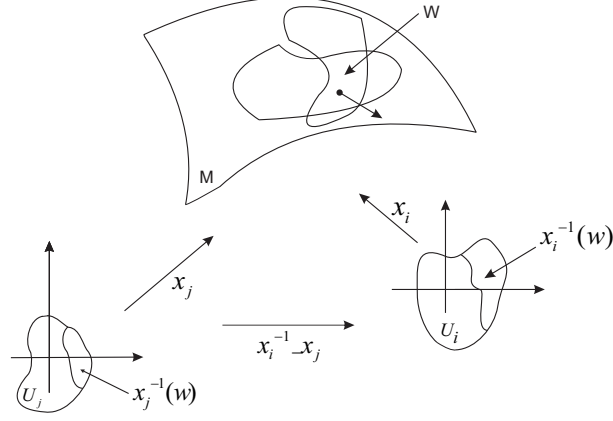


Figura 1.1: Variedades diferenciáveis

Definição 1.2 Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é chamada uma *curva* (diferenciável) em M . Suponha que $\gamma(0) = p \in M$, e seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p . O vetor tangente à curva γ em $t = 0$ é a função $\gamma'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\gamma'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ com $\gamma(0) = p$.

Definição 1.3 O espaço vetorial $T_p M$ é chamado espaço tangente em p , sendo definido pelo conjunto dos vetores tangentes a M em p .

Definição 1.4 O conjunto

$$TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\}$$

é chamado *fibrado tangente* da variedade n -dimensional M .

Observação 1.5 O fibrado tangente TM também pode ser definido como $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$.

Exemplo 1.6 O fibrado tangente é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$.

Definição 1.7 O espaço dual de $T_x M$ é o conjunto das aplicações lineares $\omega : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$, este espaço será denotado por $T_x^* M$, sendo denominado o cotangente a M em x .

A união $T^* M = \bigcup_{x \in M} T_x^* M$ é chamado de fibrado cotangente de M .

Definição 1.8 Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_p M$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM . O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \rightarrow TM$ é diferenciável.

Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

onde as funções $a_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$ é a base associada a x .

Para cada espaço tangente $T_x M$ consideremos seu dual $T_x^* M$. Uma base para $T_x^* M$ é obtida tomando $\{dx^i\}$, onde $x^i : M \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção na i -ésima coordenada. De fato, o conjunto $\{dx^i\}$ forma uma base dual para $T_x^* M$, pois $dx^i \in T_x^* M$, onde

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

1.2 Formas Diferenciáveis

O estudo local das variedades diferenciáveis pode ser feito usando um referencial natural associado a uma parametrização, isto é, para cada $x = (x^1, \dots, x^n) \in M$, escolhemos os vetores $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$, associados à parametrização $x_i(x^1, \dots, x^n)$, como uma base de $T_x M$, em geral esse referencial não é ortonormal. No método do referencial móvel introduzido por E. Cartan se pode escolher uma base ortonormal para $T_x M$. As formas diferenciáveis são usadas para obter as equações de estrutura de Cartan que são fundamentais para o estudo de variedades por meio do referencial móvel.

Abaixo segue algumas definições e propriedades das formas diferenciáveis, para maiores detalhes ver [5], [10], [21].

Definição 1.9 Uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma 0-forma diferenciável em M .

Definição 1.10 Uma forma diferenciável de grau 1 ou, simplesmente, uma 1-forma em um conjunto M é uma aplicação $\omega : M \rightarrow T_x^* M$ que associa a cada $x \in M$ em um funcional linear $\omega(x) : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$.

Todo funcional linear sobre $T_x M$ se exprime de modo único como combinação linear $a_i dx^i$. Assim, considerar uma 1-forma ω num conjunto M equivale a definir n funções reais, $a^1, \dots, a^n : M \rightarrow \mathbb{R}$ tais que, para cada $x \in M$, se tenha

$$\omega(x) = a_i(x) dx^i.$$

Escrevemos, neste caso, $\omega = a_i dx^i$. Para cada $x \in M$ a aplicação do funcional $\omega(x)$ no vetor $v = \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ dá como resultado o número real

$$\omega(x)v = a_i(x) dx^i(v) = a_i(x) \eta^i. \quad (1-1)$$

Diremos que a 1-forma $\omega : M \rightarrow T_x^* M$ é de classe C^k ($0 \leq k < \infty$) quando, para todo vetor $v \in T_x M$, a função $x \mapsto \omega(x)v$ é de classe C^k em M . Isto ocorre se, e somente se, $\omega = a_i dx^i$, onde as funções $a_1, \dots, a_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^k . De fato, esta condição é suficiente em virtude da igualdade (1-1) acima, se fazendo necessária porque $a_i(x) = \omega(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ para todo $x \in M$ e todo $i = 1, \dots, n$.

Definição 1.11 *Sejam ω e $\bar{\omega}$ 1-formas em M , o produto tensorial de ω e $\bar{\omega}$ denotado por $\omega \otimes \bar{\omega}$ é uma aplicação que, para cada $x \in M$ associa uma transformação bilinear $\omega \otimes \bar{\omega} : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$(\omega \otimes \bar{\omega})_x(v_1, v_2) = \omega_x(v_1) \bar{\omega}_x(v_2).$$

Definição 1.12 *Uma forma diferenciável de grau 2 ou uma 2-forma em M é uma aplicação ϕ que para cada $x \in M$, associa uma transformação bilinear alternada $\phi_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi_x = f_{ij} (dx^i \wedge dx^j)_x$, onde f é uma função diferenciável de M em $\mathbb{R}$.*

No caso em que ω e $\bar{\omega}$ são 1-formas diferenciáveis em M , o produto exterior de ω e $\bar{\omega}$, denotado por $\omega \wedge \bar{\omega}$ é uma aplicação que, para cada $x \in M$ associa uma transformação bilinear e alternada $\omega \wedge \bar{\omega} : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\omega \wedge \bar{\omega} = \omega \otimes \bar{\omega}_x - \bar{\omega} \otimes \omega_x,$$

onde $(\omega \wedge \bar{\omega})_x(v_1, v_2) = \omega_x(v_1) \bar{\omega}_x(v_2) - \bar{\omega}_x(v_1) \omega_x(v_2)$.

Passaremos agora a uma generalização das formas diferenciáveis. Seja $\wedge^k(T_x^* M)$

o conjunto das funções k -lineares alternadas $\mu : \overbrace{T_x M \otimes \dots \otimes T_x M}^{k\text{-vezes}} \rightarrow \mathbb{R}$. Com as operações usuais $\wedge^k(T_x^* M)$ é um espaço vetorial. Se $\mu_1, \dots, \mu_k$ são 1-formas, podemos obter

um elemento $\mu_1 \wedge \cdots \wedge \mu_k$ de $\wedge^k(T_x^*M)$, definido como

$$\mu_1 \wedge \cdots \wedge \mu_k(v^1, \dots, v^k) = \det(\mu_i(v_j)).$$

Decorre das propriedades de determinante que $\mu_1 \wedge \cdots \wedge \mu_k$ é de fato k -linear e alternada. Em particular, $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \in \wedge^k(T_x^*M)$

Definição 1.13 *Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensão n e m respectivamente, e consideremos a função diferenciável $f : M \rightarrow N$. A aplicação linear*

$$df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N,$$

induz uma transformação linear

$$f_x^* : \wedge^k(T_{f(x)}^* N) \rightarrow \wedge^k(T_x^* M),$$

que a cada $\varphi \in \wedge^k(T_{f(x)}^ N)$ associa $f_x^*(\varphi)$, definida da seguinte maneira:*

$$(f_x^*(\varphi))(v^1, \dots, v^k) = \varphi(df_x(v^1), \dots, df_x(v^k)),$$

$v^1, \dots, v^k \in T_x M$. Fazendo o ponto x variar em M , obteremos uma aplicação f^* que leva k -formas de M , $f^*(\omega)$ será chamada aplicação pull-back da k -forma ω por meio de f .

Observação 1.14 *Convenciona-se que $f^*(g) = g \circ f$, se g é uma 0-forma.*

1.3 Métrica de Finsler

Seja M uma variedade C^∞ n -dimensional e $\pi : TM \rightarrow M$ a projeção natural do fibrado tangente à variedade. Denotaremos por (x, y) um ponto de TM , $x \in M$, $y \in T_x M$.

Definição 1.15 *Uma métrica de Finsler em M é uma função $F : TM \rightarrow [0, +\infty)$ que satisfaz às seguintes condições:*

- (a) F é estritamente positiva para todo $y \neq 0$, e se anula quando $y = 0$;
- (b) F é suave para todo ponto de $TM \setminus \{0\}$;
- (c) $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$ para todo $\lambda > 0$;
- (d) em um sistema de coordenadas (x^i) sobre M , a matriz Hessiana

$$g_{ij}(x, y) := \left(\frac{1}{2} [F^2]_{y^i y^j} \right)_{n \times n} = F \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j} + \frac{\partial F}{\partial y^i} \frac{\partial F}{\partial y^j} \quad (1-2)$$

é positiva definida para todo $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \neq 0$.

Definição 1.16 Um espaço (M, F) é dito uma variedade de Finsler.

Observe, para cada $x \in M$ fixo,

$$ds^2 := g_{ij}(x, y) dy^i \otimes dy^j, \quad (1-3)$$

é uma métrica Riemanniana no espaço tangente $T_x M \setminus \{0\}$ perfurado.

Definição 1.17 Seja (M, F) uma variedade de Finsler. Para cada $x \in M$, a esfera tangente unitária S_x é

$$S_x := \{y \in T_x M : F(x, y) = 1\}. \quad (1-4)$$

Topologicamente, S_x é difeomorfo à esfera unitária $S^{n-1} \in \mathbb{R}^n$.

Usaremos as seguintes convenções:

1. Vamos denotar a métrica de Finsler por $F = F(x, y)$;
2. Uma matriz $A_{n \times n}$ será denotada por g_{ij} e sua inversa por $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$ logo,

$$g^{ik} g_{jk} = g_{jk} g^{ki} = \delta_j^i,$$

onde δ_j^i são os símbolos de Krönecker;

3. Toda matriz g_{ij} positiva definida é inversível e sua matriz inversa g^{ij} também é positiva definida (veja [11]);
4. A matriz simétrica g_{ij} é positiva definida, se cumpre uma das seguintes equivalências (veja [11]):
 - (a) Para todo vetor não nulo $y \in T_p M$ temos que $y^T g_{ij} y > 0$, onde y^T é o vetor transposto de y ;
 - (b) Todos os menores principais de g_{ij} são positivos;
 - (c) Todos os auto-valores λ_i de g_{ij} são positivos;
5. Chamaremos de "levantamento" e "rebaixamento" de índices, respectivamente a

$$g^{i\ell} C_{\ell jk} = C_{jk}^i, \quad g_{i\ell} C_{jk}^\ell = C_{ijk}.$$

No que segue, com relação ao sistema de coordenadas locais escolhido vamos considerar o seguinte: Seja $(x^1, \dots, x^n) = (x^i) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas locais sobre um aberto $U \subset M^n$. Como é usual, $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$ e $\{dx^i\}$ são respectivamente as bases coordenadas induzidas para $T_x M$ e $T_x^* M$. Os x^i s dão origem às coordenadas locais (x^i, y^i) sobre $\pi^{-1}U \subset TM$ por meio de $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

As funções F que são definidas sobre TM podem ser localmente expressas como

$$F(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n),$$

e as derivadas parciais serão denotadas por $F_{x^i}, F_{x^i x^j}, \dots, F_{y^i}, F_{y^i y^j}, \dots$.

Definição 1.18 *Seja (M, F) uma variedade de Finsler, onde F é positivamente homogênea de grau 1. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma curva diferenciável por partes com velocidade $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_{\gamma(t)}M$. O comprimento $L_F(\gamma)$ é definido como*

$$L_F(\gamma) = \int_a^b F\left(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}\right) dt.$$

Apresentamos alguns exemplos de métricas de Finsler.

Exemplos:

1- Uma métrica F de Finsler será Riemanniana se

$$F(x, y) = \alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}, \quad a_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle.$$

Nesse caso, $g_{ij} = \frac{1}{2}[F^2]_{y^i y^j} = a_{ij}(x)$ independe de y , para cada i, j . Temos também que esta métrica será euclidiana se os g_{ij} 's dependerem de x também.

2- Uma métrica F de Finsler em um espaço vetorial real n -dimensional V^n que independe de $x \in V^n$ é dita de tipo *Minkowski*. Temos que para cada $x \in M$ fixado, o espaço $(T_x M, F_x)$ é do tipo Minkowski.

3- Uma métrica de Randers em M é uma estrutura de Finsler sobre TM dado por

$$F(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y),$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) &= \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}, \\ \beta(x, y) &= b_k(x)y^k. \end{aligned}$$

e a_{ij}, a^{ij} são as componentes da matriz de uma métrica riemanniana e de sua inversa, respectivamente, e b_k são as componentes da 1-forma β cuja norma

$$b = \sqrt{a^{ij}b_i b_j} \quad 0 \leq b < 1.$$

Observemos que

$$b(x) = \sup_{\substack{\alpha(x, y)=1, \\ y \in T_x M}} \beta(x, y).$$

Apresentamos a definição de função homogênea e o teorema que as caracteriza, ele será utilizado no decorrer do trabalho (veja [2]).

Definição 1.19 Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é positiva homogênea de grau k se $f(\lambda y) = \lambda^k f(y)$, para todo $\lambda > 0$ e $y \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.20 (Teorema de Euler) Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $y \in U$, temos que f é positiva homogênea de grau k , se, e somente se,

$$y^i f_{y^i}(y) = k f(y).$$

Demonstração. Suponhamos primeiramente que f seja positiva homogênea de grau k ,

$$f(\lambda y) = \lambda^k f(y), \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall y \in U.$$

Fixando y e derivando esta equação em relação a λ , obtemos

$$\frac{d}{d\lambda} f(\lambda y) = f_{y^i}(\lambda y) y^i = k \lambda^{k-1} f(y).$$

Fazendo $\lambda = 1$, obtemos que $f_{y^i}(y) y^i = k f(y)$.

Agora, se f satisfaz $y^i f_{y^i}(y) = k f(y)$. Fixando y e considerando a função $f(\lambda y)$ com $\lambda > 0$. Pela regra da cadeia, temos

$$\frac{d}{d\lambda} f(\lambda y) = f_{y^i}(\lambda y) y^i = \frac{1}{\lambda} (\lambda y)^i f_{y^i}(\lambda y).$$

Usando nossa suposição, vemos que o último termo é igual a $\frac{1}{\lambda} k f(\lambda y)$, assim a equação acima é expressada como uma equação diferencial ordinária linear

$$\frac{d}{d\lambda} f(\lambda y) - \frac{1}{\lambda} k f(\lambda y) = 0.$$

Multiplicando pelo fator integrante $\frac{1}{\lambda^k}$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^k} \frac{d}{d\lambda} f(\lambda y) - \frac{k}{\lambda^{k+1}} f(\lambda y) &= 0 \\ \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\lambda^k} f(\lambda y) \right) &= 0 \\ f(\lambda y) &= \lambda^k C, \end{aligned}$$

onde C é uma constante que depende de y fixado. Fazendo $\lambda = 1$ temos que $C = f(y)$, logo

$$f(\lambda y) = \lambda^k f(y).$$

□

Como consequência do Teorema de Euler, temos o seguinte Corolário. Que será útil em futuras demonstrações.

Corolário 1.21 *Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e positiva homogênea de grau k , então f_{y^i} é positiva homogênea de grau $k - 1$.*

Demonstração. Pelo teorema de Euler temos $y^i f_{y^i}(y) = kf(y)$, derivando a igualdade em relação a y^j ,

$$f_{y^i}(y) \frac{\partial y^i}{\partial y^j} + y^i f_{y^i y^j}(y) = k f_{y^j}(y),$$

Assim,

$$y^i [f_{y^j}(y)]_{y^i} = k f_{y^j}(y) - f_{y^j}(y) = (k - 1) f_{y^j}(y),$$

e usando novamente o Teorema de Euler para a função f_{y^j} concluímos que

$$f_{y^j}(\lambda y) = \lambda^{k-1} f_{y^j}(y),$$

uma função homogênea de grau $k - 1$. □

Observação 1.22 *Para cada $x \in M$ fixo, a métrica F de Finsler, é uma função de y positiva homogênea de grau 1 e em consequência ela satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $y^i F_{y^i}(y) = F(y)$ ou $\left(\frac{y^i}{F(y)} F_{y^i}(y) = 1 \right)$;
2. $y^j F_{y^i y^j}(y) = 0, \forall i$;
3. $y^k F_{y^i y^j y^k}(y) = -F_{y^i y^j}(y), \forall i, j$;

Demonstração.

1. Consequência direta do teorema de Euler.
2. Derivando a expressão $y^j F_{y^j}(y) = F(y)$ em relação a y^i ,

$$\begin{aligned} F_{y^j}(y) \frac{\partial y^j}{\partial y^i} + y^j F_{y^j y^i}(y) &= F_{y^i}(y) \\ F_{y^i}(y) + y^j F_{y^i y^j}(y) &= F_{y^i}(y) \end{aligned}$$

logo,

$$y^j F_{y^i y^j}(y) = 0, \forall i.$$

3. Derivando a expressão $y^k F_{y^j y^k} = 0$ em relação a y^i ,

$$F_{y^j y^k}(y) \frac{\partial y^k}{\partial y^i} + y^k F_{y^i y^j y^k}(y) = 0$$

$$F_{y^i y^j}(y) + y^k F_{y^i y^j y^k}(y) = 0$$

assim,

$$y^k F_{y^i y^j y^k}(y) = -F_{y^i y^j}, \forall i, j.$$

□

Se consideramos a matriz Hessiana $g_{ij}(x, y)$ definida em (1-2) e as propriedades da função $F(y)$, se obtêm novas propriedades, que serão usadas no texto.

Corolário 1.23 *Para cada $x \in M$ fixo, a matriz Hessiana $g_{ij}(x, y)$ e $F(y)$ a função positiva homogênea de grau 1, tem-se*

1. $g_{ij}(x, y) \frac{y^i}{F(y)} = F_{y^j}(y)$ ou $(g_{ij}(x, y) y^i = F(y) F_{y^j}(y))$, $\forall j$;
2. $g_{ij}(x, y) \frac{y^i}{F(y)} \frac{y^j}{F(y)} = 1$ ou $(g_{ij}(x, y) y^i y^j = F^2(y))$;
3. $y^i \frac{\partial g_{ij}(x, y)}{\partial y^k} = 0$, $\forall j, k$;
4. $y^k \frac{\partial g_{ij}(x, y)}{\partial y^k} = 0$, $\forall i, j$;

Demonstração.

1. Consideremos $g_{ij}(x, y) y^i$, pela definição de $g_{ij}(x, y)$,

$$\begin{aligned} g_{ij}(x, y) y^i &= (F(y) F_{y^i y^j}(y) + F_{y^i}(y) F_{y^j}(y)) y^i \\ &= F(y) (y^i F_{y^i y^j}(y)) + F_{y^j}(y) (y^i F_{y^i}(y)) \\ &= F(y) F_{y^j}(y), \end{aligned}$$

onde, a penúltima igualdade decorre da observação (1.22);

2. Considere a expressão $g_{ij}(x, y) y^i y^j$,

$$g_{ij}(x, y) y^i y^j = y^j F(y) F_{y^j}(y) = F(y) F(y) = F^2(y).$$

3. Derivando a expressão $g_{ij}(x, y)$ em relação a y^k ,

$$\begin{aligned}
 y^i \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}(x, y) &= y^i \frac{\partial}{\partial y^k} (F(y) F_{y^i y^j}(y) + F_{y^i}(y) F_{y^j}(y)) \\
 &= F_{y^k}(y) (y^i F_{y^i y^j}(y)) + y^i F(y) F_{y^i y^j y^k}(y) + y^i F_{y^i y^k}(y) F_{y^j}(y) + y^i F_{y^i}(y) F_{y^j y^k}(y) \\
 &= -F(y) F_{y^j y^k}(y) + F(y) F_{y^j y^k}(y) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

logo, a penúltima igualdade decorre da observação (1.22).

4. Similar ao item 3.

□

Vamos definir uma função de relevância no espaço de Finsler

$$C_{ijk}(x, y) := \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}(x, y) \right) = \left(\frac{1}{4} (F^2)_{y^i y^j y^k} \right), \quad (1-5)$$

que são simétricas nos três índices i, j, k , pois as derivadas parciais $F_{y^i y^j y^k}$ não dependem da ordem em que efetuarem as derivações.

A função C_{ijk} tem uma relação com a matriz inversa de g_{ij} , que usaremos mais adiante

$$\frac{\partial g^{ij}(x, y)}{\partial y^k} = -2g^{si}(x, y) C_{ij}^k(x, y). \quad (1-6)$$

Demonstração. Derivando a expressão $g_{si}(x, y) g^{ij}(x, y) = \delta_s^j$ em relação a y^k ,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y^k} (g_{si}(x, y) g^{ij}(x, y)) &= 0 \\
 \frac{\partial g_{si}(x, y)}{\partial y^k} g^{ij}(x, y) + g_{si}(x, y) \frac{\partial g^{ij}(x, y)}{\partial y^k} &= 0 \\
 g_{si}(x, y) \frac{\partial g^{ij}(x, y)}{\partial y^k} &= -g^{ij}(x, y) \frac{\partial g_{si}(x, y)}{\partial y^k} \\
 g^{si}(x, y) g_{si}(x, y) \frac{\partial g^{ij}(x, y)}{\partial y^k} &= -g^{si}(x, y) g^{ij}(x, y) \frac{\partial g_{si}(x, y)}{\partial y^k} \\
 \frac{\partial g^{ij}(x, y)}{\partial y^k} &= -2g^{si}(x, y) C_{si}^k(x, y).
 \end{aligned}$$

□

Além disso, todas essas funções são homogêneas de grau zero, isto é,

$$C_{ijk}(x, \lambda y) = C_{ijk}(x, y), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

em outras palavras, elas são invariantes por um fator multiplicativo em y .

No próximo capítulo, as funções $g_{ij}(x, y)$ e $C_{ijk}(x, y)$ são respectivamente as componentes de dois importantes tensores, chamados **tensor fundamental** e **tensor de Cartan**.

Como consequência do corolário (1.23) percebe-se que,

$$y^i C_{ijk}(x, y) = y^j C_{ijk}(x, y) = y^k C_{ijk}(x, y) = 0,$$

e uma importância fundamental das funções $C_{ijk}(x, y)$, reside no fato de que seu anulamento caracteriza a métrica Riemanniana.

1.4 Resultado para o determinante de g_{ij}

O objetivo desta seção é apresentar a fórmula para o determinante do componente de tensor fundamental g_{ij} , quando F é uma (α, β) -métrica, com α uma métrica Riemanniana e β uma 1-forma. Inicialmente consideramos um lema da álgebra linear, necessário para continuar com o desenvolvimento do trabalho.

Lema 1.24 *Sejam $G = (g_{ij})$ e $H = (h_{ij})$ matrizes simétricas de ordem n , e $C = (c_i)$ um n -vetor. Assuma que H é inversível, onde $H^{-1} = (h^{ij})$, e*

$$g_{ij} = h_{ij} + \delta c_i c_j,$$

então,

$$\det(g_{ij}) = (1 + \delta c^2) \det(h_{ij}),$$

onde $c := \sqrt{h^{ij} c_i c_j}$.

Demonstração. Ver [2]. □

Uma aplicação do lema 1.24, nos dá a expressão para o $\det(g_{ij})$ quando $F = \alpha \cdot \phi \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)$, sendo ϕ uma função positiva de classe C^∞ sobre o intervalo $(-b_0, b_0)$, dada por:

$$\det(g_{ij}) = \phi^{n+1} (\phi - s\phi')^{n-2} [(\phi - s\phi') + (b^2 - s^2)\phi''] \det(a_{ij}), \quad (1-7)$$

onde, a_{ij} são os coeficientes do tensor da métrica Riemanniana α .

Demonstração. Por derivação direta da matriz g_{ij} temos:

$$g_{ij} = \rho a_{ij} + \rho_0 b_i b_j + \rho_1 (b_i \alpha_j + b_j \alpha_i) - s \rho_1 \alpha_i \alpha_j,$$

com $\alpha_i = \alpha_{yi}$ e

$$\begin{aligned}\rho &= \phi^2 - s\phi\phi', & \rho_0 &= \phi\phi'' + \phi'\phi', \\ \rho_1 &= -s(\phi\phi'' + \phi'\phi') + \phi\phi',\end{aligned}$$

onde, as funções são avaliadas sobre $s := \frac{\beta}{\alpha}$ com $|s| \leq b < r$. Pelo lema 1.24, podemos encontrar a fórmula para o $\det(g_{ij})$. $\square$

1.5 Imersão isométrica

Usaremos as seguintes convenções: letras latinas minúsculas (exceto n) $i, j, k, l, \dots$ para índices variando em $1, 2, \dots, n$; e letras gregas minúsculas $\gamma, \tau, \eta, \epsilon, \dots$ para índices variando em $1, 2, \dots, m$ com $m > n$.

Definição 1.25 *Sejam M e $\tilde{M}$ variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow \tilde{M}$ é uma imersão se $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \tilde{M}$ é injetiva para todo $x \in M$.*

Definição 1.26 *Sejam (M, F) e $(\tilde{M}, \tilde{F})$ variedades de Finsler e $f : M \rightarrow \tilde{M}$ uma imersão. Se $F(x, y) = \tilde{F}(f(x), df_x(y))$, para todo $(x, y) \in TM \setminus \{0\}$, então, f é chamada uma imersão isométrica.*

Se prova que, se $f : M \rightarrow \tilde{M}$ é uma imersão isométrica com

$$\tilde{x}^\gamma = f^\gamma(x), \quad \tilde{y}^\gamma = f_i^\gamma y^i, \quad f_i^\gamma = \frac{\partial f^\gamma}{\partial x^i}.$$

Então,

$$g_{ij}(x, y) = \tilde{g}_{\gamma\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) f_i^\gamma f_j^\tau. \quad (1-8)$$

Demonstração. Pela definição 1-2 para os coeficientes $g_{ij}(x, y)$ e o fato que f é uma imersão isométrica, obtemos

$$\begin{aligned}g_{ij}(x, y) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{F}^2(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial y^i \partial y^j} \\ &= \frac{\partial}{\partial y^j} \left(\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{y}^\gamma}(\tilde{x}, \tilde{y}) f_i^\gamma \right) \\ &= \frac{\partial \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}^\tau} \frac{\partial \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}^\gamma} f_i^\gamma f_j^\tau + \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) \frac{\partial^2 \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}^\gamma \partial \tilde{y}^\tau} f_i^\gamma f_j^\tau.\end{aligned}$$

Agora da definição 1-2 para os coeficientes $\tilde{g}_{\gamma\tau}$, temos

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\gamma\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) f_i^\gamma f_j^\tau &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{F}^2(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}^\tau \partial \tilde{y}^\gamma} f_i^\gamma f_j^\tau = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^\tau} \left(\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) \frac{\partial \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}^\gamma} \right) f_i^\gamma f_j^\tau \\ &= \frac{\partial \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}^\tau} \frac{\partial \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}^\tau} f_i^\gamma f_j^\tau + \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) \frac{\partial^2 \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}^\tau \partial \tilde{y}^\gamma} f_i^\gamma f_j^\tau.\end{aligned}$$

Portanto, $g_{ij}(x, y) = \tilde{g}_{\gamma\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) f_i^\gamma f_j^\tau$. □

Do resultado anterior segue-se que se $f : (M, F) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{F})$ é uma imersão isométrica, com

$$\tilde{F} = \tilde{\alpha} \phi(s) = \tilde{\alpha} \phi\left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}\right), \quad \tilde{\alpha} = \sqrt{\tilde{a}_{\gamma\tau} \tilde{y}^\gamma \tilde{y}^\tau}, \quad \tilde{\beta} = \tilde{b}_\gamma \tilde{y}^\gamma,$$

onde, a função $\phi = \phi(s)$ é positiva de classe C^∞ sobre um intervalo simétrico $(-b_0, b_0)$. Então f induz uma métrica F , dada por

$$F = f^* \tilde{F} = \alpha \phi\left(\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

onde,

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{a_{ij} y^i y^j}, & a_{ij} &= \tilde{a}_{\gamma\tau} f_i^\gamma f_j^\tau; \\ \beta &= b_i y^i, & b_i &= \tilde{b}_\gamma f_i^\gamma.\end{aligned}$$

Demonstração. Dada uma superfície $\widetilde{TM}$, as formas diferenciais de grau zero são funções reais $\tilde{F} : \widetilde{TM} \rightarrow \mathbb{R}$. Como $f : M \rightarrow \tilde{M}$ é uma aplicação de classe C^∞ então o pull-back de $\tilde{F}$ por meio de f é $f^*(\tilde{F}) = \tilde{F}(f, df)$, assim temos

$$\begin{aligned}f^*(\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y})) &= \tilde{F} \circ (f, df)(x, y) = \tilde{F}(f(x), df_x(y)) = \tilde{\alpha}(f(x), df_x(y)) \phi\left(\frac{\tilde{\beta}(f(x), df_x(y))}{\tilde{\alpha}(f(x), df_x(y))}\right) \\ &= \sqrt{\tilde{a}_{\gamma\tau}(f(x))(df_x(y))^\gamma (df_x(y))^\tau} \phi\left(\frac{b_\gamma(f(x))(df_x(y))^\gamma}{\sqrt{\tilde{a}_{\gamma\tau}(f(x))(df_x(y))^\gamma (df_x(y))^\tau}}\right) \\ &= \sqrt{\tilde{a}_{\gamma\tau}(f(x)) f_i^\gamma y^i f_j^\tau y^j} \phi\left(\frac{b_\gamma(f(x)) f_i^\gamma y^i}{\sqrt{\tilde{a}_{\gamma\tau}(f(x)) f_i^\gamma y^i f_j^\tau y^j}}\right) \\ &= \sqrt{a_{ij} y^i y^j} \phi\left(\frac{b_i y^i}{\sqrt{a_{ij} y^i y^j}}\right) = \alpha \phi\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).\end{aligned}$$

□

Definição 1.27 Consideremos uma métrica $F = \alpha\phi(\frac{\beta}{\alpha})$ sobre uma variedade M , onde $\alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ é uma métrica Riemanniana, $\beta(x, y) = b_i(x)y^i$ é uma 1-forma e $\phi = \phi(s)$ é uma função positiva de classe C^∞ sobre um intervalo simétrico $(-b_0, b_0)$. A derivada covariante $b_{i|j}(x)$ de β com respeito à métrica α é definida por

$$b_{i|j}(x)\theta^j := db_i - b_j(x)\theta_i^j(x),$$

onde $\theta^i = dx^i$ e $\theta_i^j(x) := \bar{\Gamma}_{ik}^j(x)dx^k$ denotada a conexão de Levi-Civita de α .

Observação 1.28 Por definição temos que

$$\begin{aligned} b_{i|j}(x)\theta^j &= b_{i|j}(x)dx^j \\ &= \frac{\partial b_i(x)}{\partial x^j}dx^j - b_k(x)\bar{\Gamma}_{ij}^k(x)dx^k \\ &= \left(\frac{\partial b_i(x)}{\partial x^j} - b_k(x)\bar{\Gamma}_{ij}^k(x) \right) dx^j \end{aligned}$$

Assim, $\{dx^j\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ é uma base para T_p^*M . logo a derivada covariante de β com respeito à métrica α é

$$b_{i|j}(x) = \frac{\partial b_i(x)}{\partial x^j} - b_k(x)\bar{\Gamma}_{ij}^k(x). \quad (1-9)$$

Definição 1.29 Uma 1-forma $\beta(x, \cdot) = b_i(x)dx^i(\cdot)$ é fechada se $d\beta(x, \cdot) = 0$.

Considere:

$$\begin{aligned} s_{ij}(x) &:= \frac{1}{2} (b_{i|j}(x) - b_{j|i}(x)) ; \\ r_{00}(x, y) &:= b_{i|j}(x)y^i y^j ; \\ r_{00|0}(x, y) &:= b_{i|j|k}(x)y^i y^j y^k . \end{aligned}$$

Podemos associar os $s_{ij}(x)$ definidos acima com as 1-formas diferenciáveis

Lema 1.30 Uma 1-forma $\beta(x, \cdot) = b_i(x)dx^i(\cdot)$ é fechada se, e somente se, $s_{ij}(x) = 0$.

Demonstração. Suponhamos que $d\beta(x, \cdot) = 0$ então

$$b_{i|j}(x) = \frac{\partial b_i(x)}{\partial x^j} - b_k(x)\bar{\Gamma}_{ij}^k(x) = 0$$

como os símbolos de Christoffel da conexão Levi-Cevita de α são simétricos, isto é,

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k(x) = \bar{\Gamma}_{ji}^k(x),$$

obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
 s_{ij}(x) &:= \frac{1}{2} (b_{i|j}(x) - b_{j|i}(x)) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_i}{\partial x^j}(x) - b_k(x) \bar{\Gamma}_{ij}^k(x) - \frac{\partial b_j}{\partial x^i}(x) + b_k(x) \bar{\Gamma}_{ji}^k(x) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_i}{\partial x^j}(x) - \frac{\partial b_j}{\partial x^i}(x) \right) = 0.
 \end{aligned}$$

□

Equações de estrutura na Geometria de Finsler

Um fato fundamental no desenvolvimento da geometria diferencial foi a introdução da derivada covariante, ela permite-nos dar um sentido à derivada do vetor velocidade de uma curva em uma variedade. Esta noção tem consequências importantes, como a definição de uma noção de derivação de campos de vetores com certas propriedades (chamada conexão afim). Isto estimulou a criação de várias “estruturas geométricas” mais gerais que a geometria Riemanniana.

Na geometria de Finsler, Chern introduziu uma conexão para métricas de Finsler, dando uma solução que garante que duas estruturas de Finsler diferem apenas por uma mudança de coordenadas. Esta conexão é uma generalização natural da conexão de Levi-Civita no caso Riemanniano, passando a ser conhecida como, “**conexão Chern**”, que é de torção nula. Mas não é completamente compatível com o produto interno definido por g .

Esta conexão permite-nos introduzir uma métrica Riemanniana $\hat{g}$, induzida em SM conhecida como a **metrica de Sasaki**, ao usar as formas de conexão e descompor o fibrado tangente $T(SM) = H(SM) \oplus V(SM)$ nos subfibrados tangentes horizontal e vertical respectivamente. Assim, é possível definir o elemento volume Holmes-Thompson dV_{SM} em SM , como veremos nas próximas seções.

2.1 O fibrado vetorial p^*TM

Vamos trabalhar sobre $TM \setminus \{0\}$ e usar rigidamente apenas os elementos que são invariantes sobre redimensionamento positivo em y , (por exemplo $g_{ij}(x, \lambda y) = g_{ij}(x, y)$ com $\lambda > 0$), assim usando coordenadas homogêneas, os elementos são vistos como objetos, sobre a esfera tangente projetiva SM .

Considerando o fibrado tangente "slit", sobre M .

$$TM_0 := TM \setminus \{0\} = \{(x, y); x \in M, y \neq 0 \in T_x M\},$$

a esfera tangente projetiva $SM := TM_0 / \sim$ é o espaço quociente de TM_0 pela relação de equivalência $y \sim y'$ se, e somente se, $y = \lambda y'$ para algum $\lambda > 0$. Dado um $(x, y) \in TM$, vamos denotar esta classe de equivalência (que é um ponto em SM) por $(x, [y])$.

Geometricamente, SM é a variedade do conjunto de todas as retas de M que passam pelo origem e não pertencem ao hiperplano $y = 0$. Suas coordenadas locais são denotadas por (x^i, y^i) onde $(y^1, \dots, y^n) \neq (0, \dots, 0)$, assim, elas são coordenadas homogêneas e os cálculos locais sobre SM podem ser feitos convenientemente em TM com a condição que o resultado é invariante sobre o escalar $y \rightarrow \lambda y, \lambda \neq 0$.

Em SM , a projeção natural p , sua diferencial $dp = p_*$ e o pull-back p^* da projeção p , são definidas por

$$\begin{aligned} p : SM &\longrightarrow M \\ (x, [y]) &\longmapsto x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_* : T_{(x, [y])}(SM) &\longrightarrow T_{p(x, [y])}M = T_x M \\ v &\longmapsto p_*(v) = y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^* : T_x^* M &\longrightarrow T_{(x, [y])}^*(SM) \\ \omega &\longmapsto p^* \omega, \end{aligned}$$

para cada $v \in T_{(x, [y])}(SM)$, por definição temos:

$$p^* \omega(v) := \omega(p_*(v)) = \omega(y),$$

$$T_x^* M = \{ \varphi : T_x M \longrightarrow \mathbb{R}; \text{linear} \},$$

$$T_{(x, [y])}^*(SM) = \{ \xi : T_{(x, [y])}(SM) \longrightarrow \mathbb{R}; \text{linear} \}.$$

O pull-back da projeção natural p induz um fibrado vetorial n -dimensional p^*TM sobre uma base $2n - 1$ dimensional de SM . Uma fibra de p^*TM , chamada fibrado tangente pull-back é definida por

$$p^*TM := \{ (x, [y], v); v \in T_x M \} \simeq T_x M,$$

veja figura 2.1. Uma fibra de p^*T^*M chamado fibrado cotangente pull-back é definido por

$$p^*T^*M := \{ (x, [y], \varphi); \varphi \in T_x^* M \} \simeq T_x^* M,$$

observe que, p^*T^*M é o fibrado vetorial dual de p^*TM , no seguinte sentido

$$(x, [y], \varphi)(x, [y], v) := \varphi(v), (\varphi, v) \in T_x^*M \times T_xM.$$

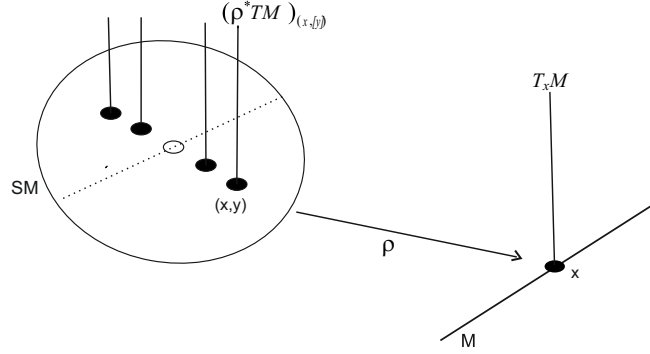


Figura 2.1: Fibrado vetorial

O fibrado vetorial p^*TM é especial, porque tem uma secção distinta global ℓ cujo valor para qualquer $(x, [y]) \in SM$ com $y \in T_xM$, é dado por

$$\ell := \left([y], \frac{y}{F(x, y)} \right). \quad (2-1)$$

Em outras palavras, para cada "raio" $[y]$, atribuímos o vetor $\frac{y}{F} = \frac{y^i}{F} \frac{\partial}{\partial x^i} \in p^*TM$.

A 1-forma $\omega = [F]_{y^i} dx^i$ chamada a **forma de Hilbert**, é um elemento de p^*T^*M , porque $[F]_{y^i}$ é homogênea de grau zero em y , isto é, invariante sobre um fator multiplicativo positivo em y .

Observação 2.1 A 1-forma ω é o dual de ℓ . Isto é uma consequência do Teorema de Euler. De fato,

$$\begin{aligned} \omega(\ell) &= F_{y^i} dx^i \left(\frac{y^j}{F} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{y^j}{F} F_{y^i} dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \frac{y^j}{F} F_{y^i} \delta_j^i = \frac{y^i}{F} F_{y^i} = 1. \end{aligned}$$

Como outra utilização dos coeficientes $g_{ij}(x, y)$ definidos em (1-2), vamos agora produzir um produto interno g em p^*TM especificando que

$$g := g_{ij}(x, y) dx^i \otimes dx^j \quad (2-2)$$

fica na fibra sobre o ponto $(x, [y]) \in SM$, onde $y \in T_xM$. Também verificaremos que

$$\sqrt{g_{ij}(x, y) y^i y^j} = F(x, y).$$

De fato,

$$\begin{aligned} g_{ij}(x, y) &= F \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j} + \frac{\partial F}{\partial y^i} \frac{\partial F}{\partial y^j}, \\ g_{ij}(x, y) y^i y^j &= F \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j} y^i y^j + \frac{\partial F}{\partial y^i} y^i \frac{\partial F}{\partial y^j} y^j \\ g_{ij}(x, y) y^i y^j &= F^2. \end{aligned}$$

Observe que a fibra de p^*TM é uma cópia de $T_x M$ sobre cada ponto $(x, [y]) \in SM$, então o fibrado vetorial p^*TM admite uma métrica Riemanniana natural dada pelo **tensor fundamental**

$$g := g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

que é uma seção simétrica de $p^*T^*M \otimes p^*T^*M$.

Como consequência do Teorema de Euler e o corolário 1.22 temos que a seção global ℓ tem norma 1 com respeito à métrica Riemanniana g , isto é

$$\begin{aligned} g(\ell, \ell) &= g_{ij}(x, y) dx^i \otimes dx^j \left(\frac{y^i}{F} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{y^j}{F} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= g_{ij}(x, y) \frac{y^i}{F} \frac{y^j}{F} dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) dx^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= g_{ij}(x, y) \frac{y^i}{F} \frac{y^j}{F} = 1. \end{aligned}$$

Temos também o **tensor de Cartan**

$$A = A_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k,$$

que é uma seção simétrica de $\otimes^3 p^*T^*M$, onde

$$A_{ijk} = F C_{ijk}, \quad C_{ijk} = \frac{1}{4} [F^2]_{y^i y^j y^k}.$$

Estabeleceremos as seguintes definições, úteis para introduzir a conexão de Chern sobre p^*TM ,

$$\gamma_{jk}^i := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^j} \right) g^{is}, \quad (2-3)$$

chamados **símbolos de Christoffel de segunda espécie** e

$$N_j^i = \gamma_{jk}^i y^k - C_{ijk}^i \gamma_{rs}^k y^r y^s, \quad (2-4)$$

denominadas **conexões não-lineares** em TM_0 .

Lema 2.2 Se $G^i = G^i(x, y)$ é dado por $G^i = \frac{1}{2} \gamma_{jk}^i y^j y^k$, então $N_j^i(x, y) = N_j^i$, satisfaz:

$$\left[\frac{1}{2} G^i \right]_{y^j} = N_j^i,$$

Demonstração. Usando a simetria dos $C_{ijk} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$, as propriedades do corolário (1.23), e a identidade (1-6), segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^i}{\partial y^j} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y^j} (\gamma_{km}^i y^k y^m) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y^j} \left[g^{is} \left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ms}}{\partial x^k} \right) y^k y^m \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial g^{is}}{\partial y^j} \left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ms}}{\partial x^k} \right) y^k y^m + 3 g^{is} \frac{\partial C_{jks}^i}{\partial x^m} y^k y^m + g^{is} \left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ms}}{\partial x^k} \right) y^k \\ &= \frac{1}{2} (-2 g^{km} C_{jk}^i) \left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ms}}{\partial x^k} \right) y^k y^m + 2 \gamma_{km}^i y^m \\ &= 2 \gamma_{km}^i y^m - 2 C_{jk}^i \gamma_{rs}^k y^r y^s = 2 N_j^i, \end{aligned}$$

□

chamaremos a G^i **coeficientes geodésicos** da métrica de Finsler.

Eles satisfaçam em uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ diferenciável por partes e de classe C^1 em cada ponto t_i da partição $a = t_1 < \dots < t_k = b$, a equação diferencial ordinária de segundo ordem

$$\ddot{\gamma}^i + 2 G^i(\gamma, \dot{\gamma}) = 0.$$

Em um sistema de coordenadas locais da curva γ temos

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + 2 G^i \left(x(t), \frac{dx}{dt} \right) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Obtemos uma interessante propriedade para $\left[\frac{1}{2} G^i \right]_{y^j}$, ela é uma função positiva homogênea de grau um. De fato, para um $\lambda > 0$ os coeficientes $g_{ij}(x, y)$ da equação (1-2) são homogêneos de grau zero em relação a y , assim γ é homogênea de grau zero, agora fazendo uso do corolário 1.21, temos que C_{ijk} é uma função homogênea de grau -1, então

$$\left[\frac{1}{2} G^i \right]_{y^j} (x, \lambda y) = \gamma_{jk}^i (\lambda y^k) - \frac{1}{\lambda} C_{jk}^i(x, y) \gamma_{rs}^k (\lambda y^r) (\lambda y^s) = \lambda \left(\gamma_{jk}^i y^k - C_{jk}^i(x, y) \gamma_{rs}^k y^r y^s \right),$$

isto conclui que $\left[\frac{1}{2} G^i \right]_{y^j}$ é uma função homogênea de grau 1, assim pelo Teorema de Euler se tem,

$$y^k \left[\frac{1}{2} G^i \right]_{y^j y^k} = \left[\frac{1}{2} G^i \right]_{y^j} = N_j^i. \quad (2-5)$$

Do anterior, obtemos uma importante identidade, a segunda y -derivada de G^i multiplicada por $y^i y^j$ é o coeficiente geodésico G^i , ou seja,

$$y^j y^k \left[\frac{1}{2} G^i \right]_{y^j y^k} = N_j^i y^j = \gamma_{jk}^i y^k y^j - \cancel{C_{jk}^i y^j} \gamma_{rs}^k y^r y^s = G^i. \quad (2-6)$$

Observe que, pelo método do referencial móvel, em cada fibra de p^*T^*M se pode considerar $\{e_i = u_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}\}$ um referencial ortonormal local com $e_n := \ell$, correspondentemente $\{\omega^i = v_k^i dx^k\}$ seu co-referencial ortonormal positivo, assim $\omega^i(e_j) = \delta_j^i$ e $\omega^n = \omega$ o dual de ℓ . Assim, encontramos uma equivalência para as bases associadas a uma parametrização,

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = v_k^i e_i, \quad dx^i = u_i^k \omega^k, \quad (2-7)$$

isto prova que ω^i e e_j podem ser considerados, respectivamente, como 1-formas e campos vetoriais sobre SM .

Pela orientação positiva do co-referencial ortonormal $\{\omega^i = v_k^i dx^k\}$, se tem uma relação dos v_k^i e os coeficientes g_{ij} por meio do determinante.

$$\begin{aligned} g_{ij} &= g_{ij} dx^i \otimes dx^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= g_{ij} dx^i \otimes dx^j (v_i^k e_k, v_j^m e_m) \\ &= g_{ij} dx^i (v_i^k e_k) dx^j (v_j^m e_m) \\ &= g_{ij} u_k^i \omega^k (v_i^k e_k) u_m^j \omega^m (v_j^m e_m), \end{aligned}$$

pela ortonormalidade dos $\{e_i\}$ temos $g_{ij} u_k^i u_m^j = \delta_k^m$, assim

$$\begin{aligned} g_{ij} &= g_{ij} u_k^i u_m^j v_i^k v_j^m \\ &= \delta_k^m v_i^k v_j^m, \\ &= v_i^k v_j^k \\ &= v_i^k (v_i^k)^T, \end{aligned}$$

em consequência $g_{ij} = v_i^k (v_i^k)^T$, assim,

$$v := \det(v_i^j) = \sqrt{\det(g_{ij})}. \quad (2-8)$$

Da definição para N_j^i e o co-referencial local ortonormal sobre p^*TM pode-se expressar o referencial ortonormal local sobre $T(SM)$ e seu dual, o co-referencial

ortonormal local sobre $T^*(SM)$, considerando:

$$\begin{aligned}\omega^i &= v_j^i dx^j, \\ \omega^{n+i} &= v_j^i \delta y^j, \quad \delta y^i := \frac{1}{F} \left(dy^i + N_j^i dx^j \right), \\ \hat{e}_i &= u_i^j \frac{\delta}{\delta x^j}, \quad \frac{\delta}{\delta x^j} := \frac{\partial}{\partial x^j} - N_j^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \\ \hat{e}_{n+i} &= u_i^j F \frac{\partial}{\partial y^i}.\end{aligned}\tag{2-9}$$

onde $\left\{ \frac{\delta}{\delta x^i}, F \frac{\partial}{\partial y^i} \right\}$ e $\left\{ dx^i, \frac{\delta y^i}{F} \right\}$ são as bases duais locais sobre $T(SM)$. Assim, as bases ortonormais locais para o fibrado cotangente e fibrado tangente de SM são $\{\omega^i, \omega^{n+i}\}$ e $\{\hat{e}_i, \hat{e}_{n+i}\}$ respetivamente.

Observação 2.3 A 1-forma ω^{2n} é nula sobre SM .

A verificação é direta,

$$\omega^{2n} = v_j^n \delta y^j = \omega \delta y^j = [F]_{y^j} \delta y^j,$$

o que implica que seu dual é o “raio” vetor $y^j \frac{\partial}{\partial y^j}$, porque

$$[F]_{y^j} \delta y^j \left(y^j \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = [F]_{y^j} \frac{1}{F} \left(dy^j + N_k^j dx^k \right) \left(y^j \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = [F]_{y^j} \frac{y^j}{F} = 1.$$

Como o vetor pertence à mesma classe do vetor ℓ sobre SM , a 1-forma ω^{2n} será nula porque coincide com ω sobre SM . Assim, temos $n - 1$ formas $\{\omega^{n+i}\}$ sobre SM .

O uso das bases ortonormais duais é importante, porque sua aplicação apresenta a expressão do teorema que caracteriza as superfícies mínimas por meio da variação do volume.

Como outra utilização do referencial local (2-9), definimos os símbolos

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{g^{is}}{2} \left(\frac{\delta g_{sj}}{\delta x^k} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^s} + \frac{\delta g_{ks}}{\delta x^j} \right),$$

chamados símbolos de Christoffel “trick”, e que tem interessantes aplicações. Por exemplo, são os coeficientes da conexão de Chern e, quando o tensor de Cartan C_{ijk} é nulo, os símbolos coincidem com os símbolos do Christoffel da conexão de Levi-Civita. Também para espaços locais de Minkowski os coeficientes da conexão de Chern são nulos em coordenadas locais.

2.2 A conexão de Chern

A conexão de Chern em uma variedade de Finler é uma conexão linear que atua sobre o fibrado tangente p^*TM ao longo da variedade SM . Ela não é uma conexão do fibrado tangente TM ao longo de M , no entanto, na geometria de Finsler funciona de forma semelhante ao que faz a conexão de Levi-Civita na geometria Riemanniana. Chern usa o método do referencial móvel e a diferenciação exterior para que sua conexão satisfaça o conjunto geral de axiomas que possui uma conexão linear. Sendo assim a conexão de Chern torna-se de torção nula, mas não é completamente compatível com o produto interno do fibrado tangente p^*TM definido por g .

Ao resolver as propriedades de estrutura da conexão ${}^c\nabla$ de Chern sobre X , obtém-se as propriedades

1. ${}^c\nabla_v(fX) = (df)(v)X + f({}^c\nabla_v X)$;
2. ${}^c\nabla_v(X_1 + X_2) = {}^c\nabla_v X_1 + {}^c\nabla_v X_2$;
3. ${}^c\nabla_{f v} X = f({}^c\nabla_v X)$;
4. ${}^c\nabla_{v_1+v_2} X = {}^c\nabla_{v_1} X + {}^c\nabla_{v_2} X$,

onde, X é um campo tensorial de p^*TM , f uma função real e v, v_1, v_2 vetores de TM .

Usando a **derivada covariante** ${}^c\nabla_v \frac{\partial}{\partial x^j}$ que é expressada como:

$${}^c\nabla_v \frac{\partial}{\partial x^j} = \omega_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k,$$

obtemos as **1-formas de conexão** ω_j^i .

Teorema 2.4 (Chern em SM) *Seja (M, F) uma variedade de Finsler n -dimensional, para um referencial local arbitrário $\{e_i\}$ de p^*TM e seu co-referencial dual $\{\omega^i\}$ de p^*T^*M . Existe um único conjunto de 1-formas $\{\omega_j^i\}$, chamadas formas de conexão de Chern em SM , que são caracterizados pelas equações de estrutura.*

1. Torção Nula:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i;$$

2. Quase g-compátível:

$$dg_{ij} = g_{kj} \omega_i^k + g_{ik} \omega_j^k + 2C_{ijk} \omega^{n+k},$$

onde,

$$\omega^{n+i} := dy^i + y^j \omega_j^i.$$

Demonstração. veja [1] □

O teorema mostra que $\{\omega^i, \omega^{n+i}\}$ é uma base local para o fibrado co-tangente T^*SM , e $\{\omega^{n+i}\}$ é uma base local para $T^*(S_x M)$ pull-back de $S_x M$.

Diferencial Covariante do tensor de Cartan A

Considere o tensor simétrico $A := A_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k$, onde $A_{ijk} := F C_{ijk}$. A diferencial covariante do tensor de Cartan A, (veja [2]) é

$$\nabla A = (dA_{ijk} - A_{ljk} \omega_i^l - A_{ilk} \omega_j^l - A_{ijl} \omega_k^l) dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \quad (2-10)$$

Defina

$$\dot{A}_{ijk} := A_{ijk|s} \ell^s,$$

onde $A_{ijk|s}$ é a diferencial covariante do tensor de Cartan em relação a x , isto é

$$\dot{A}_{ijk} = \frac{\delta A_{ijk}}{\delta x^s} \frac{y^s}{F} - A_{ljk} \Gamma_{is}^l \frac{y^s}{F} - A_{ilk} \Gamma_{js}^l \frac{y^s}{F} - A_{ijl} \Gamma_{ks}^l \frac{y^s}{F}. \quad (2-11)$$

Do resultado anterior, os símbolos Γ_{jk}^i de Christoffel “trick” e a derivada da conexão não linear N_j^i determinam uma conhecida conexão na geometria de Finsler, chamada a *conexão de Berwald*, isto é

$$\left[\frac{1}{2} G^k \right]_{y^i y^j} = \dot{A}_{jk}^i + \Gamma_{jk}^i. \quad (2-12)$$

Observe-se, do corolário 2.2 mostramos que $\left[\frac{1}{2} G^i \right]_{y^i} = N_j^i$, então derivando em relação a y^k , temos:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} G^i \right]_{y^j y^k} &= \frac{\partial}{\partial y^k} \left(\gamma_{jk}^i y^k - C_{jk}^i \gamma_{rs}^k y^r y^s \right) \\ &= \gamma_{jk}^i - 2C_{jk}^i \gamma_{rs}^k y^r + g^{is} \frac{\partial C_{jks}}{\partial x^l} y^l + 2g^{mk} C_{jk}^i C_{jks} \gamma_{rs}^k y^r y^s - g^{is} C_{jksm} \gamma_{rs}^k y^r y^s - 2C_{jm}^i N_k^i \\ &= \gamma_{jk}^i - 2C_{jk}^i \left(\gamma_{rs}^k y^r - C_{jk}^m \gamma_{rs}^k y^r y^s \right) + g^{is} \frac{\partial C_{jks}}{\partial x^l} y^l - g^{is} C_{jksm} \gamma_{rs}^k y^r y^s - 2C_{jm}^i N_k^i \\ &= \gamma_{jk}^i - 2C_{jk}^i N_k^s + g^{is} \frac{\partial C_{jks}}{\partial x^l} y^l - g^{is} C_{jksm} \gamma_{rs}^k y^r y^s - 2C_{jm}^i N_j^s \\ &= \gamma_{jk}^i + \left(-C_{jk}^i N_k^s + C_{km}^i N_m^l - C_{jm}^i N_j^r \right) + g^{is} \frac{\partial C_{jks}}{\partial x^l} y^l - g^{is} C_{jksm} \gamma_{rs}^k y^r y^s \\ &\quad - C_{jk}^i N_k^s - C_{km}^i N_m^l - C_{jm}^i N_j^r \\ &= \Gamma_{ij}^k + g^{is} \frac{\partial C_{jks}}{\partial x^l} y^l - g^{is} C_{jksm} N_s^l + g^{is} C_{jksm} \cancel{C_{jm}^i} \gamma_{ms}^l y^m y^s \\ &\quad - C_{jk}^i N_k^s - C_{km}^i N_m^l - C_{jm}^i N_j^r \\ &= \Gamma_{ij}^k + \dot{A}_{jk}^i, \end{aligned}$$

Do anterior e a igualdade da equação 2-5 obtemos uma nova identidade para a conexão

não linear N_j^i .

$$\begin{aligned} \left(\Gamma_{ij}^k + A_{jk}^i \right) y^k &= N_j^i \\ \Gamma_{ij}^k y^k &= N_j^i \end{aligned} \quad (2-13)$$

2.3 Métrica de Sasaki em SM

Dado qualquer variedade Riemanniana, temos um produto interno $g_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j$ em cada espaço tangente $T_x M$, visto como um espaço vetorial. Por outro lado, a situação numa variedade de Finsler é mais geral, no espaço vetorial $T_x M$, temos uma família de produtos internos (com oposição a apenas um, no caso Riemanniano) $g_{ij}(x, y) dx^i \otimes dx^j$, parametrizada pelos raios λy ($\lambda > 0$) que emanam a partir do origem. Por outro lado, se optamos por considerar $T_x M$ como uma variedade, então $g_{ij}(x, y) dy^i \otimes dy^j$ desempenha o papel de uma métrica Riemanniana que é invariante ao longo de cada raio e é (possivelmente) singular na origem, tal é a informação transportada por ds^2 definida em (1-3).

Uma métrica riemanniana $\dot{g}_x$ pode existir na esfera projetiva $S_x M$, tornando-a isométrica à esfera tangente unitária S_x . Na verdade, vamos produzir uma estrutura Riemanniana $\hat{g}$ sobre o espaço tangente SM (**métrica de Sasaki**), cuja restrição em cada fibra $S_x M$ se tenha uma estrutura Riemanniana $\dot{g}_x$.

Considere uma sub-coleção de $n - 1$ 1-formas de conexão $\{\omega^{n+i} = v_j^a \delta y^j\}$ do co-referencial ortonormal local sobre $T^*(SM)$. Os vetores tangentes sobre SM que são anulados por todos os ω_n^a , podem ser identificados como o sub-fibrado tangente horizontal HSM de TSM ; suas fibras são n -dimensionais. Por outro lado, seja $VSM := \cup_{x \in M} T(S_x M)$ o sub-fibrado tangente vertical de $T(SM)$; suas fibras são $n - 1$ dimensionais.

A decomposição

$$TSM = HSM \oplus VSM \quad (2-14)$$

se mantém, porque HSM e VSM é soma direta de TSM . Para verificar se eles realmente têm intersecção zero, primeiro considere a conexão linear

$$\nabla : C^\infty(TSM) \otimes C^\infty(p^*TM) \rightarrow C^\infty(p^*TM).$$

Explicitamente

$$\nabla_{\hat{X}} Z := \{\hat{X} z^i + z^j \omega^{n+i}(\hat{X})\} e_i, \quad (2-15)$$

onde, $\hat{X}$ é um campo vetorial em SM e $Z = z^i e_i$ é a seção de p^*TM . Usando ∇ , definimos

o homomorfismo $\mu : TSM \rightarrow \ell^\perp$ por:

$$\mu(\hat{X}) := \nabla_{\hat{X}} \ell = \nabla_{\hat{X}} e_n = \omega^{n+i}(\hat{X}) e_i. \quad (2-16)$$

Note que:

$$HSM = \ker \mu. \quad (2-17)$$

Podemos verificar

$$\mu|_{VSM} : VSM \rightarrow \ell^\perp \quad \text{é um isomorfismo,} \quad (2-18)$$

assim,

$$\text{rank } \mu = n - 1. \quad (2-19)$$

A transversalidade entre HSM e VSM segue imediatamente das equações (2-17) e (2-18).

A discussão acima foi realizado no contexto da conexão de Chern. Mas também pode ser feito usando outras conexões, como por exemplo a conexão de Berwald e a conexão de Cartan. O ponto é que todas essas conexões definem a mesma função μ e, portanto, a mesma decomposição (2-14) de TSM . Neste sentido, μ e (2-14) são intrínsecos para a estrutura de Finsler.

Portanto, a estrutura Riemanniana $\hat{g}$ em SM é construída através da identificação de VSM com ℓ (por meio da função μ) e HSM com p^*TM .

A segunda identificação pode ser conseguido pela função $\rho : TSM \rightarrow p^*TM$, definindo

$$\rho(\hat{X}) := (x, [y], p_* \hat{X}), \quad \hat{X} \in T_{(x, [y])} SM; \quad (2-20)$$

mas explicitamente,

$$\rho(\hat{X}) = \omega^i(\hat{X}) e_i. \quad (2-21)$$

Aqui, $p : SM \rightarrow M$ é a projeção canônica. Como ρ , em essência, simplesmente descarta todos os componentes $\frac{\partial}{\partial y^i}$ de $\hat{X}$, obtemos

$$\rho|_{HSM} : HSM \rightarrow p^*TM \quad \text{é um isomorfismo,} \quad (2-22)$$

$$\text{rank } \rho = n, \quad (2-23)$$

e, é claro que

$$VSM = \ker \rho. \quad (2-24)$$

O produto interno g em p^*TM agora induz uma estrutura Riemanniana $\hat{g}$ em SM da seguinte forma:

$$\hat{g}(\hat{X}, \hat{Y}) := g(\rho(\hat{X}), \rho(\hat{Y})) + g(\mu(\hat{X}), \mu(\hat{Y})), \quad (2-25)$$

equivalente a,

$$\hat{g} := \delta_{ij} \omega^i \otimes \omega^j + \delta_{ab} \omega^{n+a} \otimes \omega^{n+b} = g_{ij} dx^i \otimes dx^j + \delta_{ab} \omega^{n+a} \otimes \omega^{n+b}, \quad (2-26)$$

$\hat{g}$ é conhecida como a **métrica Sasaki** de TM_0 a SM .

Em particular, HSM e VSM são pela definição ortogonais com respeito a $\hat{g}$, e assim, cada esfera projetiva $S_x M$ é vista como uma subvariedade de SM que herda a métrica Riemanniana $\dot{g}_x$ por meio de:

$$\dot{g}_x(\dot{U}\dot{V}) := g(\mu(\dot{U}), \mu(\dot{V})), \quad \dot{U}, \dot{V} \in T(S_x M);$$

isto é,

$$\dot{g}_x := \delta_{ab} \omega^{n+a} \otimes \omega^{n+b}. \quad (2-27)$$

Da equação (2-27), as formas $\omega^{n+\alpha} \omega^{n+\beta}$, são o pull-back sobre $S_x M$ em outras palavras, só os $\{\delta y^i\}$ são usados.

Denotando por D , a conexão de Levi-Civita, da variedade Riemanniana $(SM, \hat{g})$. A forma de divergência φ sobre $(SM, \hat{g})$ é $div_{\hat{g}} \varphi = \sum_A (D_{e_A} \varphi)$, onde $\{e_A\}$ é a base dual de $\{w^A\}$ sobre $T(SM)$ e D_{e_A} é a derivada covariante ao longo da e_A . Em [12] foi provado que o divergente da 1-forma $\varphi = \varphi_i dx^i$ sobre $(SM, \hat{g})$ é

$$div_{\hat{g}} \varphi = g^{ij} (\varphi_{i|j} - \varphi_i \dot{\eta}_j), \quad (2-28)$$

onde, $\dot{\eta}_j = \dot{A}_{jk}^i$ e

$$\varphi_{i|j} = \frac{\delta \varphi_i}{\delta x^j} - \varphi_k \Gamma_{ij}^k. \quad (2-29)$$

é a derivada covariante para 1-formas sobre SM .

2.4 A forma Volume nos Espaços de Finsler

Existem dois tipos de formas volume sobre espaços de Finsler. Ambos reduzem-se à forma de volume Riemanniana quando a métrica de Finsler provém da métrica Riemanniana. Nesta seção estudaremos a forma volume de Holmes-Thompson, que esta definida sobre SM , para isso, construímos uma estrutura Riemanniana $\hat{g}$ induzida naturalmente pela estrutura de Finsler sobre o fibrado tangente de SM .

Primeiro foi definido a esfera tangente unitária S_x , equação (1-4), como esta é topologicamente difeomorfa à esfera unitária S^{n-1} , então, existe para cada $x \in M$ uma métrica Riemanniana h_x , induzida sobre S_x no espaço furado $(T_x M \setminus \{0\}, ds^2)$, de uma variedade M de Finsler. Assim, é possível construir uma isometria i de (S_x, h_x)

em $(S_x M, \dot{g})$, ou seja, existe uma métrica Riemanniana sobre a esfera projetiva $S_x M$, onde seu elemento volume coincide com o elemento volume da subvariedade S_x .

Lema 2.5 A função canônica $i : (S_x, h_x) \rightarrow (S_x M, \dot{g}_x)$ dada por:

$$i(y) := [y]$$

é uma isometria.

Demonstração. veja [3]. □

Devido a este lema, temos

$$Vol(x) = Vol(S_x M, h_x) = Vol(S_x M, \dot{g}_x), \quad (2-30)$$

a derivação do elemento volume de $(S_x M, \dot{g}_x)$, é representada pela isometria i , na esfera unitária S_x por meio da métrica Riemanniana induzida h_x . Como a estrutura Riemanniana (S_x, h_x) é uma subvariedade de R^n de codimensão 1 difeomorfo a S^{n-1} , veja [2], seu elemento volume é representado por

$$dV = \sqrt{\det(g_{ij})} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{y^j}{F} \delta y^1 \wedge \cdots \wedge \delta y^n, \quad (2-31)$$

onde, os $\frac{y^i}{F}$ são usados porque os y^i são invariantes em SM .

Note que a partir do elemento volume anterior é possível definir o elemento volume (Holmes-Thompson) em SM . Se consideramos a métrica Riemanniana $\hat{g}$, veja (2-26), o elemento volume dV_{SM} em SM , pode ser dado da seguinte maneira:

$$dV_{SM} = \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{2n-1}. \quad (2-32)$$

Observe-se que $\{\omega^i\}$ é uma base local de p^*TM que depende de x , (veja 2-9), e da igualdade da $\det(v_i^j) = \sqrt{\det(g_{ij})}$, obtida na equação (2-8), obtemos

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n = \det(v_i^j) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \sqrt{\det(g_{ij})} dx. \quad (2-33)$$

$\{\omega^{n+i}\}$ são uma base local para os fibrados tangentes $S_x M$ que dependem de y , (2-27). Logo $(S_x M, \dot{g})$ é uma subvariedade de codimensão 1. Portanto, o elemento volume neste caso é dado pela equação (2-31). Assim, obtemos

$$\omega^{n+1} \wedge \cdots \wedge \omega^{2n-1} = \frac{\sqrt{\det(g_{ij})}}{F} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} y^i \delta y^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\delta y^i} \wedge \cdots \wedge \delta y^n,$$

onde “ $\wedge$ ”, significa que o termo correspondente é omitido.

Pela definição dos $\{\delta y^i\}$, veja (2-9), a equação anterior pode ser expressada como:

$$\omega^{n+1} \wedge \dots \wedge \omega^{2n-1} = \frac{\sqrt{\det(g_{ij})}}{F^n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} y^i \left(dy^1 + N_j^1 dx^j \right) \wedge \dots \wedge \widehat{\delta y^i} \wedge \dots \wedge \left(dy^{n-1} + N_j^{n-1} dx^j \right),$$

usando o fato que $dx^i \wedge dx^i = 0$, então, (2-32) pode ser reescrito como

$$dV_{SM} = \frac{\det(g_{ij})}{F^n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} y^i dy^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy^i} \wedge \dots \wedge dy^n \wedge dx, \quad (2-34)$$

assim,

$$dV_{SM} = \Omega d\tau \wedge dx, \quad (2-35)$$

onde,

$$\begin{aligned} \Omega &:= \det\left(\frac{g_{ij}}{F}\right), \quad dx = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \\ d\tau &:= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} y^i dy^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy^i} \wedge \dots \wedge dy^n. \end{aligned} \quad (2-36)$$

A forma do volume de uma n -variedade de Finsler (M, F) é definida pela seguinte equação

$$dV_M := \sigma(x) dx, \quad \sigma(x) := \frac{1}{c_{n-1}} \int_{S_x M} \Omega d\tau, \quad (2-37)$$

desta forma, c_{n-1} indica o volume da esfera unitária Euclidiana S^{n-1} , dV_M é chamado a *forma do volume de Holmes-Thompson*.

Superfícies mínimas em (α, β) –espaços

As superfícies mínimas, na geometria de Finsler, são caracterizadas como superfícies de área mínima para uma dada borda fixa. Fisicamente, isto significa que para um determinado limite, uma superfície mínima não pode ser modificada sem aumentar a área da superfície.

Encontrar uma superfície de área mínima com borda específica e constante é um problema, cuja formulação variacional que o modelo fornece como solução superfícies que são pontos críticos do funcional volume.

3.1 Imersão Mínima

Suponha M^n uma variedade compacta com fronteira ∂M^n suave e $(\tilde{M}^m, \tilde{F})$ uma variedade de Finsler. Consideremos $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^m$ uma imersão e $f_t : M^n \rightarrow \tilde{M}^m$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ uma variação suave de f com $f_0 = f$ e $f_t|_{\partial M^n} = f|_{\partial M^n}$. Então, $\{f_t\}$ induz um campo vetorial V que irá variar ao longo de f , e é definido da seguinte maneira:

$$V(x) := \left. \frac{\partial f_t(x)}{\partial t} \right|_{t=0} = V^\sigma(x) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\sigma}, \quad V(x)|_{\partial M^n} = 0, \quad (3-1)$$

V é chamado o **campo variacional** de $\{f_t\}$.

Note-se que f_t induz uma família de métricas de Finsler $F_t = (f_t)^* \tilde{F}$, ou seja,

$$F_t(x, y) = \tilde{F}(f_t(x), df_t(y)).$$

Definição 3.1 *Sejam (M^n, F) e $(\tilde{M}^m, \tilde{F})$ variedades de Finsler com $(m > n)$. Uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^m$ é chamada **uma imersão mínima** se para qualquer domínio compacto M^n é o ponto crítico do seu funcional volume em relação a qualquer campo variacional.*

Pelas equações (2-36) e (2-37), o elemento volume de (M^n, F_t) é

$$V_t(M) = \int_M dV_t = \int_M \left(\frac{1}{c_{n-1}} \int_{S_x M_t} \Omega_t d\tau \right) dx = \frac{1}{c_{n-1}} \int_{S M_t} \Omega_t d\tau \wedge dx,$$

onde

$$\Omega_t = \det \left(\frac{1}{F_t} g_{t|ij} \right) = \det \left(\frac{1}{F_t} \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_{t|i}^{\gamma} f_{t|j}^{\sigma} \right), \quad \Omega_0 = \Omega.$$

Logo, a solução das superfícies mínimas é dado pelo ponto crítico do funcional volume $V_t M$ como é expresso abaixo,

$$\left. \frac{d}{dt} V_t(M) \right|_{t=0} = \frac{1}{c_{n-1}} \int_{SM} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Omega_t \right) \Big|_{t=0} d\tau \wedge dx, \quad (3-2)$$

assim, a derivada de Ω_t em relação a t é

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Omega_t \right) \Big|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t} \det \left(\frac{1}{F_t} g_{t|ij} \right) \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{F_t^n} \det(g_{t|ij}) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{F_t^n} \frac{\partial \det(g_{t|ij})}{\partial g_{ij}} \frac{\partial g_{t|ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} - \frac{n F_t^{n-1}}{F_t^{2n}} \frac{\partial F_t}{\partial t} \det(g_{t|ij}) \Big|_{t=0}, \end{aligned}$$

como a derivada da $\det(g_{t|ij})$ em relação a g_{ij} é a matriz adjunta de $(g_{t|ij})$, logo,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Omega_t \right) \Big|_{t=0} &= \frac{1}{F_t^n} \text{Adj}(g_{t|ij}) \frac{\partial g_{t|ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} - \frac{n}{F_t^{n+1}} \frac{\partial F_t}{\partial t} \det(g_{t|ij}) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{F_t^n} g_t^{ij} \det(g_{t|ij}) \frac{\partial g_{t|ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} - \frac{n}{F_t^{n+1}} \det(g_{t|ij}) \frac{\partial F_t}{\partial t} \Big|_{t=0} \\ &= g_t^{ij} \Omega_t \frac{\partial g_{t|ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} - \frac{n}{F_t} \Omega_t \frac{\partial F_t}{\partial t} \Big|_{t=0} \\ &= \Omega_t \left(g_t^{ij} \frac{\partial g_{t|ij}}{\partial t} - \frac{n}{F_t} \frac{\partial F_t}{\partial t} \right) \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Sendo f uma imersão isométrica, então $g_{t|ij} = g_{t|\gamma\sigma} f_{t|i}^{\gamma} f_{t|j}^{\sigma}$, assim

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Omega_t \right) \Big|_{t=0} &= \Omega \left(g^{ij} \frac{\partial (\tilde{g}_{t|\gamma\sigma} f_{t|i}^{\gamma} f_{t|j}^{\sigma})}{\partial t} - \frac{n}{F} \frac{\partial \tilde{F}_t}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} \\ &= 2\Omega \left\{ g^{ij} \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_i^{\gamma} \frac{\partial f_j^{\sigma}}{\partial t} \Big|_{t=0} + \frac{1}{2} g^{ij} f_i^{\gamma} f_j^{\sigma} [\tilde{g}_{\gamma\sigma}]_{\tilde{x}^{\delta}} \frac{\partial \tilde{x}^{\delta}}{\partial t} \Big|_{t=0} + \frac{1}{2} g^{ij} f_i^{\gamma} f_j^{\sigma} [\tilde{g}_{\gamma\sigma}]_{\tilde{y}^{\delta}} \frac{\partial \tilde{y}^{\delta}}{\partial t} \Big|_{t=0} \right. \\ &\quad \left. - \frac{n}{2F} \left([\tilde{F}]_{\tilde{x}^{\gamma}} \frac{\partial \tilde{x}^{\gamma}}{\partial t} \Big|_{t=0} + [\tilde{F}]_{\tilde{y}^{\gamma}} \frac{\partial \tilde{y}^{\gamma}}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) \right\}, \end{aligned}$$

recorrendo à equação (3-1) sobre a imersão f temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{x}^{\delta}}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{\partial f^{\delta}(x)}{\partial t} \Big|_{t=0} = V^{\delta}(x) = V^{\delta}, \\ \frac{\partial \tilde{y}^{\delta}}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{\partial f_k^{\delta}(x) y^k}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial^2 f^{\delta}(x)}{\partial t \partial x^k} y^k \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial f^{\delta}(x)}{\partial t} \Big|_{t=0} y^k = \frac{\partial V^{\delta}}{\partial x^k} y^k. \end{aligned}$$

Note que, $\{V^{\delta}\}$ independem de $\{y^i\}$, assim, pela equação (2-9) temos $\frac{\partial V^{\delta}}{\partial x^k} = \frac{\delta V^{\delta}}{\delta x^k}$.

Logo,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \Omega_t \right) \Big|_{t=0} = 2\Omega \left\{ g^{ij} \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_i^\gamma \frac{\delta V^\sigma}{\delta x^j} + \frac{1}{2} g^{ij} f_i^\gamma f_j^\sigma V^\delta [\tilde{g}_{\gamma\sigma}]_{\tilde{x}^\delta} + \frac{1}{2} g^{ij} f_i^\gamma f_j^\sigma [\tilde{g}_{\gamma\sigma}]_{\tilde{y}^\delta} \frac{\delta V^\delta}{\delta x^k} y^k \right. \\ \left. - \frac{n}{2F} \left([\tilde{F}]_{\tilde{x}^\gamma} V^\gamma + [\tilde{F}]_{\tilde{y}^\gamma} \frac{\delta V^\gamma}{\delta x^k} y^k \right) \right\}.$$

Deste modo, a derivada pode ser expressa como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \Omega_t \right) \Big|_{t=0} := 2\Omega \{ (I) + (II) + (III) + (IV) \}, \quad (3-3)$$

onde

$$(I) = g^{ij} \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_i^\gamma \frac{\delta V^\sigma}{\delta x^j}, \quad (III) = \frac{1}{2} g^{ij} f_i^\gamma f_j^\sigma [\tilde{g}_{\gamma\sigma}]_{\tilde{y}^\delta} \frac{\delta V^\delta}{\delta x^k} y^k, \\ (II) = \frac{1}{2} g^{ij} f_i^\gamma f_j^\sigma V^\delta [\tilde{g}_{\gamma\sigma}]_{\tilde{x}^\delta}, \quad (IV) = -\frac{n}{2F} \left([\tilde{F}]_{\tilde{x}^\gamma} V^\gamma + [\tilde{F}]_{\tilde{y}^\gamma} \frac{\delta V^\gamma}{\delta x^k} y^k \right).$$

Usando, a conexão de Chern no espaço ambiente $\tilde{M}$ junto à igualdade $\tilde{\Gamma}_{\sigma\rho}^\delta \tilde{y}^\sigma = \tilde{N}_\rho^\delta$ obtida em (2-13), temos

$$d\tilde{g}_{\gamma\sigma} - \tilde{g}_{\sigma\delta} \tilde{\omega}_\gamma^\delta - \tilde{g}_{\gamma\delta} \tilde{\omega}_\sigma^\delta = 2\tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} \tilde{\omega}^{m+\delta} \\ d\tilde{g}_{\gamma\sigma} - \tilde{g}_{\sigma\delta} \tilde{\omega}_\gamma^\delta - \tilde{g}_{\gamma\delta} \tilde{\omega}_\sigma^\delta = 2\tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} (d\tilde{y}^\delta + \tilde{y}^\sigma \tilde{\omega}_\sigma^\delta) \\ d\tilde{g}_{\gamma\sigma} - (\tilde{g}_{\sigma\delta} \tilde{\Gamma}_{\gamma\rho}^\delta + \tilde{g}_{\gamma\delta} \tilde{\Gamma}_{\sigma\rho}^\delta) d\tilde{x}^\rho = 2\tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} (\tilde{N}_\rho^\delta d\tilde{x}^\rho + d\tilde{y}^\delta).$$

Separando os termos $\tilde{x}$, obtemos

$$\frac{\partial \tilde{g}_{\gamma\sigma}}{\partial \tilde{x}^\rho} = \tilde{g}_{\sigma\delta} \tilde{\Gamma}_{\gamma\rho}^\delta + \tilde{g}_{\gamma\delta} \tilde{\Gamma}_{\sigma\rho}^\delta + 2\tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} \tilde{N}_\rho^\delta,$$

assim, podemos observar que

$$(II) = g^{ij} f_i^\gamma f_j^\sigma \left(\tilde{g}_{\gamma\delta} \tilde{\Gamma}_{\sigma\rho}^\delta + \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} \tilde{N}_\rho^\delta \right) V^\rho.$$

Para expressar (I), (III) e (IV), vamos considerar as 1-formas definidas em $C(p^*T^*M)$.

Seja a 1-forma $\psi := \psi_i dx^i = \tilde{g}_{\gamma\sigma} V^\sigma f_i^\gamma dx^i \in C(p^*T^*M)$, sua derivada covariante (2-29), é dada por

$$\psi_{i|j} = \frac{\delta \psi_i}{\delta x^j} - \psi_k \Gamma_{ij}^k = V^\sigma \frac{\delta}{\delta x^j} (\tilde{g}_{\gamma\sigma} f_i^\gamma) + \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_i^\gamma \frac{\delta V^\sigma}{\delta x^j} - \tilde{g}_{\gamma\sigma} V^\sigma f_k^\gamma \Gamma_{ij}^k.$$

Assim, $\text{div}_g \psi$ (2-28), pode ser expresso por

$$\text{div}_g \psi = g^{ij} \left(V^\sigma \frac{\delta}{\delta x^j} (\tilde{g}_{\gamma\sigma} f_i^\gamma) + \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_i^\gamma \frac{\delta V^\sigma}{\delta x^j} - \tilde{g}_{\gamma\sigma} V^\sigma f_k^\gamma \Gamma_{ij}^k - \tilde{g}_{\gamma\sigma} V^\sigma f_i^\gamma \eta_j \right),$$

logo, (I) pode ser escrito da seguinte forma

$$(I) = \text{div}_{\hat{g}} \Psi + g^{ij} V^\sigma \left(\tilde{g}_{\gamma\sigma} f_i^\gamma \dot{\eta}_j - \frac{\delta}{\delta x^j} (\tilde{g}_{\gamma\sigma} f_i^\gamma) + \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_k^\gamma \Gamma_{ij}^k \right). \quad (3-4)$$

Derivando a expressão $(\tilde{g}_{\gamma\sigma} f_i^\gamma)$ em x^j , obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta x^j} (\tilde{g}_{\gamma\sigma} f_i^\gamma) &= \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_{ij}^\gamma + \left(\tilde{g}_{\sigma\delta} \tilde{\Gamma}_{\gamma\rho}^\delta + \tilde{g}_{\gamma\delta} \tilde{\Gamma}_{\sigma\rho}^\delta + 2\tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} \tilde{N}_\rho^\delta \right) f_j^\rho f_i^\gamma + \\ &\quad 2\tilde{C}_{\gamma\sigma\rho} f_{jk}^\rho y^k f_i^\gamma - 2\tilde{C}_{\gamma\sigma\rho} N_j^k f_k^\rho f_i^\gamma. \end{aligned} \quad (3-5)$$

Substituindo (3-5) em (3-4), temos

$$\begin{aligned} (I) &= \text{div}_{\hat{g}} \Psi + \tilde{g}_{\gamma\sigma} V^\sigma g^{ij} \left(f_i^\gamma \dot{\eta}_j - f_{ij}^\gamma + \Gamma_{ij}^k f_k^\gamma - \tilde{\Gamma}_{\delta\rho}^\gamma f_i^\delta f_j^\rho \right) \\ &\quad - g^{ij} f_i^\gamma f_j^\rho \tilde{g}_{\gamma\delta} \tilde{\Gamma}_{\sigma\rho}^\delta V^\sigma - 2g^{ij} f_i^\gamma V^\sigma \tilde{C}_{\gamma\sigma\rho} \left(\tilde{N}_\rho^\delta f_j^\rho + f_{jk}^\rho y^k - f_k^\rho N_j^k \right). \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2} [\tilde{g}_{\gamma\sigma}]_{\tilde{y}^\delta} = \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta}$, (III) pode ser expresso da seguinte maneira

$$(III) = g^{ij} f_i^\gamma f_j^\beta \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} \frac{\delta V^\delta}{\delta x^k} y^k.$$

Agora, considere a 1-forma $\varphi = \varphi_k dx^k = g^{ij} f_i^\gamma f_j^\sigma \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} V^\delta \left[\frac{F^2}{2} \right]_{y^k} dx^k \in C(p^* T^* M)$.

Do corolário (1.23), temos

$$\left[\frac{F^2}{2} \right]_{y^k} = F F_{y^k} = g_{jk} y^j,$$

então, a 1-forma φ é expressa do seguinte modo

$$\varphi_k = g^{ij} g_{jk} f_i^\gamma f_j^\sigma \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} V^\delta y^j = \delta_k^i f_i^\gamma f_j^\sigma \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} V^\delta y^j.$$

Note-se que a derivada de $\tilde{C}_{\gamma\sigma\delta}$ em relação a x^r esta dado por,

$$\begin{aligned} \frac{\delta \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta}}{\delta x^r} &= \frac{\partial \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta}}{\partial \tilde{x}^\rho} f_r^\rho + \frac{\partial \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta}}{\partial \tilde{y}^\rho} f_{kr}^\rho y^k - N_r^k \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta\rho} f_k^\rho \\ &= \frac{\partial \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta}}{\partial \tilde{x}^\rho} f_r^\rho + \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta\rho} f_{kr}^\rho y^k - N_r^k \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta\rho} f_k^\rho, \end{aligned}$$

assim, derivando a 1-forma φ de forma similar à equação (3.1), obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_{k|r} &= \frac{\delta}{\delta x^r} \left(\delta_k^i f_i^\gamma f_j^\sigma \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} V^\delta y^j \right) - \delta_k^i f_i^\gamma f_j^\sigma \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} V^\delta y^k \Gamma_{kr}^j \\ &= 2\delta_k^i f_i^\gamma f_{jr}^\sigma \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} V^\delta y^j + \delta_k^i f_i^\gamma f_j^\sigma \frac{\delta \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta}}{\delta x^r} V^\delta y^j + \delta_k^i f_i^\gamma f_j^\sigma \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} \frac{\delta V^\delta}{\delta x^r} y^j \\ &\quad - \delta_k^i f_i^\gamma f_j^\sigma \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} V^\delta N_r^j - \delta_k^i f_i^\gamma f_j^\sigma \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} V^\delta N_r^j, \\ \varphi_{k|r} &= 2\delta_k^i f_i^\gamma \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} V^\delta \left(f_{jr}^\sigma y^j - f_j^\sigma N_r^j \right) + \delta_k^i f_i^\gamma f_j^\sigma \frac{\delta \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta}}{\delta x^r} V^\delta y^j + \delta_k^i f_i^\gamma f_j^\sigma \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} \frac{\delta V^\delta}{\delta x^r} y^j \end{aligned}$$

Note que

$$f_{jr}^\sigma y^j - f_j^\sigma N_r^j = f_{kr}^\sigma y^k - f_k^\sigma N_r^k$$

assim

$$\phi_{k|r} = 2\delta_k^i f_i^\gamma \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} V^\delta \left(f_{kr}^\sigma y^k - f_k^\sigma N_r^k \right) + \delta_k^i f_i^\gamma f_j^\sigma \frac{\delta \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta}}{\delta x^r} V^\delta y^j + \delta_k^i f_i^\gamma f_j^\sigma \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} \frac{\delta V^\delta}{\delta x^r} y^j,$$

multiplicando a expressão acima por g^{kr} temos

$$\begin{aligned} g^{kr} \phi_{k|r} &= 2\delta_j^r g^{ij} f_i^\gamma \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} V^\delta \left(f_{kr}^\sigma y^k - f_k^\sigma N_r^k \right) + \delta_j^r g^{ij} f_i^\gamma f_j^\sigma \frac{\delta \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta}}{\delta x^r} V^\delta y^j + \delta_j^r f_i^\gamma f_j^\sigma \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} \frac{\delta V^\delta}{\delta x^r} y^j \\ g^{kr} \phi_{k|r} &= 2g^{ij} f_i^\gamma \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} V^\delta \left(f_{kr}^\sigma y^k - f_k^\sigma N_j^k \right) + g^{ij} f_i^\gamma f_j^\sigma \frac{\delta \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta}}{\delta x^r} V^\delta y^r + (III), \end{aligned}$$

assim, (III) pode ser expressado em termos do $\text{div}_g \phi$

$$\begin{aligned} (III) &= \text{div}_g \phi + g^{ij} \phi_i \dot{\eta}_j + 2g^{ij} f_i^\gamma \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} V^\delta \left(f_k^\sigma N_j^k - f_{kr}^\sigma y^k \right) - g^{ij} f_i^\gamma f_j^\sigma \frac{\delta \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta}}{\delta x^r} V^\delta y^r, \\ (III) &= \text{div}_g \phi + g^{ij} \phi_i \dot{\eta}_j + 2g^{ij} f_i^\gamma \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} V^\delta \left(f_k^\sigma N_j^k - f_{kr}^\sigma y^k \right) \\ &\quad - g^{ij} f_i^\gamma f_j^\sigma V^\delta y^r \left(\frac{\partial \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta}}{\partial \tilde{x}^\rho} f_r^\rho + \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta\rho} f_{kr}^\rho y^k - N_r^k \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta\rho} f_k^\rho \right). \end{aligned}$$

Finalmente, somando a expressão (I) + (II) + (III), adquirimos o seguinte resultado,

$$\begin{aligned} (I) + (II) + (III) &= \text{div}_g \Psi + \text{div}_g \phi - \tilde{g}_{\gamma\sigma} V^\sigma g^{ij} \left(f_{ij}^\gamma - f_i^\gamma \dot{\eta}_j - \Gamma_{ij}^k f_k^\gamma + \tilde{\Gamma}_{\delta\rho}^\gamma f_i^\delta f_j^\rho \right) \\ &\quad + g^{ij} f_i^\gamma f_j^\rho V^\sigma \left(\tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} \tilde{N}_\rho^\delta - 2\tilde{C}_{\gamma\sigma\rho} \tilde{N}_\rho^\delta \right) + 4g^{ij} f_i^\gamma V^\sigma \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} \left(f_k^\rho N_j^k - f_{jk}^\rho y^k \right) \\ &\quad - g^{ij} f_i^\gamma f_j^\sigma V^\delta y^r \left(\frac{\partial \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta}}{\partial \tilde{x}^\rho} f_r^\rho + \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta\rho} f_{kr}^\rho y^k - N_r^k \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta\rho} f_k^\rho \right). \end{aligned} \quad (3-6)$$

A partir da definição da derivada covariante do tensor de Cartan, (2-11) ao longo da 1-forma ω de Hilbert no espaço ambiente $\tilde{M}$ e a igualdade $\tilde{\Gamma}_{\sigma\rho}^\gamma \tilde{y}^\rho = \tilde{N}_\sigma^\gamma$, (2-13), temos

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{A}}_{\gamma\sigma\delta} &= \frac{\delta \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta}}{\delta \tilde{x}^\rho} \tilde{y}^\rho - \tilde{C}_{\tau\sigma\delta} \tilde{N}_\gamma^\tau - \tilde{C}_{\gamma\tau\delta} \tilde{N}_\sigma^\tau - \tilde{C}_{\gamma\sigma\tau} \tilde{N}_\delta^\tau \\ &= \frac{\partial \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta}}{\partial \tilde{x}^\rho} f_k^\rho y^k - \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta\rho} \tilde{N}_\tau^\rho \tilde{y}^\tau - \tilde{C}_{\tau\beta\gamma} \tilde{N}_\gamma^\tau - \tilde{C}_{\tau\sigma\delta} \tilde{N}_\gamma^\tau - \tilde{C}_{\gamma\tau\delta} \tilde{N}_\sigma^\tau - \tilde{C}_{\gamma\sigma\tau} \tilde{N}_\delta^\tau. \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{\partial \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta}}{\partial \tilde{x}^\rho} f_k^\rho y^k = \dot{\tilde{A}}_{\gamma\sigma\delta} + \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta\rho} \tilde{N}_\tau^\rho \tilde{y}^\tau - \tilde{C}_{\tau\beta\gamma} \tilde{N}_\gamma^\tau + \tilde{C}_{\tau\sigma\delta} \tilde{N}_\gamma^\tau + \tilde{C}_{\gamma\tau\delta} \tilde{N}_\sigma^\tau + \tilde{C}_{\gamma\sigma\tau} \tilde{N}_\delta^\tau, \quad (3-7)$$

Substituindo (3-7) em (3-6), temos

$$\begin{aligned} (I) + (II) + (III) &= \operatorname{div}_{\hat{g}} \Psi + \operatorname{div}_{\hat{g}} \Phi - \tilde{g}_{\gamma\sigma} V^\sigma g^{ij} \left\{ f_{ij}^\gamma - f_i^\gamma \left(\dot{A}_{ij}^k + \Gamma_{ij}^k \right) + f_i^\delta f_j^\rho \left(\dot{A}_{\delta\rho}^\gamma + \tilde{\Gamma}_{\delta\rho}^\gamma \right) \right\} \\ &\quad - 4g^{ij} f_i^\gamma V^\sigma \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} \left(f_{jk}^\rho - f_r^\rho \Gamma_{jk}^r + f_j^\sigma f_k^\tau \tilde{\Gamma}_{\sigma\tau}^\delta \right) y^k \\ &\quad - g^{ij} f_i^\gamma f_j^\sigma V^\delta \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta\rho} \left(f_{kr}^\rho - f_s^\rho \Gamma_{kr}^s + f_k^\sigma f_r^\rho \tilde{\Gamma}_{\sigma\rho}^\delta \right) y^k y^r. \end{aligned}$$

Da equação (3-7), temos $\dot{A}_{\sigma\delta}^\gamma \tilde{y}^\sigma = 0$. Assim (I) + (II) + (III) pode ser expresso por

$$\begin{aligned} (I) + (II) + (III) &= \operatorname{div}_{\hat{g}} \Psi + \operatorname{div}_{\hat{g}} \Phi - \tilde{g}_{\gamma\sigma} V^\sigma g^{ij} \left\{ f_{ij}^\gamma - f_i^\gamma \left(\dot{A}_{ij}^k + \Gamma_{ij}^k \right) + f_i^\delta f_j^\rho \left(\dot{A}_{\delta\rho}^\gamma + \tilde{\Gamma}_{\delta\rho}^\gamma \right) \right\} \\ &\quad - 4g^{ij} f_i^\gamma V^\sigma \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} \left\{ f_{jk}^\rho - f_r^\rho \left(\dot{A}_{jk}^r + \Gamma_{jk}^r \right) + f_j^\sigma f_k^\tau \left(\dot{A}_{\sigma\tau}^\delta + \tilde{\Gamma}_{\sigma\rho}^\delta \right) \right\} y^k \\ &\quad - g^{ij} f_i^\gamma f_j^\sigma V^\delta \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta\rho} \left\{ f_{kr}^\rho - f_s^\rho \left(\dot{A}_{kr}^s + \Gamma_{kr}^s \right) + f_k^\sigma f_r^\rho \left(\dot{A}_{\sigma\rho}^\delta + \tilde{\Gamma}_{\sigma\rho}^\delta \right) \right\} y^k y^r. \end{aligned}$$

Considerando

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{\sigma\delta}^\gamma &= \tilde{g}^{\gamma\tau} \tilde{C}_{\tau\sigma\delta}, & \tilde{C}_{\sigma\delta\rho}^\gamma &= \tilde{g}^{\gamma\tau} \tilde{C}_{\tau\sigma\delta\rho}, \\ h_{ij}^\gamma &= f_{ij}^\gamma - f_i^\gamma \left(\dot{A}_{ij}^k + \Gamma_{ij}^k \right) + f_i^\delta f_j^\rho \left(\dot{A}_{\delta\rho}^\gamma + \tilde{\Gamma}_{\delta\rho}^\gamma \right), \end{aligned} \quad (3-8)$$

temos,

$$(I) + (II) + (III) = \operatorname{div}_{\hat{g}} (\Psi + \Phi) - \tilde{g}_{\gamma\sigma} V^\sigma g^{ij} \left(h_{ij}^\gamma + 4f_i^\gamma \tilde{C}_{\delta\rho}^\sigma h_{jk}^\rho y^k + f_i^\gamma f_j^\sigma \tilde{C}_{\delta\rho\tau}^\sigma h_{kr}^\tau y^k y^r \right). \quad (3-9)$$

Agora, consideramos a 1-forma $\theta := \theta_i dx^i = [F]_{\bar{y}^\gamma} V^\gamma [F]_{y^i} dx^i \in (p^* T^* M)$.

Usando as propriedades do corolário (1.23), na 1-forma θ , temos

$$\theta_i = [F]_{\bar{y}^\gamma} V^\gamma [F]_{y^i} dx^i = \tilde{g}_{\gamma\sigma} \frac{\tilde{y}^\gamma}{F} V^\gamma g_{ij} \frac{y^i}{F} = \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_j^\gamma V^\gamma g_{ij} \frac{y^i}{F} \frac{y^j}{F} \overset{1}{=} \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_j^\gamma V^\gamma.$$

Derivando θ_i na forma similar a Ψ, Φ ,

$$\begin{aligned} \theta_{i|j} &= \frac{\delta}{\delta x^j} \left([F]_{\bar{y}^\gamma} V^\gamma [F]_{y^i} \right) - \theta_k \Gamma_{ij}^k \\ &= \frac{\delta}{\delta x^j} \left(\tilde{g}_{\gamma\sigma} f_j^\gamma V^\gamma \right) - \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_k^\gamma V^\gamma \Gamma_{ij}^k \\ &= \frac{\delta}{\delta x^j} \left(\tilde{g}_{\gamma\sigma} f_j^\gamma \right) V^\gamma + \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_j^\gamma \frac{\delta V^\gamma}{\delta x^j} - \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_k^\gamma V^\gamma \Gamma_{ij}^k \\ &= [F]_{\bar{y}^\gamma} [F]_{y^i} \frac{\delta V^\gamma}{\delta x^j} + \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_{ij}^\gamma V^\gamma + \left(\tilde{g}_{\sigma\delta} \tilde{\Gamma}_{\gamma\rho}^\delta + \tilde{g}_{\gamma\delta} \tilde{\Gamma}_{\sigma\rho}^\delta + 2\tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} \tilde{N}_\rho^\delta \right) f_j^\rho f_i^\gamma \\ &\quad + 2\tilde{C}_{\gamma\sigma\rho} f_{jk}^\rho y^k f_i^\gamma V^\gamma - 2\tilde{C}_{\gamma\sigma\rho} N_j^k f_k^\rho f_i^\gamma V^\gamma - \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_k^\gamma V^\gamma \Gamma_{ij}^k. \end{aligned}$$

Então, o divergente de θ em relação a $\hat{g}$, é dado por

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\hat{g}} \theta &= g^{ij} [F]_{\bar{y}^\gamma} [F]_{y^i} \frac{\delta V^\gamma}{\delta x^j} + g^{ij} V^\gamma \left\{ \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_{ij}^\gamma + \left(\tilde{g}_{\sigma\delta} \tilde{\Gamma}_{\gamma\rho}^\delta + \tilde{g}_{\gamma\delta} \tilde{\Gamma}_{\sigma\rho}^\delta + 2\tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} \tilde{N}_\rho^\delta \right) f_j^\rho f_i^\gamma \right\} \\ &\quad + g^{ij} V^\gamma \left(2\tilde{C}_{\gamma\sigma\rho} f_{jk}^\rho y^k f_i^\gamma - 2\tilde{C}_{\gamma\sigma\rho} N_j^k f_k^\rho f_i^\gamma - \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_k^\gamma \Gamma_{ij}^k - \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_j^\gamma \eta_j \right). \end{aligned}$$

Como

$$\dot{\tilde{A}}_{\gamma\rho}^\sigma f_i^\gamma y^i = \dot{\tilde{A}}_{\gamma\rho}^\sigma \bar{y}^\gamma = 0,$$

temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\hat{g}} \theta &= g^{ij} [F]_{\bar{y}^\gamma} [F]_{y^i} \frac{\delta V^\gamma}{\delta x^j} + \frac{1}{F^2} \tilde{g}_{\gamma\sigma} V^\gamma \left\{ f_{ij}^\gamma - \left(\eta_j + \Gamma_{ij}^k \right) f_j^\gamma + \left(\dot{\tilde{A}}_{\gamma\rho}^\sigma + \tilde{\Gamma}_{\gamma\rho}^\sigma \right) f_i^\gamma f_j^\rho \right\} y^i y^j \\ &\quad + \frac{1}{F^2} V^\gamma \left(\tilde{g}_{\gamma\sigma} \tilde{\Gamma}_{\gamma\rho}^\sigma f_j^\rho f_i^\gamma + 2\tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} \tilde{N}_\rho^\delta f_j^\rho f_i^\gamma + 2\tilde{C}_{\gamma\sigma\rho} f_{jk}^\rho y^k f_i^\gamma - 2\tilde{C}_{\gamma\sigma\rho} N_j^k f_k^\rho f_i^\gamma \right) y^i y^j, \end{aligned}$$

pelas propriedades do corolário (1.23) alguns termos são anulados. Como se pode observar na equação abaixo

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\hat{g}} \theta &= g^{ij} [F]_{\bar{y}^\gamma} [F]_{y^i} \frac{\delta V^\gamma}{\delta x^j} + \frac{1}{F^2} \tilde{g}_{\gamma\sigma} V^\gamma \left\{ f_{ij}^\gamma - \left(\eta_j + \Gamma_{ij}^k \right) f_j^\gamma + \left(\dot{\tilde{A}}_{\gamma\rho}^\sigma + \tilde{\Gamma}_{\gamma\rho}^\sigma \right) f_i^\gamma f_j^\rho \right\} y^i y^j \\ &\quad + \frac{1}{F^2} V^\gamma \left(\tilde{g}_{\gamma\sigma} \tilde{\Gamma}_{\gamma\rho}^\sigma \bar{y}^\rho \bar{y}^\gamma + 2\tilde{N}_\rho^\delta \tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} \bar{y}^\gamma \bar{y}^\rho + 2f_{jk}^\rho y^k \tilde{C}_{\gamma\sigma\rho} \bar{y}^\gamma y^j - 2N_j^k f_k^\rho \tilde{C}_{\gamma\sigma\rho} \bar{y}^\gamma y^j \right), \\ &= g^{ij} [F]_{\bar{y}^\gamma} [F]_{y^i} \frac{\delta V^\gamma}{\delta x^j} + \frac{1}{F^2} \tilde{g}_{\gamma\sigma} V^\gamma \left\{ f_{ij}^\gamma - \left(\eta_j + \Gamma_{ij}^k \right) f_j^\gamma + \left(\dot{\tilde{A}}_{\gamma\rho}^\sigma + \tilde{\Gamma}_{\gamma\rho}^\sigma \right) f_i^\gamma f_j^\rho \right\} y^i y^j + \frac{1}{F^2} V^\gamma \tilde{g}_{\gamma\sigma} \tilde{N}_\rho^\sigma y^\rho. \end{aligned}$$

Note que F é constante ao longo de todas as curvas horizontais, ou seja, $\frac{\delta F}{\delta \bar{x}^\gamma} = 0$, então,

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta \bar{x}^\gamma} &= [F]_{\bar{x}^\gamma} - \tilde{N}_\gamma^\sigma [F]_{\bar{y}^\sigma} = 0 \\ [F]_{\bar{x}^\gamma} &= \tilde{N}_\gamma^\sigma [F]_{\bar{y}^\sigma}, \end{aligned}$$

aplicando novamente as propriedades do corolário 1.23, a equação (IV) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} (IV) &= -\frac{n}{2} \left(\frac{1}{F} \tilde{N}_\gamma^\sigma [F]_{\bar{y}^\sigma} V^\gamma + g^{ij} [F]_{\bar{y}^\gamma} [F]_{y^j} \frac{\delta V^\gamma}{\delta x^i} \right) \\ &= -\frac{n}{2} \left(\frac{1}{F^2} \tilde{g}_{\gamma\sigma} \tilde{N}_\gamma^\sigma y^\sigma V^\gamma + g^{ij} [F]_{\bar{y}^\gamma} [F]_{y^j} \frac{\delta V^\gamma}{\delta x^i} \right) \\ &= -\frac{n}{2} \left(\operatorname{div}_{\hat{g}} \theta - \frac{1}{F^2} \tilde{g}_{\gamma\sigma} V^\gamma h_{ij}^\sigma y^i y^j \right). \end{aligned} \quad (3-10)$$

Substituindo (3-9) e (3-10) em (3-3), obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \Omega_t \right) \Big|_{t=0} &= \Omega \operatorname{div}_{\hat{g}} (\psi + \varphi + \theta) - 2\Omega \tilde{g}_{\gamma\sigma} V^\gamma \left\{ g^{ij} \left(h_{ij}^\gamma + 4f_i^\gamma \tilde{C}_{\delta\rho}^\sigma h_{jk}^\rho y^k \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f_i^\gamma f_j^\sigma \tilde{C}_{\delta\rho\tau}^\sigma h_{kr}^\tau y^k y^r \right) - \frac{n}{2F^2} h_{ij}^\sigma y^i y^j \right\}. \end{aligned} \quad (3-11)$$

Considere

$$h = \frac{h^\gamma}{F^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\gamma}, \quad h^\gamma = h_{ij}^\gamma y^i y^j, \quad (3-12)$$

onde, h_{ij}^γ foi definido em (3-8).

Se usamos as identidades (2-11) e (2-6) encontramos uma relação de h^α com os coeficientes geodésicos G^k de M e $\tilde{G}^\alpha$ de $\tilde{M}$

$$\begin{aligned} h^\gamma &= h_{ij}^\gamma y^i y^j = f_{ij}^\gamma y^i y^j - f_k^\gamma y^i y^j \left[\frac{1}{2} G^k \right]_{y^i y^j} + f_i^\sigma f_j^\delta y^i y^j \left[\frac{1}{2} \tilde{G}^k \right]_{\tilde{y}^\sigma \tilde{y}^\delta} \\ &= f_{ij}^\gamma y^i y^j - f_k^\gamma G^k + \tilde{G}^\gamma. \end{aligned} \quad (3-13)$$

A primeira e segunda y -derivada de h^γ possui uma relação com seus coeficiente h_{ij}^γ , dados por

$$h_{ij}^\gamma y^i = \left[\frac{1}{2} h^\gamma \right]_{y^i}, \quad h_{ij}^\gamma = \left[\frac{1}{2} h^\gamma \right]_{y^i y^j}. \quad (3-14)$$

Considerando que $\dot{A}_{ij}^k y^j = 0$ e derivando $\left[\frac{1}{2} h^\gamma \right]$ em relação a y^i , obtemos

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} h^\gamma \right]_{y^i} &= f_{ij}^\gamma y^j - f_k^\gamma \left[\frac{1}{2} G^k \right]_{y^i} + \left[\frac{1}{2} \tilde{G}^\gamma \right]_{\tilde{y}^\sigma} f_i^\sigma \\ &= f_{ij}^\gamma y^j - f_k^\gamma N_i^k + f_i^\sigma \tilde{N}_\sigma^\gamma \\ &= f_{ij}^\gamma y^j - f_k^\gamma \Gamma_{ij}^k y^j + f_i^\sigma \tilde{\Gamma}_{\gamma\rho}^\sigma y^\rho \\ &= \left(f_{ij}^\gamma - f_k^\gamma \Gamma_{ij}^k + f_i^\sigma f_j^\rho \tilde{\Gamma}_{\sigma\rho}^\gamma \right) y^j \\ &= h_{ij}^\gamma y^j. \end{aligned}$$

Realizando uma nova derivação $\left[\frac{1}{2} h^\gamma \right]$ em relação a y^j , encontramos

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} h^\gamma \right]_{y^i y^j} &= \frac{\partial}{\partial y^j} \left(f_{ij}^\gamma y^j - f_k^\gamma N_i^k + f_i^\sigma \tilde{N}_\sigma^\gamma \right) \\ &= f_{ij}^\gamma - f_k^\gamma \left(\Gamma_{ij}^k + \dot{A}_{ij}^k \right) + f_i^\sigma f_j^\rho \left(\tilde{\Gamma}_{\sigma\rho}^\gamma + \dot{\tilde{A}}_{\sigma\rho}^\gamma \right) \\ &= h_{ij}^\gamma. \end{aligned}$$

A forma curvatura normal de $f : (M, F) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{F})$ é definida por

$$\mathcal{K} := \frac{1}{F^2} h_\gamma d\tilde{x}^\gamma, \quad h_\gamma = \tilde{g}_{\gamma\sigma} h^\sigma. \quad (3-15)$$

Observe que

$$[h_\gamma]_{y^i y^j} = 2\tilde{g}_{\gamma\sigma} \left(h_{ij}^\sigma + 4\tilde{C}_{\gamma\rho}^\sigma f_i^\rho h_{jk}^\sigma y^j + \tilde{C}_{\gamma\rho\delta}^\sigma f_i^\rho f_j^\delta h_{ij}^\sigma y^j \right). \quad (3-16)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 [h_\gamma]_{y^i y^j} &= [g_{\gamma\sigma} h^\sigma]_{y^i y^j} = \left[2\tilde{C}_{\gamma\sigma\rho} f_i^\rho h^\sigma + g_{\gamma\sigma} [h^\sigma]_{y^i} \right]_{y^j} \\
 &= 2\tilde{C}_{\gamma\sigma\rho\delta} f_i^\rho f_j^\delta h^\sigma + 2\tilde{C}_{\gamma\sigma\rho} f_i^\rho [h^\sigma]_{y^j} + 2\tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} f_j^\delta [h^\sigma]_{y^i} + \tilde{g}_{\gamma\sigma} [h^\sigma]_{y^i y^j} \\
 &= 2\tilde{C}_{\gamma\sigma\rho\delta} f_i^\rho f_j^\delta h^\sigma + 4\tilde{C}_{\gamma\sigma\rho} f_i^\rho h_{jk}^\sigma y^j + 4\tilde{C}_{\gamma\sigma\delta} f_j^\delta h_{ks}^\sigma y^k + \tilde{g}_{\gamma\sigma} h_{ij}^\sigma \\
 &= 2\tilde{g}_{\gamma\sigma} \left(h_{ij}^\sigma + 4\tilde{C}_{\gamma\rho}^\sigma f_i^\rho h_{jk}^\sigma y^j + \tilde{C}_{\gamma\rho\delta}^\sigma f_i^\rho f_j^\delta h_{ij}^\sigma y^j \right).
 \end{aligned}$$

A partir de (3-16) e (3-12) podemos escrever (3-3) como aparece a seguir

$$\left(\frac{d}{dt} \Omega_t \right) \Big|_{t=0} = \Omega \left\{ \operatorname{div}_{\tilde{g}} (\Psi + \Phi + \Theta) - \left(g^{ij} [h_\gamma]_{y^i y^j} - \frac{n}{F^2} h_\gamma \right) V^\gamma \right\}. \quad (3-17)$$

Através da inserção de (3-17) em (3-2), obtemos

$$\frac{d}{dt} V_t(M) \Big|_{t=0} = -\frac{n}{c_{n-1}} \int_{SM} \tilde{g}(\tilde{H}, V) dV_{SM}, \quad (3-18)$$

onde

$$\tilde{H} = \tilde{H}^\gamma \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\gamma} := \left\{ \frac{1}{n} \tilde{g}^{\gamma\sigma} [h_\sigma]_{y^i y^j} g^{ij} - \frac{h^\gamma}{F^2} \right\} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\gamma} \in C \left(p^*(f^{-1}T\tilde{M}) \right). \quad (3-19)$$

No seguinte passo vamos a mostrar que h e $\tilde{H}$ são vetores normais da variedade imersa M , e $\tilde{g}(\tilde{H}, V)$ é expresso como $\mathcal{K}(V)$, que é a forma curvatura normal de f .

Seja, $p^*\mathcal{N} = (p^*TM)^\perp$ o complemento ortogonal de p^*TM em $p^*(f^{-1}T\tilde{M})$ com relação a $\tilde{g}$.

Seja

$$\mathcal{N}^* = \{ \xi \in C(f^{-1}T^*\tilde{M}) \mid \xi(df(x)) = 0, \forall X \in C(TM) \},$$

que é chamado o **espaço tangente normal de f** . Logo, $p^*\mathcal{N}^*$ é o espaço dual de $p^*\mathcal{N}$.

Quando observamos (3-12) e (3-15) percebemos que $h \in p^*\mathcal{N}$, e $\mathcal{K} \in p^*\mathcal{N}^*$, o que implica que, $\tilde{H} \in p^*\mathcal{N}$ porque

$$f_k^\gamma [h_\gamma]_{y^i y^j} = [f_k^\gamma h_\gamma]_{y^i y^j} = 2\tilde{g}_{\gamma\sigma} \left(f_k^\gamma h_{ij}^\sigma + 4\tilde{C}_{\gamma\rho}^\sigma f_i^\rho f_k^\gamma h_{jk}^\sigma y^j + \tilde{C}_{\gamma\rho\delta}^\sigma f_i^\rho f_j^\delta f_k^\gamma h_{ij}^\sigma y^j \right) = 0.$$

Verificaremos que, $h \in p^*\mathcal{N}$. Primeiro mostraremos a relação que existe entre os coeficientes geodésicos $\tilde{G}^\gamma$ do espaço ambiente $\tilde{M}$ e os coeficientes geodésicos G^i do espaço imerso M . Logo,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\tilde{g}_{\gamma\sigma} f_i^\gamma f_j^\sigma \right) \\
 &= \frac{\partial \tilde{g}_{\gamma\sigma}}{\partial \tilde{x}^\rho} f_i^\gamma f_j^\sigma f_k^\rho + \frac{\partial \tilde{g}_{\gamma\sigma}}{\partial \tilde{y}^\rho} f_i^\rho y^m f_j^\gamma f_k^\sigma + \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_{ik}^\gamma f_j^\sigma + \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_i^\gamma f_{jk}^\sigma \\
 &= \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_k^\rho \left(2f_{ik}^\gamma + \frac{\partial \tilde{g}_{\gamma\sigma}}{\partial \tilde{x}^\rho} \tilde{g}^{\gamma\sigma} f_i^\gamma f_j^\sigma \right) + \frac{\partial \tilde{g}_{\gamma\sigma}}{\partial \tilde{y}^\rho} f_i^\gamma f_j^\sigma f_{mk}^\rho y^m.
 \end{aligned}$$

Ao realizar uma mudança cíclica de i, j, k na equação, obteremos duas relações semelhantes, e somando e subtraindo o descrito acima encontraremos os coeficientes geodésicos de segunda espécie. Agora, mudando os índices e simplificando a expressão, obtemos a seguinte equação

$$2\gamma_{ijk} = \tilde{g}_{\alpha\beta} f_k^\gamma \left(2f_{ik}^\gamma + 2\gamma_{\rho\delta}^\sigma f_i^\gamma f_j^\sigma \right) + \frac{\partial \tilde{g}_{\gamma\sigma}}{\partial \tilde{y}^\rho} \left(f_i^\gamma f_j^\sigma f_{mk}^\rho + f_j^\gamma f_k^\sigma f_{mj}^\rho - f_k^\gamma f_i^\sigma f_{mi}^\rho \right) y^m.$$

Em particular, multiplicando a expressão anterior por $g^{jk} y^i y^j$, o segundo termo da equação é anulado pelo corolário (1.23), assim temos

$$\begin{aligned} g^{jk} \gamma_{ijk} y^i y^j &= g^{jk} \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_k^\rho \left(f_{ik}^\gamma + \gamma_{\rho\delta}^\sigma f_i^\gamma f_j^\sigma \right) y^i y^j \\ G^k &= g^{jk} \tilde{g}_{\gamma\sigma} f_k^\rho \left(f_{ik}^\gamma y^i y^j + \tilde{G}^\gamma \right), \end{aligned}$$

ao simplificar a notação, temos

$$G^k = \phi_\sigma^k \left(f_{ik}^\gamma y^i y^j + \tilde{G}^\gamma \right), \quad \phi_\sigma^k = f_i^\gamma g^{lk} \tilde{g}_{\gamma\sigma}.$$

Seja

$$\rho^\perp : p^* \circ f^{-1}(T\tilde{M}) \rightarrow (p^* TM)^\perp$$

a projeção ortogonal com respeito a $\tilde{g}$ e

$$V^\perp = \rho^\perp V, \quad V \in C(p^* \circ f^{-1}(T\tilde{M})) \quad (3-20)$$

Assim de (3-13), a função h^σ pode ser expressa como

$$h^\sigma = \rho_\gamma^{\perp\sigma} \left(f_{ij}^\gamma y^i y^j + \tilde{G}^\gamma \right), \quad \rho_\gamma^{\perp\sigma} := \delta_\gamma^\sigma - f_i^\sigma \phi_\gamma^i.$$

Agora, para verificar que $h \in p^* \mathcal{N}$ no ponto $x \in M$, o produto interno deve ser zero, ou seja,

$$g_{\gamma\sigma} \frac{h^\sigma}{F^2} f_i^\gamma = 0.$$

Resolvendo o caso anterior,

$$\begin{aligned} g_{\gamma\sigma} \frac{h^\sigma}{F^2} f_i^\gamma &= \frac{1}{F^2} g_{\gamma\sigma} \rho_\gamma^{\perp\sigma} (f_{ij}^\gamma y^i y^j + \tilde{G}^\gamma) f_i^\gamma \\ &= \frac{1}{F^2} g_{\gamma\sigma} \left(\delta_\gamma^\sigma - f_i^\sigma \phi_\gamma^i \right) \left(f_{ij}^\gamma y^i y^j + \tilde{G}^\gamma \right) f_i^\gamma \\ &= \frac{1}{F^2} g_{\gamma\sigma} \left(\delta_\gamma^\sigma - f_i^\sigma f_j^\sigma g^{ij} g_{\gamma\sigma} \right) \left(f_{ij}^\gamma y^i y^j + \tilde{G}^\gamma \right) f_i^\gamma \\ &= \frac{1}{F^2} g_{\gamma\sigma} \left(f_i^\gamma \delta_\gamma^\sigma - f_i^\gamma f_i^\sigma f_j^\sigma g^{ij} g_{\gamma\sigma} \right) \left(f_{ij}^\gamma y^i y^j + \tilde{G}^\gamma \right), \end{aligned}$$

como f é uma imersão isométrica, temos

$$g_{ij} = g_{\gamma\sigma} f_i^\gamma f_j^\sigma \quad g^{\gamma\sigma} = g^{ij} f_i^\gamma f_j^\sigma, \quad (3-21)$$

então,

$$g_{\gamma\sigma} \frac{h^\sigma}{F^2} h^\sigma f_i^\gamma = \frac{1}{F^2} g_{\gamma\sigma} \left(f_i^\gamma \delta_\gamma^\sigma - f_i^\sigma \delta_\gamma^\sigma \right) \left(f_{ij}^\gamma y^i y^j + \tilde{G}^\gamma \right) = 0$$

Portanto, $h \in p^* \mathcal{N}$.

Se $\tilde{N} \in p^* \mathcal{N}$, definimos $\mu_{\tilde{N}} \in \mathcal{N}^*$ por

$$\mu_{\tilde{N}}(\tilde{X}) := \frac{\int_{S_x M} \tilde{g}(\tilde{N}, \tilde{X}) \Omega d\tau}{\int_{S_x M} \Omega d\tau} = \frac{\int_{S_x M} \tilde{g}(\tilde{N}, \tilde{X}) \Omega d\tau}{c_{n-1} \sigma(x)}, \quad (3-22)$$

para qualquer $\tilde{X} \in C(f^{-1}T\tilde{M})$. Logo, $\mu_{\tilde{N}}$ é uma seção global de $f^{-1}T^*\tilde{M}$.

Se $\mu := \mu_{\tilde{H}}$, então, usando as equações (3-18)-(3-22), obtemos o seguinte teorema.

Teorema 3.2 *Seja $f : (M, F) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{F})$ uma imersão isométrica e f_t uma variação suave de f , com $f_0 = f$ e a variação do campo $\tilde{V}$ que satisfaça (3-1). Então, a primeira forma de variação do volume para (M, F) é:*

$$\left. \frac{d}{dt} V_t(M) \right|_{t=0} = -n \int_M \mu(\tilde{V}) dV_M. \quad (3-23)$$

Chamamos $\mu = \mu_{\tilde{H}}$ a **forma de curvatura média de f** , e sua norma é definida da seguinte maneira:

$$\|\mu\| := \sup_{\tilde{X} \in C(f^{-1}T\tilde{M})} \frac{|\mu(\tilde{X})|}{\|\tilde{X}\|}$$

observe que $\|\mu\| = 0$ se, e somente se, $\mu = 0$.

Teorema 3.3 *Uma imersão isométrica $f : (M, F) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{F})$ é mínima se, e somente se, a forma de curvatura média μ de f é nula.*

3.2 Curvatura média

Seja $f : (M, F) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{F})$ uma imersão isométrica. Definimos o vetor da curvatura média de f por

$$H = H^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma} := \frac{1}{2n} (g^{ij} g^{\gamma\sigma} [h_\sigma]_{y^i y^j}) \frac{\partial}{\partial x^\gamma}. \quad (3-24)$$

A partir das seguintes equações (3-12), (3-19) e (3-24), obtemos

$$H = \frac{1}{2} (\tilde{H} + h) \in p^* \mathcal{N}.$$

Deste modo podemos ver que H tem a mesma função que $\tilde{H}$.

Para qualquer $x \in M$, $S_x M$ tem uma métrica Riemanniana,

$$\hat{r}_x = \sum_a \theta^{\bar{a}} \otimes \theta^{\bar{a}}, \quad \theta^{\bar{a}} = \omega^{\bar{a}}|_{S_x M} = v_i^a \frac{dy^i}{F} \quad (3-25)$$

onde, $\{y^i\}$ são as coordenadas homogêneas em $S_x M$.

Na variedade Riemanniana $(S_x M, \hat{r}_x)$ considere a 1-forma $\xi = \xi_i dy^i$ e a função $\varphi : S_x M \rightarrow \mathbb{R}$. Nessas condições temos o seguinte

Lema 3.4 *A divergência de ξ e o Laplaciano de φ sobre $(S_x M, \hat{r}_x)$ podem ser expressados respectivamente por*

$$\operatorname{div}_{\hat{r}_x} \xi = r^{ij} [\xi]_{y^j} - (n-1) \xi_i y^i - F g^{ij} \xi_i \eta_j, \quad (3-26)$$

$$\Delta_{\hat{r}_x} \varphi = g^{ij} [\varphi]_{y^i y^j} - F g^{ij} [\varphi]_{y^i} \eta_j,$$

onde, $r^{ij} := F^2 g^{ij} - y^i y^j$ e $\eta_i = F C_{ki}^k$ é o componente do tensor de Cartan para $\eta = \eta_i dx^i$.

Demonstração. Provamos a equação (3-26), para a divergência de ξ .

Considerando $\varepsilon_{\bar{a}} = F u_a^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ como campos duais em $\theta^{\bar{a}}$ e $\xi^i := r^{ij} \xi_j$, $X := \xi^i \frac{\partial}{\partial y^i}$, teremos $\omega(X) = [F]_{y^i} dy^i \left(r^{ij} \xi_j \frac{\partial}{\partial y^i} \right) = [F]_{y^i} r^{ij} \xi_j = 0$. Considere também

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\hat{r}_x} \xi &:= \sum_{\bar{a}} \hat{r}_x \left(\hat{r}_x \nabla_{\varepsilon_{\bar{a}}} X, \varepsilon_{\bar{a}} \right) \\ &= \sum_{\bar{a}} \hat{r}_x \left([\varepsilon_{\bar{a}}, X], \varepsilon_{\bar{a}} \right) \\ &= \frac{1}{F^2} r^{ik} g_{kj} [\xi^j]_{y^i} - \frac{n-1}{F} \xi^i [F]_{y^i} + \sum_a \xi^i u_a^j u_a^k C_{jki} \\ &= \frac{1}{F^2} [r^{jl} \xi_l]_{y^i} r^{ik} g_{kj} + r^{ij} \xi_i \frac{\eta_j}{F} \\ &= r^{ij} [\xi_i]_{y^j} - (n-1) \xi_i y^i - F g^{ij} \xi_i \eta_j. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.5 *Dada uma imersão isométrica $f : (M, F) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{F})$, podemos demonstrar*

$$\mu = \mu_H = \mu_h.$$

a partir da forma curvatura média $\mu = \mu_H$, onde H e h são definidos nas respectivas equações (3-24) e (3-12).

Demonstração. Para qualquer $x \in M$ fixo, considere $v := \det(v_j^i) = \sqrt{\det(g_{ij})}$ e $\varphi := \frac{v h_\gamma}{F^2}$, nas equações a seguir (3-26), (3-12) e (3-14) obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta_{\hat{r}_x} \varphi &= F^2 g^{ij} \left[\frac{v h_\gamma}{F^2} \right]_{y^i y^j} - F g^{ij} \left[\frac{v h_\gamma}{F^2} \right]_{y^i} \eta_j \\ &= v g^{ij} \left\{ F^2 \left[\frac{h_\gamma}{F^2} \right]_{y^i y^j} - F \left[\frac{h_\gamma}{F^2} \right]_{y^i} \eta_j \right\} \end{aligned} \quad (3-27)$$

$$= v g^{ij} \left\{ [h_\gamma]_{y^i y^j} - \frac{2 g_{ij} h_\gamma}{F^2} - \left[\frac{h_\gamma \eta_j}{F} \right]_{y^i} \right\} \quad (3-28)$$

$$= 2n v g_{\gamma\sigma} H^\sigma - \frac{2 v h_\gamma}{F^2} - v g^{ij} \left[\frac{h_\gamma \eta_j}{F} \right]_{y^i}. \quad (3-29)$$

A partir da equação (3-27) se conclui a equação (3-28), pelos seguintes casos;

Primeiro,

$$\begin{aligned}
 F^2 \left[\frac{h_\gamma}{F^2} \right]_{y^i y^j} &= F^2 \left[\frac{[h_\gamma]_{y^i}}{F^2} - \frac{2 h_\gamma F [F]_{y^i}}{F^4} \right]_{y^i y^j} \\
 &= [h_\gamma]_{y^i y^j} - \frac{2 F [F]_{y^j} [h_\gamma]_{y^i}}{F^2} - \frac{2 h_\gamma [F]_{y^i y^j}}{F} - \frac{2 [F]_{y^i} [h_\gamma]_{y^j}}{F} + \frac{6 F^2 h_\gamma [F]_{y^j} [F]_{y^i}}{F^4} \\
 &= [h_\gamma]_{y^i y^j} - \frac{4 [F]_{y^i} [h_\gamma]_{y^j}}{F} - \frac{2}{F^2} (F [F]_{y^i y^j} + [F]_{y^i} [F]_{y^j}) h_\gamma + \frac{8}{F^4} (F [F]_{y^i} F [F]_{y^j}) h_\gamma.
 \end{aligned}$$

Pelas propriedades do corolário (1.23) alguns termos são anulados, isto é

$$\begin{aligned}
 F^2 \left[\frac{h_\gamma}{F^2} \right]_{y^i y^j} &= [h_\gamma]_{y^i y^j} - \frac{4}{F^2} g_{ij} \cancel{C_{\sigma\rho}^0 f_i^\rho y^i} - \frac{4}{F^2} g_{ij} g_{\gamma\sigma} [h_\gamma]_{y^i y^j} - \frac{2}{F^2} g_{ij} h_\gamma + \frac{8}{F^4} (g_{ij} g_{ij} y^i y^j) h_\gamma \\
 &= [h_\gamma]_{y^i y^j} - \frac{8}{F^2} g_{ij} g_{\gamma\sigma} h_{ij}^\sigma y^i y^j - \frac{2}{F^2} g_{ij} h_\gamma + \frac{8}{F^2} g_{ij} g_{ij} \cancel{y^i y^j} h_\gamma \\
 &= [h_\gamma]_{y^i y^j} - \frac{8}{F^2} g_{ij} g_{\gamma\sigma} h^\sigma - \frac{2}{F^2} g_{ij} h_\gamma + \frac{8}{F^2} g_{ij} h_\gamma \\
 &= [h_\gamma]_{y^i y^j} - \frac{2}{F^2} g_{ij} h_\gamma.
 \end{aligned}$$

Segundo,

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{h_\gamma \eta_j}{F} \right]_{y^i} &= \frac{[h_\gamma \eta_j]_{y^i}}{F} - \frac{h_\gamma \eta_j [F]_{y^i}}{F^2} \\
 &= \frac{1}{F} [h_\gamma]_{y^i} \eta_j + \frac{1}{F} h_\gamma [\eta_j]_{y^i} \\
 &= \frac{1}{F} [h_\gamma]_{y^i} \eta_j + \frac{1}{F} \cancel{[F]_{y^i} C_{ki}^k} + \frac{F}{F} \frac{\partial g^{ik}}{\partial y^i} C_{jki} + \frac{F}{F} g^{ik} \frac{\partial C_{jkl}}{\partial y^i} \\
 &= \frac{[h_\gamma]_{y^i}}{F} \eta_j - 2 g^{ik} C_{jk}^j C_{jki} + g^{ik} \frac{\partial C_{jkl}}{\partial y^i} \\
 &= \frac{[h_\gamma]_{y^i}}{F} \eta_j - \frac{2}{F^2} C_{jk}^j C_{jki} \cancel{y^i y^j} + \frac{1}{F^2} \frac{\partial C_{jkl}}{\partial y^i} \cancel{y^i y^k} \\
 &= F \left[\frac{h_\gamma}{F^2} \right]_{y^i} \eta_j.
 \end{aligned}$$

Considere a 1-forma $\xi := \left(\frac{\mathfrak{v} h_\gamma}{F^3} \right) \eta_i dy^i$. Na equação (3-26), temos o seguinte caso

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}_{\hat{r}_x} \xi &= r^{ij} \left[\frac{\mathfrak{v} h_\gamma \eta_j}{F^3} \right]_{y^i} - (n-1) \frac{\mathfrak{v} h_\gamma}{F^3} \cancel{\eta_i y^i} - F g^{ij} \frac{\mathfrak{v} h_\gamma}{F^3} \eta_i \eta_j \\
 &= r^{ij} \left[\frac{\mathfrak{v} h_\gamma \eta_j}{F^3} \right]_{y^i} - \frac{\mathfrak{v} h_\gamma g^{ij} \eta_i \eta_j}{F^2} \\
 &= \mathfrak{v} g^{ij} \left[\frac{h_\gamma \eta_j}{F} \right]_{y^i},
 \end{aligned}$$

a igualdade acima pode ser provada da seguinte forma

$$\mathfrak{v} g^{ij} \left[\frac{h_\gamma \eta_j}{F} \right]_{y^i} = \mathfrak{v} g^{ij} \frac{[h_\gamma \eta_j]_{y^i}}{F} - \frac{\mathfrak{v} g^{ij} h_\gamma [F]_{y^i} \eta_j}{F^2} = \mathfrak{v} g^{ij} \frac{[h_\gamma \eta_j]_{y^i}}{F},$$

e

$$\begin{aligned} r^{ij} \left[\frac{\mathfrak{v} h_\gamma \eta_j}{F^3} \right]_{y^i} &= F^2 g^{ij} \left[\frac{\mathfrak{v} h_\gamma \eta_j}{F^3} \right]_{y^i} - \left[\frac{\mathfrak{v} h_\gamma \eta_j}{F^3} \right]_{y^i} y^i y^j \\ &= \mathfrak{v} g^{ij} \frac{[h_\gamma \eta_j]_{y^i}}{F} - \frac{3 F^2 g^{ij} F^2 \mathfrak{v} h_\gamma [F]_{y^i} \eta_j}{F^6} - \mathfrak{v} \frac{[h_\gamma \eta_j]_{y^i}}{F^3} y^i y^j + \frac{3 F^2 \mathfrak{v} h_\gamma [F]_{y^i} \eta_j}{F^6} y^i y^j \\ &= \mathfrak{v} g^{ij} \frac{[h_\gamma \eta_j]_{y^i}}{F} - \frac{\mathfrak{v}}{F^3} [h_\gamma]_{y^i} \eta_j y^i y^j - \frac{\mathfrak{v}}{F^3} h_\gamma [\eta_j]_{y^i} y^i y^j \\ &= \mathfrak{v} g^{ij} \frac{[h_\gamma \eta_j]_{y^i}}{F} - \frac{\mathfrak{v}}{F^3} h_\gamma [F]_{y^i} \eta_j y^i y^j - \frac{\mathfrak{v}}{F^2} h_\gamma \frac{\partial g^{ij}}{\partial y^i} C_{ijk} y^i y^j - \frac{\mathfrak{v}}{F^2} h_\gamma g^{ij} \frac{\partial C_{ijk}}{\partial y^i} y^i y^j \\ &= \mathfrak{v} g^{ij} \frac{[h_\gamma \eta_j]_{y^i}}{F} + \frac{\mathfrak{v}}{F^2} h_\gamma g^{jk} g^{ik} C_{kjl} C_{ijk} y^i y^j \\ &= \mathfrak{v} g^{ij} \frac{[h_\gamma \eta_j]_{y^i}}{F} + \frac{\mathfrak{v}}{F^4} h_\gamma \eta_i \eta_j y^i y^j \\ &= \mathfrak{v} g^{ij} \frac{[h_\gamma \eta_j]_{y^i}}{F} + \frac{\mathfrak{v}}{F^2} h_\gamma g^{ij} \eta_i \eta_j. \end{aligned}$$

Das equações anteriores temos,

$$r^{ij} \left[\frac{\mathfrak{v} h_\gamma \eta_j}{F^3} \right]_{y^i} - \frac{\mathfrak{v} h_\gamma g^{ij} \eta_i \eta_j}{F^2} = \mathfrak{v} g^{ij} \left[\frac{h_\gamma \eta_j}{F} \right]_{y^i}.$$

Se consideramos a equação (3-29), teremos

$$\Delta_{\hat{r}_x} \left(\frac{\mathfrak{v} h_\gamma}{F^2} \right) - \operatorname{div}_{\hat{r}_x} \left(\left(\frac{\mathfrak{v} h_\gamma \eta_i}{F^3} \right) dy^i \right) = 2n \mathfrak{v} \left(g_{\gamma\sigma} H^\sigma - \frac{h_\gamma}{F^2} \right). \quad (3-30)$$

Podemos concluir que a forma do volume de $(S_x M, \hat{r}_x)$ possui a forma que aparece em (2-31), como aparece na sequência abaixo

$$\begin{aligned} dV_{S_x M} &= \theta^{n+1} \wedge \dots \wedge \theta^{2n-1} \\ &= \sum_{\mathfrak{v}} (-1)^{i-1} \frac{\sqrt{\det(g_{ij})}}{F^n} y^i dy^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy}^i \wedge \dots \wedge dy^n \\ &= \frac{\mathfrak{v}}{F^n} d\tau, \end{aligned}$$

Onde, $d\tau$ é definido em (2-36). Das equações (3-22) e (3-30), obtemos,

$$\mu_H - \mu_h = \left\{ \frac{1}{c_{n-1} \sigma} \int_{S_x M} \left(g_{\gamma\sigma} H^\sigma - \frac{h_\sigma}{F^2} \right) \mathfrak{v} dV_{S_x M} \right\} dx^\sigma. \quad (3-31)$$

Como $S_x M$ é compacto, então, podemos perceber que a partir das equações (3-19), (3-24) e (3-31)

obtemos que

$$\mu = \mu_{\tilde{H}} = 2\mu_H - \mu_h = \mu_H = \mu_h, \quad (3-32)$$

e por meio das equações (3-32) e (3-23), a primeira fórmula de variação do volume (3-23), pode ser reescrita deste modo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_t(M) |_{t=0} &= -n \int_M \mu(V) dV_M \\ &= -\frac{n}{c_{n-1}} \int_{SM} g(H, V) dV_{SM} \\ &= -\frac{n}{c_{n-1}} \int_{SM} \mathcal{K}(V) dV_{SM} \end{aligned} \quad (3-33)$$

$$= - \int_M \left(\frac{n}{c_{n-1}} \int_{S_x M} \mathcal{K}(V) \Omega d\tau \right) dx. \quad (3-34)$$

□

3.3 Espaços de Finsler com (α, β) -métricas

Uma (α, β) -métrica, é uma função escalar sobre TM definida por

$$F = \alpha \phi(s), \quad s = \frac{\beta}{\alpha},$$

onde ϕ é uma função positiva de classe C^∞ sobre um intervalo aberto simétrico $(-b_0, b_0)$,

$$\alpha = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}, \quad \beta = b_i(x)y^i,$$

e a_{ij}, a^{ij} , são as componentes da matriz de uma métrica riemanniana e de sua inversa respectivamente e b_i são as componentes da 1-forma β , cuja norma em relação a α é

$$\|\beta_x\|_\alpha^* := \sqrt{a^{ij} b_i b_j}.$$

Definição 3.6 *Um espaço (M, F) com F uma (α, β) -métrica é um (α, β) -espaço.*

Para apresentarmos os conceitos relacionados com (α, β) -métricas no espaço (M, F) de Finsler. As (α, β) -métricas devem satisfazer as condições de uma métrica de Finsler, as quais serão apresentadas no seguinte lema

Lema 3.7 *Seja $\phi = \phi(s)$ uma função positiva de classe C^∞ sobre $(-b_0, b_0)$ e $F = \alpha \phi(s)$, uma (α, β) -métrica, a função escalar F é uma métrica de Finsler se, e somente se $\phi = \phi(s)$ satisfaz*

$$\phi(s) - s\phi'(s) + (b^2 - s^2)\phi''(s) > 0, \quad |s| \leq b < b_0. \quad (3-35)$$

Demonstração. Suponha que $F = \alpha\phi\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ é uma métrica de Finsler. Primeiro, para um qualquer número b com $0 \leq b < b_0$ se pode escolher o par $\{\alpha, \beta\}$ tal que $\|\beta_{x_0}\|_{\alpha}^* = b$ para algum ponto $x_0 \in M$ então, para todo s com $|s| \leq b$ podemos encontrar um vetor $y \in T_{x_0}M$, de modo que $\beta(x_0, y) = s\alpha(x_0, y)$, assim $F(x_0, y) = \alpha\phi(s) > 0$, o que implica que $\phi(s) > 0$.

Segundo, como F é uma métrica de Finsler, no ponto x_0 se tem que $\det(g_{ij}(x_0, y)) > 0$, assim da equação (1-7) se conclui que

$$\phi(s) - s\phi'(s) \neq 0.$$

Se $n > 2$, se tem $\phi(0) > 0$ e como s, b são números arbitrários com $|s| \leq b < b_0$ então

$$\phi(s) - s\phi'(s) > 0, \quad (|s| < b_0),$$

assim, da equação (1-7) se conclui que

$$\phi(s) - s\phi'(s) + (b^2 - s^2)\phi''(s) > 0, \quad |s| \leq b < b_0.$$

Se $n = 2$, então (3-35) se obtém diretamente da equação (1-7).

Suponha agora que $\phi = \phi(s)$ satisfaça a equação (3-35) para qualquer s com $|s| < b_0$. Se verifica imediatamente que F é positiva homogênea de grau um, assim só devemos mostrar a condição, positiva definida para os coeficientes g_{ij} .

Tome $|s| = b$ e da equação (3-35), obtemos

$$\phi(s) - s\phi'(s) > 0, \quad (|s| < b_0). \quad (3-36)$$

Considere a seguinte família de funções,

$$\phi_{\lambda}(s) := (1 - \lambda) + \lambda\phi(s).$$

Note que ϕ_{λ} satisfaz as equações (3-35) e (3-36) para qualquer $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\begin{aligned} \phi_{\lambda}(s) - s\phi'_{\lambda}(s) &= (1 - \lambda) + \lambda\phi(s) - s(\lambda\phi'(s)) \\ &= (1 - \lambda) + \lambda(\phi(s) - s\phi'(s)) > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{\lambda}(s) - s\phi'_{\lambda}(s) + (b^2 - s^2)\phi''_{\lambda}(s) &= (1 - \lambda) + \lambda(\phi(s) - s\phi'(s)) + \lambda(b^2 - s^2)\phi''(s) \\ &= (1 - \lambda) + \lambda((\phi(s) - s\phi'(s)) + (b^2 - s^2)\phi''(s)) > 0. \end{aligned}$$

Seja $\{\alpha, \beta\}$ um par arbitrário com $b < b_0$, $x \in M$, então o determinante da matriz fundamental (g_{ij}^{λ}) da métrica $F^{\lambda} := \alpha\phi_{\lambda}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ é dado por

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}^{\lambda}) &= [(1 - \lambda) + \lambda\phi(s)]^{n+1} [(1 - \lambda) + \lambda(\phi(s) - s\phi'(s))]^{n-2} \\ &\quad \times \{(1 - \lambda) + \lambda[(\phi(s) - s\phi'(s)) + (b^2 - s^2)\phi''(s)]\} \det(a_{ij}), \end{aligned}$$

isto implica que $\det(g_{ij}^\lambda) \neq 0$ para todo $0 \leq \lambda \leq 1$. Como $(g_{ij}^0) = (a_{ij})$ é positiva definida e contínua, concluímos que $(g_{ij}^1) = (g_{ij})$, também será positiva definida. $\square$

Exemplos:

1- Uma (α, β) -métrica F será Riemanniana, se $\phi(s) \equiv 1$,

2- Uma métrica F será de Randers, se $\phi(s) = 1 + s$ é uma função linear e $b < 1$, ou seja

$$F = \alpha\phi(s) = \alpha(1 + s) = \alpha\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) = \alpha + \beta, \quad (0 \leq b < 1).$$

3- Uma família de (α, β) -métricas F serão chamadas *uma (α, β) quadrática*, quando $\phi = 1 + \varepsilon s + k s^2$ ou seja,

$$F = \alpha\phi(s) = \alpha(1 + \varepsilon s + k s^2) = \alpha + \varepsilon\beta + k \frac{\beta^2}{\alpha}.$$

4- (M, F) será *um espaço local de Minkowski* e F será chamada *uma (α, β) -métrica de Minkowski*. Se α é uma métrica euclidiana e β é paralela com respeito a α .

Por ser α uma métrica euclidiana, temos

$$\alpha = \sqrt{c_{ij}y^i y^j}, \quad c_{ij} = cte$$

uma função que só depende de y .

β é paralela com respeito a α . Se a derivada covariante de β em relação a α é nula, assim pela equação (1-9) temos

$$b_{i|j}(x) = \frac{\partial b_i(x)}{\partial x^j} - b_k \tilde{\Gamma}_{ij}^k(x) = 0,$$

onde $\tilde{\Gamma}_{ij}^k(x) = 0$ porque são os símbolos de Christoffel da métrica α .

Logo, $\frac{\partial b_i(x)}{\partial x^j} = 0$, podendo concluir que $b_i(x) = b_i$ é uma constante, assim α e β só dependem de y , ou seja F é uma (α, β) -métrica de Minkowski.

3.4 Hipersuperfícies mínimas em (α, β) -espaços

Nesta seção damos uma condição de minimalidade para as hipersuperfícies mínimas nos (α, β) -espaços.

Definição 3.8 Uma imersão isométrica $f: M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+1}$; $f(M^n) \subset \tilde{M}^{n+1}$ é chamada *uma hipersuperfície*.

Se (M, F) é uma hipersuperfície de $(\tilde{M}, \tilde{F})$, vamos considerar $\eta = \eta^\gamma \tilde{e}_\gamma$ como sendo o único campo vetorial unitário normal a $f(M)$ em relação a $\tilde{\alpha}$ e consideramos $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}^\gamma \tilde{e}_\gamma$ como o

único campo vetorial unitário normal de M em relação a $\tilde{g}$, isto implica que:

$$\tilde{a}_{\gamma\sigma} n^\gamma f_i^\sigma = 0, \quad \tilde{g}_{\gamma\sigma} \tilde{n}^\gamma f_i^\sigma = 0;$$

$$\tilde{\alpha}(n, n) = \tilde{a}_{\gamma\sigma} n^\gamma n^\sigma = 1, \quad \tilde{g}(\tilde{n}, \tilde{n}) = \tilde{g}_{\gamma\sigma} \tilde{n}^\gamma \tilde{n}^\sigma = 1,$$

Podemos afirmar que os campos normais vetoriais em relação as métricas $\tilde{\alpha}, \tilde{g}$ são paralelos. Então, existe uma função $\lambda(x, y)$ sobre SM , que satisfaz

$$\tilde{g}_{\gamma\sigma} \tilde{n}^\gamma = \lambda \tilde{a}_{\gamma\sigma} n^\sigma,$$

onde, $\lambda = \tilde{g}(\tilde{n}, n) = (\tilde{\alpha}(\tilde{n}, n))^{-1}$,

logo,

$$\tilde{n}^\gamma = \lambda \tilde{g}^{\gamma\sigma} \tilde{a}_{\sigma\rho} n^\rho.$$

Podemos conferir na equação (3-34), que a hipersuperfície f é uma imersão mínima se, e somente se,

$$\eta \int_{S_x M} \mathcal{K}(V) \Omega d\tau = \eta^\gamma \int_{S_x M} \frac{h_\gamma}{F^2} \Omega d\tau = 0. \quad (3-37)$$

Como foi provado anteriormente, $h^\gamma \in V^\perp$, (3-20), e estamos tratando de uma hipersuperfície, h_γ pode ser expresso na direção de $\tilde{n}$, isto é:

$$\begin{aligned} h_\gamma &= \tilde{g}_{\gamma\rho} h^\rho \\ &= \tilde{g}_{\gamma\rho} \left[\rho_\sigma^{\perp\rho} \left(f_{ij}^\sigma y^i y^j + \tilde{G}^\sigma \right) \right] \\ &= \tilde{g}_{\gamma\rho} \left[\left(f_{ij}^\sigma y^i y^j + \tilde{G}^\sigma \right) \tilde{g}_{\sigma\delta} \tilde{n}^\delta \right] \tilde{n}^\rho \\ &= \lambda^2 \left[\left(f_{ij}^\sigma y^i y^j + \tilde{G}^\sigma \right) \tilde{a}_{\sigma\delta} \eta^\delta \right] \tilde{a}_{\gamma\rho} \eta^\rho. \end{aligned}$$

Assim podemos perceber que,

$$\det(g_{ij}) = \frac{A}{\lambda^2 \tilde{A}} \det(\tilde{g}_{\gamma\sigma}) = \frac{A}{\lambda^2 \tilde{A}} \phi^{n+1} \tilde{H} \tilde{A} = \frac{\phi^{n+1} \tilde{H} A}{\lambda^2},$$

onde

$$A = \det(a_{ij}), \quad \tilde{A} = \det(\tilde{a}_{\gamma\sigma}).$$

Para demonstrar a igualdade, considere

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} = f_i^\gamma \tilde{e}_\gamma.$$

Assim, obtemos a seguinte igualdade nas matrizes abaixo

$$\begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \partial_i \end{pmatrix} (\tilde{g}_{\gamma\sigma}) \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \partial_j \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \eta \\ \partial_i \end{pmatrix} (\tilde{g}_{\gamma\sigma}) \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \partial_j \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \partial_i \end{pmatrix} (\tilde{a}_{\gamma\sigma}) \begin{pmatrix} \eta \\ \partial_j \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{ij} \end{pmatrix}.$$

A partir das matrizes anteriores, obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \partial_i \end{pmatrix} (\tilde{g}_{\gamma\sigma}) \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \partial_j \end{pmatrix}^T &= \begin{pmatrix} \eta \\ \partial_i \end{pmatrix} (\tilde{g}_{\gamma\sigma}) \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \partial_j \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix}^{-1}, \\ \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \partial_i \end{pmatrix} (\tilde{g}_{\gamma\sigma}) \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \partial_j \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \partial_i \end{pmatrix} (\tilde{g}_{\gamma\sigma}) \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \partial_j \end{pmatrix}^T, \\ \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \partial_i \end{pmatrix} (\tilde{g}_{\gamma\sigma}) \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \partial_j \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix} (\tilde{a}_{\gamma\sigma}) \begin{pmatrix} \eta \\ \partial_j \end{pmatrix}^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \partial_i \end{pmatrix} (\tilde{g}_{\gamma\sigma}) \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \partial_j \end{pmatrix}^T (\tilde{a}_{\gamma\sigma}) \begin{pmatrix} \eta \\ \partial_j \end{pmatrix}^T. \end{aligned}$$

Se usamos as seguintes igualdades “ $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ ” e “ $\det(A^t) = \det(A)$ ”, assim teremos a seguinte resultado.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix}^t \det \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix} \det(\tilde{a}_{\gamma\sigma}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix} \det(\tilde{g}_{\gamma\sigma}) \det(a_{ij}), \\ \lambda \cdot \det(g_{ij}) \cdot \lambda \cdot \det(g_{ij}) \cdot \det(\tilde{a}_{\gamma\sigma}) &= \det(g_{ij}) \cdot \det(\tilde{g}_{\gamma\sigma}) \cdot \det(a_{ij}), \\ \det(g_{ij}) &= \frac{1}{\lambda^2} \frac{\det(a_{ij})}{\det(\tilde{a}_{\gamma\sigma})} \det(\tilde{g}_{\gamma\sigma}), \\ \det(g_{ij}) &= \frac{A}{\lambda^2 \tilde{A}} \det(\tilde{g}_{\gamma\sigma}). \end{aligned}$$

Pela equação (1-7), do capítulo 1 temos

$$\det(g_{ij}) = \frac{A}{\lambda^2 \tilde{A}} \phi^{n+2} (\phi - \tilde{s}\phi')^{n-1} [\phi - \tilde{s}\phi' + (\tilde{b}^2 - \tilde{s}^2)\phi''] \tilde{A} = \frac{\phi^{n+1} \tilde{H}A}{\lambda^2}, \quad (3-38)$$

onde

$$\tilde{H}(\tilde{s}) = \phi (\phi - \tilde{s}\phi')^{n-1} [\phi - \tilde{s}\phi' + (\tilde{b}^2 - \tilde{s}^2)\phi''].$$

Da definição do elemento volume em Finsler, temos

$$\Omega = \det \left(\frac{g_{ij}}{F} \right) = \frac{\det(g_{ij})}{F^n}.$$

Podemos observar que a equação (3-37) é equivalente a

$$\begin{aligned} \eta^\gamma \int_{S_{xM}} \lambda^2 \frac{[(f_{ij}^\sigma y^i y^j + \tilde{G}^\sigma) \tilde{a}_{\sigma\rho} \eta^\rho] \tilde{a}_{\gamma\delta} \eta^\delta}{F^2} \cdot \frac{\phi^{n+1} \tilde{H}A}{\lambda^2 F^n} d\tau &= 0, \\ \eta^\gamma \tilde{a}_{\gamma\delta} \int_{S_{xM}} (f_{ij}^\sigma y^i y^j + \tilde{G}^\sigma) \cdot \frac{\phi^{n+1} \tilde{H}A}{\tilde{\alpha}^{n+2} \phi^{n+2}} d\tau &= 0, \\ \eta^\gamma a_{\gamma\delta} \int_{S_{xM}} \frac{(\phi - s\phi')^{n-1} [\phi - s\phi' + (\tilde{b}^2 - s^2)\phi'']}{\tilde{\alpha}^{n+2}} (f_{ij}^\sigma y^i y^j + \tilde{G}^\sigma) d\tau &= 0. \end{aligned}$$

Considerando $\tilde{F} = \tilde{\alpha}\phi(s)$ uma $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ -métrica de Minkowski, temos $\tilde{G}^{\beta} = 0$. Então no $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ -espaço de Minkowski, f é uma imersão mínima se, e somente se,

$$f_{ij}^{\sigma} \eta^{\sigma} \int_{S_x M} \frac{y^i y^j (\phi(s) - s\phi'(s))^{n-1} [\phi(s) - s\phi'(s) + (\tilde{b}^2 - s^2) \phi''(s)]}{\tilde{\alpha}^{n+2}} d\tau = 0.$$

Como as coordenadas y^i são invariantes por um fator multiplicativo em um compacto M , o domínio de integração se pode restringir à esfera S_x , assim a equação que caracteriza as hipersuperfícies mínimas no (α, β) -espaço de Minkowski é dado por

Teorema 3.9 *Seja (M, F) uma hipersuperfície de $(\tilde{M}, \tilde{F})$ e $\tilde{F} = \tilde{\alpha}\phi(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}})$ uma $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ -métrica de Minkowski. Então, $f : (M, F) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{F})$ é uma imersão mínima se, e somente se,*

$$f_{ij}^{\beta} \eta^{\beta} \int_{S_x} y^i y^j \left(\phi(\tilde{\beta}) - \tilde{\beta} \phi'(\tilde{\beta}) \right)^{n-1} \left[\phi(\tilde{\beta}) - \tilde{\beta} \phi'(\tilde{\beta}) + (\tilde{b}^2 - \tilde{\beta}^2) \phi''(\tilde{\beta}) \right] d\tau = 0, \quad (3-39)$$

onde, S_x é uma esfera, tal que $\tilde{\alpha} = 1$.

Aplicações

Em geometria, encontramos vários casos especiais (superfícies de revolução, superfícies regradas, superfícies mínimas, etc.) que podem se tornar interessantes por si mesmas, como no caso das superfícies mínimas.

Nesta seção consideraremos o espaço tridimensional $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ de Minkowski, nos conóides e nas superfícies de revolução, paralelos ao eixo x^3 na direção de $\tilde{\beta}$, e daremos uma condição de minimalidade mostrando que estas superfícies mínimas possui restrições na função h . Calcularemos a Curvatura de Gauss do conóide, observando que na imersão mínima (helicóide) a curvatura pode ser positiva. O estudo realizado para estas superfícies no caso Euclidiano afirmam que sua curvatura não é positiva.

4.1 Conóide

O conóide $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, h(v))$, é uma superfície regrada com a diretriz da reta perpendicular ao plano diretor (veja fig 4.1) onde h , é uma função a ser determinada.

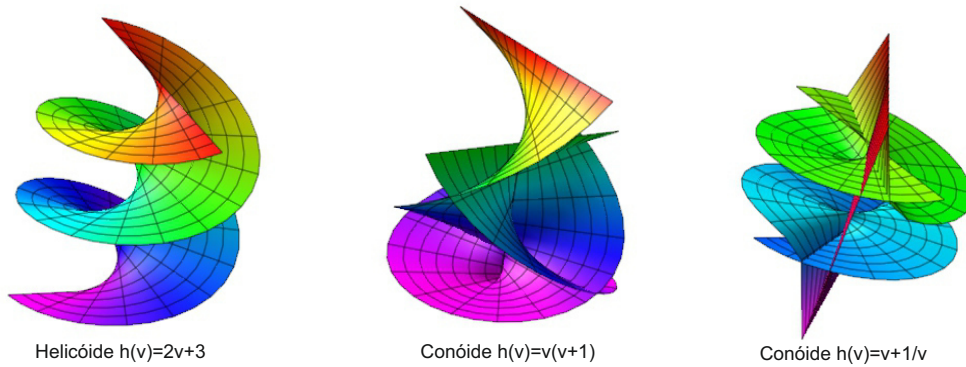


Figura 4.1: Conóides

Teorema 4.1 *Seja $(V^3, \tilde{F})$ um (α, β) –espaço de Minkowski, $\tilde{F} = \tilde{\alpha}\phi\left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}\right)$, $\tilde{\beta} = \tilde{b}\tilde{y}^3$ uma $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ –métrica e $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, h(v))$ um conóide. Então, f é uma imersão mínima se, e somente se, é um helicóide ou um plano.*

Demonstração. Na secção anterior provamos que uma $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ –métrica de Minkowski deve cumprir o seguinte, $\tilde{\alpha}$ é uma métrica euclidiana e os coeficientes de $\tilde{\beta}$ são constantes. Assim, $\tilde{F} = \tilde{\alpha}\phi\left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}\right)$

é da forma

$$\tilde{\alpha} = \sqrt{(\tilde{y}^1)^2 + (\tilde{y}^2)^2 + (\tilde{y}^3)^2}, \quad \tilde{\beta} = \tilde{b}\tilde{y}^3.$$

Como estamos trabalhando em uma métrica euclidiana, então, a matriz de df_x esta dada por

$$(f_i^\gamma)_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \\ 0 & h' \end{pmatrix}, \quad (4-1)$$

e o vetor normal η na superfície M , pode ser calculado da seguinte maneira

$$(\eta^\gamma)_{1 \times 3} = \frac{f_1^\gamma \times f_2^\gamma}{|f_1^\gamma \times f_2^\gamma|} = \left(\frac{-h' \sin v}{\sqrt{u^2 + (h')^2}} \quad \frac{h' \cos v}{\sqrt{u^2 + (h')^2}} \quad -\frac{u}{\sqrt{u^2 + (h')^2}} \right). \quad (4-2)$$

além disso, temos

$$\begin{aligned} (f_{11}^\gamma) &= (0, 0, 0); \\ (f_{12}^\gamma) &= (-\sin v, \cos v, 0) = (f_{21}^\gamma); \\ (f_{22}^\gamma) &= (-u \cos v, -u \sin v, h''). \end{aligned}$$

Como $\tilde{y} = (\tilde{y}^1, \tilde{y}^2, \tilde{y}^3) \in T_{\tilde{x}}\tilde{M}$, podemos expressar $\tilde{y}$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} (\tilde{y}^1, \tilde{y}^2, \tilde{y}^3) &= \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \\ 0 & h' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \\ &= (y^1 \cos v - u y^2 \sin v, y^1 \sin v + u y^2 \cos v, y^2 h') , \end{aligned} \quad (4-3)$$

e, $y = (y^1, y^2) \in T_x M$.

Quando assumimos que $y^1 = \cos \theta$, $y^2 = \frac{1}{u^2 + (h')^2} \sin \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, encontramos

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \sqrt{(\tilde{y}^1)^2 + (\tilde{y}^2)^2 + (\tilde{y}^3)^2} \\ &= \sqrt{(y^1 \cos v - u y^2 \sin v)^2 + (y^1 \sin v + u y^2 \cos v)^2 + (y^2 h')^2} \\ &= \sqrt{(y^1 \cos v)^2 + (u y^2 \sin v)^2 + (y^1 \sin v)^2 + (u y^2 \cos v)^2 + (y^2 h')^2} \\ &= \sqrt{(y^1)^2 + (u y^2)^2 + (y^2 h')^2} \\ &= \sqrt{(y^1)^2 + (u^2 + (h')^2) (y^2)^2} = 1. \end{aligned}$$

Para caracterizar as imersões mínimas dos conóides, vamos a considerar a função a seguir

$$W^{ij} := \int_{S_x} y^i y^j \left(\phi(\tilde{\beta}) - \tilde{\beta} \phi'(\tilde{\beta}) \right) \left[\phi(\tilde{\beta}) - \tilde{\beta} \phi'(\tilde{\beta}) + (\tilde{b}^2 - \tilde{\beta}^2) \phi''(\tilde{\beta}) \right] d\tau. \quad (4-4)$$

Da condição acima, podemos observar que (3-39), é equivalente à seguinte equação,

$$\sum_{\gamma=1}^3 (2f_{12}^{\gamma} \eta^{\gamma} W^{12} + f_{22}^{\gamma} \eta^{\gamma} W^{22}) = 0, \quad (4-5)$$

como S_x é simétrico em y^2 e $\tilde{\beta} = b\bar{y}^3 = bh'y^2$ é uma função que só depende de y^2 , então

$$W^{12} = \int_{S_x} y^1 y^2 \left(\phi(\tilde{\beta}) - \tilde{\beta} \phi'(\tilde{\beta}) \right) \left[\phi(\tilde{\beta}) - \tilde{\beta} \phi'(\tilde{\beta}) + (\tilde{b}^2 - \tilde{\beta}^2) \phi''(\tilde{\beta}) \right] d\tau = 0.$$

Para provar isto, observemos a função abaixo

$$\varphi(y^2) = \left(\phi(\tilde{\beta}) - \tilde{\beta} \phi'(\tilde{\beta}) \right) \left[\phi(\tilde{\beta}) - \tilde{\beta} \phi'(\tilde{\beta}) + (\tilde{b}^2 - \tilde{\beta}^2) \phi''(\tilde{\beta}) \right],$$

sendo que esta é uma função homogênea de grau zero, que só depende de y^2 .

Da equação (2-36), temos

$$d\tau = y^1 dy^2 - y^2 dy^1,$$

então, W^{12} pode ser escrito como

$$\begin{aligned} W^{12} &= \int_{S_x} y^1 y^2 \varphi(y^2) (y^1 dy^2 - y^2 dy^1) \\ &= \int_{S_x} -y^1 (y^2)^2 \varphi(y^2) dy^1 + (y^1)^2 y^2 \varphi(y^2) dy^2. \end{aligned}$$

Notamos que S_x é uma curva simples fechada derivável, $y^1 (y^2)^2 \varphi(y^2)$ e $(y^1)^2 y^2 \varphi(y^2)$ são funções diferenciáveis, assim, podemos aplicar o teorema de Green, isto é

$$W^{12} = \iint_D (4y^1 y^2 \varphi(y^2) + y^1 (y^2) \varphi(y^2)) dA,$$

onde, D é a região do plano delimitado por $S_x M$.

Agora, a função $f(y^1, y^2) = 4y^1 y^2 \varphi(y^2) + y^1 (y^2) \varphi(y^2)$ é ímpar em y^1 para todo $(y^1, y^2) \in D$, e o domínio de integração é simétrico no eixo y^2 , então

$$W^{12} = \iint_D f(y^1, y^2) dA = 0.$$

Portanto, na equação (3-39) percebemos que

$$u h'' W^{22} = 0, \quad \forall u.$$

Vamos provar que W^{22} é diferente de zero. Usando a equação (3-38) e a $\det(a_{ij}) = 1$ em relação à métrica euclidiana, temos

$$W^{22} = \int_{S_x} (y^2)^2 \frac{\lambda^2 \det(g_{ij})}{\phi^{n+2}(s)} d\tau, \quad \phi(s) > 0,$$

como y^2 não é zero, então, $W^{22} > 0$, logo $h'' = 0$, assim,

$$h(v) = cv + d,$$

onde, c e d são constantes arbitrárias. □

Observação 4.2 *Do teorema acima, podemos afirmar que o helicóide é uma superfície mínima não só no espaço euclidiano, mas também no (α, β) -espaço de Minkowski, onde $\tilde{\beta} = \tilde{b}\tilde{y}^3$. Sendo que o resultado não será satisfatório, se não satisfaz a condição $\tilde{\beta} = \tilde{b}\tilde{y}^3$.*

Teorema 4.3 *Seja $(V^3, \tilde{F})$ um (α, β) -espaço de Minkowski e $\tilde{F} = \tilde{\alpha} + k \frac{\tilde{\beta}^2}{\tilde{\alpha}}$, $\|\tilde{\beta}\| = \tilde{b}$ uma $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ -métrica, que satisfaça $\tilde{\beta} = \tilde{b}_1\tilde{y}^1 + \tilde{b}_2\tilde{y}^2 + \tilde{b}_3\tilde{y}^3$, (nem todos, $\tilde{b}_1$ e $\tilde{b}_2$, serão nulos). Então, a hipersuperfície mínima conóide em $(V^3, \tilde{F})$ será um plano.*

Para comprovar isto, observe que pela equação (4-3) a 1-forma $\tilde{\beta}$ pode ser expressa da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} &= \tilde{b}_1\tilde{y}^1 + \tilde{b}_2\tilde{y}^2 + \tilde{b}_3\tilde{y}^3 \\ &= \tilde{b}_1(y^1 \cos v - uy^2 \sin v) + \tilde{b}_2(y^1 \sin v + uy^2 \cos v) + \tilde{b}_3y^2 h' \\ &= (\tilde{b}_1 \cos v + \tilde{b}_2 \sin v)y^1 + u(\tilde{b}_2 \cos v - \tilde{b}_1 \sin v)y^2 + \tilde{b}_3y^2 h' \\ &= B_1y^1 + (uB_2 + \tilde{b}_3h')y^2,\end{aligned}$$

onde, nem todos, $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$, são nulos, e

$$\begin{aligned}B_1 &:= \tilde{b}_1 \cos v + \tilde{b}_2 \sin v, \\ B_2 &:= \tilde{b}_2 \cos v - \tilde{b}_1 \sin v.\end{aligned}$$

Para simplificar os cálculos, consideraremos somente a $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ -métrica quadrática

$$\tilde{F} = \tilde{\alpha} + k \frac{\tilde{\beta}^2}{\tilde{\alpha}}. \quad (4-6)$$

Como $\tilde{F} = \tilde{\alpha}\phi(s)$ e $s = \left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}\right)$, então,

$$\phi(s) = 1 + k \frac{\tilde{\beta}^2}{\tilde{\alpha}^2} \quad (4-7)$$

Assim, temos:

$$\phi(s) = 1 + ks^2, \quad \phi'(s) = 2ks, \quad \phi''(s) = 2k.$$

A partir das condições anteriores, (3-39) pode ser vista como uma equação em relação a u .

Comprovaremos isso na sequência

$$\begin{aligned}
 2f_{12}^{\alpha}\eta^{\alpha}W^{12} + f_{22}^{\alpha}\eta^{\alpha}W^{22} &= 0, \\
 \frac{2h'}{\sqrt{u^2 + (h')^2}}W^{12} - \frac{uh''}{\sqrt{u^2 + (h')^2}}W^{22} &= 0 \\
 2h'W^{12} - uh''W^{22} &= 0
 \end{aligned} \tag{4-8}$$

e a equação (4-4) pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
 W^{ij} &= \int_{S_x} y^i y^j \left(\phi(\tilde{\beta}) - \tilde{\beta} \phi'(\tilde{\beta}) \right) \left[\phi(\tilde{\beta}) - \tilde{\beta} \phi'(\tilde{\beta}) + (\tilde{b}^2 - \tilde{\beta}^2) \phi''(\tilde{\beta}) \right] d\tau \\
 &= \int_{S_x} y^i y^j \left(1 + k\tilde{\beta}^2 - 2k\tilde{\beta}^2 \right) \left(1 + k\tilde{\beta}^2 - 2k\tilde{\beta}^2 + 2k\tilde{b}^2 - 2k\tilde{\beta}^2 \right) d\tau \\
 &= \int_{S_x} y^i y^j \left(1 - k\tilde{\beta}^2 \right) \left(1 - 3k\tilde{\beta}^2 + 2k\tilde{b}^2 \right) d\tau,
 \end{aligned}$$

para calcular W^{12} e W^{22} , temos que observar que $d\tau$ e $\tilde{\beta}^2$ são dados por

$$\begin{aligned}
 d\tau &= y^1 dy^2 - y^2 dy^1 \\
 &= \cos \theta \frac{\cos \theta}{\sqrt{u^2 + (h')^2}} d\theta - \frac{\sin \theta}{\sqrt{u^2 + (h')^2}} (-\sin \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + (h')^2}} d\theta,
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \tilde{\beta}^2 &= B_1^2 (y^1)^2 + (2uB_1B_2 + 2B_1\tilde{b}_3h') y^1 y^2 + (u^2 B_2^2 + 2uB_2\tilde{b}_3h' + \tilde{b}_3^2 (h')^2) (y^2)^2 \\
 &= B_1^2 \cos^2 \theta + (2uB_1B_2 + 2B_1\tilde{b}_3h') \cos \theta \frac{\sin \theta}{\sqrt{u^2 + (h')^2}} + (u^2 B_2^2 + 2uB_2\tilde{b}_3h' + \tilde{b}_3^2 (h')^2) \frac{\sin^2 \theta}{u^2 + (h')^2},
 \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}
 C_1 &:= (1 - k\tilde{\beta}^2) = \left(1 - k B_1^2 \cos^2 \theta + k(2uB_1B_2 + 2B_1\tilde{b}_3h') \cos \theta \frac{\sin \theta}{\sqrt{u^2 + (h')^2}} + \right. \\
 &\quad \left. k(u^2 B_2^2 + 2uB_2\tilde{b}_3h' + \tilde{b}_3^2 (h')^2) \frac{\sin^2 \theta}{u^2 + (h')^2} \right), \\
 C_2 &:= (1 - 3k\tilde{\beta}^2 + 2k\tilde{b}^2) = \left(1 + 2k\tilde{b}^2 - 3k B_1^2 \cos^2 \theta - 3k(2uB_1B_2 + 2B_1\tilde{b}_3h') \cos \theta \frac{\sin \theta}{\sqrt{u^2 + (h')^2}} \right. \\
 &\quad \left. - 3k(u^2 B_2^2 + 2uB_2\tilde{b}_3h' + \tilde{b}_3^2 (h')^2) \frac{\sin^2 \theta}{u^2 + (h')^2} \right).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$W^{12} = \int_0^{2\pi} C_1 C_2 \cos \theta \frac{\sin \theta}{\sqrt{u^2 + (h')^2}} \frac{d\theta}{\sqrt{u^2 + (h')^2}},$$

$$W^{22} = \int_0^{2\pi} C_1 C_2 \frac{\sin^2 \theta}{u^2 + (h')^2} \frac{d\theta}{\sqrt{u^2 + (h')^2}}.$$

Resolvendo as integrais, obtemos

$$\begin{aligned} W^{12} = & \frac{k B_1 \pi}{2(u^2 + (h')^2)^{\frac{5}{2}}} \left((3k B_1^2 + 3k B_2^2 - 2k \tilde{b}^2 - 4) B_2 u^3 + (3\tilde{b}_3 B_1^2 + 9\tilde{b}_3 B_2^2 - 2\tilde{b}^2 B_2) k h' u^2 + \right. \\ & - 4\tilde{b}_3 h' u^2 + (3k B_1^2 B_2 + 9k \tilde{b}_3^2 B_2 - 2k \tilde{b}^2 B_2 - 4B_2) (h')^2 u + 3k \tilde{b}_3 B_1^2 (h')^3 + \\ & \left. (3k \tilde{b}_3^3 - 2k \tilde{b}_3 \tilde{b}^2 - 4\tilde{b}_3) (h')^3 \right). \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} W^{22} = & \frac{\pi}{8(u^2 + (h')^2)^{\frac{7}{2}}} \left((3k^2 B_1^4 - 12k^2 \tilde{b}^2 B_2^2 + 18k^2 B_1^2 B_2^2 - 4k^2 \tilde{b}^2 B_1^2 + 15k^2 B_2^4 - 24k B_2^2) u^4 \right. \\ & (-8k B_1^2 + 16k \tilde{b}^2 + 8) u^4 + (60k^2 \tilde{b}_3 B_2^2 + 36k^2 \tilde{b}_3 B_1^2 - 24k^2 \tilde{b}_3 \tilde{b}^2 - 48k \tilde{b}_3) B_2 h' u^3 + \\ & (18\tilde{b}_3^2 B_1^2 - 12\tilde{b}_3^2 \tilde{b}^2 - 8\tilde{b}^2 B_1^2 + 6B_1^4 + 18B_1^2 B_2^2 - 12\tilde{b}^2 B_2^2 + 90\tilde{b}_3^2 B_2^2) k^2 (h')^2 u^2 + \\ & (32k \tilde{b}^2 - 16k B_1^2 - 24k B_2^2 + 16) (h')^2 u^2 + (60\tilde{b}_3^2 - 24\tilde{b}^2 + 36B_1^2) k^2 \tilde{b}_3 B_2 (h')^3 u + \\ & (-48k \tilde{b}_3 B_2) (h')^3 u + (-12\tilde{b}_3^2 \tilde{b}^2 + 18\tilde{b}_3^2 B_1^2 - 4\tilde{b}^2 B_1^2 + 3B_1^4 + 15\tilde{b}_3^4) k^2 (h')^4 + \\ & \left. (16k \tilde{b}^2 + 24k \tilde{b}_3^2 - 8k B_1^2) (h')^4 \right). \end{aligned}$$

Do resultado anterior, (4-8) pode ser visto como uma equação em relação a u , isto é

$$C_5(v) u^5 + C_4(v) u^4 + C_3(v) u^3 + C_2(v) u^2 + C_1(v) u + C_0(v) = 0, \quad (4-9)$$

onde

$$\begin{aligned} C_5(v) = & (3k^2 B_1^2 + 3k^2 B_2^2 - 2k^2 \tilde{b}^2 - 4k) B_1 B_2 h' + \left(\frac{1}{2} \tilde{b}^2 - \frac{9}{4} B_2^2 - \frac{3}{8} B_1^2 \right) k^2 B_1^2 h'' \\ & + \left(\frac{3}{2} k^2 \tilde{b}^2 B_2^2 - \frac{15}{8} k^2 B_2^4 + 3k B_2^2 - 2k \tilde{b}^2 - 1 \right) h'', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4(v) = & (3k^2 B_1^2 + 9k^2 B_2^2 - 2k^2 \tilde{b}^2 - 4) \tilde{b}_3 B_1 (h')^2 + \left(3k^2 \tilde{b}^2 - \frac{15}{2} k^2 B_2^2 \right) \tilde{b}_3 B_2 h'' h' + \\ & \left(-\frac{9}{2} k^2 B_1^2 + 6k \right) \tilde{b}_3 B_2 h'' h', \end{aligned}$$

$$C_3(v) = (6k^2 B_1^2 + 3k^2 B_2^2 - 4k^2 \tilde{b}^2 + 9k^2 \tilde{b}_3^2 - 8k) B_1 B_2 (h')^3 + (3k \tilde{b}_3^2 - 2) h'' (h')^2 \\ \left(k^2 \tilde{b}^2 - \frac{9}{4} k^2 \tilde{b}_3^2 - \frac{3}{4} k^2 B_1^2 - \frac{9}{4} k^2 B_2^2 + 2k \right) B_1^2 h'' (h')^2 - 4k \tilde{b}^2 h'' (h')^2 \\ \left(\frac{3}{2} k^2 \tilde{b}^2 \tilde{b}_3^2 + 3k B_2^2 + \frac{3}{2} k^2 \tilde{b}^2 B_2^2 - \frac{45}{4} k^2 \tilde{b}_3^2 B_2^2 \right) h'' (h')^2,$$

$$C_2(v) = (6k^2 + 9k^2 B_2^2 - 4k^2 \tilde{b}^2 + 3k^2 \tilde{b}_3^2 - 8k) \tilde{b}_3 B_1 (h')^3 + 6k \tilde{b}_3 B_2 h'' (h')^3 + \\ \left(3k^2 \tilde{b}^2 - \frac{9}{2} k^2 B_1^2 - \frac{15}{2} k^2 \right) \tilde{b}_3 B_2 h'' (h')^3,$$

$$C_1(v) = (3k^2 B_1^2 - 2k^2 \tilde{b}^2 + 9k^2 \tilde{b}_3^2 - 4k) B_1 B_2 (h')^5 + (3k \tilde{b}_3^2 - 2k \tilde{b}^2 - 1) h'' (h')^4 + \\ \left(\frac{1}{2} k^2 \tilde{b}^2 B_1^2 - \frac{9}{4} k^2 \tilde{b}_3^2 B_1^2 + \frac{3}{2} k^2 \tilde{b}_3^2 \tilde{b}^2 - \frac{3}{8} k^2 B_1^4 - \frac{15}{8} k^2 \tilde{b}_3^4 + k B_1^2 \right) h'' (h')^4,$$

$$C_0(v) = (3k^2 B_1^2 - 2k^2 \tilde{b}^2 + 3k^2 \tilde{b}_3^2 - 4k) \tilde{b}_3 B_1 (h')^6,$$

sendo a equação (4-9) válida para qualquer u . Então, determinaremos quais condições são necessárias para

$$C_i(v) = 0 \quad (i = 0, \dots, 5), \quad \forall v.$$

Temos $\tilde{b}_1 \neq 0$ ou $\tilde{b}_2 \neq 0$, então, $B_1 \neq 0$ e $B_2 \neq 0$. Logo, a solução buscada acontece quando $h'(v) = 0$, isto implica que $h(v)$ é uma constante.

Neste caso dizemos que a hipersuperfície mínima do conóide é um plano em relação a $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ métrica quadrática, quando a 1-forma $\tilde{\beta}$ não está apenas na direção do eixo $\tilde{x}^3$.

4.2 Curvatura de Gauss do conóide em 3-espço de Randers-Minkowski

Sabemos que, a curvatura de Gauss de uma superfície mínima não é positiva no espaço euclidiano. Então, queremos saber se esta propriedade também é válida no espaço tridimensional de Minkowski-Randers, em torno do eixo $\tilde{y}^3$ na direção $\tilde{\beta}^\cdot$, ou seja, $\tilde{\beta}^\cdot = \tilde{b} \tilde{y}^3$.

Agora, consideremos o conóide $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, h(v))$, onde, $u > 0$ e $v \in S^1$. Se $e_1 = df \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)$, $e_2 = df \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)$, então, $y = \xi e_1 + \eta e_2$. Dadas as coordenadas (u, v, ξ, η) sobre o fibrado tangente, usamos a convenção de que $1 \leq i, j \leq 2$ e $1 \leq \alpha, \beta \leq 3$ e $\zeta^1 := u$, $\zeta^2 := v$, $y^1 := \xi$, $y^2 := \eta$, no espaço tridimensional.

Observe que a 1-forma induzida $\beta = f^* \tilde{\beta}$ sobre a superfície no espaço de Randers-Minkowski é fechada. Sua verificação é imediata da definição 1.29 para 1-formas fechadas com uma (α, β) -métrica $F = \alpha + \beta$ de tipo Randers e α uma métrica euclidiana.

Assim, o tensor curvatura de Ricci (veja [16]), com $F = f^* \tilde{F}$, é dado por

$$Ric = \overline{Ric} + \frac{1}{4F^2} \left(3r_{00}^2 - 2F r_{00|0} \right), \quad (4-10)$$

onde, $\overline{Ric}$ é o tensor curvatura de Ricci da métrica Riemanniana $\alpha = f^* \tilde{\alpha}$, $r_{00} = b_{i|j} y^i y^j$, com $b_{i|j}$, os coeficientes da derivada covariante de β em relação a α .

Logo, a curvatura de Gauss da superfície é dada por

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \frac{Ric(y)}{F^2} \\ &= \overline{K} + \frac{1}{4F^4} \left(3r_{00}^2 - 2F r_{00|0} \right), \end{aligned} \quad (4-11)$$

onde, $x = f(u, v)$ e $\overline{K}$ é a curvatura de Gauss em α .

Teorema 4.4 *Seja $(V^3, \tilde{F})$ um espaço de Randers-Minkowski com $(\tilde{\beta} = \tilde{b} \tilde{y}^3)$, a curvatura do conóide $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, h(v))$, no ponto $x = f(u, v)$ e na direção de $y = \xi e_1 + \eta e_2$, é dada por*

$$\begin{aligned} K(x, y) &= -\Gamma^0 + \frac{1}{4F^2} (12\tilde{b}^2 \Gamma^I \xi^2 \eta^2 - 4\tilde{b} F \Gamma^2 \xi^2 \eta^2 + 12\tilde{b} F \Gamma^3 \xi^I \eta^2 + \\ &\quad - 12\tilde{b}^2 \Gamma^4 \xi^I \eta^3 + \tilde{b} F \Gamma^5 \eta^3 + 3\tilde{b}^2 \Gamma^6 \eta^4) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma^0 &= \frac{(h')^2}{(u^2 + (h')^2)^2}, & \Gamma^3 &= \frac{u h''}{(u^2 + (h')^2)^2} ((h')^2 - u^2), \\ \Gamma^I &= \frac{u^2 (h')^2}{(u^2 + (h')^2)^2}, & \Gamma^4 &= \frac{u^3 h' h''}{(u^2 + (h')^2)^2}, \\ \Gamma^2 &= \frac{3u^3 h' + (h')^3}{(u^2 + (h')^2)^2}, & \Gamma^6 &= \frac{u^4 (h'')^2}{(u^2 + (h')^2)^2}, \\ \Gamma^5 &= \frac{u^2}{u^2 + (h')^2} (h''' - 2h') - \frac{4u^2 h' (h'')^2}{(u^2 + (h')^2)^2}, \end{aligned}$$

Demonstração. Considere, $f_i^\gamma = \frac{\partial f^\gamma}{\partial \xi^i}$ e $f_{ij}^\gamma = \frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial \xi^i \partial \xi^j}$, obtemos o seguinte,

$$\begin{aligned} (f_i^\gamma)_{3 \times 2} &= \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \\ 0 & h'(v) \end{pmatrix}; \\ (f_{11}^\gamma)_{1 \times 3} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ (f_{12}^\gamma)_{1 \times 3} &= \begin{pmatrix} -\sin v & \cos v & 0 \end{pmatrix} = (f_{21}^\gamma)_{1 \times 3}; \\ (f_{22}^\gamma)_{1 \times 3} &= \begin{pmatrix} -u \cos v & -u \sin v & h'' \end{pmatrix}; \\ (\eta^\gamma)_{1 \times 3} &= \frac{f_1^\gamma \times f_2^\gamma}{|f_1^\gamma \times f_2^\gamma|} = \begin{pmatrix} \frac{-h' \sin v}{\sqrt{u^2 + (h')^2}} & \frac{h' \cos v}{\sqrt{u^2 + (h')^2}} & -\frac{u}{\sqrt{u^2 + (h')^2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A curvatura de Gauss é calculada no espaço euclidiano da seguinte forma:

$$\bar{K} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

onde

$$\begin{aligned} L &= f_{11}^\gamma \eta^\gamma, & M &= f_{12}^\gamma \eta^\gamma, & N &= f_{22}^\gamma \eta^\gamma, \\ E &= f_1^\gamma f_1^\gamma, & F &= f_1^\gamma f_2^\gamma, & G &= f_2^\gamma f_2^\gamma. \end{aligned}$$

Por um cálculo direto, obtemos que

$$\bar{K} = -\frac{(h')^2}{(u^2 + (h')^2)^2}. \quad (4-12)$$

Para encontrar os coeficientes b_{ij} da 1-forma induzida β , primeiro obtemos os coeficientes da métrica euclidiana induzida

$$\alpha = f^* \tilde{\alpha} = \sqrt{a_{ij} y^i y^j}, \quad a_{ij} = \tilde{a}_{\gamma\sigma} f_i^\gamma f_j^\sigma.$$

Sendo que, $\tilde{a}_{\gamma\sigma} = \delta_{\gamma\sigma}$ por $\tilde{\alpha}$ ser uma métrica euclidiana,

$$\begin{aligned} (a_{ij}) &= \begin{pmatrix} \delta_{\gamma\sigma} f_1^\gamma f_1^\sigma & \delta_{\gamma\sigma} f_1^\gamma f_2^\sigma \\ \delta_{\gamma\sigma} f_1^\gamma f_2^\sigma & \delta_{\gamma\sigma} f_2^\gamma f_2^\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + (h')^2 \end{pmatrix}, \\ (a^{ij}) &= (a_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2 + (h')^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos verificar que,

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = a^{kl} f_l^\gamma f_{ij}^\sigma \delta_{\gamma\sigma}. \quad (4-13)$$

De fato, pela definição dos símbolos de Christoffel da métrica euclidiana, temos

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_m \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta^i} a_{jm} + \frac{\partial}{\partial \zeta^j} a_{mi} - \frac{\partial}{\partial \zeta^m} a_{ij} \right\} a^{mk} \\ &= \frac{1}{2} \sum_m \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta^i} f_j^\gamma f_m^\sigma \delta_{\gamma\sigma} + \frac{\partial}{\partial \zeta^j} f_m^\gamma f_i^\sigma \delta_{\gamma\sigma} - \frac{\partial}{\partial \zeta^m} f_i^\gamma f_j^\sigma \delta_{\gamma\sigma} \right\} a^{mk} \\ &= \frac{1}{2} \sum_m \left\{ f_{ji}^\gamma f_m^\sigma \delta_{\gamma\sigma} + f_j^\gamma f_{mi}^\sigma \delta_{\gamma\sigma} + f_{mj}^\gamma f_i^\sigma \delta_{\gamma\sigma} + f_m^\gamma f_{ij}^\sigma \delta_{\gamma\sigma} - f_{im}^\gamma f_j^\sigma \delta_{\gamma\sigma} - f_i^\gamma f_{jm}^\sigma \delta_{\gamma\sigma} \right\} a^{mk} \\ &= a^{mk} f_m^\gamma f_{ij}^\sigma \delta_{\gamma\sigma}. \end{aligned}$$

Da equação anterior, obtemos os seguintes resultados

$$\bar{\Gamma}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -u \end{pmatrix}, \quad (4-14)$$

De fato,

$$\bar{\Gamma}_{11}^1 = a^{11} f_1^\gamma f_{11}^\sigma \delta_{\gamma\sigma} + a^{12} f_2^\gamma f_{11}^\sigma \delta_{\gamma\sigma} = 0, \quad \bar{\Gamma}_{12}^1 = a^{11} f_1^\gamma f_{12}^\sigma \delta_{\gamma\sigma} + a^{12} f_2^\gamma f_{12}^\sigma \delta_{\gamma\sigma} = 0,$$

$$\bar{\Gamma}_{21}^1 = a^{11} f_1^\gamma f_{21}^\sigma \delta_{\gamma\sigma} + a^{12} f_2^\gamma f_{21}^\sigma \delta_{\gamma\sigma} = 0, \quad \bar{\Gamma}_{22}^1 = a^{11} f_1^\gamma f_{22}^\sigma \delta_{\gamma\sigma} + a^{12} f_2^\gamma f_{22}^\sigma \delta_{\gamma\sigma} = -u.$$

Agora,

$$\bar{\Gamma}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{u}{u^2 + (h')^2} \\ \frac{u}{u^2 + (h')^2} & \frac{h'h''}{u^2 + (h')^2} \end{pmatrix}, \quad (4-15)$$

De fato

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{11}^2 &= a^{21} f_1^\gamma f_{11}^\sigma \delta_{\gamma\sigma} + a^{22} f_2^\gamma f_{11}^\sigma \delta_{\gamma\sigma} = 0, & \bar{\Gamma}_{12}^2 &= a^{21} f_1^\gamma f_{12}^\sigma \delta_{\gamma\sigma} + a^{22} f_2^\gamma f_{12}^\sigma \delta_{\gamma\sigma} = \frac{u}{u^2 + (h')^2}, \\ \bar{\Gamma}_{21}^2 &= a^{21} f_1^\gamma f_{21}^\sigma \delta_{\gamma\sigma} + a^{22} f_2^\gamma f_{21}^\sigma \delta_{\gamma\sigma} = \frac{u}{u^2 + (h')^2}, & \bar{\Gamma}_{22}^2 &= a^{21} f_1^\gamma f_{22}^\sigma \delta_{\gamma\sigma} + a^{22} f_2^\gamma f_{22}^\sigma \delta_{\gamma\sigma} = \frac{h'h''}{u^2 + (h')^2}. \end{aligned}$$

Como b_i segue a direção do eixo $\tilde{y}^3$, então, a 1-forma induzida β , para cada x -fixo deve satisfazer

$$b_i y^i = \beta(y) = f^* \tilde{\beta}(\tilde{y}) = \tilde{\beta}(f_*(y)) = \tilde{b} f_i^3 y^i = \tilde{b} \tilde{y}^3,$$

assim, $b_i = \tilde{b} f_i^3$, e

$$\begin{aligned} b_1 &= \tilde{b} f_1^3 = 0, \\ b_2 &= \tilde{b} f_2^3 = \tilde{b} h'(v). \end{aligned} \quad (4-16)$$

A derivada covariante da 1-forma β em relação à métrica α , é dada por

$$b_{i|j} = b_{i,\zeta^j} - b_s \bar{\Gamma}_{ij}^s = \tilde{b} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{u h'}{u^2 + (h')^2} \\ -\frac{u h'}{u^2 + (h')^2} & \frac{u^2 h''}{u^2 + (h')^2} \end{pmatrix}. \quad (4-17)$$

Usaremos as equações (4-14), (4-15) e (4-16) para comprovar cada componente da matriz $(b_{i|j})$, como aparece abaixo

$$\begin{aligned} b_{1|1} &= b_{1,\zeta^1} - b_1 \bar{\Gamma}_{11}^1 - b_2 \bar{\Gamma}_{11}^2 = 0, \\ b_{1|2} &= b_{1,\zeta^2} - b_1 \bar{\Gamma}_{12}^1 - b_2 \bar{\Gamma}_{12}^2 = -\frac{\tilde{b} u h'}{u^2 + (h')^2}, \\ b_{2|1} &= b_{2,\zeta^1} - b_1 \bar{\Gamma}_{21}^1 - b_2 \bar{\Gamma}_{21}^2 = -\frac{\tilde{b} u h'}{u^2 + (h')^2}, \\ b_{2|2} &= b_{2,\zeta^2} - b_1 \bar{\Gamma}_{22}^1 - b_2 \bar{\Gamma}_{22}^2 = h'' - \frac{(h')^2 h''}{u^2 + (h')^2} = \frac{\tilde{b} u^2 h''}{u^2 + (h')^2}. \end{aligned}$$

Observe que $b_{i|j}$ é simétrico em relação as índices i, j . A derivada covariante em relação à métrica α , é dada por:

$$b_{i|j|k} = b_{i|j,\zeta^k} - b_{i|s} \bar{\Gamma}_{jk}^s - b_{s|j} \bar{\Gamma}_{ik}^s, \quad (4-18)$$

assim, usando a equação (4-17) e a simetria de $b_{i|j}$, obtemos

$$\begin{aligned}
 b_{1|1|1} &= b_{1|1, \zeta^1} - 2b_{1|1} \bar{\Gamma}_{11}^1 - 2b_{1|2} \bar{\Gamma}_{11}^2 = 0, \\
 b_{1|1|2} &= b_{1|1, \zeta^2} - 2b_{1|1} \bar{\Gamma}_{12}^1 - 2b_{1|2} \bar{\Gamma}_{12}^2 = \frac{2\tilde{b}u^2h'}{(u^2 + (h')^2)^2}, \\
 b_{2|2|1} &= b_{2|2, \zeta^1} - 2b_{2|1} \bar{\Gamma}_{21}^1 - 2b_{2|2} \bar{\Gamma}_{21}^2 \\
 &= \frac{2\tilde{b}u(h')^2h''}{(u^2 + (h')^2)^2} - \frac{2\tilde{b}u^3h''}{(u^2 + (h')^2)^2} = \frac{2\tilde{b}uh''}{(u^2 + (h')^2)^2} ((h')^2 - u^2), \\
 b_{2|2|2} &= b_{2|2, \zeta^2} - 2b_{2|1} \bar{\Gamma}_{22}^1 - 2b_{2|2} \bar{\Gamma}_{22}^2 \\
 &= \frac{\tilde{b}u^2h'''(u^2 + (h')^2) - 2u^2h'(h'')^2}{(u^2 + (h')^2)^2} - \frac{2\tilde{b}u^2h'}{u^2 + (h')^2} - \frac{2\tilde{b}u^2h'(h'')^2}{(u^2 + (h')^2)^2} \\
 &= -\frac{4\tilde{b}u^2h'(h'')^2}{(u^2 + (h')^2)^2} + \frac{\tilde{b}u^2}{u^2 + (h')^2} (h''' - 2h').
 \end{aligned}$$

Como $b_{i|j} = b_{j|i}$ então, sua derivada covariante em relação à métrica α coincide, isto é

$$\begin{aligned}
 b_{1|2|1} &= b_{2|1|1} = b_{2|1, \zeta^1} - b_{2|1} \bar{\Gamma}_{11}^1 - b_{2|2} \bar{\Gamma}_{11}^2 - b_{1|1} \bar{\Gamma}_{21}^1 - b_{2|1} \bar{\Gamma}_{21}^2 \\
 &= \frac{\tilde{b}u^2h' - \tilde{b}(h')^3}{(u^2 + (h')^2)^2} + \frac{\tilde{b}u^2h'}{(u^2 + (h')^2)^2} = \frac{2\tilde{b}u^2h' + \tilde{b}(h')^3}{(u^2 + (h')^2)^2}, \\
 b_{1|2|2} &= b_{2|1|2} = b_{2|1, \zeta^2} - b_{2|1} \bar{\Gamma}_{12}^1 - b_{2|2} \bar{\Gamma}_{12}^2 - b_{1|1} \bar{\Gamma}_{22}^1 - b_{2|1} \bar{\Gamma}_{22}^2 \\
 &= \frac{\tilde{b}u(h')^2h'' - \tilde{b}u^3h''}{(u^2 + (h')^2)^2} - \frac{\tilde{b}u^3h''}{(u^2 + (h')^2)^2} + \frac{\tilde{b}u(h')^2h''}{(u^2 + (h')^2)^2} \\
 &= \frac{2\tilde{b}uh''}{(u^2 + (h')^2)^2} ((h')^2 - u^2).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 r_{00} &= b_{i|j} y^i y^j = -\frac{2\tilde{b}uh'}{u^2 + (h')^2} y^1 y^2 + \frac{\tilde{b}u^2h''}{u^2 + (h')^2} (y^2)^2, \\
 r_{00}^2 &= \frac{4\tilde{b}^2u^2(h')^2}{(u^2 + (h')^2)^2} (y^1)^2 (y^2)^2 - \frac{4\tilde{b}^2u^3h'h''}{(u^2 + (h')^2)^2} y^1 (y^2)^3 + \frac{\tilde{b}^2u^4(h'')^2}{(u^2 + (h')^2)^2} (y^2)^4. \quad (4-19)
 \end{aligned}$$

Como $b_{1|1|1} = 0$, temos

$$r_{00|0} = b_{i|j|k} y^i y^j y^k = (b_{1|1|2} + b_{1|2|1} + b_{2|1|1}) (y^1)^2 y^2 + (b_{1|2|2} + b_{2|1|2} + b_{2|2|1}) y^1 (y^2)^2 + b_{2|2|2} (y^2)^3$$

$$r_{00|0} = \frac{6\tilde{b}u^2h' + 2\tilde{b}(h')^3}{(u^2 + (h')^2)^2} (y^1)^2 y^2 + \frac{6\tilde{b}uh''}{(u^2 + (h')^2)^2} ((h')^2 - u^2) y^1 (y^2)^2 + \left(\frac{\tilde{b}u^2}{u^2 + (h')^2} (h''' - 2h') - \frac{4\tilde{b}u^2h'(h'')^2}{(u^2 + (h')^2)^2} \right) (y^2)^3. \quad (4-20)$$

Das equações (4-12), (4-19) e (4-20) a curvatura de Gauss, pode ser expressa como

$$K(x, y) = -\frac{(h')^2}{(u^2 + (h')^2)^2} + \frac{1}{4F^2} \left(\frac{12\tilde{b}^2u^2(h')^2}{(u^2 + (h')^2)^2} (y^1)^2 (y^2)^2 - \frac{12\tilde{b}^2u^3h'h''}{(u^2 + (h')^2)^2} y^1 (y^2)^3 + \frac{3\tilde{b}^2u^4(h'')^2}{(u^2 + (h')^2)^2} (y^2)^4 - \frac{12F\tilde{b}u^2h' + 4\tilde{b}F(h')^3}{(u^2 + (h')^2)^2} (y^1)^2 y^2 + \frac{12\tilde{b}Fuh''}{(u^2 + (h')^2)^2} ((h')^2 - u^2) y^1 (y^2)^2 + \left(\frac{\tilde{b}Fu^2}{u^2 + (h')^2} (h''' - 2h') - \frac{4\tilde{b}Fu^2h'(h'')^2}{(u^2 + (h')^2)^2} \right) (y^2)^3 \right),$$

$$K(x, y) = -\Gamma^0 + \frac{1}{4F^4} (12\tilde{b}^2\Gamma^1 (y^1)^2 (y^2)^2 - 4\tilde{b}F\Gamma^2 (y^1)^2 y^2 + 12\tilde{b}F\Gamma^3 y^1 (y^2)^2 - 12\tilde{b}^2\Gamma^4 y^1 (y^2)^3 + \tilde{b}F\Gamma^5 (y^2)^3 + 3\tilde{b}^2\Gamma^6 y^4).$$

□

Foi concluído que um helicóide é mínimo, se, e somente se, é um conóide em relação a uma (α, β) -métrica (quando $\tilde{\beta} = \tilde{b}y^3$). Se consideramos $h(v) = cv + d$ (c, d constante) um helicóide, então a curvatura de Gauss em cada ponto x é dada por

$$K(x, y) = -\Pi^0 + \frac{1}{F^4} (3\tilde{b}^2\Pi^1\xi^2\eta^2 - \tilde{b}F\Pi^2\eta(7u^2\xi^2 + 3c^2\eta^2)), \quad (4-21)$$

onde,

$$\Pi^0 = \frac{c^2}{(u^2 + c^2)^2}, \quad \Pi^1 = \frac{c^2u^2}{(u^2 + c^2)^2}, \quad \Pi^2 = \frac{c}{(u^2 + c^2)^2}.$$

Agora, considerando o ponto $x = f(u, v)$, se escolhemos vetores em T_xM , a curvatura pode ser negativa, nula ou positiva.

Tomando a direção $\eta = 0$ obtemos $K(x, y) < 0$, (veja (4-21)), para qualquer $c \neq 0$, porém se tomar a direção $\xi = 0$, a curvatura pode ser positiva.

Note-se que F é uma métrica de Randers, logo,

$$F = \alpha + \beta = \sqrt{a_{ij}y^iy^j} + b_iy^i = \left(\sqrt{u^2 + c^2}|\eta| + c\tilde{b}\eta \right).$$

Assim, a equação (4-21) é expressa da seguinte maneira

$$K(x, y) = -\frac{1}{(u^2 + c^2)^2} \left[c^2 + \frac{3c^3\tilde{b}}{(\sqrt{u^2 + c^2}|\eta| + c\tilde{b}\eta)^3} \eta^3 \right].$$

Agora, considerando $c > 0$ e $\eta < 0$, então,

$$K(x, y) = -\frac{1}{(u^2 + c^2)^2} \left[c^2 + \frac{3\tilde{b}c^3}{(c\tilde{b} - \sqrt{u^2 + c^2})^3} \right],$$

onde, $c^2 + \frac{3c^3\tilde{b}}{(c\tilde{b} - \sqrt{u^2 + c^2})^3} < 0$, logo $K(x, y) > 0$.

Considerando $c < 0$ e $\eta > 0$, obtemos:

$$K(x, y) = -\frac{1}{(u^2 + c^2)^2} \left[c^2 + \frac{3c^3\tilde{b}}{(c\tilde{b} + \sqrt{u^2 + c^2})^3} \right],$$

como $c^2 + \frac{2c^3\tilde{b}}{(c\tilde{b} + \sqrt{u^2 + c^2})^3} < 0$, temos $K(x, y) > 0$.

Deste modo, verificamos que a curvatura de Gauss pode ser positiva em alguns pontos.

4.3 Superfícies de Rotação

Considerando as superfícies $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, h(u))$ (veja fig 4.2), definidas pela rotação de uma curva plana C em torno do eixo $\tilde{x}^3$.

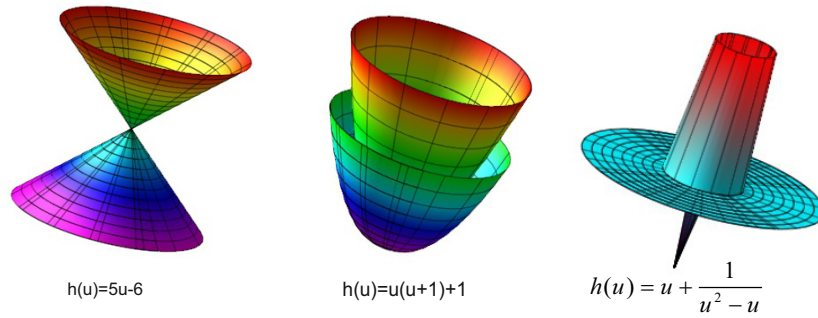


Figura 4.2: Superfícies de Rotação

Estudamos estas superfícies de rotação em um espaço tridimensional $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ de Minkowski, sendo $\tilde{F}$ uma $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ -métrica quadrática,

$$\tilde{F} = \tilde{\alpha}\phi(s) = \tilde{\alpha}(1 + ks^2) = \tilde{\alpha} + k\frac{\tilde{\beta}^2}{\tilde{\alpha}},$$

então, a imersão isométrica $f : M \rightarrow \tilde{M}$ é uma superfície mínima, (veja 3-39) se, satisfaz a seguinte equação

$$f_{ij}^{\sigma} \eta^{\sigma} \int_{S_x} y^i y^j (1 - k\beta^2)^{n-1} (1 + 2k\tilde{b} - 3k\beta^2) d\tau = 0. \quad (4-22)$$

Sendo $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, h(u))$ uma superfície de rotação paralela ao eixo $\tilde{x}^3$, necessitamos determinar a função h que gera as imersões mínimas.

Por se tratar de um espaço de Minkowski, $\tilde{\alpha}$ é uma métrica euclidiana e os coeficientes de $\tilde{\beta}$ são constantes, então, $\tilde{F} = \tilde{\alpha}\phi\left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}\right)$, pode ser representado como a seguir:

$$\tilde{\alpha} = \sqrt{(\tilde{y}^1)^2 + (\tilde{y}^2)^2 + (\tilde{y}^3)^2}, \quad \tilde{\beta} = \tilde{b}\tilde{y}^3,$$

logo,

$$\begin{aligned} (f_i^\sigma)_{2 \times 3} &= \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & h' \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \tilde{y}^1 & \tilde{y}^2 & \tilde{y}^3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y^1 & y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & h' \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y^1 \cos v - u y^2 \sin v & y^1 \sin v + u y^2 \cos v & y^1 h' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para $\theta \in [0, 2\pi]$, assumamos que,

$$y^1 = \frac{1}{\sqrt{1+(h')^2}} \cos \theta, \quad y^2 = \frac{1}{u} \sin \theta, \quad (4-23)$$

assim,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \sqrt{(\tilde{y}^1)^2 + (\tilde{y}^2)^2 + (\tilde{y}^3)^2} \\ &= \sqrt{(y^1 \cos v - u y^2 \sin v)^2 + (y^1 \sin v + u y^2 \cos v)^2 + (h')^2 (y^1)^2} \\ &= \sqrt{(1 + (h')^2)(y^1)^2 + u^2 (y^2)^2} = 1. \end{aligned}$$

Neste caso, a equação (4-4) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} W^{ij} &= \int_{S_x} y^i y^j (1 - k\beta^2)(1 + 2k\tilde{b}^2 - 3k\beta^2) d\tau, \\ r &= \frac{k\tilde{b}^2 (h')^2}{1 + (h')^2}, \end{aligned}$$

quando assumimos $i, j = 1, 2$, calculamos W^{ij} .

Como,

$$\begin{aligned} d\tau &= y^1 dy^2 - y^2 dy^1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+(h')^2}} \cos \theta \left(\frac{1}{u} \sin \theta \right) d\theta - \frac{1}{u} \sin \theta \left(-\frac{1}{\sqrt{1+(h')^2}} \sin \theta \right) d\theta \\ &= \frac{1}{u} \frac{1}{\sqrt{1+(h')^2}} d\theta, \end{aligned}$$

e a 1-forma induzida $\beta = f^*\tilde{\beta}$, é dada por

$$\beta = \tilde{b} f_i^3 y^i = \tilde{b} h' y^1, \quad \beta^2 = \tilde{b}^2 (h')^2 (y^1)^2.$$

Então

$$\begin{aligned}
 W^{11} &= \int_{S_x} (y^1)^2 (1 - k\tilde{b}^2 (h')^2 (y^1)^2) (1 + 2k\tilde{b}^2 - 3k\tilde{b}^2 (h')^2 (y^1)^2) d\tau \\
 &= \int_0^{2\pi} (1 - r \cos^2 \theta) (1 + 2k\tilde{b}^2 - 3r \cos^2 \theta) \frac{\cos^2 \theta}{1 + (h')^2} \frac{1}{u} \frac{1}{\sqrt{1 + (h')^2}} d\theta \\
 &= \frac{1}{u} \left(\frac{1}{1 + (h')^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left[1 + 2k\tilde{b}^2 - \frac{3}{2} (2 + k\tilde{b}^2) r + \frac{15}{8} r^2 \right] \pi.
 \end{aligned}$$

$$W^{12} = W^{21} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 W^{22} &= \int_0^{2\pi} (1 - r \cos^2 \theta) (1 + 2k\tilde{b}^2 - 3r \cos^2 \theta) \frac{\sin^2 \theta}{u^2} \frac{1}{u} \frac{1}{\sqrt{1 + (h')^2}} d\theta \\
 &= \left(\frac{1}{u^3} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + (h')^2}} \left[1 + 2k\tilde{b}^2 - \frac{1}{2} (2 + k\tilde{b}^2) r + \frac{3}{8} r^2 \right] \pi.
 \end{aligned}$$

Note que o vetor normal à superfície é:

$$\eta = \left(\frac{-uh' \cos v}{\sqrt{((h')^2 + 1)u^2}}, \frac{-uh' \sin v}{\sqrt{((h')^2 + 1)u^2}}, \frac{u}{\sqrt{((h')^2 + 1)u^2}}, \right)$$

e

$$\begin{aligned}
 (f_{11}^\gamma) &= (0, 0, h''), \\
 (f_{22}^\gamma) &= (-u \cos v, -u \sin v, 0).
 \end{aligned}$$

Então, a equação (4-22) é equivalente a:

$$\sum_{\gamma=1}^3 (f_{11}^\gamma \eta^\gamma W^{11} + f_{22}^\gamma \eta^\gamma W^{22}) = 0,$$

isto é,

$$h'' W^{11} + u h' W^{22} = 0,$$

portanto,

$$\begin{aligned}
 \frac{h''}{1 + (h')^2} \left[1 + 2k\tilde{b}^2 - \frac{3}{2} (2 + k\tilde{b}^2) r + \frac{15}{8} r^2 \right] \\
 + \frac{h'}{u} \left[1 + 2k\tilde{b}^2 - \frac{1}{2} (2 + k\tilde{b}^2) r + \frac{3}{8} r^2 \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Teorema 4.5 *Seja $(\tilde{M}, \tilde{F})$ um $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ -espaço de Minkowski, onde, $\tilde{F} = \tilde{\alpha} + k \frac{\tilde{\beta}^2}{\tilde{\alpha}}$ é uma métrica quadrática. Uma superfície de rotação $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, h(u))$, é uma superfície mínima se, e somente se, h satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária,*

$$\begin{aligned}
u h'' & \left[\left(\frac{3}{8} k^2 \tilde{b}^4 - k \tilde{b}^2 + 1 \right) (h')^4 + \left(-\frac{3}{2} k^2 \tilde{b}^4 + k \tilde{b}^2 + 2 \right) (h')^2 + 1 + 2k \tilde{b}^2 \right] \\
& + h' (1 + (h')^2) \left[\left(-\frac{1}{8} k^2 \tilde{b}^4 + k \tilde{b}^2 + 1 \right) (h')^4 \right. \\
& \left. + \left(-\frac{1}{2} k^2 \tilde{b}^4 + 3k \tilde{b}^2 + 2 \right) (h')^2 + 1 + 2k \tilde{b}^2 \right] = 0.
\end{aligned} \tag{4-24}$$

Se $w = (h')^2$, então (4-24) é equivalente a

$$\int \frac{a w^2 + b w + c}{w(1+w)(m w^2 + n w + c)} dw = -\ln u^2 \tag{4-25}$$

onde,

$$\begin{aligned}
a &= \frac{3}{8} k^2 \tilde{b}^4 - k \tilde{b}^2 + 1, & b &= -\frac{3}{2} k^2 \tilde{b}^4 + k \tilde{b}^2 + 2, & c &= 1 + 2k \tilde{b}^2, \\
m &= -\frac{1}{8} k^2 \tilde{b}^4 + k \tilde{b}^2 + 1, & n &= -\frac{1}{2} k^2 \tilde{b}^4 + 3k \tilde{b}^2 + 2.
\end{aligned}$$

Se consideramos $-\frac{1}{2} < k \tilde{b}^2 < 1$, obtemos:

$$\frac{15}{32} < m < \frac{15}{8}, \quad \frac{3}{8} < n < \frac{9}{2}, \quad 0 < c < 3,$$

e da seguinte igualdade

$$\frac{a w^2 + b w + c}{w(1+w)(m w^2 + n w + c)} = \frac{1}{w} - \frac{5}{1+w} + \frac{4m w + 2n}{m w^2 + n w + c},$$

a equação (4-25), tem solução equivalente a:

$$\ln w - 5 \ln(1+w) + 2 \ln(m w^2 + n w + c) + \ln \left(\frac{1}{C^2} \right) = \ln \left(\frac{1}{u^2} \right),$$

ou

$$\frac{w(m w^2 + n w + c)^2}{(1+w)^5} = \frac{C^2}{u^2}.$$

Definindo

$$\phi(w) = \frac{(1+w)^5}{(m w^2 + n w + c)^2}, \tag{4-26}$$

temos,

$$u = C \sqrt{\frac{\phi(w)}{w}}, \quad du = \frac{C}{2} \sqrt{\frac{w}{\phi(w)}} \left(\frac{\phi'(w) w - \phi(w)}{w^2} \right) dw, \quad \frac{dh}{du} = \sqrt{w},$$

logo,

$$\begin{aligned}
h(w) &= \int dh = \int \sqrt{w} du = C \int \frac{w^2 \phi'(w) - w \phi(w)}{w^2 \sqrt{\phi(w)}} dw \\
&= 2C \sqrt{\phi(w)} - C \int \frac{(1+w)^{\frac{5}{2}}}{w(m w^2 + n w + c)} dw.
\end{aligned} \tag{4-27}$$

este resultado comprova que a solução de (4-24) é (4-27).

Com estas considerações obtemos o seguinte

Teorema 4.6 *Seja $(\tilde{M}, \tilde{F})$ um $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ -espaço de Minkowski, onde, $\tilde{F} = \tilde{\alpha} + k \frac{\tilde{\beta}^2}{\tilde{\alpha}}$ é uma métrica quadrática e $\|\tilde{\beta}_x\|_{\tilde{\alpha}}^* = \tilde{b}$, que satisfaz $k\tilde{b}^2 \in (-\frac{1}{2}, 1)$. Então, existe uma superfície mínima de revolução f em $(\tilde{M}, \tilde{F})$, que pode ser expressa como*

$$f = \left(C \sqrt{\frac{\phi(w)}{w}} \cos v, C \sqrt{\frac{\phi(w)}{w}} \sin v, h(w) \right),$$

onde, $\phi(w)$ e $h(w)$ são definidas como em (4-26) e (4-27), respectivamente.

Exemplo 4.7 *Considerando $k\tilde{b}^2 = \frac{1}{2}$ temos uma superfície mínima de rotação, (fig 4.3)*

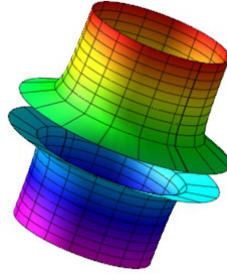


Figura 4.3: Superfícies mínimas de rotação

Seja $t = \sqrt{1+w}$, então $t^2 - 1 = w$ e $2t dt = dw$, assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{(1+w)^{\frac{5}{2}}}{w(mw^2 + nw + c)} dw &= \frac{1}{m} \int \frac{t^6}{(t^2 - 1) \left(t^4 + \frac{n-2m}{m} t^2 + \frac{m-n+c}{m} \right)} dt \\ &= \frac{32}{47} t + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{t-1}{t+1} \right) - \frac{17\sqrt{141} + 97}{188\sqrt{94(\sqrt{141} + 7)}} q(t) \\ &\quad + \frac{(859\sqrt{47} + 517\sqrt{3})\sqrt{2(\sqrt{141} - 7)}}{1625824} p(t) + C_1, \end{aligned}$$

sendo, C_1 uma constante,

$$\begin{aligned} p(t) &= \ln \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2(\sqrt{141} - 7)t + \sqrt{47}t^2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2(\sqrt{141} - 7)t + \sqrt{47}t^2}} \right), \\ q(t) &= \arctan \left(\frac{\sqrt{2(\sqrt{141} + 7)t}}{\sqrt{3} - \sqrt{47}} \right). \end{aligned}$$

Então, a superfície gerada pela rotação de uma curva plana na direção do eixo x^3 , será uma superfície mínima em um $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ -espaço de Minkowski $(\tilde{M}, \tilde{F})$ se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}^1 = C \frac{t^5}{\sqrt{t^2-1} \left[\frac{47}{32}(t^2-1)^2 + \frac{27}{8}(t^2-1) + 2 \right]} \\ \tilde{x}^3 = C \frac{2t^5}{\frac{47}{32}(t^2-1)^2 + \frac{27}{8}(t^2-1) + 2} - C \left[\frac{32}{47}t + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{t-1}{t+1} \right) \right. \\ \left. + \frac{(858\sqrt{47} + 517\sqrt{3})\sqrt{2(\sqrt{141}-7)}}{1625824} p(t) - \frac{17\sqrt{141}+97}{188\sqrt{94(\sqrt{141}+7)}} q(t) \right] + C' \end{array} \right.$$

onde, $t > 1$ é um parâmetro e C, C' são constantes.

Referências Bibliográficas

- [1] BAO, D.; CHERN, S. S. **On a notable connection in finsler geometry.** *Houstoun Journal of Mathematics*, 19, No.1:135–180, 1993.
- [2] BAO, D.; CHERN, S. S.; SHEN, Z. **An Introduction to Riemann-Finsler Geometry.** Graduate Texts in Mathematics 200, Springer-Verlag, New York, Inc., 2000.
- [3] BAO, D.; SHEN, Z. **On the volume of unit tangent spheres in a finsler manifold.** *Comm. Pure Appl. Math.*, 42 (3):271–297, 1994.
- [4] CHERN, S. S. **Finsler geometry is just riemannian geometry without the quadratic restriction.** *AMS*, 43, No.9:959–963, 1996.
- [5] DO CARMO, M. P. **Formas Diferenciáveis e Aplicações.** Monografias de Matemática nº 37, 8º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1983.
- [6] DO CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana.** Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2011, 5ª edição.
- [7] DO CARMO, M. P. **O Método do Referencial Móvel.** IMPA, Rio de Janeiro, 2012.
- [8] HE, Q.; YANG, W. **Volume forms and minimal surfaces of rotation in finsler spaces with (α, β) -metrics.** *International Journal of Mathematics*, 21 (11):1401–1411, 2010.
- [9] LAGRANGE, J. L. **Ouvres.** I:335, 1760.
- [10] LIMA, E. L. **Análise no espaço $\mathbb{R}^n$.** Editora da Unb, Brasília, 1970.
- [11] LIMA, E. L. **Álgebra Linear.** Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2000, 4ª edição.
- [12] MO, X. H. **Harmonic maps from finsler manifolds.** *Illinois J. Math*, 45:1331–1345, 2001.
- [13] QUN, H.; YIBING, S. **On the mean curvature of finsler submanifolds.** *Chinese Journal of Contemporary Mathematics*, 27,(4):1–12, 2006.
- [14] RUND, H. **The Differential Geomery of Finsler Spaces.** Springer Verlag, Berlin, 1959.
- [15] SHEN, Z. **On finsler geometry of submanifolds.** *Mathematische Annalen*, 311, No.3:549–576, 1998.

- [16] SHEN, Z. **Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces**. Kluwer Academic Publishers, Berlin, 2001.
- [17] SHEN, Z. **Lectures on Finsler Geometry**. World Scientific, Singapore, 2001.
- [18] SHEN, Z.; CHERN, S. S. **Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces**. World Scientific, Nankai Tracts in Mathematics, Volume 6, Singapore, 2005.
- [19] SOUZA, M.; SPRUCK, J.; TENENBLAT, K. **A bernstein type theorem on a randers space**. *Mathematische Annalen*, 329, No.2:291–305, 2004.
- [20] SOUZA, M.; TENENBLAT, K. **Minimal surfaces of rotation in a finsler space with a randers metric**. *Mathematische Annalen*, 325, No.4:625–642, 2003.
- [21] TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. Edgard Blucher, São Paulo, 2003.
- [22] XIE, D.; HE, Q. **Minimal surfaces and gauss curvature of conoid in finsler spaces with (α, β) –metrics**. *Advances in Pure Mathematics*, (2):220–225, 2012.
- [23] YIBING, S.; YAN, Z. **Second variation of harmonic maps between finsler manifolds**. *Science in China*, 47(1):39–51, 2004.