

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE FÍSICA

Alexandre Divino de Souza

*Modelo de Jaynes-Cummings
de dois fótons:
estudo e aplicações*

Goiânia
2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE FÍSICA

*Modelo de Jaynes-Cummings
de dois fótons:
estudo e aplicações*

Alexandre Divino de Souza

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da
Universidade Federal de Goiás como requisito para
a obtenção do título de MESTRE em Física.

Orientador: Prof. Dr. Basílio Baseia

Co-orientador: Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar

Goiânia
2009

Dados internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(GPT/BC/UFG)

Souza, Alexandre Divino de

S729m Modelo de Jaynes-Cummings de dois fótons [manuscrito]:
estudo e aplicações. / Alexandre Divino de Souza . - 2009
60f.: figs.

Orientador: Prof. Dr. Basílio Baseia.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Física, 2009.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras.

Apêndices.

1. Interação átomo-campo 2. Teletransporte e troca de
emaranhamento quânticos 3. Modelo de Jaynes-Cummings

I. Título.

CDU:537.8

*À minha família e a minha
namorada Lisângela Lacerda de Lima.*

“Perder tempo em aprender coisas que não interessam, priva-nos de descobrir coisas interessantes.”

Carlos Drummond de Andrade

Agradecimentos

- Ao Professor Dr. Basílio Baseia pela orientação deste trabalho.
- Aos Professores Dr. Ardiley Torres Avelar e M.e Wesley Bueno Cardoso pelo indispensável apoio, incentivo e co-orientação.
- Aos professores do IF-UFG que proporcionaram um bom ambiente de trabalho.
- À todos os amigos pelos momentos de discussão e descontração. Em especial aos amigos Thiago Milograno, Salmon Landi e Udson Mendes pelo excepcionais momentos de lazer e também no futebol.
- Aos amigos Udson Mendes e Prof. Salviano de Araújo Leão pela valiosa ajuda na formatação desta dissertação.
- Ao meu ex-Professor Naldir de Souza Rocha pelos valiosos conselhos aos quais me colocaram neste caminho.
- Aos Professores Dr. Jorge Mário Carvalho Malbouisson e Dr. Ricardo Avelino Gomes por terem participado da banca examinadora e contribuído para edição final deste trabalho.
- À minha namorada Lisângela Lacerda de Lima pelo intenso carinho, compreensão e companheirismo.

Este trabalho foi financiado pela CAPES.

Resumo

Neste trabalho estudamos o modelo de Jaynes-Cummings de dois fótons para descrever a interação de um átomo de Rydberg na configuração Ξ (ladeira) de três níveis com um único modo do campo eletromagnético. A descrição deste sistema foi obtida usando o hamiltoniano efetivo e também o hamiltoniano microscópico completo, com o objetivo de compararmos resultados obtidos nas duas descrições. No modelo de Jaynes-Cummings de dois fótons descrito pelo hamiltoniano microscópico completo propusemos esquemas para realização de troca de emaranhamento quântico e teletransporte quântico aproximado e condicional de estados atômicos desconhecidos bem como estados de superposição de zero e dois fótons do campo. Esses dois esquemas foram realizados sem uso de medida na base dos estados de Bell.

Abstract

In this work we have studied the two-photon Jaynes-Cummings model to describe the interaction of a three-level atom in Ξ -configuration with a single-mode of a cavity-field. We have used the effective and full microscopic Hamiltonian approach to compare the results obtained in these two descriptions. We employed the two-photon Jaynes-Cummings model in the the full microscopic Hamiltonian context to implement schemes to quantum entanglement swapping, for approximate and conditional quantum teleportation for an unknown atomic state, and for a superposition of zero- and two-photon states. Both schemes were implemented using no measurement in the Bell base states.

Sumário

Lista de Figuras	v
1 Introdução	1
2 Modelo de Jaynes-Cummings de dois fótons	4
2.1 Introdução	4
2.2 Interação átomo-campo	4
2.3 Hamiltoniano microscópico completo	8
2.4 Metodologia	11
2.5 Aplicação do método das amplitudes de probabilidade	13
2.5.1 Hamiltoniano efetivo	13
2.5.2 Hamiltoniano microscópico completo	16
2.6 Comparação entre os hamiltonianos	20
3 Teletransporte Quântico	23
3.1 Introdução	23
3.2 Teletransporte quântico sem medida dos estados de Bell	27
3.3 Teletransporte de estado atômico	28
3.4 Teletransporte de estado do campo	32
4 Troca de emaranhamento quântico	38
4.1 Introdução	38
4.2 Troca de emaranhamento quântico via JC de dois fótons	39
5 Conclusão	45

Apêndices	46
A Quantização do campo	47
A.1 Quantização de um Oscilador Harmônico Simples	47
A.2 Quantização do Campo Eletromagnético	48
B Sistemas Físicos Necessários	52
B.1 Átomos de Rydberg	52
B.2 Cavidades com Alto Fator de Qualidade	53
B.3 Detectores Seletivos	54
B.4 Zonas de Ramsey	54
Referências Bibliográficas	56

Lista de Figuras

2.1	Diagrama esquemático do átomo de três níveis interagindo com um único modo do campo na cavidade.	9
2.2	Diagrama esquemático do átomo de dois níveis interagindo com um único modo do campo na cavidade.	14
2.3	Probabilidade de detecção do estado $ a, n\rangle$ em função de λt , onde o estado inicial do sistema é $ e, 0\rangle$	15
2.4	Probabilidade de detecção do estado $ a, n\rangle$ em função de λt , onde o estado inicial do sistema é $ e, 2\rangle$	15
2.5	Probabilidade de detecção do estado $ a, n\rangle$ onde o estado inicial do sistema é $ e, 0\rangle$, onde consideramos a dessintonia $\delta = 0$	18
2.6	Probabilidade de detecção do estado $ a, n\rangle$ onde o estado inicial do sistema é $ e, 2\rangle$, onde consideramos a dessintonia $\delta = 0$	18
2.7	Probabilidade de detecção do estado $ a, n\rangle$ onde o estado inicial do sistema é $ e, 0\rangle$, onde consideramos a dessintonia $\delta = g$	19
2.8	Probabilidade de detecção do estado $ a, n\rangle$ onde o estado inicial do sistema é $ e, 2\rangle$, onde consideramos a dessintonia $\delta = g$	19
2.9	Probabilidade de detecção do estado $ a, n\rangle$ onde o estado inicial do sistema é $ e, 0\rangle$, onde consideramos a dessintonia $\delta = 80g$	20
2.10	Probabilidade de detecção do estado $ a, n\rangle$ onde o estado inicial do sistema é $ e, 2\rangle$, onde consideramos a dessintonia $\delta = 80g$	20
3.1	Esquema representativo do teletransporte de estado atômico.	29
3.2	Probabilidade de detecção do estado $ f, 1\rangle_{2C}$ no estado $ \Psi\rangle_{2C}$ em função do coeficiente α	30
3.3	Probabilidade de detecção do estado $ g, 2\rangle_{2C}$ no estado $ \Psi\rangle_{2C}$ em função do coeficiente α	30

3.4	Probabilidade de sucesso do teletransporte do estado atômico em função do coeficiente α obtidos a partir da descrição via hamiltoniano efetivo (P_w) e a partir do hamiltoniano microscópico completo (P_a).	31
3.5	Fidelidade do teletransporte do estado atômico em função do coeficiente α obtidos a partir da descrição via hamiltoniano efetivo (F_w) e a partir do hamiltoniano microscópico completo (F_a).	31
3.6	Esquema representativo do teletransporte de estado do campo.	33
3.7	Probabilidade de detecção do estado $ 0, 2\rangle_{C_1, C_2}$ no estado $ \Psi\rangle_{C_1, C_2}$ em função do coeficiente α	34
3.8	Probabilidade de detecção do estado $ 1, 1\rangle_{C_1, C_2}$ no estado $ \Psi\rangle_{C_1, C_2}$ em função do coeficiente α	34
3.9	Probabilidade de sucesso do teletransporte do estado do campo em função do coeficiente α obtidos a partir da descrição via hamiltoniano efetivo (P_w) e a partir do hamiltoniano microscópico completo (P_c).	36
3.10	Fidelidade do teletransporte do estado do campo em função do coeficiente α obtidos a partir da descrição via hamiltoniano efetivo (F_w) e a partir do hamiltoniano microscópico completo (F_c).	36
3.11	Função de Wigner do estado teletransportado para $\alpha = 1$	37
3.12	Função de Wigner do estado a ser teletransportado $ \varphi_{in}\rangle$, onde $\alpha = 1$	37
3.13	Função de Wigner do estado teletransportado para $\alpha = 1/\sqrt{2}$	37
3.14	Função de Wigner do estado a ser teletransportado $ \varphi_{in}\rangle$, onde $\alpha = 1/\sqrt{2}$	37
3.15	Função de Wigner do estado teletransportado para $\alpha = 0$	37
3.16	Função de Wigner do estado a ser teletransportado $ \varphi_{in}\rangle$, onde $\alpha = 0$	37
4.1	Esquema representativo da troca de emaranhamento quântico.	39
4.2	Esquema representativo da troca de emaranhamento quântico dos estados emaranhados $ \Phi\rangle_{1,2}$ (átomo 1 e 2) e $ \Phi\rangle_{3,4}$ (das cavidades C_3 e C_4) para $ \Psi\rangle_{1,4}$ (átomo 1 e cavidade C_4).	40
4.3	Probabilidade de detecção do estado $ g\rangle_1 2\rangle_3 0\rangle_4$ no estado $ \Psi\rangle_{134}$ em função do coeficiente β , na curva com erro tem-se que $\varepsilon = 0, 1$	42

4.4	Probabilidade de sucesso da realização da troca de emaranhamento quântico em função do coeficiente β para as duas descrições, onde $\varepsilon = 0, 1$. As curvas nominadas por EHA correspondem as obtidas via hamiltoniano efetivo, já as FMHA é via hamiltoniano microscópico completo.	42
4.5	Fidelidade do estado obtido a partir da troca de emaranhamento quântico em função do coeficiente β para as duas descrições, onde $\varepsilon = 0, 1$. As curvas nominadas por EHA correspondem as obtidas via hamiltoniano efetivo, já as FMHA é via hamiltoniano microscópico completo.	43

1 Introdução

Desde 1965 os processos de dois fótons em sistemas atômicos foram propostos [1] e desde então trabalhos teóricos têm sido desenvolvidos com o objetivo de estudar propriedades estatísticas e dinâmicas destes sistemas [2, 3]. Observou-se que estes sistemas são importantes em Óptica Quântica devido a seu alto grau de correlação entre os fótons emitidos. Esta correlação pode levar a geração de estados não-clássicos do campo eletromagnético, tais como estados comprimidos [4], estados de Fock [5], estados de fase [6], exibição de estatística sub-Poissoniana [7], anti-agrupamento de fótons [7], violação de desigualdades na óptica clássica em experimentos de interferência [8,9], entre outros eventos.

Em Óptica Quântica os processos de dois fótons em sistemas atômicos tem sido descritos, durante muitos anos, pelo hamiltoniano efetivo. Porém, foi mostrado que existem diferenças entre resultados obtidos a partir desta descrição [10]. A discrepância de resultados é atribuída usualmente à diferença dos elementos não-diagonais da matriz reduzida do campo eletromagnético obtida do hamiltoniano efetivo e do hamiltoniano microscópico completo [11]. Esta diferença surge nas amplitudes de probabilidade a partir do hamiltoniano microscópico completo quando é aplicado um caso limite, em que o número médio de fótons na cavidade é muito grande, para demonstrar que estas amplitudes são idênticas as obtidas via hamiltoniano efetivo. Porém observa-se que há uma diferença entre elas de um fator de fase global, sendo este o responsável pela discrepância nos resultados obtidos nas duas descrições neste caso. Discutimos isto com mais detalhes no Capítulo 2.

Em 1987 a teoria quântica dos micromasers de dois fótons foi desenvolvida [12], a qual foi implementada experimentalmente [13], tornando possível o estudo da interação de um átomo com um único modo do campo eletromagnético em condições controláveis.

Em 1993 o teletransporte quântico foi apresentado por Bennett *et al* [14], sendo hoje um dos processos fundamentais para a aplicação direta na computação quântica [15] e na comunicação quântica [16]. A caracterização crucial deste fenômeno é a transferência de informação quântica entre sistema não interagentes usando para isto somente um canal

quântico e outro clássico. Tem recebido uma grande atenção da comunidade científica desde a sua proposta pioneira, principalmente após a sua realização experimental, onde nas primeiras experimentações foram usados pares de fótons emaranhados pelo processo de conversão paramétrica [17–19]. Em seguida usaram estados comprimidos emaranhados [20], bem como pontos quânticos como fontes de fótons [21]. Desde então, vários esquemas foram sugeridos para a implementação do processo de teletransporte quântico em diferentes contextos, tais como em armadilhas de íons [22], campos viajantes [23, 24] e em campos armadilhados em cavidades eletrodinâmicas quânticas [25, 26].

O emaranhamento quântico é uma das características mais interessantes da mecânica quântica, e tem se tornado uma fonte importante para estudos fundamentais desta teoria, incluindo o paradoxo de Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) [27]. Ele também desempenha um papel de destaque nos processamentos de informação quântica, tais como teletransporte quântico [14, 28, 29], codificação superdensa¹ [30] e criptografia quântica² [31]. Devido a sua importância, nos últimos anos tem atraído muita atenção para a realização do emaranhamento quântico; logo vários sistemas quânticos foram propostos como possíveis candidatos para a engenharia de estados emaranhados, tais como em cavidades eletrodinâmicas [29, 32], armadilhas de íons [33] e sistemas ópticos [28]. Dentre estes, a cavidade eletrodinâmica quântica é um dos sistemas mais promissores para a geração de estados emaranhados e para a realização de processamento de informação em pequena escala [34]. A razão disto se deve a que, nestas cavidades o tempo de vida do estados atômicos é longo, o que permite armazenar os q-bits e dando tempo para que os fótons possam ser aplicados no envio de informação quântica por longas distâncias, através de fibras ópticas. O emaranhamento quântico de dois átomos e também o de multi-partículas já foram demonstrados experimentalmente em cavidades eletrodinâmicas quânticas [35–37].

Nos capítulos seguintes, esta dissertação está disposta da seguinte forma: no segundo capítulo desenvolvemos a teoria do modelo de Jaynes-Cummings de dois fótons, deduzindo o hamiltoniano microscópico completo, obtido através das aproximações de dipolo e de onda girante; resolvemos a equação de Schrödinger dependente do tempo

¹Codificação superdensa é uma técnica que envia dois bits de informação clássica usando apenas um q-bit com auxílio do emaranhamento quântico.

²Criptografia quântica utiliza os princípios da Mecânica Quântica para garantir uma comunicação segura. Com ela, emissor e receptor podem criar e compartilhar uma chave secreta para criptografar e decifrar suas mensagens.

usando o método das amplitudes de probabilidade. Em seguida apresentamos resultados obtidos a partir da descrição deste sistema via hamiltoniano efetivo e também via hamiltoniano microscópico completo, com o intuito de comparar resultados e eventuais diferenças encontradas nas duas descrições. Por fim, discutimos as restrições sobre um tal sistema sendo descrito pelo hamiltoniano efetivo. No terceiro capítulo discutimos o protocolo de teletransporte de estados quânticos, com e sem medida na base dos estados de Bell, e fazemos a aplicação de teletransporte de estados atômicos e do campo usando o modelo de Jaynes-Cummings de dois fótons, comparando tanto a probabilidade de sucesso do teletransporte quanto a fidelidade do estado teletransportado. No quarto capítulo apresentamos a idéia da troca de emaranhamento quântico, e fazemos a aplicação do modelo de Jaynes-Cummings de dois fótons para a realização da troca de emaranhamento quântico, a probabilidade de sucesso da troca de emaranhamento e a fidelidade de geração de um estado bipartite maximamente emaranhado, composto pelo estado do átomo e de um modo do campo. No quinto e último capítulo apresentamos as conclusões do trabalho e perspectivas futuras usando este modelo.

2 Modelo de Jaynes-Cummings de dois fótons

2.1 Introdução

Apresentamos neste capítulo dois modelos de Jaynes-Cummings de dois fótons, usados para descrever a interação átomo-campo, são eles: o hamiltoniano efetivo e o hamiltoniano microscópico completo. Iniciamos descrevendo a interação átomo-campo, e em seguida apresentamos a dedução do hamiltoniano microscópico completo. Resolvemos a equação de Schrödinger para este hamiltoniano usando o método das amplitudes de probabilidade para as duas descrições, obtendo a evolução do estado do sistema átomo-campo, $|\psi(t)\rangle$. Obtemos a evolução temporal da probabilidade de permanência do sistema num certo autoestado $|a, n\rangle$ do hamiltoniano que descreve a interação átomo-campo, onde a representa estado atômico e n o número de fótons no modo considerado do campo, a probabilidade é dada por $|\langle a, n|\psi(t)\rangle|^2$. Finalmente discutimos o limite físico no qual ambas descrições levem aos mesmos resultados [11].

2.2 Interação átomo-campo

Considere um sistema composto por N partículas carregadas com carga q_n na presença de um campo eletromagnético externo, descrito pelo potencial escalar $U(\mathbf{r}_n)$ e o potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}_n)$. A lagrangeana que descreve a dinâmica deste sistema é dada por [38],

$$L = \sum_n^N \frac{1}{2} m_n \dot{\mathbf{r}}_n^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} \int [\mathbf{E}^2(\mathbf{r}) - c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{r})] d^3r + \sum_n^N [q_n \dot{\mathbf{r}}_n \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_n) - q_n U(\mathbf{r}_n)], \quad (2.1)$$

onde o primeiro termo é a energia cinética das partículas, o segundo termo é a energia do campo eletromagnético e o terceiro termo é a energia de interação entre as partículas e o campo eletromagnético. Temos que na Eq.(2.1) o campo elétrico é dado por $\mathbf{E} = -\nabla U(\mathbf{r}) - \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$ e o campo magnético $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$. É possível obter desta lagrangeana as equações de Maxwell-Lorentz, que são compostas pelas quatro equações de Maxwell as quais descrevem a dinâmica do campo eletromagnético, e a equação de Newton-Lorentz

cuja força resultante nas partículas é a força de Lorentz, sendo que esta equação descreve a dinâmica das partículas carregadas.

Fazendo uma transformação de Legendre, para mudar a representação da coordenada associada à velocidade $\dot{\mathbf{r}}_n$ para o momento linear \mathbf{p}_n , obtemos o hamiltoniano de acoplamento mínimo [39], associado à lagrangeana acima, como sendo

$$H = \sum_n^N \frac{1}{2m_n} [\mathbf{p}_n - q_n \mathbf{A}(\mathbf{r}_n, t)]^2 + V(\mathbf{r}) + \sum_n^N q_n U(\mathbf{r}_n, t), \quad (2.2)$$

onde esta hamiltoniana é invariante sob transformação de *gauge*

$$U'(\mathbf{r}_n, t) = U(\mathbf{r}_n, t) - \frac{\partial}{\partial t} \xi(\mathbf{r}, t), \quad (2.3)$$

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}_n, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}_n, t) + \nabla \xi(\mathbf{r}, t), \quad (2.4)$$

sendo que $\xi(\mathbf{r}, t)$ é a função de *gauge* a ser definida de forma conveniente posteriormente.

A equação de Schrödinger dependente do tempo é dada por

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.5)$$

Para resolvermos esta equação é apropriado fazer uma transformação unitária \hat{R} de tal forma que $\psi'(\mathbf{r}, t) = \hat{R}\psi(\mathbf{r}, t)$, com o intuito de simplificarmos a forma da expressão final que obteremos do termo responsável pela interação do átomo-campo. Sendo assim, para mantermos a equação de Schrödinger invariante sob esta transformação unitária, temos que o novo hamiltoniano \hat{H}' fica expresso como

$$\hat{H}' = \hat{R}\hat{H}\hat{R}^\dagger + i\hbar \frac{\partial \hat{R}}{\partial t} \hat{R}^\dagger. \quad (2.6)$$

Considerando um caso simplificado no qual temos um átomo composto por um elétron orbitando em torno de um núcleo atômico na presença de um campo eletromagnético externo na Eq.(2.2), onde \mathbf{r} é a distância do elétron com respeito ao núcleo atômico, e escolhendo a transformação unitária $\hat{R} = e^{-i\frac{e}{\hbar}\xi(\mathbf{r}, t)}$, resulta o hamiltoniano \hat{H}' para este sistema na forma,

$$\hat{H}' = \frac{1}{2m} [\mathbf{p} - e\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t)]^2 + eU'(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}), \quad (2.7)$$

onde $\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t)$ e $U'(\mathbf{r}, t)$ são dados pelas Eqs. (2.3) e (2.4) sem o índice n , respectivamente.

Fazendo a escolha de *gauge* de Coulomb, onde escolhemos que $U(\mathbf{r}, t) = 0$ e que o potencial vetor satisfaz a condição de transversalidade $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$. Esta escolha de

gauge não é invariante sob transformação de Lorentz, enquanto o gauge de Lorentz, este sim, é o invariante neste caso. Porém, no domínio de aplicabilidade da Óptica Quântica esta escolha na maioria das vezes não traz nenhuma inconsistência nos resultados obtidos: as partículas não se movimentam com velocidades relativísticas durante a interação átomo-campo. A grande vantagem da escolha do *gauge* de Coulomb é que o campo de radiação agora fica completamente descrito apenas usando o potencial vetor. O hamiltoniano \hat{H}' nesta escolha de *gauge* fica escrito como

$$\hat{H}' = \frac{1}{2m} [\mathbf{p} - e (\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla \xi(\mathbf{r}, t))]^2 - e \frac{\partial}{\partial t} \xi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}) . \quad (2.8)$$

O potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, para o caso em que não há fontes próximas do átomo, satisfaz à seguinte equação de onda

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 , \quad (2.9)$$

cuja solução é

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{A}_0^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} , \quad (2.10)$$

onde $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ é o vetor de onda do campo. Na aproximação de dipolo elétrico, o campo é suposto uniforme sobre toda dimensão do átomo, devido a ser o comprimento de onda do potencial vetor muito maior, $4000 \leq \lambda \leq 8000 \text{ \AA}$, comparado com as dimensões do átomo $|\mathbf{r}| \simeq 10 \text{ \AA}$. Com isto, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$ e podemos desconsiderar a variação espacial do potencial vetor sobre as dimensões do átomo na Eq.(2.10), implicando que $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq \mathbf{A}(t)$. Fazendo a escolha da função do *gauge* de Coulomb com sendo $\xi(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{r}$, temos que

$$\nabla \xi(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{A}(t) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t) \quad (2.12)$$

Substituindo estes resultados no hamiltoniano \hat{H}' dado pela Eq.(2.8), temos como resultado

$$\hat{H}' = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(t) , \quad (2.13)$$

onde $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ é o momento de dipolo elétrico e e é a carga do elétron. Logo, considerando o caso típico de átomos de Rydberg, podemos ver que a interação átomo-campo surge do tratamento do átomo como sendo um dipolo elétrico constituído de um elétron de valência com o “*hard core*” (núcleo atômico mais os outros elétrons das camadas internas, sendo que o conjunto possui carga total $+e$). Desta forma a interação átomo-campo é tal que o campo

eletromagnético muda somente o estado atômico do elétron de valência. Para obtenção do hamiltoniano acima, omitimos considerações relacionadas às contribuições advindas da interação do átomo com campo magnético e do movimento do átomo durante a interação com o campo eletromagnético, visto que estes fatores dependem do campo magnético que por sua vez aparece na força de Lorentz dividido pela velocidade da luz no vácuo, sendo assim irrelevante comparado com o termo de interação de dipolo elétrico obtido acima. Logo a interação entre um único átomo com o campo eletromagnético pode ser descrita pelo seguinte hamiltoniano na aproximação de dipolo elétrico

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_c - \hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}}, \quad (2.14)$$

onde \hat{H}_a e \hat{H}_c são as energias do átomo e do campo de radiação, respectivamente, na ausência da interação.

O hamiltoniano do campo eletromagnético \hat{H}_c , que na verdade é a energia do campo eletromagnético transversal livre, é dado em termos dos operadores de criação (\hat{a}^\dagger) e aniquilação (\hat{a}) como [39]

$$\hat{H}_c = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.15)$$

onde o índice \mathbf{k} se refere aos modos normais de vibração do campo eletromagnético cuja frequência angular de oscilação seja $\omega_{\mathbf{k}}$, e satisfazem a relação de comutação $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$. A dedução da equação Eq. 2.15 está descrita em detalhes no apêndice A.

O hamiltoniano do átomo é um operador hermitiano, tal que os autoestados deste operador satisfazem a equação de autovalor $\hat{H}_a|i\rangle = E_i|i\rangle$, onde E_i são as possíveis energias do elétron nos níveis atômicos. Portanto seus autoestados $\{|i\rangle\}$ formam uma base completa de estados, ou seja, é válida a relação de completeza $\sum_i |i\rangle\langle i| = \mathbb{I}$. Logo, usando esta relação de completeza, podemos expressar o hamiltoniano \hat{H}_a em termos dos operadores de transição atômica $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$, resultando em

$$\hat{H}_a = \mathbb{I}\hat{H}_a\mathbb{I} = \sum_i E_i|i\rangle\langle i| = \sum_i E_i\sigma_{ii}. \quad (2.16)$$

Além disto o termo de dipolo elétrico $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, também pode ser escrito da mesma forma acima se usarmos a relação de completeza, resultando que

$$\hat{\mathbf{d}} = \sum_{i,j} |i\rangle\langle i|\hat{\mathbf{d}}|j\rangle\langle j| = \sum_{i,j} \mathbf{d}_{ij}\sigma_{ij}, \quad (2.17)$$

onde $\mathbf{d}_{ij} = e\langle i|\hat{\mathbf{r}}|j\rangle$ é o elemento da matriz da transição do dipolo elétrico referente aos níveis atômicos $|i\rangle$ e $|j\rangle$. Usando a representação dos autoestados $|\mathbf{r}\rangle$ do operador vetor posição $\hat{\mathbf{r}}$, de modo que $\hat{\mathbf{r}}|\mathbf{r}\rangle = \mathbf{r}|\mathbf{r}\rangle$, temos que

$$\mathbf{d}_{ij} = e \int \mathbf{r} \psi_i^*(\mathbf{r}) \psi_j(\mathbf{r}) d^3r, \quad (2.18)$$

sendo que $\psi_\kappa(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r}|\kappa\rangle$. Como os estados eletrônicos do átomo livre tem suas paridades definidas, tal que $\psi_\kappa(-\mathbf{r}) = \pm\psi_\kappa(\mathbf{r})$, então $\mathbf{d}_{ij} = 0$ se a paridade de $|\psi_i(\mathbf{r})\rangle$ é a mesma de $|\psi_j(\mathbf{r})\rangle$, logo temos que $\mathbf{d}_{ii} = 0$, sendo consequência da integração de uma função ímpar sobre intervalo simétrico que é todo o espaço. O operador do campo elétrico $\hat{\mathbf{E}}$, onde consideramos como a origem o núcleo atômico, é dado por [39]

$$\hat{\mathbf{E}} = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger), \quad (2.19)$$

onde $\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\hbar\omega_{\mathbf{k}}/2\epsilon_0 V}$, e por simplicidade, consideramos a polarização linear e o vetor da polarização como sendo real.

Substituindo os resultados obtidos de \hat{H}_c (desconsiderando a energia do ponto zero), \hat{H}_a , $\hat{\mathbf{d}}$ e $\hat{\mathbf{E}}$, dadas pelas Eqs. (2.15), (2.16), (2.17) e (2.19), respectivamente, na Eq.(2.14), o hamiltoniano de interação átomo-campo fica escrito como

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \sum_i E_i \sigma_{ii} + \hbar \sum_{i,j} \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^{ij} \sigma_{ij} (\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger), \quad (2.20)$$

onde $g_{\mathbf{k}}^{ij} = -\mathbf{d}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} / \hbar$ é a constante de acoplamento entre os níveis atômicos $|i\rangle \leftrightarrow |j\rangle$ e o modo normal \mathbf{k} do campo.

2.3 Hamiltoniano microscópico completo

O nosso interesse é o estudo da interação de um átomo de três níveis, descrito por átomo de Rydberg na configuração Ξ (do tipo ladeira), representado na Fig. (2.1), com um único modo do campo eletromagnético. Com este objetivo, calcularemos os termos referentes a este tipo de interação, para encontrar o hamiltoniano deste sistema interagente.

Iniciando com a descrição do átomo, vamos tomar o nível energético de referência de energia zero como sendo o nível intermediário $|f\rangle$, escolha esta feita de modo

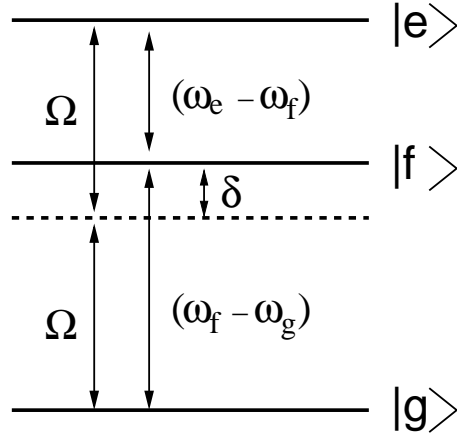


Figura 2.1 : Diagrama esquemático do átomo de três níveis interagindo com um único modo do campo na cavidade.

arbitrário e que é conveniente para facilitar os cálculos. Deste modo, temos que o hamiltoniano do átomo \hat{H}_a , usando o resultado obtido da Eq.(2.16), fica expresso assim

$$\hat{H}_a = \hbar(\omega_1|e\rangle\langle e| - \omega_2|g\rangle\langle g|) = \hbar(\omega_1\sigma_{ee} - \omega_2\sigma_{gg}), \quad (2.21)$$

onde $\omega_1 = \omega_e - \omega_f$ e $\omega_2 = \omega_f - \omega_g$ são as frequências associadas às transições dos níveis atômicos $|e\rangle \leftrightarrow |f\rangle$ e $|f\rangle \leftrightarrow |g\rangle$, respectivamente. Consequentemente, temos as seguintes relações satisfeitas

$$\langle i|j\rangle = \delta_{i,j} \quad , \quad \sum_i |i\rangle\langle i| = \mathbb{I}, \quad (2.22)$$

onde os índices $i, j = e, f, g$.

A descrição do campo eletromagnético livre, representado por um único modo do campo polarizado com frequência definida Ω é, de acordo com a Eq. (2.15),

$$\hat{H}_c = \hbar\Omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.23)$$

onde \hat{a}^\dagger e \hat{a} são os operadores de criação e aniquilação de fótons do campo com frequência Ω , e satisfazem a relação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. O próximo passo é o cálculo do hamiltoniano de interação do átomo de três níveis com campo eletromagnético. Para isto temos que obter o momento de dipolo elétrico e o campo elétrico, visto que a interação é do tipo dipolo elétrico $\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}}$. Das Eqs. (2.17) e (2.19), e usando o fato que $d_{ii} = 0$ e $d_{ij} = d_{ji}$ (supondo d_{ij} real), obtemos hamiltoniano de interação átomo-campo na forma

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ac} &= \hbar g_{ef} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (|e\rangle\langle f| + |f\rangle\langle e|) \\ &+ \hbar g_{fg} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (|f\rangle\langle g| + |g\rangle\langle f|) \\ &+ \hbar g_{eg} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde g_{ef} , g_{fg} e g_{eg} são as constantes de acoplamento do campo com as transições atômicas $|e\rangle \leftrightarrow |f\rangle$, $|f\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ e $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$, respectivamente.

É conveniente e usual trabalhar com o hamiltoniano na representação de interação, porque o hamiltoniano obtido nesta representação é mais simples de ser trabalhado; essa transformação elimina termos referentes ao átomo e campo livres. Sendo assim, escrevendo o hamiltoniano total na forma $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{ac}$, onde $\hat{H}_0 = \hat{H}_a + \hat{H}_c$ é o termo sem interação, temos que ao hamiltoniano na representação de interação é dada por

$$\hat{H}_I = e^{i\frac{\hat{H}_0}{\hbar}t} \hat{H}_{ac} e^{-i\frac{\hat{H}_0}{\hbar}t} . \quad (2.25)$$

Usando o fato de que $[\hat{H}_a, \hat{H}_c] = 0$, temos que o operador evolução do hamiltoniano \hat{H}_0 pode ser calculado da seguinte forma

$$e^{-i\frac{\hat{H}_0}{\hbar}t} = e^{-i\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}t} [e^{-i\omega_1 t}|e\rangle\langle e| + |f\rangle\langle f| + e^{i\omega_2 t}|g\rangle\langle g|] \quad (2.26)$$

onde expandimos a exponencial em série de Taylor e usamos a relação de completeza dos autoestados do átomo. Através da conhecida relação: $e^{\alpha\hat{A}}\hat{B}e^{-\alpha\hat{A}} = \hat{B} + \alpha[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\alpha^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$, válida para o caso em que $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$, sendo que α é apenas um parâmetro, pode-se demonstrar que

$$e^{i\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}t}\hat{a}^\dagger e^{-i\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}t} = \hat{a}^\dagger e^{i\Omega t} \quad , \quad e^{i\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}t}\hat{a} e^{-i\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}t} = \hat{a} e^{-i\Omega t} . \quad (2.27)$$

Usando as Eqs. (2.26) e (2.27) podemos calcular o hamiltoniano na representação de interação dada pela Eq. (2.25), onde obtemos como resultado

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= \hbar g_{ef} (\hat{a}|e\rangle\langle f|e^{-i\delta t} + \hat{a}^\dagger|f\rangle\langle e|e^{i\delta t} + \hat{a}|f\rangle\langle e|e^{-i(\Omega+\omega_1)t} + \hat{a}^\dagger|e\rangle\langle f|e^{i(\Omega+\omega_1)t}) \\ &+ \hbar g_{fg} (\hat{a}|f\rangle\langle g|e^{i\delta t} + \hat{a}^\dagger|g\rangle\langle f|e^{-i\delta t} + \hat{a}|g\rangle\langle f|e^{-i(\Omega+\omega_2)t} + \hat{a}^\dagger|f\rangle\langle g|e^{i(\Omega+\omega_2)t}) \\ &+ \hbar g_{eg} (\hat{a}|e\rangle\langle g|e^{i\Omega t} + \hat{a}^\dagger|g\rangle\langle e|e^{-i\Omega t} + \hat{a}|g\rangle\langle e|e^{-3i\Omega t} + \hat{a}^\dagger|e\rangle\langle g|e^{3i\Omega t}) \quad , \end{aligned} \quad (2.28)$$

sendo que a dessintonia $\delta = \Omega - \omega_1 = \omega_2 - \Omega$, este parâmetro é que faz com que a probabilidade de ocupação do nível intermediário $|f\rangle$ seja reduzida, aumentando a probabilidade de ocorrência do processo de geração de dois fótons, onde as transições são do tipo $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$.

Considere que pretendemos resolver a equação de Schrödinger na representação de interação dada por

$$\hat{H}_I(t)|\psi(t)\rangle_I = i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_I \quad , \quad (2.29)$$

a solução formal para esta equação é do tipo $|\psi(t)\rangle_I = \hat{U}(t)|\psi(t_0)\rangle_I$, onde $\hat{U}(t)$ é o operador evolução do sistema, que neste caso é obtido na forma [40]

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) &= \hat{1} + \left(\frac{1}{i\hbar}\right) \int_{t_0}^t \hat{H}_I(\tau) d\tau + \left(\frac{i}{i\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t d\tau_2 \int_{t_0}^{\tau_2} d\tau_1 \hat{H}_I(\tau_2) \hat{H}_I(\tau_1) + \dots \\ &+ \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t d\tau_n \int_{t_0}^{\tau_n} d\tau_{n-1} \dots \int_{t_0}^{\tau_2} d\tau_1 \hat{H}_I(\tau_n) \dots \hat{H}_I(\tau_1) + \dots \quad (2.30) \end{aligned}$$

Se usarmos a Eq. (2.30) para calcular o operador evolução do sistema representado pelo hamiltoniano dado pela Eq. (2.28), os termos multiplicados por exponenciais proporcionais a δ , $\Omega + \omega_1$, $\Omega + \omega_2$, Ω e 3Ω , vão aparecer no denominador no resultado final da integração. Comparando estes termos, notamos que δ é um termo muito menor que os demais, visto que $\Omega \approx \omega_1 \approx \omega_2$. Portanto, na Eq. (2.28) podemos desprezar os outros termos, visto que estes oscilam muito rapidamente se comparado com os termos proporcionais a $e^{\pm i\delta t}$. Além disso, termos desprezados são os que correspondem aos processos que não conservam energia do sistema¹; por exemplo, o termo $\hat{a}|f\rangle\langle e|e^{-i(\Omega+\omega_1)t}$ corresponde ao processo de absorção de um fóton do campo e a transição do átomo do estado excitado para o estado intermediário, enquanto $\hat{a}^\dagger|e\rangle\langle f|e^{i(\Omega+\omega_1)t}$ corresponde ao processo inverso do anterior, ou seja, há a criação de um fóton no campo e o átomo evolui do estado intermediário para o estado excitado; os demais termos desprezados correspondem a processos semelhantes. As considerações feitas acima formam um conjunto de aproximações que denominamos “aproximação de onda girante”. Sendo assim, o resultado final obtido para o hamiltoniano na representação de interação, via aproximação de onda girante, é dado por

$$\hat{H}_I = \hbar g_{ef} (\hat{a}|e\rangle\langle f|e^{-i\delta t} + \hat{a}^\dagger|f\rangle\langle e|e^{i\delta t}) + \hbar g_{fg} (\hat{a}|f\rangle\langle g|e^{i\delta t} + \hat{a}^\dagger|g\rangle\langle f|e^{-i\delta t}), \quad (2.31)$$

sendo que os termos: $\hat{a}|e\rangle\langle f|e^{-i\delta t}$ e $\hat{a}|f\rangle\langle g|e^{i\delta t}$ correspondem aos processos de aniquilação de um fóton do campo e de transição dos níveis atômicos $|f\rangle \rightarrow |e\rangle$ e $|g\rangle \rightarrow |f\rangle$, respectivamente; já os termos $\hat{a}^\dagger|f\rangle\langle e|e^{i\delta t}$ e $\hat{a}^\dagger|g\rangle\langle f|e^{-i\delta t}$ correspondem aos processos inversos, cria-se um fóton no campo e o átomo transiciona dos estados $|e\rangle \rightarrow |f\rangle$ e $|f\rangle \rightarrow |g\rangle$, respectivamente.

¹Se ocorrido isoladamente, porém sempre há a conservação de energia do sistema, visto que estes processos podem ocorrer em pares, de tal forma a conservar a energia do sistema.

2.4 Metodologia

Uma vez deduzido o hamiltoniano, temos que resolver a equação de Schrödinger para obter a evolução do estado, $|\psi(t)\rangle$, ao longo do tempo. Existem três métodos: o método dos operadores de Heisenberg, o método do operador de evolução unitária e o método das amplitudes de probabilidade.

O método dos operadores de Heisenberg parte das equações de Heisenberg para os operadores do campo eletromagnético, $\hat{a}^\dagger(t)$ e $\hat{a}(t)$, e os operadores atômicos, $\hat{\sigma}_\pm(t)$ e $\hat{\sigma}_z(t)$, isto para o caso de um sistema de interação átomo-campo. Estas soluções são úteis para o caso de cálculos de funções de correlação, necessárias no estudo de propriedades do campo eletromagnético, tais como: função de correlação de segunda ordem $g_2(\tau)$, que determina efeitos quânticos de agrupamento ou anti-agrupamento de fótons; a função de inversão atômica $W(t)$, para o estudo da inversão atômica, o colapso e o ressurgimento de oscilações atômicas; dentre outras.

O método do operador de evolução unitária é um método simples, a idéia é expandir o operador evolução do sistema $\hat{U}(t)$ usando a expansão da exponencial do operador evolução, obtida pela expansão em série de Taylor, e tentar simplificações que resultem numa expressão compacta do operador, tarefa esta que às vezes pode ser trabalhosa dependendo do operador hamiltoniano. O estado do sistema evoluído é encontrado atuando o operador encontrado no estado inicial do sistema $|\psi(0)\rangle$. É útil para casos de evolução de estados do tipo estado coerente, comprimido entre outros, expandidos na base de Fock, e cuja evolução pode ser encontrada de forma mais direta a partir do operador evolução então obtido.

Já o método das amplitudes de probabilidade consiste em propor uma solução da equação de Schrödinger do tipo

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{i,n} C_{i,n}(t) |i, n\rangle \quad (2.32)$$

onde i representa os níveis atômicos possíveis de ocupação do elétron no átomo e n é a variável discreta para a expansão de estados genéricos na base de Fock. Substituindo a solução acima na equação de Schrödinger dependente do tempo, obtemos um sistema de equações diferenciais acopladas para as amplitudes de probabilidade $C_{i,n}(t)$. Resolvendo este sistema obtemos a evolução do estado do sistema no tempo $|\psi(t)\rangle$, ou seja, obtemos diretamente a função de onda.

No nosso caso de interesse vamos usar este último método para a resolução da equação de Schrödinger dependente do tempo, visto que ele pode ser resolvido via programas de cálculos algébricos e numéricos (Maple por exemplo). É importante ressaltar que ambos métodos apresentados acima levam a resultados idênticos das propriedades do sistema.

2.5 Aplicação do método das amplitudes de probabilidade

Nesta seção iremos apresentar a aplicação do método das amplitudes de probabilidade mencionado acima para resolução da equação de Schrödinger dependente do tempo, cujo sistema é formado de um átomo de três níveis interagindo com um único modo da cavidade.

A descrição deste sistema será feita através de dois hamiltonianos distintos: o efetivo e o microscópico completo. Ambos descrevem o processo degenerado de geração de dois fótons, porém o primeiro é um hamiltoniano obtido a partir de uma aproximação feita sobre o hamiltoniano microscópico completo. Desse modo a aplicabilidade do hamiltoniano efetivo para descrever tal sistema deve ser cuidadosa. Avaliaremos na próxima seção a aplicabilidade deste hamiltoniano e vamos comparar os resultados provenientes de ambos.

2.5.1 Hamiltoniano efetivo

Vamos considerar um átomo de Rydberg de dois níveis atômicos interagindo com um único modo do campo eletromagnético, cf. Fig. (2.2). Os níveis atômicos $|e\rangle$ e $|g\rangle$ estão acoplados através da constante de acoplamento λ para uma exata ressonância de dois fótons cuja frequência angular é $\Omega = (\omega_e - \omega_g)/2$; ω_e , ω_f , e ω_g são as frequências associadas aos níveis atômicos $|e\rangle$ e $|g\rangle$, respectivamente; ou seja, o elétron no nível atômico excitado $|e\rangle$ transiciona para o nível fundamental $|g\rangle$ emitindo dois fótons na cavidade, ou então ocorre o processo inverso: a cavidade está com dois ou mais fótons, o elétron que está no estado fundamental é excitado e transiciona para o estado excitado $|e\rangle$ absorvendo dois fótons na cavidade.

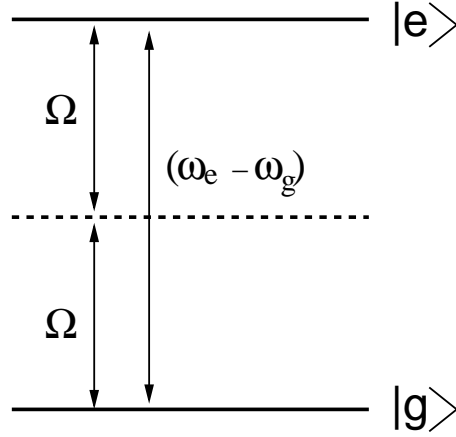


Figura 2.2 : Diagrama esquemático do átomo de dois níveis interagindo com um único modo do campo na cavidade.

O hamiltoniano que descreve este sistema na representação de interação, obtido através da aproximação de dipolo elétrico, onda girante e da desconsideração dos termos de “Stark *shift*” (deslocamento Stark), é igual a

$$\hat{H} = \hbar\lambda (\hat{a}^2|e\rangle\langle g| + \hat{a}^{\dagger 2}|g\rangle\langle e|), \quad (2.33)$$

onde o termo $\hat{a}^2|e\rangle\langle g|$ representa o processo de transição do elétron do estado atômico fundamental para o excitado absorvendo dois fótons, e o termo $\hat{a}^{\dagger 2}|g\rangle\langle e|$ representa o processo de transição do estado excitado para o fundamental e a criação de dois fótons. Os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger são os operadores de criação e aniquilação de fótons de frequência Ω , respectivamente.

Usando o método das amplitudes de probabilidade antes mencionado, encontramos a função de onda do sistema átomo-campo

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n [C_{e,n}(t)|e, n\rangle + C_{g,n}(t)|g, n\rangle], \quad (2.34)$$

sendo que o estado $|i, n\rangle$, onde $i = e, g$, representa o elétron do átomo no estado atômico $|i\rangle$ e o campo eletromagnético no estado de número $|n\rangle$; $C_{i,n}(t)$ é a correspondente amplitude de probabilidade deste estado.

Substituindo o hamiltoniano da Eq. (2.33) e a função de onda da Eq. (2.34) na equação de Schrödinger dependente do tempo, obtemos um sistema de equações diferenciais de primeira ordem acopladas para as amplitudes de probabilidade, como segue

$$\begin{aligned} \frac{dC_{e,n}(t)}{dt} &= -i\lambda\sqrt{(n+1)(n+2)}C_{g,n+2}(t), \\ \frac{dC_{g,n+2}(t)}{dt} &= -i\lambda\sqrt{(n+1)(n+2)}C_{e,n}(t). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Considerando que inicialmente o sistema átomo-campo está desacoplado, ou seja,

$$\begin{aligned} C_{e,n}(0) &= C_e C_n, \\ C_{g,n+2}(0) &= C_g C_{n+2}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde os $C_n(0)$ representam as amplitudes do estado inicial arbitrário do campo e C_a , onde $a = e, g$, são as amplitudes de probabilidade do estado do átomo inicial normalizado,

$$|\chi\rangle = C_e|e\rangle + C_g|g\rangle. \quad (2.37)$$

Resolvendo estas equações diferenciais acopladas (Eq. 2.35) com as condições iniciais (Eq. 2.36) obtemos os coeficientes dependentes do tempo,

$$\begin{aligned} C_{e,n}(t) &= \cos\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}\lambda t\right) C_e C_n \\ &- i \operatorname{sen}\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}\lambda t\right) C_g C_{n+2}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} C_{g,n+2}(t) &= \cos\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}\lambda t\right) C_g C_{n+2} \\ &- i \operatorname{sen}\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}\lambda t\right) C_e C_n. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Estas são as amplitudes de probabilidade obtidas usando o hamiltoniano efetivo para descrever a interação átomo-campo para este tipo de sistema. Para obtermos o coeficiente $C_{g,n}(t)$ da função de onda proposta de acordo com a Eq. (2.34), basta substituímos $n \rightarrow n - 2$ na Eq. (2.39).

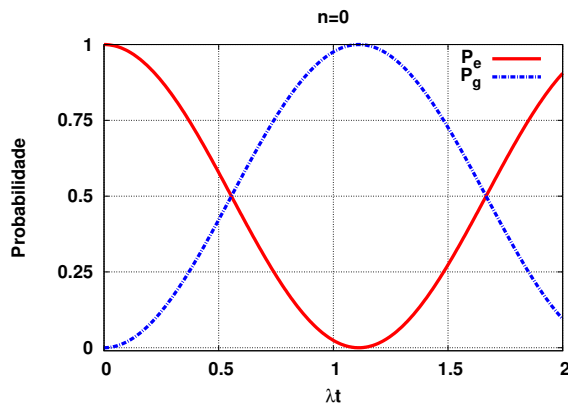


Figura 2.3 : Probabilidade de detecção do estado $|a, n\rangle$ em função de λt , onde o estado inicial do sistema é $|e, 0\rangle$.

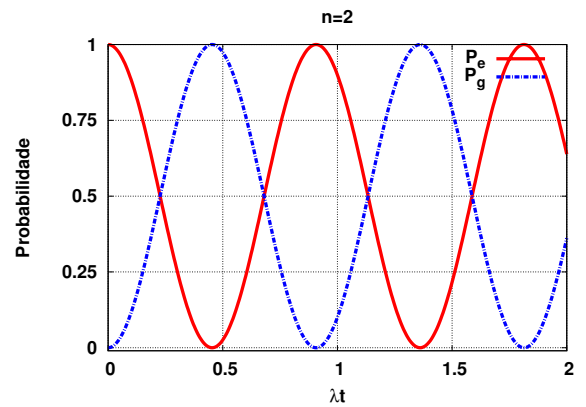


Figura 2.4 : Probabilidade de detecção do estado $|a, n\rangle$ em função de λt , onde o estado inicial do sistema é $|e, 2\rangle$.

Nas Figs. (2.3) e (2.4), mostramos a evolução temporal das probabilidades de permanência dos estados atômicos $|e\rangle$ ($P_e = |C_{e,n}(t)|^2$) e $|g\rangle$ ($P_g = |C_{g,n}(t)|^2$), onde em ambos casos os estados iniciais são $|e, 0\rangle$ e $|e, 2\rangle$, respectivamente. Pode ser observado que quanto maior o número de fótons na cavidade maior a frequência de transição atômica, conhecida como frequência de Rabi, que é dada por $\Lambda_n = \lambda\sqrt{(n+1)(n+2)}$, ou seja, torna-se maior a excitação sofrida pelo elétron para transicionar nos níveis atômicos. Isto fica evidente porque conforme foi definida acima, a frequência de Rabi depende diretamente do número de fótons na cavidade. Para um tempo de interação da ordem de $t = m(\pi/2\Lambda_n)$, onde $m = 1, 2, 3, \dots$, temos que: se m é ímpar o estado de ocupação atômica é trocado, ou seja, o elétron que inicialmente estava no estado excitado $|e\rangle$ passa a ocupar o estado fundamental $|g\rangle$ e se cria dois fótons na cavidade; se m é par, o estado atômico do elétron é sempre igual ao estado inicial $|\psi(t=0)\rangle$. Agora se $t = m(\pi/4\Omega)$, o estado atômico será composto por uma superposição dos estados excitado e fundamental, onde as probabilidades de detecção do mesmo são iguais.

2.5.2 Hamiltoniano microscópico completo

No presente trabalho, fazemos uso do modelo de Jaynes-Cummings de dois fótons completo [11] para implementar esquemas de teletransporte (Cap. 3) e troca de emaranhamento quânticos (Cap. 4). Este modelo descreve a interação de um átomo de três níveis na configuração Ξ com um único modo do campo da cavidade, assumindo ressonância exata de dois fótons. De modo que o nível intermediário, $|f\rangle$, pode ser dessintonizado da ressonância de um fóton através de um parâmetro de dessintonia δ . Na representação de interação, conforme foi mostrado na seção 2.3, o operador hamiltoniano que descreve o sistema é escrito na forma

$$\hat{H} = \hbar g_1 (\hat{a}|e\rangle\langle f|e^{-i\delta t} + \hat{a}^\dagger|f\rangle\langle e|e^{i\delta t}) + \hbar g_2 (\hat{a}|f\rangle\langle g|e^{i\delta t} + \hat{a}^\dagger|g\rangle\langle f|e^{-i\delta t}), \quad (2.40)$$

onde $g_1 = g_{ef}$ e $g_2 = g_{fg}$ representam a constante de acoplamento de um fóton com respeito as transições $|e\rangle \leftrightarrow |f\rangle$ e $|f\rangle \leftrightarrow |g\rangle$, respectivamente. A dessintonia δ é dada por $\Omega - (\omega_e - \omega_f) = (\omega_f - \omega_g) - \Omega$, onde Ω é a frequência do campo na cavidade, ω_e , ω_f , e ω_g são as frequências associadas aos níveis atômicos $|e\rangle$, $|f\rangle$, e $|g\rangle$, respectivamente.

Primeiramente, para atingir nossa proposta precisamos calcular a função de onda que descreve o sistema átomo-campo, usando o método das amplitudes de probabilidade.

idade, a função de onda é descrita como

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n [C_{e,n}(t)|e, n\rangle + C_{f,n}(t)|f, n\rangle + C_{g,n}(t)|g, n\rangle], \quad (2.41)$$

onde $|a, n\rangle$ ($a = e, f, g$) indica o átomo no estado $|a\rangle$ e o campo no estado de Fock $|n\rangle$.

Os coeficientes $C_{a,n}(t)$ representam as correspondentes amplitudes de probabilidade.

Inserindo as Eqs. (2.40) e (2.41) na equação de Schrödinger dependente do tempo, obtemos um conjunto de três equações diferenciais de primeira ordem acopladas para as amplitudes de probabilidade, como seguem,

$$\begin{aligned} \frac{dC_{e,n}(t)}{dt} &= -ig_1 C_{f,n+1}(t) \sqrt{n+1} e^{-i\delta t}, \\ \frac{dC_{f,n+1}(t)}{dt} &= -ig_1 C_{e,n}(t) \sqrt{n+1} e^{i\delta t} - ig_2 C_{g,n+2}(t) \sqrt{n+2} e^{i\delta t}, \\ \frac{dC_{g,n+2}(t)}{dt} &= -ig_2 C_{f,n+1}(t) \sqrt{n+2} e^{-i\delta t}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Considerando que inicialmente o sistema átomo-campo está desacoplado, isto é, podemos escrever que

$$\begin{aligned} C_{e,n}(0) &= C_e C_n, \\ C_{f,n+1}(0) &= C_f C_{n+1}, \\ C_{g,n+2}(0) &= C_g C_{n+2}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde os $C_n(0)$ representam amplitudes do estado inicial arbitrário do campo e C_a são as amplitudes atômicas do estado do átomo inicial normalizado,

$$|\chi\rangle = C_e|e\rangle + C_f|f\rangle + C_g|g\rangle. \quad (2.44)$$

Resolvendo este sistema de equações diferenciais acopladas (2.42) com as condições iniciais (2.43) obtemos os coeficientes dependentes do tempo,

$$\begin{aligned} C_{e,n}(t) &= \left[\frac{g_1^2(n+1)}{\Lambda_n \alpha_n^2} \gamma_n(t) + 1 \right] C_e C_n \\ &- i \frac{g_1 \sqrt{n+1}}{\Lambda_n} \text{sen}(\Lambda_n t) e^{-i\frac{\delta t}{2}} C_f C_{n+1} \\ &+ \left[\frac{g_1 g_2 \sqrt{(n+1)(n+2)}}{\Lambda_n \alpha_n^2} \gamma_n(t) \right] C_g C_{n+2}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} C_{f,n+1}(t) &= -i \frac{g_1 \sqrt{n+1}}{\Lambda_n} \text{sen}(\Lambda_n t) e^{i\frac{\delta t}{2}} C_e C_n \\ &+ \left(\cos(\Lambda_n t) - \frac{i\delta}{2\Lambda_n} \text{sen}(\Lambda_n t) \right) e^{i\frac{\delta t}{2}} C_f C_{n+1} \\ &- i \frac{g_2 \sqrt{n+2}}{\Lambda_n} \text{sen}(\Lambda_n t) e^{i\frac{\delta t}{2}} C_g C_{n+2}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned}
C_{g,n+2}(t) &= \frac{g_1 g_2 \sqrt{(n+1)(n+2)}}{\Lambda_n \alpha_n^2} \gamma_n(t) C_e C_n \\
&- i \frac{g_2 \sqrt{n+2}}{\Lambda_n} \text{sen}(\Lambda_n t) e^{-i \frac{\delta t}{2}} C_f C_{n+1} \\
&+ \left[\frac{g_2^2 (n+2)}{\Lambda_n \alpha_n^2} \gamma_n(t) + 1 \right] C_g C_{n+2},
\end{aligned} \tag{2.47}$$

onde

$$\gamma_n(t) = \left[\Lambda_n \cos(\Lambda_n t) + i \frac{\delta}{2} \text{sen}(\Lambda_n t) - \Lambda_n e^{i \frac{\delta t}{2}} \right] e^{-i \frac{\delta t}{2}}, \tag{2.48}$$

$$\Lambda_n = \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \alpha_n^2}, \tag{2.49}$$

$$\alpha_n = \sqrt{g_1^2 (n+1) + g_2^2 (n+2)}, \tag{2.50}$$

os Λ_n sendo as frequências de Rabi do sistema interagente átomo-campo. Para obtermos os coeficientes da função de onda proposta de acordo com a Eq. (2.41), basta substituímos $n \rightarrow n - 1$ na Eq. (2.46) e $n \rightarrow n - 2$ na Eq. (2.47) permite nos obter os coeficientes $C_{f,n}(t)$ e $C_{g,n}(t)$, respectivamente. Estes coeficientes são as amplitudes de probabilidade que permitem definir o estado $|\psi(t)\rangle$ dado pela Eq. (2.41).

Nas Figs. (2.5-2.10) apresentamos a evolução temporal das probabilidades de detecção do estado $|a, n\rangle$ no estado $|\psi(t)\rangle$, cuja expressão é $P_a = |C_{a,n}(t)|^2$, para três diferentes valores de dessintonia δ . Em cada par de figuras consideramos que o estado inicial do sistema átomo-campo como: $|e, 0\rangle$ e $|e, 2\rangle$, respectivamente.

Consideramos nas Figs. (2.5) e (2.6) que $\delta = 0$; podemos ver neste caso que há

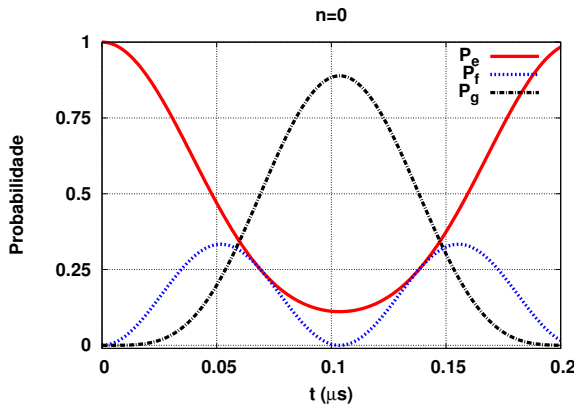


Figura 2.5 : Probabilidade de detecção do estado $|a, n\rangle$ onde o estado inicial do sistema é $|e, 0\rangle$, onde consideramos a dessintonia $\delta = 0$.

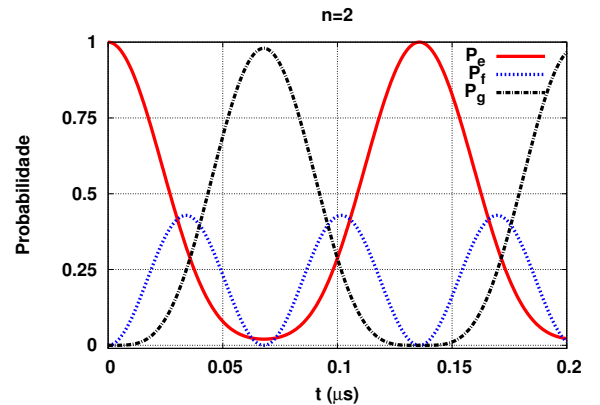


Figura 2.6 : Probabilidade de detecção do estado $|a, n\rangle$ onde o estado inicial do sistema é $|e, 2\rangle$, onde consideramos a dessintonia $\delta = 0$.

uma probabilidade considerável de permanência do elétron no estado intermediário $|f\rangle$, ou seja, há o processo de geração de um fóton via transições atômicas do tipo $|e\rangle \leftrightarrow |f\rangle$ e $|f\rangle \leftrightarrow |g\rangle$. Para um pequeno número de fótons na cavidade, temos que a probabilidade de detecção do estado fundamental $|g\rangle$ não chega ser a igual a 1 para um tempo de interação específico, diferentemente do caso descrito pelo hamiltoniano efetivo. Porém, à medida que o número de fótons aumenta na cavidade a probabilidade de detecção dos estados fundamental e intermediário também aumenta, e o mesmo acontece com a frequência de Rabi Λ_n (frequência de transição atômica), o que era esperado de acordo com a sua própria definição dada pela Eq. (2.49).

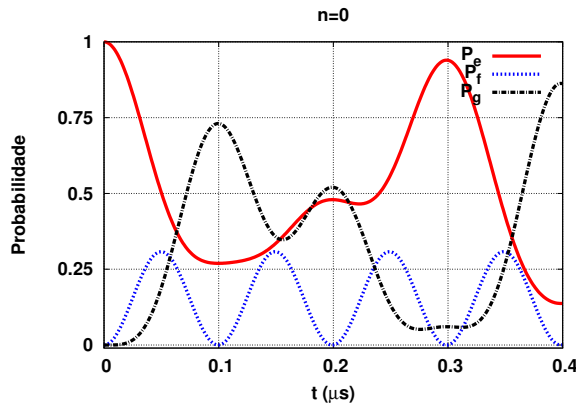


Figura 2.7 : Probabilidade de detecção do estado $|a, n\rangle$ onde o estado inicial do sistema é $|e, 0\rangle$, onde consideramos a dessintonia $\delta = g$.

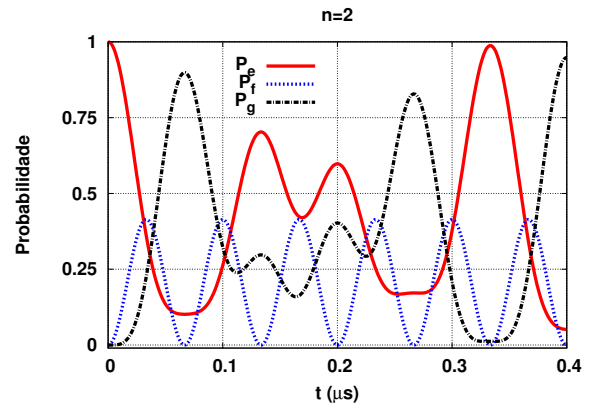


Figura 2.8 : Probabilidade de detecção do estado $|a, n\rangle$ onde o estado inicial do sistema é $|e, 2\rangle$, onde consideramos a dessintonia $\delta = g$.

Nas figs. (2.7) e (2.8) consideramos $\delta = g$, isto quer dizer que o nível intermediário começa ficar fora da ressonância para transições que emitem um fóton na cavidade. As características citadas para o caso anterior (em que $\delta = 0$) se mantêm; porém observa-se que as probabilidades de medida dos estados excitado $|e\rangle$ e fundamental $|g\rangle$ são diferentes, e que o tempo para que ocorra as transições aumenta, isto porque o fato da dessintonia ser diferente de zero significa que as transições agora se tornaram mais difíceis de ocorrer.

Já nas Figs. (2.9) e (2.10) consideramos $\delta = 80g$, sendo este um caso de grande interesse, visto que a probabilidade de ocupação do nível intermediário torna-se desprezível, da ordem de 6×10^{-4} . Sendo assim, este caso pode ser comparado com o resultado das probabilidades dado pelo hamiltoniano efetivo, dispostas nas Figs. (2.3) e

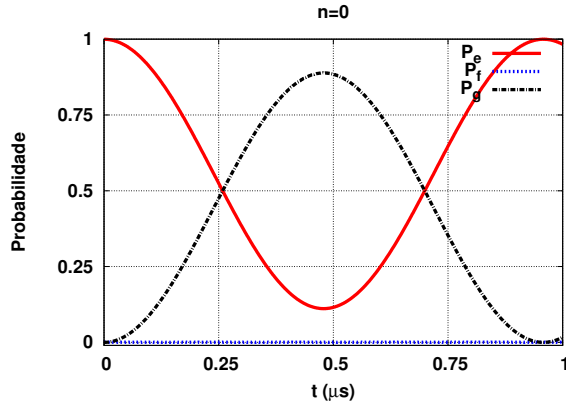


Figura 2.9 : Probabilidade de detecção do estado $|a, n\rangle$ onde o estado inicial do sistema é $|e, 0\rangle$, onde consideramos a dessintonia $\delta = 80g$.

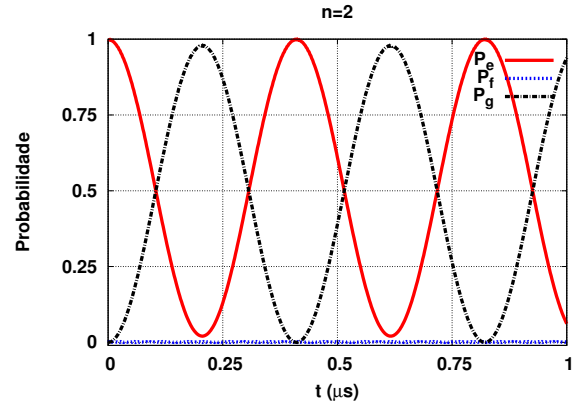


Figura 2.10 : Probabilidade de detecção do estado $|a, n\rangle$ onde o estado inicial do sistema é $|e, 2\rangle$, onde consideramos a dessintonia $\delta = 80g$.

(2.4). No caso de pequeno número de fótons na cavidade, notamos que a probabilidade de transição dos níveis atômicos excitado e fundamental não chega a atingir valores iguais a 0 e 1, respectivamente, como no caso das descrição do hamiltoniano efetivo. Para valores grandes do número médio de fótons ($n \sim 40$) as probabilidades passam a apresentar características semelhantes.

A seguir apresentaremos detalhadamente as características deste limite, no qual pode-se comparar os resultados das amplitudes de probabilidade obtidas nas duas descrições, que são dadas pelo hamiltoniano efetivo e pelo hamiltoniano microscópio completo.

2.6 Comparação entre os hamiltonianos

Mostraremos aqui que sob certas condições o modelo de Jaynes-Cummings de dois fótons, descrito corretamente pelo hamiltoniano microscópio completo, pode ser aproximado pelo hamiltoniano efetivo [11]. Mostraremos que as duas descrições levam a expressões idênticas para as amplitudes de probabilidade, a menos de um fator de fase global. Com este intuito em mente, por questões de simplicidade, vamos considerar que as constantes de acoplamento $g_1 = g_2 = g$ na Eq. (2.50), e também vamos introduzir uma constante de acoplamento para a transição de dois fótons efetiva $\lambda' = g^2/\delta$ e definir um parâmetro $\epsilon_n = \frac{4\lambda'}{\delta}(2n + 3)$. A frequência de Rabi Λ_n , da Eq. (2.49), fica expressa em

termos de ϵ_n como $\Lambda_n = \frac{\delta}{2}\sqrt{1 + \epsilon_n}$. Considerando que $\epsilon_n \ll 1$ de tal forma que podemos expandir Λ_n em termos de ϵ_n , chegamos que a seguinte condição precisa ser satisfeita

$$\frac{\epsilon_n^2}{16} \frac{\delta}{\lambda'} \lambda' t \ll \pi, \quad (2.51)$$

já que nas Eqs. (2.45-2.47) o Λ_n aparece como sendo um argumento de funções trigonométricas [11]. A escolha na qual resulta que $\epsilon_n \ll 1$ é fazer com que δ seja grande comparado com g . Se assumirmos que $C_n(0)$ é uma função abruptamente localizada de n em torno de $n = \bar{n}$ com $\bar{n} \gg 1$, então podemos trocar $n + 1$, $n + 2$, e $(2n + 3)/2$ por $\sqrt{(n + 1)(n + 2)}$ nas Eqs.(2.45-2.47), e a desigualdade (2.51) reduz a [11],

$$\frac{\delta}{\lambda'} \gg \frac{4\bar{n}^2}{\pi} \lambda' t, \quad (2.52)$$

na qual depende do tempo de interação t , do número médio de fótons \bar{n} , da dessintonia δ e da constante de acoplamento átomo-campo λ' . Para pequenos valores de λt , $\epsilon_n \ll 1$ implicando que $\delta/\lambda \gg 4(2\bar{n} + 3)$. Deste modo, as Eqs. (2.45-2.47) sujeitas as condições descritas acima podem ser escritas como [11]

$$\begin{aligned} C_{e,n}(t) &= e^{i\sqrt{(n+1)(n+2)}\lambda t} \left\{ \cos \left(\sqrt{(n+1)(n+2)}\lambda t \right) C_e C_n \right. \\ &\quad \left. + i \operatorname{sen} \left(\sqrt{(n+1)(n+2)}\lambda t \right) C_g C_{n+2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$C_{f,n+1}(t) = O(\sqrt{\epsilon_n/2}),$$

$$\begin{aligned} C_{g,n+2}(t) &= e^{i\sqrt{(n+1)(n+2)}\lambda t} \left\{ i \operatorname{sen} \left(\sqrt{(n+1)(n+2)}\lambda t \right) C_e C_n \right. \\ &\quad \left. + \cos \left(\sqrt{(n+1)(n+2)}\lambda t \right) C_g C_{n+2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Comparando estas equações acima das amplitudes de probabilidade, obtidas a partir do hamiltoniano microscópico completo, com as amplitudes de probabilidade obtidas a partir do hamiltoniano efetivo, Eqs. (2.38) e (2.39), vemos claramente que as amplitudes de probabilidade referentes as ocupações do estados $|e, n\rangle$ e $|g, n\rangle$ diferem das obtidas a partir do hamiltoniano efetivo de um fator de fase global adicional $e^{i\sqrt{(n+1)(n+2)}\lambda t}$. Além disto, observamos que a probabilidade de encontrar o átomo no estado atômico intermediário $|f\rangle$ torna-se muito pequena, visto que é proporcional à raiz de ϵ , onde consideramos que $\epsilon_n \ll 1$.

Para entender melhor a diferença das amplitudes de propriedade devido ao aparecimento do fator de fase adicional, vamos escrever o operador densidade do sistema

dados por

$$\hat{\rho}_{ac}(t) = \sum_{i,j} \sum_{n,m} C_{i,n}(t) C_{j,m}^*(t) |i, n\rangle \langle j, m| \quad (2.55)$$

onde $i, j = e, f, g$ correspondem aos estados do átomo. Pode-se observar que o fator de fase global somente afeta os termos não-diagonais da matriz densidade do sistema, enquanto que os termos diagonais não são afetados pelo simples fato de serem eliminados quando é feito o produto da amplitude de probabilidade com o seu complexo conjugado. Este fator de fase surge devido a dinâmica do “Stark *shift*” dos níveis do átomo, que na dedução do hamiltoniano efetivo foi desconsiderado [11, 41].

No artigo de Toor and Zubairy [11] é mostrado que quantidades físicas as quais somente dependem dos elementos da diagonal da matriz densidade reduzida do campo, tais como a inversão de população atômica e a função de distribuição de fótons, apresentam resultados idênticos nas duas descrições no limite imposto pela Eq. (2.52). Porém, no caso das propriedades associadas às variâncias das quadraturas do campo eletromagnético, tal como o efeito de “*squeezing*” (compressão das quadraturas do campo), onde os termos não-diagonais da matriz densidade são importantes, é obtido um comportamento drasticamente diferente usando as duas descrições.

3 Teletransporte Quântico

3.1 Introdução

Teletransporte quântico é uma técnica usada para transferir informação de estados quânticos, usualmente armazenada em uma partícula ou fóton (ou conjunto de fótons) para outra partícula em outro lugar via emaranhamento quântico. Portanto, neste processo não há transporte de matéria ou energia, nem permite comunicação através da troca de informação com velocidade superior à velocidade da luz no vácuo. Uma característica interessante do teletransporte quântico é que ele permite também transmitir informação de uma superposição de estados quânticos, constituindo-se numa ferramenta muito importante e útil para o desenvolvimento da computação [15] e comunicação quânticas [16].

De um modo mais preciso, o teletransporte quântico é um protocolo quântico no qual um q-bit $|\alpha\rangle$ (q-bit é a notação de um bit quântico, sendo uma unidade de informação quântica) pode ser transmitido, em princípio, de uma localidade para outra. Os pré-requisitos são: a existência de um canal de comunicação convencional (canal clássico) capaz de transmitir dois bits clássicos (obtidos a partir da medição de um dos quatro estados de Bell), e um par de q-bits emaranhados $|\beta, \gamma\rangle$, onde o estado $|\beta\rangle$ se encontra na origem e o estado $|\gamma\rangle$ no destino, para quem se deseja transmitir a informação.

O protocolo é realizado em três etapas: faz-se uma medida conjunta a qual produz os dois bits clássicos; transmite-se os dois bits de informação para onde se deseja teletransportar a informação (nessa etapa depende-se de envio de uma informação clássica, a qual é sempre transmitida com velocidade $v < c$); e por fim dois bits são usados para escolher um dentre quatro estados possíveis para reconstruir o estado $|\gamma\rangle$.

As duas partes são Alice (A), o remetente, e Bob (B), o destinatário¹; o q-bit é uma superposição de estados quânticos representados por $|0\rangle$ e $|1\rangle$ em geral, sendo representado por um vetor bidimensional no espaço de Hilbert. Suponha que Alice tem

¹Alice e Bob são os personagens geralmente utilizados para representar o processo de teletransporte quântico, sendo que Alice envia a informação e Bob a recebe.

um q-bit em algum estado quântico arbitrário $|\psi\rangle$, desconhecido por ela, e que ela deseja enviá-lo para Bob. Vamos supor que Alice e Bob estejam compartilhando um estado emaranhado (q-bit) AB, ou seja, Alice possui um parte do estado A e Bob a outra parte B. Consideremos que C representa o q-bit no qual Alice deseja transmitir para Bob.

Alice aplica então uma operação unitária sobre os q-bits A e C, emaranhando estes estados e gerando um estado emaranhado AC, estabelecendo assim um canal quântico. Em seguida Alice mede o resultado deste estado para obter dois bits clássicos. Neste processo os dois q-bits são destruídos. O q-bit de Bob B, agora contém informação com respeito ao q-bit C; entretanto, a informação está ainda indefinida. Mais precisamente, o q-bit de Bob B está num dos quatro estados uniformemente escolhido de forma aleatória e Bob não pode obter qualquer informação sobre C de seu q-bit.

Alice realizou um medida sobre os q-bits AC, no qual indica qual dos quatro estados Bob possui, ela envia o resultado de sua medida para Bob. Bob aplica uma transformação unitária conveniente no seu q-bit, transformando-o em uma cópia idêntica ao do q-bit C. Exemplificamos a seguir todo este processo detalhadamente.

Supondo que Alice deseja teletransportar um q-bit C para Bob. Este q-bit pode ser escrito de forma geral como $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Nosso esquema de teletransporte quântico requer que Alice e Bob compartilhem um estado maximamente emaranhado de antemão, ou seja, que eles compartilhem um dos quatros estados de Bell dados por

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B), \quad (3.1)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B), \quad (3.2)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B), \quad (3.3)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B). \quad (3.4)$$

Alice possui uma das partículas do par cujo estado está emaranhado (A), e Bob mantém a outra em seu poder (B). Os índices A e B do estado emaranhado se refere às partículas de Alice e Bob, respectivamente. Iremos supor que Alice e Bob compartilhem o estado emaranhado $|\Phi^+\rangle$ por exemplo.

Então, Alice tem duas partículas (C que ela quer teletransportar seu estado, e A uma das partículas do estado emaranhado), e Bob tem a outra partícula, B. O sistema

total, representando o estado das três partículas ABC é dado por

$$|\varphi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) . \quad (3.5)$$

Alice fará uma medida parcial em uma das bases dos estados de Bell sobre os dois q-bits que ela possui. Para deixar o resultado de sua medida mais explícito, reescrevemos os dois q-bits de Alice na base dos estados de Bell

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle + |\Phi^-\rangle) , \quad (3.6)$$

$$|0\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle + |\Psi^-\rangle) , \quad (3.7)$$

$$|1\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle - |\Psi^-\rangle) , \quad (3.8)$$

$$|1\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle - |\Phi^-\rangle) . \quad (3.9)$$

O estado das três partículas apresentadas acima pode ser escrito em termos da superposição dos quatro estados de Bell da seguinte forma

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle &= \frac{1}{2} [|\Phi^+\rangle \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |\Phi^-\rangle \otimes (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)] \\ &+ \frac{1}{2} [|\Psi^+\rangle \otimes (\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |\Psi^-\rangle \otimes (-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle)] . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Observe que a mudança que fizemos até agora é para mudar a base da parte do sistema que Alice possui. Nenhuma operação tem sido feita e as três partículas estão ainda no mesmo estado. A operação de teletransporte atual começa quando Alice mede seus dois q-bits na base dos estados de Bell. Da expressão acima decorre que o resultado local da medida é que o estado das três partículas irá colapsar, com igual probabilidade, num dentre os quatro estados,

$$|\Phi^+\rangle \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) , \quad (3.11)$$

$$|\Phi^-\rangle \otimes (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) , \quad (3.12)$$

$$|\Psi^+\rangle \otimes (\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) , \quad (3.13)$$

$$|\Psi^-\rangle \otimes (-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) . \quad (3.14)$$

As duas partículas de Alice estão agora emaranhadas em um dos quatro estados de Bell. O emaranhamento originalmente compartilhado entre Alice e Bob está

quebrado. A partícula de Bob possui um dos quatro estados de superposição apresentados acima. Observe que o q-bit de Bob está agora em um estado parecido com o estado a ser teletransportado.

O passo crucial para a realização do teletransporte quântico é a medida local, a qual foi feita por Alice na base dos estados de Bell. Em seguida, Alice tem que completar seu conhecimento do estado das três partículas, o resultado de sua medida revela em qual dos quatro estados o sistema está. Ela deve simplesmente enviar o seu resultado da medida para Bob através de um canal clássico. Os dois bits revelam qual dos quatro estados ela obteve.

Depois de Bob receber a mensagem de Alice, ele saberá em qual dentre os quatros estados sua partícula está. Usando esta informação, ele aplica uma operação unitária na sua partícula de tal forma a transformar seu estado no estado desejado $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Assim:

- Se Alice informar a Bob que o estado medido é $|\Phi^+\rangle$, Bob sabe que seu q-bit já está no estado desejado e ele não precisa fazer nada. Isto equivale a uma operação unitária trivial dada pelo operação identidade.
- Se a Alice informar que o estado é $|\Phi^-\rangle$, Bob envia seu q-bit através de uma porta unitária dada pela matriz de Pauli abaixo para recuperar o estado desejado.

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Se Alice informar que o estado é $|\Psi^+\rangle$, Bob aplica a porta unitária abaixo e recupera assim seu estado desejado.

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Finalmente, se Alice informar que o estado é $|\Psi^-\rangle$, Bob usará a seguinte operação unitária dada por

$$\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

e assim ele recuperará seu estado desejado $|\psi\rangle$.

Completadas todas essas etapas acima, o estado da partícula C que Alice tinha em seu poder foi teletransportado para a partícula B de Bob, encerrando assim o processo

de teletransporte quântico [42]. Algumas considerações são pertinentes: enquanto o q-bit de Bob ficou no estado desejado $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, q-bit de Alice tornou-se parte de um estado emaranhado; logo o teletransporte não resultou na cópia de q-bit; sendo isso consistente com o teorema da não-clonagem [43], segundo o qual é impossível fazer uma cópia de estado quântico desconhecido; não houve a transferência de matéria ou energia durante o teletransporte, a partícula de Alice não foi enviada a Bob, somente seu estado é que foi transferido. O termo teletransporte, nomeado pela primeira vez por Bennett *et al* [14], reflete a indistinguibilidade das partículas quânticas. Igualmente, a informação armazenada não foi transferida de um q-bit a outro com velocidade superluminal, visto que um canal clássico foi usado para que o processo de teletransporte se efetivasse com sucesso.

A seguir apresentamos uma forma encontrada para realização de teletransporte quântico, distinta da forma exata apresentada anteriormente, mas sim de uma forma aproximada, onde a medida nos estados de Bell não é considerada.

3.2 Teletransporte quântico sem medida dos estados de Bell

No artigo de Zheng Ref. [44] ele propõe um esquema para um teletransporte aproximado e condicional de um estado atômico sem medida dos estados de Bell. Nesta seção detalhamos a diferença entre teletransporte com medida dos estados de Bell e teletransporte sem medida dos estados de Bell. Na verdade, não existe teletransporte quântico sem medida dos estados de Bell [45]. O que ocorre, como mostrado na proposta de Zheng e também de Cardoso *et al* Ref. [46], é que estados de Bell, nesses casos, são compostos pelo estado do átomo e estado do campo, sendo necessário apenas, para completar o teletransporte, a medida do estado atômico, uma vez que o estado do campo na cavidade passa a ser conhecido. Como a proposta é medir apenas o estado do átomo, teremos uma probabilidade de sucesso de 25% para esse teletransporte; daí o nome “teletransporte condicional”. Porém, o fato de não ser necessário medir diretamente os estados de Bell, faz com que a fidelidade do estado teletransportado não seja, a princípio, igual a 100%, sendo essa a origem da denominação “teletransporte aproximado”. Isso também decorre do fato de que nem sempre o estado na cavidade é conhecido, há na verdade uma aproximação

em considerar a cavidade no estado de vácuo, por exemplo, visto que a probabilidade de ter um fóton na cavidade é muito pequena.

Logo, quando utilizamos o termo “teletransporte sem medida dos estados de Bell”, estamos nos referindo a uma medida não explícita (geralmente imperfeita) dos estados de Bell. Nas Secções a seguir faremos aplicação deste tipo de teletransporte quântico, o que tornará a explicação acima mais clara.

3.3 Teletransporte de estado atômico

Aqui apresentaremos uma proposta de teletransporte de um estado atômico desconhecido, sem medida na base de Bell, usando o modelo de Jaynes-Cummings de dois fótons [47–49], como apresentado no capítulo anterior. Na Fig. (3.1) apresentamos esquema representativo das etapas a serem seguidas para a efetuação do teletransporte quântico. De forma sucinta, o processo é feito da seguinte forma: antes, cria-se o canal quântico representado pelo estado $|\varphi_{qc}\rangle$ obtido através da interação do átomo 2 com a cavidade inicialmente preparada no estado de vácuo, por um tempo t_1 ; em seguida, o átomo 1 é preparado no estado desconhecido $|\varphi_{in}\rangle$, sendo este o estado atômico que desejamos teletransportar para o átomo 2; o átomo 1 interage na cavidade em um intervalo de tempo t_2 ; disso resulta que o sistema total fica sendo descrito pelo estado $|\varphi\rangle_{1,2,c}$. Após essa interação na cavidade é feita a medida do estado, sendo este o estado final do sistema $|\Psi\rangle_{2,c}$, o qual descreve o estado do átomo 2 e a cavidade C , o estado do átomo 1 já é conhecido; finalmente se o átomo 1 foi detectado no estado excitado, o teletransporte foi realizado com sucesso. A seguir descreveremos detalhadamente cada etapa deste processo.

Primeiramente vamos supor que o átomo 1 está inicialmente preparado no estado

$$|\varphi\rangle_{in} = \alpha|e\rangle_1 + \beta|g\rangle_1, \quad (3.15)$$

onde os coeficientes α e β satisfazem à condição $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ e que o átomo 2 está previamente preparado no estado excitado $|e\rangle_2$. A preparação do estado atômico $|\varphi\rangle_{in}$ pode ser feita passando um átomo no estado excitado numa zona de Ramsey², por exemplo. Em seguida, deixamos o átomo 2 interagir com um modo da cavidade no estado de vácuo

²No apêndice B apresentamos os sistemas físicos necessários para realização experimental das propostas que serão apresentadas.

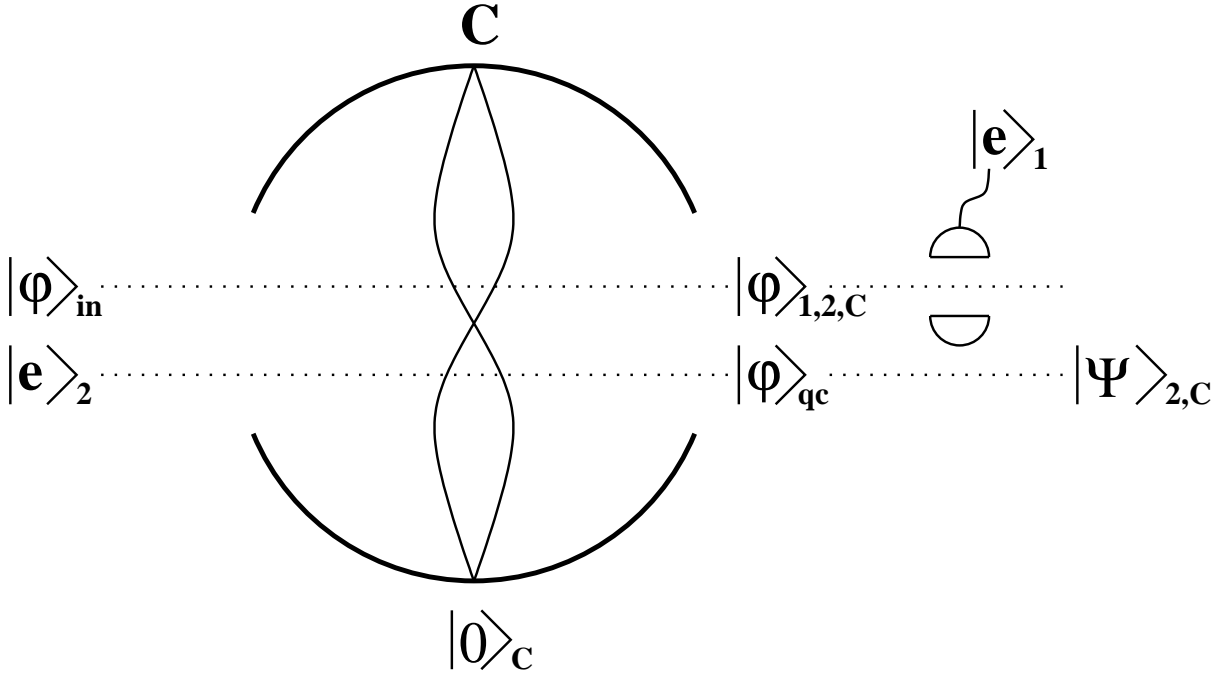


Figura 3.1 : Esquema representativo do teletransporte de estado atômico.

$|0\rangle_C$ por um conveniente intervalo de tempo t_1 . Com isso, um “*entanglement*”, ou canal quântico é criado, dado por

$$|\varphi\rangle_{qc} = C_{e,0}^{e,0}(t_1)|e, 0\rangle_{2C} + C_{f,1}^{e,0}(t_1)|f, 1\rangle_{2C} + C_{g,2}^{e,0}(t_1)|g, 2\rangle_{2C} , \quad (3.16)$$

onde $C_{i,n}^{j,m}(t)$ representa a amplitude de probabilidade do estado $|i, n\rangle$ obtido a partir da evolução do estado inicial $|j, m\rangle$ num intervalo de tempo t , onde $i, j = \{e, f, g\}$, sendo que n e m representam o número de fótons na cavidade. Então, o estado descrevendo o sistema inteiro é escrito na forma,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \alpha [C_{e,0}^{e,0}(t_1)|e, e, 0\rangle_{12C} + C_{f,1}^{e,0}(t_1)|f, e, 1\rangle_{12C} + C_{g,2}^{e,0}(t_1)|g, e, 2\rangle_{12C}] \\ &+ \beta [C_{e,0}^{e,0}(t_1)|e, g, 0\rangle_{12C} + C_{f,1}^{e,0}(t_1)|f, g, 1\rangle_{12C} + C_{g,2}^{e,0}(t_1)|g, g, 2\rangle_{12C}] . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Num passo seguinte, enquanto o átomo 2 é enviado para um receptor (Bob), o átomo 1 no estado $|\varphi_{in}\rangle$ é enviado para interagir com o campo da cavidade num intervalo de tempo conveniente t_2 . O então sistema evolui para o estado

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \alpha C_{e,0}^{e,0}(t_1) [C_{e,0}^{e,0}(t_2)|e, e, 0\rangle_{12C} + C_{f,1}^{e,0}(t_2)|e, f, 1\rangle_{12C} + C_{g,2}^{e,0}(t_2)|e, g, 2\rangle_{12C}] \\ &+ \alpha C_{f,1}^{e,0}(t_1) [C_{e,1}^{e,1}(t_2)|f, e, 1\rangle_{12C} + C_{f,2}^{e,1}(t_2)|f, f, 2\rangle_{12C} + C_{g,3}^{e,1}(t_2)|f, g, 3\rangle_{12C}] \\ &+ \alpha C_{g,2}^{e,0}(t_1) [C_{e,2}^{e,2}(t_2)|g, e, 2\rangle_{12C} + C_{f,3}^{e,2}(t_2)|g, f, 3\rangle_{12C} + C_{g,4}^{e,2}(t_2)|g, g, 4\rangle_{12C}] \\ &+ \beta C_{e,0}^{e,0}(t_1) C_{g,0}^{g,0}(t_2)|e, g, 0\rangle_{12C} + \beta C_{f,1}^{e,0}(t_1) [C_{g,1}^{g,1}(t_2)|f, g, 1\rangle_{12C} + C_{f,0}^{g,1}(t_2)|f, f, 0\rangle_{12C}] \\ &+ \beta C_{g,2}^{e,0}(t_1) [C_{g,2}^{g,2}(t_2)|g, g, 2\rangle_{12C} + C_{f,1}^{g,2}(t_2)|g, f, 1\rangle_{12C} + C_{e,0}^{g,2}(t_2)|g, e, 0\rangle_{12C}] . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Agora, se o transmissor (Alice) detectar o átomo 1 no estado excitado, o sub-sistema reduzido, composto pelo átomo 2 e o campo da cavidade C , resulta na forma

$$|\Psi\rangle_{2C} = \frac{1}{N} [\xi|e, 0\rangle_{2C} + \lambda|f, 1\rangle_{2C} + \eta|g, 2\rangle_{2C} + \gamma|g, 0\rangle_{2C}] , \quad (3.19)$$

N é o fator de normalização, que será definido posteriormente, enquanto que os coeficientes são definidos como: $\xi = \alpha C_{e,0}^{e,0}(t_1)C_{e,0}^{e,0}(t_2)$, $\lambda = \alpha C_{f,1}^{e,0}(t_1)C_{e,1}^{e,1}(t_2)$, $\eta = \alpha C_{g,2}^{e,0}(t_1)C_{e,2}^{e,2}(t_2)$, $\gamma = \beta C_{g,2}^{e,0}(t_1)C_{e,0}^{g,2}(t_2)$.

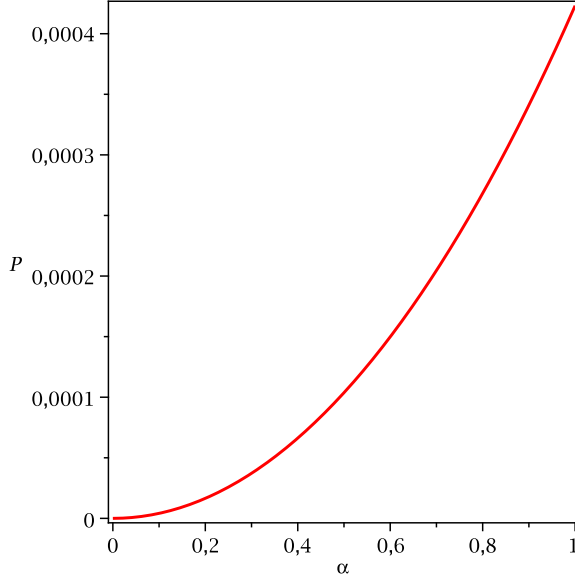


Figura 3.2 : Probabilidade de detecção do estado $|f, 1\rangle_{2C}$ no estado $|\Psi\rangle_{2C}$ em função do coeficiente α .

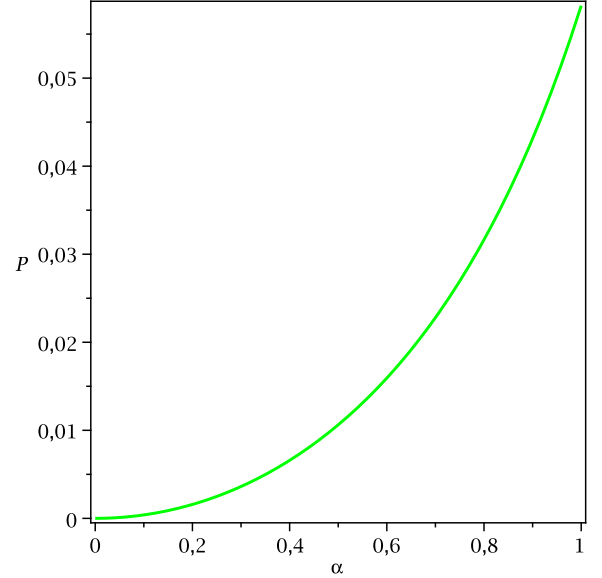


Figura 3.3 : Probabilidade de detecção do estado $|g, 2\rangle_{2C}$ no estado $|\Psi\rangle_{2C}$ em função do coeficiente α .

No estado $|\Psi\rangle_{2C}$ dado pela Eq. (3.19), os termos $|f, 1\rangle_{2C}$ e $|g, 2\rangle_{2C}$ referem-se a estados de indesejável obtenção, visto que queremos o átomo 2 no estado $|\varphi_{in}\rangle$. Se as probabilidades de encontrar estes termos, λ e η , forem muito pequenas comparada com aquelas dos demais termos, ξ e γ , podemos desconsiderar estes estados. Nas Figs. (3.2) e (3.3) observamos isto, que a probabilidade de detecção destes dois estados ($|f, 1\rangle_{2C}$ e $|g, 2\rangle_{2C}$) é muito pequena. Sendo assim, nesta aproximação podemos dizer que após a detecção do átomo 1 no estado excitado, a cavidade C estará no estado de vácuo, dispensando a necessidade de uma medida na base de Bell. Significa que para medir o estado do átomo 1 e o estado do campo na cavidade C , basta medir apenas o estado do átomo 1. Essa medida completa a realização do teletransporte quântico.

É importante reforçar que é a medida do átomo 1 no seu estado excitado $|e\rangle_1$ que completa o teletransporte quântico. A probabilidade dessa medida, que nada mais é

do que a probabilidade de sucesso da realização do teletransporte, é dada por

$$P_a = N^2 = |\xi|^2 + |\lambda|^2 + |\eta|^2 + |\gamma|^2. \quad (3.20)$$

Por outro lado, a fidelidade do estado teletransportado para Bob, $|\varphi\rangle_{in}$, é expressa como

$$F_a = \frac{1}{N^2} [|\alpha\xi|^2 + \alpha\beta^*\xi^*\gamma + |\beta\eta|^2 + \alpha^*\beta\xi\gamma^* + |\beta\gamma|^2], \quad (3.21)$$

sendo calculada através de $F_a = |\langle\varphi_{in}|\Psi\rangle_{2C}|^2$, onde agora $|\varphi_{in}\rangle = \alpha|e\rangle_2 + \beta|g\rangle_2$. Os tempos de interação dos dois átomos, t_1 e t_2 , são escolhidos de tal forma a otimizar a fidelidade, o que implica de forma indireta que neste processo a escolha dos tempos de interação será tal que a probabilidade de detecção dos estados indesejáveis é muito pequena, permitindo-nos considerar que a cavidade C fica no estado de vácuo. A parte relacionada com o canal clássico, necessário para efetivação do teletransporte quântico, está no fato de Alice, que mediu o átomo 1, dizer a Bob que detectou o átomo 1 no estado excitado.

A Fig. (3.4) mostra o gráfico da probabilidade de sucesso do teletransporte do estado atômico em função do coeficiente α no estado $|\varphi_{in}\rangle$ a ser teletransportado. Assumimos que α é real. Tem-se duas curvas expostas nesta figura, sendo que uma delas usa a descrição dada pelo hamiltoniano efetivo P_w (representado pelo símbolo \blacktriangle) enquanto a outra (dada pela Eq. (3.20) é descrita pelo hamiltoniano microscópico completo P_a (representada pelo símbolo \bullet). Podemos notar que o comportamento de P_a difere

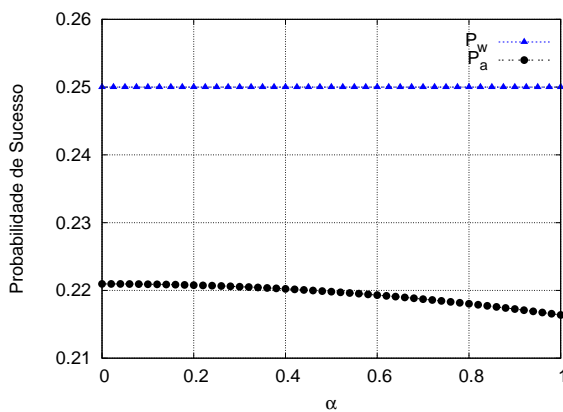


Figura 3.4 : Probabilidade de sucesso do teletransporte do estado atômico em função do coeficiente α obtidos a partir da descrição via hamiltoniano efetivo (P_w) e a partir do hamiltoniano microscópico completo (P_a).

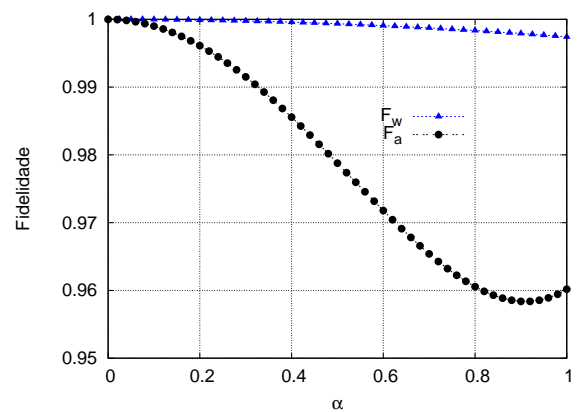


Figura 3.5 : Fidelidade do teletransporte do estado atômico em função do coeficiente α obtidos a partir da descrição via hamiltoniano efetivo (F_w) e a partir do hamiltoniano microscópico completo (F_a).

bastante de P_w : P_w não apresenta dependência com relação ao coeficiente α quanto P_a ; a probabilidade de sucesso $P_a \simeq 22\%$ sendo menor que $P_w \simeq 25\%$, este último sendo o máximo alcançável num teletransporte quântico sem medida na base de Bell.

Na Fig. (3.5) mostramos o gráfico da fidelidade do estado atômico teletransportado em função de α , para as duas descrições, sendo que F_w corresponde a fidelidade obtida usando o hamiltoniano efetivo e F_a a fidelidade obtida usando o hamiltoniano microscópico completo. Pode-se ver nesta figura que o comportamento da curva F_a difere muito de F_w , sendo sua dependência com α bem maior que a de F_w ; a fidelidade do estado teletransportado $|\varphi_{in}\rangle = |e\rangle$ é 100%, para $\alpha = 1$, enquanto que para $|\varphi_{in}\rangle = |g\rangle$ é aproximadamente 96% ($\alpha = 0$). Notamos também que o valor mínimo da fidelidade F_a é próximo de 96%. Ambas as Figs. (3.4) e (3.5) foram obtidas usando parâmetros experimentais atuais [50], dados por: $g_1 = g_2 = g = 17,5$ MHz e $\delta = 80g$, nos quais os tempos de interação do átomo 2 e do átomo 1 foram $t_1 = 1,96\mu s$ e $t_2 = 6,27\mu s$, respectivamente.

3.4 Teletransporte de estado do campo

O mesmo procedimento acima, feito para o teletransporte quântico do estado atômico desconhecido, sem medida na base de Bell, pode ser mapeado para o teletransporte quântico de uma superposição de estados de Fock do tipo $|\varphi_{in}\rangle = \alpha|0\rangle_{C_2} + \beta|2\rangle_{C_2}$, também sem medida na base de Bell, usando o modelo de Jaynes-Cummings de dois fótons [47–49]. A Fig. (3.6) mostra um esquema representativo das etapas do protocolo de realização deste teletransporte quântico. De forma resumida, temos que o teletransporte é efetuado da seguinte maneira: prepara-se o estado de superposição dos estados de Fock na cavidade C_2 , enquanto um átomo é preparado no estado excitado $|e\rangle_1$. Ambos interagem na cavidade C_1 por um intervalo de tempo conveniente t_1 , criando o canal quântico $|\varphi_{qc}\rangle$; em seguida o átomo interage na cavidade C_2 preparada no estado inicial $|\varphi_{in}\rangle$ por um intervalo de tempo t_2 ; com isto o estado de todo o sistema é igual a $|\varphi\rangle_{1,C_1,C_2}$; por fim o estado atômico é medido em um detector de ionização. Para efetuar o teletransporte com sucesso é necessário detectar o átomo no estado atômico excitado. Descreveremos detalhadamente a seguir cada etapa do teletransporte apresentado acima.

O primeiro passo é preparar o estado $|\varphi_{in}\rangle$ da cavidade C_2 a ser teletrans-

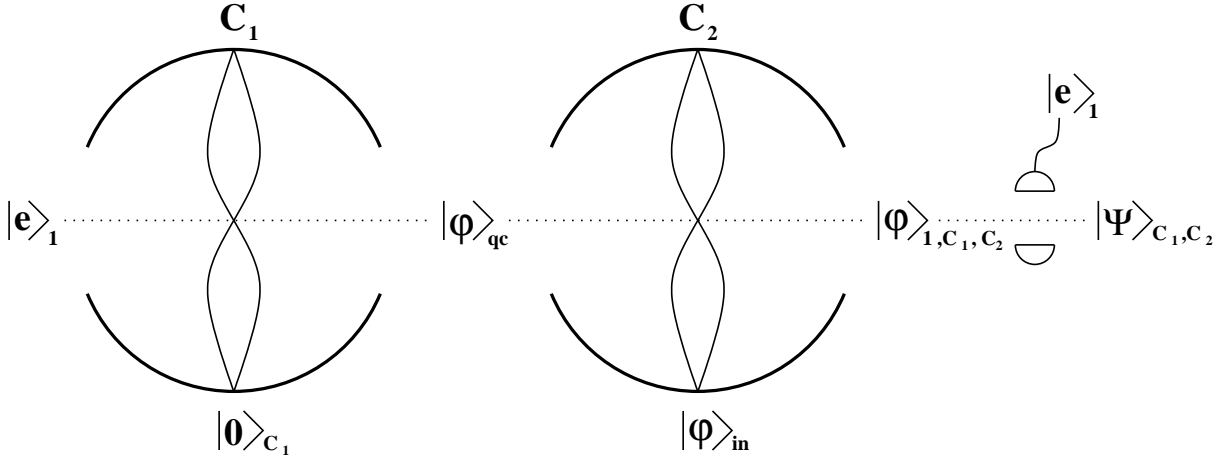


Figura 3.6 : Esquema representativo do teletransporte de estado do campo.

portado para a cavidade C_1 ,

$$|\varphi_{in}\rangle = \alpha|0\rangle_{C_2} + \beta|2\rangle_{C_2} . \quad (3.22)$$

Esta preparação pode ser obtida passando pela cavidade um átomo no estado excitado, deixando-o interagir por um intervalo de tempo t de modo a fornecer o estado desejado.

Prepara-se um átomo no estado excitado $|e\rangle_1$ e deixa-se-o interagir por um intervalo de tempo t_1 na cavidade C_1 preparada no estado de vácuo; com isto cria-se o canal quântico $|\varphi_{qc}\rangle$, responsável por emaranhar o estado do átomo com a cavidade C_1 . O resultado é o estado emaranhado

$$|\varphi_{qc}\rangle = C_{e,0}^{e,0}(t_1)|e, 0\rangle_{1,C_1} + C_{f,1}^{e,0}(t_1)|f, 1\rangle_{1,C_1} + C_{g,2}^{e,0}(t_1)|g, 2\rangle_{1,C_1} . \quad (3.23)$$

Então, o estado descrevendo o sistema inteiro (átomo e dois campos) é escrito na forma,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{1,C_1,C_2} &= \alpha [C_{e,0}^{e,0}(t_1)|e, 0, 0\rangle + C_{f,1}^{e,0}(t_1)|f, 1, 0\rangle + C_{g,2}^{e,0}(t_1)|g, 2, 0\rangle] \\ &+ \beta [C_{e,0}^{e,0}(t_1)|e, 0, 2\rangle + C_{f,1}^{e,0}(t_1)|f, 1, 2\rangle + C_{g,2}^{e,0}(t_1)|g, 2, 2\rangle] . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Num próximo passo, o átomo interage na cavidade C_2 , que está no estado $|\varphi_{in}\rangle$, por um intervalo de tempo t_2 , o estado do sistema total evoluído sendo dado por

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{1,C_1,C_2} &= \alpha C_{e,0}^{e,0}(t_1) [C_{e,0}^{e,0}(t_2)|e, 0, 0\rangle + C_{f,1}^{e,0}(t_2)|f, 1, 1\rangle + C_{g,2}^{e,0}(t_2)|g, 2, 2\rangle] \\ &+ \alpha C_{e,0}^{e,0}(t_1) C_{g,0}^{g,0}(t_2)|g, 2, 0\rangle + \alpha C_{f,1}^{e,0}(t_1) [C_{f,0}^{f,0}(t_2)|f, 1, 0\rangle + C_{g,1}^{f,0}(t_2)|g, 1, 1\rangle] \\ &+ \beta C_{f,1}^{e,0}(t_1) [C_{e,1}^{e,1}(t_2)|e, 0, 2\rangle + C_{f,3}^{e,2}(t_2)|f, 0, 3\rangle + C_{g,4}^{e,2}(t_2)|g, 0, 4\rangle] \\ &+ \beta C_{f,1}^{e,0}(t_1) [C_{e,1}^{f,2}(t_2)|e, 1, 1\rangle + C_{f,2}^{f,2}(t_2)|f, 1, 2\rangle + C_{g,3}^{f,2}(t_2)|g, 1, 3\rangle] \\ &+ \beta C_{g,2}^{e,0}(t_1) [C_{g,2}^{g,2}(t_2)|g, 2, 2\rangle + C_{f,1}^{g,2}(t_2)|f, 2, 1\rangle + C_{e,0}^{g,2}(t_2)|e, 2, 0\rangle] . \end{aligned} \quad (3.25)$$

Em seguida o átomo é detectado no estado excitado, levando o estado dos campos descrevendo as cavidades C_1 e C_2 à forma

$$|\Psi\rangle_{C_1,C_2} = \frac{1}{N} [\xi|0,0\rangle_{C_1,C_2} + \mu|0,2\rangle_{C_1,C_2} + \nu|1,1\rangle_{C_1,C_2} + \gamma|2,0\rangle_{C_1,C_2}] , \quad (3.26)$$

onde $\mu = \beta C_{e,0}^{e,0}(t_1)C_{e,2}^{e,2}(t_2)$, $\nu = \beta C_{e,0}^{e,0}(t_1)C_{e,1}^{f,2}(t_2)$, ξ e γ sendo os mesmos do caso anterior, de teletransporte do estado atômico. Novamente, N é o fator de normalização do estado.

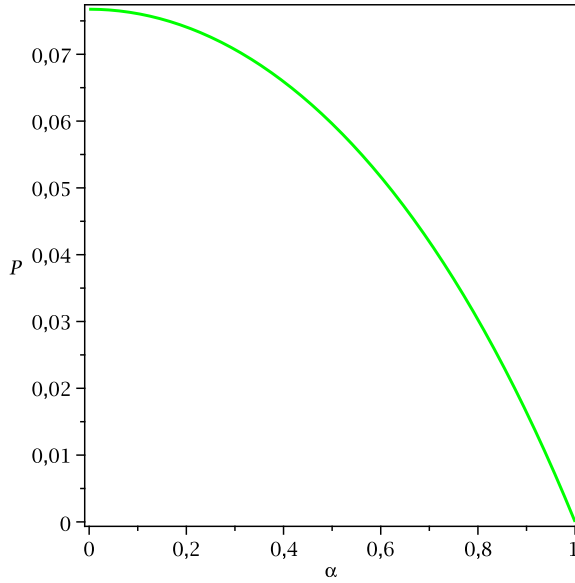


Figura 3.7 : Probabilidade de detecção do estado $|0, 2\rangle_{C_1, C_2}$ no estado $|\Psi\rangle_{C_1, C_2}$ em função do coeficiente α .

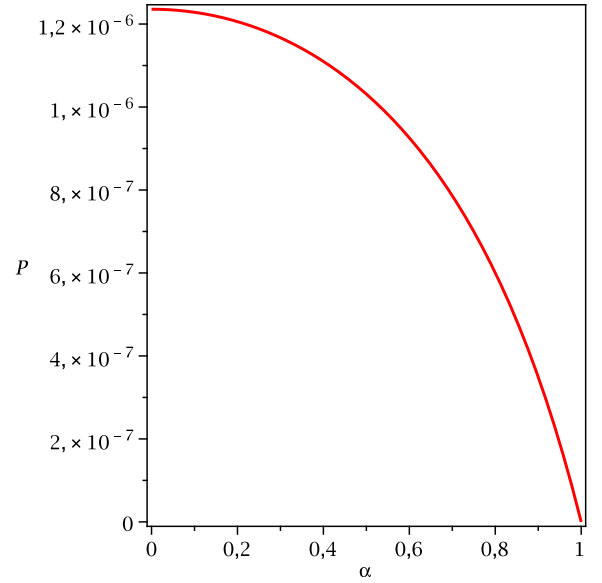


Figura 3.8 : Probabilidade de detecção do estado $|1, 1\rangle_{C_1, C_2}$ no estado $|\Psi\rangle_{C_1, C_2}$ em função do coeficiente α .

Tal como no caso do teletransporte quântico do estado atômico, o estado obtido $|\Psi\rangle_{C_1, C_2}$ dado pela Eq. (3.26) apresenta duas componentes indesejáveis para realização do teletransporte quântico sem medida dos estados de Bell. Logo as escolhas dos tempos de interação t_1 e t_2 serão tais que deverão minimizar a probabilidade de detecção destes dois estados ($|0, 2\rangle_{C_1, C_2}$ e $|1, 1\rangle_{C_1, C_2}$). Nas Figs. (3.7) e (3.8) observamos que a probabilidade de detecção destes dois estados é muito pequena.

Por fim, Alice, que foi quem mediu o estado atômico, envia a Bob, via um canal clássico, o resultado da sua medida. Caso tenha sido o estado excitado, o teletransporte foi realizado com sucesso; se resultou o contrário, o procedimento todo deve ser repetido.

A probabilidade de sucesso P_c de medir o átomo no estado excitado é dada

por

$$P_c = N^2 = |\xi|^2 + |\mu|^2 + |\nu|^2 + |\gamma|^2, \quad (3.27)$$

calculada pela expressão $P_c = |\langle e|\Psi\rangle_{C_1, C_2}|^2$. Essa probabilidade nada mais é do que a probabilidade de sucesso de efetuarmos o teletransporte do estado do campo $|\varphi_{in}\rangle$ da cavidade C_2 para C_1 . Por outro lado, para que a fidelidade, F_c , do estado teletransportado de C_2 para C_1 seja igual aquela de 100%, obtida quando o estado efetivamente teletransportado é o estado desejado $|\varphi_{in}\rangle$, $|\langle \varphi_{in}|\Psi\rangle_{C_1, C_2}|^2$, é preciso que

$$F_c = \frac{1}{N^2} [|\alpha\xi|^2 + \alpha\beta^*\xi^*\gamma + |\alpha\nu|^2 + \alpha^*\beta\xi\gamma^* + |\beta\gamma|^2]. \quad (3.28)$$

As Figs. (3.9) e (3.10) mostram a probabilidade de sucesso do teletransporte do estado do campo e a fidelidade do estado teletransportado ser igual a $|\varphi_{in}\rangle$, respectivamente, para os mesmos parâmetros experimentais usados no teletransporte do estado atômico e também mostrando as diferenças nas duas descrições dadas pelo hamiltoniano efetivo [47] (P_w e F_w) e o hamiltoniano microscópico completo [48, 49] (P_c e F_c). Na Fig. (3.9) temos que probabilidade de sucesso P_c varia no intervalo $0,17 \lesssim P_c \lesssim 0,30$, dependendo do valor do parâmetro α ; além disso a diferença entre das probabilidades de sucesso P_w e P_c são bastante grandes. Na Fig. (3.10) notamos que o valor mínimo da fidelidade F_c é próximo de 95%, e que há uma dependência com relação ao parâmetro α e também uma discrepância entre os curvas de fidelidade F_w e F_c . A fidelidade de teletransportar o estado $|\varphi_{in}\rangle = |2\rangle_{C_2}$ é próximo de 95%, enquanto que para o estado $|\varphi_{in}\rangle = |0\rangle_{C_2}$ a fidelidade é de 100%. A escolha dos tempos de interação nas cavidades C_1 e C_2 são dadas por $t_1 = 2,28\mu s$ e $t_2 = 6,27\mu s$, respectivamente; estes tempos foram escolhidos de tal forma a otimizar a fidelidade.

Com relação ao uso da fidelidade padrão, $F = |\langle \phi|\psi\rangle|^2$, como uma função que dá uma “boa medida” do teletransporte aproximado, no artigo de Serra *et al* Ref. [51] foi mostrado que há um conjunto infinito de estados que exibem a mesma fidelidade. Sendo assim esta medida precisa ser complementada com uma informação auxiliar sobre o estado teletransportado $|\psi\rangle$; tal informação pode ser dada pela função de Wigner [52], que é uma função de distribuição de quasi-probabilidade³ possuindo características bem particulares para cada estado. Nas Figs. (3.11-3.16) mostramos as funções de Wigner para o estado teletransportado $|\Psi\rangle_{C_1, C_2}$, onde tomamos o traço na cavidade C_2 , e o estado preparado

³Diz-se quase-probabilidade porque ela é uma função de distribuição no espaço de fase que pode assumir valores negativos.

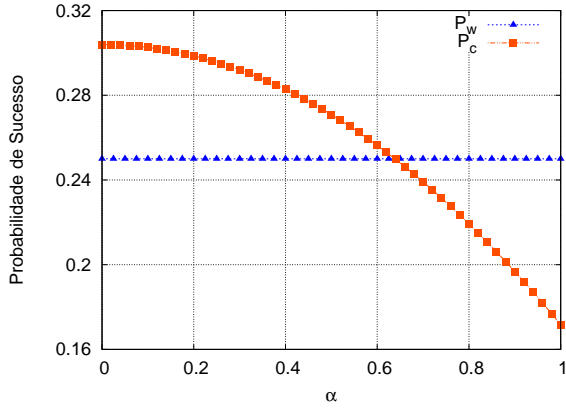


Figura 3.9 : Probabilidade de sucesso do teletransporte do estado do campo em função do coeficiente α obtidos a partir da descrição via hamiltoniano efetivo (P_w) e a partir do hamiltoniano microscópico completo (P_c).

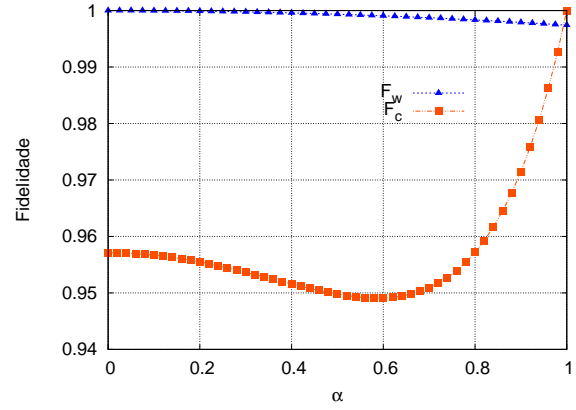


Figura 3.10 : Fidelidade do teletransporte do estado do campo em função do coeficiente α obtidos a partir da descrição via hamiltoniano efetivo (F_w) e a partir do hamiltoniano microscópico completo (F_c).

para ser teletransportado $|\varphi_{in}\rangle$ para diferentes valores de α . Notamos nesta figura que há muita semelhança nas funções de Wigner. Se compararmos os valores da fidelidade F_c da Fig. (3.10) com as características apresentadas pelas funções de Wigner, temos que: para $\alpha = 1$ a fidelidade é de $\sim 96\%$ de acordo com F_c , comparando as Figs. (3.11) e (3.12) observamos que não há diferença notável nos resultados, o que pode ser justificado pela característica gaussiana da função de Wigner neste caso, impedindo uma boa distinção. Para $\alpha = 1/\sqrt{2}$ a fidelidade é da ordem de $\sim 95\%$ de acordo com F_c , comparando as Figs. (3.13) e (3.14) vemos que há diferença notável nos resultados, embora a forma das duas funções sejam parecidas. Este resultado é esperado, de acordo com o valor da fidelidade neste caso específico; para $\alpha = 0$ a fidelidade é de 100% de acordo com F_c ; comparando as Figs. (3.15) e (3.16) observamos que não há diferença notável nos resultados. Desse modo a fidelidade obtida para o caso do teletransporte de estados do campo foi uma boa função para comparar o estado obtido após a realização do protocolo de teletransporte quântico com o estado que queríamos teletransportar.

Novamente, como apresentado no capítulo anterior, os resultados obtidos usando o hamiltoniano efetivo apresentam algumas discrepâncias com os resultados obtidos via hamiltoniano microscópico completo. Mostrando neste caso de teletransporte que a aplicação do hamiltoniano efetivo leva a alguns desvios dos resultados obtidos usando hamiltoniano mais realista; consequência do fato de que, no hamiltoniano efetivo, o uso

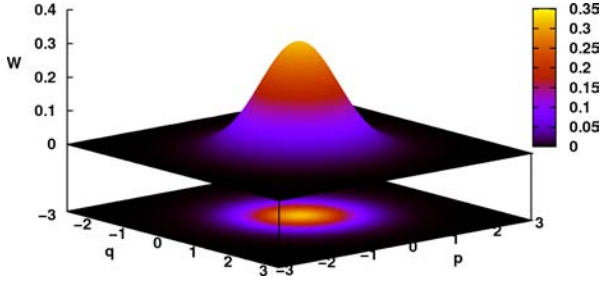


Figura 3.11 : Função de Wigner do estado teletransportado para $\alpha = 1$.

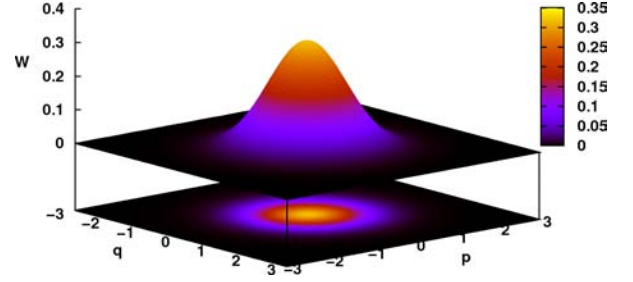


Figura 3.12 : Função de Wigner do estado a ser teletransportado $|\varphi_{in}\rangle$, onde $\alpha = 1$.

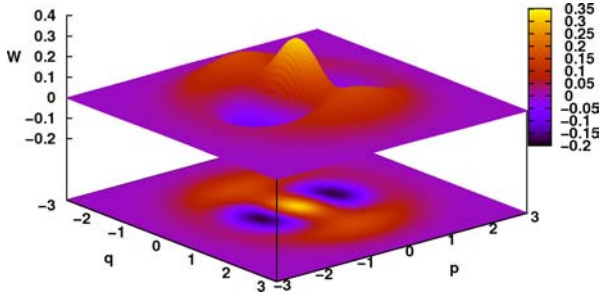


Figura 3.13 : Função de Wigner do estado teletransportado para $\alpha = 1/\sqrt{2}$.

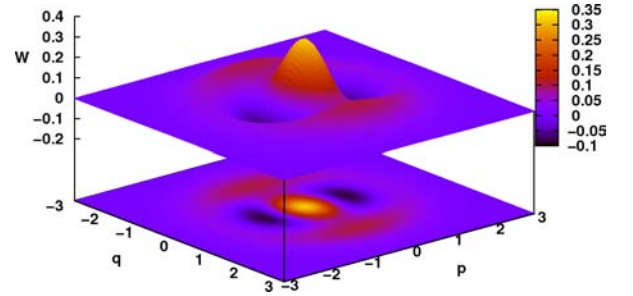


Figura 3.14 : Função de Wigner do estado a ser teletransportado $|\varphi_{in}\rangle$, onde $\alpha = 1/\sqrt{2}$.

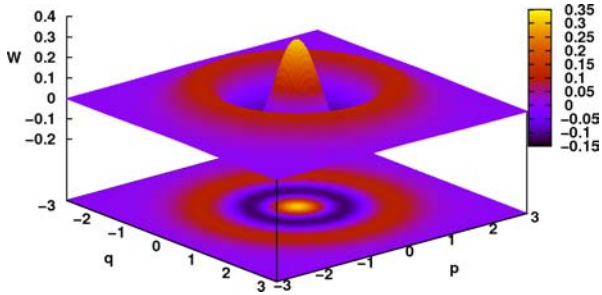


Figura 3.15 : Função de Wigner do estado teletransportado para $\alpha = 0$.

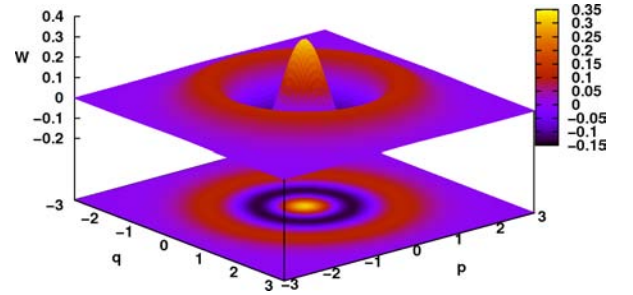


Figura 3.16 : Função de Wigner do estado a ser teletransportado $|\varphi_{in}\rangle$, onde $\alpha = 0$.

do número médio de fótons pequeno é proibitivo [11]. Vimos que as probabilidades de permanência nos autoestados do hamiltoniano, no caso limite $\delta = 80g$, ainda apresenta diferenças entre as duas descrições para o caso em que o número médio de fótons na cavidade é pequeno. Este é mais um caso onde a aplicação do hamiltoniano efetivo, tanto para o caso de teletransporte de estado atômico como para o caso de superposição de estados, é de uso indevido e irrealista; ao mesmo tempo mostrando que a utilização do hamiltoniano microscópico completo é necessária, se queremos alcançar resultados mais próximos da realidade.

4 Troca de emaranhamento quântico

4.1 Introdução

Emaranhamento quântico é um fenômeno curioso da mecânica quântica, caracterizado por um efeito de correlação dos estados de dois ou mais objetos (partículas ou fótons), de tal modo que o estado de um deles não pode ser definido sem considerar os estados dos demais, independente da separação espacial entre eles. Se considerarmos o par de autovetores $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$ de um hamiltoniano \hat{H}_A e outro par $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$ de outro hamiltoniano \hat{H}_B , o estado seguinte é um exemplo de estado emaranhado

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B \right), \quad (4.1)$$

onde notamos não ser possível separar os estados. Eles estão “entrelaçados”. Se fizermos uma medida do estado da partícula A por exemplo, temos que o estado da partícula B dependerá do resultado desta medida; desta forma dizemos que o estado descrito acima está emaranhado.

Atualmente, para estabelecer emaranhamento quântico entre estados de partículas, elas devem ser coletadas da mesma fonte [53, 54], como no caso de emaranhamento de fótons gêmeos, ou fazê-las interagirem entre si [35] e então obter o estado emaranhado depois de uma conveniente evolução temporal. Outra forma de obter estados emaranhados é projetar o estado de duas partículas no estado emaranhado. Durante esta projeção não é necessário haver interação direta entre as partículas. Se cada uma das partículas está preparada em um estado emaranhado com a outra, pode-se efetuar uma medida apropriada (tal como a medida dos estados de Bell) sobre a outra partícula parceira, de tal forma que o estado das duas outras partículas restantes estarão automaticamente em um estado emaranhado. Este processo é chamado de troca de emaranhamento quântico [55].

Se Alice tem uma partícula que está emaranhada com uma partícula que Bob possui, e Bob teletransporta esta para Carol, então, a partícula de Alice estará emaranhada com a de Carol. A Fig. (4.1) mostra um diagrama que, de forma simples, explica o processo: Alice tem uma partícula 1, Bob possui duas, 2 e 3, Carol possui a partícula 4. A partícula de Alice está emaranhada com uma das partículas de Bob; no caso con-

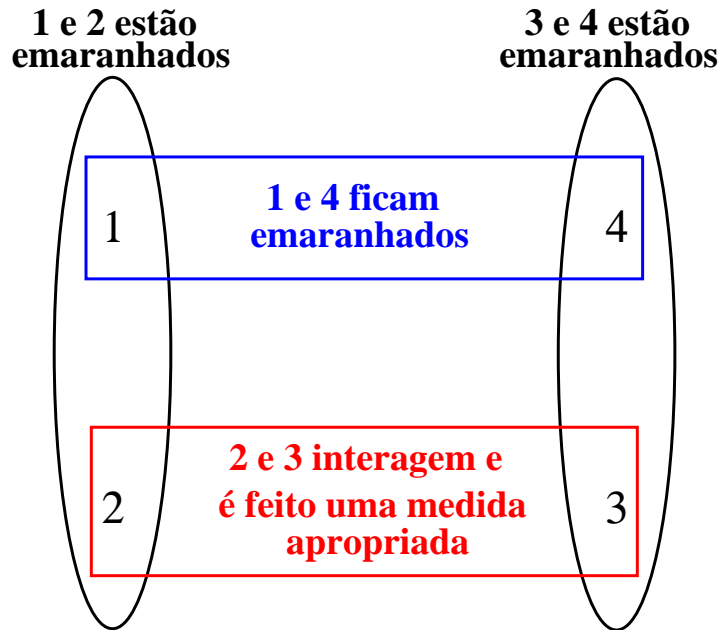


Figura 4.1 : Esquema representativo da troca de emaranhamento quântico.

sideramos ser a partícula 2. A partícula 3 de Bob está emaranhada com a partícula 4 de Carol. Se Bob realiza uma medida em suas duas partículas na base dos estados de Bell e comunica o seu resultado a Carol, via um canal clássico como feito no esquema de teletransporte quântico, no Capítulo 3, o estado da partícula 2 pode ser teletransportado para a partícula 4 de Carol. O resultado final é que as partículas de Alice e Carol (partículas 1 e 4), que nunca interagiram diretamente uma com a outra, agora são partículas em estado emaranhado.

4.2 Troca de emaranhamento quântico via JC de dois fótons

No que segue, mostramos como implementar o esquema de troca de emaranhamento quântico, de acordo com a proposta de Wang e Liu [56], usando o modelo de Jaynes-Cummings (JC) de dois fótons sem medida na base de Bell. Na Fig. (4.2) temos um esquema representativo da troca de emaranhamento, assim resumida: os átomos 1 e 2 estão emaranhados, sendo seu estado representado por $|\Phi\rangle_{1,2}$, e as cavidade C_3 e C_4 também estão emaranhadas e seu estado é representado por $|\Phi\rangle_{3,4}$; o átomo 2 interage com a cavidade C_3 num intervalo de tempo t_1 e em seguida é detectado. Se for detectado no estado excitado com sucesso temos como resultado final que o estado do átomo 1 e da

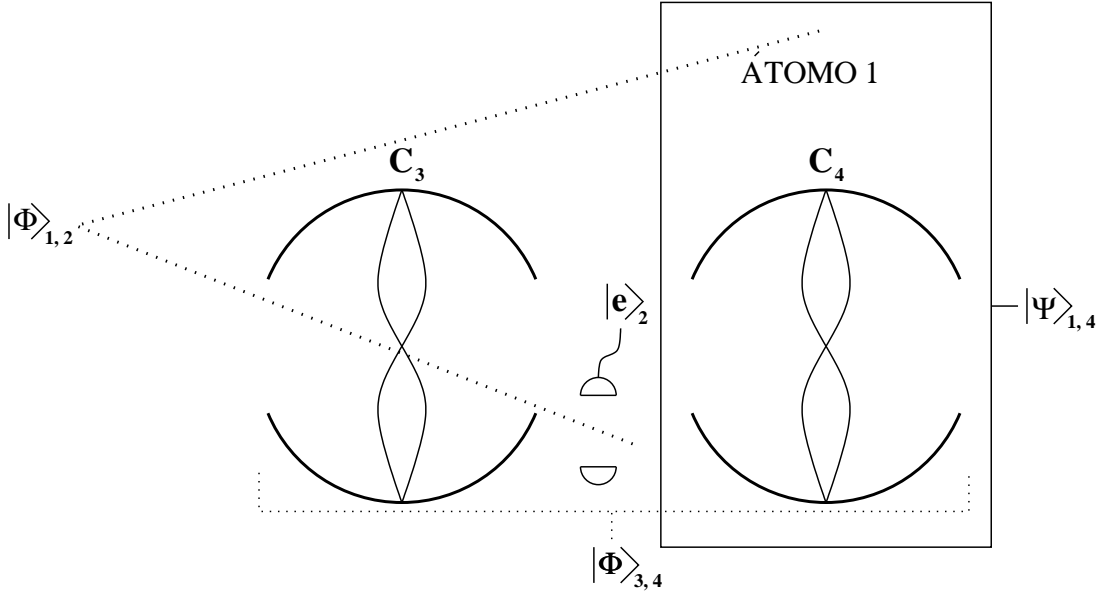


Figura 4.2 : Esquema representativo da troca de emaranhamento quântico dos estados emaranhados $|\Phi\rangle_{1,2}$ (átomo 1 e 2) e $|\Phi\rangle_{3,4}$ (das cavidades C_3 e C_4) para $|\Psi\rangle_{1,4}$ (átomo 1 e cavidade C_4).

cavidade C_4 , representado por $|\Psi\rangle_{1,4}$, os quais em nenhum momento interagem entre si, ficam emaranhados. A explicação detalhada deste processo é feita em várias etapas, como segue.

Primeiramente, os dois átomos (1 e 2) e as duas cavidades (3 e 4) estão preparados previamente nos estados

$$|\Phi\rangle_{1,2} = \alpha_1 |g\rangle_1 |e\rangle_2 + \beta_1 |e\rangle_1 |g\rangle_2, \quad (4.2)$$

$$|\Phi\rangle_{3,4} = \alpha_2 |2\rangle_3 |0\rangle_4 + \beta_2 |0\rangle_3 |2\rangle_4, \quad (4.3)$$

respectivamente; $|0\rangle$ denota o estado de vácuo enquanto $|2\rangle$ denota o de dois fótons num modo. O estado de emaranhamento entre os átomos 1 e 2 podem ser obtidos a partir da interação desses átomos por uma outra cavidade; já o emaranhamento entre as cavidades C_3 e C_4 pode ser obtido a partir da interação de um átomo de Rydberg de três níveis interagindo em C_3 e em seguida em C_4 .

Para atingir o processo de troca de emaranhamento [56], Bob envia o átomo 2 através da cavidade C_3 e este irá interagir com o campo da cavidade por um intervalo de

tempo t_1 . Desse modo a evolução do sistema total leva-o ao estado

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle_{1234} = & \alpha_1\alpha_2 |g\rangle_1 |0\rangle_4 [C_{e,2}^{(e,2)}(t_1) |e\rangle_2 |2\rangle_3 + C_{f,3}^{(e,2)}(t_1) |f\rangle_2 |3\rangle_3 + C_{g,4}^{(e,2)}(t_1) |g\rangle_2 |4\rangle_3] \\
& + \alpha_1\beta_2 |g\rangle_1 |2\rangle_4 [C_{e,0}^{(e,0)}(t_1) |e\rangle_2 |0\rangle_3 + C_{f,1}^{(e,0)}(t_1) |f\rangle_2 |1\rangle_3 + C_{g,2}^{(e,0)}(t_1) |g\rangle_2 |2\rangle_3] \\
& + \alpha_2\beta_1 |e\rangle_1 |0\rangle_4 [C_{g,2}^{(g,2)}(t_1) |g\rangle_2 |2\rangle_3 + C_{f,1}^{(g,2)}(t_1) |f\rangle_2 |1\rangle_3 + C_{e,0}^{(g,2)}(t_1) |e\rangle_2 |0\rangle_3] \\
& + \beta_1\beta_2 |e\rangle_1 |2\rangle_4 |g\rangle_2 |0\rangle_3 .
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Se o átomo 2 é detectado no estado $|e\rangle_2$ depois de atravessar a cavidade C_3 , o estado descrevendo o átomo 1 e as cavidades C_3 e C_4 vão colapsar no estado,

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle_{134} = & \frac{1}{N} \left[\alpha_1\alpha_2 C_{e,2}^{(e,2)}(t_1) |g\rangle_1 |2\rangle_3 |0\rangle_4 + \alpha_1\beta_2 C_{e,0}^{(e,0)}(t_1) |g\rangle_1 |0\rangle_3 |2\rangle_4 \right. \\
& \left. + \alpha_2\beta_1 C_{e,0}^{(g,2)}(t_1) |e\rangle_1 |0\rangle_3 |0\rangle_4 \right].
\end{aligned} \tag{4.5}$$

A probabilidade de sucesso de detectar o átomo 2 no seu estado excitado é

$$P_e = N^2 = |\alpha_1\alpha_2 C_{e,2}^{(e,2)}(t_1)|^2 + |\alpha_1\beta_2 C_{e,0}^{(e,0)}(t_1)|^2 + |\alpha_2\beta_1 C_{e,0}^{(g,2)}(t_1)|^2 , \tag{4.6}$$

enquanto que a fidelidade de obter o átomo 1 e a cavidade C_4 no estado desejado (maximamente emaranhado) $|\varphi_{in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle_1 |2\rangle_4 + |e\rangle_1 |0\rangle_4)$ é

$$F = \frac{1}{2N^2} \left| \alpha_1\beta_2 C_{e,0}^{(e,0)}(t_1) + \alpha_2\beta_1 C_{e,0}^{(g,2)}(t_1) \right|^2 . \tag{4.7}$$

Suponhamos que os coeficientes do estado inicial das Eqs. (4.6) e (4.7) obedecem às seguintes relações: $\beta_1 = \beta$, $\alpha_1 = \sqrt{1 - \beta^2}$, $\beta_2 = (1 + \varepsilon)\beta$, e $\alpha_2 = \sqrt{1 - (1 + \varepsilon)^2 \beta^2}$, onde ε é a taxa de erro constante entre os coeficientes β_1 e β_2 , sendo que ε e β satisfazem à relação $|\varepsilon| < 1$, $|(1 + \varepsilon)\beta| < 1$.

No estado $|\Psi\rangle_{134}$, descrito pela Eq. (4.5), o primeiro termo $|g\rangle_1 |2\rangle_3 |0\rangle_4$ refere-se ao átomo no estado fundamental, a cavidade C_3 com dois fótons e a cavidade C_4 no vácuo. Na Fig. (4.3) temos a probabilidade de detecção deste estado em função do coeficiente β do estado inicial a ser teletransportado, observamos que esta é pequena comparada com as dos outros dois estados para o caso de teletransporte de um estado maximamente emaranhado (para $\beta = 1/\sqrt{2}$ tem-se $P \simeq 2\%$). Logo, como aproximação podemos dizer que depois da detecção do átomo 2 no estado excitado, a cavidade C_3 é projetada no estado de vácuo. Com isto não há a necessidade de uma medida na base dos estados de Bell, visto que somente o estado do átomo 2 foi detectado.

A Fig. (4.4) mostra a probabilidade de sucesso de medir o átomo 2 no estado excitado em função do coeficiente β para a descrição da troca de emaranhamento. Usamos

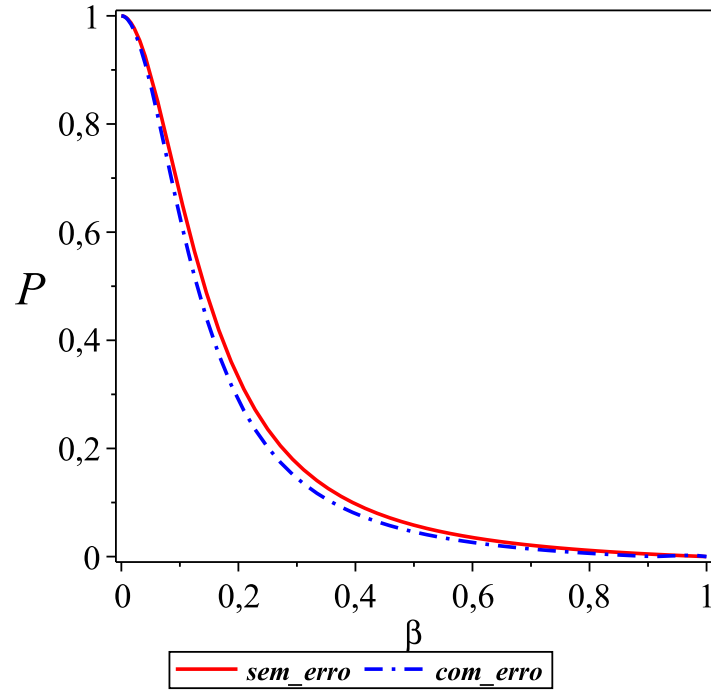


Figura 4.3 : Probabilidade de detecção do estado $|g\rangle_1 |2\rangle_3 |0\rangle_4$ no estado $|\Psi\rangle_{134}$ em função do coeficiente β , na curva com erro tem-se que $\varepsilon = 0, 1$.

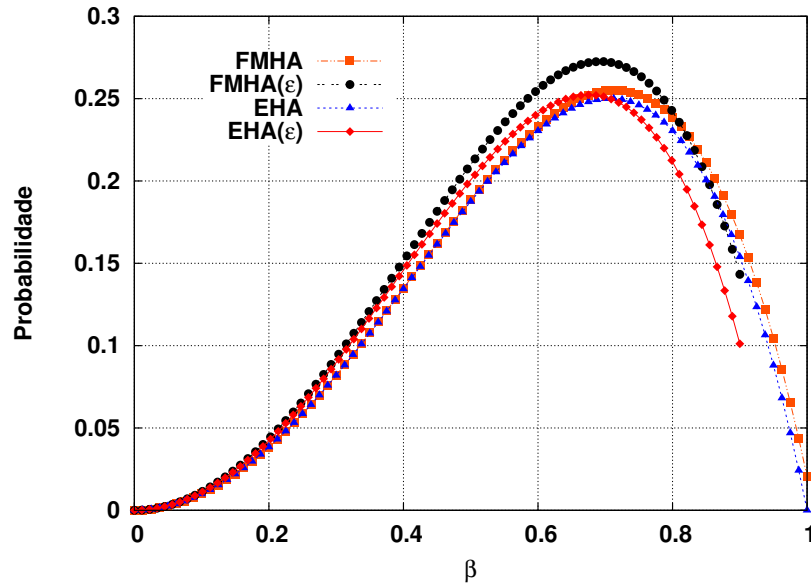


Figura 4.4 : Probabilidade de sucesso da realização da troca de emaranhamento quântico em função do coeficiente β para as duas descrições, onde $\varepsilon = 0, 1$. As curvas nominadas por EHA correspondem as obtidas via hamiltoniano efetivo, já as FMHA é via hamiltoniano microscópico completo.

a descrição via hamiltoniano efetivo [56] (curvas EHA) e a descrição via hamiltoniano microscópico completo (curvas FMHA). Observamos que tanto no caso em que consideramos

o coeficiente β , com erro e sem erro, ocorre alguma discrepância nos resultados, o que é obtido para tempo de interação $t_1 = 2,06\mu s$, do átomo 2 na cavidade C_3 , sendo este tempo escolhido de forma a maximizar o valor da fidelidade, o que é equivalente a minimizar a probabilidade de obtenção do estado de dois fótons na cavidade C_3 . A probabilidade em ambos os casos é maior quando $\beta \sim 1/\sqrt{2}$, correspondendo ao estado maximamente emaranhado $|\varphi_{in}\rangle$.

Na Fig. (4.5) temos a fidelidade de criação do estado emaranhado $|\varphi_{in}\rangle$ em função do coeficiente β , obtida também para as duas descrições. Comparando os resultados, vemos que diferentemente do resultado obtido para a probabilidade, a fidelidade obtida usando o hamiltoniano efetivo (representado por EHA) neste caso difere muito da fidelidade obtida a partir do hamiltoniano microscópico completo (representado por FMHA), principalmente com relação ao coeficiente β . A fidelidade F dada pela Eq. (4.7) é superior a 90% para $0 \lesssim \beta \leq 0,9$; para $\beta > 0,9$ a fidelidade decai rapidamente para zero, o efeito da inclusão do erro $\varepsilon = 0,1$ (representada pela curva FMHA(ε)) não muda significativamente a fidelidade obtida. Já o mesmo comportamento da fidelidade não é visto usando o hamiltoniano efetivo: ela assume valores superiores a 90% para $0,1 \leq \beta \lesssim 1$, e decai rapidamente a zero para $\beta < 0,1$; a variação da fidelidade com respeito ao erro

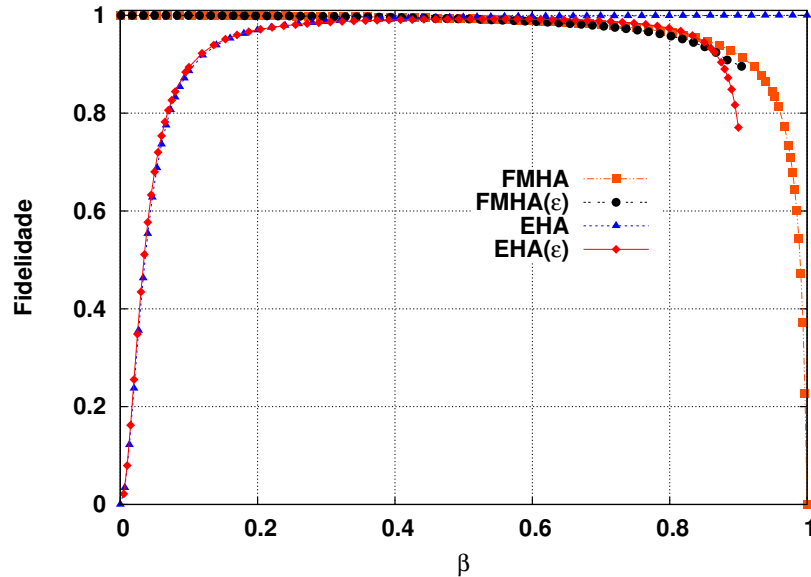


Figura 4.5 : Fidelidade do estado obtido a partir da troca de emaranhamento quântico em função do coeficiente β para as duas descrições, onde $\varepsilon = 0,1$. As curvas nominadas por EHA correspondem as obtidas via hamiltoniano efetivo, já as FMHA é via hamiltoniano microscópico completo.

$\varepsilon = 0,1$ (representada pela curva $EHA(\varepsilon)$), e para $0,6 \leq \beta \lesssim 0,9$: a fidelidade começa a diminuir à medida que β aumenta, diferenciando assim do resultado para o caso em que não se considera o erro.

Diante dos resultados apresentados acima, vemos que apesar de não haver tanta discrepância nas probabilidade de sucesso obtidas via hamiltoniano efetivo, a descrição deste processo ainda é pertinente via hamiltoniano microscópico completo, visto que com relação a fidelidade houve uma certa diferença considerável de resultados. Além do mais, o número médio de fótons na cavidade durante o experimento não supera de 4 fótons. Vimos no Capítulo 2 que, para estes casos, o melhor resultado é obtido via hamiltoniano microscópico completo.

5 Conclusão

Neste trabalho, estudamos detalhadamente o modelo de Jaynes-Cummings de dois fótons, apresentando duas descrições nas quais são mais usadas para descrever este tipo de interação átomo-campo. A primeira descrição é dada via hamiltoniano efetivo, que é um modelo aproximado e mais simples para descrever este tipo de sistema, e a outra descrição padrão é via hamiltoniano microscópico completo. A dedução do hamiltoniano microscópico completo foi apresentada a partir do hamiltoniano de interação átomo-campo geral, onde consideramos que o sistema era composto por um único átomo de Rydberg com três níveis atômicos na configuração Ξ (ladeira) interagindo com um único modo do campo eletromagnético, e usamos a aproximação de dipolo elétrico e de onda girante. A partir do hamiltoniano na representação de interação usamos o método das amplitudes de probabilidade para obter o estado do sistema evoluindo no tempo $|\psi(t)\rangle_I$, resultado este obtido através da resolução de uma sistema de equações diferenciais de primeira ordem acopladas, para as amplitudes de probabilidades, obtidas da equação de Schrödinger dependente do tempo. O mesmo foi feito para o hamiltoniano efetivo com intuito de obter as amplitudes de probabilidade, para comparação de resultados relativos à probabilidade de permanência nos autoestados destes hamiltonianos. Notamos que há uma discrepância muito grande, tanto da expressão analítica das amplitudes de probabilidade quanto da própria probabilidade de permanência nos autoestados mencionados, para cada hamiltoniano. Mas observamos que há também um limite no qual o modelo de Jaynes-Cummings de dois fótons pode ser descrito usando o hamiltoniano efetivo, havendo restrições quanto ao regime de aplicação deste hamiltoniano: uma delas é que a quantidade média de fótons na cavidade deve ser muito grande ($n \gtrsim 40$). Além disso, para quantidades físicas que dependem dos coeficientes não-diagonais do operador densidade do sistema, como no estudo do efeito “*squeezing*” por exemplo, não é recomendado o uso do hamiltoniano efetivo, mesmo quando o número médio de fótons é grande. Isto se deve a um fator de fase global que aparece nos coeficientes do hamiltoniano microscópico completo quando é feito o limite onde a dessintonia δ e o número de fótons médio ficam relativamente grandes. No hamiltoniano efetivo este fator de fase não surge devido a desconsideração do efeito da dinâmica do “*Stark Shift*” durante a sua dedução.

Aplicamos o hamiltoniano microscópico completo para a implementação de teletransporte quântico de um estado atômico desconhecido e de estado do campo do tipo superposição de estados de Fock, com zero e dois fótons, e também para implementar a troca de emaranhamento quântico entres dois átomos e duas cavidades.

No caso do teletransporte de estado quântico, em ambos os casos observamos que tanto a probabilidade de sucesso do teletransporte quanto a fidelidade do estado teletransportado apresentam resultados diferentes do obtidos via hamiltoniano efetivo. Além disto a probabilidade e a fidelidade não são iguais nos dois casos; isto porque no hamiltoniano microscópico completo aparecem termos relacionados com as transições para o estado intermediário, o qual não aparece no hamiltoniano efetivo, e também devido a diferença da probabilidade de permanência em cada autoestado do hamiltoniano. A probabilidade de sucesso e a fidelidade mínima obtidas para o teletransporte atômico é de $\sim 22\%$ e $\sim 96\%$, respectivamente, sendo que os tempos de interação do átomo 2 é de $t_1 = 1,96\mu s$ e do átomo 1 de $t_2 = 6,27\mu s$. Enquanto que para o teletransporte do estado do campo a probabilidade de sucesso e a fidelidade mínima obtidos para o teletransporte são iguais a $0,17 \lesssim P_c \lesssim 0,30$ e $\sim 95\%$, respectivamente, e os tempos de interação do átomo na cavidade C_1 e C_2 são iguais a $t_1 = 2,28\mu s$ e $t_2 = 6,27\mu s$, respectivamente. Nos dois procedimentos de teletransporte foram usados parâmetros experimentais atualizados para a obtenção das probabilidades de sucesso, fidelidade e dos tempos de interação.

Já na aplicação para troca de emaranhamento quântico, para probabilidade de sucesso observamos que tanto no caso em que consideramos com ou sem erro no coeficiente β (referente a geração do estado emaranhado) há uma pequena discrepância nos resultados, obtida usando tempo de interação do átomo 2 na cavidade C_3 igual a $t_1 = 2,06\mu s$. Enquanto isso, para a fidelidade vimos que não há muita semelhança nos resultados obtidos nas duas descrições. Há intervalos nos quais para determinados valores de β a fidelidade é superior a 90% , porém decresce rapidamente para outros valores. Além disso, quando consideramos um erro associado ao coeficiente β não notamos muita diferença na fidelidade obtida a partir das duas descrições.

Portanto, baseando nos resultados apresentados anteriormente, notamos que a descrição da interação átomo-campo via hamiltoniano microscópico completo nos processos de dois fótons é necessária, visto que o hamiltoniano efetivo neste regime não apresenta uma descrição realística dos processos envolvidos, tanto nos casos de teletransporte quântico quanto no de troca de emaranhamento quântico.

A Quantização do campo

A.1 Quantização de um Oscilador Harmônico Simples

Para procedermos à quantização da energia de um campo de radiação vamos fazer uma analogia com a quantização de um oscilador harmônico simples (OHS). Apresentaremos a seguir a resolução do problema de um OHQ, para, em seguida, fazer uma analogia direta com a quantização do campo eletromagnético. Partiremos da equação de onda de Schrödinger independente do tempo

$$\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle, \quad (\text{A.1})$$

com

$$\hat{H} = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 + \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (\text{A.2})$$

em que ω é a frequência de oscilação, m é a massa da partícula e \hat{p} e \hat{q} são respectivamente os operadores do momento e da posição dessa partícula, que satisfazem a relação de comutação $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$, que é o postulado fundamental da mecânica quântica. A Eq. (A.1) nos diz que \hat{H} atuando sobre $|\Psi\rangle$ produz um autovalor E (nesse caso a energia do oscilador).

Expressemos o hamiltoniano H da seguinte forma:

$$\hat{H} = \hbar\omega (\alpha^2\hat{q}^2 + \beta^2\hat{p}^2), \quad (\text{A.3})$$

em que $\alpha = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}$ e $\beta = \left(\frac{1}{2m\hbar\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$, e o termo $\hbar\omega$ por enquanto é tratado apenas como um arranjo matemático. Fatorando a Eq. (A.3) obtemos

$$\hat{H} = \hbar\omega [(\alpha\hat{q} - i\beta\hat{p})(\alpha\hat{q} + i\beta\hat{p})]. \quad (\text{A.4})$$

Definindo $\hat{a} = (\alpha\hat{q} + i\beta\hat{p})$ e $\hat{a}^\dagger = (\alpha\hat{q} - i\beta\hat{p})$, segue desta definição dos operadores de criação \hat{a}^\dagger e aniquilação \hat{a} que:

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \alpha^2\hat{q}^2 + \beta^2\hat{p}^2 - \hbar\alpha\beta. \quad (\text{A.5})$$

onde a relação de comutação entre eles é $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Como $\hbar\alpha\beta = 1/2$, obtemos

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \alpha^2\hat{q}^2 + \beta^2\hat{p}^2 - \frac{1}{2}. \quad (\text{A.6})$$

Multiplicando a Eq. (A.6) por $\hbar\omega$ e substituindo os valores dos parâmetros α e β , encontramos:

$$H = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (\text{A.7})$$

Desprezando aqui a energia de ponto zero, dado por $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ encontramos o hamiltoniano do Oscilador Harmônico Simples Quantizado na seguinte forma:

$$H = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}. \quad (\text{A.8})$$

A.2 Quantização do Campo Eletromagnético

O que é demonstrado aqui, analogamente à resolução do oscilador harmônico simples, observada acima, é que podemos encontrar também uma natureza quântica para o campo eletromagnético.

Partindo das Equações de Maxwell e considerando um sistema no vácuo, ou seja, $\rho = 0$ (não há carga) e $\mathbf{J} = 0$ (condutividade nula), temos::

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{A.12})$$

em que \mathbf{E} é o vetor campo elétrico, \mathbf{B} é o vetor campo magnético, μ_0 é a constante de permeabilidade magnética no vácuo e ϵ_0 é a constante de permissividade elétrica no vácuo.

Podemos também simplificar a Eq. (A.10) fazendo $c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}}$, ou seja, $\mu_0\epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$. Então a Eq. (A.10) pode ser escrita como:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (\text{A.13})$$

Sabemos que a luz pode se manifestar como partícula, como por exemplo no efeito Compton ou no efeito fotoelétrico. Nosso próximo passo é encontrar uma relação entre os conceitos de onda e partícula para o campo eletromagnético.

Consideremos uma onda elétrica estacionária no vácuo polarizada na direção de z . Vamos escrevê-la como:

$$\mathbf{E} = E_0 p(t) \hat{\mathbf{z}} \sin kx, \quad (\text{A.14})$$

sendo $p(t)$ a parte oscilatória temporal da solução, $\hat{\mathbf{z}}$ o vetor unitário que indica a direção que aponta o campo elétrico, polarizado na direção do eixo z , k é o numero de onda e E_0 uma constante relacionada à amplitude máxima do campo elétrico. Da Eq. (A.9) temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \times E(x) \hat{\mathbf{z}} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \frac{\partial E(x)}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \therefore \mathbf{B} &= B(x) \hat{\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

A Eq. (A.15) implica que \mathbf{B} terá uma dependência com a variável x e aponta na direção de y . Usando A.14 e A.15, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial x} (E_0 p(t) \text{sen } kx) \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= E_0 k \hat{\mathbf{y}} p(t) \cos kx \\ \mathbf{B} &= E_0 k \hat{\mathbf{y}} \cos kx \int_0^t p(t) dt. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

que nos mostra que \mathbf{B} é proporcional a $\cos(kx)$. Substituindo as Eqs. (A.14) e (A.16) na Eq. (A.15), temos:

$$\frac{\partial B(x)}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (\text{A.17})$$

Fazendo $k \int_0^t p(t) dt = \frac{q(t)}{c}$ e usando as Eqs. (A.14) e (A.16), com $\omega = kc$, temos:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \omega p, \quad (\text{A.18})$$

Semelhantemente substituindo as Eqs. (A.14) e (A.16) na Eq. (A.17), temos:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\omega q. \quad (\text{A.19})$$

Podemos eliminar p ou q das Eqs. (A.18) e (A.19) basta derivar uma delas e substituir na outra:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \omega^2 q = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \omega^2 p = 0. \quad (\text{A.21})$$

As Eqs. (A.20) e (A.21) são as conhecidas equações de um oscilador harmônico simples. As Eqs. (A.18) e (A.19) podem ser obtidas do formalismo de Hamilton, escrevendo a hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2} \omega (p^2 + q^2) \quad (\text{A.22})$$

e verificando que

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

e resultam nas Eqs. (A.18) e (A.19).

A Eq. (A.22) é a energia da onda eletromagnética dentro da cavidade. Ela também pode ser obtida partindo da densidade de energia eletromagnética no vácuo [57]

$$\mu_{EM} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \right) \equiv \frac{Energia}{Volume}. \quad (A.23)$$

A energia dentro da cavidade é a integração no volume dessa densidade, ou, no caso unidimensional,

$$U = \int_0^L \mu_{EM} dx \equiv H. \quad (A.24)$$

Substituindo as Eqs. (A.14) e (A.16) na Eq. (A.24), teremos:

$$H = \frac{1}{4} E_0^2 \varepsilon_0 L (p^2 + q^2). \quad (A.25)$$

Comparando as Eqs. (A.22) e (A.25), obtemos E_0 :

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\omega}{\varepsilon_0 L}}. \quad (A.26)$$

Temos já todos os elementos para quantizar o campo eletromagnético. Tudo o que precisamos é fazer uma analogia entre o OHQ e a hamiltoniana da onda eletromagnética. Para isso vamos escrever a Eq. (A.22) fazendo a seguinte substituição:

$$\hat{p} = \sqrt{\hbar} \hat{P} \quad ; \quad \hat{q} = \sqrt{\hbar} \hat{Q}; \quad (A.27)$$

então:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\frac{\hat{P}^2}{2} + \frac{\hat{Q}^2}{2} \right). \quad (A.28)$$

Notando que a Eq. (A.28) é formalmente idêntica à uma equação de um OHQ assim como mostrado na seção anterior, com $m = 1$, $\hat{p} = \hat{P}$ e $\hat{x} = \hat{Q}$. Desse modo, em termos de \hat{a} e \hat{a}^\dagger a Eq. (A.28) fica:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (A.29)$$

Assim, temos

$$\hat{P} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}); \quad (\text{A.30})$$

$$\hat{Q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}). \quad (\text{A.31})$$

Voltando as equações de \mathbf{E} e \mathbf{B} , Eqs. (A.14) e (A.16), e substituindo nas Eqs. (A.30) e (A.31), temos:

$$E_x = i(\hat{a}^\dagger - \hat{a})\sqrt{\frac{\hbar}{2}}E_0 \text{sen}(kx), \quad (\text{A.32})$$

e

$$B_y = (\hat{a}^\dagger + \hat{a})\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\frac{E_0}{c} \cos(kx). \quad (\text{A.33})$$

As Eqs. (A.34) e (A.35) fornecem o valor do campo elétrico e magnético, ambos quantizados. Note que essa quantização considera apenas um modo do campo eletromagnético. Para o caso de N modos do campo, teremos

$$E_x = \sum_{j=1}^N i(\hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_j)\sqrt{\frac{\hbar}{2}}E_0^{(j)} \text{sen}(kx_j), \quad (\text{A.34})$$

e

$$B_y = \sum_{j=1}^N (\hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_j)\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\frac{E_0^{(j)}}{c} \cos(kx_j). \quad (\text{A.35})$$

Para o hamiltoniano dado pela Eq. (A.29) temos, no caso de N modos,

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \hbar\omega_j \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{A.36})$$

B Sistemas Físicos Necessários

B.1 Átomos de Rydberg

Átomos de Rydberg são aqueles que possuem número quântico principal, n , muito grande [58]. Uma definição de quão grande n deve ser para o átomo ser considerado de Rydberg não existe, mas para fins práticos $n \geq 15$ é satisfatório. Estes átomos possuem propriedades bastante incomuns: por exemplo, eles podem ser 10 mil vezes maiores ou mais que um átomo no estado fundamental e sua vida média pode superar $30ms$.

Suas grandes dimensões implicam um grande momento de dipolo, o que adapta justamente sua utilização para estudos de interações atômicas com campos eletromagnéticos na faixa de microondas. Átomos de Rydberg podem ser usados para se estudar eletrodinâmica quântica de cavidade, estados não-clássicos do campo eletromagnético na faixa mencionada e também fenômenos de teletransporte.

Uma classe especial de átomos de Rydberg é a de “átomos circulares”, em que o momento angular orbital l e sua projeção no eixo z , m , têm valores máximos: $m = l = n - 1$. Se nos recordarmos das regras de seleção de dipolo elétrico, $\Delta l = \pm 1$ e $\Delta m = \pm 1$, vemos que esses estados só podem se acoplar aos estados circulares imediatamente superiores ($n + 1$) ou inferiores ($n - 1$). Essa propriedade possui conseqüências muito importantes nos tempos de vida dos estados circulares. Por exemplo, um átomo circular com $n = 50$ terá um tempo de vida de cerca de $30ms$ [58].

Geralmente os átomos de Rydberg estudados têm n entre 20 e 60. Por que não se usam átomos de n maior? Há dois fatores limitantes: i) quanto maior n , menor o campo elétrico necessário para ionizar o átomo e fica cada vez mais difícil blindar os átomos de campos tão tênues; ii) a seção de choque geométrica aumenta com n^4 e as colisões começam a dificultar a obtenção de resultados experimentais (no caso de experiências em células a vapor).

B.2 Cavidades com Alto Fator de Qualidade

Cavidades de alto fator de qualidade Q são utilizadas para aprisionar campos estacionários para estudar interação radiação-matéria. Quando falamos em alto fator de qualidade, falamos também de alto tempo de vida do campo eletromagnético na cavidade. A relação entre essas duas grandezas é dada por

$$Q = \tau_v \times \omega.$$

O fator de qualidade é da ordem de 10^8 para um tempo de vida do campo na cavidade da ordem de $\tau_v \sim 10^{-2}s$ e a frequência do campo aprisionado ω da ordem de $10^{10}s^{-1}$.

A cavidade é feita de dois espelhos esféricos bem polidos de Nióbio (cada espelho tendo um diâmetro de $50mm$ e um raio de curvatura de $40mm$ e com uma distância entre os espelhos de $27mm$ [34]. Todo esse aparato é resfriado para cerca de $1K$ para minimizar efeitos de ruídos térmicos. No equilíbrio térmico, a cavidade contém cerca de $0,7$ fótons térmicos que são removidos enviando pulsos atômicos contendo átomos no estado fundamental que, interagindo em ressonância com a cavidade, absorvem eficientemente tais fótons e reduz a temperatura do sistema. Após esse processo de resfriamento, o número de fótons é reduzido para abaixo de $0,1$ [34].

As frequências do campo e das transições atômicas podem ser ajustadas para obtermos interações do tipo ressonante e dispersiva. Um modelo para o estudo da interação radiação-matéria foi o proposto por Jaynes-Cummings cujo hamiltoniano, na representação de interação (ver apêndice B), é

$$\hat{V}_I = \hbar\lambda (\hat{a}\sigma_+ + \hat{a}^\dagger\sigma_-), \quad (\text{B.1})$$

sendo \hbar a constante de planck dividida por 2π , λ é a frequência de Rabi, \hat{a}^\dagger e \hat{a} os operadores de criação e aniquilação de fótons do campo eletromagnético, σ_+ e σ_- são os operadores de levantamento e abaixamento dos níveis atômicos. Nesse tipo de interação há troca de fótons entre o campo e o átomo. Desse modo, o operador de evolução temporal $\hat{U}_{JC}(t) = \exp(-iV_I t/\hbar)$ do sistema átomo-campo pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} \hat{U}_{JC}(t) &= \cos\left(\lambda t\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1}\right) |e\rangle\langle e| + \cos\left(\lambda t\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}\right) |g\rangle\langle g| \\ &- i\frac{\text{sen}\left(\lambda t\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1}\right)}{\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1}} \hat{a}|e\rangle\langle g| - i\frac{\text{sen}\left(\lambda t\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}\right)}{\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}} \hat{a}^\dagger|g\rangle\langle e|. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

A interação dispersiva é uma interação em que as frequências do campo e das transições atômicas são ligeiramente diferentes. Essa interação é feita via Efeito Stark, em

que a aplicação de um campo elétrico nas paredes da cavidade garante um alargamento nos níveis de energia do átomo fazendo com que a frequência de transição atômica e a frequência do campo tenham essa leve diferença. Devido a isso, não se observa troca de fótons entre o átomo e o campo. O hamiltoniano para esse tipo de interação é dada por

$$\hat{H}_{dis} = \hbar\chi\hat{a}^\dagger\hat{a}\sigma_{ee}.$$

em que $\sigma_{ee} = |e\rangle\langle e|$ sendo $|e\rangle$ o primeiro estado excitado, $\chi = g^2/\delta$ é a constante de acoplamento entre o átomo e o campo, λ é a frequência de Rabi e δ é a diferença entre a frequência do átomo e a frequência do campo.

B.3 Detectores Seletivos

A detecção dos estados atômicos se dá através de detectores atômicos seletivos. É a detecção do estado atômico em $|e\rangle$ ou $|g\rangle$ que projetará o estado do campo na cavidade. Esses detectores são constituídos por duas placas metálicas nas quais se aplica um campo elétrico. O arranjo do sistema é montado de tal forma que em um primeiro detector há a aplicação de um campo elétrico capaz de ionizar o átomo se ele estiver no estado excitado $|e\rangle$ e insuficiente para ionizar o átomo se ele estiver no estado $|g\rangle$. Para o segundo detector, colocado após o primeiro, o campo elétrico é mais intenso e capaz de ionizar o átomo que se encontra no estado fundamental $|g\rangle$. Toda nossa informação sobre o estado do sistema é dada pela detecção de ionização do átomo. Os átomos circulares são ionizados num campo elétrico de 128 V/cm quando o átomo se encontra no estado excitado [34].

B.4 Zonas de Ramsey

As zonas de Ramsey são necessárias para gerar superposição de estados atômicos. Tal superposição é produzida pelo mecanismo clássico de um campo preso em uma cavidade que, ao contrário das cavidades com alto fator de qualidade em que os fótons são dissipados em taxas suficientemente baixas, por apresentar baixa qualidade deve ser continuamente bombeada por uma fonte externa a fim de compensar a perda das propriedades clássicas da cavidade [59].

O efeito sentido por um átomo ao atravessar uma zona de Ramsey pode ser

descrito pelo operador de rotação

$$\hat{U}(\phi, \varphi) = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \mathbb{I} - i \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) [e^{-i\varphi} \sigma^+ + e^{i\varphi} \sigma^-], \quad (\text{B.3})$$

em que ϕ é o ângulo de rotação desejada, \mathbb{I} é o operador identidade e σ^+ e σ^- são os operadores de Pauli, análogo aos operadores de spin:

$$\sigma^+ = |e\rangle\langle g| \quad (\text{B.4})$$

$$\sigma^- = |g\rangle\langle e| \quad (\text{B.5})$$

então, se um átomo cruza uma zona de Ramsey, seus níveis evoluirão de acordo com o operador evolução (B.3):

$$\hat{U}^{ZR}(\phi, \varphi)|g\rangle = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) |g\rangle - ie^{-i\varphi} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) |e\rangle \quad (\text{B.6})$$

e

$$\hat{U}^{ZR}(\phi, \varphi)|e\rangle = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) |e\rangle - ie^{i\varphi} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) |g\rangle. \quad (\text{B.7})$$

Referências Bibliográficas

- [1] A. M. Prokhorov. *Quantum Electronics. Science*, **149**, 828, 1965.
- [2] R. L. Carman. Amplifiers involving two-photon energy-extraction schemes. *Phys. Rev. A*, **12**, 1048, 1975.
- [3] N. Nayak e B. K. Mohanty. Quantum theory of an inhomogeneously broadened two-photon laser. *Phys. Rev. A*, **19**, 1204, 1979.
- [4] M. S. Zubairy, M. S. K. Razmi, S. Iqbal, e M. Idress. Squeezed states in a multiphoton absorption process. *Phys. Lett. A*, **98**, 168, 1983.
- [5] C. K. Hong e L. Mandel. Experimental realization of a localized one-photon state. *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 58, 1986.
- [6] D. T. Pegg e S. M. Barnett. Unitary Phase Operator in Quantum Mechanics. *Europhys. Lett.*, **6**, 483, 1988.
- [7] M. S. Zubairy e J. J. Yeh. Photon statistics in multiphoton absorption and emission processes. *Phys. Rev. A*, **21**, 1624, 1980.
- [8] M. S. Zubairy. Nonclassical effects in a two-photon laser. *Phys. Lett. A*, **87**, 162, 1982.
- [9] Z. Y. Ou e L. Mandel. Further evidence of nonclassical behavior in optical interference. *Phys. Rev. Lett.*, **62**, 2941, 1989.
- [10] S.-Y. Zhu e X.-S. Li. Quantum theory of a two-photon laser. *Phys. Rev. A*, **36**, 3889, 1987.
- [11] A. H. Toor e M. S. Zubairy. Validity of the effective Hamiltonian in the two-photon atom-field interaction. *Phys. Rev. A*, **45**, 4951, 1992.
- [12] L. Davidovich, J. M. Raimond, M. Brune, e S. Haroche. Quantum theory of a two-photon micromaser. *Phys. Rev. A*, **36**, 3771, 1987.
- [13] M. Brune, J. M. Raimond, P. Goy, L. Davidovich, e S. Haroche. Realization of a two-photon maser oscillator. *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 1899, 1987.

- [14] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, e W. K. Wootters. Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels. *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 1895, 1993.
- [15] D. Gottesman e I. L. Chuang. Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations. *Nature*, **402**, 390, 1999.
- [16] J. I. Cirac, P. Zoller, H. J. Kimble, e H. Mabuchi. Quantum State Transfer and Entanglement Distribution among Distant Nodes in a Quantum Network. *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 3221, 1997.
- [17] D. Bouwmeester, J.W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, e A. Zeilinger. Experimental Quantum Teleportation. *Nature*, **390**, 575, 1997.
- [18] D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy, e S. Popescu. Experimental Realization of Teleporting an Unknown Pure Quantum State via Dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 1121, 1998.
- [19] E. Lombardi, F. Sciarrino, S. Popescu, e F. de Martini. Teleportation of a Vacuum-One-Photon Qubit. *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 070402, 2002.
- [20] A. Furusawa, J. L. Sorensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble, e E. S. Polzik. Unconditional Quantum Teleportation. *Science*, **282**, 706, 1998.
- [21] D. Fattal, E. Diamanti, K. Inoue, e Y. Yamamoto. Quantum Teleportation with a Quantum Dot Single Photon Source. *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 037904, 2004.
- [22] E. Solano, C. L. Cesar, R. L. de Matos Filho, e N. Zagury. Reliable teleportation in trapped ions. *Eur. Phys. J. D*, **13**, 121, 2001.
- [23] S. L. Braunstein e H. J. Kimble. Teleportation of Continuous Quantum Variables. *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 869, 1998.
- [24] C. J. Villas-Bôas, N. G. de Almeida, e M. H. Y. Moussa. Teleportation of a zero- and one-photon running-wave state by projection synthesis. *Phys. Rev. A*, **60**, 2759, 1999.
- [25] L. Davidovich, N. Zagury, M. Brune, J. M. Raimond, e S. Haroche. Teleportation of an atomic state between two cavities using nonlocal microwave fields. *Phys. Rev. A*, **50**, R895, 1994.

- [26] M. H. Y. Moussa. Teleportation with identity interchange of quantum states. *Phys. Rev. A*, **55**, R3287, 1997.
- [27] A. Einstein, B. Podolsky, e N. Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Phys. Rev.*, **47**, 777, 1935.
- [28] P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, A. V. Sergienko, e Y. Shih. New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 4337, 1995.
- [29] S.-B. Zheng e G.-C. Guo. Efficient Scheme for Two-Atom Entanglement and Quantum Information Processing in Cavity QED. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 2392, 2000.
- [30] C. H. Bennett e S. J. Wiesner. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states. *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 2881, 1992.
- [31] A. K. Ekert. Quantum cryptography based on Bell's theorem. *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 661, 1991.
- [32] X. Zou e W. Mathis. Schemes for generating the cluster states in microwave cavity QED. *Phys. Rev. A*, **72**, 013809, 2005.
- [33] Q. A. Turchette, C. S. Wood, B. E. King, C. J. Myatt, D. Leibfried, W. M. Itano, C. Monroe, e D. J. Wineland. Deterministic Entanglement of Two Trapped Ions. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 3631, 1998.
- [34] J. M. Raimond, M. Brune, e S. Haroche. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. *Rev. Mod. Phys.*, **73**, 565, 2001.
- [35] E. Hagley, X. Maître, G. Nogues, C. Wunderlich, M. Brune, J. M. Raimond., e S. Haroche. Generation of Einstein-Podolsky-Rosen Pairs of Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, **79**, 1, 1997.
- [36] S. Osnaghi, P. Bertet., A. Auffeves, P. Maioli, M. Brune, J. M. Raimond, e S. Haroche. Coherent Control of an Atomic Collision in a Cavity. *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 037902, 2001.
- [37] A. Rauschenbeutel, G. Nogues, S. Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, Raimond J.-M, e S. Haroche. Step-by-Step Engineered Multiparticle Entanglement. *Science*, **288**, 2024, 2001.

- [38] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, e G. Grynberg. *Photons and Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics*. Wiley Professional Paperback Series, 1997.
- [39] M. O. Scully e M. S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997.
- [40] R. R. Puri. *Mathematical methods of quantum optics*. Springer, 2000.
- [41] A. W. Boone e S. Swain. Effective hamiltonians in two-photon laser theory. *Opt. Commun.*, **73**, 47, 1989.
- [42] M. A. Nielsen e I. L. Chuang. *Computação Quântica e Informação Quântica*. Bookman, 2005.
- [43] W.K. Wootters e W.H. Zurek. A Single Quantum Cannot be Cloned. *Nature*, **299**, 802, 1982.
- [44] S.-B. Zheng. Scheme for approximate conditional teleportation of an unknown atomic state without the Bell-state measurement. *Phys. Rev. A*, **69**, 034302, 2004.
- [45] R. W. Chhajlany e A. Wójcik. Comment on “Scheme for teleportation of an unknown atomic state without the Bell-state measurement”. *Phys. Rev. A*, **73**, 016302, 2006.
- [46] W. B. Cardoso, A. T. Avelar, B. Baseia, e N. G. de Almeida. Teleportation of entangled states without Bell-state measurement. *Phys. Rev. A*, **72**, 045802, 2005.
- [47] Jin-Ming Liu e Bo Weng. Approximate teleportation of an unknown atomic state in the two-photon Jaynes-Cummings model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **367**, 215, 2006.
- [48] A. D. dSouza, W. B. Cardoso, A. T. Avelar, e B. Baseia. A note on approximate teleportation of an unknown atomic state in the two-photon Jaynes-Cummings model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **388**, 1331, 2009.
- [49] A. D. dSouza, W. B. Cardoso, A. T. Avelar, e B. Baseia. Comment on “Approximate and Conditional Teleportation of an Unknown Atomic State Without Bell-State Measurement with Two-Photon Interaction”. *Commun. Theor. Phys.*, **52**, 41, 2009.
- [50] P. J. Blythe e B. T. H. Varcoe. A cavity-QED scheme for cluster-state quantum computing using crossed atomic beams. *New Journal of Physics*, **8**, 231, 2006.

- [51] R. M. Serra, P. B. Ramos, N. G. de Almeida, W. D. José, e M. H. Y. Moussa. Engineering arbitrary motional ionic states through realistic intensity-fluctuating laser pulses. *Phys. Rev. A*, **63**, 053813, 2001.
- [52] W. P. Schleich. *Quantum Optics in Phase Space*. Wiley-VCH, 2001.
- [53] S. J. Freedman e J. F. Clauser. Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories. *Phys. Rev. Lett.*, **28**, 938, 1972.
- [54] J. G. Rarity e P. R. Tapster. Experimental violation of Bell's inequality based on phase and momentum. *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 2495, 1990.
- [55] M. Zukowski, A. Zeilinger, M. A. Horne, e A. K. Ekert. "Event-ready-detectors" Bell experiment via entanglement swapping. *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 4287, 1993.
- [56] Y.-C. Wang e J.-M. Liu. Entanglement swapping and concentration in the two-photon Jaynes-Cummings model. *International Journal of Modern Physics B*, **21**, 2805, 2007.
- [57] J. D. Jackson. *Eletrodinâmica Clássica*. Guanabara Dois, 1983.
- [58] R. Eijnisman e P. Nussenzveig. Átomos de Rydberg: Estudos Quânticos com Átomos "Quase-Clássicos". *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **19**, 90, 1997.
- [59] J. I. Kim, K. M. F. Romero, A. M. Horiguti, L. Davidovich, M. C. Nemes, e A. F. R. de Toledo Piza. Classical Behavior with Small Quantum Numbers: The Physics of Ramsey Interferometry of Rydberg Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 4737, 1999.