

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE FÍSICA

Luciano Paulo de Araújo Maia

**SUPERPOSIÇÃO ASSIMÉTRICA DE  
ESTADOS COERENTES CIRCULARES**

GOIÂNIA, 2002.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE FÍSICA

**SUPERPOSIÇÃO ASSIMÉTRICA DE ESTADOS  
COERENTES CIRCULARES**

Luciano Paulo de Araújo Maia

*Dissertação apresentada ao Instituto de Física  
da Universidade Federal de Goiás como parte  
dos requisitos para a obtenção do título de  
**Mestre em Física.***

ORIENTADOR: *Prof. Dr. Basilio Baseia*

GOIÂNIA, 2002.

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
GPT/BC/UFG**

M217s      Maia, Luciano Paulo de Araújo.  
Superposição assimétrica de estados coerentes circulares  
[manuscrito] / Luciano Paulo de Araújo Maia. - 2002.  
68 p. : il., figs, tabs.

Orientador: Prof. Dr. Basílio Baseia.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,  
Instituto de Física, 2002.

Bibliografia.  
Inclui lista de figuras.  
Apêndices.

1. Interferência quântica. I. Título.

CDU: 537.8

# Sumário

Agradecimentos	vii
Resumo	viii
Abstract	ix
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Efeitos não-clássicos do campo luminoso</b>	<b>3</b>
2.1 Antiagrupamento de fótons (antibunching)	3
2.2 Estatística sub-Poissoniana	3
2.3 Compressão do ruído quântico ( squeezing )	4
2.4 Colapso e ressurgimento na inversão atômica	5
2.5 Oscilações na distribuição estatística	6
2.6 Resumo e conclusões	7
<b>3 Estados clássicos e não-clássicos do campo luminoso</b>	<b>10</b>
3.1 Estados clássicos	10
3.1.1 Estado térmico	10
3.1.2 Estado coerente	11
3.2 Estados não-clássicos	13
3.2.1 Estado de número	13
3.2.2 Superposição geral de dois estados coerentes	14
3.2.3 Superposição de N estados do tipo gato de Schrödinger	15
3.3 Resumo e conclusões	16
<b>4 Superposição assimétrica de estados coerentes circulares</b>	<b>17</b>
4.1 Geração e normalização	17
4.2 Propriedades estatísticas	21
4.2.1 Estatística de fótons	21
4.2.2 Estatística sub-Poissoniana e Antiagrupamento de fótons	26
4.3 Resumo e conclusões	30
<b>5 Compressão do ruído quântico (squeezing) e inversão atômica</b>	<b>32</b>
5.1 Compressão do ruído quântico	32
5.2 Inversão Atômica	36
5.3 Resumo e conclusões	43

---

<b>6</b>	<b>Representações no espaço de fase</b>	<b>46</b>
6.1	Profundidade não-clássica . . . . .	46
6.2	Representações $P$ e $Q$ . . . . .	48
6.3	Representação $W$ . . . . .	50
6.4	Resumo e conclusões . . . . .	54
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>56</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>57</b>
<b>A</b>	<b>Dedução da Eq.(4.3)</b>	<b>58</b>
<b>B</b>	<b>Propriedades estatísticas via funções de normalização</b>	<b>60</b>
<b>C</b>	<b>Cálculo da variância nas quadraturas</b>	<b>62</b>

# Lista de Figuras

2.1	<i>Gráfico ilustrando a ocorrência de agrupamento e antiagrupamento de fótons. A linha negra é a fronteira entre as regiões clássica e quântica.</i>	4
2.2	<i>Gráfico mostrando as regiões de ocorrência da estatística sub, super e Poissoniana.</i>	5
2.3	<i>Figura mostrando a compressão na quadratura <math>X_2</math>.</i>	6
2.4	<i>Gráfico mostrando o efeito de colapso e resurgimento na inversão atômica.</i>	7
2.5	<i>Estatística de fótons de uma superposição de estados coerentes via interferência no espaço de fase. As regiões hachuradas na figura fornecem as oscilações na distribuição estatística.</i>	8
4.1	<i>Ilustração esquemática do aparato experimental para a produção do estado aqui proposto. As abreviações usadas no aparato são dadas a seguir: GM = gerador de microondas, <math>S_A</math> = fonte de átomos, C = cavidade, <math>R_1, R_2</math> = zonas de Ramsey.</i>	18
4.2	<i>Esquema de níveis relevantes dos estados dos átomos de Rydberg envolvidos no processo de produção do ASCCS.</i>	18
4.3	<i>Gráficos mostrando as oscilações na distribuição estatística e a influência da excitação do campo. Note o aumento nas oscilações de (a) – (d). Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a) <math>\alpha = 6</math>, (b) <math>\alpha = 8</math>, (c) <math>\alpha = 10</math>, e (d) <math>\alpha = 12</math>. Em todos os gráficos <math>N = 1</math>, <math>\theta = 90^\circ</math> e <math>\varepsilon = 1</math>.</i>	23
4.4	<i>Gráficos mostrando o comportamento da distribuição para gerações posteriores. As cruces nos gráficos representam os pontos da distribuição do estado coerente. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a) <math>\theta = 180^\circ</math> e <math>N = 1</math>, (b) <math>\theta = 90^\circ</math> e <math>N = 2</math>, (c) <math>\theta = 60^\circ</math> e <math>N = 3</math> e (d) <math>\theta = 45^\circ</math> e <math>N = 4</math>. Em todos os gráficos <math>\alpha = 6</math> e <math>\varepsilon = 1</math>.</i>	25
4.5	<i>Gráficos mostrando o processo de escultura quântica. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a) <math>\varepsilon = 1</math> e <math>\theta = 0</math> (estado coerente), (b) <math>\varepsilon = 1</math> e <math>\theta = \pi</math> (gato par), (c) <math>\varepsilon = 1</math> e <math>\theta = \pi</math> e (d) <math>\varepsilon = 1</math> e <math>\theta = \pi</math>. Em todos os gráficos <math>\alpha = 2.61</math>.</i>	26
4.6	<i>Gráficos exibindo oscilações no fator de Mandel em função da fase <math>\theta</math> para a primeira geração. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a) <math>\alpha = 4</math>, (b) <math>\alpha = 6</math>, (c) <math>\alpha = 10</math> e (d) <math>\alpha = 12</math>.</i>	27

4.7	<i>Gráficos exibindo oscilações no fator de Mandel em função da fase <math>\theta</math> para a segunda geração. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a) <math>\alpha = 4</math>, (b) <math>\alpha = 6</math>, (c) <math>\alpha = 10</math> e (d) <math>\alpha = 12</math>.</i>	28
4.8	<i>Gráficos exibindo oscilações no fator de Mandel em função da fase <math>\theta</math> para a terceira geração. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a) <math>\alpha = 4</math>, (b) <math>\alpha = 6</math>, (c) <math>\alpha = 10</math> e (d) <math>\alpha = 12</math>.</i>	28
4.9	<i>Gráficos exibindo oscilações na função de correlação de segunda ordem em função da fase <math>\theta</math> para a primeira geração. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a) <math>\alpha = 4</math>, (b) <math>\alpha = 6</math>, (c) <math>\alpha = 10</math> e (d) <math>\alpha = 12</math>.</i>	29
4.10	<i>Gráficos exibindo oscilações na função de correlação de segunda ordem em função da fase <math>\theta</math> para a segunda geração. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a) <math>\alpha = 4</math>, (b) <math>\alpha = 6</math>, (c) <math>\alpha = 10</math> e (d) <math>\alpha = 12</math>.</i>	30
4.11	<i>Gráficos exibindo oscilações na função de correlação de segunda ordem em função da fase <math>\theta</math> para a terceira geração. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a) <math>\alpha = 4</math>, (b) <math>\alpha = 6</math>, (c) <math>\alpha = 10</math> e (d) <math>\alpha = 12</math>.</i>	31
5.1	<i>Gráficos exibindo oscilações entre squeezing e anti-squeezing na quadratura <math>x_1</math> para a primeira geração. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a) <math>\alpha = 4</math>, (b) <math>\alpha = 6</math>, (c) <math>\alpha = 10</math> e (d) <math>\alpha = 12</math>.</i>	35
5.2	<i>Gráficos mostrando o produto das variâncias, para a primeira geração, que nos diz se o estado é ou não de mínima incerteza. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a) <math>\alpha = 4</math>, (b) <math>\alpha = 6</math>, (c) <math>\alpha = 10</math> e (d) <math>\alpha = 12</math>.</i>	36
5.3	<i>Gráficos exibindo oscilações entre comprimido e anticomprimido na quadratura <math>x_1</math> para a segunda geração. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a) <math>\alpha = 4</math>, (b) <math>\alpha = 6</math>, (c) <math>\alpha = 10</math> e (d) <math>\alpha = 12</math>.</i>	37
5.4	<i>Gráficos mostrando o produto das variâncias, para a segunda geração, que nos diz se o estado é ou não de mínima incerteza. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a) <math>\alpha = 4</math>, (b) <math>\alpha = 6</math>, (c) <math>\alpha = 10</math> e (d) <math>\alpha = 12</math>.</i>	38
5.5	<i>Gráficos exibindo oscilações entre comprimido e anticomprimido na quadratura <math>x_1</math> para a terceira geração. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a) <math>\alpha = 4</math>, (b) <math>\alpha = 6</math>, (c) <math>\alpha = 10</math> e (d) <math>\alpha = 12</math>.</i>	39
5.6	<i>Gráficos exibindo a influência da excitação do campo na inversão atômica para a primeira geração. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a) <math>\alpha = 2</math>, (b) <math>\alpha = 4</math>, (c) <math>\alpha = 6</math> e (d) <math>\alpha = 8</math>. Em todos os gráficos <math>\theta = 180^\circ</math> e <math>\varepsilon = 1</math>.</i>	41
5.7	<i>Gráficos exibindo a transição entre o estado coerente e o gato de Schrödinger. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a) <math>\theta = 180^\circ</math>, (b) <math>\theta = 160^\circ</math>, (c) <math>\theta = 100^\circ</math>, (d) <math>\theta = 80^\circ</math>, (e) <math>\theta = 20^\circ</math> e (f) <math>\theta = 0^\circ</math>. Em todos os gráficos <math>\varepsilon = 1</math> e <math>\alpha = 6</math>.</i>	42

- 5.8 Gráficos exibindo a transição entre o gato de Schrödinger e o estado coerente para a inversão atômica calculado para o estado dado pela Eq. (3.28). Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\xi = 0.5$ , (b)  $\xi = 0.2$ , (c)  $\xi = 0.1$ , (d)  $\xi = 0.05$ , (e)  $\xi = 0.01$  e (f)  $\xi = 0$ . Em todos os gráficos  $\alpha = 6$ . . . . . 43
- 5.9 Gráficos mostrando como a inversão muda de uma geração para outra. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $N = 1$  e  $\varepsilon = 1$ ; (b)  $N = 2$  e  $\varepsilon = 1$ ; (c)  $N = 3$  e  $\varepsilon = 1$ ; (d)  $N = 4$  e  $\varepsilon = 1$ ; (e)  $N = 5$  e  $\varepsilon = 1$ ; (f)  $N = 6$  e  $\varepsilon = 1$ . Em todos os gráficos  $\alpha = 12$  e  $\theta = 80^\circ$ . . . . . 44
- 5.10 Gráficos mostrando a influência do parâmetro  $\varepsilon$  sobre a inversão atômica. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\alpha = 10$ ,  $\varepsilon = 1$  e  $N = 1$ ; (b)  $\alpha = 10$ ,  $\varepsilon = -1$  e  $N = 1$ ; (c)  $\alpha = 10$ ,  $\varepsilon = 1$  e  $N = 2$  e (d)  $\alpha = 10$ ,  $\varepsilon = -1$  e  $N = 2$ . Em todos os gráficos  $\theta = 80^\circ$ . . . . . 45
- 5.11 Gráficos mostrando a sensível diferença quando adotamos o estado atômico sendo  $e$  ou  $g$ . Em ambos os gráficos  $\alpha = 10$ ,  $\varepsilon = 1$  e  $\theta = 60^\circ$ . Em (a) e (b) adotamos  $N = 1$  e em (c) e (d) adotamos  $N = 2$ . . . . . 45
- 6.1 Gráficos da função  $Q$  para primeira geração, mostrando como a excitação do campo e a fase influenciam na distribuição. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\alpha = 2$  e (b)  $\alpha = 4$ , e em ambos  $\theta = 180^\circ$  e  $\varepsilon = 1$ . Em (c)  $\theta = 80^\circ$  e (d)  $\theta = 60^\circ$  e em ambos  $\alpha = 4$  e  $\varepsilon = 1$ . . . . . 50
- 6.2 Gráficos da função de Wigner para primeira geração, mostrando como a excitação do campo influencia na distribuição. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\alpha = 6$  e (b)  $\alpha = 8$ . Em ambos  $\theta = 180^\circ$  e  $\varepsilon = 1$ . . . . . 51
- 6.3 Gráficos da função de Wigner para primeira geração, mostrando como a fase influencia na distribuição. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\theta = 180^\circ$  e (b)  $\theta = 90^\circ$ . Em ambos  $\alpha = 6$  e  $\varepsilon = 1$ . . . . . 52
- 6.4 Gráficos da função de Wigner para primeira geração, mostrando como o parâmetro  $\varepsilon$  influencia na distribuição. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\varepsilon = 1$  e (b)  $\varepsilon = -1$ . Em ambos  $\alpha = 6$  e  $\theta = 180^\circ$ . . . . . 52
- 6.5 Gráficos do mapeamento da função de Wigner para primeira geração, mostrando como a fase influencia na distribuição. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\theta = 180^\circ$  e (b)  $\theta = 170^\circ$ . Em ambos  $\alpha = 6$  e  $\varepsilon = 1$ . . . . . 53
- 6.6 Gráficos da função de Wigner para primeira geração e segunda geração, mostrando a distinção entre os estados com mesma estatística. Foram adotados os seguintes parâmetros: (a)  $N = 1$ , e (b)  $N = 2$ . Em ambos os gráficos utilizamos  $\theta = 180^\circ$ ,  $\alpha = 6$  e  $\varepsilon = 1$ . . . . . 53

- 
- 6.7 Gráficos da função de Wigner para a segunda geração, mostrando como a fase influencia na distribuição. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\theta = 180^\circ$  e (b)  $\theta = 170^\circ$ . Em ambos  $\alpha = 8$  e  $\varepsilon = 1$ . . . . . 54
- 6.8 Gráficos do mapeamento da função de Wigner para a segunda geração, mostrando como a fase influencia na distribuição. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\theta = 180^\circ$  e (b)  $\theta = 170^\circ$ . Em ambos  $\alpha = 8$  e  $\varepsilon = 1$ . . . . . 54
- 6.9 Gráficos da função de Wigner, mostrando como ocorre a esculturação da distribuição para obter a aproximação ao estado de número. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $N = 1$ , (b)  $N = 2$ , (c)  $N = 3$ , e (d)  $N = 4$ . Em todos  $\alpha = 2.41$ ,  $\varepsilon = 1$  e  $\theta = 180^\circ$ . . . . . 55

# Agradecimentos

- Aos meus pais, que sempre me deram o apoio necessário, e que sem este a realização deste trabalho não seria possível.
- Ao meu orientador Prof. Dr. Basílio Baseia, que me deu a grande oportunidade de conhecer este ramo fantástico da Física e, também, pelas vezes em que não só me orientou em um trabalho mestrado, mas sim para a vida.
- Às minhas irmãs, que sempre nos momentos mais difíceis de minha vida me deram algo que jamais poderei esquecer e a meu irmão pelo simples fato de existir.
- Aos meus amigos por terem sempre me dado o renovado apoio nos momentos difíceis.
- Aos professores do Instituto de Física da UFG pela contribuição significativa que deram à minha formação acadêmica .

# Resumo

Neste trabalho, apresentamos um novo estado quântico da luz, obtido de uma superposição assimétrica de estados coerentes circulares no modo estacionário. A geração deste estado foi proposta e o aparato experimental necessário é apresentado. Expressões gerais descrevendo diversas propriedades (distribuição estatística, variâncias, inversão atômica, etc.) foram obtidas para arbitrarias gerações. Verificamos como se comportam suas propriedades, variando a fase entre os estados componentes da superposição. Mostramos que as propriedades estatísticas não caracterizam completamente o estado resultante, exibindo estados distintos com mesma estatística. Formas alternativas para distinguir estes estados foram consideradas. Baseado na interferência quântica no espaço de fase, mostramos como podemos gerar uma aproximação ao estado de número  $|2^N\rangle$ , através de um processo denominado “escultura quântica” e verificamos a influência da fase neste processo. Finalmente, medimos a não classicalidade deste estado e analisamos a sua representação no espaço de fase.

**Palavras-chave:** Interferência Quântica. Espaço de Fase. Escultura Quântica.

# Abstract

In this paper we present a new quantum state of light, obtained from an asymmetric superposition of coherent states in circular stationary mode. The generation of this state was proposed and the experimental apparatus required is presented. General expressions describing various properties (statistical distribution, variances, atomic inversion, etc..) Were obtained for arbitrary generations. We observed how they behave their properties by varying the phase between the components of superposition states. We show that the statistical properties do not fully characterize the resulting state, showing different states with the same statistics. Alternative ways to distinguish these states were considered. Based on quantum interference in phase space, we show how we can generate an approximation of the number state  $|2^N\rangle$ , thru a process called "quantum sculpture,"and check the influence of the stage in this process. Finally, we measured the classicalidade not analyze this state and its representation in phase space.

**Keywords:** Quantum Interference. Phase Space. Quantum Sculpture.

# Capítulo 1

## Introdução

A primeira indicação da natureza quântica da luz ocorreu em 1900 quando Planck discretizou a distribuição espectral da luz térmica. Em 1905, Einstein mostrou que o efeito fotoelétrico poderia ser explicado pela hipótese de que a energia de um feixe de luz seria distribuída em pacotes discretos, mais tarde chamados de fótons. A ótica física teve seu desenvolvimento independente da teoria quântica, apesar de ter uma íntima conexão com a mesma. A grande variedade de experimentos em ótica física, pode ser adequadamente explicada usando a teoria clássica da radiação eletromagnética, baseada nas equações de Maxwell. Na experiência da dupla fenda de Young, tanto a descrição clássica baseada na interferência das amplitudes do campo elétrico, quanto a descrição quântica baseada na interferência das amplitudes de probabilidade do fóton passar por uma das duas fendas coincidem com o resultado experimental, e neste tipo de experimento não se consegue revelar todas as características do campo de radiação. Apenas experimentos de medida de correlações de mais alta ordem envolvendo interferência de intensidades (ou fotcontagem), conseguem avançar nesta direção onde a detecção do campo é feita por dois fotocontadores. O primeiro experimento envolvendo este tipo de medida foi realizado em 1956 por Hanbury Brown e Twiss [1], onde foi observado um aumento na probabilidade de um segundo fóton ser detectado após a detecção de um primeiro fóton. Este efeito é conhecido como **agrupamento de fótons**. Este fenômeno pode ser explicado usando a teoria clássica com flutuações na amplitude do campo elétrico. Para uma amplitude estabilizada, como num laser operando bem acima do limiar, este fenômeno não ocorre. A distribuição estatística dos fótons para um laser ideal é Poissoniana enquanto que para a luz térmica a distribuição é super-Poissoniana, embora os resultados anteriores possam ser explicados tanto pela teoria clássica quanto pela teoria quântica, esta fornece previsões adicionais únicas. Essa teoria foi apresentada inicialmente por Glauber [2] em 1963. Em 1975 Carmichael e Walls [3] fizeram a previsão de que uma luz fluorescente gerada em ressonância com um átomo de dois níveis poderia exibir o efeito do **antiagrupamento de fótons** efeito este observado em 1977 por Kimble *et al* [4]. Este foi o primeiro efeito não-clássico observado no campo de radiação e conduziu a uma nova era em ótica quântica. Nove anos após a observação do primeiro efeito quântico na luz outra previsão da teoria quântica, feita em 1970 por D. Stoler [5], foi observada em 1985 por Slusher *et al* [6], denominado **squeezing**. Este efeito está relacionado com o fato de que

campo elétrico para uma onda plana monocromática pode ser decomposto em duas componentes, com dependência temporal, denominadas quadraturas. A flutuação em uma delas pode ser reduzida, provocando um acréscimo na outra de acordo com o princípio de Heisenberg. **Squeezing**, assim como o efeito de **antiagrupamento de fótons** são consequências da quantização do campo luminoso. Um dos grandes avanços que a teoria quântica para o campo luminoso trouxe foi a habilidade de gerar e detectar luz com uma flutuação menor que a do vácuo. Mas estes não são os únicos efeitos não-clássicos, eles estão num contexto histórico. Existem outros efeitos conhecidos que aqui não foram comentados mas o serão posteriormente. A teoria quântica do campo luminoso é antiga (1927), mas a comprovação de suas previsões é recente (1977). Neste trabalho a nossa atenção foi dirigida para estados de superposição do campo, mais precisamente falando, em superposições de estados coerentes. Embora estes estados sejam os estados quânticos mais próximos dos estados clássicos, a superposição deles resulta num estado que pode exibir algum dos efeitos não-clássicos. O tratamento destes efeitos requer a quantização do campo; sendo assim, no Cap. 2 revisaremos os efeitos mais usuais do campo luminoso e no Cap. 3 apresentamos alguns estados do campo. No Cap. 4 apresentaremos um novo estado de superposição do campo luminoso e no Cap. 5 investigamos a ocorrência de compressão e de colapsos e resurgimentos na inversão atômica. No Cap. 6 estudamos a profundidade não clássica do nosso estado proposto, bem como as possíveis representações deste estado. Finalmente, no Cap. 7, apresentamos a discussão dos resultados e a conclusão final deste trabalho.

# Capítulo 2

## Efeitos não-clássicos do campo luminoso

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos básicos sobre efeitos não clássicos do campo luminoso. Apresentamos estes efeitos e condições de ocorrência, bem como as referências representativas sobre o assunto. A Seção (2.1) é dedicada ao efeito de antiagrupamento de fótons; a Seção (2.2) à estatística sub-Poissoniana; a Seção (2.3) a compressão do ruído quântico (squeezing); a Seção (2.4) aos colapsos e resurgimentos na inversão atômica e, por fim a Seção (2.5) trata das oscilações na distribuição estatística de fótons.

### 2.1 Antiagrupamento de fótons (antibunching)

A função de correlação de 2ª ordem,

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger(\tau)\hat{a}^\dagger(0)\hat{a}(\tau)\hat{a}(0) \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger(\tau)\hat{a}(\tau) \rangle^2} \quad (2.1)$$

mede a probabilidade de detecção de um segundo fóton após um tempo  $\tau$  em que o primeiro foi detectado. Se  $g^{(2)}(\tau) > 1$  diz-se que os fótons do feixe luminoso estão **agrupados**; se  $g^{(2)}(\tau) < 1$  eles estão **anti-agrupados**. Para a luz de um laser ideal (luz coerente) resulta  $g^{(2)}(\tau) = 1$ , fronteira entre a região clássica ( $g^{(2)}(\tau) > 1$ ) e a região quântica ( $g^{(2)}(\tau) < 1$ ). A Fig. (2.1) mostra gráficos de  $g^{(2)}(\tau)$  versus  $\tau$ . A linha vermelha, onde  $g^{(2)}(\tau) > 1$  foi obtida em 1956 por Brown e Twiss[1], usando luz térmica; a linha negra,  $g^{(2)}(\tau) = 1$ , foi obtida em 1966 por Arecchi et al[7], usando luz de lasers e a linha azul, onde  $g^{(2)}(\tau) < 1$ , foi obtida em 1977 por Kimble et al[8] usando luz fluorescente, emitida por um único átomo excitado.

### 2.2 Estatística sub-Poissoniana

Dizemos que um campo luminoso exhibe estatística sub-Poissoniana quando a incerteza no número de fótons é menor que a média do número de fótons, isto é,  $\Delta\hat{n}^2 < \langle \hat{n} \rangle$ . Numa luz coerente (laser ideal), obtemos a estatística Poissoniana:

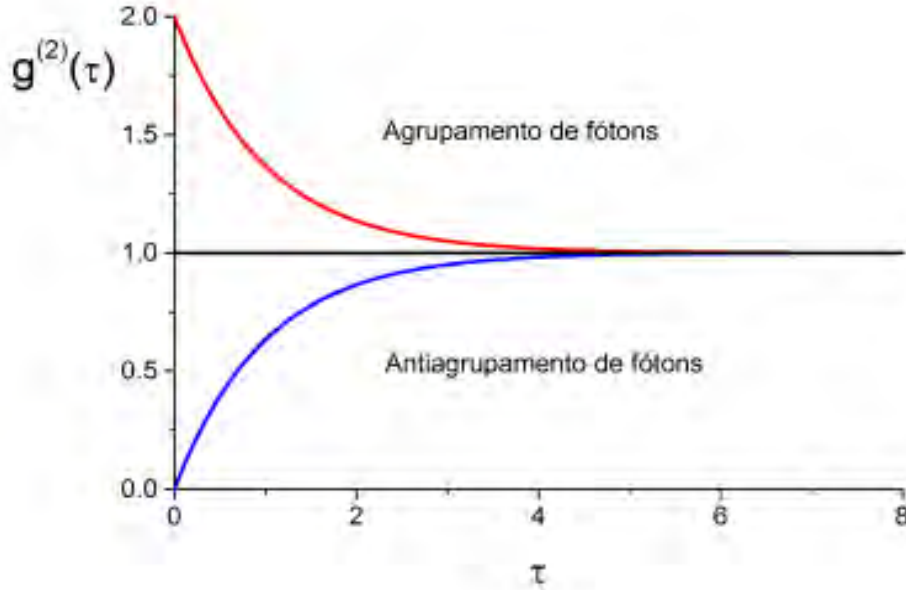


Figura 2.1: Gráfico ilustrando a ocorrência de agrupamento e antiagrupamento de fótons. A linha negra é a fronteira entre as regiões clássica e quântica.

$\Delta \bar{n}^2 = \bar{n}$ , enquanto que numa luz térmica, a estatística é super-Poissoniana:  $\Delta \hat{n}^2 > \langle \hat{n} \rangle$ . O fator de Mandel[4],

$$q = \frac{\Delta \hat{n}^2 - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle} \quad (2.2)$$

mede esse efeito estatístico: se  $q < 0$  ( $q > 0$ ) a estatística é sub-Poissoniana (super-Poissoniana). A região sombreada da Fig. (2.2) é a região não-clássica, onde  $q < 0$ . O parâmetro  $\eta$  no eixo horizontal representa alguma variável que influi no estado do campo.

## 2.3 Compressão do ruído quântico ( squeezing )

O operador de campo elétrico é escrito na forma:

$$\hat{E} = E_0 (\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}) = 2E_0 (\hat{x}_1 \cos \omega t + \hat{x}_2 \sin \omega t) \quad (2.3)$$

onde

$$\hat{x}_1 = \frac{(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)}{2} \quad \text{e} \quad \hat{x}_2 = \frac{(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)}{2i} \quad (2.4)$$

são chamados operadores de quadratura do campo;  $\hat{a}(\hat{a}^\dagger)$  é o operador de aniquilação (criação). No oscilador harmônico tem-se  $\hat{x}_1 \sim \hat{x}$  e  $\hat{x}_2 \sim \hat{p}$  ( $\hat{x}$  = posição,  $\hat{p}$  = momento), com a diferença que  $\hat{x}_1$  e  $\hat{x}_2$  são adimensionais. Ocorre que, tanto para campos em estados coerentes  $|\alpha\rangle$ , como para campos em estados de vácuo  $|0\rangle$ , as dispersões (ruídos) nas quadraturas  $\hat{x}_1$  e  $\hat{x}_2$  são iguais entre si, sendo além disso mínimas,

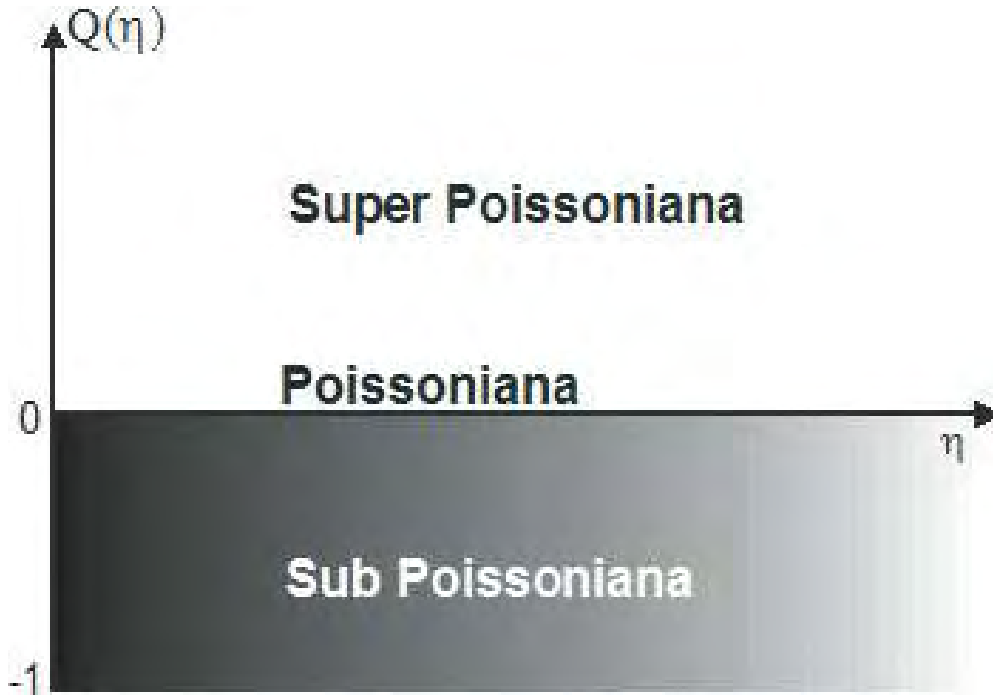


Figura 2.2: Gráfico mostrando as regiões de ocorrência da estatística sub, super e Poissoniana.

$$\Delta \hat{x}_1 = \Delta \hat{x}_2 = 1/4 \quad (2.5)$$

satisfazendo à relação de (mínima) incerteza

$$\Delta \hat{x}_1^2 \cdot \Delta \hat{x}_2^2 = 1/4 \quad (2.6)$$

O efeito de compressão (squeezing) ocorre quando temos  $\Delta \hat{x}_1^2 < 1/4$  com  $\Delta \hat{x}_2^2 > 1/4$ . Ou o reverso disso:  $\Delta \hat{x}_1^2 > 1/4$ , com  $\Delta \hat{x}_2^2 < 1/4$  conforme Fig. (2.3), onde o círculo na origem (fora da origem) representa o ruído no estado de vácuo  $|0\rangle$  (no estado coerente  $|\alpha\rangle$ ). Note que as dispersões do vácuo  $|0\rangle$  e do estado coerente  $|\alpha\rangle$ , são iguais, representados por círculos de mesmo diâmetro, de valor  $1/4$ . A teoria sobre o efeito de compressão iniciou-se por volta de 1970 [9], mas sua comprovação experimental ocorreu apenas a partir 1985 [10].

## 2.4 Colapso e ressurgimento na inversão atômica

A inversão atômica, em átomos de dois níveis interagindo com um campo de radiação, é dada pela média,

$$\langle \hat{\sigma}_z(t) \rangle = P_{22}(t) - P_{11}(t) = \langle \Psi(t) | (|2\rangle \langle 2| - |1\rangle \langle 1|) | \Psi(t) \rangle, \quad (2.7)$$

onde  $\langle \hat{\sigma}_z(t) \rangle$  mede a diferença das probabilidades de encontrar o átomo no nível superior e inferior, na presença de campos luminosos, a qual exhibe oscilações periódicas de Rabi se o campo é tratado clássicamente; mas pode exhibir os efeitos de colapso

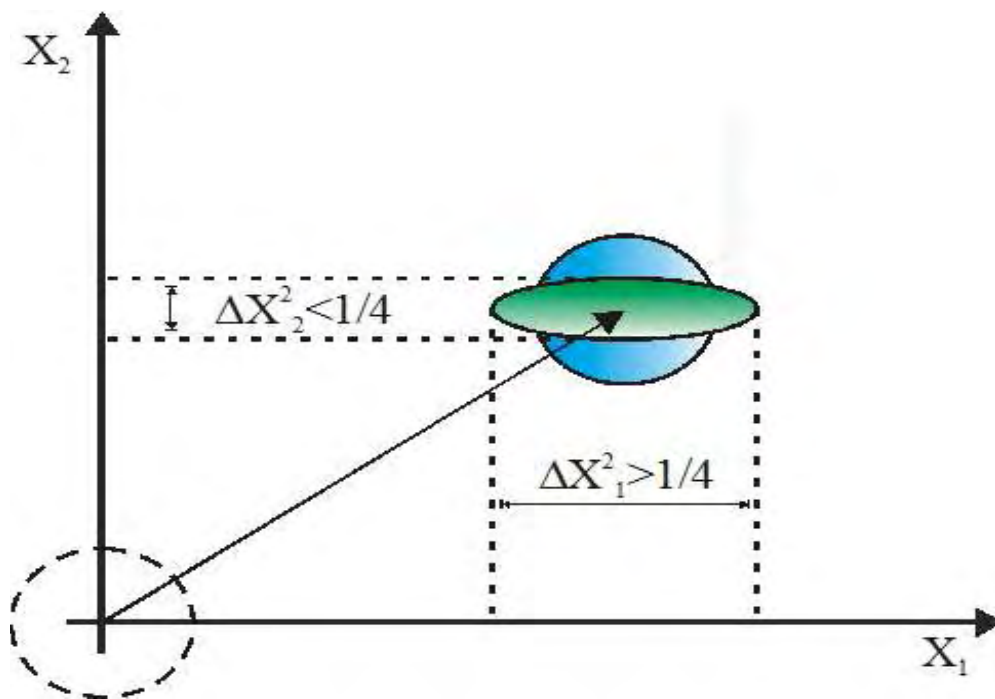


Figura 2.3: Figura mostrando a compressão na quadratura  $X_2$ .

e ressurgimento se o campo luminoso é tratado quanticamente. Por isso dizemos que se trata de efeito óptico não-clássico. Na Fig. (2.4), o campo está num estado inicial coerente. Enquanto a teoria desse efeito iniciou em 1963 [11], sua observação experimental ocorreu apenas em 1987 [12].

## 2.5 Oscilações na distribuição estatística

Em mecânica quântica um sistema pode ser descrito por um vetor de estado  $|\Psi\rangle$ , que pode ser expandido em uma base de auto-vetores de um particular operador  $|\Psi_i\rangle \langle\Psi_i|$

$$|\Psi\rangle = \sum_i C_i |\Psi_i\rangle \quad (2.8)$$

onde  $C_i$  é a amplitude de probabilidade e  $|C_i|^2 = |\langle\Psi_i|\Psi\rangle|^2$ , é a probabilidade de encontrar o sistema no estado  $|\Psi_i\rangle$ . Em óptica quântica uma base muito utilizada é a base de número  $|n\rangle$ . Quando projetamos o estado  $|\Psi\rangle$  nesta base encontramos a probabilidade de encontrar  $n$  fótons no estado  $|\Psi\rangle$ .

$$P_n = |\langle n|\Psi\rangle|^2 \quad (2.9)$$

Sendo assim, a interferência entre as diferentes amplitudes de probabilidade pode resultar num comportamento oscilatório na distribuição  $P_n$ . A distribuição de probabilidade  $P_n$  é governada pela área de “overlap” entre dois estados representados como bandas no espaço de fase. Podemos aqui fazer uma comparação entre a física de um estado cuja sobreposição no espaço de fase exibe duas áreas distintas com o

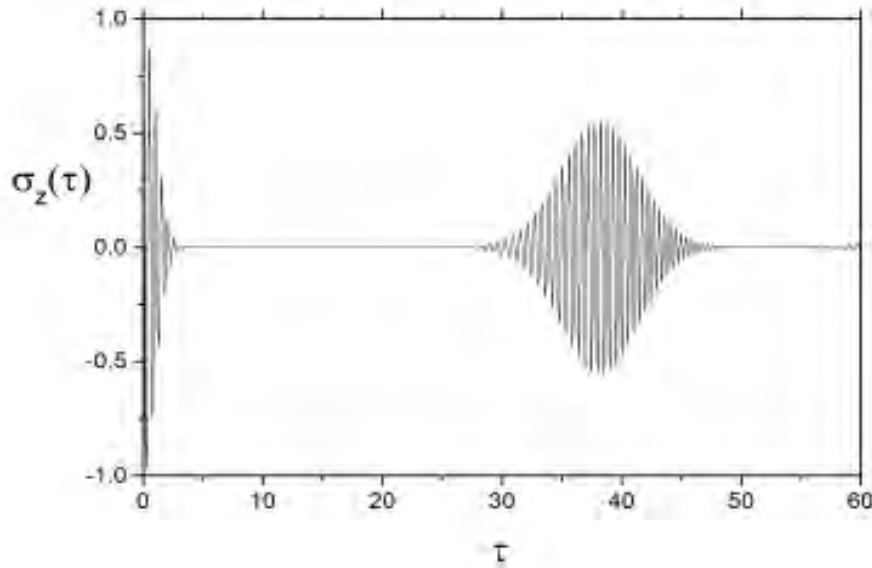


Figura 2.4: Gráfico mostrando o efeito de colapso e resurgimento na inversão atômica.

familiar experimento da dupla fenda de Young. Em ambos os casos há duas contribuições interferindo para a probabilidade total. No segundo caso, as contribuições vêm a partir de duas fendas e no primeiro, elas resultam a partir de duas áreas distintas de “overlap” no espaço de fase. A diferença de fase no experimento da dupla fenda é medida pela diferença de caminho ótico a partir dos centros das duas fendas ao ponto de detecção. E da mesma forma, a amplitude de probabilidade para as duas contribuições de encontrar  $n$  fótons também apresenta uma diferença de fase. Os pioneiros nessa investigação foram Schleich e Wheeler [13]. A Fig. (2.5) mostra a área de “overlap” entre os estados. A faixa circular maior, com centro na origem, representa os estados de número que intercepta os estados coerentes, onde  $r_n = \sqrt{2n}$ ,  $r_{n+1} = \sqrt{2(n+1)}$ ,  $n \sim |\alpha|^2$ .

## 2.6 Resumo e conclusões

Apresentamos os mais representativos efeitos quânticos obtidos na quantização do campo luminoso (antiagrupamento de fótons, estatística sub-Poissoniana, compressão do ruído quântico, colapso e ressurgimento na inversão atômica e oscilações na distribuição estatística). Contudo, não justificamos a razão do nome não-clássico. A justificativa origina-se na distribuição  $P(\alpha)$  de Glauber [2]. Assim, define-se a distribuição  $P(\alpha)$ , tal que

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha \quad (2.10)$$

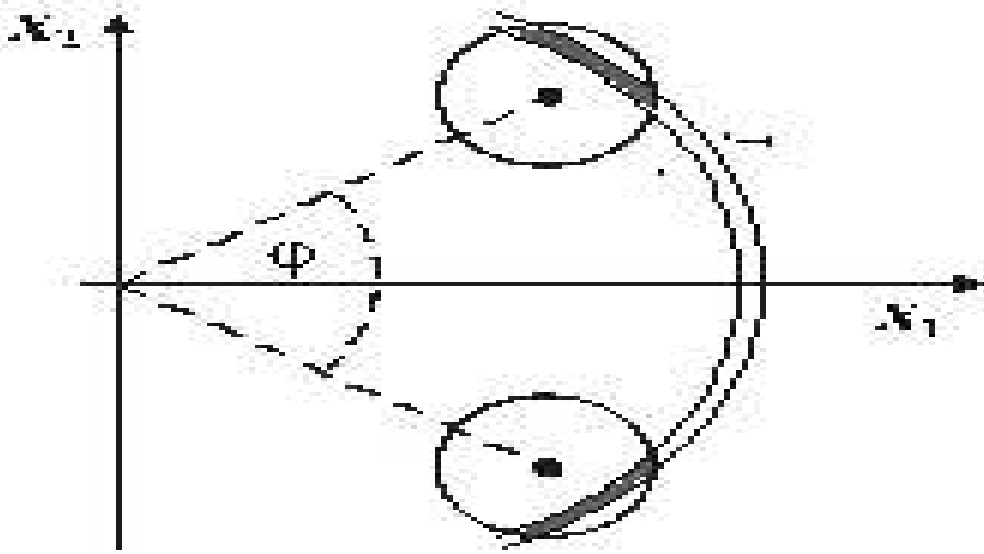


Figura 2.5: Estatística de fótons de uma superposição de estados coerentes via interferência no espaço de fase. As regiões hachuradas na figura fornecem as oscilações na distribuição estatística.

onde  $P(\alpha)$  é a chamada função de quasi-probabilidade:  $P(\alpha) \geq 0$  se o campo é clássico, isto é, se o campo não exibe algum efeito não-clássico. Porém, se o campo no estado  $\hat{\rho}$  exibir algum efeito não-clássico, então resultará:  $P(\alpha) \leq 0$ ; ou ainda  $P(\alpha)$  poderá ser mais singular que uma função delta de Dirac. De fato, mostra-se que [14],

$$g^2(0) = 1 + \frac{\int P(\alpha) [|\alpha|^2 - \langle |\alpha|^2 \rangle]^2 d^2\alpha}{[\int P(\alpha) |\alpha|^2 d^2\alpha]^2} \quad (2.11)$$

e então  $g^2(0) < 1$  (antibunching) se  $P(\alpha) < 0$  para alguns valores de  $\alpha$ . Em segundo lugar, mostra-se que [14],

$$Q = \bar{n} [g^2(0) - 1] \quad (2.12)$$

acarretando que  $Q < 0$  (estatística sub-Poissoniana) se  $g^2(0) < 1$ , isto é, se  $P(\alpha) < 0$  (cf a Eq.2.11). Em terceiro lugar, mostra-se que [14],

$$\Delta \hat{x}_1^2 = \left[ 1 + \int P(\alpha) [(\alpha + \alpha^*) - (\langle \alpha \rangle + \langle \alpha \rangle^*)]^2 d^2\alpha \right], \quad (2.13)$$

acarretando  $\Delta \hat{x}_1^2 < 1/4$  (squeezing) se  $P(\alpha) < 0$ . Em quarto lugar, se a distribuição estatística de fótons,  $P_n$ , oscilar, a cada buraco ( $P_n = 0$ ), corresponde um efeito não-clássico. De fato,

$$P_n = \int P(\alpha) |\langle n | \alpha \rangle|^2 d^2\alpha \quad (2.14)$$

e então  $P_n = 0$  implica que  $P(\alpha)$  deve assumir (também) valores negativos [15], já que  $|\langle n | \alpha \rangle|^2 > 0$  para todo  $n$ .

# Capítulo 3

## Estados clássicos e não-clássicos do campo luminoso

Neste capítulo faremos uma breve apresentação dos estados mais usuais do campo luminoso, bem como a ocorrência ou não dos efeitos citados no capítulo 2. Estes estados servirão como referência no estudo das propriedades do estado proposto nesta Dissertação. Na Seção (3.1), apresentamos os estados térmicos e coerente, na Seção (3.2) o estado de número, a superposição geral de dois estados coerentes e a superposição de  $N$  estados coerentes.

### 3.1 Estados clássicos

#### 3.1.1 Estado térmico

Consideremos o caso de uma luz térmica emitida por uma fonte em que um dado modo encontra-se em equilíbrio térmico com os demais modos (como um OH em equilíbrio térmico com os demais OH's de um reservatório térmico), a uma temperatura  $T$ . O operador densidade

$$\hat{\rho} = N e^{-\beta \hat{H}} \quad (3.1)$$

onde,

$$\begin{aligned} N &= \left[ \text{tr}(e^{-\beta \hat{H}}) \right]^{-1}, \\ \hat{H} &= \hbar \omega (\hat{n} + 1/2), \\ \beta &= 1/K_B T, \end{aligned} \quad (3.2)$$

descreve um campo luminoso no estado térmico [16]. Algumas características e propriedades desse estado seguem abaixo:

a) Representação na base de Fock e base coerente:

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n |n\rangle \langle n| = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha \quad (3.3)$$

onde

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi \bar{n}} e^{-|\alpha|^2/\bar{n}}. \quad (3.4)$$

Note que  $\hat{\rho}(t)$  é diagonal na base  $|n\rangle$ , por ser estado de mistura.

b) Estatística de fótons ( Bose-Einstein):

$$P_n = \frac{(\bar{n})^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}} \quad (3.5)$$

c) Número médio de fótons no campo:

$$\bar{n} = \text{tr} [\hat{\rho}(T)\hat{n}] = (e^\xi - 1)^{-1} \quad (3.6)$$

onde é  $\xi = \hbar\omega/K_B T$ .

d) Dispersão no número de fótons:

$$\Delta \hat{n}^2 = \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2 = \bar{n} + \bar{n}^2 > \bar{n}, \quad (3.7)$$

onde a desigualdade  $\Delta \hat{n}^2 > \langle \hat{n} \rangle$ , significa que o estado exhibe estatística super-Poissoniana.

e) Função de correlação de 2ª ordem:

$$g^{(2)}(0) = 1 + \frac{\Delta \hat{n}^2 - \bar{n}}{\bar{n}^2} = 2 > 1 \quad (3.8)$$

a desigualdade  $g_T^{(2)}(0) > 1$ , significando que o estado exhibe agrupamento de fótons (bunching).

f) Fator  $q$  de Mandel:

$$q = \frac{\Delta \hat{n}^2 - \bar{n}}{\bar{n}} = \bar{n} > 0 \quad (3.9)$$

como  $g^{(2)}(0) > 1$  implica ( $q > 0$ ), ou seja, implica estatística super-Poissoniana, portanto, o estado térmico é clássico.

g) Dispersões nas quadraturas:

$$\Delta \hat{x}_1^2 = \Delta \hat{x}_2^2 = \frac{1}{4} (2\bar{n} + 1). \quad (3.10)$$

Como  $\bar{n} > 0$ , as dispersões nas duas quadraturas  $\hat{x}_1$  e  $\hat{x}_2$  são maiores que  $1/4$ , não havendo o efeito de compressão no estado térmico ( $\Delta \hat{x}_1^2 < 1/4$  ou  $\Delta \hat{x}_2^2 < 1/4$ ).

### 3.1.2 Estado coerente

O estado  $|\alpha\rangle$ , auto-vetor do operador de aniquilação:  $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ , ou o operador densidade

$$\hat{\rho} = |\alpha\rangle \langle \alpha| \quad (3.11)$$

descrevem o campo luminoso num estado coerente, que também pode ser escrito na forma:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle \quad (3.12)$$

onde  $\hat{D}(\alpha)$  é o operador (unitário) de deslocamento [16],

$$\hat{D}(\alpha) = \exp [\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}] \quad (3.13)$$

Características e propriedades :

a) Representação na base coerente e de Fock:

$$\hat{\rho}(\alpha) = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha \quad (3.14)$$

onde  $P(\alpha') = \delta^{(2)}(\alpha' - \alpha)$  . Na base de Fock:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle \quad ; \quad C_n = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}. \quad (3.15)$$

b) Estatística de fótons:

$$P_n(\alpha) = \langle n | \hat{\rho} | n \rangle = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \quad (3.16)$$

que é denominada distribuição de Poisson.

c) Número médio de fótons no campo:

$$\bar{n} = \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^2. \quad (3.17)$$

d) Dispersão no número de fótons:

$$\Delta \hat{n}^2(\alpha) = \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2 = |\alpha|^2 + |\alpha|^4 - |\alpha|^4 = \bar{n}, \quad (3.18)$$

e) Função de correlação de 2ª ordem:

$$g^{(2)}(0) = 1 + \frac{\Delta \hat{n}^2 - \bar{n}}{\bar{n}^2} = 1$$

portanto o estado coerente não exibe o efeito de agrupamento ( $g^{(2)} > 1$ ), nem antiagrupamento de fótons ( $g^{(2)} < 1$ ). Está na fronteira ( $g^{(2)} = 1$ ).

f) Fator  $q$  de Mandel:

$$q = \frac{\Delta \hat{n}^2 - \bar{n}}{\bar{n}} = 0 \quad (3.19)$$

pois  $\Delta \hat{n}^2 = \bar{n}$ . Portanto o estado coerente não é sub nem super-Poissonianos. Sua estatística é Poissoniana, conforme a expressão de  $P_n(\alpha)$ .

g) Dispersões nas quadraturas:

$$\Delta \hat{x}_1^2 = \Delta \hat{x}_2^2 = \frac{1}{4} \quad (3.20)$$

portanto, não exibe o efeito de compressão do ruído nas quadraturas. Nem tampouco exibe anti-compressão. Está na fronteira.

## 3.2 Estados não-clássicos

Os exemplo anteriores, Sec.(3.1.1) e (3.1.2), são para campos clássicos. Estados não-clássicos são aqueles que exibem algum dos efeitos mencionados no Cap. 2.

### 3.2.1 Estado de número

O estado de número é auto-estado do operador  $\hat{n}$  (número de fótons)  $\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle$ . É um dos “cavalos de batalha” da óptica quântica. A base formada pelos seus autovetores é muito utilizada para representar tanto vetores quanto operadores. O operador energia do OH, é diagonal nesta base. Características e propriedades desse estado são as seguintes:

a) representação na base de Fock e coerente:

$$\hat{\rho} = \sum P_n |n\rangle \langle n| \quad (3.21)$$

onde  $P(\alpha)$  resulta agora uma ultradistribuição[16].

b) Estatística de fótons:

$$P_n(N) = \hat{\rho}_{n,N} = \delta_{n,N}. \quad (3.22)$$

c) Número médio de fótons:

$$\bar{n} = \langle n | \hat{n} | n \rangle = N \quad (3.23)$$

d) Dispersão no número médio de fótons:

$$\Delta \hat{n}^2(N) = \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2 = 0 \quad (3.24)$$

como esperado, pois num estado de número a incerteza no número é zero.

e) Função de correlação de 2ª ordem:

$$g^{(2)}(0) = 1 - \frac{1}{N} < 1 \quad (3.25)$$

mostrando que este estado exhibe o efeito de anti-agrupamento, tanto maior quanto menor for o valor de  $N$  ( $N > 0$ , inteiro).

f) Fator  $q$  de Mandel:

$$q = \frac{\Delta \hat{n}^2 - \bar{n}}{\bar{n}} = \frac{-\bar{n}}{\bar{n}} = -1$$

portanto exibindo o máximo efeito sub-Poissonian (  $q = -1$  ), independente de  $N$ . Ao contrário, o efeito anterior (anti-agrupamento) dependia de  $N$ , sendo grande (pequeno) para  $N$  pequeno (grande).

g) As dispersões nas quadraturas são dadas por:

$$\Delta \hat{x}_1^2 = \Delta \hat{x}_2^2 = (2n + 1)/4 \geq 1/4 \quad (3.26)$$

mostrando que o estado  $|N\rangle$  não exhibe o efeito de compressão. Em resumo, o estado de número exhibe os efeitos não-clássicos de anti-agrupamento de fótons e estatística sub-Poissoniana. Mas não exhibe o efeito de compressão (squeezing). A proposta de preparação de um campo luminoso num estado de número foi anunciada em 1982, por Mandel [4]. Porém, sem sucesso, outras propostas foram apresentadas posteriormente.

### 3.2.2 Superposição geral de dois estados coerentes

A superposição geral de dois estados coerentes  $|\alpha_1\rangle$  e  $|\alpha_2\rangle$  é representada por

$$|\Psi(\xi, \phi)\rangle = \eta(\xi, \phi)[\sqrt{\xi}|\alpha_1\rangle + e^{i\phi}\sqrt{1-\xi}|\alpha_2\rangle], \quad (3.27)$$

introduzida na literatura por Ragi *et al* [18], onde o parametro  $\xi$  varia entre  $[0, 1]$ . Note que, neste caso, os estados componentes da superposição tem pesos variáveis. Este estado tem como caso particular os estados propostos em [19]. Algumas características e propriedades deste estado são as seguintes:

a) Estatística de fótons:

$$P_n(\xi, \alpha, \phi, \Delta\theta) = \frac{\eta^2(\xi, \alpha, \phi, \Delta\theta)e^{-\alpha^2}\alpha^{2n}}{n!}[1 + 2\cos(\phi + n\Delta\theta)\sqrt{\xi(1-\xi)}], \quad (3.28)$$

podendo apresentar oscilações na distribuição estatística para certos valores dos parâmetros envolvidos.

b) Número médio de fótons:

$$\begin{aligned} \bar{n}(\xi, \alpha, \phi, \Delta\theta) &= \eta^2(\xi, \alpha, \phi, \Delta\theta)\{\alpha^2[1 + 2\sqrt{\xi(1-\xi)}]e^{-\alpha^2[1-\cos(\Delta\theta)]} \\ &\quad \times \cos[\phi + \Delta\theta + \alpha^2 \sin(\Delta\theta)]\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

c) Função de correlação de  $2^a$  ordem:

$$g^{(2)}(\xi, \alpha, \Phi, 0) = 1 - \frac{1}{\bar{n}(\xi, \alpha, \Phi)} \quad (3.30)$$

neste caso o estado exibe antiagrupamento para certos valores dos parâmetros envolvidos.

d) Fator  $q$  de Mandel

$$q(\xi, \alpha, \Phi) = \frac{\Delta\bar{n}(\xi, \alpha, \Phi)^2 - \bar{n}(\xi, \alpha, \Phi)}{\bar{n}(\xi, \alpha, \Phi)}, \quad (3.31)$$

Prefirimos omitir a expressão devido a sua extensão. Também, neste caso o estado exibe efeito sub-Poissoniano dependendo dos parâmetros envolvidos.

e) Inversão atômica

$$w(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\xi, \alpha, \phi, \Delta\theta) \cos[2\tau\sqrt{n+1}], \quad (3.32)$$

onde  $P_n$  é dada na Eq. (3.29). Nesse caso, o estado apresenta uma transição entre o estado de superposição e o estado coerente. Esta transição ocorre quando fixamos convenientemente os outros parâmetros e fazemos  $\xi$  variar entre  $[0.5, 0]$ . Resumindo, este estado apresenta todos os efeitos não-clássicos citados no Cap. 2, inclusive o de compressão, para valores convenientes dos parâmetros envolvidos.

### 3.2.3 Superposição de N estados do tipo gato de Schrödinger

Este estado é representado por

$$|\Psi_N^\pm(\alpha)\rangle = \mathcal{N}_N^\pm(\alpha) \sum_{j=0}^{Jm} [ |-\alpha_j\rangle \pm |-\alpha_j\rangle ], \quad (3.33)$$

onde  $Jm = 2^{N-1} - 1$  e  $\alpha_j = \exp[\frac{i\pi j}{2^{N-1}}]$  com  $\alpha \in \mathbf{R}^+$ . Este estado foi proposto por Malboiussou *et al* [20], onde os estados de superposição são obtidos pelas sucessivas passagens de átomos convenientemente preparados por uma cavidade supercondutora. Este generaliza em sua primeira geração (1° átomo) o caso apresentado anteriormente [18] e os demais [19]. Algumas características e propriedades deste estado são:

a) Estatística de fótons:

$$P_N^+(n, \alpha) = \frac{\alpha^{2n}}{n! F_N^+(\alpha^2)} \delta_{n, 2^N k} \quad (3.34)$$

$$P_N^-(n, \alpha) = \frac{\alpha^{2n}}{2^{2(N-1)} n! F_N^-(\alpha^2) \sin^2(n\pi/2^N)} \delta_{n, (2k+1)}. \quad (3.35)$$

Este estado exibe oscilações na distribuição estatística, onde para os estados ímpares ela ocorre independentemente da geração, e por um caminho mais restrito para o caso par.

b) Número médio de fótons:

$$\bar{n}_N^\pm(\alpha^2) = \alpha^2 \frac{F_N^{\pm(1)}(\alpha^2)}{F_N^\pm(\alpha^2)} \quad (3.36)$$

c) Função de correlação de 2ª ordem:

$$g_N^{(2)\pm}(0) = \frac{F_N^\pm(\alpha^2) F_N^{\pm(2)}(\alpha^2)}{F_N^{\pm(1)}(\alpha^2)}, \quad (3.37)$$

Neste caso, o estado exibe oscilações entre as regiões de ocorrência dos efeitos de agrupamento e antiagrupamento de fótons.

d) Fator  $q$  de Mandel

$$q_N^\pm = \alpha^2 \left[ \frac{F_N^{\pm(2)}(\alpha^2)}{F_N^{\pm(1)}(\alpha^2)} - \frac{F_N^{\pm(1)}(\alpha^2)}{F_N^\pm(\alpha^2)} \right]. \quad (3.38)$$

Novamente, o estado apresenta oscilações, só que agora entre o caráter super e sub-Poissoniano lembrando, que a ocorrência de antiagrupamento de fótons vem acompanhada de estatística sub-Poissoniana. Este estado apresenta algum dos efeitos citados no Cap. 2 e a partir dele pode-se gerar uma aproximação do estado de número.

### 3.3 Resumo e conclusões

A não classicalidade de um estado está intimamente ligada a ocorrência de algum efeito citado no capítulo 2. Sendo assim, vimos que o estado térmico não apresenta nenhum efeito citado. Porém, o estado coerente está na fronteira de ocorrência de alguns dos efeitos não-clássicos (antiagrupamento de fótons, estatística sub-Poissoniana e squeezing) servindo como referência para analisar a ocorrência destes efeitos. O único efeito não-clássico que ele apresenta é o de colapso e resurgimento na inversão atômica. Já entre os estados considerados não-clássicos, o estado de número apresenta a ocorrência máxima de alguns dos efeitos citados (antiagrupamento de fótons e estatística sub-Poissoniana) servindo, também como referência no estudo destes efeitos. A superposição de dois estados coerentes e a de  $N$  estados do tipo gato de Schrödinger podem apresentar a ocorrência de vários dos efeitos citados, obviamente, para valores convenientes dos parâmetros envolvidos. O efeito de compressão, não ocorre na superposição de  $N$  estados do tipo gato.

# Capítulo 4

## Superposição assimétrica de estados coerentes circulares

Neste capítulo, apresentamos a superposição assimétrica de estados coerentes circulares (**ASCCS**), a sua geração, bem como suas propriedades estatísticas. Na seção (4.1) apresentamos um aparato experimental capaz de gerar a **ASCCS**, bem como o cálculo da constante de normalização do estado. Calculamos, também, derivadas de 1ª e 2ª ordem com respeito a  $\alpha^2$ , já que podemos representar as propriedades estatísticas em termos destas derivadas. Na seção (4.2) analisamos as propriedades estatísticas e verificamos a ocorrência dos seguintes efeitos não-clássicos: oscilações na distribuição estatística, estatística sub-Poissoniana e antiagrupamento de fótons.

### 4.1 Geração e normalização

O modelo de Jaynes-Cummings [11] de ressonância óptica, descreve a interação entre dois sistemas de naturezas diferentes: um átomo de dois níveis (sistema pseudo-fermiônico) e um modo do campo quantizado (sistema bosônico). Esta interação conduz a um extremo emaranhamento quântico do átomo e do campo [21]. Baseado neste modelo, qualquer estado pode ser produzido em uma cavidade de microondas através de um procedimento quântico não demolidor. Estamos aqui, interessados em um novo estado que é uma extensão da superposição de estados coerentes par e impar introduzida por Brune *et al.*[22]. Neste processo, uma cavidade supercondutora de alto fator de qualidade  $C$  é colocada entre outras cavidades  $R_1$  e  $R_2$ , de menor fator de qualidade, chamadas zonas de Ramsey. Átomos de Rydberg são preparados em um estado circular excitado  $|e\rangle$  (de número quântico principal  $n=51$ ) após serem ejetados com uma velocidade selecionada de uma fonte  $S$ . Em ambas as zonas de Ramsey ( $R_1$  e  $R_2$ ), campos clássicos são produzidos por um gerador de microondas (MG) que interage ressonantemente com a transição entre  $|e\rangle \longleftrightarrow |g\rangle$  ( $n=50$ ). A intensidade do campo e o tempo de interação são ajustados de tal forma a provocar uma rotação de  $\pi/2$  no espaço de estados atômicos, ou seja,

$$\begin{aligned} |e\rangle &\rightarrow (1/\sqrt{2})(|g\rangle + |e\rangle) \\ |g\rangle &\rightarrow (1/\sqrt{2})(|g\rangle - |e\rangle). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Após a passagem pela segunda zona de Ramsey o átomo pode ser detectado em algum dos seus estados ( $|e\rangle$  ou  $|g\rangle$ , nesta ordem) e a descrição deste aparato está representada na Fig.(4.1). Após esta breve descrição do arranjo experimental

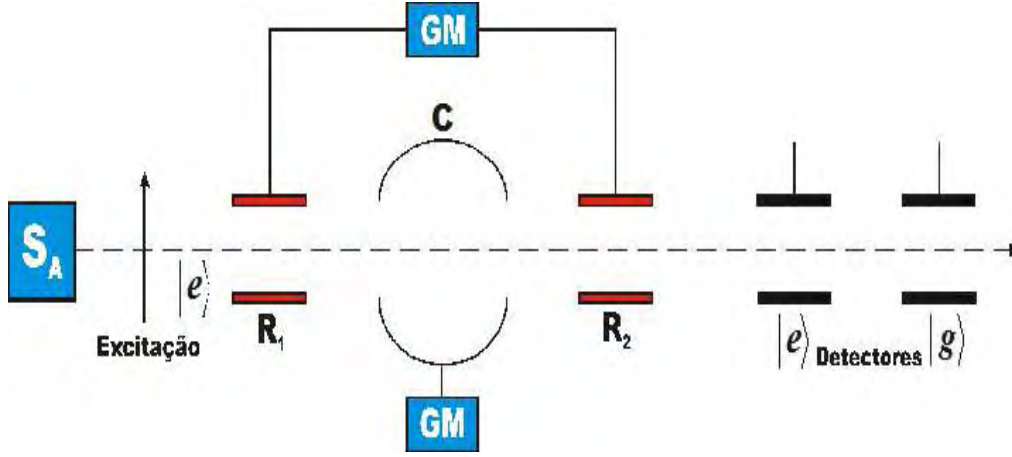


Figura 4.1: Ilustração esquemática do aparato experimental para a produção do estado aqui proposto. As abreviações usadas no aparato são dadas a seguir: GM = gerador de microondas, SA = fonte de átomos, C = cavidade, R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub> = zonas de Ramsey.

voltamos nossa atenção para a cavidade C. A frequência do modo nesta cavidade é ajustada de tal maneira que haverá uma interação com a transição  $|e\rangle \rightarrow |i\rangle$  ( $n=52$ ), dessintonizada de  $\delta$ , parametro este ajustado de forma que apenas transições virtuais ocorram entre esses níveis, onde a Fig.(4.2) ilustra esta situação. A interação

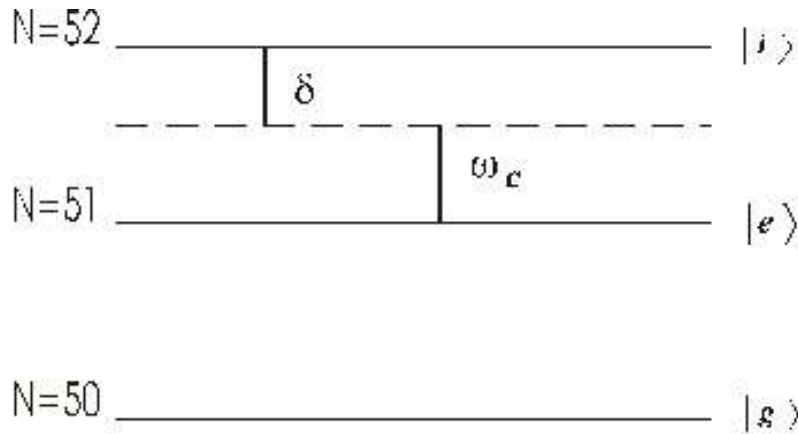


Figura 4.2: Esquema de níveis relevantes dos estados dos átomos de Rydberg envolvidos no processo de produção do ASCCS.

dispersiva entre o átomo e o campo na cavidade pode ser descrita pela Hamiltoniana [23]

$$\hat{H}_{int} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}(|i\rangle\langle i| - |e\rangle\langle e|) \quad (4.2)$$

onde  $\omega = \mathbf{d}^2/2\delta$  e  $\mathbf{d}$  é o momento de dipolo atômico. Isto implica que o átomo atravessa a cavidade C em uma superposição dos seus estados  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  e a interação dispersiva entre o estado atômico e o campo na cavidade produz um fase  $\theta$  no espaço

de estados do campo quando o átomo for detectado no estado  $|e\rangle$ , não produzindo nenhum efeito se ele estiver no estado  $|g\rangle$ , ou seja,

$$(c_g |g\rangle + c_e |e\rangle) |\Psi_F\rangle \rightarrow c_g |g\rangle |\Psi_F\rangle + c_e |e\rangle (\exp(i\theta \hat{a}^\dagger \hat{a})) |\Psi_F\rangle \quad (4.3)$$

onde  $\theta = \omega t_c$ ,  $t_c$  sendo o tempo o que átomo leva para atravessar a cavidade. Deixaremos para o Apêndice A, o detalhamento da conta feita acima. Se assumirmos que o campo na cavidade está inicialmente num estado coerente  $|\alpha\rangle$  e, sem perda de generalidade, tomarmos  $\alpha$  real e sendo  $\exp(i\theta_1 \hat{a}^\dagger \hat{a}) |\alpha\rangle = |\exp(i\theta_1)\alpha\rangle$ , o estado do sistema átomo-campo após a passagem do primeiro átomo pelo aparato será dado por:

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{átomo} : |\Psi_{\text{átomo+campo}}\rangle &= |\Psi_1(\alpha)\rangle \\ \text{após } R_1 : [ |e\rangle + |g\rangle ] |\alpha\rangle & \\ \text{após } C : |e\rangle |e^{i\theta_1}\alpha\rangle + |g\rangle |\alpha\rangle & \\ \text{após } R_2 : |\Psi_1(\alpha)\rangle = |g\rangle [ |e^{i\theta_1}\alpha\rangle + |\alpha\rangle ] &+ |e\rangle [ |e^{i\theta_1}\alpha\rangle - |\alpha\rangle ]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

A seguir, um segundo átomo atravessa o aparato que agora irá interagir com o novo campo inicial em um estado “par” ou “ímpar” (conforme a detecção em  $|g\rangle$  ou  $|e\rangle$ ) presente na cavidade, gerado anteriormente pela passagem do primeiro átomo. O estado final produzido pelo 1º átomo fica sendo o estado inicial para o 2º átomo. Neste ponto devemos escolher a velocidade do segundo átomo maior que a do primeiro ( $v_2 = 2v_1$ ), de tal maneira que  $\theta_2 = \theta_1/2$ ; com isto o estado do sistema será dado por:

$$\begin{aligned} 2^\circ \text{átomo} : |\Psi_{\text{átomo+campo}}\rangle &= |\Psi_2(\alpha)\rangle \\ \text{após } R_1 : |e\rangle |\Psi_1(\alpha)\rangle + |g\rangle |\Psi_1(\alpha)\rangle & \\ \text{após } C : |g\rangle |\Psi_1(\alpha)\rangle + |e\rangle |e^{i\theta_2}\Psi_1(\alpha)\rangle & \\ \text{após } R_2 : |\Psi_2(\alpha)\rangle = |g\rangle [ |\Psi_1(\alpha)\rangle + |e^{i\theta_2}\Psi_1(\alpha)\rangle ] & \\ - |e\rangle [ |\Psi_1(\alpha)\rangle - |e^{i\theta_2}\Psi_1(\alpha)\rangle ] & \end{aligned} \quad (4.6)$$

Na passagem do terceiro átomo pela cavidade a sua velocidade será tal que, implique que  $\theta_3 = \theta_2/2$ , para o quarto átomo  $\theta_4 = \theta_3/2$  e assim sucessivamente para os demais átomos. Tomando,  $\theta_1 = \theta$ ,  $\theta_2 = \theta/2$ ,  $\theta_3 = \theta_2/2 = \theta/8$ ,  $\theta_4 = \theta_3/2 = \theta/8$ , etc. nós obteremos a família de estados de superposição desejados. Onde o tempo de interação átomo-campo pode ser ajustado de tal forma que a fase  $\theta$  possa assumir qualquer valor no intervalo  $[0, \pi]$ . Quando o número de átomos  $N$  que atravessaram a cavidade tender ao infinito ( $N \rightarrow \infty$ ) o maior valor assumido pela fase é de  $\theta_\infty = (\theta + \theta/2 + \theta/4 + \dots) = 2\theta$ . Ressaltando, que para cada valor de  $N$  (1, 2, 3, ...) teremos as respectivas gerações dos estados na cavidade. Seguindo a sequência dada nas Eqs.(4.4 e 4.5) para  $N = 3, 4, 5, \dots$ , nós obteremos a **ASCCS** gerada por um número arbitrário de átomos que atravessaram a cavidade. Sendo assim, obtém-se, calculando passo a passo,

$$\left| \Psi_N^{(\varepsilon)}(\alpha, \theta) \right\rangle = \mathcal{N}_N^{(\varepsilon)}(\alpha) \sum_{j=0}^{Jm} (|e^{i\theta} \alpha_j\rangle + \varepsilon |\alpha_j\rangle) \quad (4.7)$$

onde  $\alpha_j = \alpha \exp(i\theta j/2^{N-1})$ ,  $Jm = 2^{N-1} - 1$ . Com  $\alpha \in R^+$ , e  $\varepsilon = \pm 1$ , conforme detecção do primeiro átomo seja em  $|g\rangle$  (+) ou  $|e\rangle$  (-), sendo as restantes detecções todas em  $|g\rangle$ , por nossa escolha. A constante de normalização  $\mathcal{N}_N^\varepsilon(\alpha)$  pode ser encontrada impondo-se que  $\langle \Psi_N^\varepsilon(\alpha) | \Psi_N^\varepsilon(\alpha) \rangle = 1$  e utilizando a relação:  $\langle \beta | \alpha \rangle = \exp[-(1/2)(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \alpha\beta^*]$ . Então, quando  $\theta = \pi$  recuperamos o caso simétrico estudado por Malbouisson et al[20]. Entretanto, se, tomarmos:  $\theta_1 = \theta = \pi/4$ , então  $\theta_\infty \rightarrow \pi/2$  somente o círculo no primeiro quadrante será ocupado. Assim, após longa algebra, encontramos:

$$\mathcal{N}_N^{(\varepsilon)}(\alpha) = \left[ 2^N e^{-\alpha^2} \mathcal{F}_N^{(\varepsilon)}(\alpha) \right]^{-1/2} \quad (4.8)$$

onde, para a primeira geração ( $N = 1$ ),

$$\mathcal{F}_1^{(\varepsilon)}(\alpha^2, \theta) = e^{\alpha^2} + \varepsilon e^{\alpha^2 \cos(\theta)} \cos(\alpha^2 \sin(\theta)) \quad (4.9)$$

que, para  $N > 1$  resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N^{(\varepsilon)}(\alpha, \theta) &= [e^{\alpha^2} + \varepsilon e^{\alpha^2 \cos(\theta)} \cos(\alpha^2 \sin(\theta))] + \frac{1}{2^N} \sum_{l=1}^{Jm} (2^N - 2l) \\ &[2e^{\alpha^2 \cos(\theta l/2^{N-1})} \cos(\alpha^2 \sin(\theta l/2^{N-1})) \\ &+ \varepsilon (e^{\alpha^2 \cos(1+\theta l/2^{N-1})} \cos(\alpha^2 \sin(1 + \theta l/2^{N-1})) \\ &+ e^{\alpha^2 \cos(1-\theta l/2^{N-1})} \cos(\alpha^2 \sin(1 - \theta l/2^{N-1})))]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Será visto adiante que estas funções de normalização desempenham um importante papel na especificação das propriedades estatísticas dos estados  $|\Psi_N^\varepsilon(\alpha)\rangle$ . A seguir especificamos as funções de normalização para as três primeiras gerações ( $N = 1, 2$  e  $3$ , respectivamente).

$$\mathcal{F}_1^{(\varepsilon)}(\alpha, \theta) = e^{\alpha^2} + \varepsilon e^{\alpha^2 \cos(\theta)} \cos(\alpha^2 \sin(\theta)), \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2^{(\varepsilon)}(\alpha, \theta) &= e^{\alpha^2} + e^{\alpha^2 \cos(\theta/2)} \cos(\alpha^2 \sin(\theta/2)) \\ &+ \varepsilon \{ e^{\alpha^2 \cos(\theta)} \cos(\alpha^2 \sin(\theta)) \\ &+ (1/2) [e^{\alpha^2 \cos(\theta/2)} \cos(\alpha^2 \sin(\theta/2)) \\ &+ e^{\alpha^2 \cos(3\theta/2)} \cos(\alpha^2 \sin(3\theta/2))] \}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_3^{(\varepsilon)}(\alpha, \theta) &= e^{\alpha^2} + e^{\alpha^2 \cos(\theta/2)} \cos(\alpha^2 \sin(\theta/2)) \\
&+ (1/2) e^{\alpha^2 \cos(3\theta/4)} \cos(\alpha^2 \sin(3\theta/4)) \\
&+ (3/2) e^{\alpha^2 \cos(\theta/4)} \cos(\alpha^2 \sin(\theta/4)) \\
&+ \varepsilon \{ e^{\alpha^2 \cos(\theta)} \cos(\alpha^2 \sin(\theta)) \\
&+ (1/4) [ e^{\alpha^2 \cos(\theta/4)} \cos(\alpha^2 \sin(\theta/4)) \\
&+ e^{\alpha^2 \cos(7\theta/4)} \cos(\alpha^2 \sin(7\theta/4)) ] \\
&+ (1/2) [ e^{\alpha^2 \cos(\theta/2)} \cos(\alpha^2 \sin(\theta/2)) \\
&+ e^{\alpha^2 \cos(3\theta/2)} \cos(\alpha^2 \sin(3\theta/2)) ] \\
&+ (3/4) [ e^{\alpha^2 \cos(3\theta/4)} \cos(\alpha^2 \sin(3\theta/4)) \\
&+ e^{\alpha^2 \cos(5\theta/4)} \cos(\alpha^2 \sin(5\theta/4)) ] \}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

## 4.2 Propriedades estatísticas

### 4.2.1 Estatística de fótons

A estatística de foto-contagem nos estados representados pela Eq.(4.6) é determinada pela expansão destes na base de número (ou de Fock),

$$\left| \Psi_N^{(\varepsilon)}(\alpha, \theta) \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_N^{(\varepsilon)}(n, \alpha, \theta) |n\rangle, \tag{4.14}$$

onde os coeficientes  $C_N^{(\varepsilon)}(n, \alpha)$  desta expansão são obtidos com o auxílio da relação de “overlap” entre o estado coerente  $|\beta\rangle$ , e o estado de número  $|n\rangle$ , ou seja,  $\langle n | \beta \rangle = \exp(-|\beta|^2/2) \beta^n / \sqrt{n!}$ , logo encontramos que:

$$\begin{aligned}
C_N^{(\varepsilon)}(n, \alpha, \theta) &= \langle n | \Psi_N^{(\varepsilon)}(\alpha, \theta) \rangle = \frac{\mathcal{N}_N^{(\varepsilon)}(\alpha, \theta) \exp(-\alpha^2/2) \alpha^n}{\sqrt{n!}} \\
&\times \sum_{j=0}^{Jm} [ e^{in(1+j/2^{N-1})\theta} + \varepsilon e^{inj\theta/2^{N-1}} ].
\end{aligned} \tag{4.15}$$

A partir dos coeficientes acima, calculamos a probabilidade de se encontrar  $n$  fótons neste estado, dada por:

$$P_N^{(\varepsilon)}(n; \alpha, \theta) = \left| C_N^{(\varepsilon)}(n; \alpha, \theta) \right|^2, \tag{4.16}$$

donde encontramos,

$$P_1^{(\varepsilon)}(n, \alpha, \theta) = \frac{(\alpha^2)^n}{n! \mathcal{F}_1^{(\varepsilon)}(\alpha, \theta)} \{ 1 + \varepsilon \cos(n\theta) \}, \tag{4.17}$$

e para  $N > 1$ ,

$$\begin{aligned}
P_N^{(\varepsilon)}(n, \alpha, \theta) &= \frac{(\alpha^2)^n}{n! \mathcal{F}_N^{(\varepsilon)}(\alpha, \theta)} \left\{ 1 + \varepsilon \cos(n\theta) + \frac{1}{2^N} \sum_{l=1}^{Jm} \{(2^N - 2l) \right. \\
&\quad \times [2 \cos \frac{nl\theta}{2^{N-1}} + \varepsilon [\cos n\theta (1 + \frac{l}{2^{N-1}}) \\
&\quad \left. + \cos n\theta (1 - \frac{l}{2^{N-1}})]]\} \right\}. \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Explicitando o valor de  $N$  na equação anterior obtemos a distribuição de número de fótons para a segunda e a terceira geração, que são mostradas a seguir,

$$\begin{aligned}
P_2^{(\varepsilon)}(n, \alpha, \theta) &= \frac{(\alpha^2)^n}{n! \mathcal{F}_2^{(\varepsilon)}(\alpha, \theta)} \{1 + \cos(n\theta/2) \\
&\quad + (1/2)\varepsilon[\cos(n\theta) + \cos(n\theta/2) + \cos(3n\theta/2)]\} \tag{4.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_3^{(\varepsilon)}(n, \alpha, \theta) &= \frac{(\alpha^2)^n}{n! \mathcal{F}_3^{(\varepsilon)}(\alpha, \theta)} \{1 + \cos(n\theta/2) \\
&\quad + (1/2) \cos(3n\theta/4) + (3/2) \cos(n\theta/4) \\
&\quad + \varepsilon \{ \cos(n\theta) + (1/4) [\cos(n\theta/4) + \cos(7n\theta/4)] \\
&\quad + (1/2) [\cos(n\theta/2) + \cos(3n\theta/2)] \\
&\quad + (3/4) [\cos(3n\theta/4) + \cos(5n\theta/4)] \} \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Ao fazer  $\theta = \pi$  na Eq. (4.16) obtemos a distribuição de número de fótons da conhecida superposição de dois estados coerentes onde a mesma anula-se em valores pares ou ímpares de  $n$  se o estado atômico é detectado em  $|e\rangle$  ( $\varepsilon = -1$ , gato ímpar) ou  $|g\rangle$  ( $\varepsilon = 1$ , gato par). Mas se  $\theta \neq \pi$ , os zeros na distribuição não são mais encontrados nos valores ímpares e pares de  $n$ , mas sim obedecendo uma regra que dependerá dos valores de  $N, \theta$  e  $\varepsilon$ . A Fig.(4.3) exhibe gráficos da distribuição para a primeira geração, mostrando que para uma excitação crescente do campo, há um aumento nas oscilações. O comportamento oscilatório é compreendido a partir do ingrediente central da interferência quântica no espaço de fase, ou seja, no limite semiclassico da mecânica quântica o produto escalar entre dois estados é governado pela área de “overlap” entre os mesmos no espaço de fase [24]. Como a excitação do campo não tem influência na formação dos buracos, investigamos a influência dos outros parâmetros ( $N, \theta$  e  $\varepsilon$ ) nas três primeiras gerações. A tabela abaixo mostra a ocorrência dos buracos na primeira geração e a regra possível de ocorrência dos mesmos.

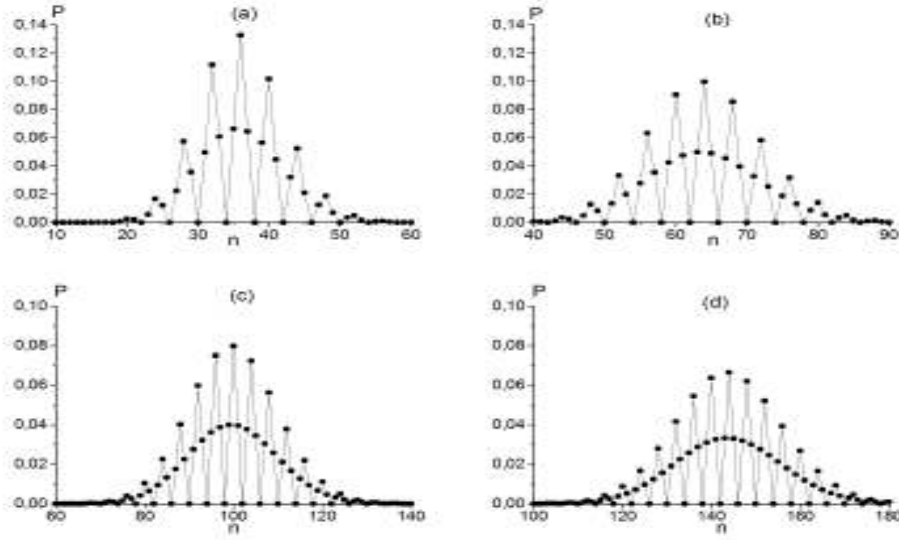


Figura 4.3: Gráficos mostrando as oscilações na distribuição estatística e a influência da excitação do campo. Note o aumento nas oscilações de (a) – (d). Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\alpha = 6$ , (b)  $\alpha = 8$ , (c)  $\alpha = 10$ , e (d)  $\alpha = 12$ . Em todos os gráficos  $N = 1$ ,  $\theta = 90^\circ$  e  $\varepsilon = 1$ .

$\theta$	$\alpha$	Buracos em $P_1^{(1)}(n, \alpha)$	Buracos em $P_1^{(-1)}(n, \alpha)$
$180^\circ$	$\nabla$	$n = 1, 3, 5, 7, 9, \dots, 1 + 2m$	$n = 0, 2, 4, 6, 8, \dots, 2m$
$170^\circ$	$\nabla$	$n = 18, 54, 90, 126, \dots, 18 + 36m$	$n = 0, 36, 72, 108, \dots, 36m$
$160^\circ$	$\nabla$	sem buracos efetivos	$n = 0, 9, 18, 27, \dots, 9m$
$150^\circ$	$\nabla$	$n = 6, 18, 30, 42, \dots, 6 + 12m$	$n = 0, 12, 24, 36, \dots, 12m$
$140^\circ$	$\nabla$	$n = 9, 27, 45, 63, \dots, 9 + 18m$	$n = 0, 18, 36, 54, \dots, 18m$
$130^\circ$	$\nabla$	$n = 18, 54, 90, 126, \dots, 18 + 36m$	$n = 0, 36, 72, 108, \dots, 36m$
$120^\circ$	$\nabla$	sem buracos efetivos	$n = 0, 3, 6, 9, 12, \dots, 3m$
$110^\circ$	$\nabla$	$n = 18, 54, 90, 126, \dots, 18 + 36m$	$n = 0, 36, 72, 108, \dots, 36m$
$100^\circ$	$\nabla$	$n = 9, 27, 45, 63, \dots, 9 + 18m$	$n = 0, 18, 36, 54, \dots, 18m$
$90^\circ$	$\nabla$	$n = 2, 6, 10, 14, \dots, 2 + 4m$	$n = 0, 4, 8, 12, 16, \dots, 4m$
$80^\circ$	$\nabla$	sem buracos efetivos	$n = 0, 9, 18, 27, \dots, 9m$
$70^\circ$	$\nabla$	$n = 18, 54, 90, 126, \dots, 18 + 36m$	$n = 0, 36, 72, 108, \dots, 36m$
$60^\circ$	$\nabla$	$n = 3, 9, 15, 21, 27, \dots, 3 + 6m$	$n = 0, 6, 12, 18, 24, \dots, 6m$
$50^\circ$	$\nabla$	$n = 18, 54, 90, 126, \dots, 18 + 36m$	$n = 0, 36, 72, 108, \dots, 36m$
$40^\circ$	$\nabla$	sem buracos	$n = 0, 9, 18, 27, \dots, 9m$
$30^\circ$	$\nabla$	$n = 6, 18, 30, 42, \dots, 6 + 12m$	$n = 0, 12, 24, 36, \dots, 12m$
$20^\circ$	$\nabla$	$n = 9, 27, 45, 63, \dots, 9 + 18m$	$n = 0, 18, 36, 54, \dots, 18m$
$10^\circ$	$\nabla$	$n = 18, 54, 90, 126, \dots, 18 + 36m$	$n = 0, 36, 72, 108, \dots, 36m$

A tabela abaixo detalha a ocorrência dos zeros em função dos parâmetros envolvidos para a segunda geração ( $N = 2$ ).

$\theta$	$\alpha$	Buracos em $P_2^{(1)}(n, \alpha)$	Buracos em $P_2^{(-1)}(n, \alpha)$
180°	∇	$n = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11,$	$n = 0, 2, 4, 6, 8, \dots, 2m$
170°	∇	$n = 18, 36, 54, 90, 108, 126, \dots$	$n = 0, 36, 72, 108, \dots, 36m$
160°	∇	sem buracos efetivos	$n = 0, 9, 18, 27, \dots, 9m$
150°	∇	$n = 6, 12, 18, 30, 36, 42, \dots$	$n = 0, 12, 24, 36, \dots, 12m$
140°	∇	$n = 9, 18, 27, 45, 54, 63, \dots$	$n = 0, 18, 36, 54, \dots, 18m$
130°	∇	$n = 18, 36, 54, 90, 108, 126, \dots$	$n = 0, 36, 72, 108, \dots, 36m$
120°	∇	$n = 3, 9, 15, 27, 33, 39, \dots$	$n = 0, 3, 6, 9, 12, \dots, 3m$
110°	∇	$n = 18, 36, 54, 90, 108, 126, \dots$	$n = 0, 36, 72, 108, \dots, 36m$

cont.

100°	∇	$n = 9, 18, 27, 45, 54, 63, \dots$	$n = 0, 18, 36, 54, \dots, 18m$
90°	∇	$n = 2, 4, 6, 10, 12, 14, \dots$	$n = 0, 4, 8, 12, 16, \dots, 4m$
80°	∇	sem buracos efetivos	$n = 0, 9, 18, 27, \dots, 9m$
70°	∇	$n = 18, 36, 54, 90, 108, 126, \dots$	$n = 0, 36, 72, 108, \dots, 36m$
60°	∇	$n = 3, 6, 9, 15, 18, 21, \dots$	$n = 0, 6, 12, 18, 24, \dots, 6m$
50°	∇	$n = 18, 36, 54, 90, 108, 126, \dots$	$n = 0, 36, 72, 108, \dots, 36m$
40°	∇	$n = 9, 27, 45, 63, 81, \dots$	$n = 0, 9, 18, 27, \dots, 9m$
30°	∇	$n = 6, 12, 18, 30, 36, 42, \dots$	$n = 0, 12, 24, 36, \dots, 12m$
20°	∇	$n = 9, 18, 27, 45, 54, 63, \dots$	$n = 0, 18, 36, 54, \dots, 18m$
10°	∇	$n = 18, 36, 54, 90, 108, 126, \dots$	$n = 0, 36, 72, 108, \dots, 36m$

A tabela abaixo detalha a ocorrência dos zeros em função dos parâmetros envolvidos para a terceira geração ( $N = 3$ ).

$\theta$	$\alpha$	Buracos em $P_3^{(1)}(n, \alpha)$	Buracos em $P_3^{(-1)}(n, \alpha)$
180°	∇	$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, \dots$	$n = 0, 2, 4, 6, 8, \dots, 2m$
170°	∇	$n = 18, 36, 54, 72, 90, 108, \dots$	$n = 0, 36, 72, 108, \dots, 36m$
160°	∇	sem buracos efetivos	$n = 0, 9, 18, 27, \dots, 9m$
150°	∇	$n = 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, \dots$	$n = 0, 12, 24, 36, \dots, 12m$
140°	∇	$n = 9, 18, 27, 45, 54, 63, 81, \dots$	$n = 0, 18, 36, 54, \dots, 18m$
130°	∇	$n = 18, 36, 54, 72, 90, 108, \dots$	$n = 0, 36, 72, 108, \dots, 36m$
120°	∇	$n = 3, 6, 9, 15, 18, 21, 27, 30, \dots$	$n = 0, 3, 6, 9, 12, \dots, 3m$
110°	∇	$n = 18, 36, 54, 72, 90, 108, \dots$	$n = 0, 36, 72, 108, \dots, 36m$
100°	∇	$n = 9, 18, 27, 45, 54, 63, 81, \dots$	$n = 0, 18, 36, 54, \dots, 18m$
90°	∇	$n = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 18, \dots$	$n = 0, 4, 8, 12, 16, \dots, 4m$
80°	∇	$n = 9, 27, 45, 63, 81, \dots, 9 + 18m$	$n = 0, 9, 18, 27, \dots, 9m$
70°	∇	$n = 18, 36, 54, 72, 90, 108, \dots$	$n = 0, 36, 72, 108, \dots, 36m$
60°	∇	$n = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 27, \dots$	$n = 0, 6, 12, 18, 24, \dots, 6m$
50°	∇	$n = 18, 36, 54, 72, 90, 108, \dots$	$n = 0, 36, 72, 108, \dots, 36m$
40°	∇	$n = 9, 18, 27, 45, 54, 63, 81, \dots$	$n = 0, 9, 18, 27, \dots, 9m$
30°	∇	$n = 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, \dots$	$n = 0, 12, 24, 36, \dots, 12m$
20°	∇	$n = 9, 18, 27, 45, 54, 63, 81, \dots$	$n = 0, 18, 36, 54, \dots, 18m$
10°	∇	$n = 18, 36, 54, 72, 90, 108, \dots$	$n = 0, 36, 72, 108, \dots, 36m$

Verificamos, a partir das tabelas, que de uma geração para outra há um aumento no número de buracos na distribuição, para o caso em que  $\varepsilon = 1$ , ou seja,  $N$  aumentando “cava” buracos na distribuição, mas a fase “enterra” estes buracos, pois  $\theta$  varia no intervalo compreendido entre  $[\pi, 0]$ . Logo para valores de  $\theta$  próximos de zero devemos recuperar as propriedades do estado coerente. Concluimos que, podemos “cavar” buracos na distribuição, porém dependemos de valores grandes de  $\theta$ . No caso em que  $\varepsilon = -1$  não conseguimos “cavar” buracos e para o mesmo valor de  $\theta$  os buracos sempre ocorrem nos mesmos pontos independentemente de  $N$  e  $\alpha$ . Esta característica leva a uma situação curiosa, pois como os buracos ocorrem sempre nos mesmos pontos para um  $\theta$  fixo independentemente da geração, leva as seguintes distribuições  $P_1^{(-1)}(n, \alpha, \pi) = P_1^{(-2)}(n, \alpha, \pi)$  a uma igualdade. A Fig.(4.4) mostra alguns gráficos da distribuição para algumas gerações mostrando como a fase afeta a distribuição.

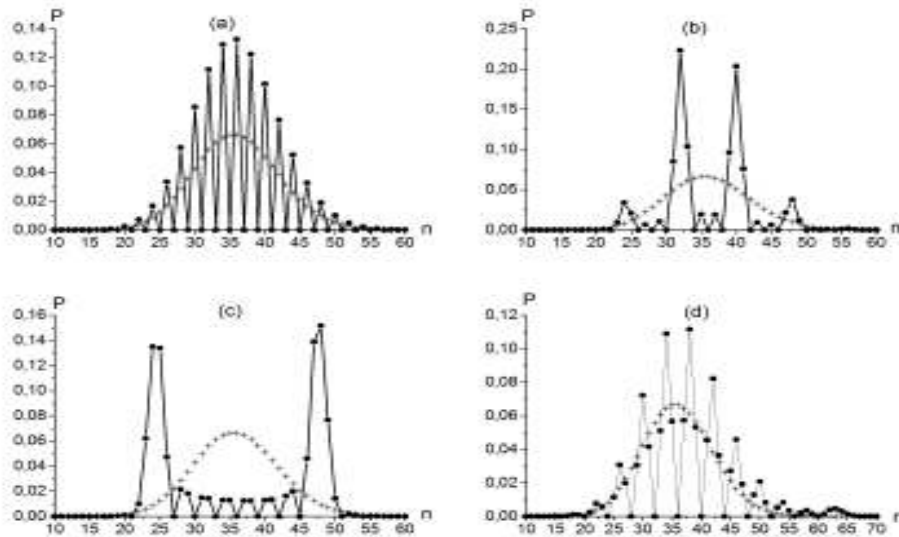


Figura 4.4: Gráficos mostrando o comportamento da distribuição para gerações posteriores. As cruces nos gráficos representam os pontos da distribuição do estado coerente. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\theta = 180^\circ$  e  $N = 1$ , (b)  $\theta = 90^\circ$  e  $N = 2$ , (c)  $\theta = 60^\circ$  e  $N = 3$  e (d)  $\theta = 45^\circ$  e  $N = 4$ . Em todos os gráficos  $\alpha = 6$  e  $\varepsilon = 1$ .

A partir do fato de que podemos “cavar” a distribuição ( $\varepsilon = 1$ ), notamos que para  $\theta = \pi$  o número de buracos era cada vez maior. Logo, a distribuição tende a do estado de número  $|2^N\rangle$ , para um valor conveniente de  $\alpha$  e neste caso verificamos que a distribuição estava passando por um processo denominado “escultura quântica” anteriormente estudado por Brune *et al*[22] e por Serra *et al* [25]. O presente esquema se mostra mais eficiente que em [22], pois no presente caso precisamos apenas de quatro átomos para esculpir a distribuição, já que no caso citado necessitava-se de no mínimo 20 átomos. A Fig.(4.5) revela como pode ser feita a escultura.

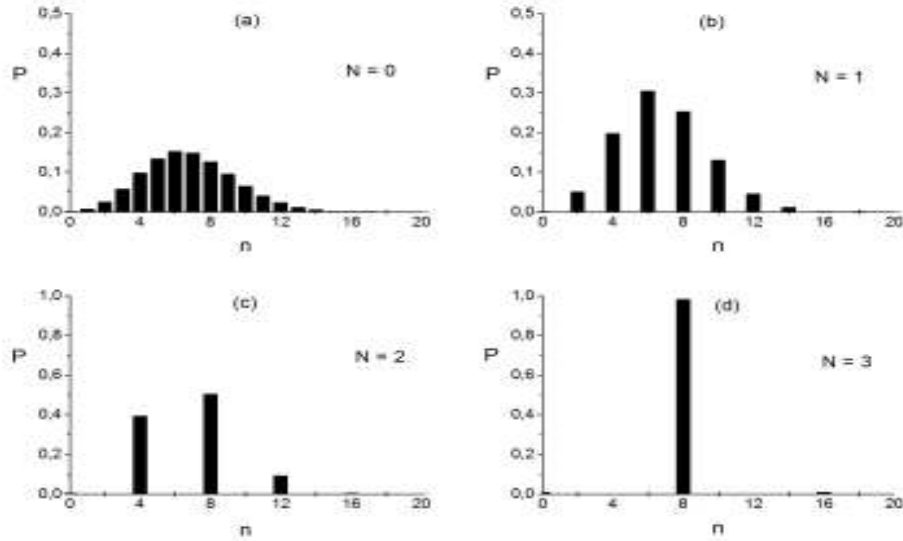


Figura 4.5: Gráficos mostrando o processo de escultura quântica. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\varepsilon = 1$  e  $\theta = 0$  (estado coerente), (b)  $\varepsilon = 1$  e  $\theta = \pi$  (gato par), (c)  $\varepsilon = 1$  e  $\theta = \pi$  e (d)  $\varepsilon = 1$  e  $\theta = \pi$ . Em todos os gráficos  $\alpha = 2.61$ .

## 4.2.2 Estatística sub-Poissoniana e Antiagrupamento de fótons

O importante papel das funções de normalização é mostrado a seguir, pois, notamos que podemos representar algumas das propriedades estatísticas em termos destas funções e de suas derivadas em relação a  $\alpha^2$ . Assim, o número médio de fótons e o número médio ao quadrado podem ser dados por :

$$\langle \hat{n} \rangle_N^{(\varepsilon)} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n^{(\varepsilon)}(n, \alpha) = \alpha^2 \frac{\mathcal{F}_N^{(1)(\varepsilon)}(\alpha^2, \theta)}{\mathcal{F}_N^{(\varepsilon)}(\alpha^2, \theta)}. \quad (4.21)$$

$$\langle \hat{n}^2 \rangle_N^{(\varepsilon)} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n^{(\varepsilon)}(n, \alpha) = \langle \hat{n} \rangle_N^{(\varepsilon)} + \alpha^4 \frac{\mathcal{F}_N^{(2)(\varepsilon)}(\alpha^2, \theta)}{\mathcal{F}_N^{(\varepsilon)}(\alpha^2, \theta)}, \quad (4.22)$$

onde deixaremos a demonstração das expressões acima para o apêndice B. O fator de Mandel, e a função de correlação de segunda ordem são obtidas na forma:

$$\begin{aligned} q_N^{(\varepsilon)}(\alpha, \theta) &= \frac{\langle \hat{n}^2 \rangle_N^{(\varepsilon)}}{\langle \hat{n} \rangle_N^{(\varepsilon)}} - \langle \hat{n} \rangle_N^{(\varepsilon)} - 1 \\ &= \alpha^2 \left[ \frac{\mathcal{F}_N^{(2)(\varepsilon)}(\alpha^2, \theta)}{\mathcal{F}_N^{(1)(\varepsilon)}(\alpha^2, \theta)} - \frac{\mathcal{F}_N^{(1)(\varepsilon)}(\alpha^2, \theta)}{\mathcal{F}_N^{(\varepsilon)}(\alpha^2, \theta)} \right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$g_N^{(2)(\varepsilon)}(\alpha, \theta, 0) = \frac{\langle \hat{n}^2 \rangle_N^{(\varepsilon)} - \langle \hat{n} \rangle_N^{(\varepsilon)}}{(\langle \hat{n} \rangle_N^{(\varepsilon)})^2} = \frac{\mathcal{F}_N^{(\varepsilon)}(\alpha^2, \theta) \mathcal{F}_N^{(2)(\varepsilon)}(\alpha^2, \theta)}{[\mathcal{F}_N^{(1)(\varepsilon)}(\alpha^2, \theta)]^2}. \quad (4.24)$$

As Figs.(4.6,4.7 e 4.8) mostram plots de  $q_1^{(\pm 1)}(\alpha, \theta)$ ,  $q_2^{(\pm 1)}(\alpha, \theta)$  e  $q_3^{(\pm 1)}(\alpha, \theta)$  respectivamente, ilustrando (em comparação com a característica Poissoniana do estado coerente  $|\alpha\rangle$ ,  $q = 0$ ) as regiões onde ocorrem estatística sub, super e Poissoniana em função dos parâmetros envolvidos. Para uma excitação crescente, as oscilações

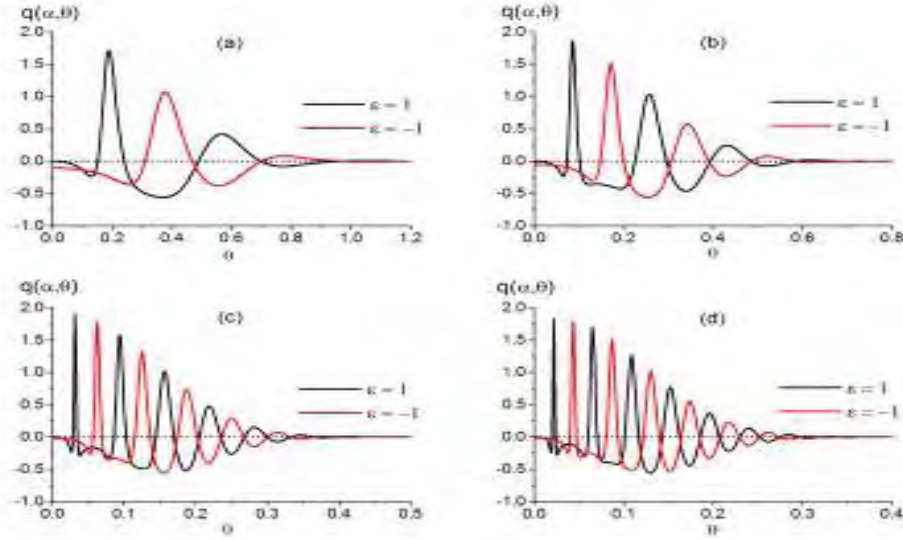


Figura 4.6: Gráficos exibindo oscilações no fator de Mandel em função da fase  $\theta$  para a primeira geração. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\alpha = 4$ , (b)  $\alpha = 6$ , (c)  $\alpha = 10$  e (d)  $\alpha = 12$ .

aumentam para um valor de  $N$  fixo. O que muda de uma geração para outra é o fato de que o caráter sub-Poissoniano fica mais evidente, como mostram os gráficos anteriores. As oscilações podem ser compreendidas a partir da interferência no espaço de fase (como na distribuição de número de fótons). Na investigação da estatística de número de fótons verificamos que para certos valores dos parâmetros envolvidos a distribuição era uma boa aproximação ao estado de número e mostramos como poderíamos esculpturar a distribuição para obter esta aproximação. O fator  $q$  tende para seu valor mínimo quando utilizamos os parâmetros dados na tabela abaixo, onde adotamos  $\theta = 180^\circ$ .

$N$	$\alpha_{N,Min}^{\varepsilon=1}$	$q_{N,Min}^{\varepsilon=1}$	$\langle \hat{n} \rangle_N^{\varepsilon=1}$	$P_N^{\varepsilon=1}(\alpha_{N,Min}^{\varepsilon=1})$
2	2.01	-0.221	4.241	0.799
3	2.61	-0.861	8.002	0.983
4	3.58	-0.999	16(6)	1(3)
5	4.96	-1(9)	32(8)	1(8)
6	7.33	-1(14)	64(13)	1(13)

A tabela a seguir mostra a influência da fase nas propriedades estatísticas, onde fizemos  $\theta = 170^\circ (\sim 0.95\pi)$ .

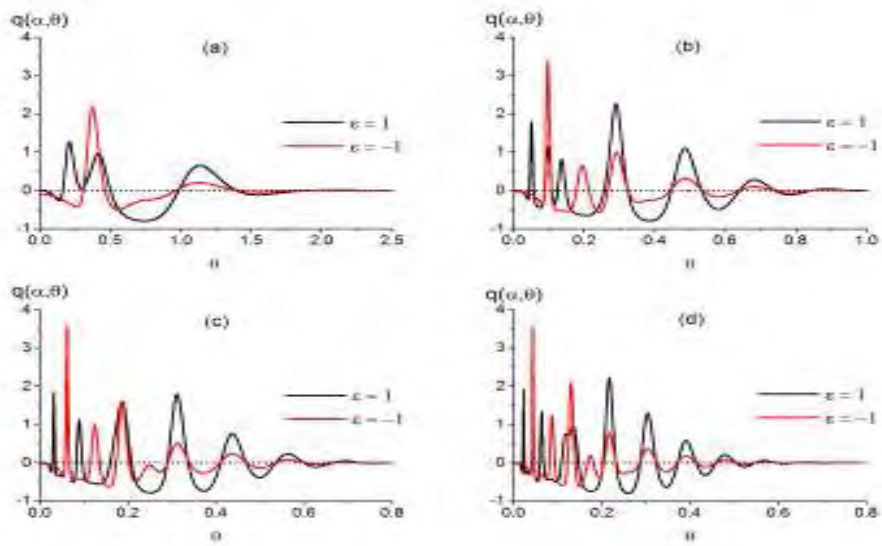


Figura 4.7: Gráficos exibindo oscilações no fator de Mandel em função da fase  $\theta$  para a segunda geração. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\alpha = 4$ , (b)  $\alpha = 6$ , (c)  $\alpha = 10$  e (d)  $\alpha = 12$ .

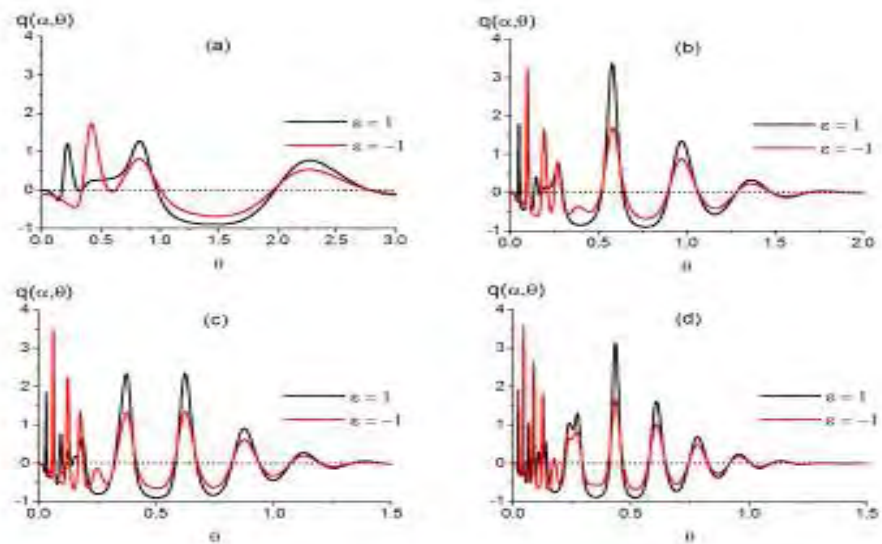


Figura 4.8: Gráficos exibindo oscilações no fator de Mandel em função da fase  $\theta$  para a terceira geração. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\alpha = 4$ , (b)  $\alpha = 6$ , (c)  $\alpha = 10$  e (d)  $\alpha = 12$ .

N	$\alpha_{N,Min}^{\varepsilon=1}$	$q_{N,Min}^{\varepsilon=1}$	$\langle \hat{n} \rangle_N^{\varepsilon=1}$	$P_N^{\varepsilon=1}(\alpha_{N,Min}^{\varepsilon=1})$
2	2.01	-.226	4.268	0.686
3	2.61	-.772	8.198	0.520
4	3.58	-.872	16.641	0.911
5	4.96	-.855	33.246	0.827
6	7.33	-.900	67.189	0.732

Fica claro que pequenas variações na fase perturbam sensivelmente as propriedades estatísticas. As Figs. (4.9, 4.10 e 4.11) exibem gráficos da função de correlação de segunda ordem em função da fase  $\theta$  para a primeira, segunda e terceira geração, onde as oscilações podem ser explicadas baseado na interferencia no espaço de fase. Como no fator  $q$ , a excitação do campo aumenta consideravelmente as oscilações na função de correlação, sempre tendendo ao valor limite do estado coerente. Note que a principal diferença entre uma geração e a outra é que o efeito de antiagrupamento se torna mais evidente ( fato este também verificado no fator  $q$  conforme esperado). Note que na Fig. (4.10) os gráficos mostram ser mais evidente o efeito de antiagrupamento. Uma diferença marcante nestes gráficos é que à medida que passamos de uma geração seguinte para outra as oscilações diminuem, como se a excitação do campo não fosse responsável pelo aumento das oscilações.

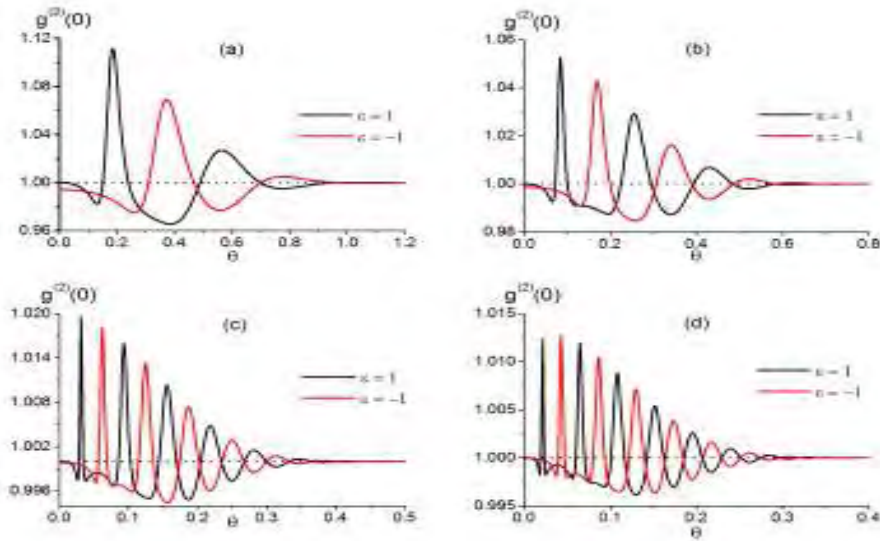


Figura 4.9: Gráficos exibindo oscilações na função de correlação de segunda ordem em função da fase  $\theta$  para a primeira geração. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\alpha = 4$ , (b)  $\alpha = 6$ , (c)  $\alpha = 10$  e (d)  $\alpha = 12$ .

Investigando detalhadamente várias gerações observamos que as características essenciais dos efeitos citados não mudam. As correspondentes funções de normalização possuem mais termos e as oscilações ficam mais acentuadas para as gerações posteriores, dependendo crucialmente da excitação do campo. As propriedades estatísticas dos estados mostram que dois efeitos quânticos ocorrem simultaneamente: estatística sub-Poissoniana e antiagrupamento de fótons. No presente caso eles ocor-

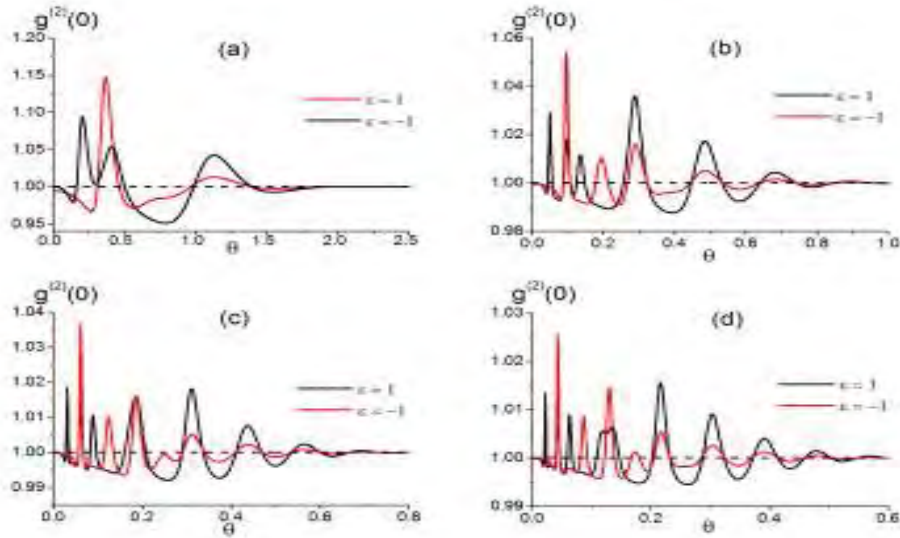


Figura 4.10: Gráficos exibindo oscilações na função de correlação de segunda ordem em função da fase  $\theta$  para a segunda geração. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\alpha = 4$ , (b)  $\alpha = 6$ , (c)  $\alpha = 10$  e (d)  $\alpha = 12$ .

rem no mesmo domínio da fase  $\theta$ , como em [24]. Esta característica já foi verificada outras vezes na literatura em [26] e [27].

### 4.3 Resumo e conclusões

Baseado no modelo de Jaynes-Cummings[11], propomos um esquema experimental capaz de gerar a **ASCCS**. Neste esquema, um átomo de prova é emitido por um fonte S, no estado excitado  $|e\rangle$ , e interage com o campo presente na primeira zona de Ramsey. Após esta interação, o estado atômico é modificado levando-o a superposição  $(|e\rangle + |g\rangle)$ . A seguir ele atravessa a cavidade C, onde a interação entre o mesmo e o campo presente na cavidade produz uma fase  $\theta$  no campo se o estado atômico for  $|e\rangle$ , não produzindo nenhum efeito no caso oposto. Após atravessar a cavidade C o átomo atravessa outra zona de Ramsey modificando seus estados atômicos levando a seguinte situação:  $|e\rangle \rightarrow (1/\sqrt{2})(|g\rangle + |e\rangle)$  e  $|g\rangle \rightarrow (1/\sqrt{2})(|g\rangle - |e\rangle)$ . Logo, o estado do átomo pode ser detectado em  $|e\rangle$  ou  $|g\rangle$  colapsando o campo na cavidade em uma superposição assimétrica de estados do tipo gato. A passagem de  $N$  átomos neste aparato produz o estado proposto nesta dissertação. A normalização do estado foi calculada e expressa em termos de funções que se mostraram úteis na investigação das propriedades estatísticas. Ao analisar as propriedades estatísticas percebemos que o aumento da excitação do campo evidencia a ocorrência dos efeitos estudados (oscilações na distribuição de número de fótons, antiagrupamento e estatística sub-Poissoniana) independentemente de  $\theta$ ,  $N$  e  $\varepsilon$ . A passagem de mais átomos na cavidade, “cava” buracos na distribuição (somente para  $\varepsilon = 1$  e  $\theta$  grande) e a partir desta característica conseguimos esculpturar a distribuição levando à uma aproximação ao estado  $|2^N\rangle$ . Esta característica não só afeta a distribuição, como também

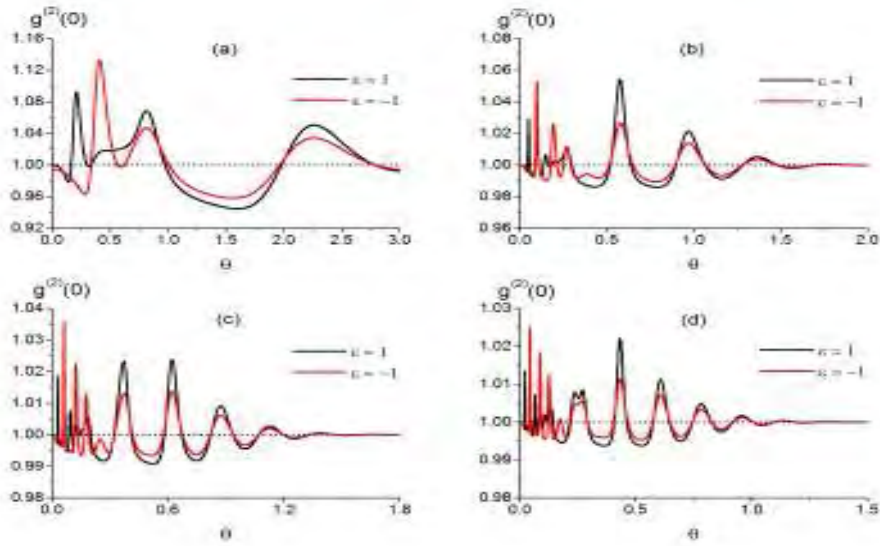


Figura 4.11: Gráficos exibindo oscilações na função de correlação de segunda ordem em função da fase  $\theta$  para a terceira geração. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\alpha = 4$ , (b)  $\alpha = 6$ , (c)  $\alpha = 10$  e (d)  $\alpha = 12$ .

o  $q_N^{(\varepsilon)}(\alpha, \theta)$  e a  $g_N^{(2)(\varepsilon)}(\alpha, \theta, 0)$  levando ambos a terem as propriedades do estado  $|2^N\rangle$ . Já o caso em que  $\varepsilon = -1$ , a passagem de mais átomos na cavidade não implica em um aumento no número de buracos nem exibi estatística sub-Poissoniana e antiagrupamento de fótons máximos. Finalmente, podemos afirmar que as propriedades estatísticas não caracterizam bem um estado, pois dependem unicamente dos elementos diagonais da matriz densidade. Um exemplo deste fato é que encontramos estados distintos com mesma estatística. Assim,  $P_1^{(-1)}(n, \pi, \alpha) = P_2^{(-1)}(n, \pi, \alpha)$ ,  $q_1^{(-1)}(\pi, \alpha) = q_2^{(-1)}(\pi, \alpha)$  e  $g_1^{(2)(-1)}(\alpha, \pi, 0) = g_2^{(2)(-1)}(\alpha, \pi, 0)$ . Este fato se deve à igualdade dos elementos diagonais da matriz densidade dos estados. Mas, se as propriedades estatísticas não caracterizam completamente um estado como poderemos diferenciá-los? Nos próximos capítulos apresentaremos duas maneiras distintas de fazê-lo.

# Capítulo 5

## Compressão do ruído quântico (squeezing) e inversão atômica

Neste capítulo, investigamos a ocorrência da compressão do ruído quântico e de colapsos e resurgimentos na inversão atômica. Novamente, verificamos como os parâmetros envolvidos influenciam esses efeitos. Na seção (5.1) calculamos a variância nas quadraturas e mostramos como o squeezing ocorre, usamos este efeito para diferenciar dois estados distintos com mesmas propriedades estatísticas. Na seção (5.2) calculamos a inversão atômica para nosso estado e verificamos a ocorrência dos colapsos e resurgimentos na inversão atômica. Investigamos também como ocorre a transição entre o gato de Schrödinger e o estado coerente de uma maneira distinta da obtida na Ref. [18].

### 5.1 Compressão do ruído quântico

Considerando as propriedades de um único modo do campo os operadores de quadratura podem ser escritos como [5]

$$\hat{x}_1 = \hat{a} + \hat{a}^\dagger, \quad \hat{x}_2 = (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)/i, \quad (5.1)$$

e sua relação de comutação, em unidades de  $\hbar$ , é

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = 2i. \quad (5.2)$$

Logo, o princípio da incerteza requer que suas variâncias satisfaçam

$$\langle (\Delta \hat{x}_1)^2 \rangle \cdot \langle (\Delta \hat{x}_2)^2 \rangle \geq 1 \quad (5.3)$$

onde a igualdade é satisfeita para estados de mínima incerteza, como o vácuo ou o estado coerente, para os quais ambas as variâncias nas quadraturas são iguais a 1. Compressão de ruído, abaixo daquele do vácuo, ocorre quando  $\langle (\Delta \hat{x}_1)^2 \rangle$  ou  $\langle (\Delta \hat{x}_2)^2 \rangle$  é menor que 1 a outra sendo maior que 1. Por definição, a variância em  $\hat{A}$  é dada por

$$\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2, \quad (5.4)$$

Como  $\hat{x}_1$  e  $\hat{x}_2$  são definidos em termos dos operadores de criação e aniquilação de fótons, podemos escrever expressões gerais para a variância. Logo teremos que:

$$\hat{x}_k = i^{(1-k)}[\hat{a} - (-1)^k \hat{a}^\dagger] \quad (5.5)$$

e

$$\hat{x}_k^2 = i^{2(1-k)}\{\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} - (-1)^k[\hat{1} + 2\hat{a}^\dagger \hat{a}]\}. \quad (5.6)$$

A variância é escrita na forma

$$\langle (\Delta \hat{x}_k)^2 \rangle = \langle \hat{x}_k^2 \rangle - \langle \hat{x}_k \rangle^2 \quad (5.7)$$

onde  $k$  indica a correspondente quadratura (1 ou 2). Logo, após longa álgebra, encontramos  $\langle \hat{x}_k \rangle$  e  $\langle \hat{x}_k^2 \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}_k \rangle_N^{(\varepsilon)} &= i^{(1-k)} C \sum_{j,j'=0}^{Jm} \{ e^{\alpha^2 \cos[(j-j')\theta/2^{N-1}]} [ e^{i\{(j\theta/2^{N-1})+\alpha^2 \sin[(j-j')\theta/2^{N-1}]\}} \\ &+ e^{i\{(1+j/2^{N-1})\theta+\alpha^2 \sin[(j-j')\theta/2^{N-1}]\}} \\ &- (-1)^k ( e^{-i\{(j'\theta/2^{N-1})+\alpha^2 \sin[(j-j')\theta/2^{N-1}]\}} \\ &+ e^{-i\{(1+j'/2^{N-1})\theta+\alpha^2 \sin[(j-j')\theta/2^{N-1}]\}} ) ] \\ &+ \varepsilon e^{\alpha^2 \cos[\theta-(j-j')\theta/2^{N-1}]} [ e^{i\{(j\theta/2^{N-1})-\alpha^2 \sin[\theta-(j-j')\theta/2^{N-1}]\}} \\ &- (-1)^k e^{-i\{(j'\theta/2^{N-1})-\alpha^2 \sin[\theta-(j-j')\theta/2^{N-1}]\}} ] \\ &+ \varepsilon e^{\alpha^2 \cos[\theta+(j-j')\theta/2^{N-1}]} [ e^{i\{(1+j/2^{N-1})\theta+\alpha^2 \sin[\theta+(j-j')\theta/2^{N-1}]\}} \\ &- (-1)^k e^{-i\{(1+j'/2^{N-1})\theta+\alpha^2 \sin[\theta+(j-j')\theta/2^{N-1}]\}} ] \}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}_k^2 \rangle_N^{(\varepsilon)} &= i^{2(1-k)} C_1 \sum_{j,j'=0}^{Jm} \{ e^{\alpha^2 \cos[(j-j')\theta/2^{N-1}]} [ e^{i\{(2j\theta/2^{N-1})+\alpha^2 \sin[(j-j')\theta/2^{N-1}]\}} \\ &+ e^{i\{2(1+j/2^{N-1})\theta+\alpha^2 \sin[(j-j')\theta/2^{N-1}]\}} \\ &(-1)^k ( e^{-i\{(2j'\theta/2^{N-1})+\alpha^2 \sin[(j-j')\theta/2^{N-1}]\}} \\ &+ e^{-i\{2(1+j'/2^{N-1})\theta+\alpha^2 \sin[(j-j')\theta/2^{N-1}]\}} ) ] \\ &+ \varepsilon e^{\alpha^2 \cos[\theta-(j-j')\theta/2^{N-1}]} [ e^{i\{(2j\theta/2^{N-1})-\alpha^2 \sin[\theta-(j-j')\theta/2^{N-1}]\}} \\ &- (-1)^k e^{-i\{(2j'\theta/2^{N-1})-\alpha^2 \sin[\theta-(j-j')\theta/2^{N-1}]\}} ] \\ &+ \varepsilon e^{\alpha^2 \cos[\theta+(j-j')\theta/2^{N-1}]} [ e^{i\{2(1+j/2^{N-1})\theta+\alpha^2 \sin[\theta+(j-j')\theta/2^{N-1}]\}} \\ &- (-1)^k e^{-i\{2(1+j'/2^{N-1})\theta+\alpha^2 \sin[\theta+(j-j')\theta/2^{N-1}]\}} ] \} \\ &- (-1)^k [ 4e^{\alpha^2 \cos[(j-j')\theta/2^{N-1}]} \cos[(j-j')\theta/2^{N-1} \\ &+ \alpha^2 \sin[(j-j')\theta/2^{N-1}] \\ &+ 4e^{\alpha^2 \cos[\theta+(j-j')\theta/2^{N-1}]} \cos\{[\theta+(j-j')\theta/2^{N-1}] \\ &+ \alpha^2 \sin[\theta+(j-j')\theta/2^{N-1}]\} + 1 ] \} \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde  $C = \alpha e^{-\alpha^2} \mathcal{N}_N^{\varepsilon^2}(\alpha)$  e  $C_1 = \alpha^2 e^{-\alpha^2} \mathcal{N}_N^{\varepsilon^2}(\alpha)$ . O detalhamento destas contas esta no Apêndice C. Explicitando o valor de  $N$  e  $k$  nas expressões anteriores temos, para a primeira geração:

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}_1 \rangle_1^{(\varepsilon)} &= 2\alpha e_1^{-\alpha^2} \mathcal{N}_N^{2(\varepsilon)}(\alpha) \{ e^{\alpha^2} + e^{\alpha^2} \cos(\theta) + \varepsilon e^{\alpha^2 \cos(\theta)} [\cos(\alpha^2 \sin(\theta)) \\ &\quad \times (1 + \cos(\theta)) - \sin(\theta) \sin(\alpha^2 \sin(\theta))] \}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}_1^2 \rangle_1^{(\varepsilon)} &= 4\alpha^2 e^{-\alpha^2} \mathcal{N}_N^{2(\varepsilon)} \{ e^{\alpha^2} + e^{\alpha^2} \cos^2(\theta) + \varepsilon e^{\alpha^2 \cos(\theta)} [\cos(\alpha^2 \sin(\theta)) \\ &\quad \times (\cos^2(\theta) + \cos(\theta)) - \sin(\theta) \sin(\alpha^2 \sin(\theta)) \\ &\quad (1 + \cos(\theta))] \} + 1, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}_2 \rangle_1^{(\varepsilon)} &= 2\alpha e^{-\alpha^2} \mathcal{N}_N^{2(\varepsilon)} \{ e^{\alpha^2} \sin(\theta) - \varepsilon e^{\alpha^2 \cos(\theta)} [\sin(\alpha^2 \sin(\theta)) \\ &\quad \times (1 - \cos(\theta)) + \sin(\theta) \cos(\alpha^2 \sin(\theta))] \}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}_2^2 \rangle_1^{(\varepsilon)} &= -4\alpha^2 e^{-\alpha^2} \mathcal{N}_N^{2(\varepsilon)} \{ -e^{\alpha^2} + e^{\alpha^2} \cos^2(\theta) + \varepsilon e^{\alpha^2 \cos(\theta)} [\cos(\alpha^2 \sin(\theta)) \\ &\quad \times (\cos^2(\theta) + \cos(\theta)) - \sin(\theta) \sin(\alpha^2 \sin(\theta)) \\ &\quad (1 + \cos(\theta))] \} + 1. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Novamente, omitimos as expressões para as gerações posteriores devido a sua extensão. As Figs. (5.1, 5.3, 5.5) exibem gráficos da variância para a primeira, segunda e terceira geração mostrando a ocorrência do efeito de compressão na quadratura  $\hat{x}_1$  e as Figs.(5.2 e 5.4) mostram em que regiões os estados são de mínima incerteza. Como  $\theta$  está contido num dominio que interpola entre o estado coerente e os estados de superposição, os gráficos foram feitos tomando  $\theta$  como variável e  $\alpha$  fixo. A tabela abaixo mostra a influencia de  $\alpha$  e  $\varepsilon$  sobre a variância na quadratura  $\hat{x}_1$  para a primeira geração.

$\alpha$	$\langle (\Delta \hat{x}_{1,\min})^2 \rangle_1^{-1}$	$\theta(rad)$	$\langle (\Delta \hat{x}_{1,\min})^2 \rangle_1^{-1}$	$\theta$
5	0.517376	0.269202, $\simeq 15^\circ$	0.609596	0.37066, $\simeq 21^\circ$
6	0.555883	0.198353, $\simeq 11^\circ$	0.486394	0.26278, $\simeq 15^\circ$
7	0.517541	0.225738, $\simeq 13^\circ$	0.489631	0.19857, $\simeq 11^\circ$
8	0.467499	0.197252, $\simeq 11^\circ$	0.524596	0.15701, $\simeq 9^\circ$
9	0.475146	0.157788, $\simeq 9^\circ$	0.483974	0.19392, $\simeq 11^\circ$
10	0.504025	0.131384, $\simeq 7^\circ$	0.458781	0.15766, $\simeq 9^\circ$
12	0.454077	0.131278, $\simeq 7^\circ$	0.489985	0.11130, $\simeq 6^\circ$
14	0.480166	0.097365, $\simeq 5^\circ$	0.451255	0.11245, $\simeq 6^\circ$
16	0.449432	0.098352, $\simeq 5^\circ$	0.468126	0.11048, $\simeq 6^\circ$
18	0.462045	0.096997, $\simeq 5^\circ$	0.448183	0.08739, $\simeq 5^\circ$
20	0.447293	0.078634, $\simeq 4^\circ$	0.457834	0.08642, $\simeq 4^\circ$
30	0.448524	0.055865, $\simeq 3^\circ$	0.445191	0.05238, $\simeq 3^\circ$

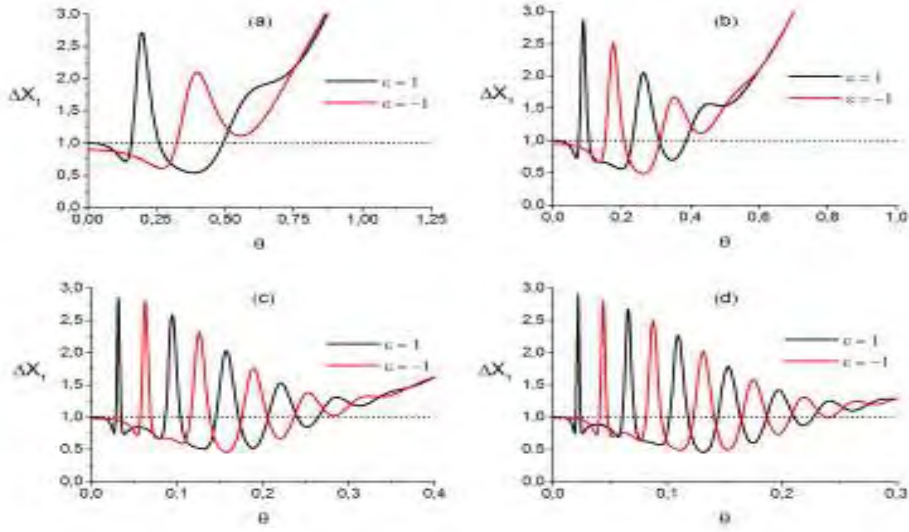


Figura 5.1: Gráficos exibindo oscilações entre squeezing e anti-squeezing na quadratura  $x_1$  para a primeira geração. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\alpha = 4$ , (b)  $\alpha = 6$ , (c)  $\alpha = 10$  e (d)  $\alpha = 12$ .

Para a segunda geração, o efeito de compressão se torna mais acentuado e comparamos com os mesmos valores de  $\alpha$  e  $\varepsilon$  da primeira geração. A tabela abaixo mostra os resultados obtidos.

$\alpha$	$\langle (\Delta \hat{x}_{1,\min})^2 \rangle_2^{-1}$	$\theta(\text{rad})$	$\langle (\Delta \hat{x}_{1,\min})^2 \rangle_2^{-1}$	$\theta$
5	0.696799	0.097325, $\simeq 5^\circ$	0.605868	0.18481, $\simeq 10^\circ$
6	0.516791	0.134049, $\simeq 7^\circ$	0.455928	0.24975, $\simeq 14^\circ$
7	0.442191	0.263101, $\simeq 15^\circ$	0.434638	0.19288, $\simeq 11^\circ$
8	0.402352	0.210412, $\simeq 12^\circ$	0.456464	0.15445, $\simeq 8^\circ$
9	0.409658	0.169887, $\simeq 9^\circ$	0.487751	0.12604, $\simeq 7^\circ$
10	0.434158	0.139299, $\simeq 7^\circ$	0.430683	0.15879, $\simeq 9^\circ$
12	0.340845	0.178856, $\simeq 10^\circ$	0.417935	0.15112, $\simeq 8^\circ$
14	0.329246	0.132049, $\simeq 7^\circ$	0.370967	0.11105, $\simeq 6^\circ$
16	0.306506	0.149569, $\simeq 8^\circ$	0.392827	0.08560, $\simeq 4^\circ$
18	0.290809	0.118255, $\simeq 6^\circ$	0.387511	0.08795, $\simeq 5^\circ$
20	0.281959	0.127013, $\simeq 7^\circ$	0.371232	0.08586, $\simeq 4^\circ$
30	0.267593	0.070299, $\simeq 4^\circ$	0.359231	0.05211, $\simeq 2^\circ$

Poderíamos ser levados a pensar, em função dos resultados obtidos nas tabelas anteriores que o efeito se tornaria maior para gerações posteriores. Este resultado não ocorre, pois há uma saturação do efeito a partir da terceira geração. As oscilações nos gráficos são consequências, novamente, da interferência no espaço de fase, como no caso do fator de Mandel e da função de correlação de segunda ordem. A excitação do campo produz um aumento nas oscilações como nos dois efeitos citados. O parâmetro  $\varepsilon$  não modifica a natureza destas oscilações, como podemos perceber nos os gráficos anteriores. A fase tem um papel muito importante, pois em

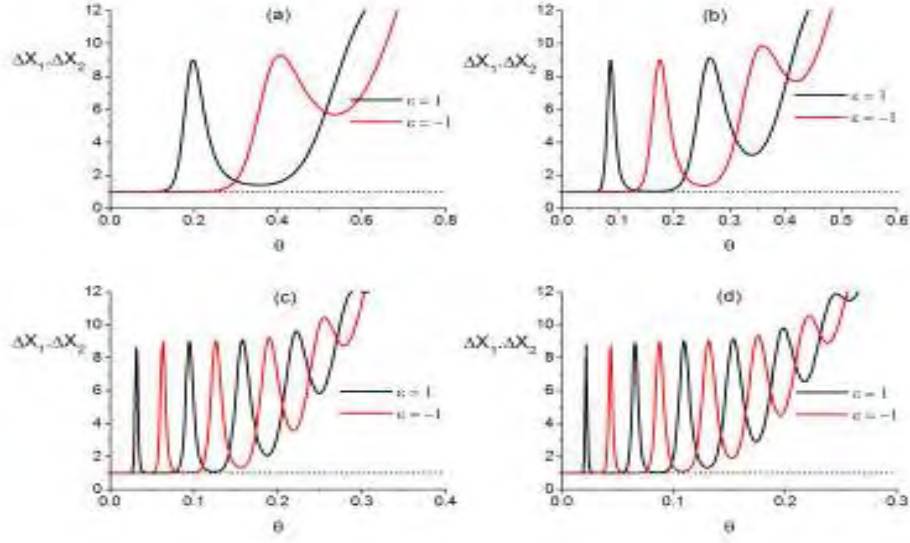


Figura 5.2: Gráficos mostrando o produto das variâncias, para a primeira geração, que nos diz se o estado é ou não de mínima incerteza. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\alpha = 4$ , (b)  $\alpha = 6$ , (c)  $\alpha = 10$  e (d)  $\alpha = 12$ .

um certo sub-domínio de  $\theta$  os gráficos são idênticos aos encontrados para o fator de Mandel e a função de correlação de segunda ordem. Este resultado já foi encontrado na literatura [24] e no presente caso ele ocorre em todas as gerações. O melhor valor para o squeezing ocorre para  $\alpha = 30$  fornecendo  $\langle(\Delta\hat{x}_{1,\min})^2\rangle_2^{(1)} = 0.267593$  para  $\theta = 0.070299 (\simeq 4^\circ)$ .

No capítulo anterior comentamos que as propriedades estatísticas não caracterizam completamente os estados do campo eletromagnético, onde mostramos exemplos de estados distintos que possuem mesma estatística. A seguir mostraremos uma forma de diferenciar estes estados. Tomando  $N = 1$ ,  $\theta = \pi$ ,  $k = 1$  e  $\varepsilon = -1$  nas Eqs.(5.8 e 5.9) e substituindo este resultado na Eq. (5.7) obtemos a variância

$$\Delta\hat{x}_1(\alpha)_1^{-1} = 1 + \frac{2\alpha^2 e^{\alpha^2}}{\sinh(\alpha^2)}. \quad (5.14)$$

Adotando o mesmo procedimento, para os seguintes valores,  $N = 2$ ,  $\theta = \pi$ ,  $k = 1$  e  $\varepsilon = -1$ , temos que a variância resulta,

$$\Delta\hat{x}_1(\alpha)_2^{-1} = 1 + \frac{2\alpha^2 \cosh(\alpha^2)}{\sinh(\alpha^2)}. \quad (5.15)$$

Portanto, a variância nas quadraturas, é uma das alternativas que permitem diferenciar os dois estados de mesma estatística.

## 5.2 Inversão Atômica

A interação de um único modo do campo com a transição atômica é descrita pelo modelo de Jaynes-Cummings [11], onde a Hamiltoniana que descreve este sistema é

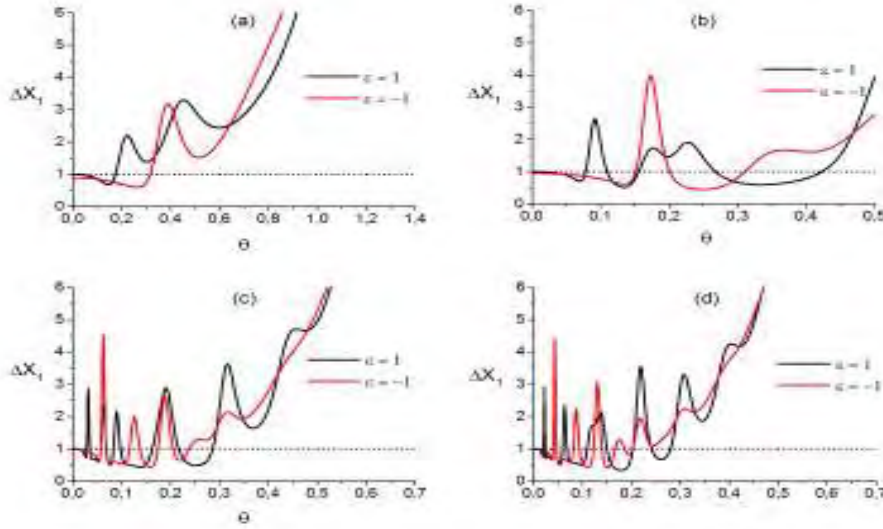


Figura 5.3: Gráficos exibindo oscilações entre comprimido e anticomprimido na quadratura  $x_1$  para a segunda geração. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\alpha = 4$ , (b)  $\alpha = 6$ , (c)  $\alpha = 10$  e (d)  $\alpha = 12$ .

dada por

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_3 + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-), \quad (5.16)$$

onde  $\omega_0$  é a frequência de transição entre o estado atômico excitado e o fundamental ( $\hbar\omega_0 = E_{|e\rangle} - E_{|f\rangle}$ ),  $\omega$  é a frequência do modo do campo e  $\lambda$  é a constante de acoplamento átomo-campo. Na equação anterior,  $\hat{\sigma}_3$  é a matriz de Pauli e  $\hat{\sigma}_+$  e  $\hat{\sigma}_-$  correspondem aos operadores de levantamento e abaixamento na base atômica de dois níveis, que são dados por

$$\hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Se assumirmos que inicialmente o átomo esteja em uma superposição normalizada de seus estados fundamental e excitado,  $|\Psi_A(0)\rangle = C_g|g\rangle + C_e|e\rangle$  e que o campo seja descrito por sua matriz densidade  $\hat{\rho}_F(0)$ , tal que  $\hat{\rho}_{AF}(0) = |\Psi_A(0)\rangle\langle\Psi_A(0)| \otimes \hat{\rho}_F(0)$  a inversão atômica pode ser escrita para o caso de ressonância entre a transição atômica e a frequência do campo por [28]

$$\begin{aligned} w_0(t) &= |C_e|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2\lambda t\sqrt{n+1}) \langle n | \hat{\rho}_F(0) | n \rangle \\ &\quad - |C_g|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2\lambda t\sqrt{n}) \langle n | \hat{\rho}_F(0) | n \rangle \\ &\quad + 2|C_e||C_g| \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\phi + \gamma_n) \sin(2\lambda t\sqrt{n+1}) \\ &\quad \times |\langle n | \hat{\rho}_F(0) | n' \rangle| \end{aligned} \quad (5.18)$$

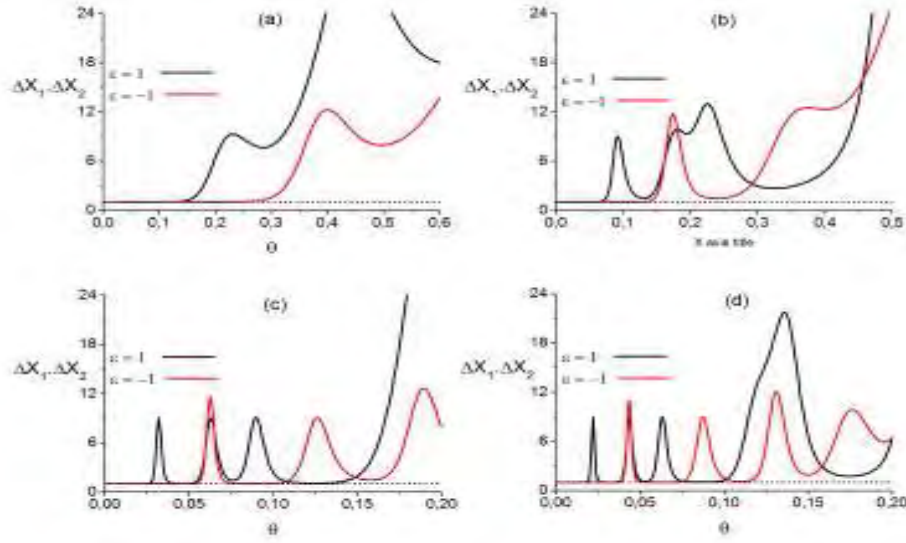


Figura 5.4: Gráficos mostrando o produto das variâncias, para a segunda geração, que nos diz se o estado é ou não de mínima incerteza. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\alpha = 4$ , (b)  $\alpha = 6$ , (c)  $\alpha = 10$  e (d)  $\alpha = 12$ .

onde  $\phi$  e  $\gamma_n$  são definidos como sendo  $C_e C_g^* = |C_e| |C_g| \exp(-i\phi)$  e  $\hat{\rho}_{n,n'}(0) = |\hat{\rho}_{n,n'}(0)| \exp(-i\gamma_n)$  e  $n' = n + 1$ . Portanto, nos resta encontrar os elementos não diagonais da matriz densidade, já que os diagonais são dados por  $\hat{\rho}_{n,n}(0) = P_N^\varepsilon(n, \alpha, \theta)$ . O operador densidade no presente caso é dado por

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{ASCCS}(0) = \mathcal{N}_N^{2(\varepsilon)}(\alpha) \sum_{j,j'=0}^{Jm} [ & |e^{i\theta} \alpha_j\rangle \langle \alpha_{j'} e^{i\theta}| + |\alpha_j\rangle \langle \alpha_{j'}| \\ & + \varepsilon(|e^{i\theta} \alpha_j\rangle \langle \alpha_{j'}| + |\alpha_j\rangle \langle \alpha_{j'} e^{i\theta}|)], \end{aligned} \quad (5.19)$$

onde  $\alpha_j = \alpha \exp(i\theta j/2^{N-1})$ ,  $Jm = 2^{N-1} - 1$ , com  $\alpha \in R^+$ , e  $\varepsilon = \pm 1$ . Utilizando a relação  $\langle n | \alpha \rangle = e^{-\alpha^2/2} \alpha^n / \sqrt{n!}$ , temos que  $\hat{\rho}_{n,n'}(0) = \langle n | \hat{\rho}_{ASCCS}(0) | n' \rangle$ , logo teremos após uma simples algebra que

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{n,n'}(0) = \frac{|\mathcal{N}_N^{2(\varepsilon)}(\alpha)|^2 \alpha^{n+n'}}{\sqrt{n!n'}} [ & 1 + e^{i(n-n')\theta} + \varepsilon(e^{in\theta} + e^{-in\theta})] \\ & \times \sum_{j,j'=0}^{Jm} e^{i(nj-n'j')\theta/2^{N-1}}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Mas sabemos que  $\hat{\rho}_{n,n'}(0) = |\hat{\rho}_{n,n'}(0)| \exp(-i\gamma_n)$ , portanto podemos simplificar a expressão acima e encontrar a expressão de  $\gamma_n$ . Com a ajuda de  $z = a + ib$ ,  $z = |z| e^{i\phi}$ ,  $\phi = \arctan(b/a)$ ,  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  e separando a parte real da parte imaginaria na

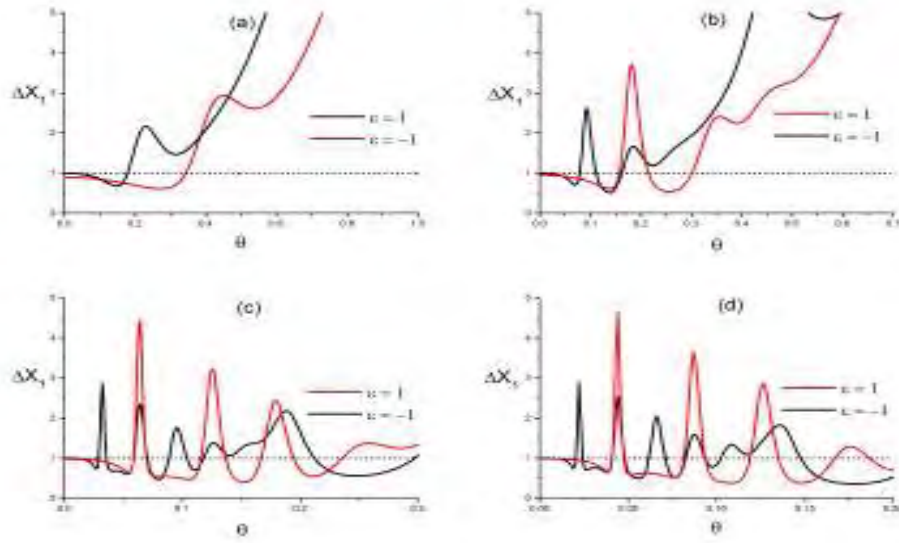


Figura 5.5: Gráficos exibindo oscilações entre comprimido e anticomprimido na quadratura  $x_1$  para a terceira geração. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\alpha = 4$ , (b)  $\alpha = 6$ , (c)  $\alpha = 10$  e (d)  $\alpha = 12$ .

equação anterior teremos que

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{|\mathcal{N}_N^{2(\varepsilon)}(\alpha)|^2 \alpha^{n+n'}}{\sqrt{n!n'}} \{1 + \cos[(n - n')\theta] + \varepsilon[\cos(n\theta) + \cos(n'\theta)]\} \\
 &\times \sum_{j,j'=0}^{Jm} \cos[(nj - n'j')\theta/2^{N-1}] \\
 &- \{\sin[(n - n')\theta] + \varepsilon[\sin(n\theta) - \sin(n'\theta)]\} \\
 &\times \sum_{j,j'=0}^{Jm} \sin[(nj - n'j')\theta/2^{N-1}], \tag{5.21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{|\mathcal{N}_N^{2(\varepsilon)}(\alpha)|^2 \alpha^{n+n'}}{\sqrt{n!n'}} \{1 + \cos[(n - n')\theta] + \varepsilon[\cos(n\theta) + \cos(n'\theta)]\} \\
 &\times \sum_{j,j'=0}^{Jm} \sin[(nj - n'j')\theta/2^{N-1}] \\
 &+ \{\sin[(n - n')\theta] + \varepsilon[\sin(n\theta) - \sin(n'\theta)]\} \\
 &\times \sum_{j,j'=0}^{Jm} \cos[(nj - n'j')\theta/2^{N-1}]. \tag{5.22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_n(\theta)_N^\varepsilon &= -\arctan\left\{\left\{[1 + \cos((n - n')\theta) + \varepsilon(\cos(n\theta) + \cos(n'\theta))]\right.\right. \\
&\quad \times \sum_{j,j'=0}^{Jm} \sin[(nj - n'j')\theta/2^{N-1}] \\
&\quad + [\sin((n - n')\theta) + \varepsilon(\sin(n\theta) - \sin(n'\theta))] \\
&\quad \times \sum_{j,j'=0}^{Jm} \cos[(nj - n'j')\theta/2^{N-1}]\left.\right\} / \\
&\quad \left\{[1 + \cos((n - n')\theta) + \varepsilon(\cos(n\theta) + \cos(n'\theta))]\right. \\
&\quad \times \sum_{j,j'=0}^{Jm} \cos[(nj - n'j')\theta/2^{N-1}] \\
&\quad - [\sin((n - n')\theta) + \varepsilon(\sin(n\theta) - \sin(n'\theta))] \\
&\quad \left.\times \sum_{j,j'=0}^{Jm} \sin[(nj - n'j')\theta/2^{N-1}]\right\}, \tag{5.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{n,n'}(0) &= \frac{\left|\mathcal{N}_N^{2(\varepsilon)}(\alpha)\right|^2 \alpha^{n+n'}}{\sqrt{n!n'}} \left\{\left\{[1 + \cos((n - n')\theta) + \varepsilon(\cos(n\theta) + \cos(n'\theta))]\right.\right. \\
&\quad \times \sum_{j,j'=0}^{Jm} \cos[(nj - n'j')\theta/2^{N-1}] \\
&\quad - [\sin((n - n')\theta) + \varepsilon(\sin(n\theta) - \sin(n'\theta))] \\
&\quad \times \sum_{j,j'=0}^{Jm} \sin[(nj - n'j')\theta/2^{N-1}]\left.\right\}^2 \\
&\quad + \left\{[1 + \cos((n - n')\theta) + \varepsilon(\cos(n\theta) + \cos(n'\theta))]\right. \\
&\quad \times \sum_{j,j'=0}^{Jm} \sin[(nj - n'j')\theta/2^{N-1}] \\
&\quad + [\sin((n - n')\theta) + \varepsilon(\sin(n\theta) - \sin(n'\theta))] \\
&\quad \left.\times \sum_{j,j'=0}^{Jm} \cos[(nj - n'j')\theta/2^{N-1}]\right\}^{1/2} \tag{5.24}
\end{aligned}$$

onde substituindo as expressões anteriores na Eq.(5.18) e fazendo  $n' = n + 1$  encontramos a expressão geral da inversão atômica para o estado proposto. Ao investigar a ocorrência de colapsos e resurgimentos na inversão atômica analisamos as três situações possíveis para o estado atômico:  $|e\rangle$ ,  $|g\rangle$  e  $|e\rangle + |g\rangle$ . Estando o átomo inicialmente no estado excitado, temos que, a expressão para a inversão atômica assume a seguinte forma

$$w_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2\lambda t \sqrt{n+1}) P_N^\varepsilon(n, \alpha, \theta), \tag{5.25}$$

onde  $|C_e|^2 = 1$ . A Fig.(5.6) exibe os gráficos da  $w_0(\tau)$  para a primeira geração. A excitação do campo apenas evidencia as regiões onde ocorrem colapsos e resurgimentos deslocando a estrutura para maiores valores do tempo de interação. Esta característica se manifesta em todas as gerações e não depende de  $\theta$  ou  $\varepsilon$ . Para

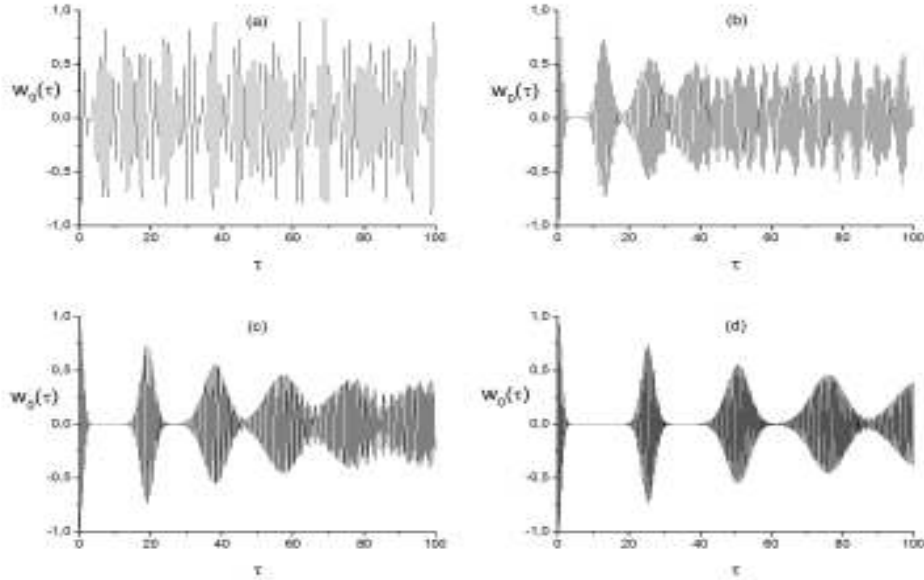


Figura 5.6: Gráficos exibindo a influência da excitação do campo na inversão atômica para a primeira geração. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\alpha = 2$ , (b)  $\alpha = 4$ , (c)  $\alpha = 6$  e (d)  $\alpha = 8$ . Em todos os gráficos  $\theta = 180^\circ$  e  $\varepsilon = 1$ .

um valor fixo da excitação do campo e uma fase variável, a inversão exibe colapsos e resurgimentos e a transição entre o estado coerente e o gato de Schrödinger é mostrada na Fig.(5.7). A transição entre o gato de Schrödinger e o estado coerente foi investigada na literatura por Ragi *et al* [18], porém, conforme Eq. (3.28) há um balanceamento entre os estados componentes da superposição e a transição é obtida por uma interpolação entre um estado e o outro. A Fig. (5.8) ilustra esta situação. No presente trabalho, a fase varia entre  $[\pi, 0]$  e há infinitos estados contidos neste intervalo, logo, ao varrer a fase exibimos a transição entre o gato e o estado coerente mostrando os estados contidos nesta faixa. O efeito da formação dos picos na primeira geração se aplica a todas as gerações lembrando que neste caso devemos ter uma excitação do campo mais alta para evidenciar os colapsos e resurgimentos. A Fig.(5.9) exibe gráficos da inversão onde mantivemos  $\alpha$ ,  $\theta$  e  $\varepsilon$  fixos e  $N$  variando de 1-6 mostrando a influência de  $N$  e a Fig.(5.10) mostra como o parametro  $\varepsilon$  influencia a inversão. As expressões para a inversão nos casos acima comentados foram omitidas devido a sua complexidade e extensão. Quando o estado atômico for  $|g\rangle$  a expressão para a inversão admite a seguinte forma

$$w_0(t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2\lambda t \sqrt{n}) P_N^\varepsilon(n, \alpha, \theta) \quad (5.26)$$

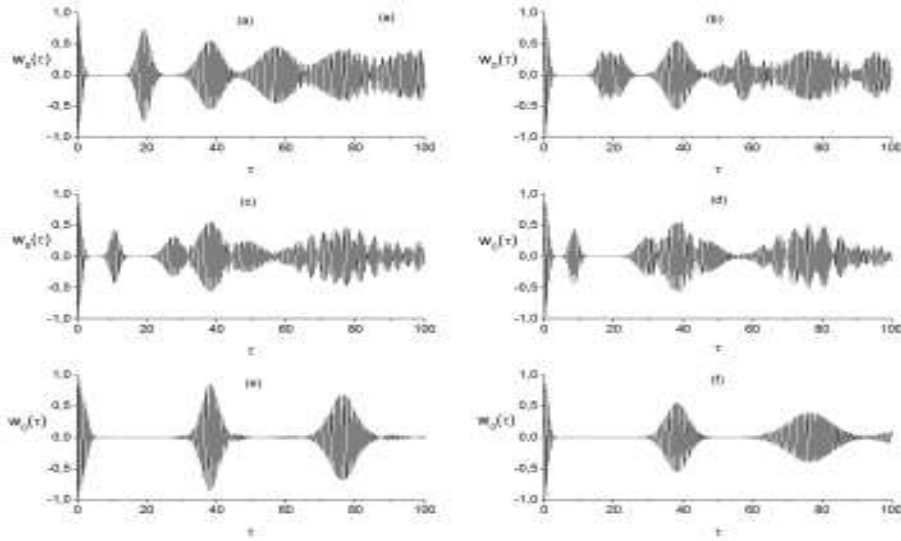


Figura 5.7: Gráficos exibindo a transição entre o estado coerente e o gato de Schrödinger. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\theta = 180^\circ$ , (b)  $\theta = 160^\circ$ , (c)  $\theta = 100^\circ$ , (d)  $\theta = 80^\circ$ , (e)  $\theta = 20^\circ$  e (f)  $\theta = 0^\circ$ . Em todos os gráficos  $\varepsilon = 1$  e  $\alpha = 6$ .

onde  $|C_g|^2 = 1$ . Os gráficos não sofrem grandes modificações, ou seja, o fato de tornar o estado atômico sendo  $|e\rangle$  ou  $|g\rangle$  não faz com que tenhamos um efeito mais acentuado dos colapsos e resurgimentos apenas modificam-se as amplitudes das oscilações. A Fig.(5.11) ilustra esta situação. Logo as propriedades verificadas para o estado atômico excitado são praticamente as mesmas para o átomo no estado fundamental e sendo assim, analisaremos o caso que envolve a superposição dos estados atômicos ( $|e\rangle + |g\rangle$ ). Para o caso da superposição dos estados atômicos a inversão assume a seguinte forma

$$\begin{aligned}
 w_0(t) = & |C_e|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2\lambda t \sqrt{n+1}) P_N^{(\varepsilon)}(n, \alpha, \theta) \\
 & - |C_g|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2\lambda t \sqrt{n}) P_N^{(\varepsilon)}(n, \alpha, \theta) \\
 & + 2 |C_e| |C_g| \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\phi + \gamma_n) \sin(2\lambda t \sqrt{n+1}) \\
 & \times |\langle n | \hat{\rho}_{n,n'}(0) | n+1 \rangle|
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

onde,  $|C_e|^2 = |C_g|^2 = 0.5$ . Como nos casos anteriores, a excitação do campo apenas evidencia a ocorrência de colapsos e resurgimentos, deslocando a estrutura para maiores valores do tempo de interação. Esta característica se mantém em todas as gerações e não depende de  $\theta$  ou  $\varepsilon$ . Neste caso, o fato de o estado atômico estar na superposição ( $|e\rangle + |g\rangle$ ) não muda a característica essencial estudada nos casos anteriores, apesar de termos estruturas diferentes. O efeito da formação dos picos na primeira geração se aplica a todas as gerações lembrando que, neste caso, devemos

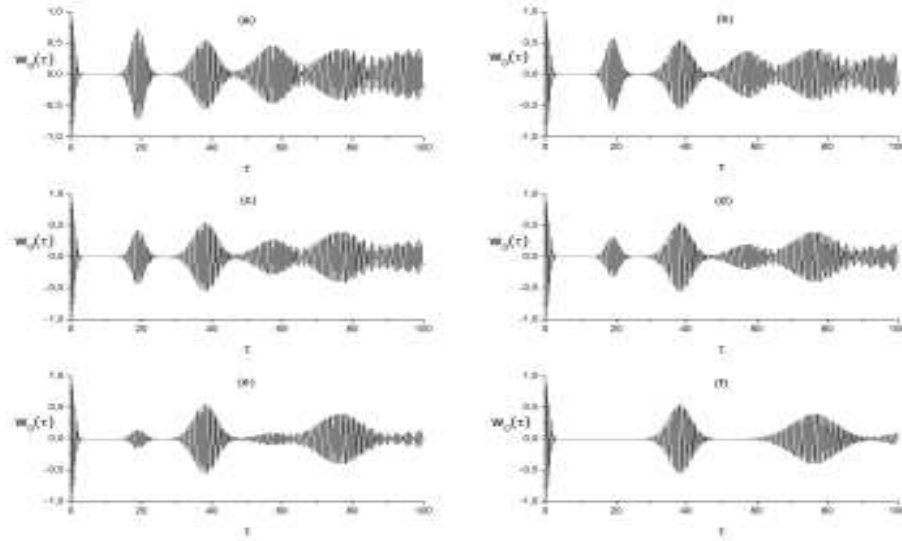


Figura 5.8: Gráficos exibindo a transição entre o gato de Schrödinger e o estado coerente para a inversão atômica calculado para o estado dado pela Eq. (3.28). Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\xi = 0.5$ , (b)  $\xi = 0.2$ , (c)  $\xi = 0.1$ , (d)  $\xi = 0.05$ , (e)  $\xi = 0.01$  e (f)  $\xi = 0$ . Em todos os gráficos  $\alpha = 6$ .

ter uma excitação do campo mais alta para evidenciar os colapsos e resurgimentos. Quando mantemos  $\alpha$ ,  $\theta$  e  $\varepsilon$  fixos e variamos  $N$ , há a formação de uma estrutura como ocorreu no caso anterior. O parâmetro  $\varepsilon$  influencia a inversão da mesma forma verificada no caso em que o estado atômico é dado por  $|e\rangle$ . Logo, a exaustiva análise da influência dos parâmetros envolvidos no caso da superposição dos estados atômicos não muda drasticamente em comparação como os casos anteriores ( $|e\rangle, |g\rangle$ ). Obviamente, as estruturas dos gráficos são diferentes mas a característica dos efeitos citados não muda. As expressões para a inversão nos casos acima comentados foram omitidas devido a sua complexidade e extensão. Ao tomarmos  $\theta = 180^\circ$  na Eq. (5.27), o último termo desta expressão é identicamente nulo. Logo, pequenas variações na fase modificam sensivelmente a estrutura dos gráficos, valendo apenas para uma excitação alta do campo.

### 5.3 Resumo e conclusões

A natureza das oscilações nos gráficos é devida a interferência no espaço de fase. No efeito de compressão, verificamos que, para uma excitação crescente do campo há um aumento nas oscilações entre compressão e anti-compressão. Esta característica, também foi verificada no estudo das propriedades estatísticas e se mantém neste efeito e não depende da geração. No estudo deste efeito, os gráficos foram feitos em função da fase (como no estudo do antiagrupamento e estatística sub-Poissoniana) devido ao fato de que na referência [24] o estado exibia estatística sub-Poissoniana e antiagrupamento de fótons acompanhado de compressão. Como este estado é caso particular da primeira geração do estado proposto nesse trabalho, verificamos que

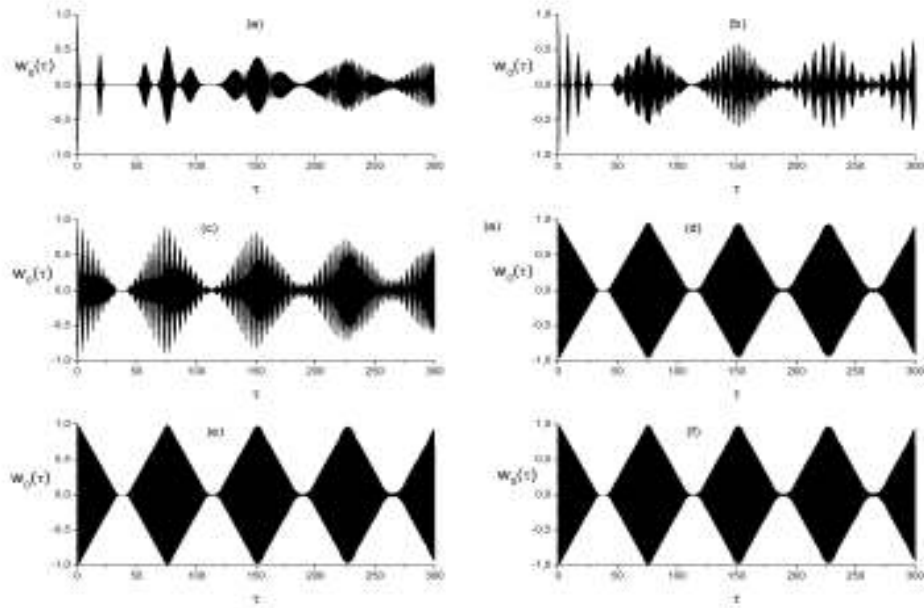


Figura 5.9: Gráficos mostrando como a inversão muda de uma geração para outra. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $N = 1$  e  $\varepsilon = 1$ ; (b)  $N = 2$  e  $\varepsilon = 1$ ; (c)  $N = 3$  e  $\varepsilon = 1$ ; (d)  $N = 4$  e  $\varepsilon = 1$ ; (e)  $N = 5$  e  $\varepsilon = 1$ ; (f)  $N = 6$  e  $\varepsilon = 1$ . Em todos os gráficos  $\alpha = 12$  e  $\theta = 80^\circ$ .

esta característica se mantinha nas gerações posteriores. Verificamos se os efeitos mencionados ocorriam em estados de mínima incerteza ou não. Notamos que ocorre uma saturação do efeito de compressão a partir da 2ª geração, e calculamos o máximo deste efeito levando em consideração a decoerência dos estados na cavidade. Finalmente, mostramos como podemos distinguir estados de mesma estatística investigando as propriedades de compressão. A exaustiva investigação das propriedades da inversão atômica nos fez chegar as seguintes conclusões: encontramos colapsos e resurgimentos em todas as situações analisadas para o estado atômico ( $|e\rangle$ ,  $|g\rangle$  e  $|e\rangle + |g\rangle$ ), com a particularidade de que a excitação do campo torna a ocorrência destes mais acentuada. Essa característica é atribuída ao caráter gaussiano do estado proposto; as gerações posteriores deste estado possuem a particularidade de formar uma estrutura ao manter fixos os demais parâmetros envolvidos; esta característica é única e devida ao fato de termos uma saturação no espaço de fase; ao analisar a situação da superposição para o estado atômico adotamos pesos iguais para os coeficientes atômicos. Se tomarmos pesos diferentes a inversão terá modificações, mas a característica dos efeitos citados não muda. Os termos não-diagonais da matriz densidade são determinantes para se diferenciar estados que tenham mesma estatística. A inversão pode ser útil nesta diferenciação pois o caso da superposição dos estados atômicos adiciona termos não-diagonais. Mas para surpresa não foi possível distinguir estes estados utilizando este indicador. A explicação está no fato que o último termo da Eq. (5.27) é identicamente nulo para  $\theta = 180^\circ$ , independentemente dos outros parâmetros envolvidos.

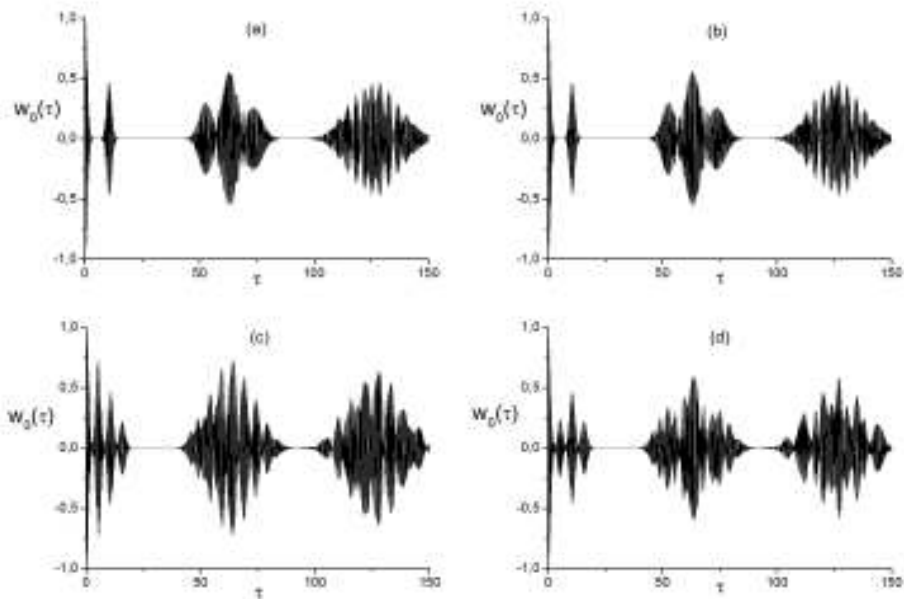


Figura 5.10: Gráficos mostrando a influência do parâmetro  $\varepsilon$  sobre a inversão atômica. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\alpha = 10$ ,  $\varepsilon = 1$  e  $N = 1$ ; (b)  $\alpha = 10$ ,  $\varepsilon = -1$  e  $N = 1$ ; (c)  $\alpha = 10$ ,  $\varepsilon = 1$  e  $N = 2$  e (d)  $\alpha = 10$ ,  $\varepsilon = -1$  e  $N = 2$ . Em todos os gráficos  $\theta = 80^\circ$ .

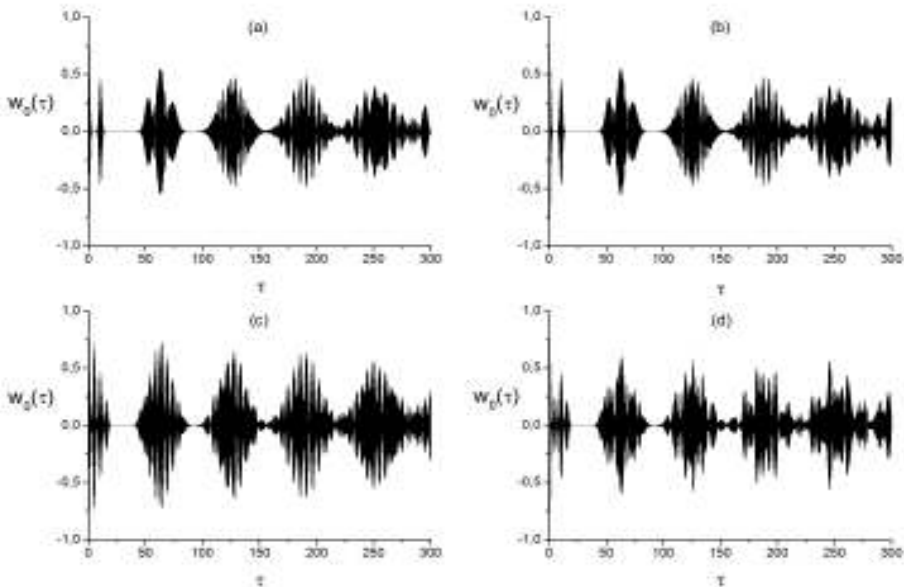


Figura 5.11: Gráficos mostrando a sensível diferença quando adotamos o estado atômico sendo  $e$  ou  $g$ . Em ambos os gráficos  $\alpha = 10$ ,  $\varepsilon = 1$  e  $\theta = 60^\circ$ . Em (a) e (b) adotamos  $N = 1$  e em (c) e (d) adotamos  $N = 2$ .

# Capítulo 6

## Representações no espaço de fase

Neste capítulo, apresentamos as mais usuais representações no espaço de fase, bem como a medida da profundidade não-clássica do estado proposto. Esta medida é feita usando a função  $R(z, \tau)$  de Lee [32], que em geral, é uma interpolação contínua entre as funções  $P(\alpha)$  e  $Q(\alpha)$ . O capítulo é dividido da seguinte maneira. Na seção (6.1) fizemos uma breve introdução sobre o assunto e calculamos a função de Lee para o nosso estado onde verificamos a sua fundura quântica. Na seção (6.2) mostramos como obter as funções  $P(\alpha)$  e  $Q(\alpha)$  a partir da função  $R(z, \tau)$  e na seção(6.3) obtemos a função de Wigner.

### 6.1 Profundidade não-clássica

Campos de radiação com certas características que só podem ser compreendidas por uma descrição quântica do campo são chamados estados não clássicos [33], onde esta natureza não clássica pode se manifestar de diferentes maneiras. Sabemos que o antiagrupamento de fótons e a estatística sub-Poissoniana são manifestações da não classicalidade dos estados do campo. Outra manifestação ocorre quando o ruído em uma quadratura do campo é menor que o do vácuo e quando isto ocorre obtemos os estados comprimidos [9]. Em 1979, Mandel [4], introduziu um parametro ( $q$ ) definido por

$$q \equiv \frac{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2}{\langle \hat{n} \rangle}, \quad (6.1)$$

onde um valor negativo de  $q$  exhibe um efeito não clássico conhecido como estatística sub-Poissoniana (máximo para o estado de número,  $q = -1$ ). Esta definição está relacionada com o fato de que  $q = 0$  para o estado coerente (possui estatística Poissoniana). Logo o estado coerente esta na fronteira dos estados clássicos e não clássicos. Então, a medida da não classicalidade pode ser confinada convenientemente no intervalo entre  $[0, -1]$ . Entretanto, esta definição não pode refletir a natureza não clássica dos estados comprimidos, pois os valores de  $q$  para o vácuo comprimido são sempre positivos[?]. Sendo assim, Lee introduziu uma função, chamada de  $R(z, \tau)$ ,

que mede a não classicalidade dos estados quânticos, dada por

$$R(z, \tau) = \frac{1}{\pi(1-\tau)} \exp\left(\frac{|z|^2}{1-\tau}\right) \int d^2u \langle u | \hat{\rho} | u \rangle \times \exp\left(\frac{[(2\tau-1)|u|^2 + (z^*u - zu^*)]}{(1-\tau)}\right), \quad (6.2)$$

que tem como casos particulares as funções  $P$ ,  $Q$  e  $W$  (para  $\tau = 0$ ,  $\tau = 1/2$  e  $\tau = 1$  respectivamente). É de conhecimento geral que, a função  $P$  para o estado coerente é uma  $\delta$  ( $\pi\delta^2(z - \alpha)$ ). Foi mostrado [31], que para todos os outros estados puros, a função  $P$  é mais singular que uma função  $\delta$ . Por outro lado, a função  $Q(z)$  é sempre uma função de distribuição clássica para qualquer estado quântico. Logo, a função  $R(z, \tau)$  é uma interpolação contínua entre a funções  $P(z)$  e  $Q(z)$ , onde  $\tau$  é o parametro interpolador. Se denotarmos por  $C$  o conjunto de todos os  $\tau$  que fazem com que a função  $R(z, \tau)$  de um estado quântico se torne positiva e bem definida, portanto podemos definir a medida da não classicalidade de um estado como sendo

$$\tau_m = \min_{\tau \in C}(\tau). \quad (6.3)$$

Ou seja, o menor  $\tau$ , denotado por  $\tau_m$ , que faz com que a função  $R$  seja positiva e bem definida é a medida da profundidade quântica do estado. De acordo com esta definição, para o estado coerente  $\tau_m = 0$ , dado que a função é uma função  $\delta$ . Por outro lado, para  $\tau = 1$  nós temos  $R(z, 1) = Q(z)$  que é sempre positiva e bem definida para qualquer estado quântico. Portanto, nós podemos especificar o intervalo para  $\tau_m$  como sendo  $0 \leq \tau_m \leq 1$ . Finalmente, nos resta calcular a integral acima e encontrar a função  $R$  para nosso estado. Substituindo a Eq. (5.20) na Eq. (6.2) e efetuando a integração encontramos a profundidade não clássica para nosso estado, dada a seguir

$$R_N^\varepsilon(z, \alpha, \theta, \tau) = \frac{\exp[-|z|^2/\tau]}{2^N \tau \mathcal{F}_N^\varepsilon(\alpha)} \sum_{j,j'}^{Jm} \{ \exp[-(1-\tau)\alpha_j \alpha_{j'}^*]/\tau \} \times \exp[(z^* \alpha_j e^{i\theta} + z \alpha_{j'}^* e^{-i\theta})/\tau] + \exp[-(1-\tau)\alpha_j \alpha_{j'}^*] \times \exp[(z^* \alpha_j + z \alpha_{j'}^*)/\tau] + \varepsilon \{ \exp[-(1-\tau)\alpha_j \alpha_{j'}^* e^{i\theta}]/\tau \} \times \exp[(z^* \alpha_j e^{i\theta} + z \alpha_{j'}^*)/\tau] + \exp[-(1-\tau)\alpha_j \alpha_{j'}^* e^{-i\theta}]/\tau \} \times \exp[(z^* \alpha_j + z \alpha_{j'}^* e^{-i\theta})/\tau] \}, \quad (6.4)$$

onde  $\alpha_j = \alpha \exp(ij\theta/2^{N-1})$ ,  $\alpha_{j'} = \alpha \exp(ij'\theta/2^{N-1})$  e  $Jm = 2^{N-1} - 1$ . Especificando o valor de  $N$  na expressão anterior temos a função  $R$  para todas as gerações. Por exemplo, definindo  $z = x + iy$  e tomando  $N = 1$ , temos  $R$  para a primeira geração,

dada a seguir.

$$\begin{aligned}
R_1^\varepsilon(x, y, \alpha, \theta, \tau) = & \frac{\exp[-(x^2 + y^2)/\tau]}{2\tau\mathcal{F}_1^\varepsilon(\alpha)} \{ \cosh[(-\alpha^2(1 - \tau) + 2\alpha x)/\tau] \\
& + \sinh[(-\alpha^2(1 - \tau) + 2\alpha x)/\tau] \\
& + \cosh[(-\alpha^2(1 - \tau) - 2\alpha(x \cos[\theta] + y \sin[\theta]))/\tau] \\
& + \sinh[(-\alpha^2(1 - \tau) - 2\alpha(x \cos[\theta] + y \sin[\theta]))/\tau] \\
& + 2\varepsilon \cos[(-\alpha^2(1 - \tau) \sin[\theta] + \alpha y(1 + \cos[\theta]) \\
& + \alpha x \sin[\theta])/\tau] \\
& \times \{ \cosh[(-\alpha^2(1 - \tau) \cos[\theta] - \alpha x(1 + \cos[\theta]) \\
& - \alpha y \sin[\theta])/\tau] \\
& - \sinh[(-\alpha^2(1 - \tau) \cos[\theta] - \alpha x(1 + \cos[\theta]) \\
& - \alpha y \sin[\theta])/\tau] \} \}, \tag{6.5}
\end{aligned}$$

onde verificamos que o menor valor de  $\tau_m$  que a torna positiva e bem definida é 1, independentemente de qualquer parâmetro. Investigamos exaustivamente, para algumas gerações, quais eram os valores que tornavam  $R$  positiva e sempre este valor foi 1. Logo, concluímos que a medida da não classicalidade de nosso estado será, que implica em uma fundura máxima, ou seja, igual a 1.

## 6.2 Representações $P$ e $Q$

Podemos representar o operador densidade em termos da base de vetores formada pelo estado coerente  $|\alpha\rangle$ , de acordo com Glauber [2] e Sudarsham [30]. Logo teremos que

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha \tag{6.7}$$

onde  $d^2\alpha = d(\text{Re}\{\alpha\})d(\text{Im}\{\alpha\})$ . Contudo, somos levados a pensar que a função  $P(\alpha)$  é analoga a distribuição de probabilidades para os valores de  $\alpha$ . Entretanto este não é o caso, pois o operador de projeção  $|\alpha\rangle \langle \alpha|$  deriva de estados não ortogonais e a função  $P(\alpha)$  não pode ser interpretada como uma genuína distribuição de probabilidades. Para o estado coerente ela é uma função delta ( $\hat{\rho} = |\alpha\rangle \langle \alpha_0|$  logo,  $P(\alpha) = \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_0)$ ), mas de acordo com Hillery[31] a função  $P(\alpha)$  para todo estado puro não coerente se torna mais singular que uma função  $\delta$ . Podemos obter a função  $P(\alpha)$

para o estado proposto tomando o limite de  $\tau \rightarrow 0$  na Eq.(6.4) que será dada por

$$\begin{aligned}
P_N^\varepsilon(z, \alpha, \theta) = & \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\exp[-|z|^2/\tau]}{2^N \mathcal{F}_N^\varepsilon(\alpha) \tau} \sum_{j,j'}^{Jm} \{ \exp[(-(1-\tau)\alpha_j \alpha_{j'})/\tau] \\
& \times \exp[(z^* \alpha_j e^{i\theta} + z \alpha_{j'}^* e^{-i\theta})/\tau] \\
& + \exp[(-(1-\tau)\alpha_j \alpha_{j'})] \\
& \times \exp[(z^* \alpha_j + z \alpha_{j'}^*)/\tau] \\
& + \varepsilon \{ \exp[(-(1-\tau)\alpha_j \alpha_{j'}^* e^{i\theta})/\tau] \\
& \times \exp[(z^* \alpha_j e^{i\theta} + z \alpha_{j'}^*)/\tau] \\
& + \exp[(-(1-\tau)\alpha_j \alpha_{j'}^* e^{-i\theta})/\tau] \\
& \exp[(z^* \alpha_j + z \alpha_{j'}^* e^{-i\theta})/\tau] \} \}. \tag{6.8}
\end{aligned}$$

Outra representação no espaço de fase é dada pela função  $Q(\alpha)$ , que diagonaliza o operador densidade, fazendo com que ela seja sempre positiva e bem definida. Para obtê-la, basta fazer  $\tau = 1$  na Eq. (6.4), logo teremos que

$$\begin{aligned}
Q_N^\varepsilon(z, \alpha, \theta) = & \frac{\exp[-|z|^2]}{2^N \mathcal{F}_N^\varepsilon(\alpha)} \sum_{j,j'}^{Jm} \{ \exp[(z^* \alpha_j e^{i\theta} + z \alpha_{j'}^* e^{-i\theta})] \\
& \times \exp[(z^* \alpha_j + z \alpha_{j'}^*)] \\
& + \varepsilon \{ \exp[(z^* \alpha_j e^{i\theta} + z \alpha_{j'}^*)] \\
& + \exp[(z^* \alpha_j + z \alpha_{j'}^* e^{-i\theta})] \} \}. \tag{6.9}
\end{aligned}$$

onde  $\alpha_j = \alpha \exp(ij\theta/2^{N-1})$ ,  $\alpha_{j'} = \alpha \exp(ij'\theta/2^{N-1})$  e  $Jm = 2^{N-1} - 1$ . Como a função  $Q(z)$ , diagonaliza o operador densidade, para o presente caso teremos apenas os pacotes gaussianos nos gráficos. Tomando  $N = 1$  e fazendo  $z = x + iy$  na expressão anterior teremos a função  $Q$  para a primeira geração, dada por

$$\begin{aligned}
Q_1^\varepsilon(x, y, \alpha, \theta) = & \frac{\exp[-(x^2 + y^2)]}{2\mathcal{F}_1^\varepsilon(\alpha)} \{ \cosh[2\alpha x] + \sinh[2\alpha x] \\
& + \cosh[-2\alpha(x \cos[\theta] + y \sin[\theta])] \\
& + \sinh[-2\alpha(x \cos[\theta] + y \sin[\theta])] \} \tag{6.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\varepsilon \cos[\alpha y(1 - \cos[\theta]) + \alpha x \sin[\theta]] \\
& \times \{ \cosh[\alpha x(1 + \cos[\theta]) + \alpha y \sin[\theta]] \\
& + \sinh[\alpha x(1 + \cos[\theta]) + \alpha y \sin[\theta]] \} \}, \tag{6.11}
\end{aligned}$$

A Fig.(6.1) exibem alguns gráficos mostrando o efeito da excitação do campo e da fase sobre a função  $Q$ . A excitação do campo tem a mesma influência sobre todas as gerações, ou seja, ela apenas aumenta a distância entre os pacotes gaussianos tornando-os distinguíveis. Já a fase, modifica a disposição dos pacotes gaussianos e esta característica se aplica a todas as gerações independentemente dos outros parâmetros envolvidos. Ao passar mais átomos na cavidade, apenas saturamos de pacotes gaussianos o plano complexo e o parâmetro  $\varepsilon$  não influencia a distribuição.

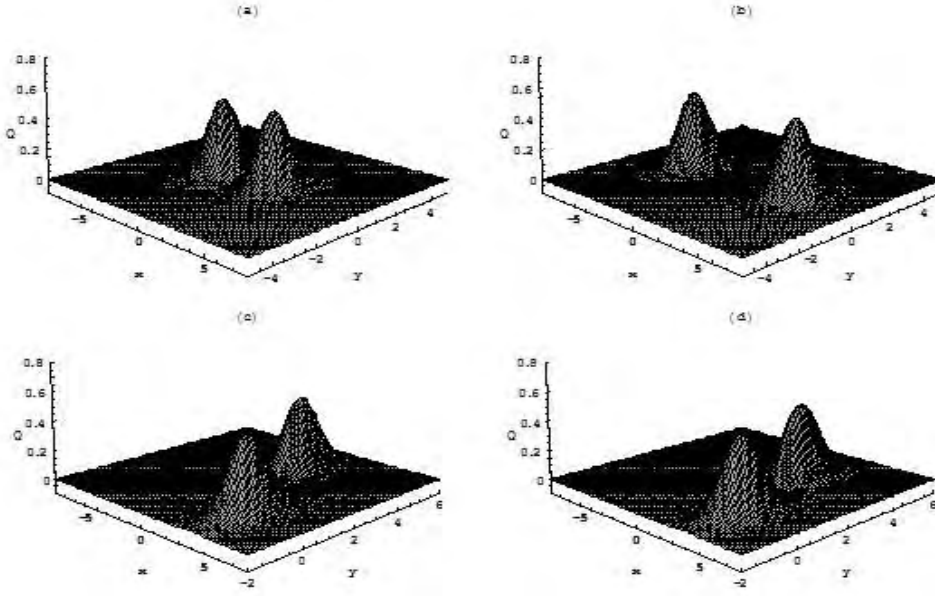


Figura 6.1: Gráficos da função  $Q$  para primeira geração, mostrando como a excitação do campo e a fase influenciam na distribuição. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\alpha = 2$  e (b)  $\alpha = 4$ , e em ambos  $\theta = 180^\circ$  e  $\varepsilon = 1$ . Em (c)  $\theta = 80^\circ$  e (d)  $\theta = 60^\circ$  e em ambos  $\alpha = 4$  e  $\varepsilon = 1$ .

Investigamos detalhadamente varias gerações mas as características essenciais dos efeitos citados não muda. Através da função  $Q$ , podemos distinguir os estados com mesma estatística encontrados no capítulo 4.

### 6.3 Representação $W$

Fazendo  $\tau = 1/2$ , na Eq.(6.2) obtemos a distribuição de quase-probabilidade de Wigner[29].

$$\begin{aligned}
 W(z, \alpha, \theta, \varepsilon, N) = & \frac{\exp(-2|z|^2)}{2^{N-1} \mathcal{F}_N^\varepsilon(\alpha)} \sum_{j,j'}^{Jm} \{ \exp[-\alpha_j \alpha_{j'}^* + 2(z^* \alpha_j e^{i\theta} + z \alpha_{j'}^* e^{-i\theta})] \\
 & + \exp[-\alpha_j \alpha_{j'} + 2(z^* \alpha_j + z \alpha_{j'}^*)] \\
 & + \varepsilon \{ \exp[-\alpha_j \alpha_{j'}^* e^{i\theta} + 2(z^* \alpha_j e^{i\theta} + z \alpha_{j'}^*)] \\
 & + \exp[-\alpha_j \alpha_{j'}^* e^{-i\theta} + 2(z^* \alpha_j + z \alpha_{j'}^* e^{-i\theta})] \} \} \quad (6.12)
 \end{aligned}$$

onde  $\alpha_j = \alpha \exp(ij\theta/2^{N-1})$ ,  $\alpha_{j'} = \alpha \exp(ij'\theta/2^{N-1})$  e  $Jm = 2^{N-1} - 1$ . Especificando o valor de  $N$  na expressão anterior a função de Wigner pode ser escrita para todas as gerações. Por exemplo, definindo  $z = x + iy$  e tomando  $N = 1$ , encontra-se a

função de Wigner para a primeira geração, dada a seguir.

$$\begin{aligned}
W(x, y; \alpha, \theta, \varepsilon, 1) = & \frac{\exp(-2(x^2 + y^2))}{\mathcal{F}_1^\varepsilon(\alpha)} \{ \cosh[4\alpha x - \alpha^2] + \sinh[4\alpha x - \alpha^2] \\
& + \cosh[\alpha^2 - 4\alpha(x \cos[\theta] + y \sin[\theta])] \\
& - \sinh[\alpha^2 - 4\alpha(x \cos[\theta] + y \sin[\theta])] \\
& + 2\varepsilon \{ \cos[2\alpha y(1 - \cos[\theta]) + 2\alpha x \sin[\theta] - \alpha^2 \sin[\theta]] \\
& \times \cosh[\alpha^2 \cos[\theta] - 2\alpha x(1 + \cos[\theta]) - 2\alpha y \sin[\theta]] \\
& - \cos[2\alpha y(1 - \cos[\theta]) + 2\alpha x \sin[\theta] - \alpha^2 \sin[\theta]] \\
& \times \sinh[\alpha^2 \cos[\theta] - 2\alpha x(1 + \cos[\theta]) - 2\alpha y \sin[\theta]] \}. \quad (6.13)
\end{aligned}$$

As Figs. (6.2, 6.3, 6.4) exibem gráficos da função de Wigner para a primeira geração. Nestes gráficos analisamos a influência dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\theta$  e  $\varepsilon$  nesta ordem. Tomando  $\theta = \pi$  na equação anterior, temos a conhecida superposição de dois estados coerentes (gato de Schrödinger), amplamente investigada na literatura.

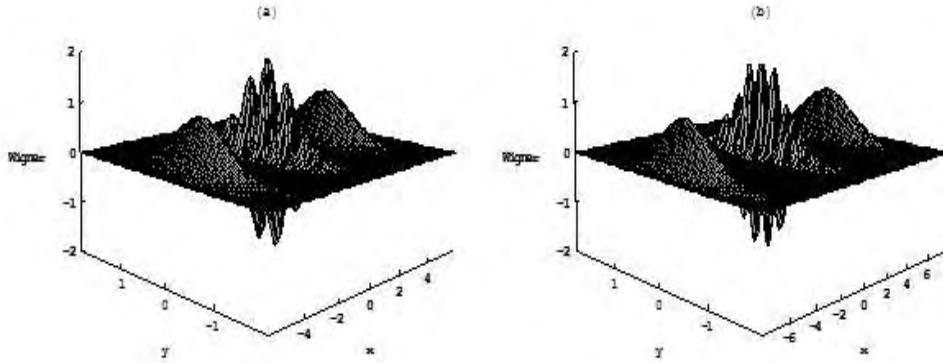


Figura 6.2: Gráficos da função de Wigner para primeira geração, mostrando como a excitação do campo influencia na distribuição. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\alpha = 6$  e (b)  $\alpha = 8$ . Em ambos  $\theta = 180^\circ$  e  $\varepsilon = 1$ .

Neste caso, sabemos que para uma excitação crescente do campo ( $\alpha \gg 1$ ) a superposição torna-se macroscopicamente distinguível, ou seja, os estados componentes ficam nitidamente afastados. Sabemos que, as oscilações na distribuição estatística são explicadas via interferência quântica no espaço de fase e sendo assim, podemos perceber claramente através da Fig. (6.2) esta interferência e como a excitação modifica estes termos. Logo, como pode-se notar, a excitação aumenta a quantidade de picos nos termos de interferência implicando em um aumento nas oscilações na distribuição estatística. A Fig. (6.3) mostra a influência da fase e como ocorre a quebra de simetria em comparação ao gato de Schrödinger e a Fig. (6.4) mostra a influência do parâmetro  $\varepsilon$ , onde a distinção entre os estados é feita somente pelos termos de interferência entre os estados. Na Fig. (6.5) mapeamos a função de Wigner no plano complexo e a partir disto mostramos nitidamente as regiões positivas (regiões de cor branca) e negativas (regiões de cor negra) da distribuição. Note como os estados de superposição se distribuem no plano complexo e a influência marcante da fase. Fazendo  $N = 2$  na Eq.(6.7), teremos a função de Wigner para a segunda geração.

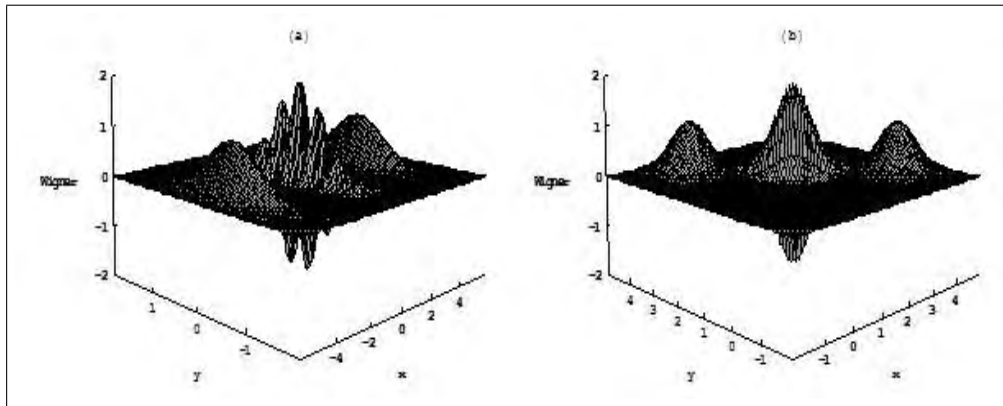


Figura 6.3: Gráficos da função de Wigner para primeira geração, mostrando como a fase influencia na distribuição. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\theta = 180^\circ$  e (b)  $\theta = 90^\circ$ . Em ambos  $\alpha = 6$  e  $\varepsilon = 1$ .

Neste caso, a expressão se torna muito longa e omitiremos a sua escrita e a das gerações posteriores. Como a influência da excitação do campo independe da geração,

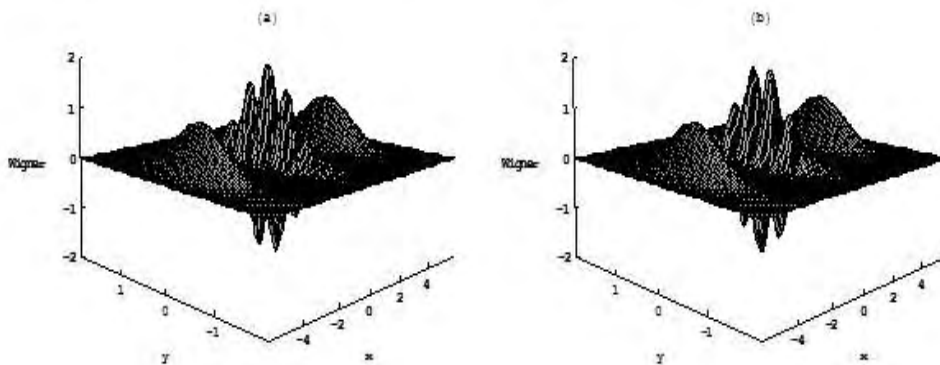


Figura 6.4: Gráficos da função de Wigner para primeira geração, mostrando como o parâmetro  $\varepsilon$  influencia na distribuição. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\varepsilon = 1$  e (b)  $\varepsilon = -1$ . Em ambos  $\alpha = 6$  e  $\theta = 180^\circ$ .

limitamos nossa análise aos parâmetros  $\theta$  e  $\varepsilon$ . Neste ponto elucidaremos a curiosa igualdade das propriedades estatísticas dos estados  $|\Psi_1^{-1}(\alpha)\rangle = \eta_1^{-1}(\alpha)[|-\alpha\rangle - |\alpha\rangle]$  e  $|\Psi_2^{-1}(\alpha)\rangle = \eta_2^{-1}(\alpha)[(|-\alpha\rangle - |\alpha\rangle) + (|-e^{i\pi/2}\alpha\rangle - |e^{i\pi/2}\alpha\rangle)]$ . A Fig. (6.6) exhibe os gráficos da função de Wigner para estes dois estados. Note, a diferença grotesca entre os dois gráficos, devida aos termos não-diagonais da matriz densidade dos estados citados. Agora, voltemos nossa atenção aos parâmetros  $\theta$  e  $\varepsilon$  no caso da segunda geração. Neste ponto percebemos que as propriedades relativas a fase não mudam de uma geração para outra, ou seja, ao fazer ela variar no intervalo compreendido entre  $\pi \geq \theta \geq 0$  o que temos é uma reorganização dos estados no plano complexo, e a Fig.(6.7) ilustra muito bem esta situação. A Fig.(6.8) exhibe o mapeamento da função de Wigner no plano complexo ilustrando claramente como ocorre a reorganização citada anteriormente. Novamente, podemos ver a clara distinção entre a parte positiva (região de cor branca) e a parte negativa (região de cor negra) da função de Wigner. Entre os picos gaussianos encontram-se as regiões de interferência entre os

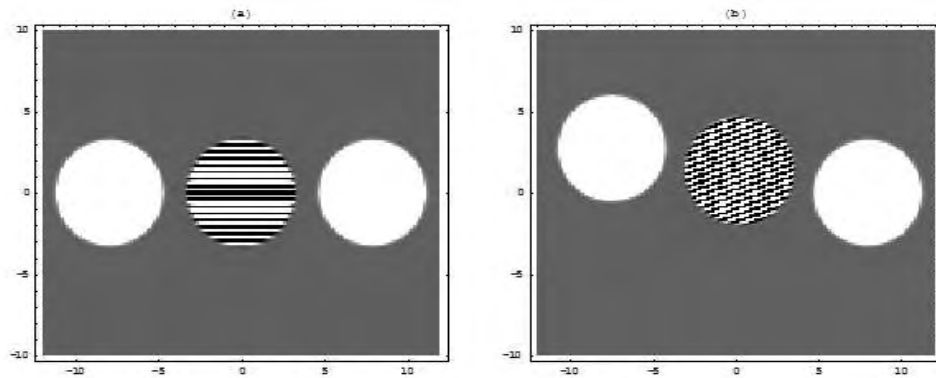


Figura 6.5: Gráficos do mapeamento da função de Wigner para primeira geração, mostrando como a fase influencia na distribuição. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\theta = 180^\circ$  e (b)  $\theta = 170^\circ$ . Em ambos  $\alpha = 6$  e  $\varepsilon = 1$ .

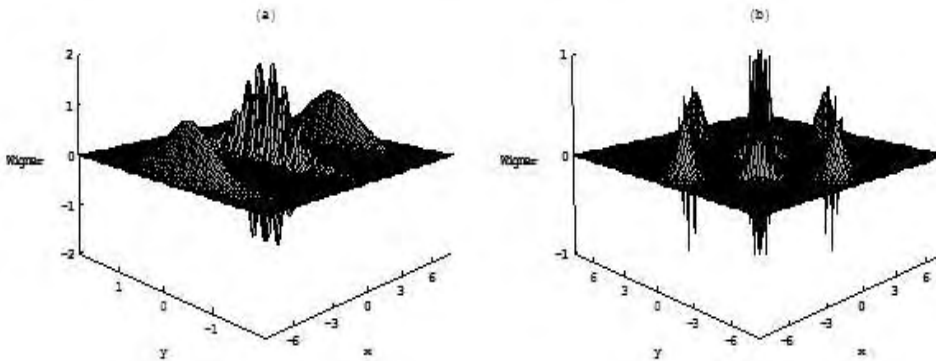


Figura 6.6: Gráficos da função de Wigner para primeira geração e segunda geração, mostrando a distinção entre os estados com mesma estatística. Foram adotados os seguintes parâmetros: (a)  $N = 1$ , e (b)  $N = 2$ . Em ambos os gráficos utilizamos  $\theta = 180^\circ$ ,  $\alpha = 6$  e  $\varepsilon = 1$ .

estados que tem uma estrutura parecida, diferente da estrutura central. A diferença entre essas estruturas se deve ao fato de que entre dois picos gaussianos temos a interferência entre eles e a interferência devida aos outros picos. Enfim, investigamos as propriedades da função de Wigner para várias gerações e percebemos que as influências dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\theta$  e  $\varepsilon$  permanecem inalteradas de uma geração para outra, ou seja, as características dos efeitos citados não muda. Sendo assim, nos resta analisar a influência de  $N$  na função de Wigner. No estudo das propriedades estatísticas, constatamos que podemos esculpturar a distribuição de número de fótons e o fator  $Q$  de Mandel mantendo fixos os parâmetros  $\alpha$ ,  $\theta$  e  $\varepsilon$  e variando o parâmetro  $N$ . Nosso interesse aqui é mostrar esta esculpturação via função de Wigner e como os outros parâmetros envolvidos influenciam este processo. De acordo com as análises feitas anteriormente ( $P_n$  e  $q$ )  $\theta$  e  $\varepsilon$  não podem ser quaisquer. Vale lembrar que a esculpturação foi feita tomando  $\theta = \pi$  e  $\varepsilon = 1$ , fora deste valores o processo é ineficiente e, até então, não havia uma justificativa convincente que explicasse esta ineficiência ou como estes parâmetros influenciavam o processo. A justificativa para este efeito está relacionada com a sobreposição dos pacotes gaussianos que, combinados com uma excitação não muito alta do campo, conduz a formação do estado

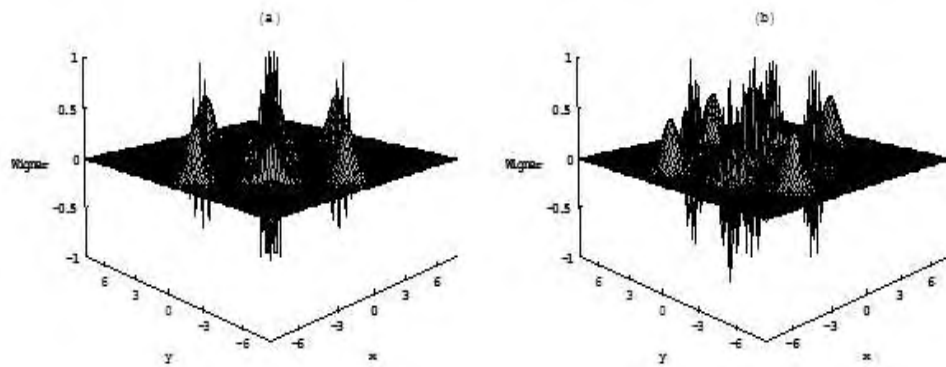


Figura 6.7: Gráficos da função de Wigner para a segunda geração, mostrando como a fase influencia na distribuição. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\theta = 180^\circ$  e (b)  $\theta = 170^\circ$ . Em ambos  $\alpha = 8$  e  $\varepsilon = 1$ .

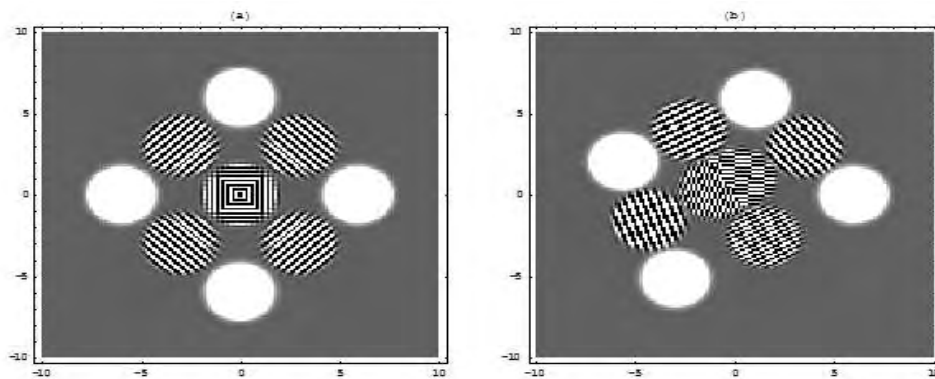


Figura 6.8: Gráficos do mapeamento da função de Wigner para a segunda geração, mostrando como a fase influencia na distribuição. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $\theta = 180^\circ$  e (b)  $\theta = 170^\circ$ . Em ambos  $\alpha = 8$  e  $\varepsilon = 1$ .

de número via interferência entre os mesmos, quando saturamos o plano complexo com várias bolinhas. A Fig.(6.9) mostra como ocorre esta saturação e a formação da estrutura do estado do número, intimamente ligada com a interferência entre os pacotes gaussianos. A influência da fase é facilmente explicada se observarmos a Fig.(6.5). Nesta, mostramos como perdemos a “simetria” quando fizemos a fase assumir um valor diferente de  $\pi$ . Logo a perda da simetria implicará na perda da interferência que gera o estado de número. Finalmente, como o parâmetro  $\varepsilon$  apenas modifica os termos de interferência entre os pacotes gaussianos (veja Fig.(6.4)) fica evidente agora o seu papel.

## 6.4 Resumo e conclusões

Medimos a profundidade não clássica de nosso estado, através da função  $R$  de Lee, e verificamos que ela é máxima ( $\tau_m = 1$ ), par quaisquer valores dos parâmetros envolvidos (exceto  $\theta = 0$ ). A partir da função  $R$ , encontramos as funções  $P$ ,  $Q$  e  $W$  e investigamos a influência dos parâmetros envolvidos sobre as funções  $Q$  e  $W$ . Notamos que na função de Wigner, a excitação crescente do campo, causava

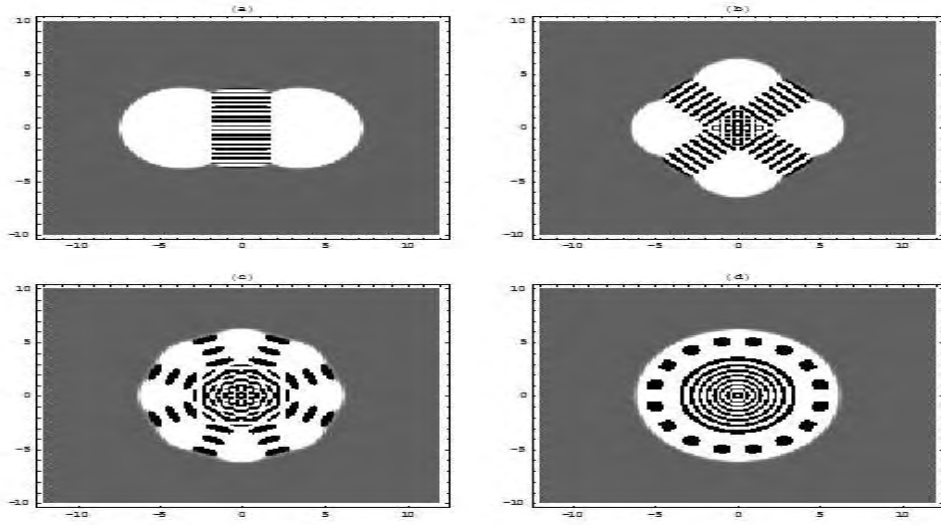


Figura 6.9: Gráficos da função de Wigner, mostrando como ocorre a escultura da distribuição para obter a aproximação ao estado de número. Foram adotados os seguintes parâmetros nos gráficos: (a)  $N = 1$ , (b)  $N = 2$ , (c)  $N = 3$ , e (d)  $N = 4$ . Em todos  $\alpha = 2.41$ ,  $\varepsilon = 1$  e  $\theta = 180^\circ$ .

um aumento nos termos de interferência implicando diretamente no aumento das oscilações nos gráficos da  $P_n$ , fator  $q$ ,  $g^{(2)}(0)$  e  $\Delta\hat{x}_1$ . Para a função  $Q$  o aumento da excitação do campo apenas afasta os pacotes gaussianos. A fase modifica drasticamente a organização dos estados no plano complexo (tanto para  $Q$  e  $W$ ), porém para  $W$  esta reorganização causa diminuição na interferência entre eles. Assim, percebe-se porque ao variar a fase quebramos a simetria existente no estudo da  $P_n$  (e de outras propriedades estatísticas). A influência do parâmetro  $\varepsilon$  é sutil, podendo apenas ser percebida no caso da função de Wigner, se observarmos os termos de interferência entre os estados. No caso da função  $Q$ , este parâmetro não tem influência alguma. No caso dos estados distintos com mesma estatística, tanto a função de Wigner quanto a função  $Q$  se mostraram bastante eficientes na distinção entre eles. Finalmente, analisamos como ocorre a escultura de  $P_n$ , via função de Wigner, e porque os parâmetros envolvidos ( $N$ ,  $\theta$  e  $\varepsilon$ ) não podem ser arbitrários. A excitação do campo, deve ser tal que os termos de interferência reproduzam as estruturas mostradas na Fig. (6.9). A fase e o parâmetro  $\varepsilon$  não podem ser arbitrários devido aos motivos já citados, ou seja, não destroam a interferência que reproduz o estado de número e o número de estados componentes da superposição satura o plano complexo de tal forma que forneça a estrutura de interferência. Afirmamos, que trata-se de uma aproximação ao estado  $|2^N\rangle$  porque próxima a estrutura interna que é idêntica a do estado de número existem termos de interferência que acabam por “sujar” a distribuição.

# Capítulo 7

## Conclusões

Neste trabalho estudamos um estado superposto, formado de componentes que são estados coerentes dispostos sobre um círculo de raio  $r = |\alpha|$ , no plano complexo. Cálculos tediosos forneceram expressões gerais para várias propriedades físicas do sistema (campo luminoso), tais como:

- (i) distribuição estatística  $P_n$  [Sec. 4.2.1];
- (ii) fator  $q$  de Mandel [Sec. 4.2.2];
- (iii) função de correlação de 2ª ordem [Sec. 4.2.2];
- (iv) variância em quadraturas [Sec. 5.1];
- (v) inversão de população [Sec. 5.2];
- (vi) função  $R(z, \tau)$  de Lee [Sec. 6.1];
- (vii) funções de Glauber e Husimi [Sec. 6.2];
- (viii) função de Wigner [Sec. 6.3].

Verificamos como os parâmetros envolvidos afetam estas propriedades e comparamos os resultados obtidos com os casos particulares do estado proposto neste trabalho[18][20]. Para uma excitação crescente campo mostramos que havia um aumento nas oscilações em  $P_n$ , no fator  $q$  de Mandel, em  $g^{(2)}(0)$  e em  $\Delta\hat{x}_1$ . Ela também afeta a inversão atômica produzindo um aumento na distância entre um colapso e um resurgimento. A fase tem um papel importante pois mostra como ocorre a transição entre os estados de superposição e o estado coerente. Esta transição afeta as oscilações que ocorrem em  $P_n$ , no fator  $q$  de Mandel, em  $g^{(2)}(0)$  e em  $\Delta\hat{x}_1$ , diminuindo-as e fazendo com que estas propriedades tendessem àquelas do estado coerente. Além disso, o parâmetro  $\theta$  mostra que há uma alta compressão para valores pequenos deste. Ao passar de uma geração para outra seguinte, percebemos que podíamos cavar buracos na estatística, acentuando o caráter sub-Poissoniano e de antiagrupamento. Baseados nesta característica, mostramos como esculpturar a  $P_n$ , para obter uma boa aproximação do estado de número  $|2^N\rangle$ . Porém, fixado  $N$ , este resultado só ocorre para um certo valor de  $\alpha$ , para  $\theta = \pi$  e  $\varepsilon = 1$ . Ao investigar as possíveis representações no espaço de fase, fizemos uso da função de Lee[32], que em geral é uma interpolação contínua entre as funções  $P$  e  $Q$ . Esta função, chamada de  $R$ , mede a profundidade não clássica dos estados do campo. Calculamos esta função para nosso estado e constatamos que ela será máxima,  $\tau_m = 1$ , independentemente de qualquer parâmetro, salvo para  $\theta = 0$ . A partir da função  $R$ , encontramos as funções  $P$ ,  $Q$  e  $W$  e verificamos a influência dos parâmetros envolvi-

dos para as duas ultimas pois sabemos das singularidades da função  $P$  para qualquer estado puro não coerente. A excitação crescente do campo produzia um aumento nas oscilações entre os termos de interferência na função de Wigner refletindo nas oscilações na  $P_n$ , no fator  $q$  de Mandel,  $g^{(2)}(0)$ ,  $\Delta\hat{x}_1$ . Ao variar a fase, constatamos que ela modificava os termos de interferência entre os estados, na função de Wigner, provocando uma diminuição destes devido a reorganização dos estados no plano complexo, implicando diretamente nas outras propriedades estudadas. Logo, a fase só trouxe uma contribuição significativa no estudo do efeito de compressão, pois obtemos um alto valor deste efeito. E, finalmente, percebemos porque a escultura quântica só era possível para um certo valor de  $\alpha$  e para  $\varepsilon = 1$ . Ao passar de uma geração para outra ( para  $\alpha$  e  $\theta$  fixos), saturamos o plano complexo de tal forma que não possamos distinguir os estados componentes da superposição. Então, os termos de interferência entre os estados formam uma estrutura que vai tomando a forma da estrutura do estado de número. Portanto, como sabemos que o aumento da excitação do campo torna os componentes da superposição distintos, temos que adimitir valores pequenos. Quanto a  $\varepsilon$ , verificamos que ele modifica a forma com que ocorre a interferência entre os estados que é crucial na esculturação. Vale ressaltar que explicamos a esculturação fazendo uso da função de Wigner. Porém o resultado mais interessante obtido neste trabalho foi a ocorrência de alta compressão, onde a fase tem um papel crucial. A investigação das propriedades dos estados assimétricos foi motivada, em parte, pelo maior tempo de decoerência dos estados na cavidade de acordo com a Refe. [34, decoerência]. Como pontos abertos, na presente perspectiva, temos o estudo da decoerência desse estado-em função de  $\theta$ , bem como a geração dos mesmos em modos viajantes. Devemos lembrar que, na proposta de geração deste estado foi feita uma restrição, impondo-se a detecção somente em  $|g\rangle$  para o estado atômico. Se retirarmos esta imposição podemos gerar um estado diferente do proposto neste trabalho e verificar a ocorrência ou não dos efeitos citados.

# Apêndice A

## Dedução da Eq.(4.3)

Sabemos que (anotando  $\hat{H}_{int} = \hat{H}$  por brevidade)

$$|\Psi(t)\rangle = \mathcal{U}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle \quad (\text{A.1})$$

onde  $\mathcal{U}(t, t_0) = \exp[-i\hat{H}(t - t_0)/\hbar]$ . Sendo  $\hat{H} = \hbar\omega_{ef}\hat{a}^\dagger\hat{a}(|i\rangle\langle i| - |e\rangle\langle e|)$ . Entretanto temos

$$\exp[-i\hat{H}(t)/\hbar] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-it/\hbar)^n \hat{H}^n. \quad (\text{A.2})$$

Portanto substituindo  $\hat{H}$  na expressão anterior teremos

$$\exp[-i\hat{H}(t - t_0)/\hbar] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{it}{\hbar}\right)^n (\hbar\omega_{ef}\hat{a}^\dagger\hat{a})^n (|i\rangle\langle i| - |e\rangle\langle e|)^n, \quad (\text{A.3})$$

ficando da seguinte forma

$$\exp[-i\hat{H}(t - t_0)/\hbar] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{it}{\hbar}\right)^n (\hbar\omega_{ef}\hat{a}^\dagger\hat{a})^n (|i\rangle\langle i| - (-1)^n |e\rangle\langle e|). \quad (\text{A.4})$$

Se utilizarmos

$$\begin{aligned} (|i\rangle\langle i|)^n &= |i\rangle\langle i| \\ (|e\rangle\langle e|)^n &= |e\rangle\langle e| \\ (|e\rangle\langle e|)(|i\rangle\langle i|) &= 0 \\ (|e\rangle\langle e| - |i\rangle\langle i|)^n &= |e\rangle\langle e| - (-1)^n |i\rangle\langle i| \end{aligned}$$

Substituindo a Eq. (A.4) na Eq.(A.5) para  $|\Psi(t_0)\rangle = [C_g |g\rangle + C_e |e\rangle] |\alpha\rangle$ , encontraremos

$$\begin{aligned}
\exp[-i\hat{H}(t)/\hbar] |\Psi(t_0)\rangle &= C_g \exp[-i\hat{H}(t)/\hbar] |g\rangle |\alpha\rangle \\
&\quad + C_e \exp[-i\hat{H}(t)/\hbar] |e\rangle |\alpha\rangle \\
\exp[-i\hat{H}(t)/\hbar] |\Psi(t_0)\rangle &= C_g |g\rangle |\alpha\rangle + C_e |e\rangle |\alpha\rangle \\
&\quad + C_g \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{it}{\hbar}\right)^n (|i\rangle \langle i| - (-1)^n |e\rangle \langle e|) |g\rangle \\
&\quad \times (\hbar\omega_{ef} \hat{a}^\dagger \hat{a})^n |\alpha\rangle \\
&\quad + C_e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{it}{\hbar}\right) (|i\rangle \langle i| - (-1)^n |e\rangle \langle e|) |e\rangle \\
&\quad \times (\hbar\omega_{ef} \hat{a}^\dagger \hat{a})^n |\alpha\rangle \\
\exp[-i\hat{H}(t)/\hbar] |\Psi(t_0)\rangle &= C_g |g\rangle |\alpha\rangle + C_e |e\rangle \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{it}{\hbar}\right) (-1)^n \right. \\
&\quad \left. \times (\hbar\omega_{ef} \hat{a}^\dagger \hat{a})^n |\alpha\rangle\right] \\
\exp[-i\hat{H}(t)/\hbar] |\Psi(t_0)\rangle &= C_g |g\rangle |\alpha\rangle + C_e |e\rangle \{\exp[it\omega_{ef} \hat{a}^\dagger \hat{a}]\} |\alpha\rangle \\
\exp[-i\hat{H}(t)/\hbar] |\Psi(t_0)\rangle &= C_g |g\rangle |\alpha\rangle + C_e |e\rangle |\exp[it\omega_{ef}]\alpha\rangle. \tag{A.5}
\end{aligned}$$

Deixando claro a importância do terceiro nível auxiliar.

# Apêndice B

## Propriedades estatísticas via funções de normalização

Neste apêndice, mostraremos como podemos representar as propriedades estatísticas em termos das funções de normalização do estado proposto. Sabemos que,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_N^\varepsilon(n; \alpha, \theta) = 1, \quad (\text{B.1})$$

logo substituindo a expressão da  $P_N^\varepsilon(n; \alpha, \theta)$  obtida no capítulo 3 teremos

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^2)^n}{n! \mathcal{F}_N^\varepsilon(\alpha)} \left\{ 1 + \varepsilon \cos(n\theta) + \frac{1}{2^N} \sum_{l=1}^{Jm} \{(2^N - 2l) \right. \\ \left. \times [2 \cos \frac{nl\theta}{2^{N-1}} + \varepsilon [\cos n\theta(1 + \frac{l}{2^{N-1}}) + \cos n\theta(1 - \frac{l}{2^{N-1}})]]\} \right\}, \quad (\text{B.2})$$

donde podemos expressar as funções de normalização em termos de

$$\mathcal{F}_N^\varepsilon(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^2)^n}{n!} \Lambda. \quad (\text{B.3})$$

onde  $\Lambda$  será dado por

$$\Lambda = \left\{ 1 + \varepsilon \cos(n\theta) + \frac{1}{2^N} \sum_{l=1}^{Jm} \{(2^N - 2l) \right. \\ \left. \times [2 \cos \frac{nl\theta}{2^{N-1}} + \varepsilon [\cos n\theta(1 + \frac{l}{2^{N-1}}) + \cos n\theta(1 - \frac{l}{2^{N-1}})]]\} \right\}. \quad (\text{B.4})$$

Se derivarmos  $\mathcal{F}_N^\varepsilon(\alpha)$  com respeito a  $\alpha^2$  encontraremos que

$$\alpha^2 \mathcal{F}_N^{\varepsilon(1)}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(\alpha^2)^n}{n!} \Lambda, \quad (\text{B.5})$$

Entretanto, sabemos que

$$\langle \hat{n} \rangle_N^\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} n P_N^\varepsilon(n; \alpha, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(\alpha^2)^n}{\mathcal{F}_N^\varepsilon(\alpha) n!} \Lambda \quad (\text{B.6})$$

sendo assim, basta comparar as Eqs.(B.5 e B.6) que chegaremos ao seguinte resultado

$$\langle \hat{n} \rangle_N^\varepsilon = \alpha^2 \frac{\mathcal{F}_N^{\varepsilon(1)}(\alpha)}{\mathcal{F}_N^\varepsilon(\alpha)}. \quad (\text{B.7})$$

Seguindo o mesmo procedimento, temos que

$$\langle \hat{n}^2 \rangle_N^\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_N^\varepsilon(n; \alpha, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (\alpha^2)^n}{\mathcal{F}_N^\varepsilon(\alpha) n!} \Lambda$$

porém, teremos que derivar  $\mathcal{F}_N^\varepsilon(\alpha)$  duas vezes, que fornece

$$\mathcal{F}_N^{\varepsilon(2)}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2 - n) (\alpha^2)^{n-2}}{n!} \Lambda \quad (\text{B.8})$$

que pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathcal{F}_N^{\varepsilon(2)}(\alpha) = \alpha^{-4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (\alpha^2)^n}{n!} \Lambda - \alpha^{-4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n (\alpha^2)^n}{n!} \Lambda. \quad (\text{B.9})$$

Portanto, se passarmos o ultimo termo da expressão anterior para a esquerda teremos, enfim,

$$\alpha^4 \mathcal{F}_N^{\varepsilon(2)}(\alpha) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n (\alpha^2)^n}{n!} \Lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (\alpha^2)^n}{n!} \Lambda$$

implicando em

$$\langle \hat{n}^2 \rangle_N^\varepsilon = \langle \hat{n} \rangle_N^\varepsilon + \alpha^4 \frac{\mathcal{F}_N^{\varepsilon(2)}(\alpha)}{\mathcal{F}_N^\varepsilon(\alpha)}. \quad (\text{B.10})$$

# Apêndice C

## Cálculo da variância nas quadraturas

Neste apêndice, mostraremos como chegar as expressões da variância nas quadraturas, obtidas no capítulo 5. Definimos nossos operadores de quadratura em termos de

$$\hat{x}_1 = \hat{a} + \hat{a}^\dagger, \quad \hat{x}_2 = (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)/i, \quad (\text{C.1})$$

e sua relação de comutação, em unidades de  $\hbar$ , é

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = 2i. \quad (\text{C.2})$$

Logo, o princípio da incerteza requer que suas variâncias satisfaçam

$$\langle (\Delta \hat{x}_1)^2 \rangle \cdot \langle (\Delta \hat{x}_2)^2 \rangle \geq 1 \quad (\text{C.3})$$

onde a igualdade na equação acima é satisfeita para estados de mínima incerteza, como o vácuo e o estado coerente, para os quais ambas variâncias nas quadraturas são iguais a 1. Compressão ocorre quando  $\langle (\Delta \hat{x}_1)^2 \rangle$  ou  $\langle (\Delta \hat{x}_2)^2 \rangle$  é menor que 1 a outra sendo maior. Por definição, a variância em  $\hat{A}$  é dada por

$$\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2, \quad (\text{C.4})$$

logo, teremos que calcular

$$\begin{aligned} \langle \Psi_N^\varepsilon(\alpha) | \Delta \hat{x}_1 | \Psi_N^\varepsilon(\alpha) \rangle &= \langle \Psi_N^\varepsilon(\alpha) | \hat{x}_1^2 | \Psi_N^\varepsilon(\alpha) \rangle \\ &\quad - (\langle \Psi_N^\varepsilon(\alpha) | \hat{x}_1 | \Psi_N^\varepsilon(\alpha) \rangle)^2 \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

e

$$\begin{aligned} \langle \Psi_N^\varepsilon(\alpha) | \Delta \hat{x}_2 | \Psi_N^\varepsilon(\alpha) \rangle &= \langle \Psi_N^\varepsilon(\alpha) | \hat{x}_2^2 | \Psi_N^\varepsilon(\alpha) \rangle \\ &\quad - (\langle \Psi_N^\varepsilon(\alpha) | \hat{x}_2 | \Psi_N^\varepsilon(\alpha) \rangle)^2. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Porém, podemos expressar  $\hat{x}_1$  e  $\hat{x}_2$  por meio de uma expressão geral, dada por

$$\hat{x}_k = i^{1-k} [\hat{a} - (-1)^k \hat{a}^\dagger], \quad (\text{C.7})$$

e por

$$\hat{x}_k^2 = i^{2(1-k)}[\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} - (-1)^k(1 + 2\hat{a}^\dagger \hat{a})] \quad (\text{C.8})$$

onde  $k = 1$  ou  $2$ , correspondendo a respectiva quadratura. Explicitando o valor de  $k$  e substituindo as Eqs.(C.7 e C.8) na Eq. (C.6) e na Eq. (C.5) teremos variância em termos dos valores médios dos operadores  $\hat{n}$ ,  $\hat{a}^2$ ,  $\hat{a}^{\dagger 2}$ ,  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$ . Logo, devemos calcular estes valores médios, entretanto devemos lembrar que,

$$\hat{a} |\Psi_N^\varepsilon(\alpha)\rangle = \eta_N^\varepsilon(\alpha) \sum_{j=0}^{Jm} \alpha_j (e^{i\theta} |e^{i\theta} \alpha_j\rangle + \varepsilon |\alpha_j\rangle) \quad (\text{C.9})$$

$$\hat{a}^2 |\Psi_N^\varepsilon(\alpha)\rangle = \eta_N^\varepsilon(\alpha) \sum_{j=0}^{Jm} \alpha_j^2 (e^{2i\theta} |e^{i\theta} \alpha_j\rangle + \varepsilon |\alpha_j\rangle) \quad (\text{C.10})$$

$$\langle \Psi_N^\varepsilon(\alpha) | \hat{a}^\dagger = \eta_N^\varepsilon(\alpha) \sum_{j'=0}^{Jm} \alpha_{j'}^* (e^{-i\theta} \langle \alpha_{j'} e^{i\theta} | + \varepsilon \langle \alpha_{j'} |) \quad (\text{C.11})$$

$$\langle \Psi_N^\varepsilon(\alpha) | \hat{a}^{\dagger 2} = \eta_N^\varepsilon(\alpha) \sum_{j'=0}^{Jm} \alpha_{j'}^{*2} (e^{-2i\theta} \langle \alpha_{j'} e^{i\theta} | + \varepsilon \langle \alpha_{j'} |), \quad (\text{C.12})$$

logo  $\langle \hat{a} \rangle$ ,  $\langle \hat{a}^\dagger \rangle$ ,  $\langle \hat{a}^2 \rangle$ ,  $\langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle$  e  $\langle \hat{n} \rangle$  serão dados por,

$$\begin{aligned} \langle \hat{a} \rangle &= \eta_N^{\varepsilon 2}(\alpha) \sum_{j,j'=0}^{Jm} \alpha_j [e^{i\theta} \langle \alpha_{j'} e^{i\theta} | e^{i\theta} \alpha_j \rangle + \langle \alpha_{j'} | \alpha_j \rangle \\ &\quad + \varepsilon (e^{i\theta} \langle \alpha_{j'} | e^{i\theta} \alpha_j \rangle + \langle \alpha_{j'} e^{i\theta} | \alpha_j \rangle)] \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^\dagger \rangle &= \eta_N^{\varepsilon 2}(\alpha) \sum_{j,j'=0}^{Jm} \alpha_{j'}^* [e^{-i\theta} \langle \alpha_{j'} e^{i\theta} | e^{i\theta} \alpha_j \rangle + \langle \alpha_{j'} | \alpha_j \rangle \\ &\quad + \varepsilon (e^{-i\theta} \langle \alpha_{j'} e^{i\theta} | \alpha_j \rangle + \langle \alpha_{j'} | e^{i\theta} \alpha_j \rangle)]. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^2 \rangle &= \eta_N^{\varepsilon 2}(\alpha) \sum_{j,j'=0}^{Jm} \alpha_j^2 [e^{2i\theta} \langle \alpha_{j'} e^{i\theta} | e^{i\theta} \alpha_j \rangle + \langle \alpha_{j'} | \alpha_j \rangle \\ &\quad + \varepsilon (e^{2i\theta} \langle \alpha_{j'} | e^{i\theta} \alpha_j \rangle + \langle \alpha_{j'} e^{i\theta} | \alpha_j \rangle)] \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle &= \eta_N^{\varepsilon 2}(\alpha) \sum_{j,j'=0}^{Jm} \alpha_{j'}^{*2} [e^{-2i\theta} \langle \alpha_{j'} e^{i\theta} | e^{i\theta} \alpha_j \rangle + \langle \alpha_{j'} | \alpha_j \rangle \\ &\quad + \varepsilon (e^{-2i\theta} \langle \alpha_{j'} e^{i\theta} | \alpha_j \rangle + \langle \alpha_{j'} | e^{i\theta} \alpha_j \rangle)]. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{n} \rangle = & \eta_N^{\varepsilon^2}(\alpha) \sum_{j,j'=0}^{Jm} \alpha_j \alpha_{j'}^* [\langle \alpha_{j'} e^{i\theta} | e^{i\theta} \alpha_j \rangle + \langle \alpha_{j'} | \alpha_j \rangle \\ & + \varepsilon (e^{i\theta} \langle \alpha_{j'} | e^{i\theta} \alpha_j \rangle + e^{-i\theta} \langle \alpha_{j'} e^{i\theta} | \alpha_j \rangle)]. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Utilizando a relação de “overlap” entre dois estados coerentes arbitrários,  $\langle \beta | \alpha \rangle = \exp[-(1/2)(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \alpha\beta^*]$ , e calculando para cada termo nas expressões acima, encontraremos, por exemplo,

$$\sum_{j,j'=0}^{Jm} \langle \alpha_{j'} | \alpha_j \rangle = \sum_{j,j'=0}^{Jm} e^{-\alpha^2 + \alpha^2 \cos[(j-j')\theta/2^{N-1}] + i\{(\theta j/2^{N-1}) + \alpha^2 \sin[(j-j')\theta/2^{N-1}]\}} \quad (\text{C.18})$$

logo, substituindo as Eqs.(C.17, C.16, C.15, C.14 e C.13) nas Eqs. (C.5 e C.6) encontraremos as Eqs. (5.8 e 5.9) obtidas no capítulo 5.

# Referências Bibliográficas

- [1] H. Brown , R.W. Twiss, Nature, **177**, 27 (1956).
- [2] R.J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963).
- [3] H.J. Carmichael, D.F. Walls, J Phys. B **9** L43 (1976).
- [4] L. Mandel, Opt. Lett. **4**, 205 (1979); Phys. Scr. **T12**, 34 (1986); L. Mandel et al., Phys. Rev. Lett., **49**, 136 (1982).
- [5] D. Stoler, Phys. Rev. D, **1**, 3217(1970).
- [6] R.E. Slusher, L.W. Hollberg, B.Yurke, Phys. Rev. Letters, **55**, 2409(1985).
- [7] F.T. Arecchi, E. Gatti, A. Sona, Phys. Rev. Lett. **20**, 27 (1966); Phys. Lett. **16**, 32 (1966).
- [8] H.J. Kimble, M. Degenais, L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **39**, 691 (1977); a previsão teórica: H.J. Carmichael, D.F. Walls, J. Phys. **B9**, L43 (1976).
- [9] D. Stoler, Phys. Rev. **D1**, 3217 (1970).
- [10] R.E. Slusher et al., Phys. Rev. Lett. **55**, 2409 (1985); R.L. Robinson, Science, **230**, 927 (1985).
- [11] E.T. Jaynes, F.W. Cummings: Proc IEEE **51**, 89(1963).
- [12] G. Rempe, H. Walther and N. Klein, Phys. Rev. Lett. **58**, 353 (1987).
- [13] W. Schleich, D.F. Walls e J.A. Wheeler, Phys. Rev. **A38**, 1177 (1988); Nature, **326**, 574 (1987).
- [14] D.F. Walls, G.J. Milburn, “Quantum Optics” Springer-Verlag,(Berlin, 1994).
- [15] L. Mandel, E. Wolf, Optical Coherence and Quantum Optics Cambridge Uni. Press, NY(1995). B. Baseia, M.H.Y. Moussa and V.S. Bagnato, Phys. Lett. **A240** 277(1998); R. Ragi,V.S. Bagnato e B. Baseia , Mod. Phys. Lett. **B13** ,131 (1999) .
- [16] H.M. Nussenzveig, “Introduction to Quantum Optics” (Gordon & Breach, NY (1972)), Cap. 4. 30

- [17] D.T. Pegg, S.M. Barnett, Europhys. Lett., **6**, 483 (1988); Phys. Rev. **A39**, 1665 (1989). B. Baseia, C. Dantas, V. Bagnato, R. Vyas, Phys. Lett. **9 A14**, 153 (1994).
- [18] R. Ragi, V.S. Bagnato and B.Baseia, Intern. Journal of Modern Physics B, **12**, 1495(1998).
- [19] I.A. Malkin e V.I. Man'ko, "Dynamical Symmetries and Coherent States (Nauka, Moscow (1979)). C.C. Gerry e E.E. Hach III, Phys. Lett. **A174**, 185 (1993); **A179**, 1 (1993). K. Zaheer e M.R. Wahiddin, J. Mod. Opt. **41**, 151 (1994). V.V. Dodonov, V.I. Manko and D.E. Nikorov, Physica **72**, 597(74); **51**, 3328(95).
- [20] J.M.C. Malbouisson and B.Baseia, Journal of Modern Optics, **46**, 2015(1999).
- [21] V. Buzek, A. Vidiella-Barranco and P. L. Knight, Phys. Rev. **A45**, 6570 (1992).
- [22] M. Brune, S. Haroche, V. Lèfreve, J. M. Raimond and N. Zagury, Phys. Rev. Lett. **65**, 876 (1990); M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond, L. Davidovich and N. Zagury, Phys. Rev. **A45**, 5193 (1992); L. Davidovich, A. Maali, M. Brune, J. M. Raimond and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **71**, 2360 (1993); L. Davidovich, M. Brune, J. M. Raimond and S. Haroche, Phys. Rev. **A53**, 1295 (1996).
- [23] C.C. Gerry and P.L. Knight, Am. J. Phys., **65**, 964(1997).
- [24] W. Schleich, M.Pernigo and Fan Le Kien, Phys. Rev. **A44**, 2172 (1991).
- [25] R.M. Serra, N. G. de Almeida, C.J. Villas-Bôas, and M.H.Y. Moussa, Phys. Rev. A, **62**, 0438XX-1(1999).
- [26] X.T. Zou and L. Mandel, Phys. Rev. **A41**, 475 (1990).
- [27] G.S. Argawal and K. Tara, Phys. Rev. **A46**, 485 (1992).
- [28] J.M.C. Malbouisson, S. B. Duarte and B.Baseia, Physica A **285**, 397(2000)
- [29] M. Hillery, R.F. O 'Connell and E.P.Wigner, Phys. Rep. **106**, 121(1984).
- [30] E.C.G. Sudarsham, Phys. Rev. Letters, **10**, 277(1963).
- [31] M. Hillery, Phys. Letters, **111A**, 409(1985).
- [32] C.T. Lee, Phys. Rev. A, **44**, 2775(1991)
- [33] R. Loudon, Rep. Prog. Phys, **43**, 58(1980).
- [34] J. M. Raimond, M. Brune and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **79**, 1964 (1997)