



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EDUARDO DIAS LIMA

Existência e multiplicidade de
soluções para uma classe de
problemas elípticos não locais
envolvendo equações do tipo
Kirchhoff em domínios ilimitados

Goiânia
2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Eduardo Dias Lima

3. Título do trabalho

Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas elípticos não locais envolvendo equações do tipo Kirchhoff em domínios ilimitados

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Edcarlos Domingos Da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 10/05/2024, às 13:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Eduardo Dias Lima, Discente**, em 13/05/2024, às 13:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4555495** e o código CRC **409E4202**.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Eduardo Dias Lima

3. Título do trabalho

Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas elípticos não locais envolvendo equações do tipo Kirchhoff em domínios ilimitados

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(a) autor(a) e ao(a) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Eduardo Dias Lima, Discente**, em 23/10/2024, às 14:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Edcarlos Domingos Da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 23/10/2024, às 19:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4921938** e o código CRC **7E7C26A5**.



EDUARDO DIAS LIMA

Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas elípticos não locais envolvendo equações do tipo Kirchhoff em domínios ilimitados

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva.

Goiânia
2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Lima, Eduardo Dias

Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de
problemas elípticos não locais envolvendo equações do tipo Kirchhoff em
domínios ilimitados [manuscrito] / Eduardo Dias Lima. - 2024.
185 f.

Orientador: Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de
Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em
Matemática, Goiânia, 2024.

Bibliografia. Apêndice.

Inclui símbolos, gráfico, tabelas, lista de figuras.

1. Problemas do tipo Kirchhoff. 2. Métodos topológicos. 3.
Técnicas de minimização. 4. Métodos variacionais. 5. Método do
quociente de Rayleigh não linear. I. Silva, Edcarlos Domingos da,
orient. II. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE TESE

Ata Nº **02** da sessão de Defesa de Tese de **Eduardo Dias Lima** que confere o título de Doutor em **Matemática**, na área de concentração em **Análise**.

Ao/s [30/04/2024] **trigésimo dia do mês de abril do ano de dois mil e vinte e quatro**, a partir das **14h00**, de forma Híbrida, realizou-se a sessão pública de Defesa de Tese intitulada “**Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas elípticos não locais envolvendo equações do tipo Kirchhoff em domínios ilimitados.**” Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor **Edcarlos Domingos da Silva - IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Marcos Leandro Mendes Carvalho - IME/UFG**, membro titular interno; Professor Doutor **Abiel Costa Macedo - IME/UFG**, membro titular interno; Professor Doutor **Giovany de Jesus Malcher Figueiredo - MAT/UnB**, membro titular externo **cuja participação ocorreu através de videoconferência**; Professor Doutor **Marcelo Fernandes Furtado - MAT/UnB**, membro titular externo **cuja participação ocorreu de forma presencial**. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do **trabalho**. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Tese tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Edcarlos Domingos da Silva - IME/UFG**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao [30/04/2024] **trigésimo dia do mês de abril do ano de dois mil e vinte e quatro**.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

“Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas elípticos não locais envolvendo equações do tipo Kirchhoff em domínios ilimitados.”



Documento assinado eletronicamente por **Edcarlos Domingos Da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 02/05/2024, às 12:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Abiel Costa Macedo, Professor do Magistério Superior**, em 02/05/2024, às 13:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcos Leandro Mendes Carvalho, Professor do Magistério Superior**, em 02/05/2024, às 13:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, Usuário Externo**, em 02/05/2024, às 15:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Fernandes Furtado, Usuário Externo**, em 02/05/2024, às 20:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4443972** e o código CRC **3546868E**.

Referência: Processo nº 23070.013848/2024-56

SEI nº 4443972

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Eduardo Dias Lima

Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Tocantins (UFT) e Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG), cuja área de concentração é Análise. Durante o doutorado foi bolsista da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás e desenvolveu trabalhos na área de Análise com dedicação total nos estudos de Equações Diferenciais Parciais Elípticas.

À minha avó,
Luzia da Silva Lima;
À minha mãe,
Denise Dias Lima;
À minha amada esposa,
Débora Vanessa Santos Dias Costa.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus por mais este sonho concretizado, por me conceder o privilégio da saúde, da paz, da família e da dedicação aos estudos.

Este trabalho é fruto da colaboração e incentivo de muitas pessoas, entre elas, minha amada avó, Luzia da Silva Lima, minha maior fonte de motivação. Mesmo diante das adversidades, sem estudo e condições financeiras, a senhora não poupou esforços para que eu pudesse estudar e alcançar o sucesso na vida. Desejo expressar minha profunda gratidão à senhora, pelo amor, apoio e sabedoria. Sua bondade e generosidade moldaram quem sou hoje; sua presença em minha vida é uma bênção inestimável, e cada momento ao seu lado é precioso. Agradeço, por ser a luz constante em minha jornada. Essa conquista é nossa!

Agradeço à minha amada mãe, Denise Dias Lima, por suas orações e apoio educacional, sempre acompanhados por uma generosa dose de carinho. Agradeço imensamente pelo incentivo e encorajamento constantes, os quais foram fundamentais para a conclusão do meu doutorado.

Agradeço à minha amada esposa, Débora Vanessa Santos Dias Costa, pelo seu amor, pelas palavras de encorajamento e pela confiança frequentemente mais robusta do que a minha, na realização deste trabalho. Esses gestos são presentes verdadeiramente inestimáveis. Agradeço por seu apoio incansável, sem jamais hesitar em me ajudar e orientar nas minhas decisões. A força que emana de você é a bússola que orienta meu esforço diário. Obrigado, minha Debrinha!

Ao meu irmão, William Lima Cavalcante, pela força e apoio.

Com lágrimas nos olhos, mas repleto de orgulho, expresso minha gratidão a uma das pessoas mais incríveis e admiráveis que já conheci, minha tia Niver Gonçalves da Costa. Seu apoio incansável e incentivo constante sempre foram fontes de inspiração. Recordo-me vividamente de cada conversa, de cada ligação longa e calorosa que tivemos, sempre marcadas por boas risadas. Infelizmente, o destino impediu que você testemunhasse a concretização deste sonho. No entanto, sua influência positiva continuará a moldar e iluminar minha vida. Você estará para sempre em meu coração. Obrigado por tudo que você fez por mim, minha querida tia.

Quero dedicar um agradecimento especial à minha querida sobrinha, Eloá Pereira Lima. Sua chegada ao mundo durante o desenvolvimento da tese trouxe consigo uma imensurável dose de amor e alegria para a vida do tio. Obrigado, minha princesa, por tornar esse processo mais leve e divertido.

Quero expressar minha mais profunda gratidão à minha sogra, Maria Neuza, e ao meu sogro, Raimundo Urano. Tenho um imenso carinho e admiração por vocês, pois são pessoas incríveis. Em especial à minha sogra, que se destaca por sua amizade, gentileza, presteza, respeitabilidade e generosidade. Agradeço por terem acreditado na realização deste sonho!

Ao longo da minha jornada acadêmica, pude contar com o apoio indispensável de diversas pessoas. Entre esses pilares, destaco meu estimado amigo e professor, Dr. José Carlos de Oliveira Júnior. Seus incentivos e sugestões soaram como valiosos norteadores durante toda essa trajetória. Tenho imensa admiração por sua dedicação e generosidade pessoal. Você é verdadeiramente um ser humano incrível, e pretendo carregar essa amizade preciosa por toda a vida. Em inúmeras ocasiões, suas intervenções foram cruciais. Agradeço de coração, Dr. José Carlos!

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva, pelas orientações essenciais que me concedeu ao longo dos últimos anos. Sua paciência ao responder às minhas inúmeras dúvidas, o comprometimento e o profundo conhecimento na área foram elementos fundamentais para o desenvolvimento desta tese. Obrigado, meu caro!

Agradeço aos ilustres professores que compuseram a banca, Marcos Leandro Mendes Carvalho, Abiel Costa Macedo, Giovany de Jesus Malcher Figueiredo e Marcelo Fernandes Furtado, por terem aceitado o convite e por suas valiosas sugestões.

Gostaria também de externar minha gratidão ao meu irmão do doutorado, Jerffeson Luís, por todas as conversas enriquecedoras, os conselhos valiosos, os momentos descontraídos do cafezinho, as risadas partilhadas e as ocasionais saídas animadas. Você foi a primeira amizade que construí durante o mestrado/doutorado, e ao longo desse tempo, edificamos uma relação sólida, repleta de carinho e cumplicidade.

Agradeço aos alunos, professores e funcionários do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás (IME - UFG). Em especial, agradeço ao Prof. Dr. Kaye Oliveira da Silva e ao Prof. Dr. Marcos Leandro Mendes Carvalho por suas contribuições.

Agradeço a todos os professores e ex-professores do Colégio Estadual Campos Brasil (CCB). Com um reconhecimento especial para, Silvani Bezerra, Geovania Ribeiro, Cláudio Alexandre, Carmen Lúcia, Adriana Lopes, Gilberto da Silva, Núbia

e Claudiomar. Esses educadores não são apenas mestres em suas disciplinas, mas verdadeiros mentores da vida, que generosamente compartilham conhecimentos, experiências e orientações, indo além dos limites da sala de aula.

De forma singular, desejo expressar minha gratidão à querida professora Sabina Veleda, por todo o seu empenho, dedicação e paciência ao longo de minha trajetória no ensino fundamental e médio. Sua apaixonada entrega ao ensino, especialmente na disciplina de Matemática, elevou suas aulas a patamares que transcendem o simples aprendizado; tornaram-se verdadeiras fontes de inspiração. Hoje, reconheço com humildade que atingi a notável conquista do doutorado em Matemática. Esta realização significativa é, inegavelmente, um reflexo direto da sua impactante influência em minha formação acadêmica. Sua abordagem pedagógica não apenas moldou minha compreensão da disciplina, mas também contribuiu significativamente para o meu desenvolvimento como ser humano. Obrigado, professora!

Agradeço também à minha querida amiga e professora, Maria Zilma Gabino. Uma mulher extraordinária, gentil, incrivelmente inteligente, generosa e inspiradora, uma fonte constante de luz, de carinho, e de força. Sua determinação, sua resiliência, sua representatividade e sua sabedoria ancestral sempre me fizeram acreditar no poder transformador da educação. Agradeço pelas suas palavras de encorajamento e carinho.

Gostaria de expressar minha sincera gratidão à minha querida amiga e professora do ensino médio, Charlene Rose Reis, pelo amor, carinho, paciência e dedicação. Naquela época, devido à falta de maturidade, estava determinado a questionar e testar seus conhecimentos. Jamais imaginaria que você se tornaria uma das minhas maiores fontes de inspiração. Agradeço, por todas as aulas, palavras de incentivo e por acreditar no meu potencial.

Agradeço imensamente aos amigos, Mateus, Filipe, Marcos Vinicius, Daniel, Melquisedeque, Soniamar, Cilene, Keliange, Sara Santos, Jakelinne, Marcos Antônio, Deusenita, Deuziran, James Dean, Amanda Rocha, Patrícia, Werik Warlan, Angelina, Daniela, Thyago, Socorro Ferreira, Renata Alves, Matheus Lobo, Vânia, Álvaro, Sinval, Lívia, Fernanda, Lucas, Gabriel, Ana Paula, Luana, Nara e Marlos. Vocês são pessoas incríveis e admiráveis. Agradeço de coração pela amizade genuína e por tornarem essa jornada menos cansativa!

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG) pelo apoio financeiro concedido durante a elaboração deste trabalho.

*“Acreditar é ter fé
naquilo que ninguém prova.
É dispensar a certeza
que geralmente comprova.
Pois a dúvida é uma dívida
e a conta só se renova...
Acredite em você,
na força da sua fé,
nas vezes que você teve
que remar contra a maré.
Cada “não” que alguém lhe disse
deu forças pra que surgisse
um desejo de provar
que quando a gente tropeça
se levanta e recomeça
sem parar de caminhar.
Acredite, pense e faça,
use sua intuição,
transforme sonho em suor,
pensamento em ação.
Enfrente cada batalha
sabendo que a gente falha
e que isso é natural,
cair pra se levantar,
aprender pra ensinar
que o bem é maior que o mal...”*

Bráulio Bessa,
2019.

Resumo

Lima, Eduardo Dias. **Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas elípticos não locais envolvendo equações do tipo Kirchhoff em domínios ilimitados**. Goiânia, 2024. p185. Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho, investigamos a existência, inexistência (em alguns casos) e multiplicidade de soluções não triviais para três problemas elípticos não locais envolvendo as equações do tipo Kirchhoff em \mathbb{R}^N . O primeiro problema abordado diz respeito a uma classe de equações do tipo Kirchhoff com uma não linearidade côncavo-convexa. No segundo problema, exploramos a mesma classe de equações de Kirchhoff, introduzindo um parâmetro $-\theta$ na parte superlinear da não linearidade. Essa modificação resulta em uma nova não linearidade que não satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Além disso, o terceiro problema trata-se de uma equação de Kirchhoff com crescimento crítico. Nossa abordagem para esses problemas baseia-se no método do quociente de Rayleigh não linear, em conjunto com o método de minimização sobre a variedade de Nehari. Estes métodos nos permitiram restabelecer, sob condições específicas, resultados de compacidade e convergência forte, garantindo que cada problema estudado possua pelo menos duas soluções não triviais. É importante ressaltar que para encontrar tais soluções, foi necessário introduzir hipóteses mais abrangentes sobre os potenciais e pesos envolvidos.

Palavras-chave

Problemas do tipo Kirchhoff, Métodos topológicos, Técnicas de minimização, Métodos variacionais, Método do quociente de Rayleigh não linear.

Abstract

Lima, Eduardo Dias. **Existence and multiplicity of solutions for a class of nonlocal elliptic problems involving Kirchhoff-type equations in unbounded domains**. Goiânia, 2024. p185. PhD. Thesis from the Graduate Program in Mathematics at the Institute of Mathematics and Statistics of the Federal University of Goiás.

In this work, we investigate the existence, nonexistence (in some cases) and multiplicity of nontrivial solutions for three nonlocal elliptic problems involving Kirchhoff-type equations in \mathbb{R}^N . The first problem addressed concerns a class of Kirchhoff-type equations with a concave-convex nonlinearity. In the second problem, we explore the same class of Kirchhoff equations, introducing a parameter $-\theta$ in the superlinear part of the nonlinearity. This modification results in a new nonlinearity that does not satisfy the Ambrosetti-Rabinowitz condition. Furthermore, the third problem involves a Kirchhoff equation with critical growth. Our approach to these problems is based on the nonlinear Rayleigh quotient method, together with the minimization method on the Nehari manifold. These methods allowed us to reestablish, under specific conditions, results of compactness and strong convergence, ensuring that each problem studied has at least two nontrivial solutions. It is important to emphasize that to find such solutions, it was necessary to introduce more comprehensive assumptions about the potentials and weights involved.

Keywords

Kirchhoff-type problems, Topological methods, Minimization techniques, Variational methods, Nonlinear Rayleigh quotient method.

Sumário

| | |
|---|-----|
| Lista de Figuras | 16 |
| Lista de Símbolos e Notações | 17 |
| Introdução | 19 |
| 1 Soluções positivas para um problema elíptico do tipo Kirchhoff em \mathbb{R}^N | 37 |
| 1.1 Estrutura variacional do problema | 38 |
| 1.2 Resultados preliminares acerca dos métodos do quociente de Rayleigh e Nehari | 42 |
| 1.3 Resultados relativos à variedade de Nehari | 62 |
| 1.4 Regularidade das soluções do problema (\mathcal{P}_λ) | 71 |
| 1.5 A prova do teorema principal | 76 |
| 2 Existência, não existência e multiplicidade de soluções para um problema elíptico do tipo Kirchhoff em \mathbb{R}^N | 78 |
| 2.1 Estrutura variacional do problema | 79 |
| 2.2 Resultados preliminares acerca dos métodos do quociente de Rayleigh e Nehari | 85 |
| 2.3 Resultados relativos à variedade de Nehari | 98 |
| 2.4 A prova dos teoremas principais | 120 |
| 3 Soluções positivas para um problema elíptico do tipo Kirchhoff com crescimento crítico em \mathbb{R}^N | 126 |
| 3.1 Estrutura variacional do problema | 127 |
| 3.2 Resultados preliminares acerca dos métodos do quociente de Rayleigh e Nehari | 130 |
| 3.3 Resultados relativos à variedade de Nehari | 140 |
| 3.4 Regularidade das soluções do problema (\mathcal{P}_c) | 151 |
| 3.5 A prova dos teoremas principais | 156 |
| A Exemplos relacionados ao potencial V | 159 |
| B Regularidade do funcional energia J | 165 |
| C Resultados auxiliares empregados nos Capítulos 1, 2 e 3 | 170 |
| D Identidade de Pohozaev | 175 |
| Referências Bibliográficas | 179 |
| Índice Remissivo | 185 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|---|-----|
| 1.1 | Comportamento geométrico de $\Lambda_n(tu)$ e $\Lambda_e(tu)$. | 45 |
| 1.2 | Relação geométrica entre os funcionais $R_n(tu)$, $R_e(tu)$ e $J(tu)$. | 56 |
| 1.3 | $S_n(w_k) > \lambda$, para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. | 59 |
| 1.4 | Relação geométrica entre $J(tu)$ e $J(tu_k)$. | 68 |
| 2.1 | Comportamento geométrico da função $\mathcal{B}(x, t)$. | 84 |
| 2.2 | Existência e unicidade de $t_n(u) > 0$. | 89 |
| 2.3 | Possível gráfico da função $F(x)$. | 93 |
| 2.4 | Relação geométrica entre os funcionais $R_n(tu)$, $R_e(tu)$ e $J(tu)$. | 96 |
| 2.5 | $B(u, R) \cap \mathcal{N} \not\subseteq \mathcal{N}^0$, para nenhum $R > 0$. | 103 |
| 2.6 | Geometria da função $S_\beta(q)$, para todo $q \in (2, p)$. | 108 |
| 2.7 | Comportamento geométrico dos itens (a), (b) e (c) do Corolário 2.45. | 122 |
| 3.1 | Existência e unicidade de $t_n(u) > 0$. | 131 |
| 3.2 | $R_n(tu) < R_n(tu_k)$, para cada $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande e $t > 0$. | 138 |
| 3.3 | Comportamento geométrico do funcional $J(tu)$. | 145 |
| A.1 | Diagrama das Classes de Potenciais. | 159 |
| C.1 | $R_{n,\theta}(tz) < R_{n,\theta_e}(tz)$. | 174 |
| C.2 | O caso $\lambda_e < \lambda$. | 174 |
| C.3 | Geometria da função a . | 174 |

Lista de Símbolos e Notações

Notações Gerais:

| | |
|--|--|
| C, C_0, C_1, C_2, \dots | Constantes positivas. |
| δ_λ e s_λ | Constantes positivas que dependem de λ . |
| \mathbb{R}^N | $(x_1, x_2, \dots, x_N), \forall i \in \mathbb{N}$ com $1 \leq i \leq N$. |
| $B_R(0)$ ou $B(0, R)$ | Bola aberta centrada na origem e raio $R > 0$. |
| $B_R^c(0)$ ou $\mathbb{R}^N \setminus B(0, R)$ | Complementar da bola aberta centrada na origem e raio $R > 0$. |
| $\partial B_R(0)$ ou $\partial B(0, R)$ | Fronteira da bola aberta $B_R(0)$ ou $B(0, R)$. |
| $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ | Laplaciano da função u . |
| $ A $ | Medida de Lebesgue do conjunto A . |
| $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ | Gradiente da função u . |
| \rightarrow | Convergência forte. |
| \rightharpoonup | Convergência fraca. |
| \hookrightarrow | Imersão contínua ou compacta de Sobolev. |
| $q.t.p.$ | Quase todo ponto. |
| J | Funcional energia. |
| ϕ_u, ω_u e γ_u | <i>Fibering maps</i> do funcional energia J . |
| $m(t)$ | Função de Kirchhoff em $t \in \mathbb{R}^+$. |
| $2^* := \frac{2N}{N-2}$ | Expoente crítico de Sobolev para $N \geq 3$. |
| $o_k(1)$ | Sequência que converge para zero, quando k converge para o infinito. |
| \mathcal{X} | Função Característica. |
| $S_{qr'_1}, S_{pr'_2}, S_q, S_p$ e S_{2^*} | Constantes da imersão contínua de Sobolev. |

Espaços e Normas:

| | |
|----------------------------|---|
| $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ | Espaço das funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto em \mathbb{R}^N . |
|----------------------------|---|

| | |
|---|---|
| $\mathcal{F}^{-1}(\{0\})$ | Imagem inversa de $\{0\}$ pela função \mathcal{F} . |
| \mathcal{N} | Conjunto de Nehari. |
| $\overline{\mathcal{N}}$ | Fecho do conjunto de Nehari \mathcal{N} . |
| \mathcal{E} | Conjunto no qual o funcional J é zero. |
| $L^r(\mathbb{R}^N)$ | Classe de funções mensuráveis $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\int_{\mathbb{R}^N} u ^r dx < +\infty$ com $1 \leq r < +\infty$. |
| $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ | Classe de funções mensuráveis $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ tais que existe uma constante positiva C com $ u(x) \leq C$ q.t.p. em \mathbb{R}^N . |
| $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ | Classe de funções mensuráveis $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $u \in L^\infty(\Omega)$, para cada $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$. |
| $W^{m,r}(\mathbb{R}^N)$ | Classe de funções mensuráveis $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $u \in L^r(\mathbb{R}^N)$ e $[u]_{m,r} < +\infty$. |
| $W^{2,\eta}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ | Classe de funções mensuráveis $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $u \in W^{2,\eta}(\Omega)$, para cada $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$ e para todo $\eta > 1$. |
| $H^1(\mathbb{R}^N)$ | Espaço de Sobolev $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. |
| X | Espaço de todas as funções $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que $\int_{\mathbb{R}^N} V(x) u ^2 dx < +\infty$. |
| $C^1(X; \mathbb{R})$ | Espaço das funções $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ que possuem derivadas contínuas em X . |
| $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ | Classe de funções mensuráveis $u \in C(\Omega)$ tais que $\sup_{x,y \in \Omega} \frac{ u(x)-u(y) }{ x-y ^\beta} < +\infty$ com $\beta \in (0, 1)$. |
| $\langle u, \varphi \rangle$ | Denota o produto interno usual do espaço X . |
| $\langle u, \varphi \rangle_2$ | Denota o produto interno do espaço $L^2(\mathbb{R}^N)$. |
| $\ \cdot \ $ | Norma no espaço X . |
| $\ \cdot \ _r$ | Norma no espaço $L^r(\mathbb{R}^N)$. |
| $\ \cdot \ _\infty$ | Norma no espaço $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. |
| R_n | Quociente de Rayleigh não linear associado ao conjunto \mathcal{N} . |
| R_e | Quociente de Rayleigh não linear associado ao conjunto \mathcal{E} . |
| Q_n | Função Fibra de R_n . |
| Q_e | Função Fibra de R_e . |
| S_n | $\sup_{t>0} R_n(tu)$ ou $\inf_{t>0} R_n(tu)$. |
| λ^* | Valor extremal definido por $\inf_{u \in X \setminus \{0\}} S_n(u)$. |
| S_e | $\sup_{t>0} R_e(tu)$ ou $\inf_{t>0} R_e(tu)$. |
| λ_* | Valor extremal definido por $\inf_{u \in X \setminus \{0\}} S_e(u)$. |

Introdução

Neste trabalho, investigamos a existência, não existência e multiplicidade de soluções para uma determinada classe de problemas elípticos não locais do tipo Kirchhoff em domínios ilimitados. É importante destacar que, ao lidarmos com essa categoria de problemas, nos deparamos com diversas dificuldades, incluindo a natureza do operador, o comportamento da não linearidade, a falta de compacidade das imersões de Sobolev, entre outras. Inicialmente, no primeiro capítulo, dedicamo-nos à análise minuciosa do seguinte problema:

$$\begin{cases} -m(\|\nabla u\|_2^2) \Delta u + V(x)u = \lambda a(x)|u|^{q-2}u + b(x)|u|^{p-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (\mathcal{P}_\lambda)$$

onde $N \geq 3$, $\lambda > 0$, $1 < q < 2 < 2(\sigma + 1) < p < 2^* := \frac{2N}{N-2}$ e o potencial $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é contínuo e limitado inferiormente por uma constante positiva. As funções peso $a \in L^{r_1}(\mathbb{R}^N)$ e $b \in L^{r_2}(\mathbb{R}^N)$ com $r_1, r_2 > 1$ expoentes adequados.

Observe que o problema (\mathcal{P}_λ) contém a presença da função bem conhecida $m : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, chamada de função de Kirchhoff, definida por $m(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t^\sigma$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Devido à forma como $m(\|\nabla u\|_2^2)$ está formulada no problema (\mathcal{P}_λ) , podemos classificá-lo como um problema não local. Isso significa que esse problema não pode ser tratado como uma identidade pontual em \mathbb{R}^N .

Soluções de problemas elípticos com operadores não locais têm sido objeto de considerável atenção em diversas áreas da pesquisa matemática. Por exemplo, o trabalho de referência [63] destaca essa tendência. Historicamente, vale notar que esses problemas foram inicialmente motivados pela versão estacionária da equação de Kirchhoff. A sua estrutura é estabelecida por

$$\begin{cases} u_{tt} - m\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u = \mathcal{B}(x, u) \text{ em } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \end{cases} \quad (0-1)$$

onde $m(t) = a + bt$ com $a, b > 0$. É sabido que a equação (0-1) representa a versão

mais geral do modelo proposto por Kirchhoff em 1883. Sua estrutura é dada por

$$\rho h u_{tt} - \left\{ \alpha_0 + \frac{Eh}{2L} \int_0^L |u_x|^2 dx \right\} u_{xx} + \varepsilon u_x + \mathcal{B}(x, u) = 0. \quad (0-2)$$

Ao considerar o efeito da mudança no comprimento de uma corda durante uma vibração, a equação (0-2) estende a clássica *equação da onda* de D'Alembert. Para uma compreensão mais detalhada de (0-1) e (0-2), recomendamos ao leitor consultar o célebre trabalho [44].

Em termos físicos, a equação (0-2) pode ser interpretada da seguinte maneira: $u_x = u(t, x)$ representa o deslocamento lateral no tempo t e na coordenada espacial x , ρ é a densidade de massa, α_0 é a tensão inicial, h é a área da seção transversal, E é o módulo de Young do material, L é o comprimento da corda, ε é o módulo de resistência, e $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x, u)$ denota a força externa aplicada. Aqui é importante salientar que problemas elípticos não locais também são encontrados em outras áreas do conhecimento, como em sistemas biológicos. Nessas situações, u descreve um processo intrinsecamente ligado à sua própria média, como a densidade populacional. Para uma compreensão mais detalhada dessas aplicações, sugerimos consultar os trabalhos [4, 26, 48, 49, 76] e suas respectivas referências.

Antes de nos aprofundarmos nas condições variacionais impostas para o problema (\mathcal{P}_λ) , vamos apresentar de forma sucinta as principais motivações que orientaram este trabalho.

As equações elípticas semilineares com uma não linearidade do tipo côncavo-convexa em domínios limitados têm sido objeto de amplo estudo nos últimos anos. Em 1993, Ambrosetti, Brezis e Cerami [8] trataram o problema elíptico semilinear:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^{q-1} + u^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (0-3)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com bordo regular, $N \geq 1$, $\lambda > 0$ é um parâmetro e $1 < q < 2 < p < 2^*$. Esse trabalho garante, sob condições apropriadas, a existência de um valor $\lambda_0 > 0$ de tal modo que o problema (0-3) tenha pelo menos duas soluções positivas para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$, uma solução positiva para $\lambda = \lambda_0$, e nenhuma solução positiva para $\lambda > \lambda_0$. Para encontrar a primeira solução, aplicaram o método da sub e super solução, enquanto para a segunda solução utilizaram o Teorema do Passo da Montanha.

Posteriormente, Adimurthy, Pacella e Yadava [2] e Tang [75] demonstraram que existem exatamente duas soluções positivas para o problema (0-3) na bola unitária

$B^N(0, 1)$ para $\lambda \in (0, \lambda_0)$, uma solução positiva para $\lambda = \lambda_0$, e nenhuma solução positiva para $\lambda > \lambda_0$.

Além disso, os trabalhos de Ambrosetti, Azorero e Peral [7], Brown e Wu [14, 15], e Wu [78, 79] exploraram casos com não linearidades mais gerais associadas ao problema (0-3). Em particular, estabeleceram a existência de pelo menos duas soluções positivas com a não linearidade dada por $\lambda f(x)|u|^{q-2}u + g(x)|u|^{p-2}u$. Outros casos com esse tipo de não linearidade também podem ser encontrados nos trabalhos de Azorero, Peral e Manfredi [10] e Il'yasov [43].

Em 2011, Chen, Kuo e Wu [23] estudaram o seguinte problema elíptico do tipo Kirchhoff:

$$\begin{cases} - \left(a + b \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u = \lambda f(x)|u|^{q-2}u + g(x)|u|^{p-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0-4)$$

onde Ω é um domínio limitado em \mathbb{R}^N ($N = 1, 2, 3$) com $1 < q < 2 < p < 2^*$, $a, b, \lambda > 0$ e $f, g \in C(\overline{\Omega})$ são funções peso que mudam de sinal. Para resolver o problema (0-4), os autores adotaram a variedade de Nehari e o método de fibração. Essa abordagem possibilitou a demonstração da existência de múltiplas soluções positivas em três casos distintos: $p > 4$, $p = 4$, e $p < 4$, desde que os parâmetros b e λ estejam dentro de intervalos específicos.

Anos depois, outros matemáticos avançaram nessa direção. Destaca-se o trabalho de Silva e Macedo [67], que estudaram um problema envolvendo o operador p -Laplaciano e uma não linearidade côncavo-convexa com um peso que pode mudar de sinal. Mais especificamente, os autores consideraram o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda|u|^{q-2}u + f(x)|u|^{\gamma-2}u & \text{em } \Omega, \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases} \quad (0-5)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira C^1 , $\lambda > 0$, $1 < q < p < \gamma < p^*$, $N \geq 3$ e $f \in L^\infty(\Omega)$. A principal contribuição desses autores foi demonstrar que, sob condições apropriadas, o problema (0-5) possui duas soluções positivas em algum intervalo $(0, \lambda^* + \varepsilon)$, onde $\lambda^* > 0$ é caracterizado de forma variacional. As técnicas aplicadas envolvem o método de minimização sobre a variedade de Nehari [55, 56], o método de fibração [61] e o método do quociente de Rayleigh não linear.

Salientamos que os problemas (0-3), (0-4) e (0-5) estão formulados em domínios limitados. Em contraste com esses trabalhos, o problema (\mathcal{P}_λ) foi proposto em domínios ilimitados. Reconhecendo as dificuldades intrínsecas desse tipo de ambiente, foi necessário introduzir o potencial $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Essa necessidade surgiu

devido à falta de compacidade das imersões de Sobolev. Para superá-las, estabelecemos condições adequadas sobre o potencial V em todos os capítulos. No entanto, visando tornar o trabalho mais instigante e desafiador, atribuímos responsabilidades às funções peso a e b em relação à compacidade. Isso pode ser observado, por exemplo, nos Capítulos 1 e 3.

Baseado no contexto anterior, Carvalho, Silva e Goulart [18] abordaram o seguinte problema elíptico envolvendo a famosa equação de Choquard:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = (I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u + \lambda|u|^{q-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (0-6)$$

onde $\lambda > 0$, $\alpha \in (0, N)$, $N \geq 3$, $1 < q < 2$, $\frac{N+\alpha}{N} = 2_\alpha < p < 2_\alpha^* = \frac{N+\alpha}{N-2}$, o potencial $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é contínuo e limitado inferiormente por alguma constante positiva, e I_α é o potencial de Riesz. Assumindo condições específicas sobre o parâmetro $\lambda > 0$, os autores provaram que o problema (0-6) possui pelo menos duas soluções positivas para cada $\lambda \in (0, \lambda^*]$, onde $\lambda^* > 0$ é um valor extremal caracterizado de forma variacional. Para obter esses resultados, os autores realizaram uma análise minuciosa do quociente de Rayleigh não linear, em conjunto com o método de minimização sobre a variedade de Nehari [55, 56] e o método de fibração [61].

Além dos trabalhos mencionados anteriormente, também incluímos outros trabalhos renomados [4–6, 12, 21, 31, 32, 34, 40, 45, 49, 52, 60, 63, 64, 66, 74] que investigam diversas classes de funções do tipo Kirchhoff. Salientamos que essas referências representam apenas uma pequena parcela dos estudos disponíveis na literatura.

No Capítulo 1, usamos as seguintes hipóteses para resolver o problema (\mathcal{P}_λ) :

- (m_1) A função $m : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfaz $m(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t^\sigma$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ com $0 < \sigma < \frac{2}{N-2}$;
- (a_1) $1 < q < 2 < 2(\sigma + 1) < p < 2^*$;
- (a_2) As funções $a, b : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem $a \in L^{r_1}(\mathbb{R}^N)$ e $b \in L^{r_2}(\mathbb{R}^N)$, onde

$$\left(\frac{2^*}{q}\right)' < r_1 \leq \left(\frac{2}{q}\right)' \quad \text{e} \quad \left(\frac{2^*}{p}\right)' < r_2 \leq \left(\frac{2}{p}\right)',$$

com $a(x), b(x) > 0$ q.t.p. em \mathbb{R}^N ;

- (V_1) O potencial V pertence a $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^N)$, e existe uma constante $V_0 > 0$ de tal forma que $V(x) \geq V_0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Aqui, consideramos $X \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ como nosso espaço de trabalho, definido por

$$X = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < +\infty \right\},$$

cuja norma usual é dada por

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} [\alpha_1 |\nabla u|^2 + V(x)u^2] dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in X.$$

Dado que $V \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos que o espaço X não é vazio. Além disso, é fácil ver que $(X, \|\cdot\|)$ constitui um espaço de Hilbert.

O problema (\mathcal{P}_λ) está relacionado ao funcional energia $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx.$$

Vale a pena observar que o funcional energia J é de classe $C^1(X; \mathbb{R})$, para todo $\lambda > 0$. Entretanto, o funcional J não é de classe $C^2(X; \mathbb{R})$ devido à restrição $q < 2$. Ademais, sabemos que uma função $u \in X$ é um ponto crítico do funcional energia J se, e somente se, u é uma solução fraca para o problema (\mathcal{P}_λ) .

Note que as hipóteses assumidas sobre o potencial V são suficientes para garantir as imersões contínuas de Sobolev. De fato, usando a desigualdade de Interpolação e a desigualdade Gagliardo-Nirenberg, obtemos que o espaço de trabalho X está continuamente imerso em $L^r(\mathbb{R}^N)$, para cada $r \in [2, 2^*]$. Para uma análise mais aprofundada, recomendamos [11, 39, 77].

Um cálculo simples assegura que o ínfimo do funcional J em $H^1(\mathbb{R}^N)$ não é atingido. Isso significa que a minimização global não resulta em pontos críticos. Dessa forma, é crucial restringir nosso estudo à *variedade de Nehari*, dada por

$$\mathcal{N} = \left\{ u \in X \setminus \{0\} : \lambda \|u\|_{q,a}^q = \|u\|^2 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \|u\|_{p,b}^p \right\},$$

onde

$$\|u\|_{q,a}^q = \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx \quad \text{e} \quad \|u\|_{p,b}^p = \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx, \quad u \in X.$$

Com base em algumas ideias discutidas em [55, 56], podemos subdividir a variedade de Nehari \mathcal{N} em três subconjuntos disjuntos, a saber, $\mathcal{N} = \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+ &= \{u \in \mathcal{N} : J'(u)u = 0 \text{ e } J''(u)(u, u) > 0\}, \\ \mathcal{N}^- &= \{u \in \mathcal{N} : J'(u)u = 0 \text{ e } J''(u)(u, u) < 0\}, \\ \mathcal{N}^0 &= \{u \in \mathcal{N} : J'(u)u = 0 \text{ e } J''(u)(u, u) = 0\}. \end{aligned}$$

Essa divisão é fundamental para obter a multiplicidade de soluções para o problema (\mathcal{P}_λ) . Além disso, construímos um conjunto não vazio que descreve o comportamento do funcional J quando este atinge energia zero, isto é,

$$\mathcal{E} = \left\{ u \in X \setminus \{0\} : \frac{\lambda}{q} \|u\|_{q,a}^q = \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)} \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{1}{p} \|u\|_{p,b}^p \right\}.$$

Agora, estamos prontos para estruturar o método do quociente de Rayleigh não linear, o qual será explicado adiante. Primeiramente, temos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{N} \text{ se, e somente se, } R_n(u) &= \lambda, \\ u \in \mathcal{E} \text{ se, e somente se, } R_e(u) &= \lambda, \end{aligned}$$

onde $R_n, R_e : X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ representam os quocientes de Rayleigh não lineares associados ao parâmetro $\lambda > 0$ dados por

$$R_n(u) = \frac{\|u\|^2 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \|u\|_{p,b}^p}{\|u\|_{q,a}^q}, \quad u \in X \setminus \{0\}$$

e

$$R_e(u) = \frac{\frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)} \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{1}{p}\|u\|_{p,b}^p}{\frac{1}{q}\|u\|_{q,a}^q}, \quad u \in X \setminus \{0\}.$$

A partir desses conceitos, sentimos a necessidade de estudar as fibras de R_n e R_e . Definimos então as funções fibras $Q_n, Q_e : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $Q_n(t) = R_n(tu)$ e $Q_e(t) = R_e(tu)$. Uma implicação direta dessas funções é que existe um único ponto crítico, identificado como o ponto crítico de máximo global.

É relevante enfatizar que os estudos [18, 20, 67, 70] demonstram a existência de um único ponto crítico para os quocientes de Rayleigh não lineares, o qual é determinado de forma explícita por uma identidade simples. Contudo, para o problema (\mathcal{P}_λ) , essa identidade não é aplicável devido à presença da função de Kirchhoff m . Esse fato é de extrema importância na busca pelos pontos críticos do funcional energia J . Para contornar essa dificuldade, recorreremos a algumas estimativas precisas, aliadas ao Teorema da Função Implícita [25, Teorema 2.4.1]. Essa abordagem representa uma das principais contribuições do Capítulo 1, que se estende aos Capítulos 2 e 3.

Considerando o conjunto \mathcal{N} , definimos os seguintes níveis de energia:

$$c_{\mathcal{N}^+} = \inf_{u \in \mathcal{N}^+} J(u) \quad \text{e} \quad c_{\mathcal{N}^-} = \inf_{u \in \mathcal{N}^-} J(u).$$

Nosso principal objetivo é mostrar que os níveis $c_{\mathcal{N}^+}$ e $c_{\mathcal{N}^-}$ são atingidos. A ideia central é analisar cuidadosamente as funções $S_n, S_e : X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$S_n(u) = \sup_{t>0} R_n(tu) = R_n(t_n(u)u) \quad \text{e} \quad S_e(u) = \sup_{t>0} R_e(tu) = R_e(t_e(u)u),$$

e os valores extremais

$$\lambda^* = \inf_{u \in X \setminus \{0\}} S_n(u) \quad \text{e} \quad \lambda_* = \inf_{u \in X \setminus \{0\}} S_e(u).$$

Para encontrar as soluções fracas do problema (\mathcal{P}_λ) , aplicamos exatamente as mesmas técnicas utilizadas nos problemas (0-5) e (0-6). Um destaque especial

é dado ao método do quociente de Rayleigh não linear, que tem sido objeto de extenso estudo e exploração nos últimos anos. Um marco importante nesse campo é o trabalho de Il'yasov [42] de 2017, no qual o autor desenvolveu uma teoria completa do quociente de Rayleigh, demonstrando a existência de soluções para equações elípticas não lineares dependentes de um parâmetro real λ .

Seguindo essa linha de pesquisa, Silva [66] utilizou o mesmo método em 2019 para assegurar a multiplicidade de soluções para um problema elíptico do tipo Kirchhoff, que é superlinear e subcrítico, e que também depende de um parâmetro real λ^* . Teoricamente, o valor desse parâmetro λ^* é conhecido como valor extremal. É importante ressaltar que esses valores extremais não são uma novidade e podem ser encontrados, por exemplo, no trabalho de Ouyang [59] de 1991. Outros notáveis trabalhos, nos quais os autores aplicaram esse método para resolver várias classes de equações, podem ser encontrados em [18–20, 67–69].

A contribuição principal do Capítulo 1 é estabelecer condições suficientes para garantir que o problema (\mathcal{P}_λ) tenha pelo menos duas soluções positivas não triviais sempre que $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Para isso, é fundamental assegurar a existência de um valor extremal $\lambda^* > 0$, de modo que o método de Nehari possa ser aplicado. Em resumo, a essência do nosso estudo reside na aplicação do método do quociente de Rayleigh não linear e do método de Nehari, com o objetivo de encontrar uma solução ground state u para a qual $J(u) < 0$ para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$, além de outra solução bound state v . Para esta segunda solução, exploramos outro quociente de Rayleigh para obter informações adicionais sobre o sinal do funcional energia J .

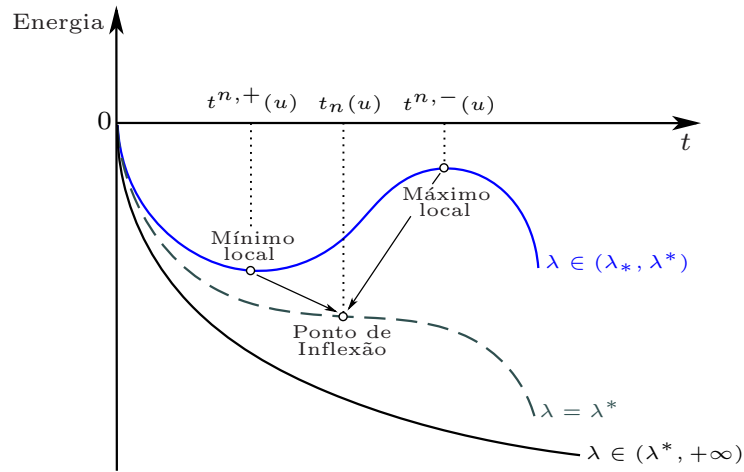
No Capítulo 1, foram desenvolvidas ferramentas para demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 0.1 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (V_1) e $V, a, b \in C^{0,\gamma}(\overline{B(0, R)})$, para algum $\gamma \in (0, 1)$ e para todo $R > 0$. Então para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$, o problema (\mathcal{P}_λ) admite pelo menos duas soluções positivas $u, v \in X$ de modo que $u \in \mathcal{N}^+$ e $v \in \mathcal{N}^-$. Além disso, u é uma solução ground state e v é uma solução bound state satisfazendo:*

- (a) Para cada $\lambda \in (0, \lambda_*)$, inferimos que $c_{\mathcal{N}^-} = J(v) > 0$;
- (b) Para $\lambda = \lambda_*$, segue-se que $c_{\mathcal{N}^-} = J(v) = 0$;
- (c) Para cada $\lambda \in (\lambda_*, \lambda^*)$, obtemos que $c_{\mathcal{N}^-} = J(v) < 0$.

Uma questão intrigante surge quando consideramos o caso $\lambda \in [\lambda^*, +\infty)$. Nessa situação, as coisas se tornam mais complexas, uma vez que \mathcal{N} não é uma variedade. Além disso, quando $\lambda = \lambda^*$, por exemplo, podemos deduzir que os pontos críticos $t_\lambda^{n,+}(u)$ e $t_\lambda^{n,-}(u)$ associados a fibering maps coincidem com $t_n(u)$, onde sabemos que existe um ponto de inflexão. Esse fato dificulta bastante a obtenção de soluções

fracas para o problema inicial. Portanto, torna-se necessário realizar uma análise mais detalhada desse caso. Para uma melhor compreensão, consulte a figura abaixo.



Uma observação importante é que todos os resultados apresentados acima podem ser encontrados no trabalho [33], publicado em 2023.

O Capítulo 2 é dedicado à análise da existência, não existência e multiplicidade de soluções não triviais para um problema elíptico não local do tipo Kirchhoff. Este problema envolve uma não linearidade cujo sinal é indefinido, tornando-o de grande interesse em diversas áreas da matemática. Mais precisamente, investigamos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -m(\|\nabla u\|_2^2) \Delta u + V(x)u = \lambda a(x)|u|^{q-2}u - \theta b(x)|u|^{p-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (\mathcal{P}_\theta)$$

onde λ e θ são parâmetros positivos, $N \geq 3$, $2 < 2(\sigma + 1) < q < p < 2^*$, o potencial $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ pode mudar de sinal e satisfaz as condições de Bartsch-Wang. As funções a e b são contínuas e satisfazem algumas hipóteses adicionais.

Além dos trabalhos descritos no Capítulo 1, utilizamos fortemente neste capítulo o trabalho de Silva, Carvalho, Goulart e Silva [70] como principal motivação para estabelecer soluções fracas não triviais para o problema (\mathcal{P}_θ) . É relevante notar que os autores exploraram o seguinte problema elíptico não local, que contém o operador Laplaciano fracionário e uma não linearidade com sinal indefinido:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + V(x)u = \mu a(x)|u|^{q-2}u - \lambda|u|^{p-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^s(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (0-7)$$

onde $\mu, \lambda > 0$, $s \in (0, 1)$ e $s < \frac{N}{2}$ com $N \geq 1$. Em resumo, assumindo condições

adequadas sobre V , a , μ e λ , e empregando o método de Nehari e o método do quociente de Rayleigh não linear, os autores mostraram que o problema (0-7) possui pelo menos duas soluções não triviais, dependendo do valor dos parâmetros μ e λ .

Observe que o problema (\mathcal{P}_θ) apresenta uma não linearidade

$$\mathcal{B}(x, t) := \lambda a(x)|t|^{q-2}t - \theta b(x)|t|^{p-2}t,$$

válida para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$. Essa função é caracterizada pela mudança de sinal, como ilustrado na Observação 2.6. Além disso, é importante enfatizar que a função $\mathcal{B}(x, t)$ não satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Lembre-se que esta condição estabelece a existência de constantes $M > 0$ e $\mu > 2$ tais que

$$0 < \mu \mathbf{b}(x, t) \leq t \mathcal{B}(x, t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$, onde $\mathbf{b}(x, t) = \int_0^t \mathcal{B}(x, s) ds$. Essas características tornam o problema (\mathcal{P}_θ) extremamente desafiador, pois é complicado obter a limitação das sequências minimizantes/Palais-Smale usando argumentos convencionais.

A principal contribuição do Capítulo 2 é fornecer uma descrição completa sobre o intervalo de valores dos parâmetros λ e θ , ambos positivos, que garantem a existência de pelo menos duas soluções não triviais para o problema (\mathcal{P}_θ) . Assim como nos problemas (\mathcal{P}_λ) e (0-7), empregamos os métodos de Nehari [55, 56], de fibração [61] e do quociente de Rayleigh não linear [42, 43].

Em outras palavras, impomos condições específicas sobre os parâmetros λ e θ para assegurar os resultados de existência e multiplicidade de soluções não triviais para o problema (\mathcal{P}_θ) . Uma vez que $\overline{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+} = \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+ \cup \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0$ e $\overline{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-} = \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^- \cup \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0$ (conforme a Proposição 2.24), os minimizadores encontrados podem pertencer a $\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0$. Isso implica que o conjunto de Nehari $\mathcal{N}_{\lambda, \theta}$ apresenta pontos degenerados, o que dificulta a aplicação direta do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange [25, Teorema 7.8.2]. Para superar essa dificuldade, utilizamos algumas estimativas refinadas e controlamos os níveis de energia das sequências minimizantes. Em particular, assumimos que as desigualdades $c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+} < c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0}$ e $c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-} < c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0}$ são satisfeitas, e demonstramos que qualquer minimizador na variedade de Nehari produz pontos não degenerados, ou seja, os minimizadores estão restritos a $\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+$ ou $\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-$. É importante destacar que algumas ideias foram adaptadas de [70, Proposições 2.23 e 2.21].

Por conseguinte, mostramos que o problema (\mathcal{P}_θ) não possui nenhuma solução fraca não trivial para $\lambda \in (-\infty, \lambda^*)$ e nenhuma solução positiva ou negativa para $\lambda = \lambda^*$, desde que

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{a(x)}{b(x)} \geq \mathcal{C} > 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{a(x)}{b(x)} = \mathcal{C} > 0.$$

Para obter esse resultado, usamos algumas ideias discutidas em [18, Proposição 16].

Agora, apresentamos as hipóteses utilizadas para resolver o problema (\mathcal{P}_θ) :

- (m_1) A função $m : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfaz $m(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t^\sigma$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ com $0 < \sigma < \frac{2}{N-2}$;
- (a_1) $2 < 2(\sigma + 1) < q < p < 2^*$;
- (a_2) As funções $a, b : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem $a \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, onde $a(x), b(x) > 0$ q.t.p. em \mathbb{R}^N ;
- (v_1) O potencial V pertence a $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, e existe uma constante $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq -V_0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$;
- (v_2) Considere

$$\delta := \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N), \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}=1} \int_{\mathbb{R}^N} [\alpha_1 |\nabla u|^2 + V(x)u^2] dx > 0;$$

- (v_3) Para cada $M > 0$, segue que $|\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\}| < +\infty$.

Note que o potencial V satisfaz propriedades diferentes das apresentadas no Capítulo 1, podendo mudar ou não de sinal. Esse fato traz consigo algumas dificuldades adicionais, sendo a principal delas a falta de uma norma definida para o espaço de trabalho. Nesse contexto, a hipótese (v_2), proposta por Sirakov [71], desempenha um papel crucial para resolver essa situação.

No decorrer do capítulo, percebemos que as hipóteses estabelecidas para as funções peso a e b não foram suficientes para sustentar nossos principais resultados. Portanto, fomos levados a introduzir novas hipóteses, que são as seguintes:

- (b_1) $\frac{a(x)^{\frac{p}{p-q}}}{b(x)^{\frac{q}{p-q}}} \in L^1(\mathbb{R}^N)$;
- (b_2) Existe uma constante positiva b_0 tal que $b(x) \geq b_0$.

A principal motivação para considerarmos as hipóteses (b_1) e (b_2) decorre do fato de não conseguirmos demonstrar que o funcional energia $J_{\lambda,\theta}$ é coercivo sobre a variedade de Nehari $\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+$. Essas novas hipóteses foram inspiradas em [47, 70].

No Capítulo 2, consideramos X como o subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$ definido por

$$X = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < +\infty \right\},$$

equipado com a norma usual dada por

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} [\alpha_1 |\nabla u|^2 + V(x)u^2] dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in X.$$

É fácil verificar que $(X, \|\cdot\|)$ constitui um espaço de Hilbert.

O problema (\mathcal{P}_θ) está relacionado ao funcional energia $J_{\lambda,\theta} : X \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J_{\lambda,\theta}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx + \frac{\theta}{p} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx.$$

Observe que o funcional energia $J_{\lambda,\theta}$ é de classe $C^2(X; \mathbb{R})$, para todo $\lambda, \theta > 0$. Ademais, dizemos que uma função $u \in X$ é um ponto crítico do funcional $J_{\lambda,\theta}$ se, e somente se, u é uma solução fraca para o problema (\mathcal{P}_λ) .

Salientamos que as hipóteses impostas sobre o potencial V são suficientes para garantir imersões contínuas e compactas de Sobolev. Essas propriedades são justificadas pelos trabalhos de Sirakov [71] e Bartsch-Wang [12].

Para atingir os objetivos propostos, restringimos nosso estudo à *variedade de Nehari*, definida como:

$$\mathcal{N}_{\lambda,\theta} = \left\{ u \in X \setminus \{0\} : \lambda \|u\|_{q,a}^q = \|u\|^2 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta \|u\|_{p,b}^p \right\},$$

onde

$$\|u\|_{q,a}^q = \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx \quad \text{e} \quad \|u\|_{p,b}^p = \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx, \quad u \in X.$$

Com base em alguns conceitos discutidos nos trabalhos [55,56], dividimos a *variedade de Nehari* em três subconjuntos disjuntos, de forma que $\mathcal{N}_{\lambda,\theta} = \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+ \cup \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^- \cup \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0$. Adicionalmente, construímos um conjunto não vazio que descreve o comportamento do funcional $J_{\lambda,\theta}$ quando este atinge energia zero, isto é,

$$\mathcal{E}_{\lambda,\theta} = \left\{ u \in X \setminus \{0\} : \frac{\lambda}{q} \|u\|_{q,a}^q = \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)} \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \frac{\theta}{p} \|u\|_{p,b}^p \right\}.$$

Uma consequência direta dos conjuntos $\mathcal{N}_{\lambda,\theta}$ e $\mathcal{E}_{\lambda,\theta}$ é a seguinte relação:

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta} \text{ se, e somente se, } R_n(u) &= \lambda, \\ u \in \mathcal{E}_{\lambda,\theta} \text{ se, e somente se, } R_e(u) &= \lambda, \end{aligned}$$

onde $R_n, R_e : X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ representam os quocientes de Rayleigh não lineares associados ao parâmetro $\lambda > 0$ dados por

$$R_n(u) = \frac{\|u\|^2 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta \|u\|_{p,b}^p}{\|u\|_{q,a}^q}, \quad u \in X \setminus \{0\}$$

e

$$R_e(u) = \frac{\frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)} \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \frac{\theta}{p} \|u\|_{p,b}^p}{\frac{1}{q} \|u\|_{q,a}^q}, \quad u \in X \setminus \{0\}.$$

Após a definição do conjunto $\mathcal{N}_{\lambda,\theta}$, podemos observar os seguintes níveis:

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} = \inf_{u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} J_{\lambda,\theta}(u), \quad c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} = \inf_{u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} J_{\lambda,\theta}(u) \quad \text{e} \quad c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0} = \inf_{u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0} J_{\lambda,\theta}(u).$$

Nosso objetivo principal é provar que os níveis $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+}$ e $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-}$ são atingidos. A abordagem central consiste em analisar as funções fibras $Q_n, Q_e : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $Q_n(t) = R_n(tu)$ e $Q_e(t) = R_e(tu)$. Além disso, examinamos as funções $S_n, S_e : X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$S_n(u) = \inf_{t>0} R_n(tu) = R_n(t_n(u)u) \quad \text{e} \quad S_e(u) = \inf_{t>0} R_e(tu) = R_e(t_e(u)u),$$

e os valores extremais

$$\lambda^* = \inf_{u \in X \setminus \{0\}} S_n(u) \quad \text{e} \quad \lambda_* = \inf_{u \in X \setminus \{0\}} S_e(u).$$

No Capítulo 2, foram desenvolvidas ferramentas para demonstrar os seguintes resultados:

Teorema 0.2 *Suponha $(m_1), (a_1), (a_2), (b_1), (b_2), (v_1)-(v_3)$ e $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} < c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}$. Então para cada $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$, existe $\theta_0 > 0$ pequeno tal que o problema (\mathcal{P}_θ) admite pelo menos uma solução ground state $v \in X$ satisfazendo $v \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+$ com $\theta \in (0, \theta_0)$.*

Corolário 0.3 *Suponha $(m_1), (a_1), (a_2), (b_1), (b_2)$ e $(v_1)-(v_3)$. Então os níveis de energia $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} < c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}$ desde que:*

- (a) $\lambda \in [\lambda_*, +\infty)$ e $\theta > 0$;
- (b) $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_*)$ e $\theta \in (0, \theta_0)$ com $\theta_0 > 0$ suficientemente pequeno;
- (c) $\lambda \in (\lambda_* - \varepsilon, \lambda_*)$ e $\theta > 0$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Teorema 0.4 *Suponha $(m_1), (a_1), (a_2), (b_1), (b_2), (v_1)-(v_3)$ e $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} < c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}$. Então para cada $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$, existe $\theta_2 > 0$ pequeno tal que o problema (\mathcal{P}_θ) admite pelo menos uma solução fraca $u \in X$ satisfazendo $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-$ com $\theta \in (0, \theta_2)$.*

Corolário 0.5 *Suponha $(m_1), (a_1), (a_2), (b_1), (b_2), (v_1)-(v_3)$ e $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$. Então os níveis de energia $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} < c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}$, sempre que $\theta \in (0, \theta_2)$.*

Corolário 0.6 *Suponha $(m_1), (a_1), (a_2), (b_1), (b_2), (v_1)-(v_3)$ e $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$. Então para cada $\theta \in (0, \min(\theta_0, \theta_2))$, o problema (\mathcal{P}_θ) admite pelo menos duas soluções não triviais $u, v \in X \setminus \{0\}$ de modo que $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-$ e $v \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+$.*

Teorema 0.7 *Suponha $(m_1), (a_1), (a_2), (b_1), (b_2)$ e $(v_1)-(v_3)$. Sejam $\lambda \in (-\infty, \lambda^*)$ e $\theta > 0$ parâmetros fixos. Então o problema (\mathcal{P}_θ) não admite nenhuma solução não trivial.*

Teorema 0.8 *Suponha $(m_1), (a_1), (a_2), (b_1), (b_2)$ e $(v_1)-(v_3)$. Sejam $\lambda = \lambda^*$ e $\theta > 0$ parâmetros fixos. Então não existe solução fraca positiva ou negativa $u \in X$ para o problema (\mathcal{P}_θ) tal que $u \in \mathcal{N}_{\lambda^*,\theta}^0$ desde que:*

- (a) $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{a(x)}{b(x)} \geq \mathcal{C} > 0$;
- (b) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{a(x)}{b(x)} = \mathcal{C} > 0$.

No Capítulo 3, finalmente, tratamos de estabelecer as condições suficientes para obter a existência, não existência e multiplicidade de soluções positivas para um problema elíptico não local do tipo Kirchhoff, envolvendo um crescimento crítico em \mathbb{R}^N com $N \geq 3$. Mais especificamente, exploramos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -m(\|\nabla u\|_2^2) \Delta u + V(x)u = \lambda a(x)|u|^{q-2}u - \theta|u|^{2^*-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (\mathcal{P}_c)$$

onde λ e θ são parâmetros positivos, $2 < q < 2(\sigma + 1) < 2^*$, o potencial $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é contínuo e limitado inferiormente por uma constante positiva, e a função peso a pertence a $L^{\tilde{r}}(\mathbb{R}^N) \cap L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $\tilde{r} = \frac{2^*}{2^*-q}$.

Nos últimos anos, as equações de Kirchhoff com não linearidade crítica têm recebido considerável atenção nos estudos matemáticos. Isso se deve, em grande parte, a uma das principais dificuldades ao lidar com este tipo de equações: a falta de compacidade da imersão de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, o que é natural devido à presença de dilatações e translações sobre \mathbb{R}^N . Assim, demonstrar a existência e a multiplicidade de soluções não triviais para um problema com essa estrutura não é uma tarefa fácil em geral. Na literatura, uma forma de superar essas dificuldades é abordar o problema utilizando algumas técnicas, tais como: Argumento de truncamento, Métodos variacionais, Método de Nehari, Teoria da categoria de Ljusternik-Schnirelmann, entre outras. Abaixo, apresentamos alguns trabalhos que nos motivaram a resolver o problema (\mathcal{P}_c) .

O trabalho pioneiro que nos serviu de orientação foi Figueiredo [32], publicado em 2013. Este artigo, além de ser fundamental, é um clássico no estudo de problemas elípticos do tipo Kirchhoff com não linearidade crítica. Resumidamente, Figueiredo investigou o seguinte problema:

$$\begin{cases} -m\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u = \lambda f(x, u) + |u|^{2^*-2}u \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \end{cases} \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad (0-8)$$

onde Ω é um domínio limitado em \mathbb{R}^N , $N \geq 3$ e λ é um parâmetro positivo. Observe que $m : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas que atendem a algumas hipóteses adicionais. A principal abordagem deste artigo é aplicar os conceitos de métodos variacionais, especialmente do argumento de truncamento apropriado. Por meio de estimativas a priori para $\lambda > 0$ suficientemente grande, o autor mostrou que a solução encontrada para o problema truncado também é solução do problema (0-8).

Em 2014, Naimen [52] analisou o seguinte problema elíptico do tipo Kirchhoff

com uma não linearidade crítica:

$$\begin{cases} - \left(a + b \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u = \mu g(x, u) + |u|^5 & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0-9)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$ tal que $a, b \geq 0$ e $a + b > 0$. Assumindo determinadas condições sobre a função $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e o parâmetro $\mu \in \mathbb{R}$, o autor estabeleceu resultados de existência, não existência e multiplicidade de soluções positivas para o problema (0-9).

Ao longo dos anos, surgiram várias outras pesquisas matemáticas sobre esse tema. Em 2018, por exemplo, do Ó, He e Mishra [57] exploraram um problema elíptico não local para uma família de funções de Kirchhoff envolvendo o operador Laplaciano fracionário e um crescimento crítico. Mais precisamente, os autores resolveram o seguinte problema:

$$\begin{cases} m \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \right) (-\Delta)^s u = \lambda f |u|^{q-2} u + |u|^{2^*_s-2} u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \quad (0-10)$$

onde $\lambda > 0$, $N > 2s$, $s \in (0, 1)$, $1 < q < 2$, $2^*_s := \frac{2N}{N-2s}$ e $f \in L^{\frac{2^*_s}{2^*_s-q}}(\Omega)$ é uma função contínua com valor real que pode mudar de sinal. A função de Kirchhoff, denotada por m , é expressa como $m(t) = a + bt^{\theta-1}$ com $a, b > 0$ para todo $t \geq 0$ e $\theta \in [1, \frac{2^*_s}{2})$. Neste trabalho, os autores aplicaram o método de minimização sobre a variedade de Nehari para garantir a existência de um valor $\Lambda_0 > 0$ de tal modo que o problema (0-10) tenha pelo menos uma solução positiva com energia negativa, para cada $\lambda \in (0, \Lambda_0)$. Além disso, provaram que existe $0 < \Lambda_{00} \leq \Lambda_0$, de tal maneira que o problema (0-10) tenha pelo menos duas soluções positivas para cada $\lambda \in (0, \Lambda_{00})$, desde que os valores de $b > 0$ sejam suficientemente pequenos.

Recentemente, Faraci e Silva [30] estudaram um problema elíptico não local parametrizado do tipo Kirchhoff, que inclui uma não linearidade crítica. Em particular, os autores exploraram o seguinte problema:

$$\begin{cases} - \left(a + b \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u = |u|^{2^*-2} u + \lambda f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0-11)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N > 4$) é um domínio limitado, λ é um parâmetro positivo e f é uma função subcrítica de Caratheodory. Em vista do método de Nehari, do método

de fibração e do método do quociente de Rayleigh não linear, os autores obtiveram resultados sobre a existência, não existência e multiplicidade de soluções não triviais para o problema (0-11), dependendo dos valores de $\lambda > 0$.

Além dos artigos mencionados anteriormente, destacamos outros trabalhos célebres [22, 28, 29, 31, 32, 34–38, 46, 47, 50, 51, 53, 54, 80, 81], os quais investigam uma variedade de problemas elípticos que envolvem a função de Kirchhoff e um crescimento crítico, sob diferentes hipóteses nos termos não lineares.

A contribuição significativa do Capítulo 3 foi garantir um estudo abrangente dos valores dos parâmetros λ e θ , de forma a assegurar a existência de pelo menos duas soluções positivas não triviais para o problema (\mathcal{P}_c) . Para alcançar esse resultado, realizamos uma análise detalhada da *fibering map* associada ao funcional energia, aplicamos o método de minimização sobre a variedade de Nehari e o método do quociente de Rayleigh não linear, e restauramos a compacidade.

Mais especificamente, como $\overline{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} = \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+ \cup \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0$ e $\overline{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} = \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^- \cup \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0$, temos que os minimizadores $v \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+ \cup \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0$ e $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^- \cup \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0$ podem estar em $\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0$. Esse fato torna a busca por pontos críticos para o funcional $J_{\lambda,\theta}$ uma tarefa desafiadora, uma vez que não podemos aplicar diretamente o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange [25, Teorema 7.8.2]. Para superar essa dificuldade, assumimos a existência de um valor $q_1 > 0$, onde $2 < q_1 < q < 2(\sigma + 1) < 2^*$, de modo que as desigualdades $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} < c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}$ e $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} < c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}$ sejam satisfeitas. Essas condições implicam que os minimizadores estão restritos exclusivamente a $\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+$ e $\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-$.

A convergência forte das sequências minimizantes é facilitada pelo simples fato de que o funcional energia $J_{\lambda,\theta}$ é fracamente semicontínuo inferiormente (veja o Lema 3.5). Esse aspecto nos permite afirmar que qualquer sequência minimizante $(u_k) \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+$ ou $(u_k) \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-$ possui uma subsequência convergente. Em outras palavras, dada uma sequência minimizante $(u_k) \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+$ ou $(u_k) \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-$, com

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} J(u_k) = c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} \quad \text{ou} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} J(u_k) = c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-},$$

podemos afirmar que existe $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+$ ou $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-$, de modo que $u_k \rightarrow u$ em X , quando $k \rightarrow +\infty$.

No penúltimo parágrafo, afirmamos que o problema (\mathcal{P}_c) possui pelo menos duas soluções não triviais estritamente positivas. Para garantir essa positividade, regularizamos as soluções fracas encontradas para o problema (\mathcal{P}_c) , sob a condição de que V e a são funções Hölder contínuas. A ideia central aqui é fazer uso de alguns resultados clássicos da Teoria de regularidade, tais como, a estimativa de Brezis-Kato [73, Lema B.3], o Teorema de Calderón-Zygmund [39, Teorema 9.9], as estimativas de Schauder [39, Teorema 6.13] e o Princípio do Máximo Forte [27,

Teorema 4].

Além dos resultados previamente mencionados, também provamos que, dependendo dos valores atribuídos aos parâmetros λ e θ , o problema (\mathcal{P}_c) não admite nenhuma solução não trivial. Para demonstrar isso, utilizamos a conhecida *identidade de Pohozaev*, cuja prova está no Teorema D.2 do Apêndice D deste trabalho.

Agora, apresentamos as hipóteses utilizadas para resolver o problema (\mathcal{P}_c) :

(M₁) A função $m : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfaz $m(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t^\sigma$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ com $0 < \sigma < \frac{2}{N-2}$;

(A₁) $2 < q < 2(\sigma + 1) < 2^*$;

(A₂) A função $a : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz

$$a \in L^{\tilde{r}}(\mathbb{R}^N) \cap L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ com } \tilde{r} = \frac{2^*}{2^* - q}$$

e $a(x) > 0$ q.t.p. em \mathbb{R}^N ;

(V₁) O potencial V pertence a $V \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^N)$, e existe uma constante $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq V_0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Considere S_{2^*} como a melhor constante da imersão contínua de Sobolev $X \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, dada por

$$0 < S_{2^*} := \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|u\|^2}{\|u\|_{2^*}^2}.$$

O problema (\mathcal{P}_c) está relacionado ao funcional energia $J_{\lambda,\theta} : X \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J_{\lambda,\theta}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx + \frac{\theta}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx.$$

É relevante ressaltar que a hipótese (V₁), que considera $V(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, é padrão e suficiente para estabelecer as imersões contínuas de Sobolev. No entanto, não impomos nenhuma condição adicional sobre o potencial V em relação à compacidade. Em vez disso, atribuímos essa responsabilidade à função peso a , especificamente à hipótese (A₂).

Note que muitos dos resultados apresentados no Capítulo 2 funcionam de maneira semelhante no Capítulo 3, com a substituição da norma $\|u\|_{p,b}^p$ pela norma $\|u\|_{2^*}^{2^*}$. Portanto, para evitar repetições e tornar a introdução mais concisa, omitiremos esses resultados.

Os quocientes de Rayleigh não lineares R_n e R_e associados ao parâmetro $\lambda > 0$, são dados por

$$R_n(u) = \frac{\|u\|^2 + \alpha_2\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta\|u\|_{2^*}^{2^*}}{\|u\|_{q,a}^q}, \quad u \in X \setminus \{0\}$$

e

$$R_c(u) = \frac{\frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \frac{\theta}{2^*}\|u\|_{2^*}^{2^*}}{\frac{1}{q}\|u\|_{q,a}^q}, \quad u \in X \setminus \{0\}.$$

Até onde sabemos, o Capítulo 3 é o primeiro trabalho a fornecer uma descrição completa do tamanho dos valores dos parâmetros λ e θ , ambos positivos, tal que o problema (\mathcal{P}_c) tenha pelo menos duas soluções positivas.

No Capítulo 3, foram desenvolvidas ferramentas para demonstrar os seguintes resultados:

Teorema 0.9 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) e $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} < c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}$. Então para cada $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$, existe $\theta_0 > 0$ pequeno tal que o problema (\mathcal{P}_c) admite pelo menos uma solução ground state $v \in X$ satisfazendo $v \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+$ com $\theta \in (0, \theta_0)$. Além disso, temos que a solução v é estritamente positiva em \mathbb{R}^N , desde que V e a sejam funções Hölder contínuas.*

Corolário 0.10 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) e (V_1) . Assuma que existe $q_1 > 0$ de tal forma que $2 < q_1 < q < 2(\sigma + 1) < 2^*$. Então os níveis de energia $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} < c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}$ desde que:*

- (a) $\lambda \in [\lambda_*, +\infty)$ e $\theta > 0$;
- (b) $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_*)$ e $\theta \in (0, \theta_0)$ com $\theta_0 > 0$ suficientemente pequeno;
- (c) $\lambda \in (\lambda_* - \varepsilon, \lambda_*)$ e $\theta > 0$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Teorema 0.11 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) e $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} < c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}$. Então para cada $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$, existe $\theta_2 > 0$ pequeno tal que o problema (\mathcal{P}_c) admite pelo menos uma solução fraca $u \in X$ satisfazendo $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-$ com $\theta \in (0, \theta_2)$. Além disso, temos que a solução u é estritamente positiva em \mathbb{R}^N , desde que V e a sejam funções Hölder contínuas.*

Corolário 0.12 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) e $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$. Assuma que existe $q_1 > 0$ de tal forma que $2 < q_1 < q < 2(\sigma + 1) < 2^*$. Então os níveis de energia $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} < c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}$, sempre que $\theta \in (0, \theta_2)$.*

Corolário 0.13 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) , $2 < q_1 < q < 2(\sigma + 1) < 2^*$ e $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$. Assuma que V e a são funções Hölder contínuas. Então para cada $\theta \in (0, \min(\theta_0, \theta_2))$, o problema (\mathcal{P}_c) admite pelo menos duas soluções positivas $u, v \in X \setminus \{0\}$ tal que $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-$ e $v \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+$.*

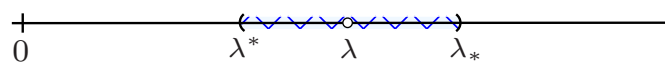
Teorema 0.14 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) e $V \in C^1(\mathbb{R}^N; [0, +\infty))$. Então,*

- (a) *O problema (\mathcal{P}_c) não possui solução não trivial, desde que $\lambda \in (0, \lambda^*)$ e $\theta > 0$;*

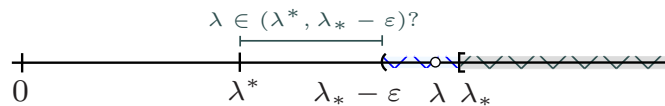
- (b) O problema (\mathcal{P}_c) não possui solução não trivial, desde que $\lambda = 0$, $\theta > 0$ e $2V(x) + (x \cdot \nabla V(x)) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$;
- (c) O problema (\mathcal{P}_c) não possui solução não trivial, desde que $\lambda < 0$, $\theta \geq 0$ e $2V(x) + (x \cdot \nabla V(x)) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Em resumo, o Capítulo 3 se distingue do Capítulo 2 pelo surgimento do expoente crítico na não linearidade, juntamente com a condição $2 < q < 2(\sigma + 1)$. É importante ressaltar que, no Capítulo 3, o potencial V mantém-se inalterado em seu sinal e não atende às condições de Bartsch-Wang. Apesar dessas diferenças, a estrutura geométrica das fibras do funcional energia e das fibras dos quocientes de Rayleigh não lineares é preservada nesse contexto.

Gostaríamos de salientar que a solução obtida no Teorema 0.9 é em grande parte atribuída ao Corolário 0.10. Este corolário, em particular, desempenha um papel fundamental neste capítulo, levando-nos a considerar a seguinte situação: observe que quando λ está no intervalo (λ^*, λ_*) , o problema (\mathcal{P}_c) admite uma solução, desde que estabeleçamos um valor $\theta_0 > 0$ suficientemente pequeno, de modo que $\theta \in (0, \theta_0)$. Além disso, para $\lambda \in [\lambda_*, +\infty)$, o problema (\mathcal{P}_c) sempre admite solução, independentemente de θ ser geral. Ao aprofundarmos nossa análise, notamos que quando λ está no intervalo $(\lambda_* - \varepsilon, \lambda)$, o problema (\mathcal{P}_c) possui solução, desde que $\theta > 0$ seja geral e $\varepsilon > 0$ seja suficientemente pequeno. Entretanto, surge uma questão crucial: o problema (\mathcal{P}_c) tem solução quando $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_* - \varepsilon)$ com $\theta > 0$ geral? A resposta é que não temos controle sobre essa situação. Pode ser que nem seja necessário introduzir o parâmetro θ , mas este é um caso que ainda não conseguimos resolver.



O problema (\mathcal{P}_c) tem solução, quando $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_*)$ com $\theta \in (0, \theta_0)$ e $\theta_0 > 0$ pequeno.



O problema (\mathcal{P}_c) tem solução, quando $\lambda \in (\lambda_* - \varepsilon, \lambda_*)$ com $\theta > 0$ e $\varepsilon > 0$ pequeno.

Por último, este trabalho inclui quatro apêndices nos quais são apresentados vários exemplos do potencial V sob diferentes hipóteses. Além disso, demonstramos a regularidade dos termos do funcional energia J e deduzimos a conhecida identidade de Pohozaev para as funções de Kirchhoff.

Soluções positivas para um problema elíptico do tipo Kirchhoff em \mathbb{R}^N

Neste capítulo, estudamos o problema

$$\begin{cases} -m(\|\nabla u\|_2^2) \Delta u + V(x)u = \lambda a(x)|u|^{q-2}u + b(x)|u|^{p-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (\mathcal{P}_\lambda)$$

onde $N \geq 3$ e o parâmetro $\lambda > 0$. O potencial $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é contínuo e limitado inferiormente por uma constante positiva. As funções $a \in L^{r_1}(\mathbb{R}^N)$ e $b \in L^{r_2}(\mathbb{R}^N)$, onde $r_1, r_2 > 1$ são expoentes adequados.

O principal objetivo consiste em investigar a existência e a multiplicidade de soluções positivas para problemas elípticos que envolvem equações de Kirchhoff, bem como uma não linearidade côncavo-convexa. Para ser mais específico, dependendo do tamanho do parâmetro λ , estamos em busca de garantir a presença de, pelo menos, uma solução ground state e uma solução bound state para o problema (\mathcal{P}_λ) . Nossa abordagem central é introduzir os conceitos do método do quociente de Rayleigh não linear e do método de minimização sobre a variedade de Nehari.

No que segue, consideramos as seguintes condições para o problema (\mathcal{P}_λ) :

- (m_1) A função $m : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfaz $m(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t^\sigma$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ com $0 < \sigma < \frac{2}{N-2}$;
- (a_1) $1 < q < 2 < 2(\sigma + 1) < p < 2^*$;
- (a_2) As funções $a, b : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem $a \in L^{r_1}(\mathbb{R}^N)$ e $b \in L^{r_2}(\mathbb{R}^N)$, onde

$$\left(\frac{2^*}{q}\right)' < r_1 \leq \left(\frac{2}{q}\right)' \quad \text{e} \quad \left(\frac{2^*}{p}\right)' < r_2 \leq \left(\frac{2}{p}\right)',$$

com $a(x), b(x) > 0$ q.t.p. em \mathbb{R}^N ;

- (V_1) O potencial V pertence a $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^N)$, e existe uma constante $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq V_0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Antes de apresentarmos a estrutura variacional do problema, iremos ilustrar alguns exemplos de funções de Kirchhoff m , especificando os valores de $\sigma \in \mathbb{R}_*^+$.

| Função de Kirchhoff m | Valor de $\sigma \in \mathbb{R}_*^+$ | Valor de p | Dimensão N |
|---|--------------------------------------|--------------------|------------------------|
| $m(t) = \alpha_1 + \alpha_2 \sqrt[10]{t}$ | $\sigma = \frac{1}{10}$ | $p > \frac{11}{5}$ | $3 \leq N < 22$ |
| $m(t) = \alpha_1 + \alpha_2 \sqrt[4]{t}$ | $\sigma = \frac{1}{4}$ | $p > \frac{5}{2}$ | $3 \leq N < 10$ |
| $m(t) = \alpha_1 + \alpha_2 \sqrt{t}$ | $\sigma = \frac{1}{2}$ | $p > 3$ | $3 \leq N < 6$ |
| $m(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t$ | $\sigma = 1$ | $p > 4$ | $N = 3$ |
| $m(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t^k$ | $\sigma = k$ | $p > 2(k+1)$ | $N < \frac{2(k+1)}{k}$ |

Tabela 1.1: Exemplos de funções não locais m .

1.1 Estrutura variacional do problema

Inicialmente, definimos

$$X = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < +\infty \right\}.$$

Com base nessa definição, determinamos o produto interno associado ao espaço X da seguinte maneira:

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [\alpha_1 \nabla u \nabla \varphi + V(x)u\varphi] dx, \quad \varphi \in X,$$

sendo a norma associada expressa por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} [\alpha_1 |\nabla u|^2 + V(x)u^2] dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in X.$$

Observe que $\alpha_1 > 0$, presente no produto interno mencionado acima, corresponde ao mesmo valor presente na função de Kirchhoff na hipótese (m_1) .

Exemplo 1.1 *Este exemplo ilustra que, sob condições apropriadas em relação ao potencial V , o espaço X definido acima não é vazio. De fato, quando consideramos o potencial V como limitado ou ilimitado, respectivamente, obtemos*

$$u(x) = \frac{1}{(1 + |x|^2)^\xi} \in X \quad \text{ou} \quad u(x) = \frac{\rho(x)}{(1 + |x|^2)^\xi} \in X, \quad (1-1)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $\xi > \frac{N}{4}$ com $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\rho(x) = 1$ se $x \in B_1(0)$, $\rho(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R}^N \setminus B_2(0)$ e $0 \leq \rho(x) \leq 1$. A prova da afirmação (1-1) segue usando a fórmula da Co-área [27, Teorema 5, Apêndice C] e o Exemplo 2.15 apresentado a seguir.

O primeiro resultado importante nos possibilita estabelecer o cenário variacional. Uma vez que V pertence a $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^N)$, demonstramos que o espaço X , munido da norma usual $\|\cdot\|$, configura-se como um espaço de Hilbert.

Lema 1.2 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) e (V_1) . Então o espaço X munido da norma usual $\|\cdot\|$ é um espaço de Hilbert.*

Prova. Primeiramente, afirmamos que X é um espaço vetorial completo. De fato, considere (u_k) uma sequência de Cauchy em X . Pela imersão contínua $X \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\|u_k - u_m\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \mathcal{C}\|u_k - u_m\| < \varepsilon,$$

para todo $k, m > k_0$, onde $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$. Isso prova que (u_k) é uma sequência de Cauchy em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Como $H^1(\mathbb{R}^N)$ é completo, temos que existe uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ de modo que $u_k \rightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, quando $k \rightarrow +\infty$. Além disso, fazendo uso do Lema de Fatou em conjunto com a limitação da sequência (u_k) , mencionamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^2 dx \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_k|^2 dx \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|u_k\|^2 \leq \mathcal{C}_1 < +\infty.$$

Como produto, tem-se que $u \in X$. Além disso, como $u_k \rightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, concluímos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_k - u_m|^2 dx \leq \|u_k - u_m\|^2 < \varepsilon^2.$$

Essa condição, juntamente com o Lema de Fatou, nos permite deduzir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_k - u|^2 dx \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_k - u_m|^2 dx \leq \varepsilon^2,$$

para todo $\varepsilon > 0$ e $k > k_0$. Uma vez que $\varepsilon > 0$ é arbitrário e a integral é não negativa, temos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k - u\|^2 = 0.$$

Como consequência, obtemos que $u_k \rightarrow u$ em X , e o lema está provado. \square

Uma vez que estamos em busca de soluções fracas para o problema (\mathcal{P}_λ) , definimos o funcional energia $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx.$$

Vale ressaltar que uma função $u \in X$ é considerada um ponto crítico do funcional energia J se, e somente se, u é uma solução fraca para o problema (\mathcal{P}_λ) . Nesse contexto, a formulação fraca é a seguinte:

Definição 1.3 *Dizemos que $u \in X$ é solução fraca para o problema (\mathcal{P}_λ) se, e somente se,*

$$\langle u, \varphi \rangle + \alpha_2 \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma} = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^{q-2} u \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^{p-2} u \varphi dx,$$

para todo $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Sob as nossas suposições, torna-se evidente que o funcional energia J é de classe $C^1(X; \mathbb{R})$, veja o Apêndice B. É importante observar que J não é um funcional de classe $C^2(X; \mathbb{R})$. Entretanto, dispomos das seguintes expressões:

$$\begin{cases} J'(u)u = \|u\|^2 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \lambda \|u\|_{q,a}^q - \|u\|_{p,b}^p, \\ J''(u)(u, u) = \|u\|^2 + (2\sigma + 1)\alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \lambda(q-1)\|u\|_{q,a}^q - (p-1)\|u\|_{p,b}^p, \end{cases}$$

onde definimos

$$\|u\|_{q,a}^q = \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx \quad \text{e} \quad \|u\|_{p,b}^p = \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx, \quad u \in X.$$

Observação 1.4 *É fácil verificar que o funcional energia J é ilimitado inferiormente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Para isso, uma vez que a função $b(x)$ assume valores positivos e $u \neq 0$, temos que $\|u\|_{p,b}^p > 0$. É sabido para todo $t > 0$ que*

$$J(tu) = \frac{t^2}{2} \|u\|^2 + \frac{t^{2(\sigma+1)}}{2(\sigma+1)} \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{t^q}{q} \lambda \|u\|_{q,a}^q - \frac{t^p}{p} \|u\|_{p,b}^p.$$

Portanto, a hipótese (a_1) assegura que $\lim_{t \rightarrow +\infty} J(tu) = -\infty$. Essa condição mostra que o ínfimo do funcional energia J em $H^1(\mathbb{R}^N)$ não é atingido.

É importante enfatizar que a Observação 1.4 desempenha um papel fundamental, pois demonstra que a minimização global não gera pontos críticos. Neste contexto, torna-se necessário definir um conjunto denominado *variedade de Nehari* da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &:= \{u \in X \setminus \{0\} : J'(u)u = 0\} \\ &= \left\{ u \in X \setminus \{0\} : \lambda \|u\|_{q,a}^q = \|u\|^2 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \|u\|_{p,b}^p \right\}. \end{aligned} \quad (1-2)$$

É evidente que conjunto \mathcal{N} engloba todos os pontos críticos não triviais do funcional energia J . Vale ressaltar a importância de reconhecer, para o nosso trabalho, que \mathcal{N} é uma variedade de classe C^1 . Contudo, é crucial observar que, em geral, esse conjunto nem sempre se configura como uma variedade.

Além disso, ao considerarmos as mesmas ideias discutidas em [55, 56], podemos dividir a *variedade de Nehari* \mathcal{N} em três subconjuntos disjuntos, de modo que $\mathcal{N} := \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+ &:= \{u \in \mathcal{N} : J'(u)u = 0 \text{ e } J''(u)(u, u) > 0\}, \\ \mathcal{N}^- &:= \{u \in \mathcal{N} : J'(u)u = 0 \text{ e } J''(u)(u, u) < 0\}, \\ \mathcal{N}^0 &:= \{u \in \mathcal{N} : J'(u)u = 0 \text{ e } J''(u)(u, u) = 0\}. \end{aligned}$$

Em vista da definição (1-2), observamos que, dado $u \in \mathcal{N}$, temos que

$$\begin{aligned} J''(u)(u, u) &= (2-p)\|u\|^2 + (2(\sigma+1)-p)\alpha_2\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \lambda(p-q)\|u\|_{q,a}^q \\ &= (2-q)\|u\|^2 + (2(\sigma+1)-q)\alpha_2\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - (p-q)\|u\|_{p,b}^p. \end{aligned} \quad (1-3)$$

Agora, ao explorar o quociente de Rayleigh não linear, é crucial discutir algumas ferramentas essenciais. A primeira delas envolve a análise do comportamento do funcional J quando este atinge energia zero, ou seja,

$$\mathcal{E} := \left\{ u \in X \setminus \{0\} : \frac{\lambda}{q}\|u\|_{q,a}^q = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{1}{p}\|u\|_{p,b}^p \right\}. \quad (1-4)$$

É fundamental destacar que o conjunto \mathcal{E} mencionado anteriormente é não vazio para qualquer valor de $\lambda > 0$, conforme demonstrado na Proposição 1.25. Desta forma, a definição (1-4) juntamente com (1-2) implicam que

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{N} \text{ se, e somente se, } R_n(u) &= \lambda, \\ u \in \mathcal{E} \text{ se, e somente se, } R_e(u) &= \lambda, \end{aligned}$$

onde $R_n, R_e : X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ representam os quocientes de Rayleigh não lineares associados ao parâmetro $\lambda > 0$, sendo definidos como:

$$R_n(u) := \frac{\|u\|^2 + \alpha_2\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \|u\|_{p,b}^p}{\|u\|_{q,a}^q}, \quad u \in X \setminus \{0\} \quad (1-5)$$

e

$$R_e(u) := \frac{\frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{1}{p}\|u\|_{p,b}^p}{\frac{1}{q}\|u\|_{q,a}^q}, \quad u \in X \setminus \{0\}. \quad (1-6)$$

Um cálculo simples, usando imersão contínua de Sobolev e a hipótese (a_1) , demonstra que os funcionais R_n e R_e estão bem definidos e pertencem a $C^1(X \setminus \{0\}; \mathbb{R})$. Para uma compreensão mais detalhada deste tema, recomendamos a leitura dos trabalhos [18, 20, 42, 43, 70].

Definição 1.5 Considerando o conjunto \mathcal{N} , definimos os seguintes níveis:

$$c_{\mathcal{N}^+} = \inf_{u \in \mathcal{N}^+} J(u) \quad e \quad c_{\mathcal{N}^-} = \inf_{u \in \mathcal{N}^-} J(u).$$

Definição 1.6 A partir de (1-5) e (1-6), definimos as funções $S_n, S_e : X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$S_n(u) = \sup_{t>0} R_n(tu) \quad e \quad S_e(u) = \sup_{t>0} R_e(tu).$$

Consequentemente, os valores extremais são determinados por

$$\lambda^* = \inf_{u \in X \setminus \{0\}} S_n(u) \quad e \quad \lambda_* = \inf_{u \in X \setminus \{0\}} S_e(u).$$

1.2 Resultados preliminares acerca dos métodos do quociente de Rayleigh e Nehari

Nesta seção, nosso objetivo principal é apresentar propriedades fundamentais relacionadas ao Método do quociente de Rayleigh não linear e ao Método de Nehari. Tais propriedades são cruciais para determinar a existência e a multiplicidade de soluções para o problema (\mathcal{P}_λ) . Para começar, definiremos uma classe de funções de suma importância para a nossa investigação, visto que a variedade de Nehari está intrinsecamente ligada ao comportamento destas funções. Essas funções são comumente conhecidas como *fibering map* e são definidas da seguinte maneira:

$$\phi_u(t) := J(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{t^{2(\sigma+1)}}{2(\sigma+1)}\alpha_2\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{t^q}{q}\lambda\|u\|_{q,a}^q - \frac{t^p}{p}\|u\|_{p,b}^p,$$

para todo $t > 0$ e $u \in X \setminus \{0\}$. Assim, calculando as derivadas de $\phi_u(t)$ em relação a t , temos que

$$\phi'_u(t) = t\|u\|^2 + \alpha_2 t^{2\sigma+1}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - t^{q-1}\lambda\|u\|_{q,a}^q - t^{p-1}\|u\|_{p,b}^p,$$

e

$$\phi''_u(t) = \|u\|^2 + \alpha_2(2\sigma+1)t^{2\sigma}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - (q-1)t^{q-2}\lambda\|u\|_{q,a}^q - (p-1)t^{p-2}\|u\|_{p,b}^p,$$

para todo $t > 0$. Uma implicação direta de ϕ'_u é que

$$\phi'_u(t) = \frac{1}{t}J'(tu)tu.$$

Isso nos permite observar que $t > 0$ é um ponto crítico de ϕ_u se, e somente se, $tu \in \mathcal{N}$. Em particular, $u \in \mathcal{N}$ se, e somente se, $t = 1$ é um ponto crítico de ϕ_u . Agora, no que diz respeito a ϕ''_u , é fácil verificar para todo $t > 0$ que

$$\phi''_u(t) = \frac{1}{t^2}\phi''_{tu}(1).$$

Além disso, salientamos que a identidade ϕ_u nos permite explorar as seguintes propriedades:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\phi_u(t)}{t^q} < 0; \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\phi_u(t)}{t^p} < 0; \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\phi'_u(t)}{t^{q-1}} < 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\phi'_u(t)}{t^{p-1}} < 0.$$

Dado que a variedade \mathcal{N} está relacionado à *fibering map* ϕ_u , é natural subdividir a variedade em três subconjuntos distintos tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+ &:= \{u \in \mathcal{N} : \phi'_u(1) = 0 \text{ e } \phi''_u(1) > 0\}, \\ \mathcal{N}^- &:= \{u \in \mathcal{N} : \phi'_u(1) = 0 \text{ e } \phi''_u(1) < 0\}, \\ \mathcal{N}^0 &:= \{u \in \mathcal{N} : \phi'_u(1) = 0 \text{ e } \phi''_u(1) = 0\}. \end{aligned}$$

Uma teoria mais abrangente sobre a *fibering map* ϕ_u pode ser obtida em [61].

A observação subsequente afirma que, sob a hipótese (V_1) , a imersão de X em $L^r(\mathbb{R}^N)$ é contínua para cada $r \in [2, 2^*]$. Para uma compreensão mais detalhada dessa propriedade, recomendamos a consulta aos trabalhos [11, 39, 77].

Observação 1.7 *Assuma que a hipótese (V_1) seja satisfeita. Nesse caso, a imersão $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ é contínua para cada $r \in [2, 2^*]$. De fato, usando a hipótese (V_1) , obtemos*

$$\|u\|_2^2 \leq \frac{1}{V_0} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx \leq \frac{1}{V_0} \int_{\mathbb{R}^N} [\alpha_1 |\nabla u|^2 + V(x)u^2] dx = \frac{1}{V_0} \|u\|^2,$$

para todo $u \in X \setminus \{0\}$ e $V_0, \alpha_1 > 0$. Isso implica que a imersão $X \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ é contínua. Além disso, a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg [27, Teorema 2] e a hipótese (V_1) garantem que

$$\begin{aligned} \|u\|_{2^*}^2 &\leq C_0 \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + u^2] dx \\ &\leq \frac{C_0}{\alpha_1} \int_{\mathbb{R}^N} \alpha_1 |\nabla u|^2 dx + \frac{C_0}{V_0} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx \\ &\leq C_0 \max\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{V_0}\right) \|u\|^2, \end{aligned}$$

para todo $u \in X \setminus \{0\}$ e $C_0, V_0, \alpha_1 > 0$. Logo, a imersão $X \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ é contínua. Desta forma, pela desigualdade de Interpolação [27, Apêndice B], inferimos que

$$\|u\|_r \leq \|u\|_2^\nu \|u\|_{2^*}^{1-\nu} \leq C_1 \|u\| \quad \text{com} \quad \frac{1}{r} = \frac{\nu}{2} + \frac{1-\nu}{2^*},$$

com $\nu \in (0, 1)$ e $r \in (2, 2^*)$. Portanto, temos que a imersão $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ é contínua para cada $r \in [2, 2^*]$. Como consequência, analisando a hipótese (a_2) , dado que $qr'_1 \in [2, 2^*)$ e $pr'_2 \in [2, 2^*)$, podemos concluir que X está continuamente imerso em $L^{qr'_1}(\mathbb{R}^N)$ e $L^{pr'_2}(\mathbb{R}^N)$, respectivamente.

Neste momento, apresentamos a demonstração de que os pontos críticos dos funcionais $R_n(t_n(u)u)$ e $R_e(t_e(u)u)$ são únicos, sendo determinados por $t_n(u) > 0$ e $t_e(u) > 0$, respectivamente. Essa constatação adquire grande relevância ao garantir projeções na variedade de Nehari. Nesse caso, destacamos que os estudos [18, 70] estabelecem a existência desses pontos críticos para o quociente de Rayleigh não linear de forma explícita, por meio de uma identidade simples. Entretanto, para o problema (\mathcal{P}_c) , essa identidade não é mais aplicável devido à presença da função m .

Proposição 1.8 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) e (V_1) . Assuma que (1-5) é satisfeita. Defina uma função*

$$L_n(t) = t^{2-q}\|u\|^2 + \alpha_2 t^{2(\sigma+1)-q} \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - t^{p-q}\|u\|_{p,b}^p,$$

para todo $t > 0$. Então a função L_n tem um único ponto crítico $t = t_n(u) > 0$.

Prova. Um simples cálculo fornece que $\frac{d}{dt}L_n(t)|_{t=t_n(u)} = 0$ se, e somente se,

$$\alpha_2 = \frac{-(2-q)t^{-2\sigma}\|u\|^2 + (p-q)t^{p-2(\sigma+1)}\|u\|_{p,b}^p}{(2(\sigma+1)-q)\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)}}. \quad (1-7)$$

Ao examinarmos o lado direito da equação (1-7), introduzimos uma função auxiliar $\Lambda_n : X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Lambda_n(tu) := \frac{-(2-q)t^{-2\sigma}\|u\|^2 + (p-q)t^{p-2(\sigma+1)}\|u\|_{p,b}^p}{(2(\sigma+1)-q)\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)}}, \quad t > 0.$$

Nesse caso, ao calcular a derivada de $\Lambda_n(tu)$ em relação a t , tem-se que

$$\frac{d}{dt}\Lambda_n(tu) = \frac{2\sigma(2-q)t^{-2\sigma-1}\|u\|^2 + (p-q)(p-2(\sigma+1))t^{p-2\sigma-3}\|u\|_{p,b}^p}{(2(\sigma+1)-q)\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)}}.$$

Dessa forma, usando a hipótese (a_1) , inferimos que $\frac{d}{dt}\Lambda_n(tu)|_{t=t_n(u)} > 0$, para todo $t > 0$. Isso implica que existe $t_n(u) > 0$ de modo que

$$\Lambda_n(t_n(u)u) = \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}L_n(t)\Big|_{t=t_n(u)} = 0.$$

Portanto, a função L_n possui um único ponto crítico. \square

Observação 1.9 *Analisando a definição (1-6), não é difícil verificar que a função*

$$L_e(t) = \frac{1}{2}t^{2-q}\|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)}t^{2(\sigma+1)-q}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{1}{p}t^{p-q}\|u\|_{p,b}^p$$

possui um único ponto crítico $t = t_e(u) > 0$. Essa afirmação é demonstrada utilizando os mesmos cálculos discutidos na Proposição 1.8, em conjunto com

$$\Lambda_e(tu) := \frac{-(\sigma+1)(2-q)t^{-2\sigma}\|u\|^2 + \frac{2(\sigma+1)(p-q)}{p}t^{p-2(\sigma+1)}\|u\|_{p,b}^p}{(2(\sigma+1)-q)\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)}}, \quad t > 0.$$

Além disso, deduzimos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \Lambda_n(tu) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \Lambda_e(tu) = -\infty \quad e \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \Lambda_n(tu) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Lambda_e(tu) = +\infty.$$

Proposição 1.10 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) e (V_1) . Então $\Lambda_n(tu) > \Lambda_e(tu)$ para todo $t > 0$ e $u \in X \setminus \{0\}$.*

Prova. Podemos provar facilmente que

$$\begin{aligned}\Lambda_n(tu) - \Lambda_e(tu) &= \frac{\sigma(2-q)t^{-2\sigma}\|u\|^2 + p^{-1}(p-2(\sigma+1))(p-q)t^{p-2(\sigma+1)}\|u\|_{p,b}^p}{(2(\sigma+1)-q)\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)}} \\ &= \frac{t}{2(\sigma+1)} \left(\frac{d}{dt} \Lambda_e(tu) \right).\end{aligned}\quad (1-8)$$

Como decorrência da hipótese (a_1) , observamos que $\frac{d}{dt}\Lambda_e(tu) > 0$, para todo $t > 0$. Esse fato, juntamente com a equação (1-8), assegura que $\Lambda_n(tu) > \Lambda_e(tu)$, para todo $t > 0$ e $u \in X \setminus \{0\}$. Isso conclui a prova. \square

Antes de avançarmos com os próximos resultados, destacamos o comportamento geométrico das funções $\Lambda_n(tu)$ e $\Lambda_e(tu)$, para todo $t > 0$, mencionadas na Proposição 1.8, na Observação 1.9 e na Proposição 1.10.

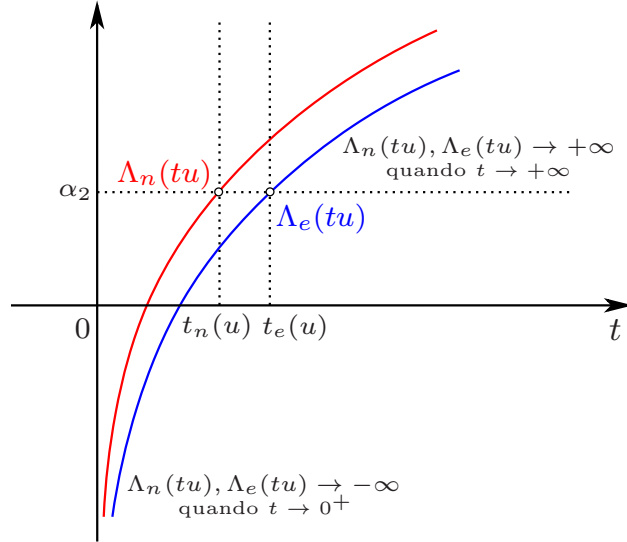


Figura 1.1: Comportamento geométrico de $\Lambda_n(tu)$ e $\Lambda_e(tu)$.

A seguir, apresentamos propriedades fundamentais dos quocientes de Rayleigh não lineares previamente definidos. A demonstração destas propriedades é simples e direta.

Observação 1.11 *Salientamos que a definição de \mathcal{N} implica em*

- (a) $R_n(tu) = \lambda$ se, e somente se, $J'(tu)tu = 0$ para todo $t > 0$;
- (b) $R_n(tu) > \lambda$ se, e somente se, $J'(tu)tu > 0$ para todo $t > 0$;
- (c) $R_n(tu) < \lambda$ se, e somente se, $J'(tu)tu < 0$ para todo $t > 0$.

Observação 1.12 *Salientamos que a definição de \mathcal{E} implica em*

- (a) $R_e(tu) = \lambda$ se, e somente se, $J(tu) = 0$ para todo $t > 0$;

- (b) $R_e(tu) > \lambda$ se, e somente se, $J(tu) > 0$ para todo $t > 0$;
(c) $R_e(tu) < \lambda$ se, e somente se, $J(tu) < 0$ para todo $t > 0$.

Proposição 1.13 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) e (V_1) . Assuma que $u \in X \setminus \{0\}$ satisfaz $R_e(tu) = \lambda$. Defina uma função $\mathcal{Q}_\beta : X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{Q}_\beta(u) = \frac{1}{q} \|u\|_{q,a}^q$, para todo $u \in X \setminus \{0\}$. Então,*

$$\frac{d}{dt} R_e(tu) = \frac{1}{t} \frac{J'(tu)tu}{\mathcal{Q}_\beta(tu)},$$

para todo $t > 0$. Como produto, deduzimos as seguintes propriedades:

- (a) $\frac{d}{dt} R_e(tu) = 0$ se, e somente se, $J'(tu)tu = 0$ para todo $t > 0$;
(b) $\frac{d}{dt} R_e(tu) > 0$ se, e somente se, $J'(tu)tu > 0$ para todo $t > 0$;
(c) $\frac{d}{dt} R_e(tu) < 0$ se, e somente se, $J'(tu)tu < 0$ para todo $t > 0$.

Prova. Sabemos pela definição (1-6) que

$$\mathcal{Q}_\beta(tu)R_e(tu) = \frac{1}{2} \|tu\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)} \|\nabla(tu)\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{1}{p} \|tu\|_{p,b}^p.$$

Após derivar a equação anterior em relação a t e multiplicar o resultado por $t > 0$, obtemos que

$$tR_e(tu) \frac{d}{dt} \mathcal{Q}_\beta(tu) + t\mathcal{Q}_\beta(tu) \frac{d}{dt} R_e(tu) = \|tu\|^2 + \alpha_2 \|\nabla(tu)\|_2^{2(\sigma+1)} - \|tu\|_{p,b}^p.$$

Esse fato, juntamente com $R_e(tu) = \lambda$, garante que

$$t\mathcal{Q}_\beta(tu) \frac{d}{dt} R_e(tu) = \|tu\|^2 + \alpha_2 \|\nabla(tu)\|_2^{2(\sigma+1)} - \lambda \|tu\|_{q,a}^q - \|tu\|_{p,b}^p.$$

Um simples cálculo mostra que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R_e(tu) &= \frac{1}{t} \frac{\|tu\|^2 + \alpha_2 \|\nabla(tu)\|_2^{2(\sigma+1)} - \lambda \|tu\|_{q,a}^q - \|tu\|_{p,b}^p}{\mathcal{Q}_\beta(tu)} \\ &= \frac{1}{t} \frac{J'(tu)(tu)}{\mathcal{Q}_\beta(tu)}. \end{aligned}$$

Logo, usando as mesmas ideias discutidas em [42], concluímos a demonstração. \square

Seguindo a linha da Proposição 1.13, apresentamos agora o próximo resultado:

Proposição 1.14 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) e (V_1) . Assuma que $u \in X \setminus \{0\}$ satisfaz $R_n(tu) = \lambda$. Defina uma função $\mathcal{Q}_\theta : X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{Q}_\theta(u) = \|u\|_{q,a}^q$, para todo $u \in X \setminus \{0\}$. Então,*

$$\frac{d}{dt} R_n(tu) = \frac{1}{t} \frac{J''(tu)(tu, tu)}{\mathcal{Q}_\theta(tu)},$$

para todo $t > 0$. Consequentemente, temos as seguintes propriedades:

- (a) $\frac{d}{dt}R_n(tu) = 0$ se, e somente se, $J''(tu)(tu, tu) = 0$ para todo $t > 0$;
 (b) $\frac{d}{dt}R_n(tu) > 0$ se, e somente se, $J''(tu)(tu, tu) > 0$ para todo $t > 0$;
 (c) $\frac{d}{dt}R_n(tu) < 0$ se, e somente se, $J''(tu)(tu, tu) < 0$ para todo $t > 0$.

Prova. Sabemos pela definição (1-5) que

$$\mathcal{Q}_\theta(tu)R_n(tu) = t^2\|u\|^2 + \alpha_2 t^{2(\sigma+1)}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - t^p\|u\|_{p,b}^p.$$

Derivando a equação acima em relação a t e multiplicando o resultado por $t > 0$, chegamos à

$$\begin{aligned} tR_n(tu)\frac{d}{dt}\mathcal{Q}_\theta(tu) + t\mathcal{Q}_\theta(tu)\frac{d}{dt}R_n(tu) &= 2(\sigma+1)\alpha_2\|\nabla(tu)\|_2^{2(\sigma+1)} \\ &\quad + 2\|tu\|^2 - p\|tu\|_{p,b}^p. \end{aligned} \quad (1-9)$$

É fácil checar que $t\frac{d}{dt}\mathcal{Q}_\theta(tu) = q\|tu\|_{q,a}^q$, para todo $t > 0$. Essa condição, juntamente com $R_n(tu) = \lambda$, assegura que

$$t\mathcal{Q}_\theta(tu)\frac{d}{dt}R_n(tu) = 2\|tu\|^2 + 2(\sigma+1)\alpha_2\|\nabla(tu)\|_2^{2(\sigma+1)} - \lambda q\|tu\|_{q,a}^q - p\|tu\|_{p,b}^p.$$

Como produto, mencionamos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}R_n(tu) &= \frac{2\|tu\|^2 + 2(\sigma+1)\alpha_2\|\nabla(tu)\|_2^{2(\sigma+1)} - \lambda q\|tu\|_{q,a}^q - p\|tu\|_{p,b}^p}{t\mathcal{Q}_\theta(tu)} \\ &= \frac{1}{t} \frac{J''(tu)(tu, tu)}{\mathcal{Q}_\theta(tu)}. \end{aligned}$$

Logo, utilizando as mesmas ideias discutidas em [42], concluímos a prova. \square

O propósito aqui é demonstrar que a função S_n , conforme definida na Definição 1.6, pode ser simplificada. Essa simplificação será muito útil nos resultados subsequentes. Claramente, é fácil perceber, a partir de (1-7), que

$$(2(\sigma+1) - q)\alpha_2\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + (2 - q)t_n^{-2\sigma}(u)\|u\|^2 = (p - q)t_n^{p-2(\sigma+1)}(u)\|u\|_{p,b}^p.$$

Multiplicando a equação acima por $t_n^{2(\sigma+1)-q}(u) > 0$, encontramos

$$\begin{aligned} t_n^{p-q}(u)\|u\|_{p,b}^p &= \left(\frac{2(\sigma+1) - q}{p - q}\right) \alpha_2 t_n^{2(\sigma+1)-q}(u)\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} \\ &\quad + \left(\frac{2 - q}{p - q}\right) t_n^{2-q}(u)\|u\|^2. \end{aligned}$$

Esse fato, em conjunto com a Definição 1.6 e a equação (1-5), resulta em

$$\begin{aligned} S_n(u) &= \frac{\left(1 - \frac{2-q}{p-q}\right) t_n^{2-q}(u)\|u\|^2 + \left(1 - \frac{2(\sigma+1)-q}{p-q}\right) \alpha_2 t_n^{2(\sigma+1)-q}(u)\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)}}{\|u\|_{q,a}^q} \\ &= \frac{(p-2)\|t_n(u)u\|^2 + (p-2(\sigma+1))\alpha_2\|\nabla(t_n(u)u)\|_2^{2(\sigma+1)}}{(p-q)\|t_n(u)u\|_{q,a}^q}. \end{aligned} \quad (1-10)$$

É importante enfatizar que as mesmas condições estabelecidas para a função S_n se aplicam igualmente à função S_e , embora tenhamos omitido os detalhes.

O seguinte resultado assegura que a função t_n é de classe C^1 . Esta constatação é fundamental para demonstrarmos a continuidade da função S_n .

Proposição 1.15 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) e (V_1) . Seja $\mathcal{D} : (0, +\infty) \times X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1((0, +\infty) \times X \setminus \{0\}; \mathbb{R})$ dada por $\mathcal{D}(t, u) = \alpha_2 - \Lambda_n(tu)$. Então a função t_n é de classe $C^1(X \setminus \{0\}; \mathbb{R})$.*

Prova. Não é difícil verificar que $\mathcal{D} \in C^1((0, +\infty) \times X \setminus \{0\}; \mathbb{R})$. Note que $\mathcal{D}(t, u) = 0$ se, e somente se, $t = t_n(u)$. Uma simples manipulação algébrica mostra que

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D}(t, u) = -\frac{1}{t} \left[\frac{2\sigma(2-q)\|tu\|^2 + (p-q)(p-2(\sigma+1))\|tu\|_{p,b}^p}{(2(\sigma+1)-q)\|\nabla(tu)\|_2^{2(\sigma+1)}} \right].$$

Nesse caso, usando a hipótese (a_1) , mencionamos que $\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D}(t, u) \neq 0$, para cada $(t, u) \in (0, +\infty) \times X \setminus \{0\}$ de tal forma que $\mathcal{D}(t, u) = 0$. Portanto, o Teorema da Função Implícita [25, Teorema 2.4.1] assegura que $t_n \in C^1(X \setminus \{0\}; \mathbb{R})$. \square

Observação 1.16 *Assuma que (m_1) , (a_1) , (a_2) e (V_1) sejam satisfeitas. Defina uma função $\mathcal{D}_1 : (0, +\infty) \times X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1((0, +\infty) \times X \setminus \{0\}; \mathbb{R})$ dada por $\mathcal{D}_1(t, u) = \alpha_2 - \Lambda_e(tu)$. Então a função t_e é de classe $C^1(X \setminus \{0\}; \mathbb{R})$. A comprovação desse fato segue os mesmos princípios discutidos na Proposição 1.15.*

Neste momento, dedicaremos nossa atenção às fibras dos funcionais R_n e R_e , conforme definidos em (1-5) e (1-6), respectivamente. Para isso, consideramos as funções de fibras definidas por $Q_n(t) := R_n(tu)$ e $Q_e(t) := R_e(tu)$, onde

$$Q_n(t) = \frac{1}{\|u\|_{q,a}^q} \left[t^{2-q}\|u\|^2 + t^{2(\sigma+1)-q}\alpha_2\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - t^{p-q}\|u\|_{p,b}^p \right], \quad (1-11)$$

e

$$Q_e(t) = \frac{q}{\|u\|_{q,a}^q} \left[\frac{t^{2-q}}{2}\|u\|^2 + \frac{t^{2(\sigma+1)-q}}{2(\sigma+1)}\alpha_2\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{t^{p-q}}{p}\|u\|_{p,b}^p \right]. \quad (1-12)$$

Como consequência, deduzimos pela hipótese (a_1) que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{Q_n(t)}{t^{2-q}} = \frac{\|u\|^2}{\|u\|_{q,a}^q} > 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Q_n(t)}{t^{p-q}} = -\frac{\|u\|_{p,b}^p}{\|u\|_{q,a}^q} < 0.$$

Além disso, destacam-se as seguintes derivadas:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d}{dt} Q_n(t)}{t^{1-q}} = \frac{(2-q)\|u\|^2}{\|u\|_{q,a}^q} > 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d}{dt} Q_n(t)}{t^{p-q-1}} = -\frac{(p-q)\|u\|_{p,b}^p}{\|u\|_{q,a}^q} < 0. \quad (1-13)$$

As condições acima demonstram que as fibras $Q_n(t)$ e $\frac{d}{dt}Q_n(t)$ são positivas para todo $t > 0$ suficientemente pequeno e negativas para todo $t > 0$ suficientemente grande. Assim, para cada $u \in X \setminus \{0\}$, temos que existe pelo menos um ponto $t_n(u)$ de máximo local para $Q_n(t)$. Ainda mais, ao examinarmos a equação (1-12), podemos concluir que essas mesmas condições se aplicam as fibras $Q_e(t)$ e $\frac{d}{dt}Q_e(t)$, nas quais omitimos os detalhes.

Proposição 1.17 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) e (V_1) . Então,*

$$Q_n(t) - Q_e(t) = \frac{t}{q} \left(\frac{d}{dt} Q_e(t) \right), \quad t > 0. \quad (1-14)$$

Como produto, temos que $Q_n(t) = Q_e(t)$ se, e somente se, $t = t_e(u)$. Em particular, obtemos que $Q_n(t) > Q_e(t)$, para cada $t \in (0, t_e(u))$ e $Q_n(t) < Q_e(t)$, para cada $t \in (t_e(u), +\infty)$. Além disso, encontramos que $t_n(u) < t_e(u)$, para cada $u \in X \setminus \{0\}$.

Prova. Combinando as equações (1-11) e (1-12), inferimos que

$$\begin{aligned} & Q_n(t) - Q_e(t) \\ = & \frac{\left(\frac{2-q}{2q}\right) t^{2-q} \|u\|^2 + \alpha_2 \left(\frac{2(\sigma+1)-q}{2q(\sigma+1)}\right) t^{2(\sigma+1)-q} \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \left(\frac{p-q}{pq}\right) t^{p-q} \|u\|_{p,b}^p}{\frac{1}{q} \|u\|_{q,a}^q} \\ = & \frac{t}{q} \left(\frac{d}{dt} Q_e(t) \right), \end{aligned}$$

para todo $t > 0$. Note que o restante da prova segue utilizando a equação (1-14). Optamos por omitir os detalhes. \square

Proposição 1.18 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (V_1) e $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Então a função S_n é 0-homogênea, isto é, $S_n(Ku) = S_n(u)$ para todo $K > 0$ e $u \in X \setminus \{0\}$. Além disso, a função S_n é contínua.*

Prova. Seja $K > 0$. Então

$$S_n(Ku) = \sup_{t>0} R_n(tKu) = \sup_{\tilde{c}>0} R_n(\tilde{c}u) = S_n(u),$$

onde $\tilde{c} = tK > 0$. Agora, mostraremos que a função S_n é sequencialmente contínua. Para isso, tomemos uma sequência $(u_k) \in X$ na qual u_k converge fortemente para u em X , para algum $u \in X \setminus \{0\}$ tal que $|S_n(u_k) - S_n(u)| \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow +\infty$. Com efeito, observe que $u_k \rightarrow u$ fortemente em X se, e somente se, $\|u_k - u\| \rightarrow 0$. Nesse caso, usando a hipótese (V_1) , deduzimos que

$$\nabla u_k \rightarrow \nabla u \text{ em } L^2(\mathbb{R}^N) \times \dots \times L^2(\mathbb{R}^N), \text{ quando } k \rightarrow +\infty.$$

Consequentemente, aplicando o Teorema da Convergência Dominada e o fato de que t_n é uma função contínua, obtemos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} t_n^{2-q}(u_k) \|u_k\|^2 = t_n^{2-q}(u) \|u\|^2,$$

e

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_2 t_n^{2(\sigma+1)-q}(u_k) \|\nabla u_k\|_2^{2(\sigma+1)} = \alpha_2 t_n^{2(\sigma+1)-q}(u) \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)}.$$

Além disso, é simples constatar que $u_k \rightarrow u$ em $L^r(B(0, R))$, para cada $r \in [2, 2^*)$, $u_k(x) \rightarrow u(x)$ *q.t.p.* em $B(0, R)$ e $|u_k| \leq h_r$ tal que $h_r \in L^r(B(0, R))$, para cada $r \in [2, 2^*)$. Não é difícil ver que

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x) |u_k - u|^q dx = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0, R)} a(x) |u_k - u|^q dx + \int_{B(0, R)} a(x) |u_k - u|^q dx.$$

Desta forma, ao tomar $z_k = u_k - u$ e escolher um valor arbitrário $R > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de tal maneira que

$$\int_{B(0, R)} |z_k|^{qr'_1} dx < \varepsilon, \quad k \geq k_0. \quad (1-15)$$

Por outro lado, pela hipótese (a_2) , existe um valor arbitrário $R > 0$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0, R)} |a(x)|^{r_1} dx < \varepsilon. \quad (1-16)$$

Logo, utilizando a desigualdade de Hölder juntamente com a imersão contínua $X \hookrightarrow L^{qr'_1}(\mathbb{R}^N)$ para cada $qr'_1 \in [2, 2^*)$ e estimativa (1-16), mencionamos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0, R)} a(x) |z_k|^q dx &\leq \|z_k\|_{qr'_1}^q \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0, R)} |a(x)|^{r_1} dx \right)^{\frac{1}{r_1}} \\ &\leq S_{qr'_1}^q \|z_k\|^q \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0, R)} |a(x)|^{r_1} dx \right)^{\frac{1}{r_1}} \\ &\leq C_3 \varepsilon^{\frac{1}{r_1}}. \end{aligned}$$

Agora, usando novamente a desigualdade de Hölder, em conjunto com a estimativa (1-15) e a hipótese (a_2) , temos

$$\int_{B(0, R)} a(x) |z_k|^q dx \leq \|a\|_{r_1} \left(\int_{B(0, R)} |z_k|^{qr'_1} dx \right)^{\frac{1}{r_1}} \leq C_4 \varepsilon^{\frac{1}{r_1}}.$$

No que segue, visto que $\varepsilon > 0$ é arbitrário, a identidade de Brezis-Lieb garante que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |u_k|^q dx = \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |u|^q dx. \quad (1-17)$$

De modo análogo, obtemos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_k|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx. \quad (1-18)$$

Portanto, a função S_n é contínua. Isso finaliza a prova. \square

Observação 1.19 *Assuma que (m_1) , (a_1) , (a_2) e (V_1) sejam satisfeitas. Então, utilizando a Proposição 1.18, afirmamos que a função t_n é (-1) -homogênea. Com efeito, veja que*

$$\begin{aligned} R_n(t_n(Ku)(Ku)) &= \sup_{t>0} R_n(tKu) = S_n(Ku) = S_n(u) \\ &= R_n(t_n(u)u) = R_n\left(\frac{t_n(u)}{K}(Ku)\right), \end{aligned}$$

para todo $K > 0$ e $u \in X \setminus \{0\}$. Consequentemente, considerando a unicidade do ponto crítico do funcional $R_n(tu)$, podemos concluir que $t_n(Ku) = K^{-1}t_n(u)$. Similarmente, observamos também que a função t_e é (-1) -homogênea.

O resultado subsequente garante que o funcional energia é fracamente semicontínuo inferiormente. Esse aspecto desempenha um papel fundamental ao demonstrar que toda sequência minimizante possui uma subsequência convergente.

Lema 1.20 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (V_1) e $\lambda > 0$. Assuma que existe uma sequência $(u_k) \in X$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ em X . Então os funcionais $u \mapsto J(u)$, $u \mapsto J'(u)u$ e $u \mapsto J''(u)(u, u)$ são fracamente semicontínuos inferiormente.*

Prova. Inicialmente, afirmamos que o funcional $u \mapsto J(u)$ é fracamente semicontínuo inferiormente. Com efeito, seja $(u_k) \in X$ uma sequência tal que $u_k \rightharpoonup u$ em X , para algum $u \in X \setminus \{0\}$. Não é difícil checar que $\|\cdot\|$ é fracamente semicontínua inferiormente, isto é,

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|u_k\|^2.$$

Além disso, utilizando as mesmas ideias discutidas na Proposição 1.18, juntamente com a hipótese (a_2) e $u_k \rightharpoonup u$ em X , tem-se que

$$\|u\|_{q,a}^q = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k\|_{q,a}^q \quad \text{e} \quad \|u\|_{p,b}^p = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k\|_{p,b}^p.$$

Agora, afirmamos que a função $G : X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $G(u) = \|\nabla u\|_2$ é convexa e contínua. É fácil ver que a função G é convexa. Para provar que G é contínua, suponha que existe uma sequência $(u_k) \in X$ tal que $u_k \rightarrow u$ em X se, e somente se, $\|u_k - u\| \rightarrow 0$ em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Nesse caso, a definição de produto interno e a hipótese (V_1) implicam que

$\nabla u_k \rightarrow \nabla u$ em $L^2(\mathbb{R}^N) \times \dots \times L^2(\mathbb{R}^N)$, quando $k \rightarrow +\infty$.

Assim, mencionamos que $\|\nabla u_k\| \rightarrow \|\nabla u\|$ em \mathbb{R} , demonstrando assim que G é uma função contínua. Como consequência, obtemos que a função G é fracamente semicontínua inferiormente (veja [16, Seção 3.3]). As últimas afirmações mostram que

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{\lambda}{q}\|u\|_{q,a}^q - \frac{1}{p}\|u\|_{p,b}^p \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\|u_k\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)}\|\nabla u_k\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{\lambda}{q}\|u_k\|_{q,a}^q - \frac{1}{p}\|u_k\|_{p,b}^p \right) \\ &= \liminf_{k \rightarrow +\infty} J(u_k). \end{aligned}$$

Do mesmo modo, constatamos que $u \mapsto J'(u)u$ e $u \mapsto J''(u)(u, u)$ são fracamente semicontínuos inferiormente. Com essa observação, o lema está demonstrado. \square

Observação 1.21 *Assuma que (m_1) , (a_1) , (a_2) e (V_1) sejam satisfeitas. Dada uma sequência $(u_k) \in X$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ em X , temos que*

$$S_n(u) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} S_n(u_k).$$

A demonstração desta afirmação é simples e segue exatamente o mesmo raciocínio do Lema 1.20. É importante ressaltar que estamos demonstrando a semicontinuidade inferior fraca de S_n apenas para a sequência $(u_k) \in X$.

Proposição 1.22 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (V_1) e $\lambda > 0$. Então existe uma constante positiva $\delta_b = \delta_b(p, q, S_{pr'_2}^p, \|b\|_{r_2})$ de tal forma que $\|v\| \geq \delta_b$, para todo $v = t_n(u)u$. Além disso, a função S_n é limitada por baixo por uma constante positiva $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\delta_b, S_{qr'_1}^q, \|a\|_{r_1})$.*

Prova. Uma vez que $t_n(u) > 0$ é o único ponto de máximo local para o funcional $R_n(tu)$, temos que $\frac{d}{dt}R_n(tu)|_{t=t_n(u)} = 0$ tal que

$$(2-q)t^{1-q}\|u\|^2 + \alpha_2(2(\sigma+1)-q)t^{2\sigma+1-q}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} = (p-q)t^{p-q-1}\|u\|_{p,b}^p,$$

onde $t = t_n(u)$. Assim, por meio de uma simples manipulação algébrica utilizando a hipótese (a_1) e a imersão contínua $X \hookrightarrow L^{pr'_2}(\mathbb{R}^N)$ para cada $pr'_2 \in [2, 2^*)$, obtemos

$$\begin{aligned} (2-q)\|v\|^2 &\leq (2-q)\|v\|^2 + \alpha_2(2(\sigma+1)-q)\|\nabla v\|_2^{2(\sigma+1)} \\ &\leq (p-q)S_{pr'_2}^p\|b\|_{r_2}\|v\|^p, \end{aligned}$$

para todo $v = t_n(u)u$. A última desigualdade mostra que

$$\|v\| \geq \left[\frac{2-q}{(p-q)S_{pr'_2}^p\|b\|_{r_2}} \right]^{\frac{1}{p-2}} =: \delta_b. \quad (1-19)$$

Adicionalmente, a partir da equação (1-10) e da hipótese (a_1) , temos que

$$S_n(v) \geq \left(\frac{p-2}{p-q} \right) \frac{\|v\|^2}{\|v\|_{q,a}^q}. \quad (1-20)$$

Como resultado, a imersão contínua $X \hookrightarrow L^{qr'_1}(\mathbb{R}^N)$ para cada $qr'_1 \in [2, 2^*)$, juntamente com a estimativa (1-19) e hipótese (a_1) , asseguram que

$$S_n(v) \geq \left(\frac{p-2}{p-q} \right) \frac{\|v\|^{2-q}}{S_{qr'_1}^q \|a\|_{r_1}} \geq \left(\frac{p-2}{p-q} \right) \frac{\delta_b^{2-q}}{S_{qr'_1}^q \|a\|_{r_1}} =: \mathcal{C}.$$

Isso completa a prova. \square

Proposição 1.23 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) e (V_1) . Então existe $u \in X \setminus \{0\}$ de modo que $\lambda^* = \inf_{w \in X \setminus \{0\}} S_n(w) = S_n(u)$.*

Prova. Considere $(u_k) \in X \setminus \{0\}$ uma sequência minimizante para λ^* . Desse modo, defina uma sequência normalizada $w_k = \frac{t_n(u_k)u_k}{\|t_n(u_k)u_k\|} = \frac{v_k}{\|v_k\|}$ com $\|w_k\| = 1$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Combinando esse fato com a Proposição 1.18, deduzimos que

$$S_n(v_k) = S_n(w_k) \rightarrow \lambda^*, \text{ quando } k \rightarrow +\infty.$$

Assim, como a sequência (w_k) é limitada em X , tem-se que existe $w \in X$ de tal forma que $w_k \rightharpoonup w$ em X . Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$S_n(w_k) = \left(\frac{p-2}{p-q} \right) \frac{1}{\|w_k\|_{q,a}^q} + \alpha_2 \left(\frac{p-2(\sigma+1)}{p-q} \right) \frac{\|\nabla w_k\|_2^{2(\sigma+1)}}{\|w_k\|_{q,a}^q} \leq \lambda^* + \varepsilon,$$

para todo $k \geq k_0$. Sob esta condição, afirmamos que $w \neq 0$. De fato, suponha por contradição que $w = 0$. Isso significa que $w_k \rightarrow 0$ em X , quando $k \rightarrow +\infty$. A última afirmação, aliada à equação (1-17), implica que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|w_k\|_{q,a}^q = 0.$$

Como resultado, encontramos

$$\begin{aligned} 0 < \left(\frac{p-2}{p-q} \right) &\leq \left(\frac{p-2}{p-q} \right) + \alpha_2 \left(\frac{p-2(\sigma+1)}{p-q} \right) \|\nabla w_k\|_2^{2(\sigma+1)} \\ &\leq (\lambda^* + \varepsilon) \|w_k\|_{q,a}^q \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $k \rightarrow +\infty$. Isso implica em uma contradição. Logo, w é sempre diferente da função nula. Assim, levando em conta (1-10), inferimos que

$$\lambda^* = \liminf_{k \rightarrow +\infty} S_n(w_k) \geq S_n(w) \geq \lambda^*.$$

Portanto, existe uma função $w \in X \setminus \{0\}$ de modo que $\lambda^* > 0$ é atingido. Com isso, a proposição está demonstrada. \square

Neste momento, considere um conjunto aberto $U := \{u \in X \setminus \{0\} : \lambda < S_n(u)\}$. A próxima proposição garante, que para qualquer função $u \in U$, a identidade $\phi_u(t) = J(tu)$ possui exatamente dois pontos críticos distintos.

Proposição 1.24 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (V_1) e $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Então para cada $u \in U$, a identidade $\phi_u(t) = J(tu)$ possui exatamente dois pontos críticos distintos, a saber, $0 < t^{n,+}(u) < t_n(u) < t^{n,-}(u)$. Além disso, temos as seguintes propriedades:*

- (a) *O número positivo $t^{n,+}(u)$ é um ponto de mínimo local para identidade ϕ_u com $t^{n,+}(u)u \in \mathcal{N}^+$;*
- (b) *O número positivo $t^{n,-}(u)$ é um ponto de máximo local para identidade ϕ_u com $t^{n,-}(u)u \in \mathcal{N}^-$;*
- (c) *Os conjuntos de Nehari \mathcal{N}^+ e \mathcal{N}^- são não vazios;*
- (d) $J(t^{n,+}(u)u) = \min_{0 \leq t \leq t^{n,-}(u)} J(tu)$ e $J(t^{n,-}(u)u) = \max_{t \geq t_n(u)} J(tu)$;
- (e) *As funções $u \mapsto t^{n,+}(u)$ e $u \mapsto t^{n,-}(u)$ são de classe $C^1(U; \mathbb{R})$.*

Prova. Observe que $tu \in \mathcal{N}$ se, e somente se, $Q_n(t) = \lambda$. Em outras palavras, temos que $tu \in \mathcal{N}$ se, e somente se, t é a raiz da equação $Q_n(t) = \lambda$. Um cálculo simples mostra que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} Q_n(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} Q_n(t) = -\infty.$$

Essas condições, aliadas à (1-13), asseguram que existe um único $t_n(u) > 0$ tal que $Q_n(t)$ é crescente em $(0, t_n(u))$, decrescente em $(t_n(u), +\infty)$ e $\frac{d}{dt}Q_n(t)|_{t=t_n(u)} = 0$. Além disso, para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$ e $u \in U$, tem-se que

$$0 < \lambda < \lambda^* \leq S_n(u) = Q_n(t_n(u)) = R_n(t_n(u)u), \quad u \in X \setminus \{0\}.$$

Como produto, verificamos que a equação $Q_n(t) = \lambda$ possui precisamente duas raízes, a saber, $t^{n,+}(u) < t_n(u)$ e $t^{n,-}(u) > t_n(u)$. Vale a pena ressaltar que as raízes $t^{n,+}(u)$ e $t^{n,-}(u)$ são pontos críticos para identidade $\phi_u(t) = J(tu)$. Isso significa que

$$\frac{d}{dt}Q_n(t) \Big|_{t=t^{n,+}(u)} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}Q_n(t) \Big|_{t=t^{n,-}(u)} < 0. \quad (1-21)$$

Desse modo, utilizando a desigualdade (1-21) e a Proposição 1.14, inferimos

$$0 < \frac{d}{dt}Q_n(t) \Big|_{t=t^{n,+}(u)} = \frac{1}{t^{n,+}(u)} \frac{J''(t^{n,+}(u)u)(t^{n,+}(u)u, t^{n,+}(u)u)}{\mathcal{Q}_\theta(t^{n,+}(u)u)}.$$

Uma vez que $\mathcal{Q}_\theta(t^{n,+}(u)u) > 0$, segue que $J''(t^{n,+}(u)u)(t^{n,+}(u)u, t^{n,+}(u)u) > 0$. Com isso, encerramos a demonstração do item (a). É relevante destacar que a

prova do item (b) replica precisamente as ideias apresentadas na prova do item (a). Ressaltamos que a comprovação do item (c) é derivada das conclusões obtidas nos itens (a) e (b). Nestes últimos, asseguramos a existência de $t^{n,+}(u) < t^{n,-}(u)$ de modo que $t^{n,+}(u)u \in \mathcal{N}^+$ e $t^{n,-}(u)u \in \mathcal{N}^-$, para cada $u \in U$.

Neste momento, sabemos que para todo $t > 0$ e $u \in U$ que

$$\frac{d}{dt}\phi_u(t) = t^{q-1}\|u\|_{q,a}^q(Q_n(t) - \lambda).$$

Assim, podemos deduzir que $\frac{d}{dt}\phi_u(t) < 0$ para todo $t \in [0, t^{n,+}(u))$, $\frac{d}{dt}\phi_u(t) > 0$ para todo $t \in (t^{n,+}(u), t^{n,-}(u))$ e $\frac{d}{dt}\phi_u(t)|_{t=t^{n,+}(u)} = 0$. Dessa maneira, obtemos

$$J(t^{n,+}(u)u) = \min_{0 \leq t \leq t^{n,-}(u)} J(tu).$$

No que segue, temos que $\frac{d}{dt}\phi_u(t) > 0$ para todo $t \in [t^{n,+}(u), t^{n,-}(u))$, $\frac{d}{dt}\phi_u(t) < 0$ para todo $t \in (t^{n,-}(u), +\infty)$ e $\frac{d}{dt}\phi_u(t)|_{t=t^{n,-}(u)} = 0$. Esse fato implica que

$$J(t^{n,-}(u)u) = \max_{t \geq t^{n,+}(u)} J(tu).$$

Isso encerra a demonstração do item (d).

Por fim, para provar o item (e), defina uma função $\mathcal{Z}^\pm : (0, +\infty) \times X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{Z}^\pm(t, u) = J'(tu)tu$, para todo $u \in X \setminus \{0\}$ com $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Note que $tu \in \mathcal{N}$ se, e somente se, $\mathcal{Z}^\pm(t, u) = 0$. Como resultado, mencionamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{Z}^\pm(t, u) &= \frac{1}{t} [J''(tu)(tu, tu) + J'(tu)tu] \\ &= \frac{1}{t} J''(tu)(tu, tu) \neq 0, \end{aligned}$$

para cada $(t, u) \in (0, +\infty) \times X \setminus \{0\}$ de tal forma que $tu \in \mathcal{N}^\pm$. Portanto, o Teorema da Função Implícita [25, Teorema 2.4.1] nos fornece que as funções $u \mapsto t^{n,+}(u)$ e $u \mapsto t^{n,-}(u)$ são de classe $C^1(U; \mathbb{R})$. Isso completa a prova do item (e). \square

É importante ressaltar que todos os resultados mencionados anteriormente estão relacionados à função S_n . Nesse contexto, vale destacar que esses mesmos resultados são aplicáveis à função S_e , exigindo apenas algumas adaptações.

Proposição 1.25 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (V_1) e $\lambda > 0$. Então,*

- (a) *A função S_e é 0-homogênea e contínua;*
- (b) *Dada uma sequência $(u_k) \in X$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ em X , tem-se que*

$$S_e(u) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} S_e(u_k);$$

- (c) *A função S_e é limitada por baixo por uma constante positiva;*
- (d) *Existe $u \in X \setminus \{0\}$ de modo que $\lambda_* = \inf_{w \in X \setminus \{0\}} S_e(w) = S_e(u)$;*

(e) *Existem dois pontos $t^{e,+}(u)$ e $t^{e,-}(u)$ com $0 < t^{e,+}(u) < t_e(u) < t^{e,-}(u) < +\infty$ tal que $t^{e,+}(u)u \in \mathcal{E}$ e $t^{e,-}(u)u \in \mathcal{E}$. Adicionalmente, as funções $u \mapsto t^{e,+}(u)$ e $u \mapsto t^{e,-}(u)$ pertencem a $C^1(U_1; \mathbb{R})$ e*

$$0 < t^{n,+}(u) < t^{e,+}(u) < t_n(u) < t_e(u) < t^{n,-}(u) < t^{e,-}(u) < +\infty,$$

para cada $u \in U_1 := \{u \in X \setminus \{0\} : \lambda < S_e(u)\}$.

Prova. A comprovação desta proposição segue a mesma linha das Proposições 1.18, 1.22, 1.23 e 1.24. Optamos por omitir os detalhes. \square

A figura abaixo estabelece uma relação geométrica entre as funções fibras Q_n e Q_e , o funcional energia J e sua derivada, levando em consideração o tamanho do parâmetro $\lambda > 0$. Sua construção fundamenta-se nas Observações 1.11, 1.12 e 1.17, assim como nas Proposições 1.13, 1.14, 1.18, 1.22, 1.23, 1.24 e 1.25.

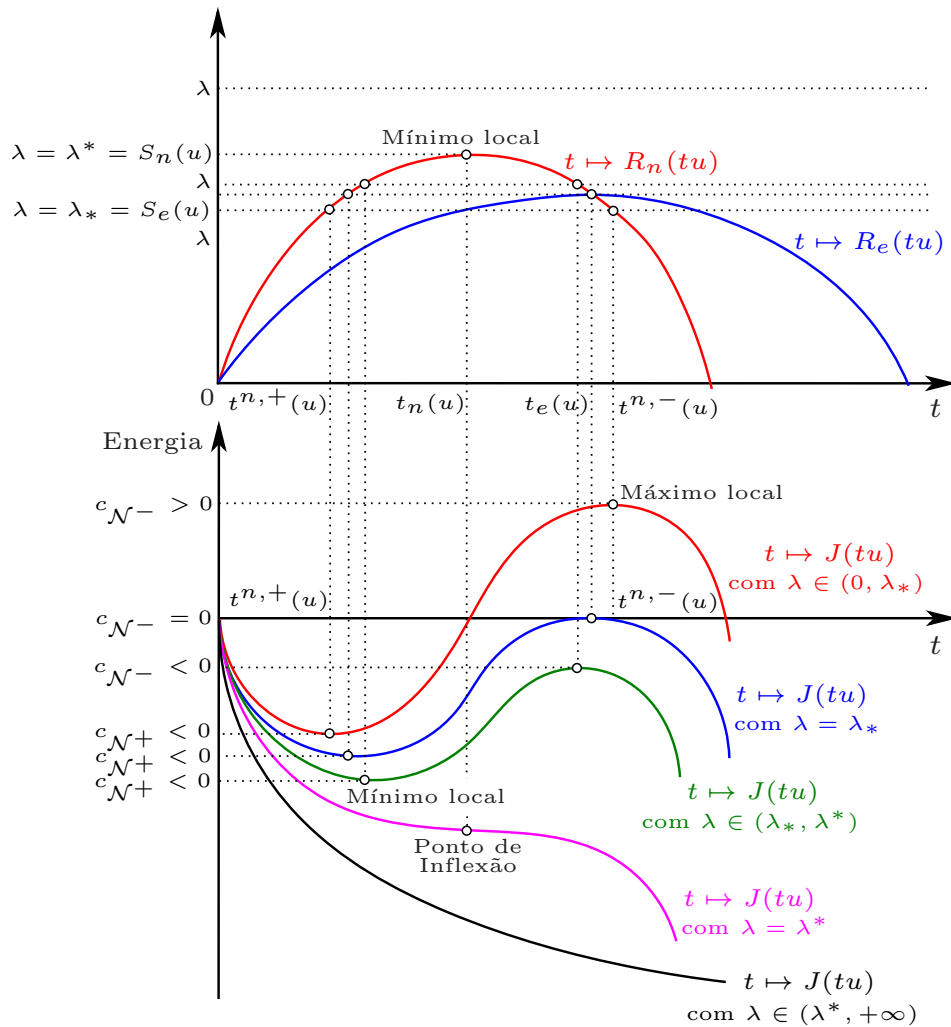


Figura 1.2: Relação geométrica entre os funcionais $R_n(tu)$, $R_e(tu)$ e $J(tu)$.

O próximo resultado estabelece uma relação de grande relevância entre os extremais λ^* e λ_* , cujo enunciado é dado da seguinte forma:

Proposição 1.26 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (V_1) e $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Então, obtemos que $S_n(u) > S_e(u)$, para todo $u \in X \setminus \{0\}$. Como produto, temos que $0 < \lambda_* < \lambda^* < +\infty$.*

Prova. Sabemos que $\frac{d}{dt}Q_e(t) = 0$, sempre que $t = t_e(u)$. Nesse caso, a equação (1-14) fornece que $Q_n(t_e(u)) - Q_e(t_e(u)) = 0$. É fácil checar que $Q_n(t_n(u)) > Q_n(t)$, para todo $t > 0$ com $t \neq t_n(u)$. Logo, tomando $t = t_e(u)$, encontramos que

$$S_n(u) - S_e(u) = Q_n(t_n(u)) - Q_e(t_e(u)) > Q_n(t_e(u)) - Q_e(t_e(u)) = 0.$$

Isso mostra que $S_n(u) > S_e(u)$. Ademais, as Proposições 1.22 e 1.25 garantem que existem constantes $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1 > 0$ de tal forma que $S_n(u) \geq \mathcal{C}$ e $S_e(u) \geq \mathcal{C}_1$. Esse fato implica que $\lambda^*, \lambda_* \in (0, +\infty)$. Como produto, temos pela Proposição 1.23 que existe uma função $u_* \in X \setminus \{0\}$ tal que $\lambda^* = S_n(u_*) = R_n(t_n(u_*)u_*)$. Dessa forma, para cada $u \in X \setminus \{0\}$, deduzimos que

$$\lambda^* = S_n(u_*) > S_e(u_*) \geq S_e(u) \geq \inf_{u \in X \setminus \{0\}} S_e(u) = \lambda_*.$$

Portanto, temos que $\lambda^* > \lambda_*$, e a proposição está provada. \square

Avançando em nosso estudo, os próximos resultados caracterizam topologicamente os conjuntos de Nehari \mathcal{N}^0 , \mathcal{N}^+ e \mathcal{N}^- . Essa caracterização é crucial para encontrarmos pontos críticos para funcional energia e, conseqüentemente, soluções fracas não triviais para o problema (\mathcal{P}_λ) . Um resultado inicialmente notável é que o conjunto \mathcal{N}^0 é sempre vazio, para todo λ no intervalo $(0, \lambda^*)$. Essa observação é comum em problemas elípticos não locais com uma não linearidade do tipo concavo-convexo. Nesse intervalo as projeções únicas só podem residir em \mathcal{N}^+ ou \mathcal{N}^- .

Proposição 1.27 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (V_1) e $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Então $\mathcal{N}^0 = \emptyset$.*

Prova. Suponha, por contradição que o conjunto de Nehari $\mathcal{N}^0 \neq \emptyset$. Nesse caso, considere $u \in \mathcal{N}^0$ uma função fixada. Isso significa que $J'(u)u = J''(u)(u, u) = 0$. Como consequência, inferimos que

$$\begin{cases} R_n(u) = \lambda, \\ \left. \frac{d}{dt}R_n(tu) \right|_{t=1} = 0, \quad u \neq 0. \end{cases} \quad (1-22)$$

É fácil ver que se $u \in \mathcal{N}^0$, então $t_n(u) = 1$ é o único ponto crítico para a fibra $t \mapsto R_n(tu)$. Esse fato, juntamente com a estimativa (1-22) mostram que

$$0 < \lambda < \lambda^* \leq S_n(u) = R_n(t_n(u)u) = R_n(u) = \lambda.$$

Isso é uma contradição. Portanto, tem-se que $\mathcal{N}^0 = \emptyset$. Isso completa a prova. \square

As duas próximas proposições asseguram que, dependendo do tamanho do parâmetro λ , o conjunto de Nehari \mathcal{N}^0 é sempre não vazio. Essa constatação traz consigo algumas dificuldades adicionais, sendo a principal delas a aplicação direta do método de Nehari. No entanto, é relevante notar que, por questões de completude e organização, não exploramos essas dificuldades neste capítulo.

Proposição 1.28 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (V_1) e $\lambda = \lambda^*$. Então $\mathcal{N}^0 \neq \emptyset$.*

Prova. Não é difícil verificar pela Proposição 1.23 que

$$\lambda = \lambda^* = \inf_{w \in X \setminus \{0\}} S_n(w) = S_n(u) = R_n(t_n(u)u), \quad u \in X \setminus \{0\}.$$

É importante ressaltar que a Observação 1.11 nos fornece que $R_n(t_n(u)u) = \lambda$ se, e somente se, $t_n(u)u \in \mathcal{N}$. Dessa forma, a Proposição 1.14 e o fato de que $t = t_n(u) > 0$ é um ponto de máximo local para $Q_n(t) = R_n(tu)$ implicam que

$$0 = \left. \frac{d}{dt} Q_n(t) \right|_{t=t_n(u)} = \frac{J''(t_n(u)u)(t_n(u)u, t_n(u)u)}{Q_\theta(t_n(u)u)}.$$

Isso significa que $J''(t_n(u)u)(t_n(u)u, t_n(u)u) = 0$ com $t_n(u)u \in \mathcal{N}^0$. \square

Proposição 1.29 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (V_1) e $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$. Então $\mathcal{N}^0 \neq \emptyset$.*

Prova. Inicialmente, afirmamos que a função S_n é ilimitada por cima. Com efeito, seja $(w_k) \in X \setminus \{0\}$ uma sequência tal que $\|w_k\| = 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$, onde $w_k \rightharpoonup 0$ em X e (w_k) não converge forte para a função zero em X . Dessa forma, utilizando a hipótese (a_2) , o Teorema da Convergência Dominada e o fato de que $w_k \rightharpoonup 0$ em X , obtemos que $\|u_k\|_{q,a}^q \rightarrow 0$ em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Esta afirmação, juntamente com a desigualdade (1-20), implica que

$$S_n(w_k) \geq \left(\frac{p-2}{p-q} \right) \frac{\|w_k\|^2}{\|w_k\|_{q,a}^q} \geq \left(\frac{p-2}{p-q} \right) \frac{1}{\|w_k\|_{q,a}^q} \rightarrow +\infty,$$

quando $k \rightarrow +\infty$. Consequentemente, para todo $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos que $S_n(w_k) > \lambda$. Note que a Proposição 1.23 mostra que existe $u \in X \setminus \{0\}$ de tal forma que $S_n(u) = \lambda^* < \lambda$. Além disso, é fácil provar que $u \neq lw_k$, para todo $l > 0$ e $k \in \mathbb{N}$. De fato, assumamos que $u = lw_j$, para algum $l > 0$ e $j \in \mathbb{N}$. Uma vez que a função S_n é 0-homogênea, deduzimos

$$\lambda = S_n(u) = S_n(lw_j) = S_n(w_j) > \lambda,$$

o que é uma contradição. Esta condição garante que $\tau u + (1-\tau)w_k \neq 0$, para cada $\tau \in [0, 1]$. Agora, defina uma função auxiliar $\mathcal{H} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{H}(\tau) = S_n(\tau u + (1 - \tau)w_k).$$

Observe que a função \mathcal{H} está bem definida e é contínua. A partir da definição da função \mathcal{H} , mencionamos que $\mathcal{H}(0) = S_n(w_k) > \lambda$, para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande e $\mathcal{H}(1) = S_n(u) < \lambda$ com $u \in X \setminus \{0\}$. Portanto, aplicando o Teorema do Valor Intermediário, tem-se que existe $\tau_0 \in (0, 1)$ tal que

$$S_n(\tau_0 u + (1 - \tau_0)w_k) = \lambda.$$

Escolhendo $d_k = \tau_0 u + (1 - \tau_0)w_k$, obtemos que $R_n(t_n(d_k)d_k) = S_n(d_k) = \lambda$. Isso significa que $t_n(d_k)d_k \in \mathcal{N}$. Em particular, pelos mesmos argumentos discutidos na Proposição 1.28, concluímos que $t_n(d_k)d_k \in \mathcal{N}^0$. Isso encerra a prova. \square

Salientamos que alguns dos elementos mencionados na Proposição 1.29 foram ilustrados na Figura 1.3 abaixo.

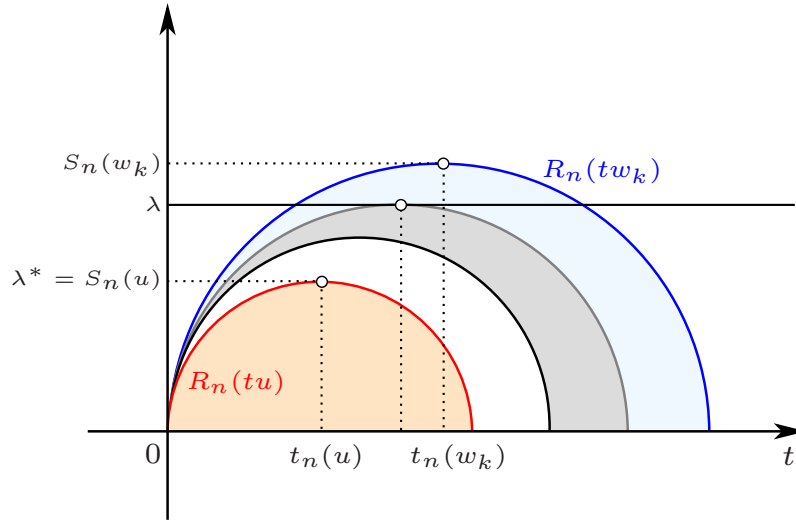


Figura 1.3: $S_n(w_k) > \lambda$, para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Dado que o conjunto \mathcal{N}^0 é sempre vazio, para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$, o próximo resultado garante que tanto \mathcal{N}^+ quanto \mathcal{N}^- são subvariedades de classe C^1 .

Lema 1.30 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (V_1) , $\lambda \in (0, \lambda^*)$ e $\mathcal{N}^0 = \emptyset$. Então o conjunto de Nehari $\mathcal{N} := \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$ é uma variedade de classe C^1 .*

Prova. Considere $\mathcal{N} = \mathcal{F}^{-1}(\{0\})$ onde $\mathcal{F} : X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida por

$$\mathcal{F}(u) = J'(u)u = \|u\|^2 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \lambda \|u\|_{q,a}^q - \|u\|_{p,b}^p, \quad u \in X \setminus \{0\}.$$

Enfatizamos que a função \mathcal{F} pertence a $C^1(X \setminus \{0\}; \mathbb{R})$ onde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(u)\varphi &= 2\langle u, \varphi \rangle + 2(\sigma + 1)\alpha_2 \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma} \\ &\quad - \lambda q \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^{q-2}u\varphi dx - p \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^{p-2}u\varphi dx \\ &= J'(u)\varphi + J''(u)(u, \varphi), \quad \varphi \in X \setminus \{0\}. \end{aligned} \tag{1-23}$$

A ideia principal é mostrar que $\mathcal{N} = \mathcal{F}^{-1}(\{0\})$ é uma variedade. Para isso, devemos provar que 0 é um valor regular de \mathcal{F} . De fato, tomando $u = \varphi$ em (1-23), temos

$$\mathcal{F}'(u)u = J''(u)(u, u) = \phi_u''(1) \neq 0, u \in \mathcal{N}^\pm.$$

Portanto, aplicando o Teorema da Função Implícita [25, Teorema 2.4.1], inferimos que \mathcal{N} é variedade de classe C^1 . Isso finaliza a prova. \square

O próximo lema estabelece que a única razão topológica pela qual \mathcal{N}^+ não é um subconjunto fechado de X é o fato de que a função nula é um dos seus pontos de aderência.

Lema 1.31 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (V_1) e $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Então $\overline{\mathcal{N}^+} = \mathcal{N}^+ \cup \{0\}$. Consequentemente, o conjunto de Nehari \mathcal{N}^+ não é fechado em X .*

Prova. Afirmamos que $\overline{\mathcal{N}^+} \subset \mathcal{N}^+ \cup \{0\}$. Com efeito, considere $u \in \overline{\mathcal{N}^+}$, onde existe uma sequência $(u_k) \subset \mathcal{N}^+$ tal que $u_k \rightarrow u$ em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Uma consequência imediata é

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} J'(u_k)u_k = J'(u)u = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} J''(u_k)(u_k, u_k) = J''(u)(u, u) \geq 0.$$

Assuma que $u \neq 0$ e $J''(u)(u, u) > 0$. Então, tem-se que $u \in \mathcal{N}^+$. Adicionalmente, assumamos que $u \neq 0$ e $J''(u)(u, u) = 0$, obtemos que $u \in \mathcal{N}^0$. Isso é uma contradição, uma vez que o conjunto \mathcal{N}^0 é vazio para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$. As últimas afirmações asseguram que $u \in \mathcal{N}^+ \cup \{0\}$. Portanto, $\overline{\mathcal{N}^+} \subset \mathcal{N}^+ \cup \{0\}$.

Por outro lado, afirmamos que $\mathcal{N}^+ \cup \{0\} \subset \overline{\mathcal{N}^+}$. Com efeito, sabemos que $\mathcal{N}^+ \subset \overline{\mathcal{N}^+}$. Logo, resta mostrar que existe uma sequência $(u_k) \in \mathcal{N}^+$ tal que $u_k \rightarrow 0$ em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Considere $(u_k) \in X \setminus \{0\}$ de modo que $\|u_k\|_{q,a}^q > 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, satisfazendo $u_k \rightarrow 0$ em X e (u_k) não converge forte para 0 em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Dessa forma, tem-se que

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \|u_k\|^2 = l > 0. \quad (1-24)$$

Além disso, a Proposição 1.24 assegura a existência de um único $t^{n,+}(u_k) > 0$ tal que $t^{n,+}(u_k)u_k \in \mathcal{N}^+$, para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Esse fato implica que

$$R_n(t^{n,+}(u_k)u_k) = \lambda \quad \text{e} \quad \left. \frac{d}{dt} R_n(tu_k) \right|_{t=t^{n,+}(u_k)} > 0.$$

Isso permite provar a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \alpha_2(2(\sigma + 1) - q)t^{2(\sigma+1)} \|\nabla u_k\|_2^{2(\sigma+1)} &= -(2(\sigma + 1) - q)t^2 \|u_k\|^2 \\ &\quad + \lambda(2(\sigma + 1) - q)t^q \|u_k\|_{q,a}^q \\ &\quad + (2(\sigma + 1) - q)t^p \|u_k\|_{p,b}^p, \end{aligned} \quad (1-25)$$

Desse modo, visto que $\frac{d}{dt}R_n(tu_k)|_{t=t^{n,+}(u_k)} > 0$, inferimos que

$$(2 - q)t\|u_k\|^2 + \alpha_2(2(\sigma + 1) - q)t^{2\sigma+1}\|\nabla u_k\|_2^{2(\sigma+1)} - (p - q)t^{p-1}\|u_k\|_{p,b}^p > 0.$$

Ao multiplicarmos a desigualdade acima por $t > 0$ e utilizarmos (1-25), mencionamos

$$\begin{aligned} 2\sigma t^2\|u_k\|^2 &\leq 2\sigma t^2\|u_k\|^2 + (p - 2(\sigma + 1))t^p\|u_k\|_{p,b}^p \\ &< \lambda(2(\sigma + 1) - q)t^q\|u_k\|_{q,a}^q, \end{aligned} \quad (1-26)$$

para todo $t = t^{n,+}(u_k) > 0$. Uma vez que (1-24) é satisfeita, escolha $\varepsilon > 0$ de tal forma que $l - \varepsilon > 0$. Como resultado, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_k\|^2 > l - \varepsilon$, sempre que $k \geq k_0$. Substituindo esta condição na desigualdade (1-26), observamos que

$$2\sigma(t^{n,+}(u_k))^2(l - \varepsilon) < \lambda(2(\sigma + 1) - q)(t^{n,+}(u_k))^q\|u_k\|_{q,a}^q, \quad k \geq k_0.$$

Uma simples manipulação algébrica demonstra que

$$t^{n,+}(u_k) < \left[\left(\frac{2(\sigma + 1) - q}{2\sigma} \right) \frac{\lambda}{l - \varepsilon} \|u_k\|_{q,a}^q \right]^{\frac{1}{2-q}}. \quad (1-27)$$

Não é difícil ver, a partir das equações (1-17) e (1-18), e do fato de $u_k \rightarrow 0$ em X , que a menos de subsequência, $\|u_k\|_{q,a}^q \rightarrow 0$ em X e $\|u_k\|_{p,b}^p \rightarrow 0$ em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Dessa maneira, a desigualdade (1-27) garante que $t^{n,+}(u_k) \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow +\infty$. Neste momento, definimos uma nova sequência $w_k := t^{n,+}(u_k)u_k$, onde $(w_k) \in \mathcal{N}^+$. É fácil verificar que a sequência (w_k) é limitada em X , pois, com base na estimativa (1-26), na desigualdade de Hölder, nas hipóteses (a_1) e (a_2) , e na imersão contínua $X \hookrightarrow L^{qr'_1}(\mathbb{R}^N)$ para cada $qr'_1 \in [2, 2^*)$, deduzimos

$$\begin{aligned} 0 < 2\sigma\|w_k\|^2 &< \lambda(2(\sigma + 1) - q)\|w_k\|_{q,a}^q \\ &\leq \lambda(2(\sigma + 1) - q)\|a\|_{r_1}\|w_k\|_{qr'_1}^q \\ &\leq \lambda(2(\sigma + 1) - q)S_{qr'_1}^q\|a\|_{r_1}\|w_k\|^q. \end{aligned}$$

Levando em conta que $2 > q$ e $\|w_k\| \rightarrow +\infty$, segue-se que

$$0 < 2\sigma < \lambda(2(\sigma + 1) - q)S_{qr'_1}^q\|a\|_{r_1}\|w_k\|^{q-2} \rightarrow 0.$$

Isso leva a uma contradição. Logo, obtemos que (w_k) é limitada em X . Como resultado, dado que $J'(t^{n,+}(u_k)u_k)(t^{n,+}(u_k)u_k) = 0$, encontramos

$$\begin{aligned} \|w_k\|^2 &\leq \|w_k\|^2 + \alpha_2\|\nabla w_k\|_2^{2(\sigma+1)} \\ &= \lambda(t^{n,+}(u_k))^q\|u_k\|_{q,a}^q + (t^{n,+}(u_k))^p\|u_k\|_{p,b}^p \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $k \rightarrow +\infty$. Portanto, temos que $w_k \rightarrow 0$ em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Isso prova que $\mathcal{N}^+ \cup \{0\} \subset \overline{\mathcal{N}^+}$. Consequentemente, concluímos que o conjunto de Nehari \mathcal{N}^+ não é fechado em X . Isso completa a prova da proposição. \square

Observação 1.32 *É crucial destacar que há sempre uma sequência $(u_k) \in X \setminus \{0\}$ tal que $\|u_k\|_{q,a}^q > 0$, satisfazendo $u_k \rightarrow 0$ em X e (u_k) não converge forte para 0 em X . Um exemplo claro é apresentado em [72, Observação 1.18]. Além disso, como o conjunto $\mathcal{N}^0 = \emptyset$ e o zero é um ponto aderente a \mathcal{N}^+ para qualquer $\lambda \in (0, \lambda^*)$, podemos concluir que zero também é um ponto aderente ao conjunto \mathcal{N} , indicando que o conjunto \mathcal{N} não é fechado em X .*

Proposição 1.33 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (V_1) e $\lambda = \lambda_*$. Assuma que $u \in X \setminus \{0\}$ é um minimizador para λ_* . Então $v_* := t_e(u)u$ é um ponto crítico para o funcional energia J .*

Prova. Sabemos pela Proposição 1.25 que $\lambda_* = S_e(u) = R_e(t_e(u)u)$. Não é difícil verificar também que u é um ponto crítico da função S_e . Além disso, como $t_e(u) > 0$ é o único ponto de máximo local do funcional $Q_e(t) = R_e(tu)$, mencionamos que

$$\left. \frac{d}{dt} Q_e(t) \right|_{t=t_e(u)} = (R_e)'(t_e(u)u)u = 0.$$

Isso implica que

$$0 = (S_e)'(u)w = [R_e(t_e(u)u)]'w = R_e'(t_e(u)u)t_e(u)w + R_e'(t_e(u)u)[t_e'(u)w]u.$$

Logo, obtemos que $R_e'(t_e(u)u)w = 0$, para todo $w \in X$. Nesta etapa, defina uma função auxiliar $v_* := t_e(u)u$ tal que

$$\lambda_* = R_e(v_*) = \frac{\frac{1}{2}\|v_*\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)}\|\nabla v_*\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{1}{p}\|v_*\|_{p,b}^p}{\frac{1}{q}\|v_*\|_{q,a}^q}. \quad (1-28)$$

Derivando (1-28), deduzimos que

$$0 = R_e'(v_*)w = \frac{q}{\|v_*\|_{q,a}^q} J'(v_*)w, \quad w \in X.$$

Uma vez que $\|v_*\|_{q,a}^q > 0$, concluímos que $J'(v_*)w = 0$, para todo $w \in X$. \square

1.3 Resultados relativos à variedade de Nehari

Nesta seção, buscamos apresentar propriedades adicionais sobre a variedade de Nehari. O primeiro resultado assegura que as variedades de Nehari \mathcal{N}^- e \mathcal{N}^0 permanecem longe da origem sempre que $\lambda > 0$.

Lema 1.34 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (V_1) e $\lambda > 0$. Então existe uma constante positiva $\mathcal{C}_b = \mathcal{C}_b(p, q, S_{pr'_2}^p, \|b\|_{r_2})$ tal que $\|u\| \geq \mathcal{C}_b$ para todo $u \in \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$. Além disso, temos que o conjunto \mathcal{N}^- é fechado em X , para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$.*

Prova. Seja $u \in \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$ uma função fixada. Nesse caso, utilizando a estimativa (1-3), obtemos que

$$(2 - q)\|u\|^2 + (2(\sigma + 1) - q)\alpha_2\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - (p - q)\|u\|_{p,b}^p \leq 0.$$

Uma simples manipulação algébrica, aplicando a imersão contínua $X \hookrightarrow L^{pr'_2}(\mathbb{R}^N)$, para cada $pr'_2 \in [2, 2^*)$ e a hipótese (a_1) , nos leva a concluir que

$$\begin{aligned} (2 - q)\|u\|^2 &\leq (2 - q)\|u\|^2 + (2(\sigma + 1) - q)\alpha_2\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} \\ &\leq (p - q)S_{pr'_2}^p\|b\|_{r_2}\|u\|^p. \end{aligned}$$

A última desigualdade fornece que

$$\|u\| \geq \left[\frac{2 - q}{(p - q)S_{pr'_2}^p\|b\|_{r_2}} \right]^{\frac{1}{p-2}} =: \mathcal{C}_b, \quad (1-29)$$

para todo $u \in \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$. Ressaltamos que \mathcal{C}_b não depende do parâmetro $\lambda > 0$. Por conseguinte, afirmamos que \mathcal{N}^- é um conjunto fechado em X . Com efeito, considere (u_k) uma sequência em \mathcal{N}^- tal que $u_k \rightarrow u$ fortemente em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Sabemos pela desigualdade (1-29) que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k\| = \|u\| \geq \mathcal{C}_b > 0.$$

Isso mostra que $u \neq 0$. Uma vez que $(u_k) \in \mathcal{N}^-$ e $J \in C^1(X \setminus \{0\}; \mathbb{R})$, mencionamos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} J'(u_k)u_k = J'(u)u = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} J''(u_k)(u_k, u_k) = J''(u)(u, u) \leq 0.$$

Isso implica que $u \in \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$, para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Entretanto, uma vez que $\lambda \in (0, \lambda^*)$, tem-se que $u \notin \mathcal{N}^0$, veja a Proposição 1.27. Segue-se que $u \in \mathcal{N}^-$, onde o conjunto \mathcal{N}^- é fechado em X . Isso finaliza a prova. \square

Observação 1.35 *Assumindo que $\lambda = \lambda^*$ seja satisfeito, podemos inferir, com base na Proposição 1.29, que $\mathcal{N}^0 \neq \emptyset$. Dessa maneira, dado $u \in \mathcal{N}^0$, segue-se pelo o Lema 1.34 que $\|u\| \geq \mathcal{C}_b > 0$. Isso significa que $u \neq 0$. Dessa forma, afirmamos que \mathcal{N}^0 é um conjunto fechado em X . Para que isso ocorra, considere uma sequência $(u_k) \subset \mathcal{N}^0$ tal que $u_k \rightarrow u$ em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Como $J \in C^1(X \setminus \{0\}; \mathbb{R})$, encontramos que $J''(u)(u, u) = J'(u)u = 0$. Concluimos que $u \in \mathcal{N}^0$.*

Lema 1.36 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) e (V_1) . Então o funcional energia J é coercivo sobre \mathcal{N} , para cada $\lambda > 0$. Em particular, obtemos que $J(u) > -\mathcal{C}_a \lambda^{\frac{2}{2-q}}$, para todo $u \in \mathcal{N}$ onde*

$$\mathcal{C}_a := (p-2)^{-\frac{q}{2-q}} ((p-q)\|a\|_{r_1})^{\frac{2}{2-q}} S_{qr'_1}^{\frac{2q}{2-q}} \left(\frac{2-q}{2pq} \right) > 0.$$

Prova. Seja $u \in \mathcal{N}$ uma função fixada. Então $J'(u)u = 0$. Esse fato, juntamente com a hipótese (a_1) e a imersão contínua $X \hookrightarrow L^{qr'_1}(\mathbb{R}^N)$, asseguram que

$$\begin{aligned} J(u) &= J(u) - \frac{1}{p} J'(u)u \\ &= \left(\frac{p-2}{2p} \right) \|u\|^2 + \left(\frac{p-2(\sigma+1)}{2p(\sigma+1)} \right) \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \lambda \left(\frac{p-q}{pq} \right) \|u\|_{q,a}^q \\ &\geq \left(\frac{p-2}{2p} \right) \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{p-q}{pq} \right) S_{qr'_1}^q \|a\|_{r_1} \|u\|^q. \end{aligned} \quad (1-30)$$

Uma vez que $2 > q$, concluímos que $J(u) \rightarrow +\infty$, quando $\|u\| \rightarrow +\infty$. Além disso, analisando a desigualdade (1-30), definimos a seguinte função:

$$\eta(t) := \left(\frac{p-2}{2p} \right) t^{\frac{2}{q}} - \lambda \left(\frac{p-q}{pq} \right) S_{qr'_1}^q \|a\|_{r_1} t. \quad (1-31)$$

Salientamos que fazendo $t = \|u\|^q$ em (1-31), tem-se que $J(u) \geq \eta(\|u\|^q)$, para todo $u \in \mathcal{N}$. Como consequência, ao derivarmos a função $\eta(t)$ em relação a t , encontramos

$$\frac{d}{dt} \eta(t) = \left(\frac{p-2}{pq} \right) t^{\frac{2-q}{q}} - \lambda \left(\frac{p-q}{pq} \right) S_{qr'_1}^q \|a\|_{r_1} = 0.$$

Um simples cálculo mostra que

$$t = t_{\min} := \left[\frac{\lambda(p-q)S_{qr'_1}^q \|a\|_{r_1}}{p-2} \right]^{\frac{q}{2-q}} > 0.$$

Note que a função $\eta(t)$ atinge o seu mínimo em $t = t_{\min}$. Nesse caso, deduzimos que

$$\eta(t) = -\lambda^{\frac{2}{2-q}} (p-2)^{-\frac{q}{2-q}} (p-q)^{\frac{2}{2-q}} \|a\|_{r_1}^{\frac{2}{2-q}} S_{qr'_1}^{\frac{2q}{2-q}} \left(\frac{2-q}{2pq} \right) = -\mathcal{C}_a \lambda^{\frac{2}{2-q}},$$

onde

$$\mathcal{C}_a = (p-2)^{-\frac{q}{2-q}} [(p-q)\|a\|_{r_1}]^{\frac{2}{2-q}} S_{qr'_1}^{\frac{2q}{2-q}} \left(\frac{2-q}{2pq} \right) > 0.$$

Portanto, temos que $J(u) \geq -\mathcal{C}_a \lambda^{\frac{2}{2-q}}$, para todo $u \in \mathcal{N}$. Isso completa a prova. \square

Proposição 1.37 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (V_1) e $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Então, o funcional $J(u) < 0$, para todo $u \in \mathcal{N}^+$. Consequentemente, existe uma constante $\mathcal{C}_u > 0$ tal que*

$$c_{\mathcal{N}^+} < -\frac{(p-2)(2-q)}{2pq} \mathcal{C}_u.$$

Prova. Seja $\lambda \in (0, \lambda^*)$ fixado. Isso mostra que $\lambda < S_n(u)$. É importante analisar que $t^{n,+}(u)u \in \mathcal{N}^+$ se, e somente se,

$$R_n(t^{n,+}(u)u) = \lambda \text{ e } \left. \frac{d}{dt} R_n(tu) \right|_{t=t^{n,+}(u)} > 0.$$

Como consequência, mencionamos que

$$Q_n(t^{n,+}(u)) = R_n(t^{n,+}(u)u) = \lambda. \quad (1-32)$$

Por outro lado, não é difícil checar pela Figura 1.2 que

$$Q_n(t^{n,+}(u)) > Q_e(t^{n,+}(u)) = R_e(t^{n,+}(u)u). \quad (1-33)$$

Combinando (1-32) e (1-33), temos que $R_e(t^{n,+}(u)u) < \lambda$, para todo $t^{n,+}(u)u \in \mathcal{N}^+$. Logo, a Observação 1.12 assegura que $J(t^{n,+}(u)u) < 0$, para todo $t^{n,+}(u)u \in \mathcal{N}^+$. Além disso, levando em conta que $t^{n,+}(u)u \in \mathcal{N}^+$, tem-se que

$$J'(t^{n,+}(u)u)(t^{n,+}(u)u) = 0 \text{ e } J''(t^{n,+}(u)u)(t^{n,+}(u)u, t^{n,+}(u)u) > 0.$$

Como resultado, a equação (1-3) implica que

$$\lambda(p-q)\|t^{n,+}(u)u\|_{q,a}^q > (p-2(\sigma+1))\alpha_2\|\nabla(t^{n,+}(u)u)\|_2^{2(\sigma+1)} + (p-2)\|t^{n,+}(u)u\|^2.$$

A última desigualdade, juntamente com (1-30) e a hipótese (a_1) , prova que

$$\begin{aligned} J(tu) &= \left(\frac{p-2}{2p}\right)\|tu\|^2 + \left(\frac{p-2(\sigma+1)}{2p(\sigma+1)}\right)\alpha_2\|\nabla(tu)\|_2^{2(\sigma+1)} - \lambda\left(\frac{p-q}{pq}\right)\|tu\|_{q,a}^q \\ &< -\frac{(p-2)(2-q)}{2pq}\|tu\|^2 - \frac{(p-2(\sigma+1))(2(\sigma+1)-q)}{2pq(\sigma+1)}\alpha_2\|\nabla(tu)\|_2^{2(\sigma+1)} \\ &\leq -\frac{(p-2)(2-q)}{2pq}\mathcal{C}_u, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{C}_u = \|tu\|^2 > 0$ e $t = t^{n,+}(u)$. Portanto, obtemos que $c_{\mathcal{N}^+} \leq J(t^{n,+}(u)u)$, para todo $t^{n,+}(u)u \in \mathcal{N}^+$. Isso finaliza a demonstração da proposição. \square

Observação 1.38 *Analizando a Proposição 1.10, a Figura 1.1, a Proposição 1.17 e a Figura 1.2, afirmamos que $t_n(u) < t_e(u)$, para todo $u \in X \setminus \{0\}$. Na verdade, a prova dessa afirmação é feita supondo por contradição que $t_n(u) \geq t_e(u)$ para $u \in X \setminus \{0\}$. Inicialmente, assumamos que $t_n(u) > t_e(u)$ seja satisfeita. É fácil ver que*

$$Q_n(t_n(u)) > Q_n(t), \text{ para todo } 0 < t \neq t_n(u).$$

Tomando $t = t_e(u)$, obtemos que

$$Q_n(t_n(u)) > Q_n(t_e(u)) = Q_e(t_e(u)) \geq Q_e(t_n(u)) \geq Q_n(t_n(u)).$$

Isso é uma contradição. Portanto, temos que $t_n(u) < t_e(u)$. Note que o caso em que $t_n(u) = t_e(u)$ segue facilmente as mesmas ideias discutidas anteriormente.

Proposição 1.39 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (V_1) e $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Considere (u_k) uma sequência minimizante em \mathcal{N}^- ou \mathcal{N}^+ . Então a sequência (u_k) é limitada em X .*

Prova. Seja (u_k) uma sequência minimizante em \mathcal{N}^- . Em vista da equação (1-30) e da imersão contínua $X \hookrightarrow L^{qr'_1}(\mathbb{R}^N)$, para cada $qr'_1 \in [2, 2^*)$, tem-se que

$$J(u_k) \geq \left(\frac{p-2}{2p}\right) \|u_k\|^2 - \lambda \left(\frac{p-q}{pq}\right) S_{qr'_1}^q \|a\|_{r_1} \|u_k\|^q.$$

Observe que para k suficientemente grande, inferimos que $J(u_k) \leq \mathcal{C}_1$, onde \mathcal{C}_1 é uma constante positiva. Consequentemente, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\frac{p-2}{2p}\right) \|u_k\|^2 \leq \mathcal{C}_1 + \lambda \left(\frac{p-q}{pq}\right) S_{qr'_1}^q \|a\|_{r_1} \|u_k\|^q, \quad k \geq k_0.$$

A última desigualdade, juntamente com o fato de que $\|u_k\| \rightarrow +\infty$, assegura que

$$0 < \left(\frac{p-2}{2p}\right) \leq \frac{\mathcal{C}_1}{\|u_k\|^2} + \lambda \left(\frac{p-q}{pq}\right) \frac{S_{qr'_1}^q \|a\|_{r_1}}{\|u_k\|^{2-q}} \rightarrow 0.$$

Isso é uma contradição. Portanto, a sequência (u_k) é limitada em X . Similarmente, podemos aplicar o mesmo raciocínio acima para sequências em \mathcal{N}^+ . \square

O próximo resultado prova que \mathcal{N} é uma restrição natural para o problema (\mathcal{P}_λ) , para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

Proposição 1.40 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) e (V_1) . Seja $u \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-$ um minimizador local para o funcional J em \mathcal{N} . Então u é um ponto crítico para o funcional J em X .*

Prova. Empregando argumentos de minimização no conjunto de Nehari \mathcal{N} , podemos assumir, sem perda de generalidade, que u é um minimizador local para o funcional J em \mathcal{N} . Sabemos que o conjunto \mathcal{N}^0 é sempre vazio, para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Dessa maneira, ao aplicar os mesmos conceitos da equação (1-23), inferimos que

$$\mathcal{F}'(u)u = J'(u)u + J''(u)(u, u) = \phi_u''(1) \neq 0, \quad \text{para todo } u \in \mathcal{N}^\pm$$

onde $\mathcal{F} : X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por $\mathcal{F}(u) = J'(u)u$. No que segue, obtemos que $0 = J'(u)u = \theta \mathcal{F}'(u)u$, onde $\theta \in \mathbb{R}$ é dado pelo Teorema dos Multiplicadores de

Lagrange [25, Teorema 7.8.2]. Como $\mathcal{F}'(u)u \neq 0$, encontramos que $\theta = 0$ de tal modo que $J'(u)\varphi = 0$, para cada $\varphi \in X$. Isso completa a demonstração. \square

Agora, apresentamos dois resultados que afirmam que qualquer sequência minimizante em \mathcal{N}^+ ou \mathcal{N}^- converge fortemente em X .

Lema 1.41 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (V_1) e $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Seja $(u_k) \subset \mathcal{N}^+$ uma sequência minimizante para J em \mathcal{N}^+ . Então existe $u \in X \setminus \{0\}$ tal que, a menos de uma subsequência, $u_k \rightarrow u$ fortemente em X , quando $k \rightarrow +\infty$ com a função $u \in \mathcal{N}^+$. Consequentemente, inferimos que $c_{\mathcal{N}^+} = J(u)$.*

Prova. Seja (u_k) uma sequência minimizante em \mathcal{N}^+ . Esse fato implica que $\lim_{k \rightarrow +\infty} J(u_k) = c_{\mathcal{N}^+}$. Uma vez que a sequência (u_k) é limitada em X (veja a Proposição 1.39), tem-se que existe $u \in X$ de tal forma que $u_k \rightharpoonup u$ em X . Aqui, afirmamos que $u \neq 0$. Com efeito, suponha por contradição que $u = 0$ tal que $u_k \rightarrow 0$ em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Uma simples manipulação algébrica utilizando (1-30) fornece que

$$\begin{aligned} \lambda \|u_k\|_{q,a}^q &= \left(\frac{pq - 2q}{2p - 2q} \right) \|u_k\|^2 + \left(\frac{pq - 2q\sigma - 2q}{2(\sigma + 1)(p - q)} \right) \alpha_2 \|\nabla u_k\|_2^{2(\sigma+1)} \\ &\quad - \left(\frac{pq}{p - q} \right) J(u_k). \end{aligned}$$

Considerando a equação (1-17), juntamente com a hipótese (a_1) , a Proposição 1.37 e o fato de que $u_k \rightarrow 0$ em X , conclui-se que

$$0 = \lambda \lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k\|_{q,a}^q \geq - \left(\frac{pq}{p - q} \right) c_{\mathcal{N}^+} > 0,$$

Isso configura uma contradição, demonstrando assim que $u \neq 0$. Neste momento, estabeleceremos a convergência forte de (u_k) para u em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Assumindo que a sequência (u_k) não converge forte para u em X , obtemos

$$\|u\| < \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|u_k\|.$$

Dessa forma, dado que $\lambda \in (0, \lambda^*)$, temos que existe um único ponto $t^{n,+}(u) > 0$ tal que $t^{n,+}(u)u \in \mathcal{N}^+$, veja a Proposição 1.24. Além disso, aplicando o Lema 1.37, tem-se que

$$\phi'_u(t^{n,+}(u)) = J'(t^{n,+}(u)u)u = 0 \quad \text{e} \quad \phi_u(t^{n,+}(u)) = J(t^{n,+}(u)u) < 0,$$

para todo $t^{n,+}(u)u \in \mathcal{N}^+$. Como $u \mapsto J'(u)u$ é fracamente semicontínuo inferior-

mente, deduzimos que

$$\begin{aligned} 0 = t^{n,+}(u) \frac{d}{dt} J(t^{n,+}(u)u) &= J'(t^{n,+}(u)u)(t^{n,+}(u)u) \\ &< \liminf_{k \rightarrow +\infty} J'(t^{n,+}(u)u_k)(t^{n,+}(u)u_k). \end{aligned}$$

Desse modo, inferimos que $J'(t^{n,+}(u)u_k)(t^{n,+}(u)u_k) > 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Como produto, segue-se que $t^{n,+}(u) \in [t^{n,+}(u_k), t^{n,-}(u_k))$. Uma vez que $(u_k) \in \mathcal{N}^+$, encontramos que

$$1 = t^{n,+}(u_k) \leq t^{n,+}(u).$$

Como $t \mapsto J(tu)$ é decrescente para cada $t \in (0, 1)$, mencionamos que

$$c_{\mathcal{N}^+} \leq J(t^{n,+}(u)u) \leq J(u) < \liminf_{k \rightarrow +\infty} J(u_k) = c_{\mathcal{N}^+}.$$

Isso é uma contradição. Portanto, $u_k \rightarrow u$ fortemente em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Consequentemente, tem-se que $c_{\mathcal{N}^+} = J(u)$, e o lema está provado. \square

Algumas afirmações feitas no final da demonstração do Lema 1.41 podem ser visualizadas geometricamente na Figura 1.4.

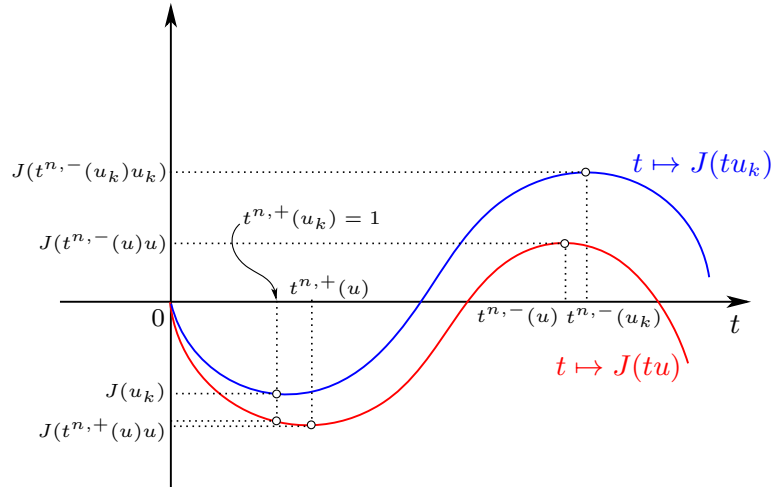


Figura 1.4: Relação geométrica entre $J(tu)$ e $J(tu_k)$.

Lema 1.42 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (V_1) e $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Seja $(v_k) \subset \mathcal{N}^-$ uma sequência minimizante para J em \mathcal{N}^- . Então existe $v \in X \setminus \{0\}$ tal que, a menos de uma subsequência, $v_k \rightarrow v$ fortemente em X , quando $k \rightarrow +\infty$ com a função $v \in \mathcal{N}^-$. Como produto, obtemos que $c_{\mathcal{N}^-} = J(v)$.*

Prova. Considere (v_k) uma sequência minimizante em \mathcal{N}^- . Esse fato significa que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} J(v_k) = c_{\mathcal{N}^-}.$$

Uma vez que (v_k) é uma sequência limitada em X , segue-se que $v_k \rightharpoonup v$ em X , para algum $v \in X$. Aqui, afirmamos que $v \neq 0$. Com efeito, suponha por contradição que $v = 0$, de tal forma que $v_k \rightarrow 0$ em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Defina uma sequência normalizada $w_k = \frac{v_k}{\|v_k\|} \in \mathcal{S}^1$, onde \mathcal{S}^1 é a esfera unitária de X com $\|w_k\| = 1$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Nesse caso, um simples cálculo prova que $v_k = \|v_k\|w_k = t_k^{n,-}(w_k)w_k$. Por questão de simplicidade, denotamos $t_k = t_k^{n,-}(w_k)$. Em vista do Lema 1.34 e do fato de que $(v_k) \subset \mathcal{N}^-$, podemos afirmar que existe uma constante $\mathcal{C}_b > 0$ tal que $\|v_k\| = t_k \geq \mathcal{C}_b$. Conseqüentemente, inferimos que $t_k \rightarrow t_0 > 0$, quando $k \rightarrow +\infty$. É crucial destacar que $v_k \rightarrow 0$ em X é equivalente a $w_k \rightarrow 0$ em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Esta condição, juntamente com a $(t_k w_k) \in \mathcal{N}^-$, garante que

$$0 = 1 + \frac{\alpha_2 t_k^{2(\sigma+1)} \|\nabla w_k\|_2^{2(\sigma+1)}}{t_k^2 \|w_k\|^2} - \frac{\lambda t_k^q \|w_k\|_{q,a}^q}{t_k^2 \|w_k\|^2} - \frac{t_k^p \|w_k\|_{p,b}^p}{t_k^2 \|w_k\|^2}.$$

Em particular, encontramos que

$$\frac{\lambda}{t_k^{2-q}} = \frac{1 + \alpha_2 t_k^{2\sigma} \|\nabla w_k\|_2^{2(\sigma+1)} - t_k^{p-2} \|w_k\|_{p,b}^p}{\|w_k\|_{q,a}^q}.$$

A última equação, combinada com $t_k \rightarrow t_0 > 0$ quando $k \rightarrow +\infty$, implica que

$$o_k(1) + \left(\frac{1 + \alpha_2 t_k^{2\sigma} \|\nabla w_k\|_2^{2(\sigma+1)} - t_k^{p-2} \|w_k\|_{p,b}^p}{\|w_k\|_{q,a}^q} \right) = \frac{\lambda}{t_k^{2-q}} = \frac{\lambda}{t_0^{2-q}} + o_k(1).$$

Portanto, para cada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\begin{aligned} 1 - t_k^{p-2} \|w_k\|_{p,b}^p &\leq 1 + \alpha_2 t_k^{2\sigma} \|\nabla w_k\|_2^{2(\sigma+1)} - t_k^{p-2} \|w_k\|_{p,b}^p \\ &< \left(\frac{\lambda}{t_0^{2-q}} + \varepsilon \right) \|w_k\|_{q,a}^q, \end{aligned}$$

para todo $k > k_0$. Esse fato prova que

$$1 - t_k^{p-2} \|w_k\|_{p,b}^p < \left(\frac{\lambda}{t_0^{2-q}} + \varepsilon \right) \|w_k\|_{q,a}^q, \quad k > k_0. \quad (1-34)$$

Dessa maneira, usando as equações (1-17) e (1-18), e o fato de que $w_k \rightarrow 0$ em X , chegamos a uma contradição em (1-34). Isso mostra que $v \neq 0$.

No que segue, afirmamos que $v_k \rightarrow v$ fortemente em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Com efeito, suponha por contradição que a sequência (v_k) não converge forte para v em X . Isso implica que

$$\|v\| < \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|v_k\|.$$

É importante notar pela Proposição 1.24 que a identidade ϕ_u admite um único ponto $t^{n,-}(v) > 0$ tal que $t^{n,-}(v)v \in \mathcal{N}^-$. Desse modo, ao empregar os mesmos conceitos abordados no item (d) da Proposição 1.24, concluímos que

$$J(tv_k) \leq \max_{t \geq t^{n,+}(v_k)} J(tv_k) = J(t^{n,-}(v_k)v_k),$$

para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Como $t^{n,-}(v_k) = 1$, mencionamos que $J(tv_k) \leq J(v_k)$, para qualquer $t \geq t^{n,+}(v_k)$. Adicionalmente, uma vez que $v \mapsto J'(v)v$ é fracamente semicontínuo inferiormente, podemos deduzir que

$$0 = J'(t^{n,-}(v)v)v < \liminf_{k \rightarrow +\infty} J'(t^{n,-}(v)v_k)v_k.$$

Uma consequência imediata é que $J'(t^{n,-}(v)v_k)v_k > 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. A última condição afirma que $t^{n,-}(v) \in [t^{n,+}(v_k), t^{n,-}(v_k))$, veja a Figura 1.2. Portanto, obtemos

$$c_{\mathcal{N}^-} \leq J(t^{n,-}(v)v) < \liminf_{k \rightarrow +\infty} J(t^{n,-}(v)v_k) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} J(v_k) = c_{\mathcal{N}^-},$$

o que é uma contradição. Portanto, $v_k \rightarrow v$ fortemente em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Como resultado, temos que $c_{\mathcal{N}^-} = J(v)$. Isso completa a prova do lema. \square

Proposição 1.43 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (V_1) e $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Então o funcional energia J admite pelo menos dois pontos críticos.*

Prova. Afiramos que v é um ponto crítico para o funcional energia J . De fato, considere (v_k) uma sequência minimizante para J em \mathcal{N}^- . Uma vez que a sequência (v_k) é limitada em X , tem-se que $v_k \rightharpoonup v$ em X , para algum $v \in X$. Como resultado, o Lema 1.42 fornece, a menos de uma subsequência, que $v_k \rightarrow v$ fortemente em X . Dessa forma, é fácil verificar que

$$c_{\mathcal{N}^-} = \lim_{k \rightarrow +\infty} J(v_k) = J(v) \quad \text{e} \quad 0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} J'(v_k)v_k = J'(v)v. \quad (1-35)$$

Logo, a Proposição 1.40 assegura que v é um ponto crítico para o funcional J em X . Consequentemente, v é uma solução fraca para o problema (\mathcal{P}_λ) . Ademais, como o funcional energia J é par, observamos que $J(v) = J(|v|)$ e $J'(|v|)|v| = J'(v)v = 0$. Esta afirmação prova que $|v| \in \mathcal{N}$. Sabemos que $v \mapsto J''(v)(v, v)$ é um funcional par, de modo que $J''(|v|)(|v|, |v|) = J''(v)(v, v) < 0$, para todo $v \in \mathcal{N}^-$. Nesse caso, deduzimos que $|v| \in \mathcal{N}^-$ de tal forma que $|v|$ é um minimizador local em \mathcal{N}^- . Como produto, temos que $|v|$ é um novo ponto crítico para o funcional J . Portanto, o funcional energia J admite pelo menos um ponto crítico $v \in X$, satisfazendo $v \geq 0$ em \mathbb{R}^N , para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Similarmente, provaremos que existe um

segundo ponto crítico para o funcional J . Com efeito, considere (u_k) uma sequência minimizante para J em \mathcal{N}^+ . É sabido que (u_k) é sequência limitada em X tal que $u_k \rightharpoonup u$ em X , para alguma $u \in X$. As últimas condições, juntamente com o Lema 1.41, implicam que $u_k \rightarrow u$ fortemente em X . Assim, usando as mesmas ideias de (1-35), mencionamos que $c_{\mathcal{N}^+} = J(u)$. Desse modo, a Proposição 1.40 nos fornece que u é um ponto crítico para o funcional J , para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Ao substituir u por $|u|$ e aplicar os mesmos argumentos discutidos acima, obtemos um novo ponto crítico $u \in X$ para o funcional J satisfazendo $u \geq 0$ em \mathbb{R}^N , para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Uma vez que $\mathcal{N}^- \cap \mathcal{N}^+ = \emptyset$, concluímos que o problema (\mathcal{P}_λ) admite pelo menos duas soluções fracas distintas, para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$. \square

1.4 Regularidade das soluções do problema (\mathcal{P}_λ)

A finalidade desta seção é apresentar resultados sobre a regularidade das soluções relacionadas ao problema (\mathcal{P}_λ) . Sabemos que os Lemas 1.41 e 1.42, e a Proposição 1.43 garantem a existência de, pelo menos, duas soluções fracas não triviais para o problema (\mathcal{P}_λ) . Inicialmente, aplicaremos o método de regularização conhecido como “bootstrap” para assegurar que as soluções fracas pertençam a $C^{0,\beta}(\overline{B(0,R)})$, para algum $\beta \in (0, 1)$ e para todo $R > 0$. Eis o primeiro resultado.

Teorema 1.44 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (V_1) e $V, a, b \in C^{0,\gamma}(\overline{B(0,R)})$, para algum $\gamma \in (0, 1)$ e para todo $R > 0$. Assuma que $u \in X$ é uma solução fraca para o problema (\mathcal{P}_λ) . Então $u \in C^{0,\beta}(\overline{B(0,R)})$, para algum $\beta \in (0, 1)$.*

Prova. Seja $u \in X$ é uma solução fraca para o problema (\mathcal{P}_λ) . Então u satisfaz

$$-\Delta u = -\frac{V(x)u}{\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}} + \frac{\lambda a(x)|u|^{q-2}u + b(x)|u|^{p-2}u}{\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}} \text{ em } B(0, R). \quad (1-36)$$

Nesse caso, defina uma função $g : B(0, R) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$g(x, u) := -\frac{V(x)u}{\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}} + \frac{\lambda a(x)|u|^{q-2}u + b(x)|u|^{p-2}u}{\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}}.$$

Note que a equação (1-36) é dada por $-\Delta u = g(x, u)$ em $B(0, R)$. É fácil checar pela hipótese (m_1) que $\frac{1}{\alpha_1} \geq \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}}$, para todo $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Essa condição, em conjunto com a desigualdade triangular, garante que

$$|g(x, u)| \leq \alpha_1^{-1} (V(x)|u| + \lambda|a(x)||u|^{q-1} + |b(x)||u|^{p-1}), \quad x \in B(0, R). \quad (1-37)$$

Uma vez que $a, b, V \in L^\infty(B(0, R))$, afirmamos que $g \in L^\mu(B(0, R))$, onde $\mu = \frac{2^*}{p-1}$. Com efeito, um cálculo simples utilizando (1-37), a desigualdade de Hölder e a

imersão contínua $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$, para cada $r \in [2, 2^*]$, mostra que

$$\begin{aligned} \alpha_1^{-\mu} \int_{B(0,R)} |V(x)|u|^\mu dx &\leq \alpha_1^{-\mu} \|V\|_\infty^\mu \left(\int_{B(0,R)} 1^{\frac{p-1}{p-2}} dx \right)^{\frac{p-2}{p-1}} \left(\int_{B(0,R)} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{p-1}} \\ &\leq \alpha_1^{-\mu} \|V\|_\infty^\mu |B(0,R)|^{\frac{p-2}{p-1}} \|u\|_{2^*}^{\frac{2^*}{p-1}} \\ &\leq \alpha_1^{-\mu} \|V\|_\infty^\mu S_{2^*}^{\frac{2^*}{p-1}} |B(0,R)|^{\frac{p-2}{p-1}} \|u\|_{2^*}^{\frac{2^*}{p-1}} \\ &< +\infty. \end{aligned} \quad (1-38)$$

Nesta etapa, como $b \in L^\infty(B(0,R))$, segue-se pela imersão contínua $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ que

$$\begin{aligned} \alpha_1^{-\mu} \int_{B(0,R)} |b(x)|u|^{p-1}|^\mu dx &\leq \alpha_1^{-\mu} \|b\|_\infty^\mu \|u\|_{2^*}^{2^*} \\ &\leq \alpha_1^{-\mu} S_{2^*}^{2^*} \|b\|_\infty^\mu \|u\|_{2^*}^{2^*} \\ &< +\infty. \end{aligned} \quad (1-39)$$

Agora, usando a desigualdade de Hölder, a imersão contínua $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$, para cada $r \in [2, 2^*]$ e o fato de que $a \in L^\infty(B(0,R))$, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_1^{-\mu} \int_{B(0,R)} |a(x)|u|^{q-1}|^\mu dx &\leq \alpha_1^{-\mu} \|a\|_\infty^\mu \left(\int_{B(0,R)} 1^{\frac{p-1}{p-q}} dx \right)^{\frac{p-q}{p-1}} \left(\int_{B(0,R)} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{q-1}{p-1}} \\ &\leq \alpha_1^{-\mu} \|a\|_\infty^\mu |B(0,R)|^{\frac{p-q}{p-1}} \|u\|_{2^*}^{\frac{2^*}{p-1} \frac{q-1}{p-1}} \\ &\leq \alpha_1^{-\mu} \|a\|_\infty^\mu S_{2^*}^{\frac{2^*}{p-1} \frac{q-1}{p-1}} \|u\|_{2^*}^{\frac{2^*}{p-1} \frac{q-1}{p-1}} \\ &< +\infty. \end{aligned} \quad (1-40)$$

A partir da combinação das condições (1-37), (1-38), (1-39) e (1-40), chegamos à conclusão de que a função $g \in L^\mu(B(0,R))$ com $\mu = \frac{2^*}{p-1}$. Dessa forma, o Teorema de Agmon-Douglis-Nirenberg [3] nos fornece que $u \in W^{2,\mu}(B(0,R))$ e existe uma constante $\mathcal{C}_5 = \mathcal{C}_5(R, N, \mu) > 0$ tal que

$$\|u\|_{W^{2,\mu}(B(0,R))} \leq \mathcal{C}_5 \|g(\cdot, u)\|_\mu.$$

Sob estas condições, tem-se que

- (i) Suponha que $2\mu > N$ é satisfeito. Então, pela imersão contínua de Sobolev, temos que $u \in C^{0,\beta}(\overline{B(0,R)})$, para algum $\beta \in (0, 1)$ e $R > 0$. Isso finaliza o *bootstrap*.
- (ii) Suponha que $2\mu = N$ é satisfeito. Então $W^{2,\mu}(B(0,R))$ está imerso continuamente em $L^r(B(0,R))$, para todo $\mu \leq r < +\infty$. Sob esta condição, escolha um

valor para r de modo que $\frac{2r}{p-1} > N$, onde $u \in L^r(B(0, R))$. Isso implica que $g \in L^{\frac{r}{p-1}}(B(0, R))$. Assim, aplicando o Teorema de Agmon-Douglis-Nirenberg, mencionamos que $u \in W^{2, \frac{r}{p-1}}(B(0, R))$. No entanto, ao escolhermos r da maneira descrita, retornamos ao caso (i). Portanto, tem-se que $u \in C^{0, \beta}(\overline{B(0, R)})$, para algum $\beta \in (0, 1)$. Isso completa o *bootstrap*.

(iii) Suponha que $2\mu < N$ é satisfeito. Então $W^{2, \mu}(B(0, R))$ está imerso continuamente em $L^r(B(0, R))$, para todo $\mu \leq r \leq \frac{N\mu}{N-2\mu} = 2^{**}$.

É importante lembrar que as imersões mencionadas nos três casos podem ser consultadas em [72, Teorema A.13] ou [1]. Nesta etapa, afirmamos que $2^{**} > 2^*$. De fato, como $p - 1 < 2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}$, é fácil verificar que

$$\frac{1}{(p-1) - \frac{4}{N-2}} > 1, \quad (1-41)$$

onde $(p-1) - \frac{4}{N-2} > 0$ e $2\mu < N$. Um simples cálculo em (1-41) assegura que

$$\frac{N}{N(p-1) - 22^*} > 1 \Leftrightarrow 2^{**} = \frac{N\mu}{N-2\mu} > 2^*.$$

Logo, existe $\delta > 0$ de tal modo que

$$\frac{2^{**}}{2^*} = 1 + \delta. \quad (1-42)$$

Uma vez que $u \in L^{2^{**}}(B(0, R))$, segue que $g \in L^{\mu_1}(B(0, R))$ com $\mu_1 = \frac{2^{**}}{p-1}$. Ao aplicarmos o Teorema de Agmon-Douglis-Nirenberg, inferimos que $u \in W^{2, \mu_1}(B(0, R))$. Desse modo, é necessário reavaliar três casos distintos:

- (iv) Assuma que $2\mu_1 > N$ é satisfeito. Então, pelos mesmos argumentos apresentados acima, tem-se que $u \in C^{0, \beta}(\overline{B(0, R)})$, para algum $\beta \in (0, 1)$. Isso finaliza o *bootstrap*.
- (v) Assuma que $2\mu_1 = N$ é satisfeito. Nesse caso, seguindo uma abordagem análoga à prova do item (ii), deduzimos que $u \in C^{0, \beta}(\overline{B(0, R)})$, para algum $\beta \in (0, 1)$, concluindo assim o *bootstrap*.
- (vi) Assuma que $2\mu_1 < N$ é satisfeito. Então $W^{2, \mu_1}(B(0, R))$ está imerso continuamente em $L^r(B(0, R))$, para todo $\mu_1 \leq r \leq \frac{N\mu_1}{N-2\mu_1} = 2^{***}$.

Dessa maneira, continuando com o *bootstrap*, podemos afirmar que $2^{***} > 2^{**}$. Com efeito, pela estimativa (1-41), encontramos que $N > N(p-1) - 22^*$. A última desigualdade fornece que

$$N > N(p-1) - 2(p-1)\frac{2^*}{(p-1)} = (p-1)(N-2\mu).$$

Logo, como $2\mu < N$, obtemos

$$1 > (p-1) - \frac{2\mu}{N-2\mu}.$$

Aqui, ressaltamos que

$$(p-1) - \frac{2\mu}{N-2\mu} > 0 \Leftrightarrow N > \frac{22^{**}}{p-1} = 2\mu_1,$$

que é o caso em estudo. Como resultado, uma operação simples assegura que

$$\frac{\frac{N}{p-1}}{N - \frac{2N\mu}{(p-1)(N-2\mu)}} > 1 \Leftrightarrow 2^{***} = \frac{N\mu_1}{N-2\mu_1} > 2^{**}.$$

Adicionalmente, note que

$$\frac{2^{***}}{2^*} = \frac{2^{***}}{2^{**}} \frac{2^{**}}{2^*}. \quad (1-43)$$

Como $\mu_1 > \mu$, é fácil mostrar que $\frac{2^{***}}{2^{**}} > \frac{2^{**}}{2^*}$. Esse fato, aliado às estimativas (1-42) e (1-43), implica que $\frac{2^{***}}{2^*} > (1+\delta)^2$. Sendo assim, ao repetir este processo j -vezes, obtemos uma sequência estritamente crescente $\mu < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots < \mu_j$, onde $\mu_j = \frac{2^{*j}}{p-1}$. Consequentemente, a desigualdade de Bernoulli garante que

$$\frac{\mu_{j+1}}{\mu} = \frac{2^{*(j+1)}}{2^*} = (1+\delta)^j \geq 1 + j\delta.$$

Isso significa que $2\mu_j > N$ para $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Nesse caso, temos que $g \in L^{\mu_j}(B(0, R))$, com $\mu_j = \frac{2^{*j}}{p-1}$. Esta condição, juntamente com o Teorema de Agmon-Douglis-Nirenberg e o Teorema A.13 em [72], nos fornece que $u \in W^{2, \mu_j}(B(0, R)) \hookrightarrow C^{0, \beta}(\overline{B(0, R)})$, para algum $\beta \in (0, 1)$. \square

Uma implicação direta do Teorema 1.44 é que as soluções fracas do problema (\mathcal{P}_λ) pertencem ao espaço $C^{2, \xi}(\overline{B(0, R)})$, para algum $\xi \in (0, 1)$ e $R > 0$. Essa conclusão é obtida mediante a aplicação das estimativas de Schauder. Com base nesse raciocínio, estamos aptos a enunciar e demonstrar o próximo resultado.

Teorema 1.45 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (V_1) e $V, a, b \in C^{0, \gamma}(\overline{B(0, R)})$, para algum $\gamma \in (0, 1)$ e para todo $R > 0$. Então a solução fraca u para o problema (\mathcal{P}_λ) pertence a $C^{2, \xi}(\overline{B(0, R)})$, onde $\xi = \min\{\beta, \gamma\} \in (0, 1)$.*

Prova. Sabemos por (1-36) que $-\Delta u = g(x, u)$ em $B(0, R)$. Uma vez que u é não-negativa, afirmamos que $\mathcal{J}(x) = u^{p-1}(x) \in C^{0, \beta}(\overline{B(0, R)})$, para algum $\beta \in (0, 1)$ e $p > 1$. Com efeito, defina uma função auxiliar

$$\tilde{h}(t) := |tu(x) + (1-t)u(y)|^{p-1}, \quad t \in [0, 1].$$

Note que a função \tilde{h} é de classe C^1 . Dessa forma, como $0 \leq u \in C^{0,\beta}(\overline{B(0,R)})$ (veja o Teorema 1.44), temos pela Desigualdade do Valor Médio que existe $t \in (0,1)$ de modo que $|\tilde{h}(1) - \tilde{h}(0)| = |\tilde{h}'(t)|$, isto é,

$$\begin{aligned} |\tilde{h}(1) - \tilde{h}(0)| &\leq (p-1)|u(x) - u(y)|t|u(x) - u(y)|^{p-2} + (p-1)|u(x) - u(y)||u(y)|^{p-2} \\ &\leq (p-1)|u(x) - u(y)| \left[|u(x) - u(y)|^{p-2} + \left(\sup_{B(0,R)} u \right)^{p-2} \right] \\ &\leq (p-1)\mathcal{C}_\beta \left[\left(\sup_{x,y \in B(0,R)} |u(x) - u(y)| \right)^{p-2} + \left(\sup_{B(0,R)} u \right)^{p-2} \right] |x - y|^\beta \\ &= (p-1)\mathcal{C}_\beta \mathcal{C}_0 |x - y|^\beta, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{C}_\beta, \mathcal{C}_0 > 0$ e $x, y \in B(0,R)$. Observe que os outros casos da função g seguem o mesmo raciocínio discutido acima. Dessa maneira, considerando que o produto de funções Hölder contínuas é Hölder contínua (conforme explicado em [39, página 53]), concluímos que $g \in C^{0,\xi}(\overline{B(0,R)})$, onde $\xi = \min\{\beta, \gamma\} \in (0,1)$. Como consequência, as estimativas de Schauder [39, Teorema 6.13] implicam que $u \in C^{2,\xi}(\overline{B(0,R)})$ e existe uma constante positiva $\mathcal{C}_6 = \mathcal{C}_6(R, N, \xi)$ de tal modo que $\|u\|_{C^{2,\xi}(\overline{B(0,R)})} \leq \mathcal{C}_6 \|g(\cdot, u)\|_{C^{0,\xi}(\overline{B(0,R)})}$, para algum $\xi \in (0,1)$ e para todo $R > 0$. \square

Proposição 1.46 *Suponha $(m_1), (a_1), (a_2), (V_1)$ e $V, a, b \in C^{0,\gamma}(\overline{B(0,R)})$, para algum $\gamma \in (0,1)$. Então as soluções u e v são estritamente positivas em \mathbb{R}^N .*

Prova. Note que a Proposição 1.43 garante a existência de duas soluções fracas u e v para o problema (\mathcal{P}_λ) , satisfazendo $u, v \geq 0$ em \mathbb{R}^N , para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$. É importante enfatizar pelo Teorema 1.45 que as soluções $u, v \in C^{2,\xi}(\overline{B(0,R)})$, para algum $\xi \in (0,1)$ e para todo $R > 0$. Sob estas condições, afirmamos que u é estritamente positiva em \mathbb{R}^N . De fato, suponha por contradição que existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ de modo que $u(x_0) = 0$. Nesse caso, uma simples manipulação algébrica em (1-36) mostra que

$$-\Delta u \geq -\frac{V(x)u}{\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}} \text{ em } B(x_0, R),$$

com $u \in C^{2,\xi}(\overline{B(x_0, R)})$, para algum $\xi \in (0,1)$. Seja $\mathcal{R} : B(x_0, R) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função ainda por determinar tal que $\mathcal{R}(x)u \geq 0$ em $B(x_0, R)$ e

$$-\Delta u + \mathcal{R}(x)u \geq \left[\mathcal{R}(x) - \frac{V(x)}{\alpha_1} \right] u \geq \left[\mathcal{R}(x) - \frac{\|V\|_\infty}{\alpha_1} \right] u \text{ em } B(x_0, R),$$

onde usamos o fato de que

$$\frac{1}{\alpha_1} \geq \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}}.$$

Assim, temos que $-\Delta u + \mathcal{R}(x)u \geq 0$ em $B(x_0, R)$ e $u \geq 0$ em $\partial B(x_0, R)$, se escolhermos

$$\mathcal{R}(x) = \frac{2\|V\|_\infty}{\alpha_1} \in L^\infty(B(x_0, R)).$$

Como produto, ao empregar o Princípio do Máximo Forte em operadores elípticos [27, Teorema 4], mencionamos que $u > 0$ em $B(x_0, R)$ ou $u \equiv 0$ em $B(x_0, R)$. Assumindo que $u \equiv 0$ em $B(x_0, R)$ e utilizando a arbitrariedade de $R > 0$, deduzimos que $u = 0$ em \mathbb{R}^N . Entretanto, o Lema 1.41 e a Proposição 1.37 asseguram que

$$0 = J(u) = c_{\mathcal{N}^+} < 0, u \in \mathcal{N}^+.$$

Isso resulta em uma contradição. Portanto, a solução fraca u é estritamente positiva em \mathbb{R}^N , para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Agora, usando os mesmos princípios discutidos anteriormente, podemos afirmar que $v > 0$ em $B(x_0, R)$ ou $v \equiv 0$ em $B(x_0, R)$. Desse modo, se $v \equiv 0$ em $B(x_0, R)$ e $R > 0$ é arbitrário, obtemos que $v = 0$ em \mathbb{R}^N . No entanto, o Lema 1.34 prova que

$$0 = \|v\| \geq \mathcal{C}_b > 0, v \in \mathcal{N}^-.$$

Isso é uma contradição. Portanto, a solução fraca v é estritamente positiva em \mathbb{R}^N , para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$. \square

1.5 A prova do teorema principal

Nesta seção, fornecemos uma análise completa da demonstração do teorema principal. Em termos gerais, para desenvolver essa demonstração, conectamos todos os resultados discutidos nas seções anteriores. Eis o teorema principal.

Teorema 1.47 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (V_1) e $V, a, b \in C^{0,\gamma}(\overline{B(0, R)})$, para algum $\gamma \in (0, 1)$ e para todo $R > 0$. Então para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$, o problema (\mathcal{P}_λ) admite pelo menos duas soluções positivas $u, v \in X$ tal que $u \in \mathcal{N}^+$ e $v \in \mathcal{N}^-$. Além disso, u é uma solução ground state e v é uma solução fraca satisfazendo:*

- (a) Para cada $\lambda \in (0, \lambda_*)$, temos que $c_{\mathcal{N}^-} = J(v) > 0$;
- (b) Para $\lambda = \lambda_*$, segue-se que $c_{\mathcal{N}^-} = J(v) = 0$;
- (c) Para cada $\lambda \in (\lambda_*, \lambda^*)$, obtemos que $c_{\mathcal{N}^-} = J(v) < 0$.

Prova. Primeiramente, observe que a Proposição 1.46 assegura que o problema (\mathcal{P}_λ) admite pelo menos duas soluções positivas $u, v \in X$ tal que $u \in \mathcal{N}^+$ e $v \in \mathcal{N}^-$, para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Além disso, mostraremos o item (a). Para isso, afirmamos que

$$t^{n,-}(v) = 1 > t_e(v), \tag{1-44}$$

para cada $\lambda \in (0, \lambda_*)$. Com efeito, suponha por contradição que $t_e(v) > 1$. Esse fato significa que $t^{n,+}(v) < t^{n,-}(v) < t_e(v)$. Como consequência, não é difícil checar que

$$R_n(t_e(v)v) = R_e(t_e(v)v) > \lambda.$$

Uma vez que o funcional $R_n(tv)$ é contínuo e decrescente, para todo $t > t_n(v)$, segue-se que existe $t_\lambda > t_e(v)$ de tal forma que $R_n(t_\lambda v) = \lambda$, isto é, $t_\lambda v \in \mathcal{N}$. Dessa forma, como a projeção em \mathcal{N}^+ e \mathcal{N}^- é única (veja a Proposição 1.24), obtemos uma contradição. Dessa forma, a estimativa (1-44) é verdadeira. Logo, tomando $t = t^{n,-}(v) = 1$ e usando a estimativa (1-44), encontramos que $R_n(v) < R_e(v)$, para cada $t_e(v) < 1$. A última condição prova que

$$\lambda = R_n(t^{n,-}(v)v) = R_n(v) < R_e(v), \text{ para cada } \lambda \in (0, \lambda_*).$$

Portanto, a Observação 1.12 e o Lema 1.42 garantem que $c_{\mathcal{N}^-} = J(v) > 0$. Isso conclui a prova do item (a). Agora, provaremos o item (b). É evidente pela Proposição 1.25 que existe $z \in X \setminus \{0\}$ de modo que $\lambda_* = S_e(z)$, onde z é um ponto crítico do funcional J . Observe que $t = t^{n,-}(z) = t_e(z) = 1$ se, e somente se, $R_n(tz) = R_e(tz)$ com

$$\lambda = \lambda_* = S_e(z) = R_e(t_e(z)z) = R_e(z) = R_e(t^{n,-}(z)z).$$

Sendo assim, a Observação 1.12 nos fornece que $J(z) = 0$. Consequentemente, deduzimos que

$$J(v) = \inf_{w \in \mathcal{N}^-} J(w) \leq J(z) = 0.$$

Isso significa que $R_e(v) \leq \lambda = \lambda_*$. Por outro lado, não é difícil verificar que $\lambda = \lambda_* \leq S_e(v) = R_e(t_e(v)v)$, para algum $t_e(v) > 0$. Dado $v \in \mathcal{N}^-$, mencionamos que $t_n(v) < t_e(v) \leq t^{n,-}(v) = 1$. Como resultado, obtemos que $\lambda = \lambda_* = R_n(v) \leq R_e(v)$ com $1 \in [t_e(v), +\infty)$. Concluimos pela Observação 1.12 que $J(v) \geq 0$. Isso completa a prova do item (b).

Finalmente, mostraremos o item (c). Para isso, assuma que $\lambda \in (\lambda_*, \lambda^*)$ seja satisfeito. Considere $v \in \mathcal{N}^-$ uma função fixada. É fácil verificar pela Proposição 1.25 que existe uma função $z \in X \setminus \{0\}$ tal que $\lambda_* = S_e(z)$. Esse fato implica que $\lambda_* = S_e(z) = R_e(t_e(z)z) < \lambda$. Sob esta afirmação, observamos que $t^{n,-}(v) \in (0, t_e(v))$. Como resultado, encontramos que $R_e(tv) < R_n(tv)$, para cada $t \in (0, t_e(v))$. Em particular, tomando $t = t^{n,-}(v)$, obtemos

$$R_e(t^{n,-}(v)v) < R_n(t^{n,-}(v)v) = \lambda.$$

Segue da Observação 1.12 que $J(t^{n,-}(v)v) < 0$. Portanto, temos que $c_{\mathcal{N}^-} < 0$. Isso finaliza a prova do item (c). \square

Existência, não existência e multiplicidade de soluções para um problema elíptico do tipo Kirchhoff em \mathbb{R}^N

Neste capítulo, abordamos a existência, não existência e multiplicidade de soluções para o seguinte problema elíptico não local:

$$\begin{cases} -m(\|\nabla u\|_2^2) \Delta u + V(x)u = \lambda a(x)|u|^{q-2}u - \theta b(x)|u|^{p-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (\mathcal{P}_\theta)$$

onde $N \geq 3$, os parâmetros $\lambda, \theta > 0$ e o potencial $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ muda de sinal.

Nos últimos anos, os problemas elípticos do tipo Kirchhoff têm sido amplamente explorados em estudos matemáticos. Uma das dificuldades encontradas nesse tipo de problema está relacionada à presença do termo não local $m(\|\nabla u\|_2^2)$. Essa complexidade matemática acrescenta um elemento particularmente intrigante ao nosso estudo, o qual se tornará evidente ao longo deste capítulo.

Em resumo, nosso principal objetivo é provar que o problema (\mathcal{P}_θ) possui pelo menos uma solução ground state e pelo menos uma solução bound state, variando conforme os valores de λ e θ . A abordagem central consiste na aplicação do método de minimização sobre a variedade de Nehari, aliado ao método do quociente de Rayleigh não linear.

No que segue, consideramos as seguintes hipóteses para o problema (\mathcal{P}_θ) :

- (m_1) A função $m : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfaz $m(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t^\sigma$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ com $0 < \sigma < \frac{2}{N-2}$;
- (a_1) $2 < 2(\sigma + 1) < q < p < 2^*$;
- (a_2) As funções $a, b : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem $a \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, onde $a(x), b(x) > 0$ q.t.p. em \mathbb{R}^N ;
- (v_1) O potencial V pertence a $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, e existe uma constante $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq -V_0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$;

(v₂) Considere

$$\delta := \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N), \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}=1} \int_{\mathbb{R}^N} [\alpha_1 |\nabla u|^2 + V(x)u^2] dx > 0; \quad (2-1)$$

(v₃) Para cada $M > 0$, segue-se que $|\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\}| < +\infty$.

Salientamos que as funções a e b , estabelecidas no problema (\mathcal{P}_θ) , desempenham um papel fundamental para alcançarmos os objetivos propostos. Na maioria dos resultados obtidos neste capítulo, utilizamos exclusivamente a hipótese (a_2) . Entretanto, em outros resultados, adotamos as seguintes hipóteses adicionais:

$$(b_1) \frac{a(x)^{\frac{p}{p-q}}}{b(x)^{\frac{q}{p-q}}} \in L^1(\mathbb{R}^N);$$

(b₂) Existe uma constante positiva b_0 tal que $b(x) \geq b_0$.

Ao longo do capítulo, tornar-se-á evidente a utilidade destas hipóteses adicionais.

2.1 Estrutura variacional do problema

Esta seção apresenta poucas diferenças em relação à seção do capítulo anterior, na qual discutimos a estrutura variacional do problema (\mathcal{P}_λ) . Por uma questão de completude e organização, optamos por repetir os argumentos aqui. Iniciamos relembrando definições fundamentais sobre métodos variacionais. Assim, introduzimos um subespaço próprio de $H^1(\mathbb{R}^N)$ definido por

$$X = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < +\infty \right\},$$

equipado com o produto interno dado por

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [\alpha_1 \nabla u \nabla \varphi + V(x)u\varphi] dx, \quad \varphi \in X. \quad (2-2)$$

A sua norma usual é dada por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} [\alpha_1 |\nabla u|^2 + V(x)u^2] dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in X.$$

Observação 2.1 *Observa-se facilmente que, mesmo na presença de uma mudança de sinal no potencial V , a expressão (2-2) realmente define um produto interno em X . A principal dificuldade está em garantir que (2-2) satisfaça a positividade. Nesse caso, temos que existe uma constante $\delta > 0$ que satisfaz*

$$0 = \langle u, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [\alpha_1 |\nabla u|^2 + V(x)u^2] dx \geq \delta \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \geq 0,$$

veja a estimativa (2-1). Desse modo, tem-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Como consequência, o espaço X equipado com a norma usual $\|\cdot\|$ constitui um espaço de Hilbert. A abordagem central consiste na construção de $\tilde{V}(x) = V(x) + V_0 + 1 > 0$.

Agora, apresentamos um exemplo interessante que atende todas as hipóteses sobre o potencial V mencionadas anteriormente. Ressaltamos que, no Apêndice A, podem ser encontrados outros exemplos de potenciais V que satisfazem outras condições.

Exemplo 2.2 Considere o potencial $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & \text{se } x \in B_1(0), \\ 1 + |x|, & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus B_1(0), \end{cases}$$

onde $V_0 > 0$, $V(x) := V^+(x) - V^-(x)$ com $V^\pm(x) := \max\{\pm V(x), 0\}$ e $B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$ a bola unitária centrada na origem. Consequentemente, inferimos que

$$V^-(x) = \begin{cases} V_0, & \text{se } x \in B_1(0), \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus B_1(0), \end{cases} \quad e \quad V^+(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in B_1(0), \\ 1 + |x|, & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus B_1(0). \end{cases}$$

É fácil ver que V é não periódico, coercivo, $[V(x)]^{-1} \notin L^1(\mathbb{R}^N)$ e satisfaz as hipóteses (v_1) e (v_3) . Além disso, para $V_0 > 0$ pequeno, temos pelas desigualdades de Gagliardo-Nirenberg [16, Teorema 9.9] e Hölder com expoentes $\frac{2^*}{2} > 1$ e $\frac{2^*}{2^*-2} > 1$, que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} [\alpha_1 |\nabla u|^2 + V(x)u^2] dx &= \int_{\mathbb{R}^N} [\alpha_1 |\nabla u|^2 + V^+(x)u^2] dx - \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2 dx \\ &\geq -V_0 \left(\int_{B_1(0)} 1^{\frac{N}{2}} dx \right)^{\frac{2}{N}} \left(\int_{B_1(0)} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \alpha_1 |\nabla u|^2 dx \\ &= -V_0 |B_1(0)|^{\frac{2}{N}} \|u\|_{2^*}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \alpha_1 |\nabla u|^2 dx \\ &\geq \left(1 - \frac{V_0}{C\alpha_1} |B_1(0)|^{\frac{2}{N}} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \alpha_1 |\nabla u|^2 dx \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

desde que $V_0 < \frac{C\alpha_1}{|B_1(0)|^{\frac{2}{N}}}$. A última condição garante que δ dado em (2-1) está bem definido. Nesta etapa, provaremos que $\delta > 0$. Para isso, suponha por contradição

que $\delta = 0$. Nesse caso, existe uma sequência minimizante $(u_k) \in X$ de tal forma que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_k^2 dx = 1 \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^N} [\alpha_1 |\nabla u_k|^2 + V(x)u_k^2] dx = o_k(1).$$

Um cálculo simples afirma que

$$\begin{aligned} o_k(1) &= \int_{\mathbb{R}^N} [\alpha_1 |\nabla u_k|^2 + V^+(x)u_k^2 - V^-(x)u_k^2] dx \\ &\geq C_0 \int_{\mathbb{R}^N} [\alpha_1 |\nabla u_k|^2 + V^+(x)u_k^2] dx, \end{aligned}$$

onde C_0 é uma constante positiva. Como resultado, pode-se provar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \alpha_1 |\nabla u_k|^2 dx = o_k(1) \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^N} V^+(x)u_k^2 dx = o_k(1). \quad (2-3)$$

No entanto, deduzimos que

$$o_k(1) = \int_{\mathbb{R}^N} V^+(x)u_k^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)} V^+(x)u_k^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)} u_k^2 dx.$$

Isso significa que

$$\int_{B_1(0)} u_k^2 dx + o_k(1) = 1.$$

Por outro lado, aplicando novamente as desigualdades de Hölder e Gagliardo-Nirenberg, mencionamos que

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0)} u_k^2 dx &\leq \left(\int_{B_1(0)} 1^{\frac{N}{2}} dx \right)^{\frac{2}{N}} \left(\int_{B_1(0)} |u_k|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \\ &\leq \frac{|B_1(0)|^{\frac{N}{2}}}{C\alpha_1} \int_{\mathbb{R}^N} \alpha_1 |\nabla u_k|^2 dx. \end{aligned}$$

Observe que a última desigualdade, juntamente com a estimativa (2-3), implica que

$$\int_{B_1(0)} u_k^2 dx = o_k(1),$$

o que é uma contradição. Portanto, temos que $\delta > 0$ de modo que o potencial V satisfaz a hipótese (v_2) com $V_0 > 0$ suficientemente pequeno.

Uma vez que o conjunto X é não vazio (consulte o Exemplo 1.1), definimos o funcional energia $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (\mathcal{P}_θ) por

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)} \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx + \frac{\theta}{p} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx.$$

Conforme nossas hipóteses, uma função $u \in X$ é um ponto crítico para o funcional J se, e somente se, u é uma solução fraca para o problema (\mathcal{P}_θ) . Nessa perspectiva, a formulação fraca é estabelecida da seguinte maneira:

Definição 2.3 Dizemos que $u \in X$ é solução fraca para o problema (\mathcal{P}_θ) se, e somente se,

$$\langle u, \varphi \rangle + \alpha_2 \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma} = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^{q-2}u\varphi dx - \theta \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^{p-2}u\varphi dx,$$

para todo $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Observamos que o funcional energia J é de classe $C^2(X; \mathbb{R})$ (veja, por exemplo, o Apêndice B). Esse fato nos permite assegurar que

$$\begin{cases} J'(u)u = \|u\|^2 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \lambda \|u\|_{q,a}^q + \theta \|u\|_{p,b}^p, \\ J''(u)(u, u) = \|u\|^2 + \alpha_2(2\sigma + 1) \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \lambda(q-1) \|u\|_{q,a}^q + \theta(p-1) \|u\|_{p,b}^p, \end{cases}$$

onde definimos

$$\|u\|_{q,a}^q = \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx \quad \text{e} \quad \|u\|_{p,b}^p = \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx, \quad u \in X.$$

Assim como no Capítulo 1, para atingir os objetivos propostos, é necessário definir um conjunto denominado *variedade de Nehari* da seguinte forma:

$$\mathcal{N} := \left\{ u \in X \setminus \{0\} : \lambda \|u\|_{q,a}^q = \|u\|^2 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta \|u\|_{p,b}^p \right\}. \quad (2-4)$$

Para uma análise mais aprofundada, inspiramo-nos em algumas ideias discutidas nos trabalhos [55] e [56], nos quais a *variedade de Nehari* é dividida em três subconjuntos disjuntos de tal forma que $\mathcal{N} := \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+ &:= \{u \in \mathcal{N} : J'(u)u = 0 \text{ e } J''(u)(u, u) > 0\}, \\ \mathcal{N}^- &:= \{u \in \mathcal{N} : J'(u)u = 0 \text{ e } J''(u)(u, u) < 0\}, \\ \mathcal{N}^0 &:= \{u \in \mathcal{N} : J'(u)u = 0 \text{ e } J''(u)(u, u) = 0\}. \end{aligned}$$

Pela construção do conjunto \mathcal{N} , observamos que o mesmo não é vazio. Desse modo, dado $u \in \mathcal{N}$, tem-se que

$$\begin{aligned} J''(u)(u, u) &= (2-q)\|u\|^2 + \alpha_2(2(\sigma+1)-q)\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta(p-q)\|u\|_{p,b}^p \\ &= (2-p)\|u\|^2 + \alpha_2(2(\sigma+1)-p)\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \lambda(p-q)\|u\|_{q,a}^q. \end{aligned} \quad (2-5)$$

Na etapa atual, definimos um conjunto não vazio que trata do comportamento do funcional energia J quando atinge o valor zero, isto é,

$$\mathcal{E} := \left\{ u \in X \setminus \{0\} : \frac{\lambda}{q} \|u\|_{q,a}^q = \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)} \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \frac{\theta}{p} \|u\|_{p,b}^p \right\}. \quad (2-6)$$

Adaptando algumas ideias abordadas em [42, 43], obtemos por (2-4) e (2-6), que

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{N} \text{ se, e somente se, } R_n(u) &= \lambda, \\ u \in \mathcal{E} \text{ se, e somente se, } R_e(u) &= \lambda, \end{aligned}$$

onde $R_n, R_e : X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ representam os quocientes de Rayleigh não lineares associados ao parâmetro $\lambda > 0$, sendo definidos como:

$$R_n(u) := \frac{\|u\|^2 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta \|u\|_{p,b}^p}{\|u\|_{q,a}^q}, \quad u \in X \setminus \{0\} \quad (2-7)$$

e

$$R_e(u) := \frac{\frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)} \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \frac{\theta}{p} \|u\|_{p,b}^p}{\frac{1}{q} \|u\|_{q,a}^q}, \quad u \in X \setminus \{0\}. \quad (2-8)$$

Através de um cálculo simples, utilizando a imersão contínua de Sobolev e a hipótese (a_1) , temos que os quocientes R_n e R_e estão bem definidos e pertencem a $C^2(X \setminus \{0\}; \mathbb{R})$. Este cálculo segue ideias semelhantes às do Apêndice B.

Ao analisarmos (2-4), (2-7) e (2-8), podemos estabelecer duas definições que serão fundamentais para garantir a existência de pontos críticos para o funcional J .

Definição 2.4 *Considerando o conjunto \mathcal{N} , definimos os seguintes níveis:*

$$c_{\mathcal{N}^+} = \inf_{u \in \mathcal{N}^+} J(u), \quad c_{\mathcal{N}^-} = \inf_{u \in \mathcal{N}^-} J(u) \quad e \quad c_{\mathcal{N}^0} = \inf_{u \in \mathcal{N}^0} J(u).$$

Definição 2.5 *A partir de (2-7) e (2-8), definimos as funções $S_n, S_e : X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ como:*

$$S_n(u) = \inf_{t>0} R_n(tu) \quad e \quad S_e(u) = \inf_{t>0} R_e(tu).$$

Consequentemente, os valores extremais são determinados por

$$\lambda^* = \inf_{u \in X \setminus \{0\}} S_n(u) \quad e \quad \lambda_* = \inf_{u \in X \setminus \{0\}} S_e(u).$$

Observação 2.6 *Antes de explorarmos as fibras do funcional energia J , estudaremos a não linearidade presente no lado direito do problema (\mathcal{P}_θ) . Essa não linearidade traz consigo algumas dificuldades adicionais, sendo a busca por soluções fracas para o problema (\mathcal{P}_θ) a primeira complicação a ser enfrentada. Isso ocorre devido ao fato de que a função*

$$\mathcal{B}(x, t) := \lambda a(x) |t|^{q-2} t - \theta b(x) |t|^{p-2} t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2-9)$$

não satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz e não possui sinal definido, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $a(x), b(x) > 0$ q.t.p. em \mathbb{R}^N . Com efeito, segue pela hipótese (a_1) que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{B}(x, t)}{t} = 0 \quad e \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{B}(x, t)}{t} = -\infty.$$

Isso evidencia que a função \mathcal{B} muda de sinal. Além disso, um cálculo simples garante que $\mathcal{B}(x, t) > 0$, para cada $t \in (0, \varepsilon)$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Note também que \mathcal{B} é uma função ímpar. Agora, considere

$$\mathcal{B}_1(x, t) = \lambda a(x)t^{q-1} - \theta b(x)t^{p-1},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $t > 0$. Com base nessa definição, inferimos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{B}_1(x, t) = 0 \Leftrightarrow t = t_0 = \left[\left(\frac{q-1}{p-1} \right) \frac{\lambda a(x)}{\theta b(x)} \right]^{\frac{1}{p-q}} > 0. \quad (2-10)$$

Não é difícil checar pela hipótese (a_1) que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d}{dt}\mathcal{B}_1(x, t)}{t^{q-2}} = \lambda a(x)(q-1) > 0$$

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d}{dt}\mathcal{B}_1(x, t)}{t^{p-2}} = -\theta b(x)(p-1) < 0.$$

Logo, para $t > 0$ suficientemente pequeno, temos que \mathcal{B}_1 é estritamente crescente, e para $t > 0$ suficientemente grande, verificamos que \mathcal{B}_1 é estritamente decrescente. Consequentemente, ao derivar novamente a função $\mathcal{B}_1(x, t)$ em relação a t e substituir a estimativa (2-10), encontramos que

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{B}_1(x, t_0) = ((q-1)\lambda a(x))^{\frac{p-3}{p-q}} \left[\frac{1}{(p-1)\theta b(x)} \right]^{\frac{q-3}{p-q}} (q-p) < 0.$$

De maneira análoga, podemos realizar o mesmo estudo para $t < 0$. Para uma melhor compreensão geométrica, veja a Figura 2.1.

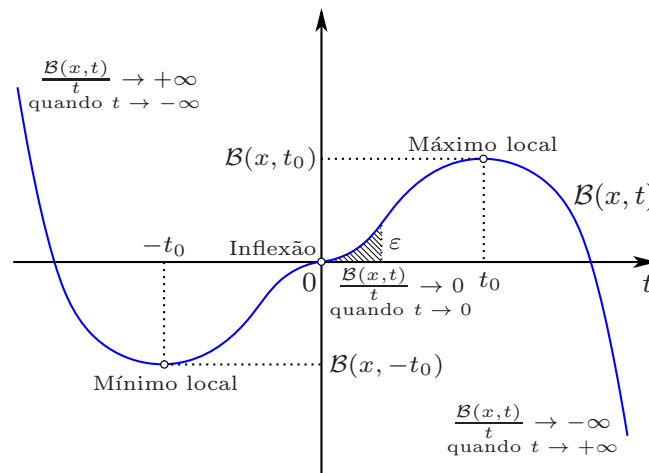


Figura 2.1: Comportamento geométrico da função $\mathcal{B}(x, t)$.

2.2 Resultados preliminares acerca dos métodos do quociente de Rayleigh e Nehari

A proposta central aqui é apresentar propriedades fundamentais relacionadas à estrutura topológica do funcional energia J , juntamente com o método do quociente de Rayleigh não linear e o método de minimização sobre a variedade de Nehari. Inicialmente, introduzimos uma função denominada *fibering map* $\omega_u : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\omega_u(t) := J(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{t^{2(\sigma+1)}}{2(\sigma+1)}\alpha_2\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{t^q}{q}\lambda\|u\|_{q,a}^q + \frac{t^p}{p}\theta\|u\|_{p,b}^p, \quad (2-11)$$

para todo $t > 0$. Desse modo, derivando a função $\omega_u(t)$ em relação a t , obtemos

$$\omega'_u(t) = t\|u\|^2 + \alpha_2 t^{2\sigma+1}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \lambda t^{q-1}\|u\|_{q,a}^q + \theta t^{p-1}\|u\|_{p,b}^p,$$

e

$$\omega''_u(t) = \|u\|^2 + \alpha_2(2\sigma+1)t^{2\sigma}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - (q-1)t^{q-2}\lambda\|u\|_{q,a}^q + (p-1)t^{p-2}\theta\|u\|_{p,b}^p.$$

Uma consequência imediata é que $\omega'_u(t) = 0$ se, e somente se, $tu \in \mathcal{N}$. Vale destacar que as mesmas propriedades estabelecidas no Capítulo 1 aplicam-se nesta seção.

Outro ponto relevante decorrente da equação (2-11) é a possibilidade de analisar as funções $\omega_u(t)$ e $\omega'_u(t)$ para valores de t próximos ao infinito e à origem. Isso implica que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\omega_u(t)}{t^2} > 0; \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\omega_u(t)}{t^p} > 0; \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\omega'_u(t)}{t} > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\omega'_u(t)}{t^{p-1}} > 0.$$

O primeiro resultado desta seção, que considera $\inf V(x) > 0$, é padrão e trata de questões relacionadas à compacidade. Esse resultado é crucial para garantir a imersão compacta em nosso ambiente de trabalho, mesmo quando o potencial V satisfaz a hipótese (v_1) .

Lema 2.7 *Suponha que $V(x) \geq V_0 > 0$ e $|\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\}| < +\infty$, para cada $M > 0$. Então a imersão $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ é contínua, para cada $r \in [2, 2^*]$. Além disso, a imersão $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ é compacta, para cada $r \in [2, 2^*)$.*

Prova. Note que a imersão $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ é contínua pelos mesmos argumentos apresentados na Observação 1.7, na qual omitimos os detalhes da prova. Agora, considere uma sequência $(u_k) \in X$ de modo que $u_k \rightharpoonup u$ em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Nessas condições, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_k - u|^2 dx = \int_{B(0,R)} |u_k - u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,R)} |u_k - u|^2 dx.$$

Dessa forma, a imersão compacta $H^1(B(0, R)) \hookrightarrow L^r(B(0, R))$ garante, para cada $r \in [2, 2^*)$ e $R > 0$, que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B(0, R)} |u_k - u|^2 dx = 0.$$

Em particular, fixando $R > 0$ e dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 = k_0(\varepsilon, R) \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\int_{B(0, R)} |u_k - u|^2 dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k \geq k_0. \quad (2-12)$$

Desse modo, resta provar que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0, R)} |u_k - u|^2 dx = \int_Y |u_k - u|^2 dx + \int_W |u_k - u|^2 dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

onde

$$Y := (\mathbb{R}^N \setminus B(0, R)) \cap [V(x) \geq M] \quad \text{e} \quad W := (\mathbb{R}^N \setminus B(0, R)) \cap [V(x) < M].$$

Com efeito, não é difícil checar que $Y \cup W = \mathbb{R}^N \setminus B(0, R)$ e

$$\int_Y |u_k - u|^2 dx \leq \frac{1}{M} \int_Y V(x) |u_k - u|^2 dx \leq \frac{1}{M} \|u_k - u\|^2.$$

Como $u_k \rightharpoonup u$ em X , tem-se que existe $C_0 > 0$ tal que $\|u_k\| \leq C_0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Esse fato, em conjunto com a desigualdade triangular, permite concluir que

$$\int_Y |u_k - u|^2 dx \leq \frac{1}{M} \|u_k - u\|^2 \leq \frac{C_1}{M} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Além disso, utilizando a desigualdade de Hölder com os expoentes $\frac{N}{N-2}$ e $\frac{N}{2}$, e a imersão contínua $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ para cada $r \in [2, 2^*]$, inferimos que

$$\begin{aligned} \int_W |u_k - u|^2 dx &\leq \left(\int_W 1^{\frac{N}{2}} dx \right)^{\frac{2}{N}} \left(\int_W |u_k - u|^{2^*} dx \right)^{\frac{N-2}{N}} \\ &\leq C_2 |W|^{\frac{2}{N}} \|u_k - u\|^2 \\ &\leq C_3 |W|^{\frac{2}{N}}, \end{aligned}$$

onde C_2 e $C_3 = C_3(N)$ são constantes positivas. Lembre-se que usando a hipótese (v_3) , mencionamos que $|W| \leq |[V(x) < M]| < +\infty$, para todo $M > 0$. A última afirmação, juntamente com o Teorema da Convergência Dominada implicam que

$$\begin{aligned} |W| &= \int_{(\mathbb{R}^N \setminus B(0, R)) \cap [V(x) < M]} dx \\ &\leq \int_{[V(x) < M]} \chi_{[\mathbb{R}^N \setminus B(0, R)]}(x) dx \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $R \rightarrow +\infty$. Nesse caso, para cada $\varepsilon > 0$, existe $R = R(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\int_W |u_k - u|^2 dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Consequentemente, deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,R)} |u_k - u|^2 dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2-13)$$

Combinando (2-12) e (2-13), concluímos que $u_k \rightarrow u$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Em vista da desigualdade de Interpolação, encontramos que $u_k \rightarrow u$ em $L^r(\mathbb{R}^N)$, para cada $r \in (2, 2^*)$ quando $k \rightarrow +\infty$. Isso completa a prova. \square

Apesar da variação de sinal no potencial V , o próximo resultado demonstra que podemos obter condições análogas às do Lema 2.7.

Lema 2.8 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) e (v_1) - (v_3) . Então a imersão $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ é contínua, para cada $r \in [2, 2^*]$. Além disso, a imersão $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ é compacta, para cada $r \in [2, 2^*)$.*

Prova. A imersão $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ é contínua pelos mesmos motivos apresentados no Lema 2.7, em conjunto com a identidade

$$\tilde{V}(x) = V(x) + V_0 + 1 \geq 1, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Adicionalmente, nosso objetivo aqui é provar que a imersão $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ é compacta, para cada $r \in [2, 2^*)$. De fato, considerando a identidade \tilde{V} e assumindo que $M > V_0 + 1$, temos pela hipótese (v_3) que

$$|\{x \in \mathbb{R}^N : \tilde{V}(x) \leq M\}| = |\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M - V_0 - 1\}| < +\infty.$$

Agora, suponha que $M \leq V_0 + 1 \leq V_0 + 2$ seja satisfeito. Um cálculo simples assegura que

$$\{x \in \mathbb{R}^N : \tilde{V}(x) \leq M\} \subset \{x \in \mathbb{R}^N : \tilde{V}(x) \leq V_0 + 2\}.$$

Segue da primeira parte que

$$|\{x \in \mathbb{R}^N : \tilde{V}(x) \leq M\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^N : \tilde{V}(x) \leq V_0 + 2\}| < +\infty.$$

Sendo assim, demonstramos que $|\{x \in \mathbb{R}^N : \tilde{V}(x) \leq M\}| < +\infty$, para todo $M > 0$. Portanto, o Lema 2.7 afirma que o subespaço

$$\tilde{X} := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{V}(x) u^2 dx < +\infty \right\}$$

está imerso compactamente em $L^r(\mathbb{R}^N)$, para cada $r \in [2, 2^*)$. Uma vez que $\tilde{X} = X$, o lema está provado. \square

Observação 2.9 *Assim como no Capítulo 1, notamos que os funcionais $R_n(tu)$ e $R_e(tu)$, definidos em (2-7) e (2-8), possuem um único ponto crítico, denotado por $t_n(u) > 0$ e $t_e(u) > 0$, respectivamente. Como a demonstração é análoga à prova da Proposição 1.8 e a Observação 1.9, optamos por omitir os detalhes. Nesse caso, introduza as seguintes funções relacionadas ao funcional $R_n(tu)$:*

$$G_n(t) := t^{2-q}\|u\|^2 + \alpha_2 t^{2(\sigma+1)-q} \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta t^{p-q} \|u\|_{p,b}^p,$$

e

$$\Lambda_n(tu) := \frac{-(q-2)t^{-2\sigma}\|u\|^2 + \theta(p-q)t^{p-2(\sigma+1)}\|u\|_{p,b}^p}{(q-2(\sigma+1))\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)}}.$$

Para o funcional $R_e(tu)$, definimos as seguintes funções:

$$G_e(t) := \frac{1}{2}t^{2-q}\|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)}t^{2(\sigma+1)-q}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \frac{\theta}{p}t^{p-q}\|u\|_{p,b}^p,$$

e

$$\Lambda_e(tu) := \frac{-(\sigma+1)(q-2)t^{-2\sigma}\|u\|^2 + \frac{2(\sigma+1)(p-q)}{p}\theta t^{p-2(\sigma+1)}\|u\|_{p,b}^p}{(q-2(\sigma+1))\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)}}.$$

Ademais, é fácil ver que as funções $\Lambda_n(tu)$ e $\Lambda_e(tu)$ verificam $\Lambda_n(tu) > \Lambda_e(tu)$, para todo $t > 0$ e $u \in X \setminus \{0\}$. Para uma compreensão mais detalhada, é recomendável consultar a Proposição 1.10.

A seguir, apresentamos uma abordagem interessante para a unicidade dos pontos críticos dos funcionais $R_n(tu)$ e $R_e(tu)$. Optamos por começar com o funcional $R_n(tu)$, pois a prova para o outro funcional é análoga, diferindo apenas por constantes. Dessa forma, usando a hipótese (a_1) , temos que $\frac{d}{dt}R_n(tu)|_{t=t_n(u)} = 0$ se, e somente se,

$$\theta(p-q)\|u\|_{p,b}^p = (q-2)t^{2-p}\|u\|^2 + \alpha_2(q-2(\sigma+1))t^{2(\sigma+1)-p}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)},$$

para todo $t = t_n(u) > 0$. Examinando a equação acima, introduzimos uma função $\mathcal{L}_1 : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}_1(t) := (q-2)t^{2-p}\|u\|^2 + \alpha_2(q-2(\sigma+1))t^{2(\sigma+1)-p}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)}.$$

Esta definição, juntamente com a hipótese (a_1) , implica que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{L}_1(t) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_1(t) = 0,$$

tal que $\frac{d}{dt}\mathcal{L}_1(t) < 0$, para todo $t = t_n(u) > 0$. Logo, a função \mathcal{L}_1 é estritamente decrescente. Por outro lado, é fácil ver que

$$\mathcal{L}_0(t) = \theta(p - q)\|u\|_{p,b}^p > 0.$$

Portanto, há um único ponto crítico $t = t_n(u) > 0$ para o funcional $R_n(tu)$. Esse ponto crítico corresponderá a um mínimo global. É fundamental destacar que a geometria possível das funções $\mathcal{L}_0(t)$ e $\mathcal{L}_1(t)$ está representada na Figura 2.2.

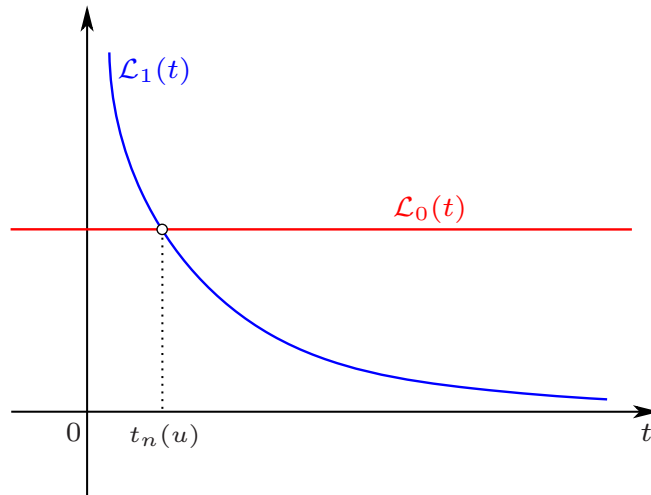


Figura 2.2: Existência e unicidade de $t_n(u) > 0$.

Observação 2.10 *Enfatizamos que as propriedades do quociente de Rayleigh apresentadas nas Observações 1.11 e 1.12, assim como nas Proposições 1.13 e 1.14, podem ser demonstradas para os funcionais R_n e R_e estabelecidos neste capítulo. Com o objetivo de estruturar esta seção, optamos por não provar esses resultados. No entanto, fazemos uso desses resultados em diversos momentos do presente capítulo. Além disso, analisando o mesmo cálculo dado em (1-10), segue-se que*

$$S_n(u) = \frac{1}{\|tu\|_{q,a}^q} \left[\left(\frac{p-2}{p-q} \right) \|tu\|^2 + \left(\frac{p-2(\sigma+1)}{p-q} \right) \alpha_2 \|\nabla(tu)\|_2^{2(\sigma+1)} \right].$$

Proposição 2.11 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (v_1) - (v_3) , $u \in X \setminus \{0\}$ e $t > 0$. Então,*

- (a) $\frac{d}{dt}R_n(tu) = (\Lambda_n(tu) - \alpha_2)\mathcal{O}(t, u);$
- (b) $\frac{d}{dt}R_e(tu) = \frac{q}{2(\sigma+1)}(\Lambda_e(tu) - \alpha_2)\mathcal{O}(t, u);$

onde a função $\mathcal{O} : (0, +\infty) \times X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\mathcal{O}(t, u) = \frac{(q - 2(\sigma + 1))t^{2\sigma+1-q} \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)}}{\|u\|_{q,a}^q}.$$

Prova. Utilizando a Observação 2.9, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}R_n(tu) &= \left[-\alpha_2 + \frac{(2-q)t^{-2\sigma}\|u\|^2}{(q-2(\sigma+1))\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)}} + \frac{\theta(p-q)t^{p-2(\sigma+1)}\|u\|_{p,b}^p}{(q-2(\sigma+1))\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)}} \right] \\ &\quad \cdot \left[\frac{(q-2(\sigma+1))t^{2\sigma+1-q}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)}}{\|u\|_{q,a}^q} \right] \\ &= (\Lambda_n(tu) - \alpha_2)\mathcal{O}(t, u). \end{aligned}$$

Com isso, finalizamos a demonstração do item (a). De maneira análoga, podemos demonstrar o item (b). Logo, a proposição está provada. \square

Neste momento, apresentamos um estudo sobre o comportamento das fibras dos funcionais R_n e R_e definidos em (2-7) e (2-8). Semelhante ao Capítulo 1, este estudo inclui as seguintes fibras: $Q_n(t) := R_n(tu)$ e $Q_e(t) := R_e(tu)$, para todo $t > 0$ e $u \in X \setminus \{0\}$. Como produto, deduzimos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} Q_n(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} Q_e(t) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} Q_n(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} Q_e(t) = +\infty.$$

Agora, ao analisar apenas a derivada da fibra $Q_n(t)$ em relação a t , inferimos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d}{dt}Q_n(t)}{t^{1-q}} = \frac{(2-q)\|u\|^2}{\|u\|_{q,a}^q} < 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d}{dt}Q_n(t)}{t^{p-q-1}} = \frac{\theta(p-q)\|u\|_{p,b}^p}{\|u\|_{q,a}^q} > 0.$$

Essa constatação assegura que $\frac{d}{dt}Q_n(t)$ é negativa para valores de $t > 0$ suficientemente pequenos e positiva para valores de $t > 0$ suficientemente grandes. Da mesma forma, aplicam-se as mesmas condições mencionadas anteriormente para $\frac{d}{dt}Q_e(t)$.

Observação 2.12 *Um ponto notavelmente interessante é a possibilidade de uma comparação algébrica entre as fibras Q_n e Q_e , conforme definido anteriormente. Isso é feito por meio da seguinte identidade:*

$$Q_n(t) - Q_e(t) = \frac{t}{q} \left(\frac{d}{dt}Q_e(t) \right), \quad t > 0. \quad (2-14)$$

Desse modo, para cada $t \in (0, t_e(u))$, obtemos que $Q_e(t) > Q_n(t)$, e para cada $t \in (t_e(u), +\infty)$, encontramos que $Q_e(t) < Q_n(t)$. Além disso, quando $t = t_e(u)$, tem-se que $Q_e(t) = Q_n(t)$. É relevante notar que, ao adaptarmos para o cenário deste capítulo, a demonstração da identidade (2-14) segue o mesmo raciocínio apresentado na Proposição 1.17.

Proposição 2.13 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (v_1) - (v_3) , $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Então a função t_n é (-1) -homogênea. Além disso, a função S_n é 0 -homogênea, contínua e fracamente semicontínua inferiormente.*

Prova. A demonstração desta proposição segue precisamente as mesmas ideias discutidas na Proposição 1.18, e nas Observações 1.19 e 1.21. \square

Proposição 2.14 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (v_1) - (v_3) , $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Então existe uma constante positiva $\mathcal{C} = \mathcal{C}(p, q, S_p^p, \theta, \|b\|_\infty^p)$ de modo que $\|v\| \geq \mathcal{C}$, para todo $v = t_n(u)u$. Além disso, a função S_n é limitada por baixo por uma constante positiva \mathcal{C}_β .*

Prova. Como $t_n(u) > 0$ é o único ponto de mínimo local para $R_n(tu)$, obtemos que $\frac{d}{dt}R_n(tu)|_{t=t_n(u)} = 0$ tal que

$$\frac{(q-2)t_n(u)\|u\|^2 + \alpha_2(q-2(\sigma+1))t_n^{2\sigma+1}(u)\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)}}{\|t_n(u)u\|_{q,a}^q} = \frac{\theta(p-q)t_n^{p-1}(u)\|u\|_{p,b}^p}{\|t_n(u)u\|_{q,a}^q}.$$

Uma manipulação algébrica simples na equação acima, utilizando a hipótese (a_2) e a imersão contínua $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$, para cada $r \in [2, 2^*]$, implica que

$$\begin{aligned} (q-2)\|v\|^2 &\leq (q-2)\|v\|^2 + \alpha_2(q-2(\sigma+1))\|\nabla v\|_2^{2(\sigma+1)} \\ &\leq \theta(p-q)S_p^p\|b\|_\infty^p\|v\|^p, \end{aligned}$$

onde $v = t_n(u)u$ é uma função auxiliar. A última desigualdade nos fornece que

$$\|v\| \geq \left[\frac{q-2}{\theta(p-q)S_p^p\|b\|_\infty^p} \right]^{\frac{1}{p-2}} =: \mathcal{C}. \quad (2-15)$$

Como resultado, temos que a função S_n é limitada por baixo por uma constante positiva \mathcal{C}_β . Com efeito, assumamos que a hipótese (a_2) seja satisfeita. Nesse caso, considere $(u_k) \in X \setminus \{0\}$ uma sequência minimizante tal que $S_n(u_k) \rightarrow \lambda^*$, quando $k \rightarrow +\infty$. Defina uma sequência normalizada $w_k = \frac{u_k}{\|u_k\|_{q,a}}$ com $\|w_k\|_{q,a} = 1$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Uma vez que a função S_n é 0-homogênea (veja a Proposição 2.13), inferimos que $S_n(u_k) = S_n(w_k) \rightarrow \lambda^*$, quando $k \rightarrow +\infty$. Dessa forma, encontramos

$$S_n(w_k) = \frac{\|w_k\|^2 + \alpha_2\|\nabla w_k\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta\|w_k\|_{p,b}^p}{\|w_k\|_{q,a}^q} \geq \|w_k\|^2.$$

Pela a imersão contínua $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$, para cada $r \in [2, 2^*]$, e pela hipótese (a_2) , mencionamos que $\|w_k\|^2 \geq \frac{\|w_k\|_{q,a}^2}{\|a\|_\infty^2 S_q^2}$. Uma consequência imediata é que

$$S_n(w_k) \geq \|w_k\|^2 \geq \frac{\|w_k\|_{q,a}^2}{\|a\|_\infty^2 S_q^2} = \frac{1}{\|a\|_\infty^2 S_q^2} =: \mathcal{C}_\beta.$$

Portanto, a função S_n é limitada por baixo por uma constante positiva. Além disso, aplicando a hipótese (b_1) e considerando que $t_n(u) > 0$ é o único ponto de mínimo

local para $R_n(tu)$, deduzimos que

$$\begin{aligned}\theta(p-q)\|v\|_{p,b}^p &= (q-2)\|v\|^2 + \alpha_2(q-2(\sigma+1))\|\nabla v\|_2^{2(\sigma+1)} \\ &\geq (q-2)\|v\|^2,\end{aligned}$$

para todo $v := t_n(u)u$. A última estimativa, em conjunto com a estimativa (2-15), mostra que

$$\|v\|_{p,b}^p \geq \left(\frac{q-2}{\theta(p-q)}\right) \mathcal{C}^2 =: \mathcal{C}_\theta.$$

Isso significa que $\|v\|_{p,b} \geq \mathcal{C}_\theta^{\frac{1}{p}} > 0$. No que segue, a desigualdade de Hölder com os expoentes $\frac{p}{q}$ e $\frac{p}{p-q}$ garante que

$$\begin{aligned}\|w\|_{q,a}^q &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{a(x)}{b(x)^{\frac{q}{p}}} b(x)^{\frac{q}{p}} |w|^q dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{a(x)}{b(x)^{\frac{q}{p}}} \right|^{\frac{p}{p-q}} dx \right)^{\frac{p-q}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} b(x) |w|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \\ &= \left\| \frac{a}{b^{\frac{q}{p}}} \right\|_{\frac{p}{p-q}} \|w\|_{p,b}^q, \quad w \in X \setminus \{0\}.\end{aligned}\tag{2-16}$$

Logo, ao utilizar a desigualdade (2-16) na definição da função S_n , em conjunto com a hipótese (b_1) , tem-se que

$$S_n(v) \geq \frac{\theta\|v\|_{p,b}^p}{\|v\|_{q,a}^q} \geq \frac{\theta\|v\|_{p,b}^{p-q}}{\left\| \frac{a}{b^{\frac{q}{p}}} \right\|_{\frac{p}{p-q}}} \geq \frac{\mathcal{C}_\theta^{\frac{p-q}{p}}}{\left\| \frac{a}{b^{\frac{q}{p}}} \right\|_{\frac{p}{p-q}}} =: \mathcal{C}_\beta.$$

Isso completa a prova. \square

Antes de apresentarmos a próxima proposição, exploramos alguns exemplos relacionados à hipótese (b_1) . Em essência, estabelecemos condições precisas sobre as funções a e b para que a nova função $F(x) = \frac{a(x)^{\frac{p}{p-q}}}{b(x)^{\frac{q}{p-q}}} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Nesse contexto, ao assumir que a função a é uma constante positiva, concluímos que a função b precisa crescer no infinito para que F seja integrável. Por outro lado, ao considerarmos a função b como uma constante, observamos que a função a não pode crescer no infinito para que F seja integrável. Assim, a parte mais intrigante da hipótese (b_1) é que, mesmo que as funções a e b não sejam integráveis, é suficiente que a função F seja integrável para que todos os nossos resultados sejam válidos. Essa característica abre um leque considerável de exemplos que atendem a essa condição.

Exemplo 2.15 *Um exemplo clássico de $F(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ é dado por $b(x) = 1$ e $a(x) = \frac{1}{(1+|x|^{2l})^l}$, onde $l > \frac{N(p-q)}{2p} > 0$. De fato, aplicando a fórmula da Co-área [27,*

Teorema 5, Apêndice C], juntamente com $l > \frac{N(p-q)}{2p}$ e $r^2 + 1 \geq r^2$, encontramos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{lp}{p-q}}} dx &= \mathcal{C}_N \int_0^1 \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^{\frac{lp}{p-q}}} dr + \mathcal{C}_N \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_1^z \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^{\frac{lp}{p-q}}} dr \\ &\leq \mathcal{C}_N \int_0^1 \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{lp}{p-q}}} dr + \mathcal{C}_N \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_1^z r^{N-1-\frac{2lp}{p-q}} dr \\ &\leq \mathcal{C}_N + \mathcal{C}_N \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\frac{z^{N-\frac{2lp}{p-q}}}{N-\frac{2lp}{p-q}} \right) - \frac{\mathcal{C}_N}{N-\frac{2lp}{p-q}} \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Para uma melhor compreensão do comportamento geométrico, remetemos o leitor à Figura 2.3 abaixo.

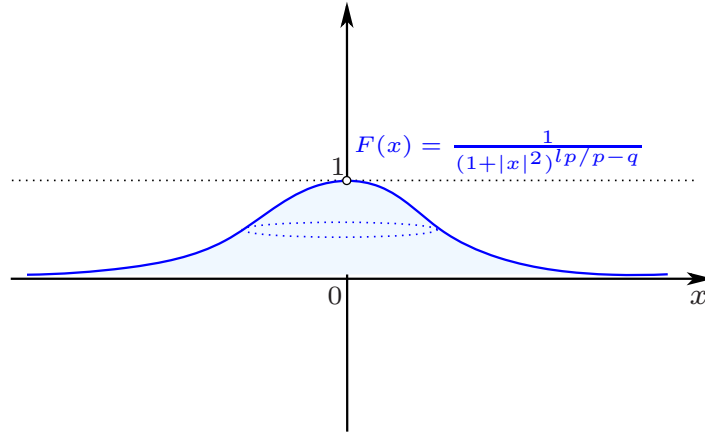


Figura 2.3: Possível gráfico da função $F(x)$.

Proposição 2.16 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) e (v_1) - (v_3) . Então existe uma função $u \in X \setminus \{0\}$ tal que $\lambda^* = \inf_{w \in X \setminus \{0\}} S_n(w) = S_n(u)$.*

Prova. Esta proposição é demonstrada utilizando exatamente as mesmas ideias discutidas na Proposição 1.23, em conjunto com a Observação 2.10, na qual optamos por omitir os detalhes. \square

Neste momento, considere o conjunto $U_n := \{u \in X \setminus \{0\} : \lambda > S_n(u)\}$. Essa definição garante que, para qualquer função $u \in U_n$, a identidade $\omega_u(t) = J(tu)$ possui exatamente dois pontos críticos distintos, a saber, $t^{n,-}(u)$ e $t^{n,+}(u)$. Isso fica evidente na próxima proposição.

Proposição 2.17 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (v_1) - (v_3) , $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Então para cada $u \in U_n$, a identidade $\omega_u(t) = J(tu)$ possui exatamente dois pontos críticos distintos, de modo que $0 < t^{n,-}(u) < t_n(u) < t^{n,+}(u) < +\infty$ onde*

- (a) O número positivo $t^{n,+}(u)$ é um ponto de mínimo local para a identidade ω_u tal que $t^{n,+}(u)u \in \mathcal{N}^+$;
- (b) O número positivo $t^{n,-}(u)$ é um ponto de máximo local para a identidade ω_u tal que $t^{n,-}(u)u \in \mathcal{N}^-$;
- (c) Os conjuntos de Nehari \mathcal{N}^+ e \mathcal{N}^- são não vazios, para cada $u \in U_n$;
- (d) As funções $u \mapsto t^{n,+}(u)$ e $u \mapsto t^{n,-}(u)$ pertencem a $C^1(U_n; \mathbb{R})$.

Prova. Considere uma função $u \in X \setminus \{0\}$. Assuma que $\lambda > S_n(u)$. Nesse caso, é fácil ver que

$$\lambda > S_n(u) = \inf_{t>0} Q_n(t) = Q_n(t_n(u)) = R_n(t_n(u)u).$$

Como $Q_n(t) = R_n(tu)$ é uma função contínua para todo $t > 0$, concluímos que $Q_n(t)$ é estritamente crescente quando $t > t_n(u)$ e estritamente decrescente quando $t < t_n(u)$. Essas condições implicam que a equação $Q_n(t) = \lambda$ possui exatamente duas raízes. Dessa forma, as raízes são dadas por $t^{n,+}(u)$ e $t^{n,-}(u)$ onde

$$0 < t^{n,-}(u) < t_n(u) < t^{n,+}(u) < +\infty.$$

Não é difícil verificar, pela Observação 1.11, que $t^{n,+}(u)$ e $t^{n,-}(u)$ são pontos críticos de $\omega_u(t) = J(tu)$. Isso significa que

$$\left. \frac{d}{dt} Q_n(t) \right|_{t=t^{n,+}(u)} > 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{d}{dt} Q_n(t) \right|_{t=t^{n,-}(u)} < 0.$$

Desse modo, usando a Proposição 1.14, mencionamos

$$0 < \left. \frac{d}{dt} Q_n(t) \right|_{t=t^{n,+}(u)} = \frac{1}{t^{n,+}(u)} \frac{J''(t^{n,+}(u)u)(t^{n,+}(u)u, t^{n,+}(u)u)}{Q_\theta(t^{n,+}(u)u)}.$$

Segue que $J''(t^{n,+}(u)u)(t^{n,+}(u)u, t^{n,+}(u)u) > 0$ tal que $t^{n,+}(u)u \in \mathcal{N}^+$. Isso finaliza a prova do item (a). Salientamos ainda que a prova do item (b) utiliza exatamente os mesmos cálculos do item (a), substituindo $t^{n,+}(u)$ por $t^{n,-}(u)$. Além disso, a prova do item (c) decorre imediatamente dos itens (a) e (b). Neste momento, defina uma função auxiliar $W : (0, +\infty) \times U_n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $W(t, u) = \Lambda_n(tu) - \alpha_2$. Um cálculo simples mostra que $W(t, u) \in C^1((0, +\infty) \times U_n, \mathbb{R})$. Sob estas condições, temos que $W(t, u) = 0$ se, e somente se, $\Lambda_n(tu) = \alpha_2$. Como resultado, inferimos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} W(t, u) &= \frac{1}{t} \left[\frac{2\sigma(q-2)\|tu\|^2 + \theta(p-q)(p-2(\sigma+1))\|tu\|_{p,b}^p}{(q-2(\sigma+1))\|\nabla(tu)\|_2^{2(\sigma+1)}} \right] \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

para cada $(t, u) \in (0, +\infty) \times U_n$ de tal forma que $W(t, u) = 0$. Em particular, escolhendo $t = t^{n,+}(u)$ ou $t = t^{n,-}(u)$, temos pelo Teorema da Função Implícita [25,

Teorema 2.4.1] que $u \mapsto t^{n,+}(u)$ e $u \mapsto t^{n,-}(u)$ pertencem a $C^1(U_n; \mathbb{R})$. Isso completa a prova do item (d). \square

Assim como na função S_n , podemos obter as mesmas propriedades para a função S_e . Essas propriedades são estabelecidas na seguinte proposição.

Proposição 2.18 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (v_1) - (v_3) e $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$. Então,*

- (a) *A função t_e é (-1) -homogênea;*
- (b) *A função S_e é 0 -homogênea e fracamente semicontínua inferiormente;*
- (c) *A função S_e é limitada por baixo por uma constante positiva \mathcal{C}_Φ ;*
- (d) *Existe uma função $u \in X \setminus \{0\}$ de modo que $\lambda_* = \inf_{w \in X \setminus \{0\}} S_e(w) = S_e(u)$;*
- (e) *Existem dois pontos $t^{e,+}(u)$ e $t^{e,-}(u)$ com $0 < t^{e,-}(u) < t_e(u) < t^{e,+}(u) < +\infty$ tais que $t^{e,+}(u)u \in \mathcal{E}$ e $t^{e,-}(u)u \in \mathcal{E}$. Ademais, as funções $u \mapsto t^{e,+}(u)$ e $u \mapsto t^{e,-}(u)$ pertencem a $C^1(U_e; \mathbb{R})$, onde $U_e := \{u \in X \setminus \{0\} : \lambda > S_e(u)\}$.*

Prova. A demonstração desta proposição segue o mesmo raciocínio das Proposições 2.13, 2.14, 2.16 e 2.17. \square

Observação 2.19 *Afirmamos que o conjunto U_n é um cone, isto é, $Ku \in U_n$ para todo $K > 0$ e $u \in U_n$. De fato, utilizando que a função S_n é 0 -homogênea, temos que $\lambda > S_n(u) = S_n(Ku)$, para todo $K > 0$. Isso implica que $Ku \in U_n$, para todo $K > 0$ e $u \in U_n$. Analogamente, o conjunto U_e é um cone.*

O próximo resultado estabelece uma comparação entre os extremais λ^* e λ_* , cujo enunciado é:

Proposição 2.20 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (v_1) - (v_3) , $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Então $S_e(u) > S_n(u)$, para todo $u \in X \setminus \{0\}$. Além disso, obtemos que $0 < \lambda^* < \lambda_* < +\infty$.*

Prova. Note que $\frac{d}{dt}Q_e(t) = 0$, quando $t = t_e(u)$. Assim, a equação (2-14) nos fornece que $Q_n(t_e(u)) - Q_e(t_e(u)) = 0$. Sabemos que $Q_n(t) > Q_n(t_n(u))$, para todo $t > 0$ com $t \neq t_n(u)$. Logo, tomando $t = t_e(u)$, tem-se que

$$S_n(u) - S_e(u) = Q_n(t_n(u)) - Q_e(t_e(u)) < Q_n(t_e(u)) - Q_e(t_e(u)) = 0.$$

A última desigualdade garante que $S_e(u) > S_n(u)$, para todo $u \in X \setminus \{0\}$. Adicionalmente, as Proposições 2.14 e 2.18 mostram que $S_n(u) \geq \mathcal{C}_\beta > 0$ e $S_e(u) \geq \mathcal{C}_\Phi > 0$. Isso implica que $\lambda^*, \lambda_* \in (0, +\infty)$. Nesse estágio, é fácil checar que existe alguma função $z \in X \setminus \{0\}$ tal que $\lambda_* = S_e(z)$, veja a Proposição 2.18. Esta afirmação prova que

$$\lambda_* = S_e(z) > S_n(z) \geq \inf_{t>0} R_n(tu) \geq \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \inf_{t>0} R_n(tu) = \lambda^*,$$

para cada $u \in X \setminus \{0\}$. Isso conclui a demonstração. \square

Sobre o funcional energia J , apresentamos agora uma descrição geométrica do comportamento de suas fibras, considerando os valores de $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Essa descrição foi derivada dos resultados discutidos até o momento.

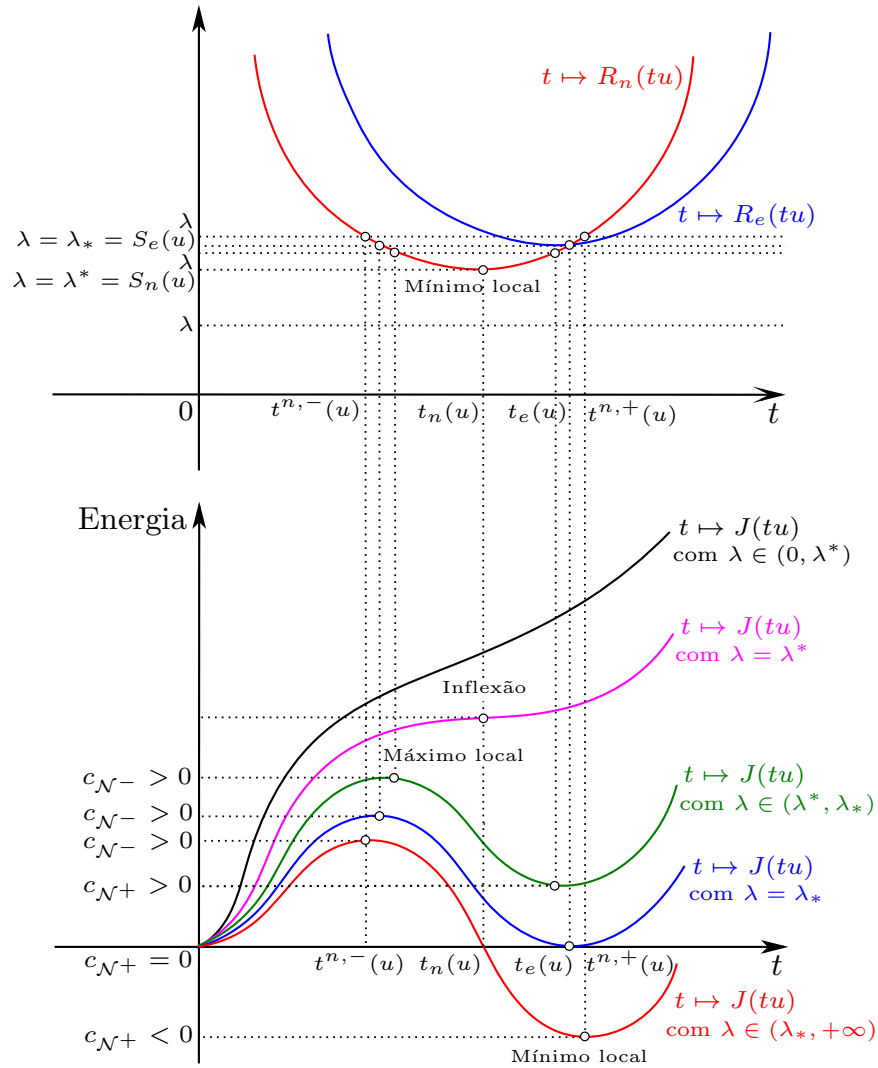


Figura 2.4: Relação geométrica entre os funcionais $R_n(tu)$, $R_e(tu)$ e $J(tu)$.

Proposição 2.21 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (v_1) - (v_3) e $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$. Então,*

- (a) *A identidade $\omega'_u(t) = 0$ é satisfeita para um único ponto crítico $t = t_n(u) > 0$ tal que $t_n(u)u \in \mathcal{N}^0$ quando $\lambda = S_n(u)$;*
- (b) *A identidade $\omega'_u(t) = 0$ não admite nenhum ponto crítico quando $\lambda < S_n(u)$.*

Prova. Sabemos que

$$\lambda = S_n(u) = \inf_{t>0} Q_n(t) = Q_n(t_n(u)) = R_n(t_n(u)u)$$

se, e somente se, $J'(t_n(u)u)(t_n(u)u) = 0$. Adicionalmente, não é difícil verificar, usando a hipótese (a_1) , que

$$\lim_{t_n(u) \rightarrow 0^+} R_n(t_n(u)u) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t_n(u) \rightarrow +\infty} R_n(t_n(u)u) = +\infty.$$

As últimas condições afirmam que $\frac{d}{dt}Q_n(t)|_{t=t_n(u)} = 0$ para cada $u \in X \setminus \{0\}$, onde $t_n(u) > 0$ é o único ponto crítico do funcional $Q_n(t)$. Dessa forma, a Proposição 1.14 nos fornece que

$$0 = \frac{d}{dt}Q_n(t) \Big|_{t=t_n(u)} = \frac{1}{t_n(u)} \frac{J''(t_n(u)u)(t_n(u)u, t_n(u)u)}{Q_\theta(t_n(u)u)}, \quad u \in X \setminus \{0\}.$$

Logo, temos que $J''(t_n(u)u)(t_n(u)u, t_n(u)u) = 0$. Consequentemente, inferimos que $t_n(u)u \in \mathcal{N}^0$. Isso completa a prova do item (a). Agora, suponha que $\lambda < S_n(u)$ de tal maneira que

$$\lambda < S_n(u) = \inf_{t>0} Q_n(t) = Q_n(t_n(u)) = R_n(t_n(u)u).$$

Nesse caso, a Observação 1.11 implica que $J'(t_n(u)u)(t_n(u)u) > 0$. Como produto, encontramos

$$\omega'_u(t_n(u)) = \frac{1}{t_n(u)} J'(t_n(u)u)(t_n(u)u) \neq 0,$$

para todo $t_n(u) > 0$ e $u \in X \setminus \{0\}$. Desse modo, obtemos que $t_n(u)u \notin \mathcal{N}$, para todo $t_n(u) > 0$. Portanto, a identidade $\omega'_u(t) = 0$ não admite nenhum ponto crítico. Isso completa a prova do item (b). \square

A seguir, apresentamos um lema que desempenha um papel fundamental na prova da não existência de soluções não triviais para o problema (\mathcal{P}_θ) .

Lema 2.22 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) e (v_1) - (v_3) . Seja $u \in X \setminus \{0\}$ um minimizador para a função S_n . Então, u é um ponto crítico para a função S_n . Além disso, a função $v = t_n(u)u$ é uma solução fraca para o problema elíptico não local:*

$$\begin{cases} -2\alpha_1 \Delta w + 2V(x)w - 2(\sigma + 1)\alpha_2 \|\nabla w\|_2^{2\sigma} \Delta w = \mathcal{G}_{\lambda, \theta}(x, w) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ w \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (\mathcal{H}_\theta)$$

onde $\mathcal{G}_{\lambda, \theta}(x, w) = \lambda^* q a(x) |w|^{q-2} w - \theta p b(x) |w|^{p-2} w$ com $v \in \mathcal{N}^0$ e $\lambda^* = S_n(u)$.

Prova. Afirmamos que u é um ponto crítico de S_n . Com efeito, considere uma função teste $\varphi \in X \setminus \{0\}$. Dessa forma, defina uma função auxiliar $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\beta(t) = S_n(u + t\varphi)$. É fácil checar que $u + t\varphi \neq 0$, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Como consequência, deduzimos que $S'_n(u)\varphi = \beta'(0) = 0$, para todo $\varphi \in X \setminus \{0\}$. Concluimos que u é um ponto crítico para a função S_n .

Além disso, como $t = t_n(u) > 0$ é o único ponto de mínimo local para o funcional $Q_n(t) = R_n(tu)$, segue-se que

$$\left. \frac{d}{dt} Q_n(t) \right|_{t=t_n(u)} = \left. \frac{d}{dt} R_n(tu) \right|_{t=t_n(u)} = R'_n(t_n(u)u)u = 0.$$

Sob estas condições, podemos inferir, através da regra de derivação, que

$$0 = S'_n(u)\varphi = (R_n(t_n(u)u))'\varphi = R'_n(t_n(u)u)[t'_n(u)\varphi]u + R'_n(t_n(u)u)t_n(u)\varphi,$$

para todo $\varphi \in X$. Isso implica que $R'_n(t_n(u)u)\varphi = 0$, para todo $\varphi \in X$. Agora, defina uma função auxiliar $v := t_n(u)u$. Dessa forma, mencionamos que

$$\begin{aligned} 0 = R'_n(v)\varphi &= \frac{1}{\|v\|_{q,a}^q} [J'(v)\varphi + J''(v)(v, \varphi)] \\ &= \frac{1}{\|v\|_{q,a}^q} [2\langle v, \varphi \rangle + 2(\sigma + 1)\alpha_2 \|\nabla v\|_2^{2\sigma} \langle \nabla v, \nabla \varphi \rangle_2 \\ &\quad - \lambda^* q \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|v|^{q-2}v\varphi dx + \theta p \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|v|^{p-2}v\varphi dx], \end{aligned}$$

com $\varphi \in X$ e $\lambda^* = R_n(v)$. Portanto, v é uma solução fraca para o problema (\mathcal{H}_θ) . \square

2.3 Resultados relativos à variedade de Nehari

O propósito desta seção é apresentar alguns resultados relacionados ao método de minimização sobre a variedade de Nehari. Esses resultados serão empregados nas demonstrações dos teoremas principais. Inicialmente, mostramos que, sob condições adequadas, a variedade de Nehari \mathcal{N} está sempre distante da origem.

Proposição 2.23 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (v_1) - (v_3) e $\lambda, \theta > 0$. Então existe uma constante positiva $s_\lambda = s_\lambda(q, \lambda, S_q^q, \|a\|_\infty)$ tal que $\|u\| \geq s_\lambda$, para cada $u \in \mathcal{N}$. Além disso, temos que \mathcal{N} e \mathcal{N}^0 são conjuntos fechados em X .*

Prova. Seja $u \in \mathcal{N}$ uma função fixa. Observe que a existência de s_λ é dada por

$$\begin{aligned} 0 &= \|u\|^2 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \lambda \|u\|_{q,a}^q + \theta \|u\|_{p,b}^p \\ &\geq \|u\|^2 - \lambda \|u\|_{q,a}^q \\ &\geq \|u\|^2 - \lambda S_q^q \|a\|_\infty \|u\|^q, \end{aligned}$$

onde usamos a imersão contínua $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$, para cada $r \in [2, 2^*]$ e a hipótese (a_2) . Isso implica que

$$\|u\| \geq \left[\frac{1}{\lambda S_q^q \|a\|_\infty} \right]^{\frac{1}{q-2}} =: s_\lambda. \quad (2-17)$$

Portanto, a variedade \mathcal{N} está longe da origem. Uma consequência direta da estimativa (2-17) é que \mathcal{N} e \mathcal{N}^0 são conjuntos fechados em X . \square

Proposição 2.24 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) e (v_1) - (v_3) . Então $\overline{\mathcal{N}^+} = \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^0$ e $\overline{\mathcal{N}^-} = \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$. Em particular, os conjuntos \mathcal{N}^+ e \mathcal{N}^- não são fechados em X .*

Prova. Inicialmente, afirmamos que $\overline{\mathcal{N}^+} = \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^0$. De fato, considere uma sequência $(u_k) \in \mathcal{N}^+$ tal que $u_k \rightarrow u$ em X , para algum $u \in X$. Em vista da Proposição 2.23, segue que o conjunto de Nehari \mathcal{N} é fechado em X . Essa afirmação implica que $u \in \mathcal{N}$. Desse modo, como $(u_k) \in \mathcal{N}^+$, obtemos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} J'(u_k)u_k = J'(u)u = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} J''(u_k)(u_k, u_k) = J''(u)(u, u) \geq 0.$$

Como resultado, tem-se que $u \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^0$ com $\overline{\mathcal{N}^+} \subset \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^0$. Por outro lado, afirmamos que $\mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^0 \subset \overline{\mathcal{N}^+}$. Com efeito, sabemos que $\mathcal{N}^+ \subset \overline{\mathcal{N}^+}$. Então, resta provar que $\mathcal{N}^0 \subset \overline{\mathcal{N}^+}$. Aqui, é importante destacar que os conjuntos $\mathcal{N}^+ = \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+$, $\mathcal{N}^- = \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-$ e $\mathcal{N}^0 = \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0$ são conjuntos de Nehari que dependem de $\lambda > 0$. É fácil ver que, dado $t_n(u)u \in \mathcal{N}^0$, temos

$$\begin{cases} R_n(t_n(u)u) = \lambda, \\ \left. \frac{d}{dt} R_n(tu) \right|_{t=t_n(u)} = 0, \quad u \neq 0. \end{cases}$$

Segundo a equação (2-7), notamos que

$$R_n(t_n(u)u) = \frac{t_n^{2-q}(u)\|u\|^2 + \alpha_2 t_n^{2(\sigma+1)-q}(u)\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta t_n^{p-q}(u)\|u\|_{p,b}^p}{\|u\|_{q,a}^q}, \quad (2-18)$$

para todo $t = t_n(u) > 0$ e $u \in X \setminus \{0\}$. Assim, calculando a derivada de (2-18) em relação a t , inferimos que $\frac{d}{dt} R_n(tu) = 0$ se, e somente se,

$$(2-q)t^{1-q}\|u\|^2 + \alpha_2(2(\sigma+1)-q)t^{2\sigma+1-q}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta(p-q)t^{p-q-1}\|u\|_{p,b}^p = 0,$$

onde $t = t_n(u)$. Além disso, calculando novamente a derivada de (2-18) em relação a t e usando o fato de que $\frac{d^2}{dt^2} R_n(tu)$ é sempre positiva, deduzimos que

$$\begin{aligned} (2-q)(1-q)t^{-q}\|u\|^2 + \alpha_2(2(\sigma+1)-q)(2\sigma+1-q)t^{2\sigma-q}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} \\ + \theta(p-q)(p-q-1)t^{p-q-2}\|u\|_{p,b}^p > 0, \end{aligned}$$

sempre que $t = t_n(u) > 0$. Assumindo que $u \in \mathcal{N}^0$, mencionamos que $t_n(u) = 1$. Assim, com base nas últimas estimativas, podemos concluir que

$$(q-2)\|u\|^2 + \alpha_2(q-2(\sigma+1))\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} = \theta(p-q)\|u\|_{p,b}^p, \quad (2-19)$$

e

$$(2-q)(1-q)\|u\|^2 + \alpha_2(2(\sigma+1)-q)(2\sigma+1-q)\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta(p-q)(p-q-1)\|u\|_{p,b}^p > 0. \quad (2-20)$$

Agora, suponha que existe $u \in \mathcal{N}^0$ de tal maneira que $B(u, R) \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{N}^0$, onde $B(u, R) \subset X$ é uma bola aberta centrada em u e raio $R > 0$. Considere também $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais tal que $c_k \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow +\infty$. Desse modo, estudamos três casos:

(i) Suponha $S_n(u + c_k\varphi) < \lambda$, para todo $\varphi \in X \setminus \{0\}$ fixado, temos pela Proposição 2.17 que existem $0 < t^{n,-}(u + c_k\varphi) < t_n(u + c_k\varphi) < t^{n,+}(u + c_k\varphi) < +\infty$ tais que

$$t^{n,\pm}(u + c_k\varphi)(u + c_k\varphi) \in \mathcal{N}^\pm \subset \mathcal{N}.$$

Logo, para k suficientemente grande, obtemos que $u + c_k\varphi \in B(u, R) \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{N}^0$. Essa condição mostra que $R_n(u + c_k\varphi) = \lambda$. No entanto, observe que

$$\lambda = R_n(u + c_k\varphi) = R_n(t_n(u + c_k\varphi)(u + c_k\varphi)) = S_n(u + c_k\varphi) < \lambda,$$

o que é um absurdo. Isso prova que o caso (i) não ocorre.

(ii) Assuma $S_n(u + c_k\varphi) = \lambda$, para todo $\varphi \in X \setminus \{0\}$ fixado, segue que $t_n(u + c_k\varphi) = 1$. Como produto, inferimos que $u + c_k\varphi \in \mathcal{N}^0$. Sob essa condição, deduzimos

$$\begin{cases} (q-2)\|u\|^2 + \alpha_2(q-2(\sigma+1))\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} = \theta(p-q)\|u\|_{p,b}^p, \\ (q-2)\|u + c_k\varphi\|^2 + \alpha_2(q-2(\sigma+1))\|\nabla(u + c_k\varphi)\|_2^{2(\sigma+1)} = \theta(p-q)\|u + c_k\varphi\|_{p,b}^p. \end{cases}$$

Uma simples manipulação algébrica nos leva a

$$(q-2) \left[\frac{\|u + c_k\varphi\|^2 - \|u\|^2}{c_k} \right] + \alpha_2(q-2(\sigma+1)) \left[\frac{\|\nabla(u + c_k\varphi)\|_2^{2(\sigma+1)} - \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)}}{c_k} \right] = \theta(p-q) \left[\frac{\|u + c_k\varphi\|_{p,b}^p - \|u\|_{p,b}^p}{c_k} \right]$$

onde c_k está definida acima. Fazendo $k \rightarrow +\infty$ na última equação, encontramos

$$\begin{aligned} 2(q-2)\langle u, \varphi \rangle + \alpha_2(2\sigma+2)(q-2(\sigma+1))\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma} \\ = \theta p(p-q) \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^{p-2}u\varphi dx, \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in X$. Nesse contexto, ao tomarmos $\varphi = u$, tem-se que

$$2(q-2)\|u\|^2 + \alpha_2(2\sigma+2)(q-2(\sigma+1))\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} = \theta p(p-q)\|u\|_{p,b}^p. \quad (2-21)$$

Ao associarmos (2-19), (2-20) e (2-21), chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + (2\sigma + 2)y - pz = 0 \\ (q - 1)x + (q - 2\sigma - 1)y + (p - q - 1)z > 0, \end{cases} \quad (2-22)$$

onde as variáveis

$$x = (q - 2)\|u\|^2, \quad y = \alpha_2(q - 2(\sigma + 1))\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} \quad \text{e} \quad z = \theta(p - q)\|u\|_{p,b}^p.$$

Em vista do sistema (2-22), definimos um número η por

$$\eta = (q - 1)x + (q - 2\sigma - 1)y + (p - q - 1)z.$$

Não é difícil perceber que $\eta > 0$. Assim, com base em η , definimos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + (2\sigma + 2)y - pz = 0 \\ (q - 1)x + (q - 2\sigma - 1)y + (p - q - 1)z = \eta. \end{cases} \quad (2-23)$$

Dessa forma, o sistema (2-23) pode ser escrito como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2\sigma + 2 & -p \\ q - 1 & q - 2\sigma - 1 & p - q - 1 \end{bmatrix}}_{\text{matriz } A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta \end{bmatrix}.$$

Enfatizamos aqui que determinante da matriz A , denotado por $\det A$ é sempre zero. Além disso, aplicando o método do escalonamento no sistema (2-23), encontramos

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2\sigma + 2 & -p & 0 \\ q - 1 & q - 2\sigma - 1 & p - q - 1 & \eta \end{array} \right| \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -2L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow (1 - q)L_1 + L_3 \\ L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2\sigma & 2 - p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta \end{array} \right|,$$

onde L_1 , L_2 e L_3 representam, respectivamente, a primeira, a segunda e a terceira linha do sistema escalonado. Esse fato implica que $\eta = 0$, o que é claramente absurdo. Portanto, o caso (ii) é impossível.

(iii) Suponha $S_n(u + c_k\varphi) > \lambda$, para todo $\varphi \in X \setminus \{0\}$ fixado. Defina uma sequência $\lambda_k := S_n(u + c_k\varphi) > \lambda$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Isso significa que $\lambda_k \rightarrow \lambda$, quando $k \rightarrow +\infty$. Como $\lambda_k = S_n(u + c_k\varphi)$, tem-se que $(u + c_k\varphi) \in \mathcal{N}_{\lambda_k, \theta}^0$. Em particular, obtemos que $t_n(u + c_k\varphi) = 1$. Como resultado, inferimos que

$$(q - 2)\|u\|^2 + \alpha_2(q - 2(\sigma + 1))\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} = \theta(p - q)\|u\|_{p,b}^p, \quad (2-24)$$

e

$$(2-q)(1-q)\|u\|^2 + \alpha_2(2(\sigma+1)-q)(2\sigma+1-q)\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta(p-q)(p-q-1)\|u\|_{p,b}^p > 0. \quad (2-25)$$

Adicionalmente, como $u + c_k\varphi \in \mathcal{N}_{\lambda_k, \theta}^0$, temos que

$$\begin{cases} (q-2)\|u\|^2 + \alpha_2(q-2(\sigma+1))\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} = \theta(p-q)\|u\|_{p,b}^p, \\ (q-2)\|u + c_k\varphi\|^2 + \alpha_2(q-2(\sigma+1))\|\nabla(u + c_k\varphi)\|_2^{2(\sigma+1)} = \theta(p-q)\|u + c_k\varphi\|_{p,b}^p. \end{cases}$$

Como no caso (ii), obtemos o mesmo resultado, no qual

$$\begin{aligned} 2(q-2)\langle u, \varphi \rangle + \alpha_2(2\sigma+2)(q-2(\sigma+1))\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma} \\ = \theta p(p-q) \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^{p-2}u\varphi dx, \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in X$. Nesse caso, ao tomarmos $\varphi = u$, tem-se que

$$2(q-2)\|u\|^2 + \alpha_2(2\sigma+2)(q-2(\sigma+1))\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} = \theta p(p-q)\|u\|_{p,b}^p. \quad (2-26)$$

Dessa maneira, ao analisarmos (2-24), (2-25) e (2-26), encontramos o mesmo sistema estabelecido em (2-22). Isso significa que ao realizarmos o mesmo cálculo, chegamos a um absurdo. Segue-se nos três casos discutidos acima que

$$B(u, R) \cap \mathcal{N} \not\subseteq \mathcal{N}^0, \text{ para nenhum } R > 0.$$

Essa afirmação implica que existe $v \in B(u, R) \cap (\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^0)$, para cada $R > 0$. Uma vez que $\mathcal{N} := \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$, temos que $v \in \mathcal{N}^+$ ou $v \in \mathcal{N}^-$. Isso demonstra que $v \in U_n := \{v \in X \setminus \{0\} : S_n(v) < \lambda\}$. Como consequência, a Proposição 2.17 nos fornece a existência de

$$0 < t^{n,-}(v) < t_n(v) < t^{n,+}(v) < +\infty$$

de modo que $t^{n,+}(v)v \in \mathcal{N}^+$ e $t^{n,-}(v)v \in \mathcal{N}^-$, para qualquer $R > 0$. Nesta etapa, considere a sequência $R_k = \frac{1}{k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Como resultado, existe uma sequência $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de tal modo que $v_k \in B(u, R_k) \cap (\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^0)$ com $t^{n,+}(v_k)v_k \in \mathcal{N}^+$ e $t^{n,-}(v_k)v_k \in \mathcal{N}^-$. Assim, como $R_k \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow +\infty$, mencionamos que $v_k \rightarrow u$ em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Devido à continuidade de $t^{n,\pm}$ e t_n , é fácil verificar que

$$\begin{cases} t^{n,+}(v_k) \rightarrow t^{n,+}(u) = t_n(u) = 1, \text{ quando } k \rightarrow +\infty, \\ t^{n,-}(v_k) \rightarrow t^{n,-}(u) = t_n(u) = 1, \text{ quando } k \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

A última condição nos permite definir sequências $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de tal forma que $w_k := t^{n,+}(v_k)v_k \in \mathcal{N}^+$ e $g_k := t^{n,-}(v_k)v_k \in \mathcal{N}^-$. Portanto, para cada $u \in \mathcal{N}^0$, existem sequências tais que

$$\begin{cases} w_k \rightarrow u \text{ em } X, \text{ quando } k \rightarrow +\infty, \\ g_k \rightarrow u \text{ em } X, \text{ quando } k \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Concluimos que $\mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^0 \subset \overline{\mathcal{N}^+}$. Analogamente, no caso em que $\overline{\mathcal{N}^-} = \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$, as ideias discutidas anteriormente são aplicadas, e a proposição está devidamente demonstrada. \square

É importante ressaltar que a Proposição 2.24 é um resultado fundamental para alcançarmos os nossos objetivos propostos. Com o intuito de facilitar a compreensão do leitor, a Figura 2.5 a seguir ilustra algumas das ideias discutidas nesta proposição.

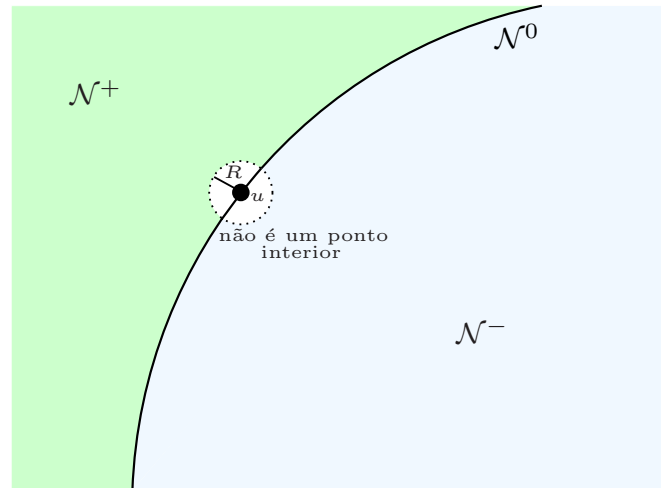


Figura 2.5: $B(u, R) \cap \mathcal{N} \not\subseteq \mathcal{N}^0$, para nenhum $R > 0$.

Observação 2.25 *Sabemos que \mathcal{N}^- e \mathcal{N}^+ são variedades de classe C^1 em X , para cada $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$. Esse fato pode ser demonstrado utilizando o mesmo raciocínio discutido no Lema 1.30, em conjunto com o Teorema da Função Implícita.*

É crucial destacar que uma implicação imediata da Proposição 2.24 é que os níveis de energia $c_{\mathcal{N}^+}$, $c_{\mathcal{N}^-}$ e $c_{\mathcal{N}^0}$, podem ser expressos por:

$$c_{\mathcal{N}^0} = \inf_{u \in \mathcal{N}^0} J(u) \geq \inf_{u \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^0} J(u) = \inf_{u \in \overline{\mathcal{N}^+}} J(u) = \inf_{u \in \mathcal{N}^+} J(u) = c_{\mathcal{N}^+}, \quad (2-27)$$

$$c_{\mathcal{N}^0} = \inf_{u \in \mathcal{N}^0} J(u) \geq \inf_{u \in \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0} J(u) = \inf_{u \in \overline{\mathcal{N}^-}} J(u) = \inf_{u \in \mathcal{N}^-} J(u) = c_{\mathcal{N}^-}. \quad (2-28)$$

Ao analisar (2-27) e (2-28), percebemos que os níveis de energia $c_{\mathcal{N}^+}$ e $c_{\mathcal{N}^0}$, assim como $c_{\mathcal{N}^-}$ e $c_{\mathcal{N}^0}$, podem ser iguais. No entanto, nosso objetivo é demonstrar que tal

igualdade é impossível. Essa constatação é fundamental para obtermos soluções não triviais para o problema (\mathcal{P}_θ) , conforme será explicado adiante.

Observação 2.26 *Assuma que (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) e (v_1) - (v_3) sejam satisfeitas. É fácil verificar que qualquer sequência $(u_k) \in \mathcal{N}$ tal que $u_k \rightharpoonup u$, para algum $u \in X$ satisfaz $u \neq 0$. Com efeito, suponha por contradição que $u = 0$. Isso implica que $u_k \rightarrow 0$ em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Em vista de $(u_k) \in \mathcal{N}$, da imersão compacta $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ para cada $r \in [2, 2^*)$, tem-se que*

$$\begin{aligned} \|u_k\|^2 &= \lambda \|u_k\|_{q,a}^q - \alpha_2 \|\nabla u_k\|_2^{2(\sigma+1)} - \theta \|u_k\|_{p,b}^p \\ &\leq \lambda \|u_k\|_{q,a}^q - \theta \|u_k\|_{p,b}^p \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2-29)$$

quando $k \rightarrow +\infty$. Em vista da Proposição 2.23, encontramos que $\|u_k\| \geq s_\lambda > 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Entretanto, isso contradiz (2-29), provando que $u \neq 0$.

A partir deste momento, exploramos algumas propriedades relevantes relacionadas ao método do quociente de Rayleigh não linear. Essas propriedades são úteis tanto no Capítulo 2 quanto no Capítulo 3. Especificamente nesta seção, empregamos tais propriedades para demonstrar que o funcional energia é coercivo sobre a variedade de Nehari. Desse modo, para todo $t > 0$, obtemos as seguintes estimativas:

$$R_n(tu) = \frac{\|tu\|^2 + \alpha_2 \|\nabla(tu)\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta \|tu\|_{p,b}^p}{\|tu\|_{q,a}^q} \geq \frac{\|tu\|^2 + \theta \|tu\|_{p,b}^p}{\|tu\|_{q,a}^q},$$

e

$$R_e(tu) = \frac{\frac{1}{2}\|tu\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)}\|\nabla(tu)\|_2^{2(\sigma+1)} + \frac{\theta}{p}\|tu\|_{p,b}^p}{\frac{1}{q}\|tu\|_{q,a}^q} \geq \frac{\frac{1}{2}\|tu\|^2 + \frac{\theta}{p}\|tu\|_{p,b}^p}{\frac{1}{q}\|tu\|_{q,a}^q}.$$

Usando as últimas desigualdades, definimos funcionais $\tilde{R}_n, \tilde{R}_e : X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\tilde{R}_n(tu) := \frac{\|tu\|^2 + \theta \|tu\|_{p,b}^p}{\|tu\|_{q,a}^q} \quad \text{e} \quad \tilde{R}_e(tu) := \frac{\frac{1}{2}\|tu\|^2 + \frac{\theta}{p}\|tu\|_{p,b}^p}{\frac{1}{q}\|tu\|_{q,a}^q}, \quad t > 0. \quad (2-30)$$

Uma simples manipulação algébrica em (2-30) nos fornece que

$$\begin{aligned} \|u\|_{q,a}^q \left(\frac{d}{dt} \tilde{R}_n(tu) \right) &= (2-q)t^{1-q} \|u\|^2 + \theta(p-q)t^{p-q-1} \|u\|_{p,b}^p = 0, \\ \|u\|_{q,a}^q \left(\frac{d}{dt} \tilde{R}_e(tu) \right) &= \left(\frac{2-q}{2} \right) t^{1-q} \|u\|^2 + \theta \left(\frac{p-q}{p} \right) t^{p-q-1} \|u\|_{p,b}^p = 0, \end{aligned}$$

se, e somente se,

$$\tilde{t}_n(u) := \left[\frac{(q-2)\|u\|^2}{\theta(p-q)\|u\|_{p,b}^p} \right]^{\frac{1}{p-2}} \quad \text{e} \quad \tilde{t}_e(u) := \left[\frac{p(q-2)\|u\|^2}{2\theta(p-q)\|u\|_{p,b}^p} \right]^{\frac{1}{p-2}}, \quad (2-31)$$

onde \tilde{t}_n e \tilde{t}_e representam os únicos pontos críticos dos funcionais \tilde{R}_n e \tilde{R}_e , respectivamente. Um simples cálculo em (2-31) implica que $\tilde{t}_e(u) = \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}} \tilde{t}_n(u)$. Dessa maneira, ao substituirmos o ponto crítico \tilde{t}_n no funcional \tilde{R}_n , temos

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n(u) := \tilde{R}_n(\tilde{t}_n(u)u) &= \frac{1}{\|u\|_{q,a}^q} \left(\left[\frac{(q-2)\|u\|^2}{\theta(p-q)\|u\|_{p,b}^p} \right]^{\frac{2-q}{p-2}} \|u\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \theta \left[\frac{(q-2)\|u\|^2}{\theta(p-q)\|u\|_{p,b}^p} \right]^{\frac{p-q}{p-2}} \|u\|_{p,b}^p \right) \\ &= \mathcal{A}_1 \theta^{\frac{q-2}{p-2}} \frac{\|u\|^{2\frac{p-q}{p-2}} \|u\|_{p,b}^{p\frac{q-2}{p-2}}}{\|u\|_{q,a}^q}, \end{aligned} \quad (2-32)$$

onde \mathcal{A}_1 é uma constante positiva, previamente definida como:

$$\mathcal{A}_1 = \left(\frac{q-2}{p-q} \right)^{\frac{p-q}{p-2}} \left(\frac{p-2}{q-2} \right).$$

De forma análoga, ao substituirmos o ponto crítico \tilde{t}_e no funcional \tilde{R}_e , encontramos

$$\tilde{S}_e(u) := \tilde{R}_e(\tilde{t}_e(u)u) = \mathcal{A}_2 \theta^{\frac{q-2}{p-2}} \frac{\|u\|^{2\frac{p-q}{p-2}} \|u\|_{p,b}^{p\frac{q-2}{p-2}}}{\|u\|_{q,a}^q}, \quad (2-33)$$

onde \mathcal{A}_2 é uma constante positiva dada por

$$\mathcal{A}_2 = \left(\frac{p(q-2)}{2(p-q)} \right)^{\frac{p-q}{p-2}} \left(\frac{q(p-2)}{p(q-2)} \right).$$

Assim, é fácil ver que $S_n(u) \geq \tilde{S}_n(u)$ e $S_e(u) \geq \tilde{S}_e(u)$ para cada $u \in X \setminus \{0\}$, onde

$$\tilde{S}_n(u) := \inf_{t>0} \tilde{R}_n(tu) \quad \text{e} \quad \tilde{S}_e(u) := \inf_{t>0} \tilde{R}_e(tu).$$

Proposição 2.27 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (b_2) e (v_1) - (v_3) . Então,*

- (a) *A função \tilde{S}_n é 0-homogênea, contínua e fracamente semicontínua inferior;*
- (b) *A função \tilde{S}_n é limitada por baixo por uma constante positiva \mathcal{C}_0 ;*
- (c) *Existe uma função $u \in X \setminus \{0\}$ de modo que $\tilde{\lambda}_c := \inf_{w \in X \setminus \{0\}} \tilde{S}_n(w) = \tilde{S}_n(u) > 0$.*

Prova. A prova de que a função \tilde{S}_n é 0-homogênea, contínua e fracamente semicontínua inferior é simples e utiliza as mesmas ideias discutidas na Proposição 1.18. Agora, suponha que a hipótese (b_1) seja satisfeita. Assim, usando a desigualdade (2-16), mencionamos que

$$\|u\|_{q,a}^q \leq \mathcal{C}_{p,q} \|u\|_{p,b}^q.$$

Por outro lado, a imersão contínua $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ para cada $r \in [2, 2^*]$, juntamente com a hipótese (a_2) , assegura que

$$\|u\|_{p,b}^{2\frac{p-q}{p-2}} \leq S_p^{-\frac{p-q}{p-2}} \|b\|_{\infty}^{2\frac{p-q}{p-2}} \|u\|^{2\frac{p-q}{p-2}}, \quad u \in X \setminus \{0\}. \quad (2-34)$$

Substituindo a desigualdade (2-34) na definição (2-32), temos

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n(u) &\geq \frac{\mathcal{A}_1 \theta^{\frac{q-2}{p-2}}}{S_p^{-\frac{p-q}{p-2}} \mathcal{C}_{p,q} \|b\|_{\infty}^{2\frac{p-q}{p-2}}} \frac{\|u\|_{p,b}^{2\frac{p-q}{p-2}} \|u\|_{p,b}^{p\frac{q-2}{p-2}}}{\|u\|_{p,b}^q} \\ &= \frac{\mathcal{A}_1 \theta^{\frac{q-2}{p-2}}}{S_p^{-\frac{p-q}{p-2}} \mathcal{C}_{p,q} \|b\|_{\infty}^{2\frac{p-q}{p-2}}} \\ &= \mathcal{C}_0. \end{aligned} \quad (2-35)$$

Isso conclui a prova do item (b). Neste momento, afirmamos que existe $u \in X \setminus \{0\}$ tal que $\tilde{\lambda}_c = \tilde{S}_n(u)$. De fato, seja $(u_k) \in X$ uma sequência minimizante para $\tilde{\lambda}_c$. Defina uma sequência normalizada $w_k = \frac{u_k}{\|u_k\|_{q,a}}$, onde $\|w_k\|_{q,a} = 1$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Uma vez que a função \tilde{S}_n é 0-homogênea, inferimos que

$$\tilde{S}_n(w_k) = \mathcal{A}_1 \theta^{\frac{q-2}{p-2}} \|w_k\|^{2\frac{p-q}{p-2}} \|w_k\|_{p,b}^{p\frac{q-2}{p-2}} \rightarrow \tilde{\lambda}_c, \quad (2-36)$$

quando $k \rightarrow +\infty$. Logo, utilizando (2-35) e (2-36), obtemos que existem constantes $\mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6 > 0$ tais que

$$0 < \mathcal{C}_5 \leq \|w_k\|^{2\frac{p-q}{p-2}} \|w_k\|_{p,b}^{p\frac{q-2}{p-2}} \leq \mathcal{C}_6. \quad (2-37)$$

Desse modo, a desigualdade de Young e a imersão contínua $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$, para cada $r \in [2, 2^*]$, fornecem que

$$\begin{aligned} 0 < \mathcal{C}_5 &\leq \|w_k\|^{2\frac{p-q}{p-2}} \|w_k\|_{p,b}^{p\frac{q-2}{p-2}} \\ &\leq \|w_k\|^2 + \|w_k\|_{p,b}^p \\ &\leq \|w_k\|^2 + S_p^p \|b\|_{\infty}^p \|w_k\|^p \\ &\leq (1 + S_p^p \|b\|_{\infty}^p) \max(\|w_k\|^2, \|w_k\|^p). \end{aligned}$$

Consequentemente, encontramos que $\|w_k\| \geq \mathcal{C}_7 > 0$. Em vista da desigualdade (2-16) e hipótese (b_1) , é fácil verificar que

$$1 = \|w_k\|_{q,a}^q \leq \left\| \frac{a^{\frac{p}{p-q}}}{b^{\frac{q}{p-q}}} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{p-q}{p}} \|w_k\|_{p,b}^q.$$

Um cálculo simples garante que

$$\|w_k\|_{p,b} \geq \mathcal{C}_9 > 0, \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Esse fato implica que

$$\|w_k\|^{2\frac{p-q}{p-2}} \leq \frac{\mathcal{C}_6}{\|w_k\|_{p,b}^{p\frac{q-2}{p-2}}} \leq \frac{\mathcal{C}_6}{\mathcal{C}_9^{p\frac{q-2}{p-2}}} \Leftrightarrow \|w_k\| \leq \left(\frac{\mathcal{C}_6}{\mathcal{C}_9^{p\frac{q-2}{p-2}}} \right)^{2\frac{p-2}{p-q}} =: \mathcal{C}_{10},$$

onde \mathcal{C}_{10} é uma constante positiva. Como produto, obtemos que a sequência (w_k) é limitada em X . Isso significa que existe $w \in X$ tal que

$$\begin{cases} w_k \rightharpoonup w \text{ em } X, \\ w_k \rightarrow w \text{ em } L^r(\mathbb{R}^N), \text{ para cada } r \in [2, 2^*), \\ w_k(x) \rightarrow w(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \\ |w_k| \leq h_r \in L^r(\mathbb{R}^N), \text{ para cada } r \in [2, 2^*). \end{cases} \quad (2-38)$$

É importante destacar que $\|w\|_{q,a} = 1$, o que implica que $w \neq 0$. Nessas condições, a imersão compacta $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ para cada $r \in [2, 2^*)$, juntamente com a estimativa (2-38), garante que

$$\|w\| \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|w_k\|, \quad 1 = \|w\|_{q,a} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|w_k\|_{q,a} \quad \text{e} \quad \|w\|_{p,b} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|w_k\|_{p,b}.$$

Logo, o item (a) implica que

$$\tilde{\lambda}_c \leq \tilde{S}_n(w) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \tilde{S}_n(w_k) = \tilde{\lambda}_c.$$

Portanto, o número positivo $\tilde{\lambda}_c$ é atingido, e o item (c) está demonstrado. \square

Observação 2.28 *Analizando as mesmas ideias da Proposição 2.27, concluímos que a função \tilde{S}_e é 0-homogênea, contínua, fracamente semicontínua inferior e limitada por baixo por uma constante positiva. Adicionalmente, existe uma função $u \in X \setminus \{0\}$ tal que $\tilde{\lambda}_d := \inf_{w \in X \setminus \{0\}} \tilde{S}_e(w) = \tilde{S}_e(u)$.*

Note que uma relação fundamental entre as constantes \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 é estabelecida por $\mathcal{A}_2 = qp^{-\frac{q-2}{p-2}} 2^{-\frac{p-q}{p-2}} \mathcal{A}_1$. Dessa maneira, o próximo resultado estabelece uma comparação entre as funções \tilde{S}_n e \tilde{S}_e .

Lema 2.29 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_2) e (v_1) - (v_3) . Então $qp^{-\frac{q-2}{p-2}} 2^{-\frac{p-q}{p-2}} > 1$. Além disso, obtemos que*

$$\tilde{S}_e(u) = qp^{-\frac{q-2}{p-2}} 2^{-\frac{p-q}{p-2}} \tilde{S}_n(u) > \tilde{S}_n(u), \quad u \in X \setminus \{0\}.$$

Prova. Veja que $qp^{-\frac{q-2}{p-2}}2^{-\frac{p-q}{p-2}} > 1$ é equivalente a seguinte relação:

$$p^{\frac{q-2}{p-2}}2^{\frac{p-q}{p-2}} < q \Leftrightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^{q-2} < \left(\frac{q}{2}\right)^{p-q}.$$

Sob esta condição, definimos uma função auxiliar $S_\beta : [2, p] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$S_\beta(q) = (q-2) \ln\left(\frac{p}{q}\right) - (p-q) \ln\left(\frac{q}{2}\right).$$

Não é difícil verificar que $S_\beta(q) < 0$, para todo $q \in (2, p)$. De fato, observe que

$$\begin{cases} S'_\beta(q) = \ln\left(\frac{p}{2}\right) + \left(\frac{2-p}{q}\right), \\ S''_\beta(q) = \frac{p-2}{q^2}. \end{cases}$$

Como $p > 2$, tem-se que $S''_\beta(q) > 0$, para todo $q \in (2, p)$. Além disso, a função S_β apresenta um único ponto de mínimo local

$$q_0 = \frac{p-2}{\ln\left(\frac{p}{2}\right)} \in (2, p).$$

Assim, deduzimos que S_β é estritamente decrescente, para todo $q \in (2, q_0)$ e estritamente crescente, para todo $q \in (q_0, p)$. Como $S_\beta(2) = S_\beta(p) = 0$, segue que $S_\beta(q) < 0$, para todo $q \in (2, p)$. Isso prova que $qp^{-\frac{q-2}{p-2}}2^{-\frac{p-q}{p-2}} > 1$. \square

A Figura 2.6 abaixo ilustra uma aproximação da provável geometria da função S_β conforme estabelecido no Lema 2.29.

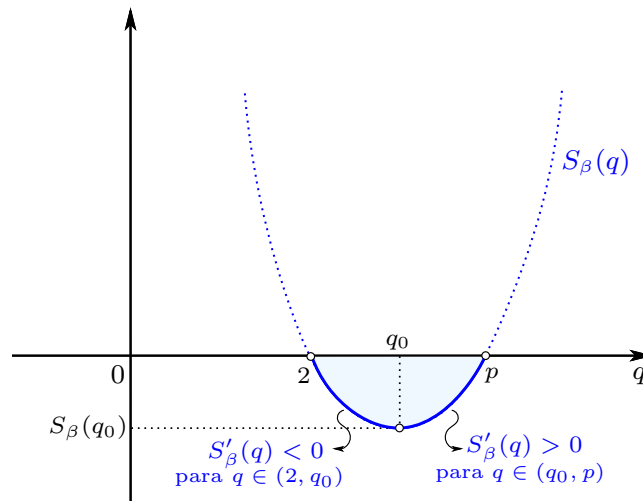


Figura 2.6: Geometria da função $S_\beta(q)$, para todo $q \in (2, p)$.

Agora, apresentamos dois lemas que, essencialmente, mostram que o funcional energia é coercivo sobre a variedade de Nehari.

Lema 2.30 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (v_1) - (v_3) , $\lambda \in [\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Então o funcional energia J é coercivo em $\mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$.*

Prova. Considere $u \in \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$ uma função fixa. Nesse caso, temos que $J'(u)u = 0$ e $J''(u)(u, u) \leq 0$. A última estimativa, em conjunto com (2-5), implica que

$$\lambda \left(\frac{p-q}{pq} \right) \|u\|_{q,a}^q \leq \left(\frac{p-2}{pq} \right) \|u\|^2 + \left(\frac{p-2(\sigma+1)}{pq} \right) \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)}. \quad (2-39)$$

Sob estas condições, a desigualdade (2-39) e a hipótese (a_1) mostram que

$$\begin{aligned} J(u) &= J(u) - \frac{1}{p} J'(u)u \\ &= \left(\frac{p-2}{2p} \right) \|u\|^2 + \left(\frac{p-2(\sigma+1)}{2p(\sigma+1)} \right) \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \lambda \left(\frac{p-q}{pq} \right) \|u\|_{q,a}^q \\ &\geq \left[\frac{(p-2)(q-2)}{2pq} \right] \|u\|^2 + \left[\frac{(p-2(\sigma+1))(q-2(\sigma+1))}{2pq(\sigma+1)} \right] \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} \\ &\geq \left[\frac{(p-2)(q-2)}{2pq} \right] \|u\|^2. \end{aligned} \quad (2-40)$$

Portanto, temos que $J(u) \rightarrow +\infty$, quando $\|u\| \rightarrow +\infty$. Isso completa a prova. \square

Lema 2.31 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (b_2) , (v_1) - (v_3) , $\lambda \in [\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Então o funcional energia J é coercivo em \mathcal{N}^+ .*

Prova. Inicialmente, assuma que a hipótese (b_1) é verdadeira. Dessa forma, para qualquer $u \in \mathcal{N}^+$, tem-se que

$$J(u) = \left(\frac{p-2}{2p} \right) \|u\|^2 + \left(\frac{p-2(\sigma+1)}{2p(\sigma+1)} \right) \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \lambda \left(\frac{p-q}{pq} \right) \|u\|_{q,a}^q.$$

Agora, definimos $J(u) = J_\lambda(u)$. Um simples cálculo mostra que

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2} J_{R_e(u)}(u) + \frac{1}{2} J_{(\lambda - R_e(u))}(u) - \lambda \left(\frac{p-q}{2pq} \right) \|u\|_{q,a}^q. \quad (2-41)$$

Sabemos pela equação (2-8) que

$$\frac{R_e(u)}{q} \|u\|_{q,a}^q = \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)} \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \frac{\theta}{p} \|u\|_{p,b}^p. \quad (2-42)$$

Substituindo a equação (2-42) na definição do funcional $J_{R_e(u)}(u)$, concluímos que $J_{R_e(u)}(u) = 0$. Esse fato, juntamente com a equação (2-41), nos fornece que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \left(\frac{p-2}{4p} \right) \|u\|^2 + \left(\frac{p-2(\sigma+1)}{4p(\sigma+1)} \right) \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} \\ &\quad - (2\lambda - R_e(u)) \left(\frac{p-q}{2pq} \right) \|u\|_{q,a}^q. \end{aligned} \quad (2-43)$$

Assim, assumindo que $2\lambda - R_e(u) \leq 0$, deduzimos que

$$J_\lambda(u) \geq \left(\frac{p-2}{4p}\right) \|u\|^2.$$

Como resultado, segue-se que $J(u) \rightarrow +\infty$, quando $\|u\| \rightarrow +\infty$. Agora, quando $2\lambda - R_e(u) > 0$, consideramos uma sequência $(u_k) \in \mathcal{N}^+$ tal que

$$\theta(p-q)\|u_k\|_{p,b}^p > (q-2)\|u_k\|^2 + \alpha_2(q-2(\sigma+1))\|\nabla u_k\|_2^{2(\sigma+1)} \geq (q-2)\|u_k\|^2.$$

Nesse caso, deduzimos que $\|u_k\|_{p,b}^p \rightarrow +\infty$, quando $\|u_k\| \rightarrow +\infty$. Adicionalmente, usando a desigualdade (2-16), mencionamos que $\|u_k\|_{q,a}^q \leq \mathcal{C}_{p,q}\|u_k\|_{p,b}^q$, para todo $(u_k) \in X \setminus \{0\}$. As últimas condições, em conjunto com a definição (2-8) e a hipótese (a_1) , implicam que

$$\lambda > \frac{1}{2}R_e(u_k) \geq \frac{\theta q}{2p} \frac{\|u_k\|_{p,b}^p}{\|u_k\|_{q,a}^q} \geq \frac{\theta q}{2p\mathcal{C}_{p,q}} \|u_k\|_{p,b}^{p-q} \rightarrow +\infty,$$

quando $\|u_k\| \rightarrow +\infty$. Logo, o caso em que $2\lambda - R_e(u) > 0$ é impossível.

Neste momento, suponha que a hipótese (b_2) seja válida. Dessa maneira, se $2\lambda - R_e(u) \leq 0$, decorre da equação (2-43) que o funcional J_λ é coercivo em \mathcal{N}^+ . Agora, se $2\lambda - R_e(u) > 0$, consideramos uma sequência $(u_k) \in X$ de modo que $\|u_k\| \rightarrow +\infty$, quando $k \rightarrow +\infty$. Defina uma sequência normalizada $w_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$, onde $\|w_k\| = 1$. Como consequência, inferimos que $w_k \rightharpoonup w$ em X . Isso significa que

$$\lambda > \frac{1}{2}R_e(u_k) \geq \frac{\theta q}{2p} \frac{\|u_k\|_{p,b}^p}{\|u_k\|_{q,a}^q} = \frac{\theta q}{2p} \frac{\|w_k\|_{p,b}^p}{\|w_k\|_{q,a}^q} \|u_k\|^{p-q}. \quad (2-44)$$

É fundamental destacar que a imersão compacta $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$, para cada $r \in [2, 2^*)$, o Teorema da Convergência Dominada e o fato de que $w_k \rightharpoonup w$ em X , garantem que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|w_k\|_{q,a}^q = \|w\|_{q,a}^q \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|w_k\|_{p,b}^p = \|w\|_{p,b}^p,$$

com $w \neq 0$. Usando essas afirmações na equação (2-44), obtemos

$$2\lambda > \lim_{\|u_k\| \rightarrow +\infty} R_e(u_k) = +\infty.$$

Logo, o caso $w \neq 0$ é impossível. Agora, assumindo que $w = 0$, tem-se que $w_k \rightharpoonup 0$ em X . Como a função \tilde{S}_e é 0-homogênea e $\|w_k\| = 1$, mencionamos por (2-33) que

$$\tilde{S}_e(u_k) = \tilde{S}_e(w_k) = \mathcal{A}_2 \theta^{\frac{q-2}{p-2}} \frac{\|w_k\|_{p,b}^{p\frac{q-2}{p-2}}}{\|w_k\|_{q,a}^q}.$$

Pela desigualdade de Interpolação e hipótese (a_2) , segue-se que

$$\|w_k\|_{q,a}^q \leq \|a\|_\infty \|w_k\|_2^{q\mu} \|w_k\|_p^{q(1-\mu)} \text{ com } q\mu = \frac{2(p-q)}{p-2} \text{ e } q(1-\mu) = \frac{p(q-2)}{p-2},$$

onde $\mu \in (0, 1)$. Dessa maneira, a imersão compacta $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$, o Teorema da Convergência Dominada e o fato de que $w_k \rightharpoonup 0$ em X , mostram que $\|w_k\|_2 \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow +\infty$. Logo, encontramos que

$$\begin{aligned} \tilde{S}_e(u_k) &= \tilde{S}_e(w_k) \\ &\geq \mathcal{A}_2 \theta^{\frac{q-2}{p-2}} \frac{\|w_k\|_{p,b}^{p\frac{q-2}{p-2}}}{\|a\|_\infty \|w_k\|_2^{q\mu} \|w_k\|_p^{q(1-\mu)}} \\ &\geq \frac{\mathcal{A}_2 \theta^{\frac{q-2}{p-2}} b_0^{p\frac{q-2}{p-2}}}{\|a\|_\infty} \left(\frac{1}{\|w_k\|_2} \right)^{2\frac{p-q}{p-2}} \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (2-45)$$

Consequentemente, temos que $2\lambda > R_e(u_k) \geq \tilde{R}_e(u_k) \rightarrow +\infty$, quando $k \rightarrow +\infty$. Isso mostra que o caso $w = 0$ é impossível, confirmando o resultado desejado. \square

A próxima proposição garante que, dependendo dos valores dos parâmetros λ e θ , o conjunto \mathcal{N}^0 é não vazio. Essa constatação traz algumas dificuldades adicionais, que serão esclarecidas mais adiante.

Proposição 2.32 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (b_2) , (v_1) - (v_3) , $\lambda \in [\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Então o conjunto de Nehari \mathcal{N}^0 é não vazio.*

Prova. É importante enfatizar que, quando $\lambda = \lambda^*$, os cálculos seguem exatamente os mesmos discutidos na Proposição 1.28, na qual optamos por omitir os detalhes. Nesta fase, assumamos que $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ é válido. Considere $(w_k) \in X \setminus \{0\}$ uma sequência, tal que $\|w_k\| = 1$, onde $w_k \rightharpoonup 0$ em X e (w_k) não converge fortemente para a função nula em X . Um cálculo já realizado na desigualdade (2-16) prova que

$$\|w_k\|_{q,a}^q \leq \mathcal{C}_{p,q} \|w_k\|_{p,b}^q.$$

Logo, utilizando (2-32) e o fato de que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|w_k\|_{p,b} = 0$, tem-se que

$$S_n(w_k) \geq \tilde{S}_n(w_k) \geq \frac{\mathcal{A}_1 \theta^{\frac{q-2}{p-2}}}{\mathcal{C}_{p,q}} \left(\frac{1}{\|w_k\|_{p,b}} \right)^{2\frac{p-q}{p-2}} \rightarrow +\infty,$$

quando $k \rightarrow +\infty$. Salientamos que o cálculo realizado anteriormente está associado à hipótese (b_1) . Agora, assumamos que hipótese (b_2) seja válida. Sabemos pela desigualdade de Interpolação que

$$\|w_k\|_{q,a}^q \leq \|a\|_\infty \|w_k\|_2^{q\mu} \|w_k\|_p^{q(1-\mu)} \text{ com } q\mu = \frac{2(p-q)}{p-2} \text{ e } q(1-\mu) = \frac{p(q-2)}{p-2},$$

com $\mu \in (0, 1)$. Realizando um cálculo semelhante ao da estimativa (2-45), obtemos

$$S_n(w_k) \geq \tilde{S}_n(w_k) \geq \frac{\mathcal{A}_1 \theta^{\frac{q-2}{p-2}} b_0^{\frac{p}{p-2}}}{\|a\|_\infty} \left(\frac{1}{\|w_k\|_2} \right)^{\frac{2p-q}{p-2}} \rightarrow +\infty,$$

quando $k \rightarrow +\infty$. Como consequência, para todo $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos que $S_n(w_k) > \lambda$. Assim, empregando o mesmo raciocínio da parte final da demonstração da Proposição 1.29, concluímos a prova desta proposição. \square

Proposição 2.33 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (b_2) , (v_1) - (v_3) , $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Seja $u \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-$ um minimizador para o funcional energia J . Então u é um ponto crítico para o funcional J em X , ou seja, $J'(u)\varphi = 0$ para cada $\varphi \in X$.*

Prova. A prova desse resultado segue exatamente as mesmas ideias discutidas na Proposição 1.40, na qual optamos por omitir detalhes. \square

Lema 2.34 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (b_2) , (v_1) - (v_3) , $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Seja $(u_k) \subset \mathcal{N}^-$ uma sequência minimizante para J em \mathcal{N}^- . Então existe $u \in X \setminus \{0\}$ tal que, a menos de uma subsequência, $u_k \rightarrow u$ fortemente em X , quando $k \rightarrow +\infty$ com a função $u \in \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$. Consequentemente, inferimos que $c_{\mathcal{N}^-} = J(u)$.*

Prova. Primeiramente, considere uma sequência minimizante $(u_k) \subset \mathcal{N}^-$ tal que $\lim_{k \rightarrow +\infty} J(u_k) = c_{\mathcal{N}^-}$. De acordo com o Lema 2.30, temos que a sequência (u_k) é limitada em X . Como produto, existe $u \in X$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ em X . Em vista das Proposições 2.23 e 2.24, tem-se que $u \neq 0$ e $\overline{\mathcal{N}^-} = \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$. Aqui, o objetivo central é provar a convergência forte de (u_k) para u em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Com esse intuito, suponha por contradição que (u_k) não converge forte para u em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Dessa forma, obtemos

$$\|u\| < \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|u_k\|.$$

Como resultado, é fácil checar que

$$J(tu) < \liminf_{k \rightarrow +\infty} J(tu_k) \quad \text{e} \quad J'(tu)tu < \liminf_{k \rightarrow +\infty} J'(tu_k)tu_k = 0, \quad (2-46)$$

para todo $t > 0$. Por conseguinte, inferimos que

$$R_n(u) < \liminf_{k \rightarrow +\infty} R_n(u_k) = \lambda, \quad (2-47)$$

e

$$\left. \frac{d}{dt} R_n(tu) \right|_{t=1} < \liminf_{k \rightarrow +\infty} \left. \frac{d}{dt} R_n(tu_k) \right|_{t=1} \leq 0. \quad (2-48)$$

Observe que $S_n(u) < \liminf S_n(u_k) = \lambda^* \leq \lambda$. Conforme estabelecido pela Proposição 2.17, existe $0 < t^{n,-}(u) < t_n(u) < t^{n,+}(u)$ tais que $t^{n,-}(u)u \in \mathcal{N}^-$ e $t^{n,+}(u)u \in \mathcal{N}^+$. Como consequência, a desigualdade (2-47) e a Proposição 1.14 garantem que $0 < t^{n,-}(u) < 1 < t^{n,+}(u)$. A última estimativa, juntamente com a desigualdade (2-48), implica que

$$0 < t^{n,-}(u) < 1 < t_n(u) < t^{n,+}(u) < +\infty.$$

É importante analisar que a aplicação $t \mapsto J(tu_k)$ é crescente no intervalo $(0, 1)$, para todo $(u_k) \in \mathcal{N}^-$. Esse fato, em conjunto com a desigualdade (2-46), mostra que

$$c_{\mathcal{N}^-} \leq J(t^{n,-}(u)u) < \liminf_{k \rightarrow +\infty} J(t^{n,-}(u)u_k) < \liminf_{k \rightarrow +\infty} J(u_k) = c_{\mathcal{N}^-}.$$

Isso leva a uma contradição, o que prova que $u_k \rightarrow u$ fortemente em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Uma consequência imediata estabelecida pela Proposição 2.24 é que $u \in \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$. Isso completa a prova do lema. \square

Proposição 2.35 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (b_2) , (v_1) - (v_3) , $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Então o nível de energia $c_{\mathcal{N}^-} > 0$, para todo $u \in \mathcal{N}^-$.*

Prova. Seja $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ fixo. Sabemos que $t^{n,-}(u)u \in \mathcal{N}^-$ se, e somente se,

$$R_n(t^{n,-}(u)u) = \lambda \quad \text{e} \quad \left. \frac{d}{dt} R_n(tu) \right|_{t=t^{n,-}(u)} < 0.$$

Em particular, obtemos que $Q_n(t^{n,-}(u)) = \lambda$. Por outro lado, é fácil verificar que $R_n(tu) < R_e(tu)$, para cada $t \in (0, t_e(u))$. Assim, tomando $t = t^{n,-}(u)$, tem-se que

$$\lambda = Q_n(t^{n,-}(u)) = R_n(t^{n,-}(u)u) < R_e(t^{n,-}(u)u) = Q_e(t^{n,-}(u)).$$

Logo, encontramos que $J(t^{n,-}(u)u) > 0$, para todo $t^{n,-}(u)u \in \mathcal{N}^-$. Portanto, o Lema 2.34 assegura que $c_{\mathcal{N}^-} > 0$. Com isso, concluímos a prova da proposição. \square

Lema 2.36 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (b_2) , (v_1) - (v_3) , $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Seja $(v_k) \subset \mathcal{N}^+$ uma sequência minimizante para J em \mathcal{N}^+ . Então existe $v \in X \setminus \{0\}$ tal que, a menos de uma subsequência, $v_k \rightarrow v$ fortemente em X , quando $k \rightarrow +\infty$ com a função $v \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^0$. Consequentemente, obtemos que $c_{\mathcal{N}^+} = J(v)$.*

Prova. Primeiramente, considere uma sequência minimizante $(v_k) \subset \mathcal{N}^+$ de modo que $\lim_{k \rightarrow +\infty} J(v_k) = c_{\mathcal{N}^+}$. Conforme estabelecido pelo Lema 2.31, a sequência (v_k) é limitada em X . Isso implica na existência de uma função $v \in X$ tal que $v_k \rightharpoonup v$ em X . Sabemos pelas Proposições 2.23 e 2.24 que $v \neq 0$ e $\overline{\mathcal{N}^+} = \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^0$. Aqui,

nosso principal objetivo é mostrar que $v_k \rightarrow v$ fortemente em X , quando $k \rightarrow +\infty$. De fato, suponha por contradição que a sequência (v_k) não converge forte para v em X . Dessa forma, temos

$$\|v\| < \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|v_k\|.$$

Dado que $v \mapsto S_n(v)$ é fracamente semicontínua inferiormente, encontramos que

$$S_n(v) < \liminf_{k \rightarrow +\infty} S_n(v_k) = \lambda^* \leq \lambda.$$

Note que a Proposição 2.17 garante que existem $0 < t^{n,-}(v) < t_n(v) < t^{n,+}(v)$ de tal maneira que $t^{n,-}(v)v \in \mathcal{N}^-$ e $t^{n,+}(v)v \in \mathcal{N}^+$. Além disso, não é difícil verificar que

$$\omega'_v(t^{n,+}(v)) = J'(t^{n,+}(v)v)v = 0.$$

Por outro lado, é sabido que

$$R_n(v) < \liminf_{k \rightarrow +\infty} R_n(v_k) = \lambda. \quad (2-49)$$

Como produto, a estimativa (2-49) afirma que

$$0 < t^{n,-}(v) < 1 < t^{n,+}(v).$$

Observe que a aplicação $t \mapsto J(tv)$ é decrescente em $(t^{n,-}(v), t^{n,+}(v))$. uma vez que $t^{n,+}(v)v \in \mathcal{N}^+$, segue-se que

$$c_{\mathcal{N}^+} \leq J(t^{n,+}(v)v) < J(v) < \liminf_{k \rightarrow +\infty} J(v_k) = c_{\mathcal{N}^+},$$

o que é uma contradição. Portanto, temos que $v_k \rightarrow v$ fortemente em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Uma consequência imediata estabelecida pela Proposição 2.24 é que $v \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^0$. Isso finaliza a prova do lema. \square

O próximo resultado é uma consequência direta do Lema 2.36. Em resumo, ele afirma que, dependendo dos valores dos parâmetros λ e θ , podemos analisar o sinal do nível de energia $c_{\mathcal{N}^+}$.

Proposição 2.37 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (b_2) , (v_1) - (v_3) , $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Assuma que $v \in X \setminus \{0\}$ é a solução obtida no Lema 2.36. Então,*

- (a) Para $\lambda = \lambda_*$, segue que $c_{\mathcal{N}^+} = J(v) = 0$;
- (b) Para cada $\lambda \in (\lambda_*, +\infty)$, mencionamos que $c_{\mathcal{N}^+} = J(v) < 0$;
- (c) Para cada $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_*)$, obtemos que $c_{\mathcal{N}^+} = J(v) > 0$.

Prova. Inicialmente, afirmamos que $c_{\mathcal{N}^+} = J(v) = 0$, quando $\lambda = \lambda_*$. Com efeito, a Proposição 2.18 assegura que existe uma função $w \in X \setminus \{0\}$ de modo que

$$\lambda = \lambda_* = R_e(t_e(w)w) = S_e(w) > S_n(w). \quad (2-50)$$

A estimativa (2-50) mostra que $J(t_e(w)w) = 0$ e $w \in U_n$. Como consequência, temos que a Proposição 2.17 garante a existência de $0 < t^{n,-}(w) < t_n(w) < t^{n,+}(w) < +\infty$ tal que $t^{n,-}(w)w \in \mathcal{N}^-$ e $t^{n,+}(w)w \in \mathcal{N}^+$. Uma vez que $t^{n,+}(w) = t_e(w) = 1$, inferimos que $\lambda = R_e(w)$. A última afirmação garante que

$$J(v) = c_{\mathcal{N}^+} \leq J(w) = 0.$$

Por outro lado, é fácil ver que $\lambda = \lambda_* \leq R_e(v)$. Assim, um cálculo simples prova que

$$\frac{\lambda_*}{q} \|v\|_{q,a}^q \leq \left(\frac{1}{q} \|v\|_{q,a}^q \right) R_e(v) = \frac{1}{2} \|v\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)} \|\nabla v\|_2^{2(\sigma+1)} + \frac{\theta}{p} \|v\|_{p,b}^p.$$

Esse fato significa que

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2} \|v\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)} \|\nabla v\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{\lambda}{q} \|v\|_{q,a}^q + \frac{\theta}{p} \|v\|_{p,b}^p \\ &\geq \left(\frac{\lambda_* - \lambda}{q} \right) \|v\|_{q,a}^q = 0. \end{aligned}$$

Segue que $c_{\mathcal{N}^+} = J(v) = 0$. Isso completa a prova do item (a). Nesse estágio, afirmamos que $c_{\mathcal{N}^+} = J(v) < 0$, quando $\lambda \in (\lambda_*, +\infty)$. De fato, sabemos pela Proposição 2.18 que existe $w \in X \setminus \{0\}$ tal que $\lambda > \lambda_* = S_e(w) = R_e(t_e(w)w)$. Não é difícil checar que

$$J(w) = J_\lambda(w) < J_{R_e(t_e(w)w)}(w), \quad w \in X \setminus \{0\}.$$

Sabemos também que $S_e(Kw) = S_e(w)$, para todo $K > 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $t_e(w) = 1$. Isso implica que $J_\lambda(w) < J_{R_e(w)}(w) = 0$, para cada $w \in \mathcal{E}$. Em particular, como $v \in \mathcal{N}^+$, existe $t^{n,+}(v) \in (0, +\infty)$ com $t^{n,+}(v)v \in \mathcal{N}^+$ tal que

$$c_{\mathcal{N}^+} \leq J_\lambda(t^{n,+}(v)v) = J_\lambda(v) < J_{R_e(v)}(v) = 0.$$

Isso finaliza a demonstração do item (b). Agora, mostraremos que $c_{\mathcal{N}^+} = J(v) > 0$, quando $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_*)$. Considere $\lambda < \lambda_* \leq R_e(v)$. Além disso, deduzimos que $\|v\|_{q,a}^q > \frac{1}{\lambda} \|v\|^2$, para todo $v \in \mathcal{N}$. Estas condições, em conjunto com a Proposição 2.23, implicam que

$$\begin{aligned} J_\lambda(v) = J_{R_e(v)}(v) + \frac{R_e(v) - \lambda}{q} \|v\|_{q,a}^q &\geq \frac{\lambda_* - \lambda}{q} \|v\|_{q,a}^q \\ &\geq \frac{\lambda_* - \lambda}{\lambda q} \|v\|^2 \\ &\geq \frac{\lambda_* - \lambda}{\lambda q} s_\lambda^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Como $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_*)$, concluímos que $c_{\mathcal{N}^+} = J(v) > 0$, e o item (c) está provado. \square

Observação 2.38 *É importante enfatizar que o nível de energia $c_{\mathcal{N}^0}$ é positivo para cada $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$. De fato, ao empregar o mesmo cálculo de (2-40) e considerar a Proposição 2.23, obtemos*

$$J(u) \geq \frac{(p-2)(q-2)}{2pq} s_\lambda^2 > 0.$$

Neste momento, nos deparamos com uma fase do capítulo extremamente desafiadora. À medida que $u \in \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$, $v \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^0$ e o conjunto de Nehari \mathcal{N}^0 é não vazio para cada $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$, inferimos que os minimizadores podem pertencer a \mathcal{N}^0 . Contudo, essa implicação inviabiliza a aplicação direta do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange. Para superar esse obstáculo, consideramos algumas condições precisas sobre os parâmetros $\lambda, \theta > 0$ de modo que $u, v \notin \mathcal{N}^0$.

Com o objetivo de tornar mais acessível a compreensão do leitor em relação a cada resultado a seguir, adotamos as seguintes notações: $J(u) = J_{\lambda,\theta}(u)$, $J'(u)u = J'_{\lambda,\theta}(u)u$, $J''(u)(u, u) = J''_{\lambda,\theta}(u)(u, u)$, $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\lambda,\theta}$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\lambda,\theta}$, $c_{\mathcal{N}^+} = c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+}$, $c_{\mathcal{N}^-} = c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-}$ e $c_{\mathcal{N}^0} = c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}$.

Proposição 2.39 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (b_2) , (v_1) - (v_3) e $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$. Então existe $\theta_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que o minimizador $v \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+ \cup \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0$ obtido no Lema 2.36 pertence à variedade de Nehari $\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+$ desde que:*

- (a) $\lambda \in [\lambda_*, +\infty)$ e $\theta > 0$;
- (b) $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_*)$ e $\theta \in (0, \theta_0)$.

Prova. É sabido que o Lema 2.36 garante que $v \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+ \cup \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0$, onde $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} = J_{\lambda,\theta}(v)$. Inicialmente, suponha que o item (a) seja verdadeiro. Segue da Proposição 2.37 que $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} = J_{\lambda,\theta}(v) \leq 0$, para cada $\lambda \in [\lambda_*, +\infty)$. Esse fato, juntamente com a Observação 2.38, assegura que

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} = J_{\lambda,\theta}(v) = \inf_{w \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} J_{\lambda,\theta}(w) \leq 0 < \inf_{w \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0} J_{\lambda,\theta}(w) = c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0},$$

para cada $\lambda \in [\lambda_*, +\infty)$. Portanto, tem-se que v pertence a $\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+$. Nesta ocasião, assumamos que o item (b) seja satisfeito. Relembramos que $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} = J_{\lambda,\theta}(v) > 0$, para cada $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_*)$, veja a Proposição 2.37. É sabido pela Proposição C.2 que a função $(\lambda, \theta) \mapsto c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+}$ é contínua, crescente em $\theta > 0$ e decrescente em $\lambda > 0$. A principal intenção aqui é garantir que $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} < c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}$. Para isso, suponha por contradição que

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} = c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}.$$

Essa condição, juntamente com a desigualdade (2-27), nos fornece que

$$J_{\lambda,\theta}(v) = \inf_{w \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} J_{\lambda,\theta}(w) = \inf_{w \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0} J_{\lambda,\theta}(w).$$

Além disso, dado $v \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0$, temos que $J_{\lambda,\theta}''(v)(v, v) = 0$, ou seja,

$$-\lambda \|v\|_{q,a}^q = -\left(\frac{p-2}{p-q}\right) \|v\|^2 - \left(\frac{p-2(\sigma+1)}{p-q}\right) \alpha_2 \|\nabla v\|_2^{2(\sigma+1)}. \quad (2-51)$$

Uma manipulação algébrica usando a equação (2-51) assegura que

$$J_{\lambda,\theta}(v) = \left[\frac{(p-2)(q-2)}{2pq}\right] \|v\|^2 + \left[\frac{(p-2(\sigma+1))(q-2(\sigma+1))}{2pq(\sigma+1)}\right] \alpha_2 \|\nabla v\|_2^{2(\sigma+1)}.$$

Sejam $\theta_e > 0$ e $\lambda_e \in (\lambda^*, \lambda)$ parâmetros fixos. Sabemos pela Proposição C.2 que $c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta_e}^+} \geq c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+}$, para todo $\lambda \geq \lambda_e$ e $\theta \in (0, \theta_e)$. As últimas afirmações, em conjunto com o Lema 2.36 e a hipótese (a_1) , implicam que

$$\begin{aligned} \left[\frac{(p-2)(q-2)}{2pq}\right] \|v\|^2 &\leq \left[\frac{(p-2)(q-2)}{2pq}\right] \|v\|^2 \\ &\quad + \left[\frac{(p-2(\sigma+1))(q-2(\sigma+1))}{2pq(\sigma+1)}\right] \alpha_2 \|\nabla v\|_2^{2(\sigma+1)} \\ &= J_{\lambda,\theta}(v) = c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} \leq c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta_e}^+}. \end{aligned}$$

Consequentemente, inferimos que

$$\|v\| \leq \sqrt{\frac{2pq}{(p-2)(q-2)}} c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta_e}^+}. \quad (2-52)$$

Por outro lado, utilizando (2-5), a imersão contínua $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$, para cada $r \in [2, 2^*]$, juntamente com o fato de que $v \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0$, obtemos

$$(q-2)\|v\|^2 \leq (q-2)\|v\|^2 + \alpha_2(q-2(\sigma+1))\|\nabla v\|_2^{2(\sigma+1)} \leq (p-q)\theta S_p^p \|b\|_\infty \|v\|^p.$$

Logo, encontramos que

$$\|v\| \geq \left[\frac{q-2}{(p-q)\theta S_p^p \|b\|_\infty}\right]^{\frac{1}{p-2}}. \quad (2-53)$$

Ao combinar as desigualdades (2-52) e (2-53), tem-se que

$$\left[\frac{q-2}{(p-q)\theta S_p^p \|b\|_\infty}\right]^{\frac{1}{p-2}} \leq \|v\| \leq \sqrt{\frac{2pq}{(p-2)(q-2)}} c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta_e}^+},$$

é satisfeito para todo $\theta \in (0, \theta_0)$ com $\theta_0 > 0$. Note também que $c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+} > 0$, para cada $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_*)$. Desse modo, tomando

$$\theta_0 = \min \left(\left[\frac{(p-2)(q-2)}{2c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta_e}^+} pq} \right]^{\frac{p-2}{2}} \frac{(q-2)}{(p-q)S_p^p \|b\|_\infty}, \theta_e \right) > 0,$$

temos uma contradição. Concluimos que v está em $\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+$. Isso finaliza a prova. \square

O próximo resultado segue uma abordagem semelhante às ideias discutidas na Proposição 2.39, mas agora considerando os minimizadores na variedade $\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-$.

Proposição 2.40 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (b_2) , (v_1) - (v_3) e $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$. Então existe $\theta_2 > 0$ suficientemente pequeno tal que o minimizador $u \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^- \cup \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0$ obtido no Lema 2.34 pertence à variedade de Nehari $\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-$, para cada $\theta \in (0, \theta_2)$.*

Prova. Sabemos pelo Lema 2.34 que $u \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^- \cup \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0$, onde $c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-} = J_{\lambda, \theta}(u)$. Aqui, nosso objetivo principal é mostrar que u pertence exclusivamente à variedade $\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-$. Com efeito, suponha por contradição que $u \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0$. Em vista da estimativa (2-28), mencionamos que

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-} = J_{\lambda, \theta}(u) = \inf_{w \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-} J_{\lambda, \theta}(w) \leq \inf_{w \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0} J_{\lambda, \theta}(w) \leq J_{\lambda, \theta}(u), \quad u \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0. \quad (2-54)$$

Não é difícil checar que $c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-} < c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0}$. Claramente, a partir da desigualdade (2-54), inferimos

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-} = \inf_{w \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-} J_{\lambda, \theta}(w) = \inf_{w \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0} J_{\lambda, \theta}(w) = c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0}.$$

A partir deste ponto, empregamos algumas das ideias discutidas na demonstração da Proposição 2.39. Sejam $\theta_e > 0$ e $\lambda_e \in (\lambda^*, \lambda)$ parâmetros fixos. Salientamos pela Proposição C.2 que $c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta_e}^-} \geq c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-}$, para todo $\lambda \geq \lambda_e$ e $\theta \in (0, \theta_e)$. Como consequência, deduzimos pela Proposição 2.39 que

$$\left[\frac{(p-2)(q-2)}{2pq} \right] \|u\|^2 \leq c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-} \leq c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta_e}^-}.$$

Isso significa que

$$\|u\| \leq \sqrt{\frac{2pq}{(p-2)(q-2)} c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta_e}^-}}.$$

Por outro lado, utilizando (2-5), em conjunto com a imersão contínua $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$, para cada $r \in [2, 2^*]$ e o fato de que $u \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0$, temos

$$\|u\| \geq \left[\frac{q-2}{(p-q)\theta S_p^p \|b\|_\infty} \right]^{\frac{1}{p-2}}.$$

As últimas condições garantem que

$$\left[\frac{q-2}{(p-q)\theta S_p^p \|b\|_\infty} \right]^{\frac{1}{p-2}} \leq \|u\| \leq \sqrt{\frac{2pq}{(p-2)(q-2)} c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta_e}^-}},$$

é satisfeito para todo $\theta \in (0, \theta_2)$ com $\theta_2 > 0$. Logo, tomando

$$\theta_2 = \min \left(\left[\frac{(p-2)(q-2)}{2c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta_e}^-} pq} \right]^{\frac{p-2}{2}} \frac{(q-2)}{(p-q)S_p^p \|b\|_\infty}, \theta_e \right) > 0,$$

temos uma contradição. Portanto, u está em $\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-$. Isso completa a demonstração. \square

Proposição 2.41 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (b_2) , (v_1) - (v_3) e $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$. Então os minimizadores $v \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+$ e $u \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-$ obtidos nas Proposições 2.39 e 2.40 são dois pontos críticos para o funcional energia $J_{\lambda, \theta}$.*

Prova. Uma vez que os itens (a) e (b) da Proposição 2.39 são satisfeitos, concluímos que o minimizador v pertence à variedade $\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+$. Segue-se da Proposição 2.33 que v é um ponto crítico para $J_{\lambda, \theta}$ em X . Além disso, a Proposição 2.40 garante que o minimizador u pertence à variedade $\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-$, para cada $\theta \in (0, \theta_2)$ com $\theta_2 > 0$ pequeno. Portanto, usando novamente a Proposição 2.33, tem-se que u é um ponto crítico para $J_{\lambda, \theta}$ em X , sempre que $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta \in (0, \theta_2)$. \square

Nesta ocasião, apresentamos um resultado referente à regularidade de soluções para o problema (\mathcal{P}_θ) . Assim como demonstrado no Teorema 1.44, assumimos que V , a e b são funções Hölder contínuas. Implementamos o método de regularização conhecido como “bootstrap” para assegurar que as soluções fracas estejam contidas no espaço $C^{0, \beta}(\overline{B(0, R)})$ para algum $\beta \in (0, 1)$ e para todo $R > 0$.

Teorema 2.42 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (v_1) - (v_3) e $V, a, b \in C^{0, \gamma}(\overline{B(0, R)})$, para algum $\gamma \in (0, 1)$ e para todo $R > 0$. Assuma que $u \in X$ é uma solução fraca para o problema (\mathcal{P}_θ) . Então $u \in C^{0, \beta}(\overline{B(0, R)})$ para algum $\beta \in (0, 1)$.*

Prova. Seja $u \in X$ é uma solução fraca para o problema (\mathcal{P}_θ) . Então u satisfaz

$$-\Delta u = -\frac{V(x)u}{\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}} + \frac{\lambda a(x)|u|^{q-2}u - \theta b(x)|u|^{p-2}u}{\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}} \text{ em } B(0, R).$$

Dessa maneira, defina uma função $h : B(0, R) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x, u) := -\frac{V(x)u}{\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}} + \frac{\lambda a(x)|u|^{q-2}u - \theta b(x)|u|^{p-2}u}{\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}}.$$

para todo $x \in B(0, R)$.

A última afirmação, juntamente com a desigualdade triangular e o fato de que $\frac{1}{\alpha_1} \geq \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}}$, implica que

$$|h(x, u)| \leq \alpha_1^{-1} (|V(x)||u(x)| + \lambda a(x)|u(x)|^{q-1} + \theta b(x)|u(x)|^{p-1}), \quad (2-55)$$

para todo $x \in B(0, R)$. Uma vez que $a, b, V \in L_{loc}^\infty(B(0, R))$, afirmamos que a função $h \in L^\nu(B(0, R))$, onde $\nu = \frac{2^*}{p-1}$. Com efeito, integrando a desigualdade (2-55) na bola $B(0, R)$, temos

$$\begin{aligned} \int_{B(0, R)} |h(x, u)|^\nu dx &\leq \alpha_1^{-\nu} \left(\int_{B(0, R)} |V(x)||u|^\nu dx + \lambda \int_{B(0, R)} |a(x)||u|^{q-1}|u|^\nu dx \right. \\ &\quad \left. + \theta \int_{B(0, R)} |b(x)||u|^{p-1}|u|^\nu dx \right). \end{aligned}$$

Ressaltamos que o restante da prova deste teorema segue exatamente os mesmos cálculos discutidos no Teorema 1.44, nos quais omitimos todos os detalhes. \square

Destacamos que o lema subsequente desempenha um papel fundamental na obtenção de um resultado de não existência de soluções para o problema (\mathcal{P}_θ) .

Lema 2.43 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (v_1) - (v_3) , $\lambda = \lambda^*$ e $\theta > 0$. Assuma que $u \in X \setminus \{0\}$ é uma solução fraca não trivial para os problemas (\mathcal{P}_θ) e (\mathcal{H}_θ) . Então, obtemos a seguinte identidade:*

$$(p-2)\theta b(x)|u|^{p-q} = (q-2)\lambda a(x) + \frac{2\sigma\alpha_2\|\nabla u\|_2^{2\sigma}\Delta u}{|u|^{q-2}u} \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \quad (2-56)$$

Prova. A partir da hipótese (a_1) e do fato de que u é uma solução que satisfaz pontualmente os problemas (\mathcal{P}_θ) e (\mathcal{H}_θ) , segue que

$$\lambda a(x)|u|^{q-2}u - \theta b(x)|u|^{p-2}u = \frac{\lambda q}{2}a(x)|u|^{q-2}u - \frac{\theta p}{2}b(x)|u|^{p-2}u + \sigma\alpha_2\|\nabla u\|_2^{2\sigma}\Delta u.$$

Uma vez que $u \neq 0$, tem-se que

$$\left(\frac{p-2}{2}\right)\theta b(x)|u|^{p-q} - \left(\frac{q-2}{2}\right)\lambda a(x) = \frac{\sigma\alpha_2\|\nabla u\|_2^{2\sigma}\Delta u}{|u|^{q-2}u}.$$

Isso garante que a equação (2-56) é válida. Portanto, o resultado está provado. \square

2.4 A prova dos teoremas principais

Esta seção tem como propósito apresentar a prova dos resultados principais deste capítulo. O mais destacado entre eles é a demonstração de que o problema

(\mathcal{P}_θ) possui pelo menos duas soluções não triviais. A saber, uma solução é *ground state* e outra a solução é uma *bound state*.

Teorema 2.44 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (b_2) , (v_1) - (v_3) e $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} < c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}$. Então para cada $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$, existe $\theta_0 > 0$ pequeno tal que o problema (\mathcal{P}_θ) admite pelo menos uma solução *ground state* $v \in X$ satisfazendo $v \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+$, onde $\theta \in (0, \theta_0)$.*

Prova. É sabido pela Proposição 2.39 que o minimizador v pertence à variedade de Nehari $\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+$. Vale lembrar que o Lema 2.36 nos fornece que

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} = \inf_{w \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} J_{\lambda,\theta}(w) = J_{\lambda,\theta}(v), \quad v \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+.$$

Em vista da Proposição 2.41, obtemos que $v \in X$ é um ponto crítico para o funcional energia $J_{\lambda,\theta}$ satisfazendo $J_{\lambda,\theta}''(v)(v, v) > 0$, para cada $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta \in (0, \theta_0)$ com $\theta_0 > 0$ suficientemente pequeno. Portanto, temos que $v \in X$ é uma solução fraca não trivial para o problema (\mathcal{P}_θ) . Como consequência, inferimos que v é uma solução *ground state* para o problema (\mathcal{P}_θ) . \square

Uma consequência imediata do Teorema 2.44 é o seguinte corolário.

Corolário 2.45 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (b_2) e (v_1) - (v_3) . Então os níveis de energia $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} < c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}$ desde que:*

- (a) $\lambda \in [\lambda_*, +\infty)$ e $\theta > 0$;
- (b) $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_*)$ e $\theta \in (0, \theta_0)$ com $\theta_0 > 0$ suficientemente pequeno;
- (c) $\lambda \in (\lambda_* - \varepsilon, \lambda_*)$ e $\theta > 0$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Prova. A prova dos itens (a) e (b) segue imediatamente da Proposição 2.39. Neste momento, considere $\theta > 0$ e $\lambda \in (\lambda_* - \varepsilon, \lambda_*)$, para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Seja $w \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0$ de tal forma que

$$J_{\lambda,\theta}(w) = c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}.$$

Dessa maneira, um cálculo simples, utilizando as estimativas (2-17), (2-40) e a hipótese (a_1) , implica que

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\theta}(w) = c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0} &\geq \left(\frac{(p-2)(q-2)}{2pq} \right) \|w\|^2 \\ &\geq \left(\frac{(p-2)(q-2)}{2pq} \right) \left(\frac{1}{\lambda S_q^q \|a\|_\infty} \right)^{\frac{2}{q-2}} > 0. \end{aligned} \quad (2-57)$$

Uma vez que $\lambda < \lambda_*$, mencionamos pela desigualdade (2-57) que

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0} > \left(\frac{(p-2)(q-2)}{2pq} \right) \left(\frac{1}{\lambda_* S_q^q \|a\|_\infty} \right)^{\frac{2}{q-2}} =: \mathcal{C}_{\lambda_*}.$$

Por outro lado, a Proposição 2.37 garante que $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} = J_{\lambda,\theta}(v) = 0$, para cada $\lambda = \lambda_*$ e $v \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+$. Além disso, é fácil ver que $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} = J_{\lambda,\theta}(v) > 0$, para cada $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_*)$. Portanto, existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} = J_{\lambda,\theta}(v) < \mathcal{C}_{\lambda_*} < c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0},$$

para cada $\lambda \in (\lambda_* - \varepsilon, \lambda_*)$. Isso completa a prova do item (c). \square

Aqui, vale ressaltar a importância de representarmos geometricamente as ideias discutidas nos itens (a), (b) e (c) do Corolário 2.45.

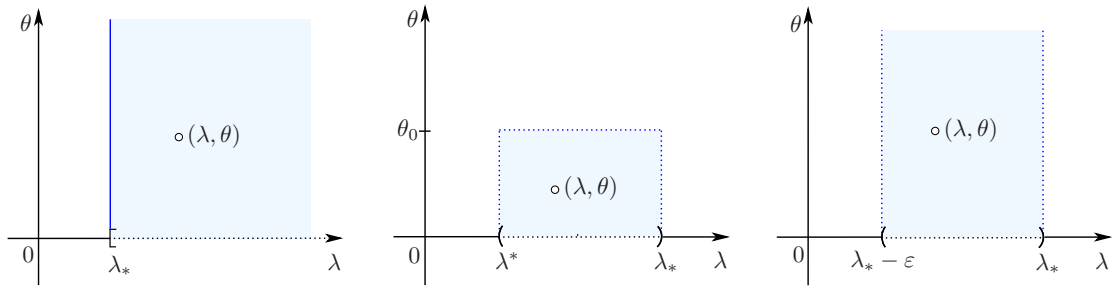


Figura 2.7: Comportamento geométrico dos itens (a), (b) e (c) do Corolário 2.45.

Teorema 2.46 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (b_2) , (v_1) - (v_3) e $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} < c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}$. Então para cada $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$, existe $\theta_2 > 0$ pequeno tal que o problema (\mathcal{P}_θ) admite pelo menos uma solução fraca $u \in X$ satisfazendo $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-$, onde $\theta \in (0, \theta_2)$.*

Prova. Aplicando a Proposição 2.40, inferimos que o minimizador u pertence à variedade de Nehari $\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-$. É fácil ver pelo Lema 2.34 que

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} = \inf_{w \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} J_{\lambda,\theta}(w) = J_{\lambda,\theta}(u), \quad u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-.$$

Em vista da Proposição 2.41, tem-se que $u \in X \setminus \{0\}$ é um ponto crítico para o funcional $J_{\lambda,\theta}$ satisfazendo $J_{\lambda,\theta}''(u)(u, u) < 0$, para cada $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta \in (0, \theta_2)$ com $\theta_2 > 0$ suficientemente pequeno. Portanto, obtemos que $u \in X$ é uma solução fraca não trivial para o problema (\mathcal{P}_θ) . \square

Uma consequência imediata do Teorema 2.46 é o seguinte corolário:

Corolário 2.47 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (b_2) , (v_1) - (v_3) e $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$. Então os níveis de energia $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} < c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}$, sempre que $\theta \in (0, \theta_2)$.*

Prova. A demonstração segue utilizando as mesmas ideias da Proposição 2.40. \square

Corolário 2.48 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (b_2) , (v_1) - (v_3) e $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$. Então para cada $\theta \in (0, \min(\theta_0, \theta_2))$, o problema (\mathcal{P}_θ) admite pelo menos duas soluções não triviais $u, v \in X \setminus \{0\}$ de modo que $u \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-$ e $v \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+$.*

Prova. Considere $\theta \in (0, \min(\theta_0, \theta_2))$. Note que o problema (\mathcal{P}_c) admite uma solução fraca $u \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-$ de modo que $c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-} = J_{\lambda, \theta}(u)$, para cada $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$, veja o Teorema 2.46. Adicionalmente, é sabido que o problema (\mathcal{P}_c) admite outra solução fraca $v \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+$ tal que $c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+} = J_{\lambda, \theta}(v)$, para cada $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$, veja o Teorema 2.44. \square

Nesse estágio, ressaltamos que os resultados finais deste capítulo buscam assegurar a não existência de soluções fracas não triviais para o problema (\mathcal{P}_θ) , variando conforme os valores dos parâmetros λ e θ .

Teorema 2.49 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (b_2) , (v_1) - (v_3) , $\lambda \in (-\infty, \lambda^*)$ e $\theta > 0$. Então o problema (\mathcal{P}_θ) não admite nenhuma solução não trivial.*

Prova. A ideia principal é demonstrar que o conjunto de Nehari $\mathcal{N}_{\lambda, \theta}$ é vazio, para cada $\lambda \in (-\infty, \lambda^*)$. Com efeito, suponha por contradição que existe $u \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}$. Dessa maneira, como $\lambda \leq 0$ obtemos que

$$0 < \|u\|^2 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta \|u\|_{p,b}^p = \lambda \|u\|_{q,a}^q \leq 0,$$

o que é uma contradição. Além disso, para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$, observamos que $u \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}$ se, e somente se, $R_n(u) = \lambda$. Isso significa que

$$0 < R_n(u) = \lambda < \lambda^* = \inf_{w \in X \setminus \{0\}} \inf_{t > 0} R_n(tw) \leq \inf_{t > 0} R_n(tu) \leq R_n(u) = \lambda,$$

o que é uma contradição. Esse fato prova que $\mathcal{N}_{\lambda, \theta} = \emptyset$, para cada $\lambda \in (-\infty, \lambda^*)$. Portanto, o problema (\mathcal{P}_θ) não admite nenhuma solução não trivial. \square

Teorema 2.50 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (b_2) e (v_1) - (v_3) . Seja $\lambda = \lambda^*$ e $\theta > 0$ parâmetros fixos. Então não existe solução fraca positiva ou negativa $u \in X$ para o problema (\mathcal{P}_θ) tal que $u \in \mathcal{N}_{\lambda^*, \theta}^0$, onde uma das seguintes hipóteses ocorre:*

- (a) $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{a(x)}{b(x)} \geq \mathcal{C} > 0$;
- (b) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{a(x)}{b(x)} = \mathcal{C} > 0$.

Prova. A prova segue argumentando por contradição. Suponha que existe $u \in \mathcal{N}_{\lambda^*, \theta}^0$, isto é, $J'_{\lambda^*, \theta}(u)u = 0$ e $J''_{\lambda^*, \theta}(u)(u, u) = 0$, onde u é uma solução fraca não trivial para

o problema (\mathcal{P}_θ) . Uma vez que $-u$ também é uma solução fraca para o problema (\mathcal{P}_θ) com

$$J''_{\lambda^*,\theta}(u)(u, u) = J''_{\lambda^*,\theta}(-u)(-u, -u),$$

podemos assumir, sem perda de generalidade, que $u > 0$. Sabemos que $J'_{\lambda^*,\theta}(u)\varphi = 0$, para todo $\varphi \in X$. É importante analisar pela Proposição 2.16 que u satisfaz $\lambda^* = S_n(u) = S_n(-u)$. Como produto, ao Lema 2.22 assegura que u é uma solução fraca não trivial para o problema (\mathcal{H}_θ) . Dessa forma, multiplicando a equação (\mathcal{P}_θ) por $2(\sigma + 1)$ e realizando manipulações algébricas em (\mathcal{P}_θ) e (\mathcal{H}_θ) , encontramos

$$\begin{aligned} -2\sigma\alpha_1\Delta u &= (2(\sigma + 1) - q)\lambda^*a(x)|u|^{q-2}u \\ &\quad + (p - 2(\sigma + 1))\theta b(x)|u|^{p-2}u - 2\sigma V(x)u \text{ em } \mathbb{R}^N. \end{aligned} \quad (2-58)$$

Enfatizamos pelo Teorema 2.42 que a equação (2-58) é válida pontualmente. Nesse caso, como $u > 0$, deduzimos pela equação (2-58) que

$$\begin{aligned} -2\sigma\alpha_1\Delta u &= (2(\sigma + 1) - q)\lambda^*a(x)|u|^{q-1} \\ &\quad + (p - 2(\sigma + 1))\theta b(x)|u|^{p-1} - 2\sigma V(x)u \text{ em } \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Escolhendo $R > 0$ suficientemente grande e, em seguida, usando que $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{a(x)}{b(x)} \geq \mathcal{C}$ se o item (a) for satisfeito ou $\frac{a(x)}{b(x)} \geq \frac{\mathcal{C}}{2}$, para $|x|$ suficientemente grande se o item (b) for satisfeito (ambos implicam $b(x) \leq \tilde{\mathcal{C}}a(x)$, para $|x|$ suficientemente grande), temos que

$$\begin{aligned} &(2(\sigma + 1) - q)\lambda^*a(x)|u|^{q-1} + (p - 2(\sigma + 1))\theta b(x)|u|^{p-1} \\ &\leq \left((2(\sigma + 1) - q)\lambda^*|u|^{q-1} + (p - 2(\sigma + 1))\theta\tilde{\mathcal{C}}|u|^{p-1} \right) a(x) \\ &\leq 0, \end{aligned} \quad (2-59)$$

para todo $x \in B_R^c(0)$, onde $B_R^c(0) := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > R\}$ com $R > 0$ suficientemente grande. Note que o Teorema 2.42 garante que existe $R > 0$, pois $u^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $p > q$ e $u(x) \rightarrow 0$, quando $|x| \rightarrow +\infty$ de modo que

$$\lambda^*(q - 2(\sigma + 1))|u|^{q-1} > \theta(p - 2(\sigma + 1))|u|^{p-1}.$$

Uma observação relevante é que, ao realizar os mesmos cálculos apresentados nos Teoremas 1.44, 1.45 e 2.42, concluimos que $u \in C^{1,\beta}(\overline{B(0, R)})$, para algum $\beta \in (0, 1)$ e para todo $R > 0$. Em particular, temos que $u \in C_{\text{loc}}^0(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, mostrando que $u(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow +\infty$. As últimas condições provam que

$$|u|^{p-q} < \frac{(q - 2(\sigma + 1))\lambda^*}{(p - 2(\sigma + 1))\theta} \text{ em } B_R^c(0),$$

para qualquer $R > 0$ suficientemente grande. Sabemos pela hipótese (v_3) que

$$|\mathcal{T}_1| := |\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \geq 1\}| = +\infty.$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} -2\sigma\alpha_1\Delta u &= (2(\sigma+1) - q)\lambda^*a(x)|u|^{q-1} \\ &\quad + (p - 2(\sigma+1))\theta b(x)|u|^{p-1} - 2\sigma V(x)u \leq 0, \end{aligned}$$

em $B_R^c(0) \cap \mathcal{T}_1$. Consequentemente, podemos deduzir que $\Delta u \geq 0$ in $B_R^c(0) \cap \mathcal{T}_1$. Nesse estágio, uma vez que $\mathcal{T}_1 = [\mathcal{T}_1 \cap B_R(0)] \cup [\mathcal{T}_1 \cap B_R^c(0)]$ onde

$$|\mathcal{T}_1 \cap B_R(0)| + |\mathcal{T}_1 \cap B_R^c(0)| = |\mathcal{T}_1| = +\infty,$$

segue que

$$|\mathcal{T}_1 \cap B_R^c(0)| = +\infty.$$

Dessa forma, aplicando o Lema 2.43, inferimos que

$$(p-2)\theta b(x)|u|^{p-1} = (q-2)\lambda^*a(x)|u|^{q-1} + 2\sigma\alpha_2\|\nabla u\|_2^{2\sigma}\Delta u \text{ em } B_R^c(0) \cap \mathcal{T}_1.$$

A última condição mostra que

$$|u|^{p-q} \geq \frac{(q-2)\lambda^*a(x)}{(p-2)\theta b(x)}. \quad (2-60)$$

Se o item (a) for verdadeiro, mencionamos pela desigualdade (2-60) que

$$|u|^{p-q} \geq \frac{(q-2)\lambda^*}{(p-2)\theta} \inf_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{a(x)}{b(x)} \geq \frac{(q-2)\lambda^*\mathcal{C}}{\theta(p-2)} =: \mathcal{C}_1 > 0, \quad (2-61)$$

onde \mathcal{C} e \mathcal{C}_1 são constantes positivas. Uma consequência imediata da desigualdade (2-61) é que

$$|u|^2 \geq \mathcal{C}_1^{\frac{2}{p-q}} > 0 \text{ em } B_R^c(0) \cap \mathcal{T}_1.$$

A última estimativa, juntamente com $|B_R^c(0) \cap \mathcal{T}_1| = +\infty$, nos leva a uma contradição, uma vez que $u^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Agora, se o item (b) for verdadeiro, fazendo $|x| \rightarrow +\infty$ em (2-60) e lembrando que $u(x) \rightarrow 0$, obtemos

$$0 \geq \frac{(q-2)\lambda^*}{(p-2)\theta} \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{a(x)}{b(x)} = \frac{(q-2)\lambda^*}{(p-2)\theta} \mathcal{C} > 0,$$

o que é uma contradição. Portanto, qualquer solução fraca positiva ou negativa u para o problema (\mathcal{P}_θ) satisfaz $u \notin \mathcal{N}_{\lambda^*, \theta}^0$. Isso finaliza a prova. \square

Soluções positivas para um problema elíptico do tipo Kirchhoff com crescimento crítico em \mathbb{R}^N

O principal objetivo deste capítulo é investigar a existência, não existência e a multiplicidade de soluções positivas para o seguinte problema elíptico do tipo Kirchhoff com uma não linearidade crítica em todo o espaço \mathbb{R}^N :

$$\begin{cases} -m(\|\nabla u\|_2^2) \Delta u + V(x)u = \lambda a(x)|u|^{q-2}u - \theta|u|^{2^*-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (\mathcal{P}_c)$$

onde $N \geq 3$, os parâmetros $\lambda, \theta > 0$ e o potencial $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é limitado por baixo por uma constante positiva e pertence a $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Além disso, assumimos que a função $a \in L^{\tilde{r}}(\mathbb{R}^N) \cap L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^N)$, onde $\tilde{r} = \frac{2^*}{2^*-q}$ e $a(x) > 0$ *q.t.p.* em \mathbb{R}^N .

Assim como abordado no Capítulo 2, nossa estratégia se fundamenta no método de minimização sobre a variedade de Nehari e no método do quociente de Rayleigh não linear. Ressaltamos que o problema (\mathcal{P}_c) apresenta desafios notáveis, incluindo a não compacidade da imersão de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, aspecto natural dada a infinitude da dimensão do espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$. Outra complexidade que encontramos é relacionada ao método de fibração e à noção de valores extremos [42, 43], os quais indicam que a variedade de Nehari associada ao problema (\mathcal{P}_c) possui pontos degenerados. Isso implica que o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange não pode ser aplicado de maneira geral. Dessa forma, essas peculiaridades tornam a determinação da existência, não existência e multiplicidade de soluções para o problema (\mathcal{P}_c) uma tarefa extraordinariamente desafiadora. Portanto, nossa principal contribuição concentra-se na restauração dos resultados de convergência forte e compacidade.

É importante enfatizar que, até onde sabemos, o presente capítulo é o primeiro que fornece uma descrição completa do tamanho dos parâmetros $\lambda, \theta > 0$ de tal

forma que existem pelo menos duas soluções positivas para o problema (\mathcal{P}_c) , mesmo com a presença do expoente crítico.

Aqui, adotamos as seguintes hipóteses para o problema (\mathcal{P}_c) :

- (M₁) A função $m : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfaz $m(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t^\sigma$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ com $0 < \sigma < \frac{2}{N-2}$;
- (A₁) $2 < q < 2(\sigma + 1) < 2^*$;
- (A₂) A função $a : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $a \in L^{\tilde{r}}(\mathbb{R}^N) \cap L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^N)$, onde $\tilde{r} = \frac{2^*}{2^*-q}$ e $a(x) > 0$ q.t.p. em \mathbb{R}^N ;
- (V₁) O potencial V pertence a $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^N)$, e existe uma constante $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq V_0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Antes de delinear a estrutura variacional do problema (\mathcal{P}_c) , é essencial destacar que vários resultados obtidos nos Capítulos 1 e 2 são igualmente aplicáveis ao Capítulo 3. Para uma organização mais eficiente deste capítulo, optamos por não apresentar nem demonstrar alguns desses resultados. Dessa maneira, as Observações 1.11, 1.12, 1.16, 2.9, 2.10, 2.12 e 2.19, assim como as Proposições 1.13, 1.14, 1.15, 1.17, 2.11, 2.20, 2.21, 2.27, 2.33 e 2.35, e os Lemas 1.30 e 2.29, permanecem válidos.

3.1 Estrutura variacional do problema

Seja X um subespaço próprio de $H^1(\mathbb{R}^N)$ definido por

$$X = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < +\infty \right\},$$

equipado com o produto interno dado por

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [\alpha_1 \nabla u \nabla \varphi + V(x)u\varphi] dx, \quad \varphi \in X.$$

A sua norma usual é dada por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} [\alpha_1 |\nabla u|^2 + V(x)u^2] dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in X.$$

Note que $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Hilbert (veja o Lema 1.2). Relembramos que S_{2^*} é a melhor constante da imersão contínua de Sobolev $X \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$0 < S_{2^*} := \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|u\|^2}{\|u\|_{2^*}^2}. \quad (3-1)$$

Uma consequência imediata da estimativa (3-1) é

$$\|u\|_{2^*} \leq S_{2^*}^{-\frac{1}{2}} \|u\|, \quad u \in X \setminus \{0\}.$$

Ao aplicarmos as mesmas ideias discutidas na Observação 1.7 e considerarmos a hipótese (V_1) , observamos que a imersão $X \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ é contínua para cada $s \in [2, 2^*]$. No entanto, ao contrário do Capítulo 2, onde a condição de Bartsch-Wang (veja [12]) desempenhava um papel crucial, neste capítulo a hipótese (A_2) assume uma importância significativa, especialmente no que diz respeito à compacidade.

Observação 3.1 *Com base na hipótese (V_1) , é fácil verificar que*

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 &:= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2) dx \leq \frac{1}{\alpha_1} \int_{\mathbb{R}^N} \alpha_1 |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{V_0} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx \\ &\leq \max\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{V_0}\right) \|u\|^2, \end{aligned}$$

para todo $u \in X \setminus \{0\}$ e $\alpha_1, V_0 > 0$.

Agora, considere o funcional energia $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (\mathcal{P}_c) , definido por

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)} \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |u|^q dx + \frac{\theta}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx.$$

Com base em nossas suposições, qualquer solução fraca $u \in X$ para o problema (\mathcal{P}_c) satisfaz a seguinte condição:

Definição 3.2 *Dizemos que $u \in X$ é solução fraca para o problema (\mathcal{P}_c) se, e somente se,*

$$\langle u, \varphi \rangle + \alpha_2 \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma} = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |u|^{q-2} u \varphi dx - \theta \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*-2} u \varphi dx,$$

para todo $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Conforme detalhado no Apêndice B, temos que o funcional energia J é de classe $C^2(X; \mathbb{R})$. Esse fato nos possibilita determinar as seguintes derivadas:

$$\begin{cases} J'(u)u = \|u\|^2 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \lambda \|u\|_{q,a}^q + \theta \|u\|_{2^*}^{2^*}, \\ J''(u)(u, u) = \|u\|^2 + \alpha_2 (2\sigma+1) \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \lambda (q-1) \|u\|_{q,a}^q + \theta (2^*-1) \|u\|_{2^*}^{2^*}, \end{cases}$$

onde definimos

$$\|u\|_{q,a}^q = \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |u|^q dx \quad \text{e} \quad \|u\|_{2^*}^{2^*} = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx, \quad u \in X.$$

Neste momento, seguindo as mesmas ideias discutidas nos trabalhos [55, 56], introduzimos a *variedade de Nehari* associada ao problema (\mathcal{P}_c) da seguinte maneira:

$$\mathcal{N} := \left\{ u \in X \setminus \{0\} : \lambda \|u\|_{q,a}^q = \|u\|^2 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta \|u\|_{2^*}^{2^*} \right\}. \quad (3-2)$$

Da mesma forma que no Capítulo 2, dividimos a *variedade de Nehari* em três subconjuntos disjuntos, a saber, $\mathcal{N} := \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$ onde

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^+ &:= \{u \in \mathcal{N} : J'(u)u = 0 \text{ e } J''(u)(u, u) > 0\}, \\ \mathcal{N}^- &:= \{u \in \mathcal{N} : J'(u)u = 0 \text{ e } J''(u)(u, u) < 0\}, \\ \mathcal{N}^0 &:= \{u \in \mathcal{N} : J'(u)u = 0 \text{ e } J''(u)(u, u) = 0\}.\end{aligned}$$

De acordo com (3-2), para qualquer $u \in \mathcal{N}$, temos que

$$\begin{aligned}J''(u)(u, u) &= (2 - 2^*)\|u\|^2 + \alpha_2(2(\sigma + 1) - 2^*)\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \lambda(2^* - q)\|u\|_{q,a}^q \\ &= (2 - q)\|u\|^2 + \alpha_2(2(\sigma + 1) - q)\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta(2^* - q)\|u\|_{2^*}^{2^*}.\end{aligned}\quad (3-3)$$

A seguir, apresentamos as principais propriedades que relacionam o método do quociente de Rayleigh não linear e o método de Nehari. A primeira propriedade descreve o comportamento do funcional J quando a sua energia é igual a zero, ou seja,

$$\mathcal{E} := \left\{ u \in X \setminus \{0\} : \frac{\lambda}{q}\|u\|_{q,a}^q = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma + 1)}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \frac{\theta}{2^*}\|u\|_{2^*}^{2^*} \right\}.\quad (3-4)$$

Desse modo, ao adotarmos algumas ideias previamente desenvolvidas nos estudos [42, 43], inferimos pelas definições (3-2) e (3-4) que

$$\begin{aligned}u \in \mathcal{N} \text{ se, e somente se, } R_n(u) &= \lambda, \\ u \in \mathcal{E} \text{ se, e somente se, } R_e(u) &= \lambda,\end{aligned}$$

onde $R_n, R_e : X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ representam os quocientes de Rayleigh não lineares associados ao parâmetro $\lambda > 0$, sendo definidos como:

$$R_n(u) := \frac{\|u\|^2 + \alpha_2\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta\|u\|_{2^*}^{2^*}}{\|u\|_{q,a}^q}, \quad u \in X \setminus \{0\}\quad (3-5)$$

e

$$R_e(u) := \frac{\frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \frac{\theta}{2^*}\|u\|_{2^*}^{2^*}}{\frac{1}{q}\|u\|_{q,a}^q}, \quad u \in X \setminus \{0\}.\quad (3-6)$$

Vale ressaltar que R_n e R_e estão bem definidos e pertencem a $C^2(X \setminus \{0\}; \mathbb{R})$. A demonstração desse fato segue ideias similares às do Apêndice B.

Observe que as Definições 2.4 e 2.5, apresentadas no Capítulo 2, também são satisfeitas e amplamente utilizadas ao longo deste capítulo. Além disso, é fácil verificar que a função \mathcal{B} , definida na equação (2-9), não satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz e possui sinal indefinido ao substituirmos $\theta b(x)|t|^{p-2}t$ por $\theta|t|^{2^*-2}t$.

3.2 Resultados preliminares acerca dos métodos do quociente de Rayleigh e Nehari

O objetivo desta seção é elucidar algumas propriedades fundamentais sobre o método do quociente de Rayleigh não linear e o método de minimização sobre a variedade de Nehari. É importante destacar que o conjunto \mathcal{N} está associado ao comportamento de funções conhecidas como *fibering map*. Essas funções, representadas por $\gamma_u : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, são definidas por

$$\gamma_u(t) := J(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{t^{2(\sigma+1)}}{2(\sigma+1)}\alpha_2\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{t^q}{q}\lambda\|u\|_{q,a}^q + \frac{t^{2^*}}{2^*}\theta\|u\|_{2^*}^{2^*}.$$

Note que a identidade $\gamma_u(t)$ possui propriedades interessantes, as quais podem ser interpretadas de forma análoga à equação (2-11) no Capítulo 2, substituindo o expoente p pelo expoente 2^* .

Para investigar o comportamento geométrico das fibras dos funcionais $R_n(tu)$ e $R_e(tu)$, dados em (3-5) e (3-6), introduzimos novas funções $Q_n(t) := R_n(tu)$ e $Q_e(t) := R_e(tu)$, para todo $t > 0$ e $u \in X \setminus \{0\}$. Com essas funções, deduzimos pela hipótese (A_1) que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} Q_n(t) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} Q_n(t) = +\infty.$$

Além disso, é fácil verificar que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d}{dt}Q_n(t)}{t^{1-q}} = \frac{(2-q)\|u\|^2}{\|u\|_{q,a}^q} < 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d}{dt}Q_n(t)}{t^{2^*-q-1}} = \frac{\theta(2^*-q)\|u\|_{2^*}^{2^*}}{\|u\|_{q,a}^q} > 0.$$

Como resultado, podemos afirmar que existe pelo menos um ponto crítico para o funcional R_n . Esse ponto crítico corresponderá a um mínimo global. De forma análoga, obtemos as mesmas condições acima para o funcional R_e .

Observação 3.3 *Uma vez que o funcional R_n possui pelo menos um ponto crítico, afirmamos que esse ponto crítico é único. Com efeito, como $\frac{d}{dt}R_n(tu)|_{t=t_n(u)} = 0$, encontramos*

$$(q-2)\|u\|^2 = \alpha_2(2(\sigma+1)-q)t^{2\sigma}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta(2^*-q)t^{2^*-2}\|u\|_{2^*}^{2^*},$$

para todo $t = t_n(u) > 0$. Examinando a equação acima, introduzimos uma função $\mathcal{L}_2 : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}_2(t) := \alpha_2(2(\sigma+1)-q)t^{2\sigma}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta(2^*-q)t^{2^*-2}\|u\|_{2^*}^{2^*}.$$

A última afirmação, em conjunto com a hipótese (A_1) , implica que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{L}_2(t) = 0 \quad e \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_2(t) = +\infty,$$

com a função \mathcal{L}_2 estritamente crescente para todo $t = t_n(u) > 0$. Por outro lado, tem-se que

$$\mathcal{L}_3(t) = (q - 2)\|u\|^2 > 0.$$

Portanto, há um único ponto crítico $t = t_n(u) > 0$ para o funcional $t \mapsto R_n(tu)$. Analogamente, temos que o funcional $t \mapsto R_e(tu)$ possui um ponto crítico único $t = t_e(u) > 0$, para cada $u \in X \setminus \{0\}$.

Com o intuito de tornar mais acessível ao leitor, a Figura 3.1 ilustra a possível geometria das funções \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_3 .

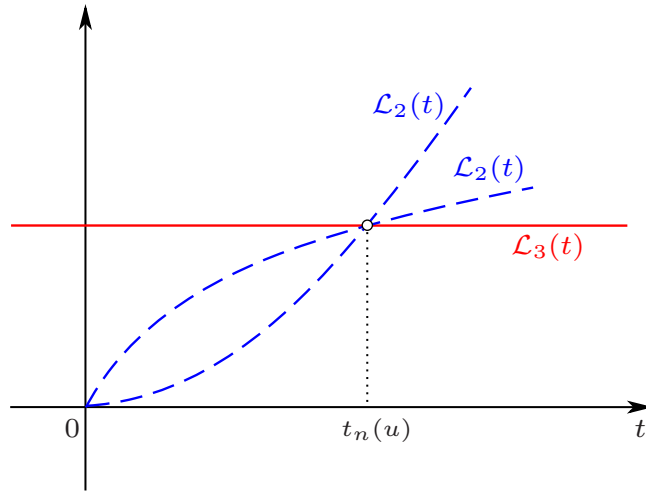


Figura 3.1: Existência e unicidade de $t_n(u) > 0$.

Observe que nossas hipóteses não garantem que a imersão $X \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ seja compacta, para cada $s \in [2, 2^*)$. Esse fato introduz algumas dificuldades adicionais em nosso trabalho, as quais ficarão evidentes a seguir. Dessa forma, o próximo resultado desempenha um papel crucial, especialmente no que diz respeito à questão da compacidade.

Proposição 3.4 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) e (V_1) . Assuma que $u_k \rightharpoonup u$ em X , para algum $u \in X$. Então, obtemos que*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k - u\|_{q,a}^q = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_k - u|^q dx = 0.$$

Prova. Seja a bola aberta $B(x_0, R) \subset \mathbb{R}^N$ com $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $R > 0$. É sabido que

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_k - u|^q dx = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0, R)} a(x)|u_k - u|^q dx + \int_{B(x_0, R)} a(x)|u_k - u|^q dx.$$

Enfatizamos pela hipótese (A_2) que existe $R > 0$ (fixo) de tal maneira que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0, R)} |a(x)|^{\tilde{r}} dx < \varepsilon, \text{ com } \tilde{r} = \frac{2^*}{2^* - q}.$$

A última estimativa, juntamente com a desigualdade de Hölder e a imersão contínua $X \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ para cada $s \in [2, 2^*]$, nos permite concluir que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0, R)} a(x)|u_k - u|^q dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_k - u|^{2^*} dx \right)^{\frac{q}{2^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0, R)} |a(x)|^{\tilde{r}} dx \right)^{\frac{1}{\tilde{r}}} \\ &= \|u_k - u\|_{2^*}^q \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0, R)} |a(x)|^{\tilde{r}} dx \right)^{\frac{1}{\tilde{r}}} \\ &\leq S_{2^*}^{-\frac{q}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{\tilde{r}}} \|u_k - u\|^q \\ &\leq C_1 S_{2^*}^{-\frac{q}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{\tilde{r}}}. \end{aligned}$$

Além disso, como $u_k \rightharpoonup u$ em X para algum $u \in X$, deduzimos que $u_k(x) \rightarrow u(x)$ *q.t.p.* em $B(x_0, R)$, $u_k \rightarrow u$ em $L^s(B(x_0, R))$ e $|u_k| \leq h_s$, onde $h_s \in L^s(B(x_0, R))$, para cada $s \in [1, 2^*]$ e $R > 0$. Com isso, temos pela hipótese (A_2) que $a \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^N)$ e, portanto,

$$a(x)|u_k - u|^q \leq C_R h_s^q \in L^1(B(x_0, R)).$$

Logo, aplicando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos que

$$\int_{B(x_0, R)} a(x)|u_k - u|^q dx < \varepsilon, \quad k \geq k_0.$$

Como produto, inferimos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_k - u|^q dx = 0.$$

Em particular, a Identidade de Brezis-Lieb estabelece que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k\|_{q,a}^q = \|u\|_{q,a}^q.$$

Isso completa a prova. □

Nesta etapa, apresentamos um dos resultados mais pertinentes deste capítulo: o funcional energia demonstra ser fracamente semicontínuo inferior. Esta constatação é fundamental para a prova de que toda sequência minimizante contém uma subsequência convergente.

Lema 3.5 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) e $\lambda, \theta > 0$. Assuma que existe uma sequência $(u_k) \in X$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ em X , para algum $u \in X \setminus \{0\}$. Então o funcional $u \mapsto J(u)$ é fracamente semicontínuo inferiormente.*

Prova. Seja $(u_k) \in X$ uma sequência tal que $u_k \rightharpoonup u$ em X , para algum $u \in X \setminus \{0\}$. Nesse caso, é fácil ver que

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|u_k\|^2.$$

Adicionalmente, usando a Proposição 3.4 e o fato de que $u_k \rightharpoonup u$ em X , encontramos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k\|_{q,a}^q = \|u\|_{q,a}^q.$$

Em vista de que $u_k(x) \rightarrow u(x)$ *q.t.p.* em \mathbb{R}^N , obtemos pelo Lema de Fatou que

$$\|u\|_{2^*}^{2^*} \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|u_k\|_{2^*}^{2^*}.$$

Utilizando o mesmo raciocínio discutido no Lema 1.20, tem-se que

$$\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|\nabla u_k\|_2^{2(\sigma+1)}.$$

Sob tais condições, podemos concluir que

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)} \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{\lambda}{q} \|u\|_{q,a}^q + \frac{\theta}{2^*} \|u\|_{2^*}^{2^*} \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \|u_k\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)} \|\nabla u_k\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{\lambda}{q} \|u_k\|_{q,a}^q + \frac{\theta}{2^*} \|u_k\|_{2^*}^{2^*} \right) \\ &= \liminf_{k \rightarrow +\infty} J(u_k). \end{aligned}$$

Isso completa a demonstração. \square

Observação 3.6 *Salientamos que os funcionais $u \mapsto R_n(tu)$ e $u \mapsto R_e(tu)$ são fracamente semicontínuos inferiormente para todo $t > 0$. A prova segue utilizando as mesmas ideias discutidas no Lema 3.5, com ênfase na aplicação do Lema de Fatou.*

Proposição 3.7 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) , $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Então a função t_n é (-1) -homogênea. Além disso, a função S_n é 0 -homogênea e é contínua.*

Prova. A prova usa os mesmos argumentos discutidos na Proposição 2.13. \square

Agora, vamos explorar algumas propriedades interessantes relacionadas ao método do quociente de Rayleigh não linear. Salientamos que essas propriedades possuem uma estrutura semelhante àquelas estabelecidas no Capítulo 2, as quais utilizamos para demonstrar a coercividade sobre a variedade de Nehari \mathcal{N}^+ . Em contraste com o Capítulo 2, optamos por apresentar esses resultados logo no início desse capítulo, uma vez que serão úteis, por exemplo, para demonstrar que a função S_n é limitada inferiormente por uma constante positiva. Dessa forma, para todo $t > 0$ e $u \in X \setminus \{0\}$, obtemos as seguintes estimativas:

$$R_n(tu) = \frac{\|tu\|^2 + \alpha_2 \|\nabla(tu)\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta \|tu\|_{2^*}^{2^*}}{\|tu\|_{q,a}^q} \geq \frac{\|tu\|^2 + \theta \|tu\|_{2^*}^{2^*}}{\|tu\|_{q,a}^q},$$

e

$$R_e(tu) = \frac{\frac{1}{2}\|tu\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)} \|\nabla(tu)\|_2^{2(\sigma+1)} + \frac{\theta}{2^*} \|tu\|_{2^*}^{2^*}}{\frac{1}{q} \|tu\|_{q,a}^q} \geq \frac{\frac{1}{2}\|tu\|^2 + \frac{\theta}{2^*} \|tu\|_{2^*}^{2^*}}{\frac{1}{q} \|tu\|_{q,a}^q}.$$

Essas desigualdades nos possibilitam definir novos funcionais $\widehat{R}_n, \widehat{R}_e : X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dados por

$$\widehat{R}_n(tu) := \frac{\|tu\|^2 + \theta \|tu\|_{2^*}^{2^*}}{\|tu\|_{q,a}^q} \quad \text{e} \quad \widehat{R}_e(tu) := \frac{\frac{1}{2}\|tu\|^2 + \frac{\theta}{2^*} \|tu\|_{2^*}^{2^*}}{\frac{1}{q} \|tu\|_{q,a}^q}, \quad t > 0. \quad (3-7)$$

Uma simples manipulação algébrica em (3-7) garante que

$$\begin{aligned} \|u\|_{q,a}^q \left(\frac{d}{dt} \widehat{R}_n(tu) \right) &= (2-q)t^{1-q} \|u\|^2 + \theta(2^*-q)t^{2^*-q-1} \|u\|_{2^*}^{2^*} = 0, \\ \|u\|_{q,a}^q \left(\frac{d}{dt} \widehat{R}_e(tu) \right) &= \left(\frac{2-q}{2} \right) t^{1-q} \|u\|^2 + \theta \left(\frac{2^*-q}{2^*} \right) t^{2^*-q-1} \|u\|_{2^*}^{2^*} = 0. \end{aligned}$$

se, e somente se,

$$\widehat{t}_n(u) := \left[\frac{(q-2)}{\theta(2^*-q)} \frac{\|u\|^2}{\|u\|_{2^*}^{2^*}} \right]^{\frac{1}{2^*-2}} \quad \text{e} \quad \widehat{t}_e(u) := \left[\frac{2^*}{2} \right]^{\frac{1}{2^*-2}} \widehat{t}_n(u),$$

onde \widehat{t}_n e \widehat{t}_e representam os únicos pontos críticos dos funcionais \widehat{R}_n e \widehat{R}_e , respectivamente. Como produto, deduzimos que

$$\begin{aligned} \widehat{S}_n(u) := \widehat{R}_n(\widehat{t}_n(u)u) &= \frac{1}{\|u\|_{q,a}^q} \left(\left[\frac{(q-2)\|u\|^2}{\theta(2^*-q)\|u\|_{2^*}^{2^*}} \right]^{\frac{2-q}{2^*-2}} \|u\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \theta \left[\frac{(q-2)\|u\|^2}{\theta(2^*-q)\|u\|_{2^*}^{2^*}} \right]^{\frac{2^*-q}{2^*-2}} \|u\|_{2^*}^{2^*} \right) \\ &= \mathcal{I}_1 \theta^{\frac{q-2}{2^*-2}} \frac{\|u\|^{2\frac{2^*-q}{2^*-2}} \|u\|_{2^*}^{2^* \frac{q-2}{2^*-2}}}{\|u\|_{q,a}^q}, \end{aligned} \quad (3-8)$$

onde \mathcal{I}_1 é uma constante positiva definida por

$$\mathcal{I}_1 := \left(\frac{q-2}{2^*-q} \right)^{\frac{2^*-q}{2^*-2}} \left(\frac{2^*-2}{q-2} \right).$$

De maneira análoga, segue-se que

$$\widehat{S}_e(u) := \widehat{R}_e(\widehat{t}_e(u)u) = \mathcal{I}_2 \theta^{\frac{q-2}{2^*-2}} \frac{\|u\|^{2\frac{2^*-q}{2^*-2}} \|u\|_{2^*}^{2^* \frac{q-2}{2^*-2}}}{\|u\|_{q,a}^q},$$

onde \mathcal{I}_2 é uma constante positiva dada por

$$\mathcal{I}_2 := \left(\frac{2^*(q-2)}{2(2^*-q)} \right)^{\frac{2^*-q}{2^*-2}} \left(\frac{q(2^*-2)}{2^*(q-2)} \right).$$

É fácil perceber que $S_n(u) \geq \widehat{S}_n(u)$ e $S_e(u) \geq \widehat{S}_e(u)$ para cada $u \in X \setminus \{0\}$, onde

$$\widehat{S}_n(u) = \inf_{t>0} \widehat{R}_n(tu) \quad \text{e} \quad \widehat{S}_e(u) = \inf_{t>0} \widehat{R}_e(tu).$$

Observação 3.8 *É relevante destacar que as mesmas propriedades apresentadas na Proposição 2.27 e na Observação 2.28 são válidas para as funções \widehat{S}_n e \widehat{S}_e . Optamos por omitir os detalhes.*

Proposição 3.9 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) , $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Então existe uma constante positiva $\mathcal{C}_{2^*} = \mathcal{C}_{2^*}(q, \alpha_1, \alpha_2, \theta, N, \sigma, S_{2^*})$ tal que $\|v\| \geq \mathcal{C}_{2^*}$, para todo $v = t_n(u)u$. Além disso, a função S_n é limitada por baixo por uma constante positiva \mathcal{C}_0 .*

Prova. Mais uma vez, lembramos que $t_n(u) > 0$ é o único ponto de mínimo local para $R_n(tu)$. Essa afirmação implica que $\frac{d}{dt} R_n(tu)|_{t=t_n(u)} = 0$ se, e somente se,

$$(q-2)\|t_n(u)u\|^2 = \alpha_2(2(\sigma+1)-q)\|\nabla(t_n(u)u)\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta(2^*-q)\|t_n(u)u\|_{2^*}^{2^*}. \quad (3-9)$$

Um cálculo simples prova que

$$\|\nabla w\|_2^{2(\sigma+1)} \leq \frac{1}{\alpha_1^{\sigma+1}} \|w\|^{2(\sigma+1)}, \quad w \in X \setminus \{0\}.$$

Dessa forma, fazendo $v = t_n(u)u$ na equação (3-9) e, em seguida, utilizando a imersão contínua $X \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ para cada $s \in [2, 2^*]$ e a hipótese (A_1) , temos

$$(q-2)\|v\|^2 \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1^{\sigma+1}}(2(\sigma+1)-q)\|v\|^{2(\sigma+1)} + \theta(2^*-q)S_{2^*}^{-\frac{2^*}{2}}\|v\|^{2^*}. \quad (3-10)$$

Consequentemente, mencionamos que

$$1 \leq \mathcal{C}_1\|v\|^{2\sigma} + \mathcal{C}_2\theta\|v\|^{2^*-2},$$

onde $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ são constantes positivas dadas por

$$\mathcal{C}_1 := \left[\frac{\alpha_2(2(\sigma+1)-q)}{\alpha_1^{\sigma+1}(q-2)} \right] \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_2 := \left[\frac{2^*-q}{S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}}(q-2)} \right].$$

Assim, fazendo uma manipulação algébrica na desigualdade (3-10), tem-se que

$$\|v\| \geq \left(\frac{1}{\mathcal{C}_1 + \theta \mathcal{C}_2} \right)^{\frac{1}{2\sigma}} =: \mathcal{C}_3 > 0, \text{ se } \|v\| \leq 1,$$

e

$$\|v\| \geq \left(\frac{1}{\mathcal{C}_1 + \theta \mathcal{C}_2} \right)^{\frac{1}{2^*-2}} =: \mathcal{C}_4 > 0, \text{ se } \|v\| \geq 1.$$

Portanto, existe uma constante $\mathcal{C}_{2^*} > 0$ tal que $\|v\| \geq \mathcal{C}_{2^*}$, onde $\mathcal{C}_{2^*} := \min\{\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4\}$. Por conseguinte, a desigualdade de Hölder com expoentes $\tilde{r} = \frac{2^*}{2^*-q} > 1$ e $\frac{2^*}{q} > 1$ nos fornece que

$$\|u\|_{q,a}^q \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)|^{\tilde{r}} dx \right)^{\frac{1}{\tilde{r}}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{q}{2^*}} = \|a\|_{\tilde{r}} \|u\|_{2^*}^q, \quad (3-11)$$

para todo $u \in X \setminus \{0\}$. Agora, aplicando a imersão contínua $X \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ para cada $s \in [2, 2^*]$, obtemos

$$\|u\|_{2^*}^{2 \frac{2^*-q}{2^*-2}} \leq S_{2^*}^{-\frac{2^*-q}{2^*-2}} \|u\|^{2 \frac{2^*-q}{2^*-2}}, \quad u \in X \setminus \{0\}.$$

A última desigualdade, juntamente com as estimativas (3-8) e (3-11), garante que

$$\begin{aligned} S_n(u) \geq \widehat{S}_n(u) &\geq \frac{\mathcal{I}_1 \theta^{\frac{q-2}{2^*-2}}}{S_{2^*}^{-\frac{2^*-q}{2^*-2}} \|a\|_{\tilde{r}}} \frac{\|u\|_{2^*}^{2 \frac{2^*-q}{2^*-2}} \|u\|_{2^*}^{2 \frac{q-2}{2^*-2}}}{\|u\|_{2^*}^q} \\ &= \frac{\mathcal{I}_1 \theta^{\frac{q-2}{2^*-2}}}{S_{2^*}^{-\frac{2^*-q}{2^*-2}} \|a\|_{\tilde{r}}} \\ &=: \mathcal{C}_0. \end{aligned}$$

Portanto, a função S_n é limitada por baixo por uma constante positiva. \square

Observação 3.10 *Assumindo que $a \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos que a função S_n é limitada por baixo por uma constante positiva \mathcal{C}_q . De fato, usando a desigualdade de Interpolação, deduzimos que*

$$\|u\|_{q,a}^q \leq \|a\|_\infty \|u\|_2^{q\mu} \|u\|_{2^*}^{q(1-\mu)}, \text{ onde } \frac{q\mu}{2} + \frac{q(1-\mu)}{2^*} = 1$$

com $\mu = \frac{2(2^*-q)}{q(2^*-2)} \in (0, 1)$. Uma vez que $V(x) \geq V_0$, segue que

$$\|u\|_2 \leq V_0^{-\frac{1}{2}} \|u\|, \quad u \in X.$$

Essas condições asseguram que

$$\begin{aligned}
S_n(u) &\geq \widehat{S}_n(u) \\
&= \mathcal{I}_1 \theta^{\frac{q-2}{2^*-2}} \frac{\|u\|^{2\frac{2^*-q}{2^*-2}} \|u\|_{2^*}^{2^*\frac{q-2}{2^*-2}}}{\|u\|_{q,a}^q} \\
&\geq \mathcal{I}_1 \theta^{\frac{q-2}{2^*-2}} \frac{\|u\|^{2\frac{2^*-q}{2^*-2}} \|u\|_{2^*}^{2^*\frac{q-2}{2^*-2}}}{\|a\|_\infty \|u\|_2^{2\frac{2^*-q}{2^*-2}} \|u\|_{2^*}^{2^*\frac{q-2}{2^*-2}}} \\
&\geq \frac{\mathcal{I}_1 \theta^{\frac{q-2}{2^*-2}} V_0^{\frac{2^*-q}{2^*-2}}}{\|a\|_\infty} =: \mathcal{C}_q.
\end{aligned}$$

Define um conjunto aberto $U^* := \{u \in X \setminus \{0\} : \lambda > S_n(u)\}$. Essa definição nos permite demonstrar que a função S_n é fracamente semicontínua inferiormente para cada $u \in U^*$.

Proposição 3.11 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) , $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Então a função $S_n(u)$ é fracamente semicontínua inferiormente para cada $u \in U^*$.*

Prova. Seja $(u_k) \in U^*$ uma sequência tal que $u_k \rightharpoonup u$ em X , quando $k \rightarrow +\infty$. Primeiramente, assuma que

$$\|u\| < \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|u_k\|.$$

Um cálculo simples, utilizando o fato de que R_n é fracamente semicontínuo inferiormente para todo $t > 0$, mostra que

$$R_n(tu) < \liminf_{k \rightarrow +\infty} R_n(tu_k) \leq \lambda.$$

Em particular, para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tem-se que $R_n(tu) < R_n(tu_k)$, para todo $t > 0$. As últimas condições asseguram que existem $t_n(u), t_n(u_k) > 0$ tais que $t_n(u) \leq t_n(u_k)$ ou $t_n(u_k) \leq t_n(u)$, para cada $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Dessa maneira, inferimos que

$$\begin{aligned}
S_n(u) = R_n(t_n(u)u) &\leq R_n(t_n(u_k)u) \\
&\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} R_n(t_n(u_k)u_k) \\
&= \liminf_{k \rightarrow +\infty} S_n(u_k).
\end{aligned} \tag{3-12}$$

Nesta etapa, assuma que

$$\|u\| = \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|u_k\|.$$

Como $u \mapsto R_n(u)$ e $u \mapsto t_n(u)$ são funções contínuas, concluímos que (3-12) também é satisfeita. Isso completa a prova. \square

A fim de facilitar a compreensão da Proposição 3.11, optamos por apresentar uma ilustração geométrica dos passos que percorremos para chegar a esse resultado.

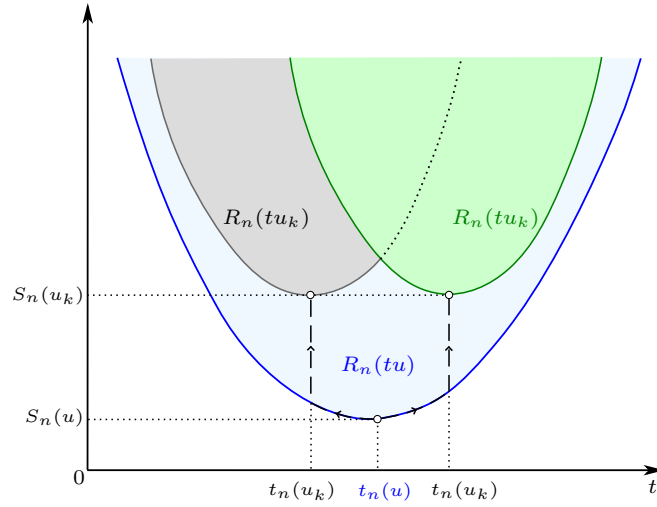


Figura 3.2: $R_n(tu) < R_n(tu_k)$, para cada $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande e $t > 0$.

A próxima proposição prova que os números positivos λ^* e λ_* , estabelecidos na Definição 2.5, são atingidos por alguma função $u \in X \setminus \{0\}$. Esse resultado é crucial para garantir a existência de pontos críticos para o funcional energia J .

Proposição 3.12 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) e (V_1) . Então existe $u \in X \setminus \{0\}$ de tal modo que*

$$\lambda^* = \inf_{w \in X \setminus \{0\}} S_n(w) = S_n(u) \quad \text{e} \quad \lambda_* = \inf_{w \in X \setminus \{0\}} S_e(w) = S_e(u).$$

Além disso, temos que $0 < \lambda^* < \lambda_* < +\infty$.

Prova. Inicialmente, afirmamos que λ^* é atingido por alguma função $u \in X \setminus \{0\}$. Com efeito, seja $(u_k) \in X \setminus \{0\}$ uma sequência minimizante para S_n . Sabemos pela equação (3-5) que

$$S_n(v_k) = \frac{\|v_k\|^2 + \alpha_2 \|\nabla v_k\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta \|v_k\|_{2^*}^{2^*}}{\|v_k\|_{q,a}^q}, \quad (3-13)$$

onde $v_k = t_n(u_k)u_k$. Agora, defina uma sequência normalizada $w_k = \frac{v_k}{\|v_k\|_{q,a}}$ com $\|w_k\|_{q,a} = 1$. Dessa forma, usando a Proposição 3.7 e (3-13), mencionamos que

$$S_n(v_k) = S_n(w_k) = \|w_k\|^2 + \alpha_2 \|\nabla w_k\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta \|w_k\|_{2^*}^{2^*} \rightarrow \lambda^*,$$

quando $k \rightarrow +\infty$. Como consequência, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|w_k\|^2 \leq \|w_k\|^2 + \alpha_2 \|\nabla w_k\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta \|w_k\|_{2^*}^{2^*} \leq \lambda^* + \varepsilon, \quad k \geq k_0.$$

Isso significa que a sequência (w_k) é limitada em X . Assim, existe $w \in X$ de tal maneira que $w_k \rightharpoonup w$ em X . Aqui, afirmamos que $w \neq 0$. De fato, suponha por contradição que $w = 0$ com $w_k \rightharpoonup 0$ em X . A última condição, juntamente com a Proposição 3.4, nos fornece que

$$1 = \|w_k\|_{q,a}^q = \|w\|_{q,a}^q + o_k(1) = 0,$$

o que é uma contradição. Logo, obtemos que a função $w \neq 0$. Portanto, usando a Proposição 3.11, inferimos

$$\lambda^* \leq S_n(w) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} S_n(w_k) = \lambda^*.$$

Concluimos que $\lambda^* = S_n(w)$, para alguma função $w \in X \setminus \{0\}$. Similarmente, temos que o número λ_* também é atingido por alguma função $u \in X \setminus \{0\}$. A prova de $0 < \lambda^* < \lambda_* < +\infty$ segue de maneira similar a demonstração da Proposição 2.20. \square

Neste momento, apresentamos um resultado no qual, conforme varia o parâmetro λ , obtemos projeções únicas sobre a variedade de Nehari \mathcal{N} .

Proposição 3.13 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) , $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Então para cada $u \in U^*$, a identidade $\gamma_u(t) = J(tu)$ possui exatamente dois pontos críticos distintos de modo que $0 < t^{n,-}(u) < t_n(u) < t^{n,+}(u) < +\infty$, onde*

- (a) *O número positivo $t^{n,+}(u)$ é um ponto de mínimo local para a identidade γ_u tal que $t^{n,+}(u)u \in \mathcal{N}^+$;*
- (b) *O número positivo $t^{n,-}(u)$ é um ponto de máximo local para a identidade γ_u tal que $t^{n,-}(u)u \in \mathcal{N}^-$;*
- (c) *Os conjuntos de Nehari \mathcal{N}^+ e \mathcal{N}^- são não vazios, para cada $u \in U^*$;*
- (d) *As funções $u \mapsto t^{n,+}(u)$ e $u \mapsto t^{n,-}(u)$ pertencem a $C^1(U^*; \mathbb{R})$.*

Prova. Destacamos que a demonstração desta proposição segue exatamente os mesmos princípios discutidos na Proposição 2.17. Por uma questão de organização, optamos por omitir os detalhes. \square

É importante ressaltar que os mesmos resultados obtidos anteriormente aplicam-se também à função S_e .

Proposição 3.14 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) , $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Então,*

- (a) *A função t_e é (-1) -homogênea;*
- (b) *A função S_e é 0 -homogênea, contínua e fracamente semicontínua inferiormente;*
- (c) *Existe uma constante $\mathcal{C}_5 > 0$ de tal forma que $\|w\| \geq \mathcal{C}_5$, para todo $w = t_e(u)u$;*

- (d) A função S_e é limitada por baixo por uma constante positiva C_6 ;
- (e) Existem dois pontos $t^{e,+}(u)$ e $t^{e,-}(u)$ com $0 < t^{e,-}(u) < t_e(u) < t^{e,+}(u) < +\infty$ tais que $t^{e,+}(u)u \in \mathcal{E}$ e $t^{e,-}(u)u \in \mathcal{E}$. Além disso, as funções $u \mapsto t^{e,+}(u)$ e $u \mapsto t^{e,-}(u)$ pertencem a $C^1(U_*; \mathbb{R})$, onde $U_* := \{u \in X \setminus \{0\} : \lambda > S_e(u)\}$.

Prova. A prova segue precisamente o mesmo raciocínio discutido nas Proposições 3.7, 3.9, 3.11 e 3.13. \square

Observação 3.15 Note que, para cada $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$, a identidade $\gamma'_u(t) = 0$ é satisfeita para um único ponto crítico $t = t_n(u) > 0$ tal que $t_n(u)u \in \mathcal{N}^0$ quando $\lambda = S_n(u)$. Além disso, a identidade $\gamma'_u(t) = 0$ não admite nenhum ponto crítico quando $\lambda < S_n(u)$. Para uma compreensão mais detalhada, veja a Proposição 2.21.

3.3 Resultados relativos à variedade de Nehari

Nesta seção, exploramos resultados relevantes relacionados ao método de minimização sobre a variedade de Nehari. Os dois primeiros resultados garantem de maneira simples que o funcional energia J é coercivo em relação a \mathcal{N} .

Lema 3.16 Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) e $\lambda, \theta > 0$. Então existe uma constante positiva $\delta_q = \delta_q(q, \lambda, S_{2^*}^{-\frac{q}{2}}, \|a\|_{\tilde{r}})$ tal que $\|u\| \geq \delta_q$, para cada $u \in \mathcal{N}$. Além disso, o funcional energia J é coercivo em $\mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$ sempre que $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$.

Prova. Considere $u \in \mathcal{N}$ uma função fixa. Isso implica que

$$0 = \|u\|^2 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \lambda \|u\|_{q,a}^q + \theta \|u\|_{2^*}^{2^*} \geq \|u\|^2 - \lambda \|u\|_{q,a}^q.$$

Como resultado, segue-se pela estimativa (3-11) e a imersão contínua $X \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$, para cada $s \in [2, 2^*]$, que

$$\|u\|^2 \leq \lambda \|u\|_{q,a}^q \leq \lambda \|a\|_{\tilde{r}} \|u\|_{2^*}^q \leq \lambda \|a\|_{\tilde{r}} S_{2^*}^{-\frac{q}{2}} \|u\|^q.$$

Dessa forma, mencionamos que

$$\|u\| \geq \left[\frac{1}{\lambda \|a\|_{\tilde{r}} S_{2^*}^{-\frac{q}{2}}} \right]^{\frac{1}{q-2}} =: \delta_q. \quad (3-14)$$

Portanto, a variedade de Nehari \mathcal{N} está longe da origem. Adicionalmente, afirmamos que o funcional energia J é coercivo em $\mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$. Com efeito, seja $u \in \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$. Então

$$J'(u)u = 0 \quad \text{e} \quad J''(u)(u, u) \leq 0.$$

A última estimativa, juntamente com (3-3), assegura que

$$\begin{aligned} -\alpha_2 \left(\frac{2(\sigma+1)-q}{2q(\sigma+1)} \right) \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} &\geq - \left(\frac{q-2}{2q(\sigma+1)} \right) \|u\|^2 \\ &\quad + \theta \left(\frac{2^*-q}{2q(\sigma+1)} \right) \|u\|_{2^*}^{2^*}. \end{aligned} \quad (3-15)$$

Note que, utilizando a desigualdade (3-15) e a hipótese (A_1) , encontramos

$$\begin{aligned} J(u) &= J(u) - \frac{1}{q} J'(u)u \\ &= \left(\frac{q-2}{2q} \right) \|u\|^2 - \alpha_2 \left(\frac{2(\sigma+1)-q}{2q(\sigma+1)} \right) \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \theta \left(\frac{2^*-q}{2^*q} \right) \|u\|_{2^*}^{2^*} \\ &\geq \left(\frac{q\sigma-2\sigma}{2q\sigma+2q} \right) \|u\|^2 + \theta \left(\frac{(2^*-q)(2^*-2(\sigma+1))}{2^*2q(\sigma+1)} \right) \|u\|_{2^*}^{2^*} \\ &\geq \left(\frac{q\sigma-2\sigma}{2q\sigma+2q} \right) \|u\|^2. \end{aligned} \quad (3-16)$$

Uma implicação direta da desigualdade (3-16) é

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty.$$

Isso finaliza a prova. \square

Lema 3.17 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) , $\lambda \in [\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Então o funcional energia J é coercivo em \mathcal{N}^+ .*

Prova. Suponha que $\|u\| \rightarrow +\infty$, para toda função fixa $u \in \mathcal{N}^+$. Nesse caso, tem-se que $J'(u)u = 0$ e $J''(u)(u, u) > 0$. A última condição implica que

$$\begin{aligned} \lambda(2^*-q)\|u\|_{q,a}^q &> (2^*-2)\|u\|^2 + \alpha_2(2^*-2(\sigma+1))\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} \\ &\geq (2^*-2)\|u\|^2. \end{aligned}$$

Como produto, obtemos

$$\|u\|_{q,a}^q > \frac{1}{\lambda} \left(\frac{2^*-2}{2^*-q} \right) \|u\|^2. \quad (3-17)$$

Analisando a desigualdade (3-17), é fácil perceber que

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \|u\|_{q,a}^q = +\infty.$$

Além disso, utilizando a estimativa (3-11), tem-se que

$$\|u\|_{q,a}^{2^*} \leq \|a\|_{\tilde{r}}^{\frac{2^*}{q}} \|u\|_{2^*}^{2^*}.$$

Essa desigualdade, juntamente com $\|u\|_{q,a} \rightarrow +\infty$, garante que

$$\begin{aligned} R_e(u) &= \frac{\frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \frac{\theta}{2^*}\|u\|_{2^*}^{2^*}}{\frac{1}{q}\|u\|_{q,a}^q} \geq \frac{\theta q}{2^*} \frac{\|u\|_{2^*}^{2^*}}{\|u\|_{q,a}^q} \\ &\geq \frac{\theta q}{2^*} \frac{\|u\|_{q,a}^{2^*-q}}{\|a\|_{\tilde{r}}^{\frac{q}{2^*}}} \\ &\rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Agora, para simplificar a notação, considere $J(u) = J_\lambda(u)$ onde

$$J_\lambda(u) = J_{R_e(u)}(u) + \left(\frac{R_e(u) - \lambda}{q} \right) \|u\|_{q,a}^q. \quad (3-18)$$

Observe que $J_{R_e(u)}(u) = 0$, para cada $u \in \mathcal{E}$. Dessa forma, como $R_e(u) \rightarrow +\infty$, quando $\|u\| \rightarrow +\infty$, segue para $\|u\|$ suficientemente grande que $R_e(u) > \lambda$. Nesse caso, substituindo (3-17) em (3-18), tem-se que

$$J_\lambda(u) = \left(\frac{R_e(u) - \lambda}{q} \right) \|u\|_{q,a}^q > \left(\frac{R_e(u)}{\lambda} - 1 \right) \left(\frac{2^* - 2}{q(2^* - q)} \right) \|u\|^2.$$

Portanto, pela hipótese (A_1) , temos que $J(u) \rightarrow +\infty$ quando $\|u\| \rightarrow +\infty$. \square

Proposição 3.18 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) , $\lambda \in [\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Então o conjunto de Nehari \mathcal{N}^0 é não vazio.*

Prova. Inicialmente, assuma que $\lambda = \lambda^*$ seja satisfeito. Assim, não é difícil ver pela Proposição 3.12 que

$$\lambda = S_n(u) = R_n(t_n(u)u), \quad u \in X \setminus \{0\}.$$

Como $t_n(u) > 0$ é o único ponto de mínimo local para $Q_n(t_n(u)) = R_n(t_n(u)u)$, temos

$$\left. \frac{d}{dt} Q_n(t) \right|_{t=t_n(u)} = 0.$$

Um cálculo simples assegura que

$$0 = \left. \frac{d}{dt} Q_n(t) \right|_{t=t_n(u)} = \frac{1}{t_n(u)} \frac{J''(t_n(u)u)(t_n(u)u, t_n(u)u)}{\mathcal{Q}_\theta(t_n(u)u)}, \quad u \in X \setminus \{0\}.$$

Isso implica que $J''(t_n(u)u)(t_n(u)u, t_n(u)u) = 0$ tal que $t_n(u)u \in \mathcal{N}^0$. Portanto, o conjunto \mathcal{N}^0 é não vazio. Neste momento, assuma que $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ seja satisfeito. Considere $(w_k) \in X \setminus \{0\}$ uma sequência, de tal modo que $\|w_k\| = 1$ onde $w_k \rightarrow 0$

em X e (w_k) não converge fortemente para a função nula em X . Uma simples manipulação algébrica em (3-11) prova que

$$\|w_k\|_{2^*}^{2^* \frac{q-2}{2^*-2}} \geq \frac{1}{\|a\|_{\tilde{r}}^{\frac{2^*(q-2)}{q(2^*-2)}}} \|w_k\|_{q,a}^{2^* \frac{q-2}{2^*-2}}.$$

Além disso, aplicando a Proposição 3.4 e o fato de que $w_k \rightarrow 0$ em X , mencionamos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|w_k\|_{q,a} = 0.$$

As últimas afirmações implicam que

$$\widehat{S}_n(w_k) \geq \mathcal{I}_1 \theta^{\frac{q-2}{2^*-2}} \frac{\|w_k\|_{2^*}^{2^* \frac{q-2}{2^*-2}}}{\|w_k\|_{q,a}^q} = \frac{\theta^{\frac{q-2}{2^*-2}}}{\|a\|_{\tilde{r}}^{\frac{2^*(q-2)}{q(2^*-2)}}} \left(\frac{1}{\|w_k\|_{q,a}} \right)^{2^* \frac{2^*-q}{2^*-2}} \rightarrow +\infty,$$

quando $k \rightarrow +\infty$. Logo, podemos deduzir que $S_n(w_k) \geq \widehat{S}_n(w_k) \rightarrow +\infty$. Consequentemente, para todo $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tem-se que $S_n(w_k) > \lambda$. Dessa forma, empregando o mesmo raciocínio apresentado na Proposição 1.29, concluímos a demonstração dessa proposição. \square

Observação 3.19 *É importante destacar que uma implicação imediata do Lema 3.16 é que \mathcal{N} e \mathcal{N}^0 são conjuntos fechados em X , para cada $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$. Além disso, sabemos que as variedades \mathcal{N}^+ e \mathcal{N}^- obedecem à seguinte condição:*

$$\overline{\mathcal{N}^+} = \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^0 \quad e \quad \overline{\mathcal{N}^-} = \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0.$$

A demonstração desse fato segue exatamente as ideias discutidas na Proposição 2.24, onde chegamos a uma contradição nos casos (i), (ii) e (iii), uma vez que para qualquer $u \in \mathcal{N}^0$, temos que $B(u, R) \cap \mathcal{N} \not\subset \mathcal{N}^0$. Ressaltamos que a principal modificação aqui em relação à Proposição 2.24 foi o sistema obtido no item (ii). Dessa forma, nos deparamos então com o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - (2\sigma + 2)y - 2^*z = 0 \\ (q-1)x + (2\sigma + 1 - q)y + (2^* - q - 1)z > 0, \end{cases}$$

onde as variáveis

$$x = (q-2)\|u\|^2, \quad y = \alpha_2(2(\sigma+1) - q)\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} \quad e \quad z = \theta(2^* - q)\|u\|_{2^*}^2.$$

Em vista do sistema acima, definimos um número Λ dado por

$$\Lambda = (q-1)x + (2\sigma + 1 - q)y + (2^* - q - 1)z.$$

Assim, baseado na construção de Λ , definimos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - (2\sigma + 2)y - 2^*z = 0 \\ (q - 1)x + (2\sigma + 1 - q)y + (2^* - q - 1)z = \Lambda. \end{cases} \quad (3-19)$$

Consequentemente, o sistema (3-19) pode ser escrito como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2\sigma - 2 & -2^* \\ q - 1 & 2\sigma + 1 - q & 2^* - q - 1 \end{bmatrix}}_{\text{matriz } D} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Lambda \end{bmatrix}.$$

Note que $\det D = 0$. Além disso, aplicando o método do escalonamento na matriz D , mencionamos que

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2\sigma - 2 & -2^* & 0 \\ q - 1 & 2\sigma + 1 - q & 2^* - q - 1 & \Lambda \end{array} \right| \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -2L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow (1 - q)L_1 + L_3 \\ \rightarrow \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2\sigma & 2 - 2^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda \end{array} \right|,$$

onde L_1 , L_2 e L_3 representam, respectivamente, a primeira, a segunda e a terceira linha da matriz escalonada. Portanto, temos que $\Lambda = 0$.

Destacamos que uma consequência imediata da Observação 3.19 é que os níveis de energia $c_{\mathcal{N}^+}$, $c_{\mathcal{N}^-}$ e $c_{\mathcal{N}^0}$, podem ser expressos por:

$$c_{\mathcal{N}^0} = \inf_{u \in \mathcal{N}^0} J(u) \geq \inf_{u \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^0} J(u) = \inf_{u \in \overline{\mathcal{N}^+}} J(u) = \inf_{u \in \mathcal{N}^+} J(u) = c_{\mathcal{N}^+}, \quad (3-20)$$

$$c_{\mathcal{N}^0} = \inf_{u \in \mathcal{N}^0} J(u) \geq \inf_{u \in \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0} J(u) = \inf_{u \in \overline{\mathcal{N}^-}} J(u) = \inf_{u \in \mathcal{N}^-} J(u) = c_{\mathcal{N}^-}. \quad (3-21)$$

Lema 3.20 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) e (V_1) . Então qualquer sequência $(u_k) \in \mathcal{N}$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ em X , para algum $u \in X$ satisfaz $u \neq 0$.*

Prova. Suponha por contradição que $u = 0$. Uma vez que $u_k \rightharpoonup 0$ em X , quando $k \rightarrow +\infty$, deduzimos pela Proposição 3.4 que $\|u_k\|_{q,a}^q \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow +\infty$. Consequentemente, dada uma sequência $(u_k) \in \mathcal{N}$, inferimos que

$$\|u_k\|^2 \leq \|u_k\|^2 + \alpha_2 \|\nabla u_k\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta \|u_k\|_{2^*}^{2^*} = \lambda \|u_k\|_{q,a}^q \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow +\infty$. Isso significa que $\|u_k\| \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow +\infty$. A última afirmação, em conjunto com o Lema 3.16, garante que $0 < \delta_q \leq \|u_k\| \rightarrow 0$, o que é uma contradição. Portanto, $u \neq 0$. Isso completa a prova do lema. \square

Neste momento, apresentamos dois resultados cruciais que afirmam que toda sequência minimizante em \mathcal{N}^- e \mathcal{N}^+ converge fortemente para uma função não nula em X . Esses resultados são similares aos do Capítulo 2 e, devido à sua relevância, optamos por apenas enunciá-los.

Lema 3.21 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) , $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Seja $(u_k) \subset \mathcal{N}^-$ uma sequência minimizante para J em \mathcal{N}^- . Então existe $u \in X \setminus \{0\}$ tal que, a menos de uma subsequência, $u_k \rightarrow u$ fortemente em X quando $k \rightarrow +\infty$ com a função $u \in \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$. Consequentemente, inferimos que $c_{\mathcal{N}^-} = J(u) > 0$.*

Prova. A prova desse resultado segue as mesmas ideias discutidas no Lema 2.34. \square

Lema 3.22 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) , $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Seja $(v_k) \subset \mathcal{N}^+$ uma sequência minimizante para J em \mathcal{N}^+ . Então existe $v \in X \setminus \{0\}$ tal que, a menos de uma subsequência, $v_k \rightarrow v$ fortemente em X quando $k \rightarrow +\infty$ com a função $v \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^0$. Consequentemente, obtemos que $c_{\mathcal{N}^+} = J(v)$.*

Prova. A prova desse resultado segue as mesmas ideias discutidas no Lema 2.36. \square

É importante destacar que, ao analisarmos a Proposição 2.37 e o Lema 3.22, concluímos que $c_{\mathcal{N}^+} = J(v) = 0$ para $\lambda = \lambda_*$; $c_{\mathcal{N}^+} = J(v) < 0$ para $\lambda \in (\lambda_*, +\infty)$ e $c_{\mathcal{N}^+} = J(v) > 0$ para $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_*)$. A Figura 3.3 abaixo ilustra geometricamente essas propriedades.

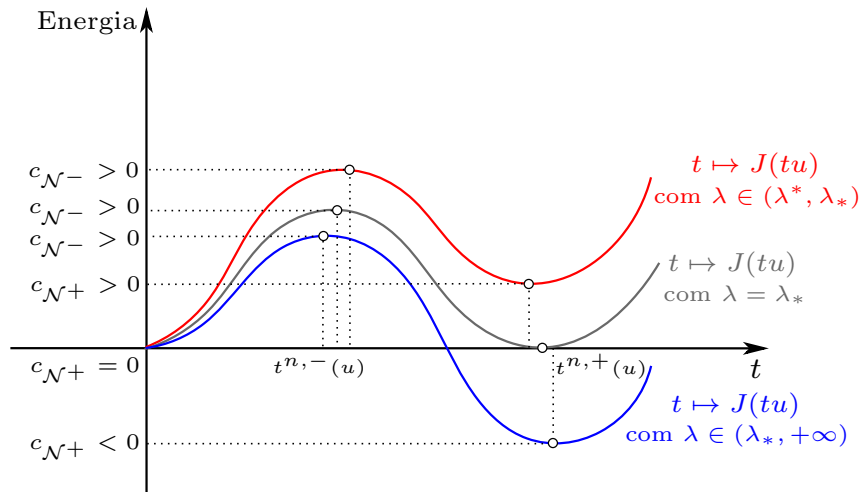


Figura 3.3: Comportamento geométrico do funcional $J(tu)$.

Note que a Proposição 3.18, juntamente com os Lemas 3.21 e 3.22, assegura que os minimizadores $u \in \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$ e $v \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^0$ podem pertencer à variedade de Nehari \mathcal{N}^0 . Essa situação introduz desafios na busca por pontos críticos para o funcional energia J , uma vez que não podemos aplicar diretamente o Teorema dos

Multiplicadores de Lagrange [25, Teorema 7.8.2]. Para superar essa dificuldade, as próximas proposições estabelecem condições precisas sobre os parâmetros $\lambda, \theta > 0$ de modo a garantir que $u, v \notin \mathcal{N}^0$.

Com intuito de tornar mais acessível a compreensão do leitor, adotamos as seguintes notações: $J(u) = J_{\lambda, \theta}(u)$, $J'(u)u = J'_{\lambda, \theta}(u)u$, $J''(u)(u, u) = J''_{\lambda, \theta}(u)(u, u)$, $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\lambda, \theta}$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\lambda, \theta}$, $c_{\mathcal{N}^+} = c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+}$, $c_{\mathcal{N}^-} = c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-}$ e $c_{\mathcal{N}^0} = c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0}$.

Proposição 3.23 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) e $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$. Assuma que existe $q_1 > 0$ de modo que $2 < q_1 < q < 2(\sigma + 1) < 2^*$. Então existe $\theta_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que o minimizador $v \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+ \cup \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0$ obtido no Lema 3.22 pertence à variedade de Nehari $\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+$ desde que:*

- (a) $\lambda \in [\lambda_*, +\infty)$ e $\theta > 0$;
- (b) $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_*)$ e $\theta \in (0, \theta_0)$.

Prova. Sabemos pelo Lema 3.22 que $v \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+ \cup \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0$ é o minimizador na variedade de Nehari $\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+$, onde $c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+} = J_{\lambda, \theta}(v)$. Um cálculo simples prova que

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+} = J_{\lambda, \theta}(v) \leq 0,$$

para cada $\lambda \in [\lambda_*, +\infty)$. As últimas condições mostram que

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+} = J_{\lambda, \theta}(v) = \inf_{w \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+} J_{\lambda, \theta}(w) \leq 0 < \inf_{w \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0} J_{\lambda, \theta}(w) = c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0},$$

para cada $\lambda \in [\lambda_*, +\infty)$. Portanto, v pertence unicamente a $\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+$. Isso completa a prova do item (a). Agora, assumamos que o item (b) seja satisfeito. Não é difícil verificar que

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+} = J_{\lambda, \theta}(v) > 0,$$

para cada $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_*)$. Salientamos pela Proposição C.2 que a função $(\lambda, \theta) \mapsto c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+}$ é contínua e crescente em $\theta > 0$, e decrescente em $\lambda > 0$. Dessa forma, nosso principal objetivo é provar que

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+} = \inf_{w \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+} J_{\lambda, \theta}(w) < \inf_{w \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0} J_{\lambda, \theta}(w) = c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0},$$

veja a estimativa (3-20). Com efeito, suponhamos por contradição que $c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+} = c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0}$. Uma vez que $v \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0$, tem-se que $J'_{\lambda, \theta}(v)v = 0$ e $J''_{\lambda, \theta}(v)(v, v) = 0$. Sob essas afirmações, deduzimos que

$$\alpha_2 \left(\frac{2(\sigma + 1) - q}{2q(\sigma + 1)} \right) \|\nabla v\|_2^{2(\sigma+1)} = \left(\frac{q - 2}{2q(\sigma + 1)} \right) \|v\|^2 - \theta \left(\frac{2^* - q}{2q(\sigma + 1)} \right) \|v\|_{2^*}^{2^*}.$$

Como resultado, utilizando os mesmos cálculos discutidos em (3-16), inferimos

$$J_{\lambda,\theta}(v) = \left(\frac{q\sigma - 2\sigma}{2q\sigma + 2q} \right) \|v\|^2 + \theta \left(\frac{(2^* - q)(2^* - 2(\sigma + 1))}{2^*2q(\sigma + 1)} \right) \|v\|_{2^*}^{2^*}. \quad (3-22)$$

Sejam $\theta_e > 0$ e $\lambda_e \in (\lambda^*, \lambda)$ parâmetros fixos. Desse modo, a Proposição C.2 nos fornece que $c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta_e}^+} \geq c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+}$, para todo $\lambda \geq \lambda_e$ e $\theta \in (0, \theta_e)$. A última estimativa, em conjunto com a equação (3-22) e a hipótese (A_1) , implica que

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta_e}^+} \geq c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+} &= J_{\lambda, \theta}(v) \\ &= \left(\frac{q\sigma - 2\sigma}{2q\sigma + 2q} \right) \|v\|^2 + \theta \left(\frac{(2^* - q)(2^* - 2(\sigma + 1))}{2^*2q(\sigma + 1)} \right) \|v\|_{2^*}^{2^*} \\ &\geq \left(\frac{q\sigma - 2\sigma}{2q\sigma + 2q} \right) \|v\|^2. \end{aligned}$$

Fazendo um cálculo simples, mencionamos que

$$\|v\| \leq \sqrt{\frac{2q\sigma + 2q}{q\sigma - 2\sigma}} c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta_e}^+}.$$

Por outro lado, usando a estimativa (3-3), concluímos que

$$(q - 2)\|v\|^2 = \alpha_2(2(\sigma + 1) - q)\|\nabla v\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta(2^* - q)\|v\|_{2^*}^{2^*},$$

para todo $v \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0$. Aqui, observamos que

$$\|\nabla w\|_2^{2(\sigma+1)} \leq \frac{1}{\alpha_1^{\sigma+1}} \|w\|^{2(\sigma+1)}, \quad w \in X \setminus \{0\}. \quad (3-23)$$

Dessa forma, a imersão contínua $X \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ para cada $s \in [2, 2^*]$, juntamente com a desigualdade (3-23) e a hipótese (A_1) , garantem que

$$1 \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1^{\sigma+1}} \left(\frac{2(\sigma + 1) - q}{q - 2} \right) \|v\|^{2\sigma} + \theta S_{2^*}^{-\frac{2^*}{2}} \left(\frac{2^* - q}{q - 2} \right) \|v\|^{2^*-2}. \quad (3-24)$$

Isso significa que

$$\|v\| \geq \left[\frac{\alpha_1^{\sigma+1} S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} (q - 2)}{S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} \alpha_2 (2(\sigma + 1) - q) + \theta \alpha_1^{\sigma+1} (2^* - q)} \right]^{\frac{1}{2\sigma}} \quad \text{se } \|v\| \leq 1,$$

e

$$\|v\| \geq \left[\frac{\alpha_1^{\sigma+1} S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} (q - 2)}{S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} \alpha_2 (2(\sigma + 1) - q) + \theta \alpha_1^{\sigma+1} (2^* - q)} \right]^{\frac{1}{2^*-2}} \quad \text{se } \|v\| \geq 1.$$

Agora, assumamos que existe $q_1 > 0$ de tal maneira que $2 < q_1 < q < 2(\sigma + 1) < 2^*$. Nesse caso, segue-se que

$$\begin{aligned} \|v\|^{2\sigma} &\geq \left[\frac{\alpha_1^{\sigma+1} S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}}(q-2)}{S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} \alpha_2(2(\sigma+1)-q) + \theta \alpha_1^{\sigma+1}(2^*-q)} \right] \\ &> \left[\frac{\alpha_1^{\sigma+1} S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}}(q-2)}{S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} \alpha_2(2(\sigma+1)-q_1) + \theta \alpha_1^{\sigma+1}(2^*-2)} \right] \\ &\geq \left[\frac{\alpha_1^{\sigma+1} S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}}(q-2)}{\theta(S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} \alpha_2 + \alpha_1^{\sigma+1}(2^*-2))} \right], \end{aligned} \quad (3-25)$$

onde tomamos $0 < q_1 = 2(\sigma + 1) - \theta < 2(\sigma + 1)$ com $\theta \in (0, \theta_0)$ suficientemente pequeno e $\|v\| \leq 1$. Logo, temos que

$$\left[\frac{\alpha_1^{\sigma+1} S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}}(q-2)}{\theta(S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} \alpha_2 + \alpha_1^{\sigma+1}(2^*-2))} \right]^{\frac{1}{2\sigma}} \leq \|v\| \leq \sqrt{\frac{2q\sigma + 2q}{q\sigma - 2\sigma} c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta_e}^+}},$$

é satisfeito para todo $\theta \in (0, \theta_0)$ com $\|v\| \leq 1$. Assim como no caso anterior, tem-se que

$$\left[\frac{\alpha_1^{\sigma+1} S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}}(q-2)}{\theta(S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} \alpha_2 + \alpha_1^{\sigma+1}(2^*-2))} \right]^{\frac{1}{2^*-2}} \leq \|v\| \leq \sqrt{\frac{2q\sigma + 2q}{q\sigma - 2\sigma} c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta_e}^+}},$$

é satisfeito para todo $2 < q_1 < q < 2(\sigma + 1) < 2^*$ de modo que $q_1 = 2(\sigma + 1) - \theta$, com $\theta \in (0, \theta_0)$ suficientemente pequeno e $\|v\| \geq 1$. Dessa maneira, tomando $\theta_0 = \min(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \theta_e)$ onde

$$\mathcal{A}_1 := \left[\frac{q\sigma - 2\sigma}{(2q\sigma + 2q)c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta_e}^+}} \right]^\sigma \frac{\alpha_1^{\sigma+1} S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}}(q-2)}{(S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} \alpha_2 + \alpha_1^{\sigma+1}(2^*-2))},$$

e

$$\mathcal{A}_2 := \left[\frac{q\sigma - 2\sigma}{(2q\sigma + 2q)c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta_e}^+}} \right]^{\frac{2^*-2}{2}} \frac{\alpha_1^{\sigma+1} S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}}(q-2)}{(S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} \alpha_2 + \alpha_1^{\sigma+1}(2^*-2))},$$

temos uma contradição. Portanto, segue-se que v está apenas em $\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+$. Isso finaliza a demonstração do item (b). \square

Proposição 3.24 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) e $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$. Assuma que existe $q_1 > 0$ de modo que $2 < q_1 < q < 2(\sigma + 1) < 2^*$. Então existe $\theta_2 > 0$ suficientemente pequeno tal que o minimizador $u \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^- \cup \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0$ obtido no Lema 3.21 pertence à variedade $\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-$, para cada $\theta \in (0, \theta_2)$.*

Prova. Recordamos que o Lema 3.21 assegura que $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^- \cup \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0$ é um minimizador na variedade de Nehari $\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-$, onde $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} = J_{\lambda,\theta}(u)$. Aqui, nosso principal objetivo é mostrar que u pertence exclusivamente à variedade $\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-$. De fato, suponha por contradição que $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0$ seja satisfeito. Em vista do Lema 3.21 e da estimativa (3-21), deduzimos

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} = J_{\lambda,\theta}(u) = \inf_{w \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} J_{\lambda,\theta}(w) \leq \inf_{w \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0} J_{\lambda,\theta}(w) \leq J_{\lambda,\theta}(u).$$

Como resultado, mencionamos que

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} = \inf_{w \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} J_{\lambda,\theta}(w) = \inf_{w \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0} J_{\lambda,\theta}(w) = c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}.$$

A partir deste momento, usaremos alguns resultados obtidos na prova da Proposição 3.23. Sejam $\theta_e > 0$ e $\lambda_e \in (\lambda^*, \lambda)$ parâmetros fixos. Assim, utilizando a Proposição C.2, a estimativa (3-22), a hipótese (A_1) e o fato de que $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0$, temos

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{N}_{\lambda_e,\theta_e}^-} &\geq c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} \\ &= J_{\lambda,\theta}(u) \\ &= \left(\frac{q\sigma - 2\sigma}{2q\sigma + 2q} \right) \|u\|^2 + \theta \left(\frac{(2^* - q)(2^* - 2(\sigma + 1))}{2^* 2q(\sigma + 1)} \right) \|u\|_{2^*}^{2^*} \\ &\geq \left(\frac{q\sigma - 2\sigma}{2q\sigma + 2q} \right) \|u\|^2, \end{aligned}$$

para todo $\lambda \geq \lambda_e$ e $\theta \in (0, \theta_e)$. Uma simples manipulação algébrica, com base na estimativa acima, nos permite concluir que

$$\|u\| \leq \sqrt{\frac{2q\sigma + 2q}{q\sigma - 2\sigma}} c_{\mathcal{N}_{\lambda_e,\theta_e}^-}.$$

Por outro lado, a equação (3-3) prova que

$$(q - 2)\|u\|^2 = \alpha_2(2(\sigma + 1) - q)\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta(2^* - q)\|u\|_{2^*}^{2^*},$$

para todo $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0$. Em particular, aplicando a imersão contínua $X \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ e a hipótese (A_1) , inferimos que

$$1 \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1^{\sigma+1}} \left(\frac{2(\sigma + 1) - q}{q - 2} \right) \|u\|^{2\sigma} + \theta S_{2^*}^{-\frac{2^*}{2}} \left(\frac{2^* - q}{q - 2} \right) \|u\|^{2^*-2}.$$

Nesse caso, assumamos que existe $q_1 > 0$ de tal maneira que $2 < q_1 < q < 2(\sigma + 1) < 2^*$. Como $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0$, repetimos os mesmos cálculos da Proposição 3.23 e encontramos as

seguintes condições:

$$\|u\| \geq \left[\frac{\alpha_1^{\sigma+1} S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} (q-2)}{\theta(S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} \alpha_2 + \alpha_1^{\sigma+1} (2^* - 2))} \right]^{\frac{1}{2\sigma}} \quad \text{se } \|u\| \leq 1,$$

e

$$\|u\| \geq \left[\frac{\alpha_1^{\sigma+1} S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} (q-2)}{\theta(S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} \alpha_2 + \alpha_1^{\sigma+1} (2^* - 2))} \right]^{\frac{1}{2^*-2}} \quad \text{se } \|u\| \geq 1,$$

tal que

$$q_1 = 2(\sigma + 1) - \theta < 2(\sigma + 1)$$

com $\theta > 0$ suficientemente pequeno. Esse fato significa que

$$\left[\frac{\alpha_1^{\sigma+1} S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} (q-2)}{\theta(S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} \alpha_2 + \alpha_1^{\sigma+1} (2^* - 2))} \right]^{\frac{1}{2\sigma}} \leq \|u\| \leq \sqrt{\frac{2q\sigma + 2q}{q\sigma - 2\sigma} c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta_e}^-}},$$

é satisfeito para todo $\theta \in (0, \theta_2)$ com $\theta_2 > 0$ suficientemente pequeno e $\|u\| \leq 1$.

Analogamente, tem-se que

$$\left[\frac{\alpha_1^{\sigma+1} S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} (q-2)}{\theta(S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} \alpha_2 + \alpha_1^{\sigma+1} (2^* - 2))} \right]^{\frac{1}{2^*-2}} \leq \|u\| \leq \sqrt{\frac{2q\sigma + 2q}{q\sigma - 2\sigma} c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta_e}^-}},$$

é satisfeito para todo $\theta \in (0, \theta_2)$ com $\theta_2 > 0$ suficientemente pequeno e $\|v\| \geq 1$.

Portanto, tomando $\theta_2 = \min(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \theta_e)$ onde

$$\mathcal{A}_3 := \left[\frac{q\sigma - 2\sigma}{(2q\sigma + 2q)c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta_e}^-}} \right]^\sigma \frac{\alpha_1^{\sigma+1} S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} (q-2)}{S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} \alpha_2 + \alpha_1^{\sigma+1} (2^* - 2)},$$

e

$$\mathcal{A}_4 := \left[\frac{q\sigma - 2\sigma}{(2q\sigma + 2q)c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta_e}^-}} \right]^{\frac{2^*-2}{2}} \frac{\alpha_1^{\sigma+1} S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} (q-2)}{S_{2^*}^{\frac{2^*}{2}} \alpha_2 + \alpha_1^{\sigma+1} (2^* - 2)},$$

temos uma contradição. Concluimos que u está em $\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-$. Isso finaliza a prova. \square

Proposição 3.25 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) e $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$. Então os minimizadores $u \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-$ e $v \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+$ obtidos na Proposição 3.24 e na Proposição 3.23 são dois pontos críticos distintos para o funcional energia $J_{\lambda, \theta}$.*

Prova. Observe que a demonstração deste resultado segue precisamente o mesmo raciocínio da Proposição 1.43, adaptando-o para o nosso cenário. \square

3.4 Regularidade das soluções do problema (\mathcal{P}_c)

A finalidade desta seção é apresentar resultados de regularidade para as soluções encontradas no problema elíptico (\mathcal{P}_c) . A abordagem central aqui é semelhante à Seção 1.4 do Capítulo 1. O primeiro resultado demonstra que qualquer solução fraca para o problema (\mathcal{P}_c) pertence a $W_{loc}^{2,s}(\mathbb{R}^N) \cap C_{loc}^{1,\eta}(\mathbb{R}^N)$, para todo $s \in (1, +\infty)$ e para algum $\eta \in (0, 1)$.

Teorema 3.26 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) e (V_1) . Assuma que $u \in X$ é uma solução fraca para o problema (\mathcal{P}_c) . Então $u \in W_{loc}^{2,s}(\mathbb{R}^N) \cap C_{loc}^{1,\eta}(\mathbb{R}^N)$, para todo $s \in (1, +\infty)$ e para algum $\eta \in (0, 1)$.*

Prova. Seja $u \in X$ é uma solução fraca para o problema (\mathcal{P}_c) . Então u satisfaz

$$-\Delta u = \frac{-V(x)u + \lambda a(x)|u|^{q-2}u - \theta|u|^{2^*-2}u}{\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}} \text{ em } \mathbb{R}^N. \quad (3-26)$$

Nesse caso, definimos uma função auxiliar $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} g(x, u) &:= \frac{-V(x)u + \lambda a(x)|u|^{q-2}u - \theta|u|^{2^*-2}u}{\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}} \\ &\leq (1 + |u|)f(x), \end{aligned}$$

onde

$$f(x) := \left| \frac{-V(x)u + \lambda a(x)|u|^{q-2}u - \theta|u|^{2^*-2}u}{(1 + |u|)(\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma})} \right|, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (3-27)$$

Uma vez que $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, temos que

$$\frac{1}{\alpha_1} \geq \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}}.$$

Essa afirmação, aliada a desigualdade triangular, à hipótese (V_1) , a equação (3-27), implica que

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \alpha_1^{-1} \left(\frac{V(x)|u| + \lambda|a(x)||u|^{q-1} + \theta|u|^{2^*-1}}{1 + |u|} \right) \\ &\leq \alpha_1^{-1} (V(x) + \lambda|a(x)||u|^{q-2} + \theta|u|^{2^*-2}). \end{aligned} \quad (3-28)$$

Portanto, o problema (\mathcal{P}_c) é dado por $-\Delta u = g(x, u)$, onde $g(x, u) \leq (1 + |u|)f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Assim, afirmamos que a função $f \in L_{loc}^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$. Com efeito, usando a desigualdade (3-28), segue que

$$|f(x)|^{\frac{N}{2}} \leq \alpha_1^{-\frac{N}{2}} (V(x) + \lambda|a(x)||u|^{q-2} + \theta|u|^{2^*-2})^{\frac{N}{2}}.$$

Como $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^{\frac{N}{2}}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, obtemos que $V^{\frac{N}{2}} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, considere $B(x_0, R) \subset \mathbb{R}^N$ a bola aberta com centro em $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e raio $R > 0$. Dessa forma, dado que $2 < \frac{N(2^*-2)}{2} = 2^*$, mencionamos

$$\int_{B(x_0, R)} (\theta|u|^{2^*-2})^{\frac{N}{2}} dx \leq \theta^{\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{(2^*-2)\frac{N}{2}} dx = \theta^{\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx = \theta^{\frac{N}{2}} \|u\|_{2^*}^{2^*}.$$

Portanto, a imersão contínua $X \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ para cada $s \in [2, 2^*]$, assegura que $(\theta|u|^{2^*-2})^{\frac{N}{2}} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Nesta ocasião, considere uma função $d : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(x) = \lambda|a(x)||u|^{q-2}.$$

É fácil ver utilizando a desigualdade de Hölder com expoentes

$$s_1 = \frac{4}{Nq - 2N - 2q + 4} > 1 \quad \text{e} \quad s_2 = \frac{4}{2N + 2q - Nq} > 1$$

que

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, R)} |d(x)|^{\frac{N}{2}} dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda|a(x)||u|^{q-2}|^{\frac{N}{2}} dx \\ &\leq \lambda^{\frac{N}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)|^{\frac{N}{2}s_2} dx \right)^{\frac{1}{s_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{(q-2)\frac{N}{2}s_1} dx \right)^{\frac{1}{s_1}} \\ &= \lambda^{\frac{N}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)|^{\frac{2^*}{2^*-q}} dx \right)^{\frac{1}{s_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{(q-2)N}{2^*2}} \\ &= \lambda^{\frac{N}{2}} \|a\|_{\frac{N}{2^*-q}}^{\frac{N}{2}} \|u\|_{2^*}^{(q-2)\frac{N}{2}}. \end{aligned}$$

Consequentemente, a imersão contínua $X \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ para cada $s \in [2, 2^*]$ nos fornece que $|d(x)|^{\frac{N}{2}} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Como produto, obtemos que $0 \leq f \in L^{\frac{N}{2}}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Dessa maneira, a estimativa de Brezis-Kato [73, Lema B.3] prova que $u \in L^s_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, para todo $s \in (1, +\infty)$. Tendo em vista a estimativa (3-26), temos

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{V(x)u - \lambda a(x)|u|^{q-2}u + \theta|u|^{2^*-2}u}{\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}} \\ &\leq \frac{V(x)u - \lambda a(x)|u|^{q-2}u + \theta|u|^{2^*-2}u}{\alpha_1} \\ &=: g_1(x, u) \text{ em } B(x_0, R). \end{aligned}$$

Afirmamos que $g_1 \in L^r_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, para todo $r \in (1, +\infty)$. Com efeito, dado que $V, a \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ e $u \in L^s_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ para todo $s \in (1, +\infty)$, obtemos que

$$\int_{B(x_0, R)} |V(x)u|^r dx < +\infty, \quad \int_{B(x_0, R)} |\lambda a(x)|u|^{q-2}u|^r dx < +\infty,$$

$$\int_{B(x_0, R)} |\theta|u|^{2^*-2}u|^r dx < +\infty,$$

onde tomamos $s = r$, $s = (q - 1)r$ e $s = (2^* - 1)r$, respetivamente. Adicionalmente, considere $w = u$ o potencial newtoniano da função

$$\bar{u} := \frac{V(x)u - \lambda a(x)|u|^{q-2}u + \theta|u|^{2^*-2}u}{\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}} \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Note que $\Delta w = \bar{u}$. Concluimos que $\bar{u} \in L_{\text{loc}}^r(\mathbb{R}^N)$, para todo $r \in (1, +\infty)$. A última afirmação, em conjunto com o Teorema de Calderón-Zygmund [39, Teorema 9.9], garante que

$$w = u \in W_{\text{loc}}^{2,s}(\mathbb{R}^N), \text{ para todo } s \in (1, +\infty).$$

Logo, aplicando a imersão contínua de Sobolev, obtemos que $u \in C_{\text{loc}}^{1,\eta}(\mathbb{R}^N)$, para algum $\eta \in (0, 1)$. Isso completa a demonstração do teorema. \square

Uma implicação direta do Teorema 3.26 é que as soluções fracas do problema (\mathcal{P}_c) pertencem a $C^{2,\xi}(B(x_0, R))$, para algum $\xi \in (0, 1)$ e para todo $R > 0$ com $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Este resultado é obtido ao assumir que V e a são funções Hölder contínuas.

Teorema 3.27 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) e $V, a \in C^{0,\omega}(B(x_0, R))$, para algum $\omega \in (0, 1)$. Então a solução u pertence a $C^{2,\xi}(B(x_0, R))$ onde $\xi := \min\{\eta, \omega\} \in (0, 1)$.*

Prova. Assuma que (3-26) é satisfeita em $B(x_0, R)$. Definimos uma função auxiliar $g_2 : B(x_0, R) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g_2(x, u) = \frac{-V(x)u + \lambda a(x)|u|^{q-2}u - \theta|u|^{2^*-2}u}{\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}}, \quad x \in B(x_0, R).$$

Desse modo, temos que $-\Delta u = g_2$ em $B(x_0, R)$. Agora, usando o Teorema 3.26, tem-se que $u \in C^{1,\eta}(B(x_0, R))$, para algum $\eta \in (0, 1)$ e para todo $R > 0$. Sob essa condição, mencionamos que u e $|\nabla u|$ são limitados em $B(x_0, R)$. Aqui, considere a função $\mathcal{M}(x) = u^{2^*-1}(x)$, para todo $x \in B(x_0, R)$. É importante enfatizar que u é não-negativo. Como resultado, aplicando a Desigualdade do Valor Médio, obtemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}(x) - \mathcal{M}(y)| &\leq (2^* - 1)|u(tx + (1-t)y)|^{2^*-2} \sup_{z \in B(x_0, R)} |\nabla u(z)||x - y| \\ &\leq \mathcal{C}_1 \sup_{z \in B(x_0, R)} |\nabla u(z)||x - y| \\ &\leq \mathcal{C}_2 |x - y|^\xi |x - y|^{1-\xi} \\ &\leq \mathcal{C}_3 |x - y|^\xi, \end{aligned}$$

onde $\xi = \min\{\eta, \omega\} \in (0, 1)$. A última condição mostra que $u^{2^*-1} \in C^{0,\xi}(B(x_0, R))$. Logo, como o produto de funções Hölder contínuas é Hölder contínua (veja, por

exemplo, p.53 em [39]), e V , a e u são Hölder contínuos, segue-se que $g_2 \in C^{0,\xi}(B(x_0, R))$, para algum $\xi = \min\{\eta, \gamma\} \in (0, 1)$. Portanto, as estimativas de Schauder para o operador Laplaciano [39, Teorema 6.13] implicam que

$$u \in C^{2,\xi}(B(x_0, R)) \text{ com } \xi = \min\{\eta, \gamma\} \in (0, 1).$$

Isso completa a demonstração do teorema. \square

É importante destacar que, para demonstrar o Teorema 3.27, assumimos a condição de que a é uma função Hölder contínua. No entanto, no início do capítulo, introduzimos hipótese adicional para essa função. Dessa forma, apresentamos um exemplo de uma função a que atende a todas essas condições.

Exemplo 3.28 *Seja*

$$a(x) := \frac{1}{(1 + |x|^2)^\beta}.$$

Um cálculo simples garante que a função $a(x) \in L^{\tilde{r}}(\mathbb{R}^N) \cap C^{0,\omega}(B(x_0, R))$ com $\tilde{r} = \frac{2^}{2^*-q}$ e $\beta > \frac{N}{2\tilde{r}}$, para algum $\omega \in (0, 1)$ e para todo $R > 0$. Com efeito, usando a fórmula da Co-área [27, Apêndice C, Teorema 5], inferimos que*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)|^{\tilde{r}} dx &= C_0 \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_0^z \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^{\beta\tilde{r}}} dr \\ &= C_0 \int_0^1 \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^{\beta\tilde{r}}} dr + C_0 \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_1^z \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^{\beta\tilde{r}}} dr \\ &\leq C_0 \int_0^1 \frac{1}{(1+r^2)^{\beta\tilde{r}}} dr + C_0 \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_1^z r^{N-1-2\beta\tilde{r}} dr \\ &\leq C_0 + C_0 \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z^{N-2\beta\tilde{r}}}{N-2\beta\tilde{r}} - \frac{1}{N-2\beta\tilde{r}}. \end{aligned}$$

Portanto, como $\beta > \frac{N}{2\tilde{r}}$, tem-se que $|a(x)|^{\tilde{r}} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ com $\tilde{r} = \frac{2^}{2^*-q}$. Por conseguinte, é fácil verificar pela Desigualdade do Valor Médio que $|a(x) - a(y)| \leq C_1|x - y|$, onde*

$C_1 := \sup_{x \in B(x_0, R)} \|a'(x)\|$. *Observe que*

$$a'(x)\varphi = -\frac{2\beta\langle x, \varphi \rangle}{(1 + |x|^2)^{\beta+1}}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^N.$$

Como consequência, encontramos que

$$\|a'(x)\| = \sup_{\varphi \in \mathbb{R}^N, |\varphi|=1} |a'(x)\varphi| \leq 2\beta|x| \leq 2\beta R < +\infty.$$

Logo, obtemos

$$|a(x) - a(y)| \leq C_1|x - y|^\omega|x - y|^{1-\omega} \leq C_2|x - y|^\omega,$$

para todo $x, y \in B(x_0, R)$. Concluimos que a função $a \in C^{0,\omega}(B(x_0, R))$, para algum $\omega \in (0, 1)$ e para todo $R > 0$. Além disso, como a função $a(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^\beta}$ é contínua em seu domínio, segue-se que $a \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Proposição 3.29 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) e $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$. Assuma que $V, a \in C^{0,\omega}(B(x_0, R))$, para algum $\omega \in (0, 1)$ e para todo $R > 0$. Então u e v obtidos na Proposição 3.25 são estritamente positivos em \mathbb{R}^N .*

Prova. Sabemos que a Proposição 3.25 fornece a existência de duas soluções fracas $u, v \in X$ para o problema (\mathcal{P}_c) , onde $u, v \geq 0$ em \mathbb{R}^N . Aqui, enfatizamos que o Teorema 3.27 garante que $u, v \in C^{2,\xi}(B(x_0, R))$, para algum $\xi \in (0, 1)$ e $R > 0$. Sob estas condições, afirmamos que u é estritamente positivo em \mathbb{R}^N . De fato, suponha por contradição que existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ de tal forma que $u(x_0) = 0$. Nesse caso, uma simples manipulação algébrica em (3-26) nos fornece que

$$-\Delta u + \frac{V(x)u}{\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}} \geq \frac{-\theta|u|^{2^*-2}u}{\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}} \text{ em } B(x_0, R),$$

onde $u \in C^{2,\xi}(B(x_0, R))$ para algum $\xi \in (0, 1)$. Considere $\mathcal{S} : B(x_0, R) \rightarrow \mathbb{R}$ como uma função a ser determinada, tal que $\mathcal{S}(x)u \geq 0$ em $B(x_0, R)$ e

$$\begin{aligned} -\Delta u + \mathcal{S}(x)u &\geq \mathcal{S}(x)u - \frac{V(x)u + \theta|u|^{2^*-2}u}{\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}} \\ &\geq \left[\mathcal{S}(x) - \frac{V(x)}{\alpha_1} - \frac{\theta|u|^{2^*-2}}{\alpha_1} \right] u \\ &\geq \left[\mathcal{S}(x) - \frac{\|V\|_{L^\infty(B(x_0, R))}}{\alpha_1} - \frac{\theta\|u\|_{L^\infty(B(x_0, R))}^{2^*-2}}{\alpha_1} \right] u, \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $V \in L^\infty(B(x_0, R))$ e

$$\frac{1}{\alpha_1} \geq \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}}.$$

Dessa maneira, podemos assegurar que $-\Delta u + \mathcal{S}(x)u \geq 0$ em $B(x_0, R)$ ao escolhermos uma função $\mathcal{S}(x)$ que satisfaça

$$\mathcal{S}(x) = \frac{2\|V\|_{L^\infty(B(x_0, R))} + 2\theta\|u\|_{L^\infty(B(x_0, R))}^{2^*-2}}{\alpha_1} \in L^\infty(B(x_0, R)).$$

Consequentemente, aplicando o Princípio do Máximo Forte [27, Teorema 4], deduzimos que $u > 0$ em $B(x_0, R)$ ou $u = 0$ em $B(x_0, R)$. Assumindo que $u = 0$ em $B(x_0, R)$ e utilizando o fato de que $R > 0$ é arbitrário, mencionamos que $u = 0$ em \mathbb{R}^N . Entretanto, para todo $u \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}$, o Lema 3.16 assegura que $0 < \delta_q \leq \|u\| = 0$,

o que é uma contradição. Portanto, a função u é estritamente positiva em \mathbb{R}^N . Da mesma forma, aplicando os conceitos discutidos anteriormente, concluímos que a função v é estritamente positiva em \mathbb{R}^N . \square

3.5 A prova dos teoremas principais

Nesta seção, nosso objetivo é apresentar a demonstração de todos os resultados principais.

Teorema 3.30 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) e $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} < c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}$. Então para cada $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$, existe $\theta_2 > 0$ pequeno tal que o problema (\mathcal{P}_c) admite pelo menos uma solução fraca $u \in X$ satisfazendo $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-$, onde $\theta \in (0, \theta_2)$. Além disso, temos que a solução u é estritamente positiva em \mathbb{R}^N desde que V e a sejam funções Hölder contínuas.*

Prova. É sabido pela Proposição 3.24 que existe $\theta_2 > 0$ suficientemente pequeno de modo que $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-$. Como consequência, a Proposição 3.25 assegura que $u \in X$ é um ponto crítico para o funcional $J_{\lambda,\theta}$, satisfazendo $J''_{\lambda,\theta}(u)(u, u) < 0$, para cada $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta \in (0, \theta_2)$ com $\theta_2 > 0$ suficientemente pequeno. Logo, tem-se que $u \in X$ é uma solução fraca para o problema (\mathcal{P}_c) . Portanto, aplicando a Proposição 3.29, obtemos que $u \in X$ é uma solução positiva para o problema (\mathcal{P}_c) . \square

Um corolário imediato do Teorema 3.30 é o seguinte.

Corolário 3.31 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) e $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$. Assuma que existe $q_1 > 0$ de tal forma que $2 < q_1 < q < 2(\sigma + 1) < 2^*$. Então os níveis de energia $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} < c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}$, sempre que $\theta \in (0, \theta_2)$.*

Prova. A demonstração deste resultado está apresentada na Proposição 3.24. \square

Teorema 3.32 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) e $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} < c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}$. Então para cada $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$, existe $\theta_0 > 0$ pequeno tal que o problema (\mathcal{P}_c) admite pelo menos uma solução ground state $v \in X$ satisfazendo $v \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+$, onde $\theta \in (0, \theta_0)$. Além disso, temos que a solução v é estritamente positiva em \mathbb{R}^N desde que V e a sejam funções Hölder contínuas.*

Prova. É sabido pela Proposição 3.23 que existe $\theta_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que $v \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+$. Tendo em vista a Proposição 3.25, inferimos que $v \in X$ é um ponto crítico para o funcional $J_{\lambda,\theta}$, satisfazendo $J''_{\lambda,\theta}(v)(v, v) > 0$, para cada $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta \in (0, \theta_0)$ com $\theta_0 > 0$ suficientemente pequeno. Logo, encontramos que $v \in X$ é uma solução fraca para o problema (\mathcal{P}_c) . Portanto, aplicando a Proposição 3.29, segue que $v \in X$ é uma solução ground state positiva para o problema (\mathcal{P}_c) . \square

Um corolário imediato do Teorema 3.32 é o seguinte.

Corolário 3.33 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) e (V_1) . Assuma que existe $q_1 > 0$ de tal forma que $2 < q_1 < q < 2(\sigma + 1) < 2^*$. Então os níveis de energia $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} < c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^0}$ desde que:*

- (a) $\lambda \in [\lambda_*, +\infty)$ e $\theta > 0$;
- (b) $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_*)$ e $\theta \in (0, \theta_0)$ com $\theta_0 > 0$ suficientemente pequeno;
- (c) $\lambda \in (\lambda_* - \varepsilon, \lambda_*)$ e $\theta > 0$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Prova. A demonstração dos itens (a) e (b) decorre imediatamente da Proposição 3.23. Quanto ao item (c), segue exatamente o mesmo raciocínio do Corolário 2.45, para o qual omitimos os detalhes. \square

Ao combinar o Teorema 3.30, o Corolário 3.31, o Teorema 3.32 e o Corolário 3.33, deduzimos o seguinte resultado.

Corolário 3.34 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) , $2 < q_1 < q < 2(\sigma + 1) < 2^*$ e $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$. Assuma que V e a são funções Hölder contínuas. Então para cada $\theta \in (0, \min(\theta_0, \theta_2))$, o problema (\mathcal{P}_c) admite pelo menos duas soluções positivas $u, v \in X \setminus \{0\}$ de tal maneira que $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-$ e $v \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+$.*

Prova. Considere $\theta \in (0, \min(\theta_0, \theta_2))$. Note que o problema (\mathcal{P}_c) admite uma solução fraca $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-$ tal que $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} = J_{\lambda,\theta}(u)$, veja o Teorema 3.30. Adicionalmente, é fácil ver que o problema (\mathcal{P}_c) admite outra solução fraca $v \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+$ tal que $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} = J_{\lambda,\theta}(v)$, veja o Teorema 3.32. \square

Finalmente, nosso último resultado afirma que, para certos valores do parâmetro λ , o problema (\mathcal{P}_c) não possui solução não trivial.

Teorema 3.35 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) e $V \in C^1(\mathbb{R}^N; [0, +\infty))$. Então,*

- (a) *O problema (\mathcal{P}_c) não possui solução não trivial, desde que $\lambda \in (0, \lambda^*)$ e $\theta > 0$;*
- (b) *O problema (\mathcal{P}_c) não possui solução não trivial, desde que $\lambda = 0$, $\theta > 0$ e $2V(x) + (x \cdot \nabla V(x)) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$;*
- (c) *O problema (\mathcal{P}_c) não possui solução não trivial, desde que $\lambda < 0$, $\theta \geq 0$ e $2V(x) + (x \cdot \nabla V(x)) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$.*

Prova. A demonstração do item (a) segue as mesmas ideias da parte final da prova do Teorema 2.49. Considere $u \in X$ uma solução fraca do problema (\mathcal{P}_c) . Então u satisfaz

$$\alpha_1 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \alpha_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\sigma+1} = - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx + \lambda \|u\|_{q,a}^q - \theta \|u\|_{2^*}^{2^*}. \quad (3-29)$$

Uma vez que $\lambda = 0$ e $\theta > 0$, obtemos pela *Identidade de Pohozaev* (veja o Teorema D.2) que

$$\begin{aligned} \frac{N-2}{2} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \alpha_1 |\nabla u|^2 dx + \alpha_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\sigma+1} \right] + \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx \\ + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (x \cdot \nabla V(x)) u^2 dx + \frac{N\theta}{2^*} \|u\|_{2^*}^{2^*} = 0. \end{aligned}$$

A última equação, juntamente com (3-29), implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (2V(x) + (x \cdot \nabla V(x))) u^2 dx = 0.$$

Logo, como $2V(x) + (x \cdot \nabla V(x)) > 0$ encontramos que $u \equiv 0$. Isso completa a prova do item (b). Agora, assuma que $\theta = 0$. Sendo assim, temos que

$$\mathcal{H}(u) = \frac{\lambda}{q} a(x) |u|^q,$$

onde $\mathcal{H}(u) = \int_0^u h(\tau) d\tau$. Consequentemente, utilizando o Teorema D.2, a equação (3-29), $\lambda < 0$ e o fato de que $2^* > q$, segue-se que

$$0 > \left(\frac{2N - q(N-2)}{q} \right) \lambda \|u\|_{q,a}^q = \int_{\mathbb{R}^N} (2V(x) + (x \cdot \nabla V(x))) u^2 dx \geq 0.$$

Isso é uma contradição. Adicionalmente, assumindo que $\theta > 0$, afirmamos que

$$\mathcal{H}(u) = \frac{\lambda}{q} a(x) |u|^q - \frac{\theta}{2^*} |u|^{2^*}.$$

Uma simples manipulação algébrica, usando o Teorema D.2, a equação (3-29) e o fato de que $\lambda < 0$, assegura que

$$0 > \left(\frac{2N - q(N-2)}{q} \right) \lambda \|u\|_{q,a}^q = \int_{\mathbb{R}^N} (2V(x) + (x \cdot \nabla V(x))) u^2 dx \geq 0.$$

Isso é uma contradição. Portanto, o problema (\mathcal{P}_c) não possui solução não trivial. Isso conclui a demonstração do item (c). \square

Exemplo 3.36 *Um exemplo clássico de potencial V que satisfaz a hipótese (V_1) e $2V(x) + (x \cdot \nabla V(x)) > 0$ é $V(x) = |x|^2 + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Claramente, é fácil verificar que $V(x) \geq 1 = V_0 > 0$ e*

$$2V(x) + (x \cdot \nabla V(x)) = 2 + 4|x|^2 \geq 2 > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Ademais, não é difícil checar que $V \in C^{0,\omega}(B(x_0, R))$ para algum $\omega \in (0, 1)$.

Exemplos relacionados ao potencial V

Neste apêndice, são apresentados exemplos interessantes do potencial V , o qual foi definido nos Capítulos 1, 2 e 3. Esses exemplos satisfazem cada uma das condições indicadas na Figura A.1 abaixo.

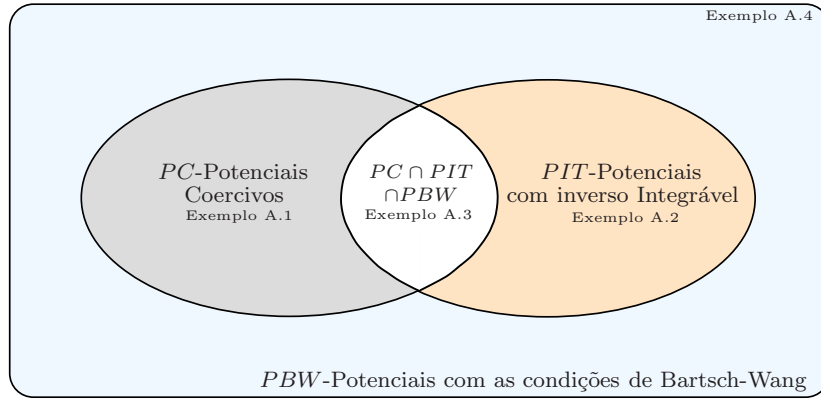


Figura A.1: Diagrama das Classes de Potenciais.

É fundamental observar que o Exemplo A.1 assegura que potenciais coercivos, por si só, já satisfazem a classe de potenciais que atendem às condições de Bartsch-Wang (veja [12]). Com efeito, uma vez que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$, temos que para todo $R > 0$, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \geq K$, implicando que $V(x) > R$. Dessa forma, fixa $M > 0$ e tome $R > M$, então existe $R_1 > 0$ de tal maneira que $|x| > R_1$, implicando que $x \in \mathbb{R}^N \setminus B(0, R_1)$. Como consequência, deduzimos que

$$|\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\}| = \int_{\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\}} dx \leq \int_{B(0, R_1)} dx < +\infty.$$

Além disso, o Exemplo A.1 demonstra também que potenciais limitados inferiormente por constantes positivas satisfazem a hipótese (V_1) dos Capítulos 1 e 3. No que segue, os autores J. M. do Ô e U. Severo, como mencionado em [58], consideram potenciais V que satisfazem a hipótese (V_1) , juntamente com uma condição adicional de inverso integrável. Enfatizamos que a condição de Bartsch-Wang generaliza

a condição $[V(x)]^{-1} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. De fato, dado $M > 0$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} |\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\}| &= \int_{\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\}} \frac{1}{M} dx \\ &\leq \int_{\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\}} \frac{1}{V(x)} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{V(x)} dx \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

No entanto, essas duas classes de potenciais, coercivos e inversos integráveis, não definem à mesma classe de potenciais. Esse fato se torna claro nos exemplos a seguir.

Exemplo A.1 *Um exemplo de potencial V que atende às condições PC, mas não satisfaz a condição PIT, é $V(x) = 1 + |x|^\delta$ com $\delta \in (0, N)$ e $x \in \mathbb{R}^N$. Com efeito, é fácil ver que*

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} 1 + |x|^\delta = +\infty.$$

Logo, o potencial V é coercivo. Como produto, obtemos que o potencial V satisfaz a condição PBW. Entretanto, fazendo uso da fórmula da Co-área [27, Teorema 5, Apêndice C] e considerando que $r^\delta + 1 < 2r^\delta$ para todo $r > 1$, observamos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{V(x)} dx &= C_N \int_0^1 \frac{r^{N-1}}{1+r^\delta} dr + C_N \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_1^z \frac{r^{N-1}}{1+r^\delta} dr \\ &\geq C_N \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_1^z \frac{r^{N-1}}{1+r^\delta} dr \\ &> C_N \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_1^z \frac{r^{N-1}}{2r^\delta} dr \\ &= C_N \left(\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z^{N-\delta}}{N-\delta} - \frac{1}{N-\delta} \right) \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

quando $\delta \in (0, N)$. Portanto, temos que o potencial V não satisfaz a condição PIT.

Exemplo A.2 *Um exemplo de potencial V que atende às condições PIT, mas não satisfaz a condição PC, é*

$$V(x) = 1 + |x|^{2\mu} \operatorname{sen}^{2\rho}(|x|),$$

para todo $\mu > \frac{N+2}{2}$ e $\rho \in (0, \frac{1}{2})$. Com efeito, considere $x_k = (2k\pi, 0, \dots, 0)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Observe que $|x_k| = 2k\pi \rightarrow +\infty$, quando $k \rightarrow +\infty$. Um simples cálculo mostra que $\lim_{|x_k| \rightarrow +\infty} V(x_k) = 1$. Portanto, o potencial V não é coercivo. Por outro

lado, aplicando a fórmula da Co-área, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{1 + |x|^{2\mu} \text{sen}^{2\rho}(|x|)} dx = \mathcal{C}_N \int_0^{\pi-\delta} \frac{r^{N-1}}{1 + r^{2\mu} \text{sen}^{2\rho}(r)} dr + \mathcal{C}_N \int_{\pi-\delta}^{+\infty} \frac{r^{N-1}}{1 + r^{2\mu} \text{sen}^{2\rho}(r)} dr, \quad (\text{A-1})$$

para todo $\delta \in (0, 1)$. Nosso objetivo principal neste contexto é estabelecer a finitude das integrais mencionadas acima. Assim, não é difícil checar que

$$\mathcal{C}_N \int_0^{\pi-\delta} \frac{r^{N-1}}{1 + r^{2\mu} \text{sen}^{2\rho}(r)} dr \leq \mathcal{C}_N \int_0^{\pi-\delta} r^{N-1} = \frac{\mathcal{C}_N (\pi - \delta)^N}{N} < +\infty.$$

Adicionalmente, afirmamos que a última integral dada em (A-1) é finita. De fato, considere os intervalos: $S_k = [k\pi - \delta, k\pi + \delta]$ e $T_k = (k\pi + \delta, (k+1)\pi - \delta)$ onde $\delta \in (0, 1)$ e $k \in \mathbb{N}$. Desse modo, deduzimos as seguintes integrais:

$$\begin{aligned} & \int_{k\pi-\delta}^{k\pi} \frac{r^{N-1}}{1 + r^{2\mu} \text{sen}^{2\rho}(r)} dr, \\ & \int_{k\pi}^{k\pi+\delta} \frac{r^{N-1}}{1 + r^{2\mu} \text{sen}^{2\rho}(r)} dr, \\ & \int_{k\pi+\delta}^{(k+1)\pi-\delta} \frac{r^{N-1}}{1 + r^{2\mu} \text{sen}^{2\rho}(r)} dr. \end{aligned}$$

Uma vez que $1 + r^{2\mu} \text{sen}^{2\rho}(r) \geq r^{2\mu} \text{sen}^{2\rho}(r)$ e $r \geq k\pi - \delta$, mencionamos

$$\int_{k\pi-\delta}^{k\pi} \frac{r^{N-1}}{1 + r^{2\mu} \text{sen}^{2\rho}(r)} dr \leq \frac{1}{(k\pi - \delta)^{2\mu}} \int_{k\pi-\delta}^{k\pi} \frac{r^{N-1}}{\text{sen}^{2\rho}(r)} dr.$$

Agora, note que

$$\lim_{r \rightarrow k\pi^+} \frac{\text{sen}(r)}{r - k\pi} = \lim_{r \rightarrow k\pi^+} \cos(r) = \pm 1. \quad (\text{A-2})$$

Nesse caso, a definição de limite nos permite concluir que existe $\delta_1 \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{k\pi-\delta}^{k\pi} \frac{r^{N-1}}{1 + r^{2\mu} \text{sen}^{2\rho}(r)} dr & \leq \frac{1}{(k\pi - \delta)^{2\mu}} \int_{k\pi-\delta}^{k\pi} \frac{r^{N-1}}{\left(\frac{\text{sen}(r)}{k\pi-r}\right)^{2\rho} (k\pi - r)^{2\rho}} dr \\ & \leq \frac{1}{(k\pi - \delta)^{2\mu} (1 - \delta_1)} \int_{k\pi-\delta}^{k\pi} \frac{r^{N-1}}{(k\pi - r)^{2\rho}} dr \\ & \leq \mathcal{C}_{\delta_1} \frac{(k\pi)^{N-1}}{(k\pi - \delta)^{2\mu}} \int_{k\pi-\delta}^{k\pi} \frac{1}{(k\pi - r)^{2\rho}} dr \\ & \leq \mathcal{C}_{\delta_1} \left(\frac{(k\pi - \delta)^{N-1} + \delta^{N-1}}{(k\pi - \delta)^{2\mu}} \right) \left(\frac{\delta^{-2\rho+1}}{-2\rho+1} \right) \\ & = \frac{\mathcal{C}_4}{(k\pi - \delta)^{2\mu-N+1}} + \frac{\mathcal{C}_4 \delta^{N-1}}{(k\pi - \delta)^{2\mu}}. \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

Neste momento, aplicando as mesmas ideias discutidas anteriormente, juntamente com a equação (A-2), temos que existe $\delta_2 > 0$ de tal forma que

$$\begin{aligned}
\int_{k\pi}^{k\pi+\delta} \frac{r^{N-1}}{1+r^{2\mu}\text{sen}^{2\rho}(r)} dr &\leq \frac{1}{(k\pi)^{2\mu}} \int_{k\pi}^{k\pi+\delta} \frac{r^{N-1}}{\text{sen}^{2\rho}(r)} dr \\
&\leq \frac{1}{(k\pi)^{2\mu}(1-\delta_2)} \int_{k\pi}^{k\pi+\delta} \frac{r^{N-1}}{(r-k\pi)^{2\rho}} dr \\
&\leq \frac{\mathcal{C}_5}{(k\pi)^{2\mu}(1-\delta_2)} \int_{k\pi}^{k\pi+\delta} \frac{(r-k\pi)^{N-1} + (k\pi)^{N-1}}{(r-k\pi)^{2\rho}} dr \\
&= \frac{\mathcal{C}_{\delta_2}}{(k\pi)^{2\mu}} \left(\frac{\delta^{N-2\rho}}{N-2\rho} \right) + \frac{\mathcal{C}_{\delta_2}}{(k\pi)^{2\mu-N+1}} \left(\frac{\delta^{-2\rho+1}}{-2\rho+1} \right) \\
&= \frac{\mathcal{C}_6}{(k\pi)^{2\mu}} + \frac{\mathcal{C}_6}{(k\pi)^{2\mu-N+1}}, \tag{A-4}
\end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de que $r \geq k\pi$, $-2\rho + 1 > 0$ e $N - 2\rho > 0$. Por fim, uma simples conta nos fornece que

$$\inf_{r \in [k\pi+\delta, (k+1)\pi-\delta]} \text{sen}^{2\rho}(r) = \mathcal{C}_\delta > 0.$$

Combinando a última afirmação com o fato de que $r \geq k\pi + \delta$, deduzimos

$$\begin{aligned}
\int_{k\pi+\delta}^{(k+1)\pi-\delta} \frac{r^{N-1}}{1+r^{2\mu}\text{sen}^{2\rho}(r)} dr &\leq \frac{1}{(k\pi+\delta)^{2\mu}} \int_{k\pi+\delta}^{(k+1)\pi-\delta} \frac{r^{N-1}}{\text{sen}^{2\rho}(r)} dr \\
&\leq \frac{1}{\mathcal{C}_\delta(k\pi+\delta)^{2\mu}} \int_{k\pi+\delta}^{(k+1)\pi-\delta} r^{N-1} dr \\
&= \frac{1}{\mathcal{C}_\delta(k\pi+\delta)^{2\mu}} \left(\frac{((k+1)\pi-\delta)^N}{N} - \frac{(k\pi-\delta)^N}{N} \right) \\
&\leq \frac{\mathcal{C}_7}{(k\pi+\delta)^{2\mu-N}} + \frac{\mathcal{C}_8}{(k\pi+\delta)^{2\mu}}. \tag{A-5}
\end{aligned}$$

Logo, associando as estimativas (A-3), (A-4) e (A-5), concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{r^{N-1}}{1+r^{2\mu}\text{sen}^{2\rho}(r)} dr &\leq \int_0^{\pi-\delta} \frac{r^{N-1}}{1+r^{2\mu}\text{sen}^{2\rho}(r)} dr \\
&\quad + \left(\int_{\cup_{k=1}^{\infty} S_k} + \int_{\cup_{k=1}^{\infty} T_k} \right) \frac{r^{N-1}}{1+r^{2\mu}\text{sen}^{2\rho}(r)} dr \\
&\leq \mathcal{C}_N + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathcal{C}_4}{(k\pi-\delta)^{2\mu-N+1}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathcal{C}_4\delta^{N-1}}{(k\pi-\delta)^{2\mu}} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathcal{C}_6}{(k\pi)^{2\mu}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathcal{C}_6}{(k\pi)^{2\mu-N+1}} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathcal{C}_7}{(k\pi+\delta)^{2\mu-N}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathcal{C}_8}{(k\pi+\delta)^{2\mu}}.
\end{aligned}$$

Note que $\mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6, \mathcal{C}_7$ e \mathcal{C}_8 são constantes positivas. Levando em conta que $\mu > \frac{N+2}{2}$, é fácil provar que todos os somatórios acima convergem. Portanto, temos que $[V(x)]^{-1} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Como resultado, obtemos que o potencial V satisfaz a condição PBW.

Exemplo A.3 Um exemplo de potencial V que satisfaz as condições PC, PIT e consequentemente PBW, é

$$V(x) = \begin{cases} \frac{|x|^\beta}{1 + |x|^\xi}, & \text{se } x \in B(0, 1), \\ \frac{|x|^\nu}{1 + |x|^\phi}, & \text{se } x \notin B(0, 1), \end{cases}$$

onde $N > \beta > \xi$, $\nu > \phi > 0$ e $N < \nu$. Evidentemente, como $\nu > \phi > 0$, inferimos

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{\nu-\phi}}{|x|^{-\phi} + 1} = +\infty.$$

Portanto, o potencial V é coercivo, satisfazendo a condição PC. Além disso, usando a fórmula da Co-área, juntamente com o fato de que $N > \beta > \xi$, $\nu > \phi > 0$ e $N < \nu$, mencionamos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{V(x)} dx &= \int_{B(0,1)} \left(\frac{1}{|x|^\beta} + \frac{1}{|x|^{\beta-\xi}} \right) dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,1)} \left(\frac{1}{|x|^\nu} + \frac{1}{|x|^{\nu-\phi}} \right) dx \\ &\leq \mathcal{C}_N \int_0^1 \frac{r^{N-1}}{r^\beta} dr + \mathcal{C}_N \int_0^1 \frac{r^{N-1}}{r^{\beta-\xi}} dr \\ &\quad + \mathcal{C}_N \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_1^z \frac{r^{N-1}}{r^\nu} dr + \mathcal{C}_N \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_1^z \frac{r^{N-1}}{r^{\nu-\phi}} dr \\ &= 2\mathcal{C}_N + \mathcal{C}_N \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z^{N-\nu}}{N-\nu} - \frac{\mathcal{C}_N}{N-\nu} \\ &\quad + \mathcal{C}_N \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z^{N+\phi-\nu}}{N+\phi-\nu} - \frac{\mathcal{C}_N}{N+\phi-\nu} \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

A última estimativa assegura que $[V(x)]^{-1} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Como consequência, tem-se que a condição PBW também é satisfeita.

Exemplo A.4 Um exemplo de potencial V que satisfaz a condição PBW, mas não atende às condições PC e PIT, é

$$V(x) = \begin{cases} 1 + |x_1| |\bar{x}|^\beta, & \text{se } |\bar{x}| \geq 1, \\ 1 + |x_1| |\bar{x}|^\xi, & \text{se } |\bar{x}| \leq 1, \end{cases}$$

onde $\bar{x} = (x_2, \dots, x_N)$, $\beta > N-1$ e $\xi \in (0, N-1)$ com $N \geq 3$. Claramente, obtemos que o potencial $V(x)$ não é coercivo. Além disso, é seguro presumir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + |x_1|} dx_1 = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + |x_1|} dx_1 \geq 2 \lim_{r \rightarrow +\infty} \ln(1 + |r|) = +\infty.$$

Uma vez que $1 + |x_1||\bar{x}|^\xi \leq 1 + |x_1|$ com $|\bar{x}| \leq 1$ e $\xi > 0$, encontramos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{V(x)} dx &= \int_{\mathbb{R}^N \cap \{|\bar{x}| \geq 1\}} \frac{1}{V(x)} dx + \int_{\mathbb{R}^N \cap \{|\bar{x}| \leq 1\}} \frac{1}{V(x)} dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^N \cap \{|\bar{x}| \leq 1\}} \frac{1}{V(x)} dx \\
&= \int_{\{|\bar{x}| \leq 1\}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + |x_1||\bar{x}|^\xi} dx_1 \right) d\bar{x} \\
&\geq \int_{\{|\bar{x}| \leq 1\}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + |x_1|} dx_1 \right) d\bar{x} \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Portanto, o potencial V não satisfaz a condição PIT. Nesta etapa, afirmamos que, para cada $M > 0$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\}$ possui medida de Lebesgue finita. Na verdade, o que faremos é demonstrar que

$$\int_{\{|\bar{x}| \geq 1\}} \frac{M-1}{|\bar{x}|^a} dx < +\infty \quad e \quad \int_{\{|\bar{x}| \leq 1\}} \frac{M-1}{|\bar{x}|^b} dx < +\infty.$$

Observe que a medida do conjunto de pontos onde $V(x)$ está abaixo de uma constante $M > 0$ fixada é a medida da área abaixo das curvas

$$\mathcal{O}_1(\bar{x}) = \frac{M-1}{|\bar{x}|^\beta}, \quad \text{para } |\bar{x}| \geq 1 \quad e \quad \mathcal{O}_2(\bar{x}) = \frac{M-1}{|\bar{x}|^\xi}, \quad \text{para } |\bar{x}| \leq 1.$$

Desse modo, utilizando a fórmula da Co-área, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\{|\bar{x}| \geq 1\}} \frac{M-1}{|\bar{x}|^\beta} dx &= \int_1^{+\infty} \left(\int_{\partial B(0,r)} \frac{M-1}{|\bar{x}|^\beta} dS \right) dr \\
&= \mathcal{C}_N \int_1^{+\infty} \frac{M-1}{r^\beta} r^{N-2} dr \\
&= \mathcal{C}_N (M-1) \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z^{N-1-\beta}}{N-1-\beta} - \frac{\mathcal{C}_N (M-1)}{N-1-\beta}. \quad (\text{A-6})
\end{aligned}$$

Analogamente, aplicando novamente a fórmula da Co-área, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\{|\bar{x}| \leq 1\}} \frac{M-1}{|\bar{x}|^\xi} dx &= \int_0^1 \left(\int_{\partial B(0,r)} \frac{M-1}{|\bar{x}|^\xi} dS \right) dr \\
&= \mathcal{C}_N \int_0^1 \frac{M-1}{r^\xi} r^{N-2} dr \\
&= \frac{\mathcal{C}_N (M-1)}{N-\xi}. \quad (\text{A-7})
\end{aligned}$$

Como $\beta > N-1$ e $\xi \in (0, N-1)$, inferimos que as integrais dadas em (A-6) e (A-7) são finitas, o que demonstra que o potencial V satisfaz a condição PBW.

Regularidade do funcional energia J

Neste apêndice, abordamos a regularidade dos termos do funcional energia J definido em cada um dos capítulos estudados anteriormente. Inicialmente, nosso objetivo é estabelecer propriedades relacionadas ao Capítulo 1. Entre essas propriedades, apresentamos uma prova de que o funcional energia J associado ao problema (\mathcal{P}_λ) é de classe $C^1(X; \mathbb{R})$.

Proposição B.1 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) e (V_1) . Então o funcional $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ definido no Capítulo 1 satisfaz as seguintes condições:*

- (i) J está bem definido em X ;
- (ii) J é de classe $C^1(X; \mathbb{R})$.

Prova. Para demonstrar o item (i), dividimos o funcional J em novos funcionais, os quais são definidos por

$$\begin{aligned} J_1(u) &:= \frac{1}{2} \|u\|^2, \quad u \in X, \\ J_2(u) &:= \frac{\alpha_2}{2(\sigma + 1)} \|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)}, \quad u \in X, \\ J_3(u) &:= \frac{\lambda}{q} \|u\|_{q,a}^q, \quad u \in X, \\ J_4(u) &:= \frac{1}{p} \|u\|_{p,b}^p, \quad u \in X. \end{aligned}$$

Não é difícil mostrar que os funcionais J_1 e J_2 estão bem definidos em X . Agora, aplicando a desigualdade de Hölder, a imersão contínua $X \hookrightarrow L^{qr'_1}(\mathbb{R}^N)$ para cada $qr'_1 \in [2, 2^*)$ e a hipótese (a_2) , observamos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |a|^{r_1} dx \right)^{\frac{1}{r_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{qr'_1} dx \right)^{\frac{1}{r'_1}} \\ &= \|a\|_{r_1} \|u\|_{qr'_1}^q \\ &\leq S_{qr'_1}^q \|a\|_{r_1} \|u\|^q \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Dessa forma, o funcional J_3 encontra-se bem definido em X . Analogamente, usando a desigualdade de Hölder, a imersão contínua $X \hookrightarrow L^{pr'_2}(\mathbb{R}^N)$ para cada $pr'_2 \in [2, 2^*)$ e a hipótese (a_2) , concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |b|^{r_2} dx \right)^{\frac{1}{r_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{pr'_2} dx \right)^{\frac{1}{r'_2}} \\ &= \|b\|_{r_2} \|u\|_{pr'_2}^p \\ &\leq S_{pr'_2}^p \|b\|_{r_2} \|u\|^p \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Portanto, o funcional J_4 está bem definido em X . Isso finaliza prova do item (i).

Nesta ocasião, torna-se evidente que o funcional J é Gâteaux diferenciável em relação a u . Essa característica pode ser facilmente percebida por

$$J'_1(u)\varphi = \langle u, \varphi \rangle \quad \text{e} \quad J'_2(u)\varphi = \alpha_2 \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_2 \|\nabla u\|_2^{2\sigma}, \quad \varphi \in X.$$

Além disso, temos que o funcional J'_1 é contínuo. Com efeito, dada uma sequência $(u_k) \in X$ de tal forma que $u_k \rightarrow u$ em X , temos

$$\begin{aligned} |J'_1(u_k)\varphi - J'_1(u)\varphi| &= |\langle u_k, \varphi \rangle - \langle u, \varphi \rangle| \\ &= |\langle u_k - u, \varphi \rangle| \\ &= \|u_k - u\| \|\varphi\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $k \rightarrow +\infty$. A última condição assegura a continuidade do funcional J'_1 . Note que a continuidade do funcional J'_2 segue ideias semelhantes às do funcional J'_1 . Neste momento, afirmamos que o funcional J'_3 é contínuo. De fato, observe que a derivada de Gâteaux de J_3 é dada por

$$J'_3(u)\varphi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{J_3(u + h\varphi) - J_3(u)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)(|u + h\varphi|^q - |u|^q) dx \right].$$

Neste momento, defina uma função auxiliar $\omega_{\lambda_1} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ estabelecida por $\omega_{\lambda_1}(h) = |u + h\varphi|^q$. Não é difícil verificar que $\omega_{\lambda_1} \in C^1(\mathbb{R})$ de modo que $\omega_{\lambda_1}(0) = |u|^q$. Nesse caso, aplicando a Desigualdade do Valor Médio, deduzimos que existem valores $0 < |\rho| < |h| < 1$ tais que

$$\frac{\omega_{\lambda_1}(h) - \omega_{\lambda_1}(0)}{h} = \omega'_{\lambda_1}(\rho).$$

Um cálculo simples garante que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|u + h\varphi|^q - |u|^q}{h} = \omega'_{\lambda_1}(0) \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|u + h\varphi|^q - |u|^q}{h} = \omega'_{\lambda_1}(0),$$

onde

$$\omega'_{\lambda_1}(\rho) = q|u + \rho\varphi|^{q-1} \frac{(u + \rho\varphi)}{|u + \rho\varphi|} \varphi = q|u + \rho\varphi|^{q-2} (u + \rho\varphi) \varphi \quad (\text{B-1})$$

e $\omega'_{\lambda_1}(0) = q|u|^{q-2}u\varphi$. Desse modo, a equação (B-1), juntamente com a desigualdade triangular, nos fornece que

$$\left| \frac{|u + h\varphi|^q - |u|^q}{h} \right| = q|u + h\varphi|^{q-1}|\varphi| \leq q(|u| + |\rho||\varphi|)^{q-1}|\varphi|.$$

Uma vez que h é pequeno, obtemos também que ρ é pequeno. Consequentemente, assumimos, sem perda de generalidade, que $\rho < 1$. Como resultado, mencionamos

$$\begin{aligned} \left| \frac{|u + h\varphi|^q - |u|^q}{h} \right| &< q(|u| + |\varphi|)^{q-1}|\varphi| \\ &\leq q(|u| + |\varphi|)^{q-1}(|u| + |\varphi|) \\ &\leq \mathcal{C}_2(|u| + |\varphi|)^q \in L^1(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Portanto, o Teorema da Convergência Dominada garante que

$$J'_3(u)\varphi = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^{q-2}u\varphi dx, \quad \varphi \in X.$$

Aqui, resta provar que J'_3 é sequencialmente contínuo, ou seja, dada uma sequência $(u_k) \in X$ tal que $u_k \rightarrow u$ em X , tem-se que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_k|^{q-2}u_k\varphi dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^{q-2}u\varphi dx.$$

A comprovação deste fato é feita utilizando o Teorema da Convergência Dominada, em conjunto com a hipótese (a_2) . Os detalhes foram omitidos. Analogamente, temos que o funcional J_4 possui derivada de Gâteaux contínua. Portanto, reunindo todas as informações acima, concluimos que o funcional J é de classe $C^1(X; \mathbb{R})$ para todo $\lambda > 0$. \square

Gostaríamos de salientar que a regularidade dos termos do funcional energia J , definidos nos Capítulos 2 e 3, segue exatamente as mesmas ideias discutidas na Proposição B.1, das quais optamos por omitir detalhes. É sabido que, em ambos os capítulos, o funcional energia J associado aos problemas (\mathcal{P}_θ) ou (\mathcal{P}_c) é de classe $C^2(X; \mathbb{R})$ para todo $\lambda, \theta > 0$. Vale ressaltar que, no Capítulo 2, o potencial V pode alterar seu sinal, e isso deve ser considerado neste contexto.

Proposição B.2 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) e (V_1) . Seja o funcional $J_5 : X \rightarrow \mathbb{R}$*

definido por

$$J_5(u) = \frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx.$$

Então, o funcional J_5 é de classe $C^1(X; \mathbb{R})$, onde $\lambda > 0$, $q \in (2, 2^*)$ e $a \in L^{\tilde{r}}(\mathbb{R}^N)$.

Prova. Primeiramente, afirmamos que o funcional J_5 está bem definido em X . De fato, utilizando a desigualdade de Hölder com os expoentes $\tilde{r} = \frac{2^*}{2^* - q} > 1$ e $\frac{2^*}{q} > 1$, a hipótese (A_2) e a imersão contínua $X \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ para cada $s \in [2, 2^*]$, encontramos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx \leq \|a\|_{\tilde{r}} \|u\|_{2^*}^q \leq S_{2^*}^{-\frac{q}{2}} \|a\|_{\tilde{r}} \|u\|^q < +\infty.$$

Isso significa que o funcional J_5 está bem definido em X . No que segue, sabemos que a derivada de Gâteaux de J_5 é dada por

$$J_5'(u)\varphi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{J_5(u + h\varphi) - J_5(u)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)(|u + h\varphi|^q - |u|^q) dx \right].$$

Aqui, defina uma função auxiliar $\omega_{\lambda_1} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\omega_{\lambda_1}(h) = |u + h\varphi|^q$. É fácil perceber que $\omega_{\lambda_1} \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $\omega_{\lambda_1}(0) = |u|^q$. Como consequência, aplicando a Desigualdade do Valor Médio, temos que existem valores $0 < |\rho| < |h| < 1$ tais que

$$\frac{\omega_{\lambda_1}(h) - \omega_{\lambda_1}(0)}{h} = \omega_{\lambda_1}'(\rho).$$

Dessa maneira, usando os mesmos argumentos discutidos na Proposição B.1, segue-se que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|u + h\varphi|^q - |u|^q}{h} = \omega_{\lambda_1}'(0),$$

com

$$\omega_{\lambda_1}'(\rho) = q|u + \rho\varphi|^{q-1} \frac{(u + \rho\varphi)}{|u + \rho\varphi|} \varphi = q|u + \rho\varphi|^{q-2} (u + \rho\varphi)\varphi$$

e $\omega_{\lambda_1}'(0) = q|u|^{q-2}u\varphi$. Além disso, não é difícil provar utilizando a desigualdade triangular que

$$\begin{aligned} \left| \frac{|u + h\varphi|^q - |u|^q}{h} \right| &= q|u + \rho\varphi|^{q-1} |\varphi| \\ &\leq q(|u| + |\rho||\varphi|)^{q-1} |\varphi| \\ &< \mathcal{C}_3(|u|^{q-1} |\varphi| + |\varphi|^q), \end{aligned}$$

onde \mathcal{C}_3 é uma constante positiva. Assim, aplicando a desigualdade de Hölder com os expoentes q e $\frac{q}{q-1}$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q-1} |\varphi| dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|u\|_q^{q-1} \|\varphi\|_q. \end{aligned}$$

Como o espaço X está continuamente imerso em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para cada $s \in [2, 2^*]$, inferimos que $|u|^{q-1} |\varphi| \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $|\varphi|^q \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Como produto, o Teorema da Convergência Dominada implica que

$$J'_5(u)\varphi = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |u|^{q-2} u \varphi dx, \quad \varphi \in X.$$

Neste estágio, dada uma sequência $(u_k) \in X$ de tal maneira que $u_k \rightarrow u$ em X , afirmamos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |u_k|^{q-2} u_k \varphi dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |u|^{q-2} u \varphi dx. \quad (\text{B-2})$$

Com efeito, a desigualdade de Hölder com expoentes $\tilde{r} = \frac{2^*}{2^*-q}$, $\frac{2^*}{q-1}$ e 2^* , a hipótese (A_2) , a imersão contínua $X \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ para cada $s \in [2, 2^*]$ e o fato de que $u_k \rightarrow u$ em X , asseguram que

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |u_k - u|^{q-2} (u_k - u) \varphi dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |u_k - u|^{q-1} |\varphi| dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |a|^{\tilde{r}} dx \right)^{\frac{1}{\tilde{r}}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_k - u|^{2^*} dx \right)^{\frac{q-1}{2^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \\ &= \|a\|_{\tilde{r}} \|u_k - u\|_{2^*}^{q-1} \|\varphi\|_{2^*} \\ &\leq S_{2^*}^{-\frac{q-1}{2}} S_{2^*}^{-\frac{2^*}{2}} \|a\|_{\tilde{r}} \|u_k - u\|^{q-1} \|\varphi\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $k \rightarrow +\infty$. A última desigualdade, em conjunto com o Teorema da Convergência Dominada, garante a veracidade da equação (B-2). Portanto, demonstramos que J'_5 é sequencialmente contínuo, concluindo assim a prova da proposição. \square

Resultados auxiliares empregados nos Capítulos 1, 2 e 3

Neste apêndice, apresentam-se resultados auxiliares que foram utilizados nos Capítulos 1, 2 e 3. O primeiro desses resultados desempenha um papel fundamental na demonstração da Proposição C.2 a seguir.

Proposição C.1 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (b_2) , (v_1) - (v_3) , $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. Então, temos as seguintes identidades:*

$$(i) \ c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} := \inf_{z \in U_n} \left[\sup_{t \in [0, t_n(z)]} J_{\lambda,\theta}(tz) \right];$$

$$(ii) \ c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+} := \inf_{z \in U_n} \left[\inf_{t \in [t_n(z), +\infty)} J_{\lambda,\theta}(tz) \right].$$

Prova. É fácil verificar pela Proposição 2.17 que existem únicos pontos

$$0 < t^{n,-}(z) < t_n(z) < t^{n,+}(z) < +\infty$$

tais que $t^{n,-}(z)z \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-$ e $t^{n,+}(z)z \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+$, onde $z \in U_n := \{z \in X \setminus \{0\} : \lambda > S_n(z)\}$ é uma função fixa. Esse fato implica que

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} = \inf_{u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} J_{\lambda,\theta}(u) \leq J_{\lambda,\theta}(t^{n,-}(z)z) = \sup_{t \in [0, t_n(z)]} J_{\lambda,\theta}(tz), \quad z \in U_n.$$

Dessa forma, obtemos que

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} = \inf_{u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} J_{\lambda,\theta}(u) \leq \inf_{z \in U_n} \left[\sup_{t \in [0, t_n(z)]} J_{\lambda,\theta}(tz) \right].$$

Por outro lado, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma função $z_\varepsilon \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-$ tal que

$$\inf_{u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} J_{\lambda,\theta}(u) \leq J_{\lambda,\theta}(z_\varepsilon) \leq \inf_{u \in \mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} J_{\lambda,\theta}(u) + \varepsilon.$$

Além disso, sabemos que

$$J_{\lambda,\theta}(z_\varepsilon) = \sup_{t \in [0, t_n(z_\varepsilon)]} J_{\lambda,\theta}(tz_\varepsilon).$$

A última equação assegura que

$$\inf_{z \in U_n} \left[\sup_{t \in [0, t_n(z)]} J_{\lambda, \theta}(tz) \right] \leq \sup_{t \in [0, t_n(z_\varepsilon)]} J_{\lambda, \theta}(tz_\varepsilon) \leq \inf_{u \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-} J_{\lambda, \theta}(u) + \varepsilon.$$

Logo, como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-} = \inf_{u \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-} J_{\lambda, \theta}(u) \geq \inf_{z \in U_n} \left[\sup_{t \in [0, t_n(z)]} J_{\lambda, \theta}(tz) \right].$$

Isso completa a prova do item (i). A demonstração do item (ii) segue exatamente as mesmas ideias discutidas anteriormente. \square

A próxima proposição apresenta algumas estimativas precisas sobre os níveis de energia $c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-}$ e $c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+}$. Essas estimativas são cruciais para podermos aplicar diretamente o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange.

Proposição C.2 *Suponha (m_1) , (a_1) , (a_2) , (b_1) , (b_2) e (v_1) - (v_3) . Então as funções $c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-}, c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+} : (\lambda^*, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes propriedades:*

- (i) *As funções $(\lambda, \theta) \mapsto c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-}$ e $(\lambda, \theta) \mapsto c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+}$ são contínuas;*
- (ii) *As funções $c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-}$ e $c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+}$ são decrescentes em $\lambda > 0$, isto é,*

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta}^-} \geq c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-} \quad e \quad c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta}^+} \geq c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+},$$

para cada $\lambda > \lambda_e > 0$ e $\theta > 0$;

- (iii) *As funções $c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-}$ e $c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+}$ são crescentes em $\theta > 0$, isto é,*

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta_e}^-} \geq c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-} \quad e \quad c_{\mathcal{N}_{\theta_e, \lambda}^+} \geq c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+},$$

para cada $\lambda \in (\lambda^, +\infty)$ e $\theta \in (0, \theta_e)$;*

- (iv) *Existem constantes $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1 > 0$ que não dependem de λ de modo que*

$$0 < c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-} \leq \mathcal{C} \quad e \quad c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^+} \leq \mathcal{C}_1,$$

para cada $\lambda > \lambda_e > 0$ e $\theta > 0$.

Prova. Inicialmente, afirmamos que a função $(\lambda, \theta) \mapsto c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-}$ é sequencialmente contínua. Com efeito, considere seqüências $(\lambda_k) \in \mathbb{R}$ e $(\theta_k) \in \mathbb{R}$ de tal modo que $\lambda_k \rightarrow \lambda$ e $\theta_k \rightarrow \theta$, onde $\lambda \in [\lambda^*, +\infty)$ e $\theta > 0$. É sabido pelo Lema 2.34 que $c_{\mathcal{N}_{\lambda_k, \theta_k}^-}$ é atingido por uma função $(u_k) \in \mathcal{N}_{\lambda_k, \theta_k}^- \cup \mathcal{N}_{\lambda_k, \theta_k}^0$. Em particular, obtemos que

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda_k, \theta_k}^-} = J_{\lambda_k, \theta_k}(u_k) \leq J_{\lambda_k, \theta_k}(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{N}_{\lambda_k, \theta_k}^- \cup \mathcal{N}_{\lambda_k, \theta_k}^0, \quad (\text{C-1})$$

com

$$J'_{\lambda_k, \theta_k}(u_k)u_k = 0 \quad e \quad J''_{\lambda_k, \theta_k}(u_k)(u_k, u_k) \leq 0. \quad (\text{C-2})$$

Dessa forma, como o funcional energia J_{λ_k, θ_k} é coercivo sobre $\mathcal{N}_{\lambda_k, \theta_k}^- \cup \mathcal{N}_{\lambda_k, \theta_k}^0$, segue que a sequência (u_k) é limitada em X . Isso significa que existe $u \in X$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ em X . Note que $u \neq 0$, veja a Observação 2.26. Consequentemente, usando os mesmos cálculos discutidos no Lema 2.34, tem-se que $u_k \rightarrow u$ fortemente em X . A última condição, juntamente com a estimativa (C-2), garante que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} J'_{\lambda_k, \theta_k}(u_k)u_k = J'_{\lambda, \theta}(u)u = 0$$

e

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} J''_{\lambda_k, \theta_k}(u_k)(u_k, u_k) = J''_{\lambda, \theta}(u)(u, u) \leq 0.$$

Esse fato mostra que $u \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^- \cup \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0$. Devido a estimativa (C-1), inferimos que

$$J_{\lambda, \theta}(u) \leq J_{\lambda, \theta}(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^- \cup \mathcal{N}_{\lambda, \theta}^0.$$

Portanto, como $u_k \rightarrow u$ em X , temos que

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-} = J_{\lambda, \theta}(u) = \lim_{k \rightarrow +\infty} J_{\lambda_k, \theta_k}(u_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} c_{\mathcal{N}_{\lambda_k, \theta_k}^-}.$$

Isso conclui a prova do item (i). Sabemos pela Proposição C.1 que

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-} &= \inf_{z \in U_n} \left[\sup_{t \in [0, t_n(z)]} J_{\lambda, \theta}(tz) \right] \leq \sup_{t \in [0, t_n(z)]} J_{\lambda, \theta}(tz) \\ &= J_{\lambda, \theta}(t_{\lambda, \theta}^{n, -}(z)) \\ &\leq J_{\lambda_e, \theta}(t_{\lambda, \theta}^{n, -}(z)), \end{aligned} \quad (\text{C-3})$$

para todo $z \in U_n$, onde $U_n := \{z \in X \setminus \{0\} : \lambda > S_n(z)\}$. Observe que, para cada $\lambda > \lambda_e > 0$, mencionamos que $U_{\lambda_e, \theta} \subset U_n$ e

$$0 < t_{\lambda, \theta}^{n, -}(z) < t_{\lambda_e, \theta}^{n, -}(z) < t_n(z) < t_{\lambda_e, \theta}^{n, +}(z) < t_{\lambda, \theta}^{n, +}(z) < +\infty.$$

Não é difícil checar que $z \mapsto t_n(z)$ é independente de $\lambda > 0$. Dessa maneira, tomando $t = t_{\lambda, \theta}^{n, -}(z)$ e utilizando a desigualdade (C-3), encontramos

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-} \leq \sup_{t \in [0, t_n(z)]} J_{\lambda_e, \theta}(tz), \quad z \in U_n.$$

A última desigualdade assegura que

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{N}_{\lambda, \theta}^-} &\leq \inf_{z \in U_n} \left[\sup_{t \in [0, t_n(z)]} J_{\lambda_e, \theta}(tz) \right] \\ &\leq \inf_{z \in U_{\lambda_e, \theta}} \left[\sup_{t \in [0, t_n(z)]} J_{\lambda_e, \theta}(tz) \right] = c_{\mathcal{N}_{\lambda_e, \theta}^-}. \end{aligned}$$

Logo, obtemos que $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} \leq c_{\mathcal{N}_{\lambda_e,\theta}^-}$ para cada $\lambda > \lambda_e$ e $\theta > 0$. Isso finaliza a prova do item (ii). Agora, assumamos que $\theta \in (0, \theta_e)$ é satisfeito. Uma consequência imediata da equação (2-7) é:

$$\begin{aligned} S_{n,\theta}(z) &= \frac{\|t_{n,\theta}(z)z\|^2 + \alpha_2 \|\nabla(t_{n,\theta}(z)z)\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta \|t_{n,\theta}(z)z\|_{p,b}^p}{\|t_{n,\theta}(z)z\|_{q,a}^q} \\ &< \frac{\|t_{n,\theta}(z)z\|^2 + \alpha_2 \|\nabla(t_{n,\theta}(z)z)\|_2^{2(\sigma+1)} + \theta_e \|t_{n,\theta}(z)z\|_{p,b}^p}{\|t_{n,\theta}(z)z\|_{q,a}^q} \\ &= S_{n,\theta_e}(z). \end{aligned}$$

Como produto, tem-se que $S_{n,\theta}(z) < S_{n,\theta_e}(z) < \lambda$, para todo $z \in X \setminus \{0\}$. Uma vez que o ponto crítico $t_{n,\theta}(z)$ do funcional $R_{n,\theta}(tz)$ é determinado de forma implícita, inferimos que $t_{n,\theta_e}(z) < t_{n,\theta}(z)$. Consequentemente, a Proposição C.1 afirma que

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} \leq \sup_{t \in [0, t_{n,\theta}(z)]} J_{\lambda,\theta}(tz) = J_{\lambda,\theta}(t_{\lambda,\theta}^{n,-}(z)z) \leq J_{\lambda,\theta_e}(t_{\lambda,\theta_e}^{n,-}(z)z), \quad z \in U_{\lambda,\theta_e}.$$

É importante analisar que $U_{\lambda,\theta_e} \subset U_n$, para cada $\theta \in (0, \theta_e)$ e $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$. Como resultado, inferimos que $0 < t_{\lambda,\theta}^{n,-}(z) \leq t_{\lambda,\theta_e}^{n,-}(z) \leq t_{n,\theta_e}(z) < t_{n,\theta}(z) < +\infty$. Para uma melhor compreensão, consulte a Figura C.1. Aqui, estamos usando o fato de que $\theta \mapsto S_{n,\theta}(z)$ é uma função crescente e $\theta \mapsto t_{n,\theta}(z)$ é uma função decrescente, para cada $z \in X \setminus \{0\}$. No que segue, tomando $t = t_{\lambda,\theta}^{n,-}(z) \leq t_{n,\theta_e}(z)$, temos

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} \leq \sup_{t \in [0, t_{n,\theta_e}(z)]} J_{\lambda,\theta_e}(tz), \quad z \in U_{\lambda,\theta_e}.$$

Consequentemente, inferimos que

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} &\leq \inf_{z \in U_{\lambda,\theta_e}} \left[\sup_{t \in [0, t_{n,\theta_e}(z)]} J_{\lambda,\theta_e}(tz) \right] \\ &\leq \inf_{z \in U_{\lambda,\theta_e}} \left[\sup_{t \in [0, t_{n,\theta}(z)]} J_{\lambda,\theta_e}(tz) \right] = c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta_e}^-}. \end{aligned}$$

Portanto, $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} \leq c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta_e}^-}$ para cada $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e $\theta \in (0, \theta_e)$, e a prova do item (iii) está completa. Para concluir, a demonstração do item (iv) é feita utilizando precisamente o item (ii), onde

$$c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^-} \leq c_{\mathcal{N}_{\lambda_e,\theta}^-} = \inf_{z \in \mathcal{N}_{\lambda_e,\theta}^-} J_{\lambda,\theta}(z) = \mathcal{C} < +\infty,$$

para cada $\lambda > \lambda_e > 0$. Enfatizamos que a demonstração dos itens (i), (ii), (iii) e (iv) para a função $c_{\mathcal{N}_{\lambda,\theta}^+}$ segue os mesmos princípios discutidos acima. \square

É relevante destacar que as Figuras C.1 e C.2 exemplificam algumas propriedades estabelecidas na demonstração da Proposição C.2.

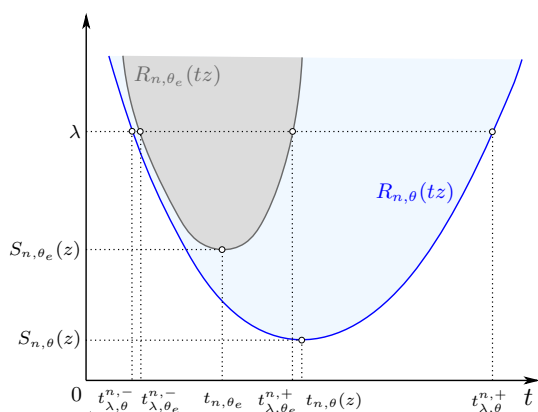


Figura C.1: $R_{n,\theta}(tz) < R_{n,\theta_e}(tz)$.

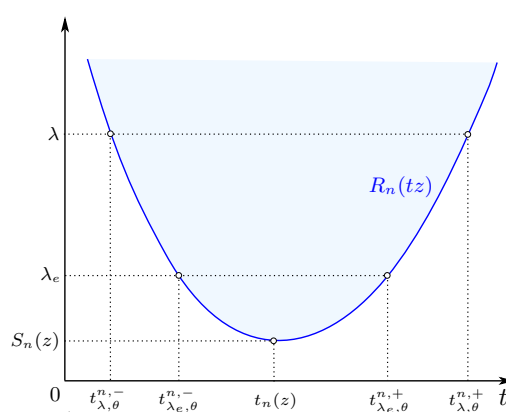


Figura C.2: O caso $\lambda_e < \lambda$.

Observe que, na Proposição C.2, foram adotadas as hipóteses estabelecidas no Capítulo 2. No entanto, substituindo essas hipóteses pelas apresentadas no Capítulo 3, obtemos os mesmos resultados mencionados anteriormente.

Exemplo C.3 Apresentamos aqui um exemplo padrão de uma função a que é Hölder contínua e que satisfaz a hipótese (a_2) , conforme definido no Capítulo 1. Nesse caso, considere uma **função bump** $a : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$a(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

É facilmente demonstrável que essa função é suave, pertencendo à classe $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, contudo não é analítica. Além disso, a função a é de classe $C^1(\mathbb{R}^N)$, Hölder contínua e pertence ao espaço $L^r(\mathbb{R}^N)$ para todo $r \geq 1$.

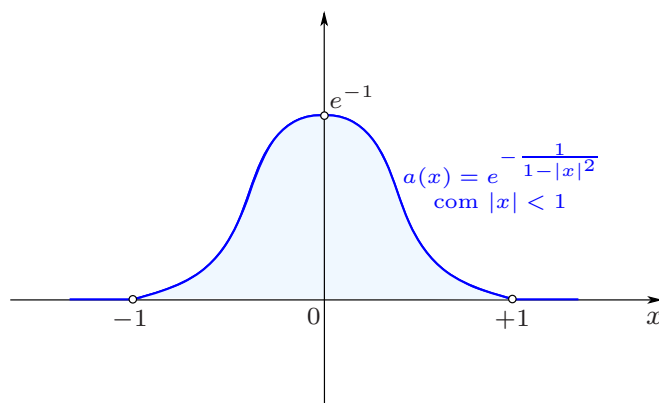


Figura C.3: Geometria da função a .

Identidade de Pohozaev

Neste apêndice, apresentamos um resultado clássico: a renomada *Identidade de Pohozaev*. Essa identidade, derivada do trabalho [65], foi fundamental para alcançarmos resultados que estabelecem a não existência de soluções não triviais para o problema (\mathcal{P}_c) , conforme afirmado no Teorema 3.35 do Capítulo 3.

Lema D.1 *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) , (V_1) e $\mathcal{G} \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$. Então existe uma sequência $(R_k) \subset \mathbb{R}$ com $R_k \rightarrow +\infty$ de tal maneira que*

$$R_k \int_{\partial B_{R_k}(0)} |\mathcal{G}(\tau)| d\tau \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow +\infty. \quad (\text{D-1})$$

Prova. Suponha por contradição que (D-1) não ocorre. Nesse caso, existem valores $\delta_0, R_0 > 0$ tais que

$$R \int_{\partial B_R(0)} |\mathcal{G}(\tau)| d\tau > \delta_0, \quad R \geq R_0. \quad (\text{D-2})$$

Dessa forma, a estimativa (D-2) e as coordenadas polares asseguram que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{G}(x)| dx &= \int_0^{+\infty} R^{N-2} \left(\int_{\partial B_R(0)} |\mathcal{G}(\tau)| d\tau \right) R dR \\ &\geq \int_{R_0}^{+\infty} R^{N-2} \left(R \int_{\partial B_R(0)} |\mathcal{G}(\tau)| d\tau \right) dR \\ &\geq \int_{R_0}^{+\infty} R^{N-2} \delta_0 dR \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Portanto, a função $\mathcal{G} \notin L^1(\mathbb{R}^N)$, o que é uma contradição. Isso completa a prova do lema. \square

Teorema D.2 (*Identidade de Pohozaev*) *Suponha (M_1) , (A_1) , (A_2) e (V_1) . Assuma que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca para o problema (\mathcal{P}_c) com o potencial $V \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ satisfazendo*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x \cdot \nabla V(x)| u^2 dx < +\infty,$$

onde $h \in C(\mathbb{R})$ e $\mathcal{H}(s) := \int_0^s h(\tau) d\tau$. Então u satisfaz a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} \frac{N-2}{2} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \alpha_1 |\nabla u|^2 dx + \alpha_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\sigma+1} \right] + \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx \\ + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (x \cdot \nabla V(x)) u^2 dx = N \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}(u) dx. \end{aligned}$$

Prova. Uma vez que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca para o problema (\mathcal{P}_c) , temos que u satisfaz a seguinte equação: $-m(\|\nabla u\|_2^2) \Delta u + V(x)u = h(u)$ em \mathbb{R}^N , onde $h(u) := \lambda a(x)|u|^{q-2}u - \theta|u|^{2^*-2}u$. Desse modo, deduzimos que

$$-(x \cdot \nabla u) (m(\|\nabla u\|_2^2) \Delta u + V(x)u) = (x \cdot \nabla u) h(u) \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Não é difícil ver que

$$\nabla \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 \right) = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Calculando o divergente, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nabla u(x \cdot \nabla u)) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \sum_{j=1}^N x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \\ &= \Delta u(x \cdot \nabla u) + |\nabla u|^2 + \left(x \cdot \nabla \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Isso significa que

$$\Delta u(x \cdot \nabla u) = \operatorname{div}(\nabla u(x \cdot \nabla u)) - |\nabla u|^2 - \left(x \cdot \nabla \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right) \right). \quad (\text{D-3})$$

Além disso, note que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(x \cdot \frac{|\nabla u|^2}{2} \right) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^N x_j \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 \right) \\ &= \frac{N}{2} |\nabla u|^2 + \left(x \cdot \nabla \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{D-4})$$

Assim, ao associarmos as equações (D-3) e (D-4), chegamos à conclusão de que

$$\Delta u(x \cdot \nabla u) = \operatorname{div} \left(\nabla u(x \cdot \nabla u) - \left(x \cdot \frac{|\nabla u|^2}{2} \right) \right) + \frac{N-2}{2} |\nabla u|^2.$$

Aplicando o Teorema da Divergência, inferimos que

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} \Delta u(x \cdot \nabla u) dx &= \int_{\partial B_R(0)} \left(\nabla u(x \cdot \nabla u) - \left(x \cdot \frac{|\nabla u|^2}{2} \right) \right) \phi dS_x \\ &\quad + \frac{N-2}{2} \int_{B_R(0)} |\nabla u|^2 dx, \end{aligned}$$

tal que $\phi(x)$ é o vetor normal de $\partial B_R(0)$ com $\phi(x) = \frac{x}{R}$, e dS_x é a medida $(N-1)$ -dimensional de $\partial B_R(0)$. Nesta etapa, calculando novamente o divergente, obtemos que

$$\operatorname{div} \left(x \cdot \frac{1}{2} V(x) u^2 \right) = \frac{N}{2} V(x) u^2 + \frac{1}{2} (x \cdot \nabla V(x)) u^2 + (x \cdot \nabla u) V(x) u.$$

Assim, usando o Teorema da Divergência, mencionamos que

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} (x \cdot \nabla u) V(x) u dx &= \int_{\partial B_R(0)} \left(x \cdot \frac{1}{2} V(x) u^2 \right) \phi dS_x - \frac{N}{2} \int_{B_R(0)} V(x) u^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{B_R(0)} (x \cdot \nabla V(x)) u^2 dx. \end{aligned}$$

Adicionalmente, por meio de um cálculo simples, podemos verificar que

$$\operatorname{div}(x \cdot \mathcal{H}(u)) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (x_i \mathcal{H}(u)) = N \mathcal{H}(u) + (x \cdot \nabla u) h(u),$$

onde $\mathcal{H}(u) = \int_0^u h(\tau) d\tau$. Consequentemente, segue-se pelo Teorema da Divergência que

$$\int_{B_R(0)} (x \cdot \nabla u) h(u) dx = \int_{\partial B_R(0)} (x \cdot \mathcal{H}(u)) \phi dS_x - N \int_{B_R(0)} \mathcal{H}(u) dx.$$

Sob estas condições, concluímos que

$$\begin{aligned} &\int_{\partial B_R(0)} m(\|\nabla u\|_2^2) \left(\nabla u(x \cdot \nabla u) - \left(x \cdot \frac{|\nabla u|^2}{2} \right) \right) \phi dS_x \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\partial B_R(0)} V(x) u^2 (x \cdot \phi) dS_x - \int_{\partial B_R(0)} \mathcal{H}(u) (x \cdot \phi) dS_x \\ &= \frac{N-2}{2} \left[\int_{B_R(0)} \alpha_1 |\nabla u|^2 dx + \alpha_2 \left(\int_{B_R(0)} |\nabla u|^2 dx \right)^{\sigma+1} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \int_{B_R(0)} (NV(x) + (x \cdot \nabla V(x))) u^2 dx - N \int_{B_R(0)} \mathcal{H}(u) dx. \quad (\text{D-5}) \end{aligned}$$

Nesse caso, o Lema [D.1](#) assegura a existência de uma sequência $(R_k) \subset \mathbb{R}$ tal que

$R_k \rightarrow +\infty$ e

$$R_k \int_{\partial B_{R_k}(0)} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2 + |\mathcal{H}(u)|) dS_x \rightarrow 0, \quad (\text{D-6})$$

quando $k \rightarrow +\infty$. A última estimativa nos fornece que

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_{R_k}(0)} |\nabla u|^2 dS_x &\rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty, \\ \int_{\partial B_{R_k}(0)} V(x)u^2 dS_x &\rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty, \\ \int_{\partial B_{R_k}(0)} |\mathcal{H}(u)| dS_x &\rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Essas afirmações, juntamente com a desigualdade de Cauchy-Schwarz, mostram que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_{R_k}(0)} \left(\nabla u(x \cdot \nabla u) - \left(x \cdot \frac{|\nabla u|^2}{2} \right) \right) \phi dS_x \right| &\leq 2 \int_{\partial B_{R_k}(0)} |\nabla u|^2 dS_x \rightarrow 0, \\ \left| \int_{\partial B_{R_k}(0)} V(x)u^2(x \cdot \phi) dS_x \right| &\leq \int_{\partial B_{R_k}(0)} V(x)u^2 dS_x \rightarrow 0, \\ \left| \int_{\partial B_{R_k}(0)} \mathcal{H}(u)(x \cdot \phi) dS_x \right| &\leq \int_{\partial B_{R_k}(0)} |\mathcal{H}(u)| dS_x \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $k \rightarrow +\infty$. Por outro lado, é fácil provar usando a equação (D-5) que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B_{R_k}(0)} \alpha_1 |\nabla u|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \alpha_1 |\nabla u|^2 dx, \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_2 \left(\int_{B_{R_k}(0)} |\nabla u|^2 dx \right)^{\sigma+1} &= \alpha_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\sigma+1}, \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B_{R_k}(0)} (NV(x) + (x \cdot \nabla V(x)))u^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (NV(x) + (x \cdot \nabla V(x)))u^2 dx, \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B_{R_k}(0)} \mathcal{H}(u) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}(u) dx. \end{aligned}$$

Portanto, tomando $R = R_k$ na equação (D-5) e fazendo $k \rightarrow +\infty$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{N-2}{2} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \alpha_1 |\nabla u|^2 dx + \alpha_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\sigma+1} \right] &+ \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (x \cdot \nabla V(x))u^2 dx = N \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}(u) dx. \end{aligned}$$

Isso finaliza a demonstração do teorema. \square

Referências Bibliográficas

- [1] R. ADAMS, *Sobolev Spaces*, Pure and applied mathematics. Acad. Press., 1975.
- [2] ADIMURTHY; F. PACELLA; L. YADAVA, *On the number of positive solutions of some semilinear Dirichlet problems in a ball*, Diff. Int. Equat., 10 (1997) 1157-1170.
- [3] S. AGMON; A. DOUGLIS; L. NIRENBERG, *Estimative near the boundary for solutions of elliptic P.D.E. satisfying a general boundary value condition I*, Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959) 623-727.
- [4] C. O. ALVES; F. J. S. A. CORRÊA; T. F. MA, *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*, C. M. Appl., 49 (2005) 85-93.
- [5] C. O. ALVES; G. M. FIGUEIREDO, *Nonlinear perturbations of a periodic Kirchhoff equation in \mathbb{R}^N* , Non. Anal., 75 (2012) 2750-2759.
- [6] A. AMBROSETTI; D. ARCOYA, *Positive Solutions of Elliptic Kirchhoff Equations*, Adv. Nonlin. Stud., 17 (2016) 3-15.
- [7] A. AMBROSETTI; G. J. AZORERO; I. PERAL, *Multiplicity results for some nonlinear elliptic equations*, J. Funct. Anal., 137 (1996) 219-242.
- [8] A. AMBROSETTI; H. BREZIS; G. CERAMI, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, Jour. Funct. Anal., 122 (1994) 519-543.
- [9] A. AMBROSETTI; P. H. RABINOWITZ, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, Jour. Funct. Anal., 14 (1973) 349-381.
- [10] J. P. G. AZORERO; I. PERAL; J. J. MANFREDI, *Sobolev versus Hölder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations*, Commun. Cont. Math., (2000) 385-404.
- [11] M. BADIALE; E. SERRA, *Semilinear Elliptic Equations for Beginners: Existence Results via the Variational Approach*, Univer. Springer, London, 2011.

- [12] T. BARTSCH; Z. Q. WANG, *Existence and multiplicity results for some super-linear elliptic problems on \mathbb{R}^N* , C. Part. Diff. Eq., 20 (1995) 1725-1741.
- [13] T. BARTSCH; M. WILLEM, *On an elliptic equation with concave and convex nonlinearities*, Proc. Amer. Math. Soc., 123 (1995) 3555-3561.
- [14] K. J. BROWN; T. F. WU, *A fibering map approach to a semilinear elliptic boundary value problem*, Elec. J. Diff. Equat., 69 (2007) 1-9.
- [15] K. J. BROWN; T. F. WU, *A fibering map approach to a potential operator equation and its applications*, Diff. Int. Equat., 22 (2009) 1097-1114.
- [16] H. BRÉZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York: Springer, 2011.
- [17] G. F. CARRIER, *On the nonlinear vibration problem of the elastic string*, Quart. Appl. Math., 3 (1945) 157-165.
- [18] M. L. M. CARVALHO; E. D. SILVA; C. GOULART, *Choquard Equations via Nonlinear Rayleigh Quotient for concave-convex Nonlinearities*, Comm. P. Appl. Anal., 20 (2021) 3445-3479.
- [19] M. L. M. CARVALHO; Y. IL'YASOV; C. A. SANTOS, *Existence of S-shaped type bifurcation curve with dual cusp catastrophe via variational methods*, Jour. Diff. Equat., 334 (2022) 256-279.
- [20] M. L. M. CARVALHO; Y. IL'YASOV; C. A. SANTOS, *Separating of critical points on the Nehari manifold via the nonlinear generalized Rayleigh quotients*, Topol. Meth. Non. Anal., 58 (2021) 453-480.
- [21] G. CHE; TSUNG-FANG WU, *Three positive solutions for Kirchhoff problems with steep potential well and concave-convex nonlinearities*, Applied Mathematics Letters, 121 (2021) 107348.
- [22] B. T. CHENG; X. WU, *Existence results of positive solutions of Kirchhoff problems*, Non. Anal., 71 (2009) 4883-4892.
- [23] C. CHEN; YUEH-CHENG KUO; TSUNG-FANG WU, *The Nehari manifold for a Kirchhoff type problem involving sign-changing weight functions*, Jour. Diff. Equat., 250 (2011) 1876-1908.
- [24] P. DRÁBEK; S. I. POHOZAEV, *Positive solutions for the p -Laplacian: application of the fibering method*, P. R. S. Edin. Sect. A., 127 (1997) 703-726.

- [25] P. DRÁBEK; J. MILOTA, *Methods of Nonlinear Analysis*, B. Lehrbücher, 2013.
- [26] G. EISLEY, *Nonlinear vibrations of beams and rectangular plates*, Z. A. Math. Phys., 15 (1964) 167-175.
- [27] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, Amer Mathematical Society, 1998.
- [28] H. FAN, *Multiple positive solutions for a class of Kirchhoff type problems involving critical Sobolev exponents*, J. Math. Anal. Appl., 431 (2015) 150-168.
- [29] F. FARACI; C. FARKAS, *On a critical Kirchhoff-type problem*, Non. Anal., 192 (2020) 111679.
- [30] F. FARACI; K. SILVA, *On the Brezis–Nirenberg problem for a Kirchhoff type equation in high dimension*, Calc. Var., (2021).
- [31] M. C. FERREIRA; P. UBILLA, *A Critical Concave–Convex Kirchhoff–Type Equation in \mathbb{R}^4 Involving Potentials Which May Vanish at Infinity*, Ann. Henri Poincaré, 23 (2022) 25-47.
- [32] G. M. FIGUEIREDO, *Existence of a positive solution for Kirchhoff problem type with critical growth via truncation argument*, J. M. A. Appl., 401 (2013) 706-713.
- [33] G. M. FIGUEIREDO; E. D. LIMA; E. D. SILVA, *Positive solutions for Kirchhoff elliptic problems via Rayleigh quotient in the whole \mathbb{R}^N* , Jour. Math. Anal. Appl., 518 (2023) 126651.
- [34] G. M. FIGUEIREDO; H. R. QUOIRIN; K. SILVA, *Ground states of elliptic problems over cones*, Calc. Var., 60 (2021) 189.
- [35] G. M. FIGUEIREDO; J. R. SANTOS JUNIOR, *Multiplicity of solutions for a Kirchhoff equation with subcritical or critical growth*, Diff. Int. Equat., 25 (2012) 853-868.
- [36] M. F. FURTADO; L. OLIVEIRA; J. P. SILVA, *Existence and multiplicity of solutions for a Kirchhoff system with critical growth*, A. Fenn. Math., 46 (2021).
- [37] M. F. FURTADO; L. OLIVEIRA; J. P. SILVA, *Multiple solutions for a Kirchhoff equation with critical growth*, A. Math. Phys., 70 (2019).
- [38] L. GAO; Z. TAN, *Normalized Solutions for Two Classes of Kirchhoff Problems with Exponential Critical Growth*, Bull. Mal. Math. Sci. Soc., 47 (2024).
- [39] D. GILBARG; N. S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

- [40] J. HUANG; C. CHEN; Z. XIU, *Existence and multiplicity results for a p -Kirchhoff equation with a concave-convex term*, A. M. Lett., (2013) 1070-1075.
- [41] Y. HUANG; TSUNG-FANG WU; Y. WU, *Multiple positive solutions for a class of concave-convex elliptic problems in \mathbb{R}^N involving sign-changing weight*, Commun. Contemp. Math., 2015.
- [42] Y. IL'YASOV, *On extreme values of Nehari manifold method via nonlinear Rayleigh's quotient*, Topol. Meth. Non. Anal., 49 (2017) 683-714.
- [43] Y. IL'YASOV, *On nonlocal existence results for elliptic equations with convex-concave nonlinearities*, Nonl. Anal. Th. Meth. Appl., 61 (2005) 211-236.
- [44] G. KIRCHHOFF, *Mechanik*, Teubner, Leipzig, 1883.
- [45] Y. LI; F. LI; J. SHI, *Existence of positive solutions to Kirchhoff type problems with zero mass*, J. Math. Anal. Appl., 410 (2014) 361-374.
- [46] G. LI; H. YE, *Existence of positive solutions for nonlinear Kirchhoff type problems in \mathbb{R}^3 with critical Sobolev exponent*, Math. Meth. Appl. Sci., 37 (2014) 2570-2584.
- [47] HONG-YING LI; JIA-FENG LIAO, *Existence and multiplicity of solutions for a superlinear Kirchhoff-type equations with critical Sobolev exponent in \mathbb{R}^N* , Comp. Math. Appl., 72 (2016) 2900-2907.
- [48] J. LIMACO; L. A. MEDEIROS, *Kirchhoff-Carrier elastic strings in noncylindrical domains*, Port. Mathematica, 14 (1999) 464-500.
- [49] T. F. MA, *Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type*, Non. Anal., 63 (2005) 1967-1977.
- [50] O. H. MIYAGAKI; L. C. PAES-LEME; B. M. RODRIGUES, *Multiplicity of positive solutions for the Kirchhoff-type equations with critical exponent in \mathbb{R}^N* , Comp. Math. Appl., 75 (2018) 3201-3212.
- [51] D. NAIMEN, *On the Brezis-Nirenberg Problem with a Kirchhoff Type Perturbation*, A. Nonl. Stud., 15 (2015) 135-156.
- [52] D. NAIMEN, *Positive solutions of Kirchhoff type elliptic equations involving a critical Sobolev exponent*, Non. Diff. Equat. Appl., 21 (2014) 885-914.
- [53] D. NAIMEN, *The critical problem of Kirchhoff type equations in dimension four*, J. Diff. Equat., 257 (2014) 1168-1193.

- [54] D. NAIMEN; M. SHIBATA, *Two positive solutions for the Kirchhoff type elliptic problem with critical nonlinearity in high dimension*, N. Anal., (2019) 187-208.
- [55] Z. NEHARI, *Characteristic values associated with a class of non-linear second-order differential equations*, Acta. Math., 105 (1961) 141-175.
- [56] Z. NEHARI, *On a class of nonlinear second-order differential equations*, T. Amer. Math. Soc., 95 (1960) 101-123.
- [57] J. M. DO Ó; X. HE; P. K. MISHRA, *Fractional Kirchhoff problem with critical indefinite nonlinearity*, Math. Nachr., 292 (2018) 615-632.
- [58] J. M. DO Ó; U. B. SEVERO, *Quasilinear Schrödinger equations involving concave and convex nonlinearities*, C. P. Appl. Anal., 8 (2009) 621-644.
- [59] T. OUYANG, *On the positive solutions of semilinear equations $\Delta u + \lambda u + hu^p = 0$ on compact manifolds*, II, Indiana Univ. Math. J., 40 (1991) 1083-1141. doi:10.1512/iumj.1991.40. 40049.
- [60] K. PERERA; Z. ZHANG, *Nontrivial solutions of Kirchhoff-type problems via the Yang index*, J. Diff. Equat., 221 (2006) 246-255.
- [61] S. I. POKHOZHAEV, *The fibration method for solving nonlinear boundary value problems*, T. M. I. Steklov, 192 (1990) 146-163.
- [62] P. PUCCI AND J. SERRIN, *The maximum principle, in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [63] P. PUCCI; V. D. RADULESCU, *Progress in nonlinear Kirchhoff problems*, Non. Anal., 186 (2019) 1-5.
- [64] J. R. SANTOS; G. SICILIANO, *Positive solutions for a Kirchhoff problem with vanishing nonlocal term*, Jour. Diff. Equat., 265 (2018) 2034-2043.
- [65] U. B. SEVERO; E. GLOSS; E. D. SILVA, *On a class of quasilinear Schrödinger equations with superlinear or asymptotically linear terms*, Jour. Diff. Equat., 263 (2017) 3550-3580.
- [66] K. SILVA, *The bifurcation diagram of an elliptic Kirchhoff-type equation with respect to the stiffness of the material*, Z. Angew. Math. Phys., 70 (2019).
- [67] K. SILVA; A. MACEDO, *Local minimizer over the Nehari manifold for a class of concave-convex problems with sign changing nonlinearity*, Jour. Diff. Equat., 265 (2018) 1894-1921.

- [68] K. SILVA; A. MACEDO, *On the extremal parameters curve of a quasilinear elliptic system of differential equations*, Non. Differ. Equat. Appl., 36 (2018).
- [69] E. D. SILVA; M. L. M. CARVALHO; C. GOULART; M. L. SILVA, *Multiplicity of Solutions for A Semilinear Elliptic Problem Via Generalized Nonlinear Rayleigh Quotient*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, 55 (2024) 1-32.
- [70] E. D. SILVA; M. L. M. CARVALHO; C. GOULART; M. L. SILVA, *Superlinear fractional elliptic problems via the nonlinear Rayleigh quotient with two parameters*, Math. Nachr., (2023).
- [71] B. SIRAKOV, *Existence and multiplicity of solutions of semi-linear elliptic equations in \mathbb{R}^N* , Calc. Var., 11 (2000) 119-142.
- [72] K. C. V. SOUSA, *Problemas elípticos semilineares com não linearidades do tipo côncavo-convexo*, 99 f. Dissertação de Mestrado em Matemática, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2017.
- [73] M. STRUWE, *Variational methods Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [74] J. SUN; TSUNG-FANG WU, *Existence and multiplicity of solutions for an indefinite Kirchhoff-type equation in bounded domains*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, (2016) 435-448.
- [75] M. TANG, *Exact multiplicity for semilinear elliptic Dirichlet problems involving concave and convex nonlinearities*, Proc. R. S. E. Sect., 133 (2003) 705-717.
- [76] P. VILLAGGIO, *Mathematical models for elastic structures*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [77] M. WILLEM, *Minimax Theorems*, Birkhauser Boston, Basel, Berlin, 1996.
- [78] T. F. WU, *On semilinear elliptic equations involving concave-convex nonlinearities and sign-changing weight function*, J. M. Anal. Appl., 318 (2006) 253-270.
- [79] T. F. WU, *Multiplicity results for a semilinear elliptic equation involving sign-changing weight function*, Rocky Mountain J. Math., 39 (2009) 995-1012.
- [80] S. YIJING; L. XING, *Existence of positive solutions for Kirchhoff type problems with critical exponent*, J. Part. Diff. Equat., 25 (2012) 85-96.
- [81] F. ZHOU; M. YANG, *Solutions for a Kirchhoff type problem with critical exponent in \mathbb{R}^N* , J. Math. Anal. Appl., 494 (2021) 124638.

Índice Remissivo

- Ambrosetti-Rabinowitz, 83, 129
- Condições de Bartsch-Wang, 128, 159
- Conjunto \mathcal{E} , 41, 82, 129
- Derivada de Gâteaux, 166–168
- Desigualdade
- de Bernoulli, 74
 - de Cauchy-Schwarz, 178
 - de Gagliardo-Nirenberg, 43, 80, 81
 - de Hölder, 50, 61, 71, 72, 80, 81, 86, 92, 132, 136, 152, 165, 166, 168
 - de Interpolação, 43, 87, 110, 136
 - de Young, 106
 - do Valor Médio, 75, 153, 154, 166, 168
 - triangular, 71, 86, 120, 151, 167, 168
- Esfera unitária de X , 69
- Espaço de Hilbert, 39, 80, 127
- Estimativa de Brezis-Kato, 152
- Estimativas de Schauder, 74, 75, 154
- Fibering map, 42, 43, 85, 130
- Fibras $Q_n(t)$ e $Q_e(t)$, 48, 90, 130
- Funcional energia J , 39, 81, 128
- Funções de Kirchhoff, 38
- Funções Hölder Contínuas, 75, 119, 153, 154, 157
- Fórmula da Co-área, 38, 92, 154, 160, 161, 163, 164
- Identidade de Brezis-Lieb, 50, 132
- Identidade de Pohozaev, 158, 175
- Imersão
- compacta, 85, 86
 - contínua, 43, 85, 128
- Lema de Fatou, 39, 133
- Medida de Lebesgue, 164
- Método “bootstrap”, 71, 119
- Ponto crítico para J , 66, 112, 150
- Princípio do Máximo Forte, 76, 155
- Problema (\mathcal{P}_λ) , 37
- Problema (\mathcal{P}_c) , 126
- Problema (\mathcal{P}_θ) , 78
- Quocientes de Rayleigh, 41, 83, 129
- Sequência
- de Cauchy, 39
 - normalizada, 53, 69, 91, 106, 110, 138
- Solução fraca, 39, 82, 128
- Teorema
- da Convergência Dominada, 50, 58, 86, 110, 111, 132, 167, 169
 - da Divergência, 177
 - da Função Implícita, 48, 55, 60, 94
 - de Agmon-Douglis-Nirenberg, 72–74
 - de Calderón-Zygmund, 153
 - do Valor Intermediário, 59
 - dos Multiplicadores de Lagrange, 67, 116, 126, 146, 171
- Valores Extremais, 41, 57, 83, 95
- Variiedade de Nehari, 40, 42, 43, 82, 128