



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

MAIKON BRUNO ALVES CAMPOS

**Propriedades estatísticas de fótons de
micro-ondas gerados por uma junção túnel**

GOIÂNIA

2022



UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE FÍSICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Maikon Bruno Alves Campos

3. Título do trabalho

Propriedades estatísticas de fótons de micro-ondas gerados por uma junção túnel

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Udson Cabral Mendes, Usuário Externo**, em 01/12/2022, às 10:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Maikon Bruno Alves Campos, Usuário Externo**, em 02/12/2022, às 01:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3373116** e o código CRC **08F1D157**.

Referência: Processo nº 23070.052568/2022-00

SEI nº 3373116

Maikon Bruno Alves Campos

**Propriedades estatísticas de fótons de
micro-ondas gerados por uma junção túnel**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, do Instituto de Física, da Universidade Federal de Goiás (UFG), como requisito para obtenção do título de Mestre. Área de Concentração: Física. Linha de pesquisa: Óptica Quântica

Orientador: Doutor Udson Cabral Mendes

Goiânia
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Campos, Maikon Bruno Alves
Propriedades estatísticas de fótons de micro-ondas gerados por uma junção túnel [manuscrito] / Maikon Bruno Alves Campos. - 2022. 60 f.

Orientador: Prof. Udson Cabral Mendes.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Física (IF), Programa de Pós-Graduação em Física, Goiânia, 2022. Bibliografia. Apêndice.

1. equação mestra. 2. número de fótons. 3. operador anômalo. 4. estado comprimido. 5. quadratura. I. Mendes, Udson Cabral, orient. II. Título.

CDU 53



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE FÍSICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 202 da sessão de Defesa de Dissertação de Maikon Bruno Alves Campos, que confere o título de Mestre em Física, na área de concentração em Física.

Aos 30 dias do mês de setembro de 2022, a partir das 14h00min, por meio de videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada “Propriedades estatísticas de fótons de micro-ondas gerados por uma junção túnel”. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Udson Cabral Mendes (PPG-FIS/UFG), com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Cláudio José da Silva (IFG/Goiânia), membro titular externo; e Professor Doutor Norton Gomes de Almeida (IF/UFG), membro titular interno. Durante a arguição, os membros da banca não fizeram sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato aprovado pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Udson Cabral Mendes, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos membros da Banca Examinadora, aos 30 dias do mês de setembro de 2022.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Norton Gomes De Almeida, Professor do Magistério Superior**, em 30/09/2022, às 16:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Udson Cabral Mendes, Usuário Externo**, em 30/09/2022, às 16:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Cláudio José da Silva, Usuário Externo**, em 30/09/2022, às 16:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3220319** e o código CRC **DB4BF0B4**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas que me serviram de seu conhecimento, me educaram com seus valores, seja pelo exemplo, por palavras amigas e ou por suas sinceras admoestações.

Especialmente ao professor Udson, quem me animou, amparou e fundamentou ao longo do mestrado. Pela paciência, persistência e tempo que dispôs em me acompanhar e guiar até aqui, apesar das adversidades.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física do IF-UFG, aos seus professores e a CAPES pelo suporte financeiro.

Ao Senhor, meu Deus.

RESUMO

Nesta dissertação, nós investigamos as propriedades estatísticas de fótons de micro-ondas gerados pelo acoplamento de uma junção túnel com um ressonador de micro-ondas (sistema junção túnel-ressonador). Para isso, desenvolvemos o formalismo da equação mestra para calcular as propriedades estatísticas de (i) a um reservatório térmico e (ii) um modo de campo eletromagnético acoplado a um reservatório de vácuo comprimido. Além disso, derivamos o hamiltoniano do sistema junção túnel-ressonador. O que nos permite derivar a equação mestra para o sistema junção túnel-ressonador, e confirmar que (i) na ausência de voltagem ac, a junção comporta-se como um reservatório térmico e (ii) na presença de uma voltagem ac oscilando em uma frequência igual a duas vezes a frequência do ressonador, a junção comporta-se como um reservatório comprimido. Ainda estudamos o sistema junção túnel-ressonador submetido a voltagem ac com frequência igual a três vezes a frequência de voltagem do ressonador, demonstrando teoricamente a possibilidade de geração de trios de fótons, o que já foi explorado experimentalmente, mas que ainda não tem explicação teórica para esses experimentos.

Palavras - chave: equação mestra, número de fótons, operador anômalo, estado comprimido, quadratura.

ABSTRACT

In this dissertation, we investigate the statistical properties of microwave photons generated by a tunnel junction coupled to a microwave resonator. For that, we developed the master equation formalism to calculate the statistical properties of (i) an electromagnetic field mode coupled to a thermal reservoir and (ii) to a squeezed vacuum reservoir. Furthermore, we derived the Hamiltonian of the tunnel junction coupled to a microwave resonator. This allows us to derive the master equation for the tunnel junction coupled to a microwave resonator and Confirm that (i) in the absence of ac voltage, the junction behaves as a thermal reservoir and (ii) in the presence of an ac voltage oscillating at a frequency equal to twice the frequency of the resonator, the junction behaves as a squeezed reservoir. Also we studied the tunnel junction coupled to a microwave resonator subjected to ac voltage with a frequency equal to three times the resonator frequency, theoretically demonstrating the possibility of generating photon trios, which has already been explored experimentally, but which has yet to be has no theoretical explanation for these experiments.

Key - words: master equation, number of photons, anomalous correlator, squeezed state, quadrature.

SUMÁRIO

Capítulo 1: INTRODUÇÃO	10
Capítulo 2: Formalismo da Equação Mestra	12
2.1 Equação mestra	12
2.1.1 Único modo do campo eletromagnético interagindo com um reservatório térmico	15
2.1.2 Reservatório de vácuo comprimido	18
2.1.3 Propriedades estatísticas	20
Capítulo 3: JUNÇÃO TÚNEL RESSONADOR	24
3.1 Ressonador de micro-ondas supercondutor	24
3.1.1 Hamiltoniano do circuito LC	27
3.2 Junção túnel-ressonador	28
Capítulo 4: DINÂMICA DE FÓTONS EM UMA JUNÇÃO TÚNEL-RESSONADOR	31
4.1 Introdução	31
4.2 Dinâmica dos fótons para diferentes frequências da voltagem ac	35
4.2.1 Caso geral	35
4.2.2 Dinâmica de fótons para $\omega_{ac} = 2\omega_r$	37
4.2.2.1 Cálculo das propriedades estatísticas dos fótons	38
4.3 Voltagem ac $\omega_{ac} = 3\omega_r$	42
Capítulo 5: CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	50
APÊNDICES	52
Apêndice A: FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO CORRENTE-CORRENTE	53
A.1 Função de correlação corrente-corrente	53

INTRODUÇÃO

A geração e o controle de fótons cujas propriedades desviam da estatística poissoniana vêm sendo de grande interesse para o desenvolvimento da eletrodinâmica quântica [1]. Neste contexto, um meio eficiente para alcançar esse objetivo é através da utilização de um condutor coerente submetido a uma voltagem ac que permite a geração e o controle de estados de vácuo comprimido [2, 3, 4]. Estes podem ser empregados como ferramentas para o desenvolvimento da computação quântica de variável contínua, detecção de ondas gravitacionais, detecção quântica de posição e força além da leitura de bits-quânticos [5, 6]. Para altas frequências de voltagem ac [2, 7], pode ser observada a geração de estados não gaussianos. A possibilidade de gerar fótons com diferentes propriedades permite que o sistema junção túnel-ressonador seja utilizado para o desenvolvimento, por exemplo, da criptografia quântica [8].

Como condutor coerente, utilizaremos a junção túnel, que quando acoplada a um ressonador de micro-ondas (sistema junção túnel-ressonador) comporta-se como um reservatório de fótons [9]. As propriedades do reservatório podem ser controladas através das voltagens dc e ac [10]. O acoplamento entre o ressonador de micro-ondas e a junção túnel se caracteriza como o acoplamento de um sistema quântico com um reservatório, o que pode ser modelado, considerando o acoplamento fraco, pela equação mestra na aproximação de Markov [11].

Diante disso, o propósito deste trabalho é investigar a dinâmica dos fótons, quando um sistema junção túnel-ressonador é submetido a uma voltagem dc e a uma voltagem ac com frequência ω_{ac} , múltipla da frequência do ressonador ω_r . A presença da voltagem ac faz com que a junção túnel comporte-se como diferentes reservatórios não-clássicos, o que implica na geração de fótons com propriedades estatísticas que desviem da estatística poissoniana [3, 7]. O caso em que $\omega_{ac} = 2\omega_r$ foi muito explorado na literatura nos últimos anos [1, 3, 4, 6], pois ele dá origem a estados comprimidos. Contudo, surgem inúmeras dificuldades experimentais surgem quando consideramos o caso em que $\omega_{ac} = 3\omega_r$, o que ocorre devido as contribuições ambientais que surgem devido a impedância do material de detecção [7]. descrever isto teoricamente é o grande desafio deste trabalho.

Neste trabalho, estudamos o acoplamento de uma junção túnel com um ressonador de micro-ondas. Para isso, desenvolvemos as ferramentas fundamentais para o estudo das propriedades estatísticas dos fótons de micro-ondas. No Cap.2, apresentamos o formalismo da equação mestra na aproximação de Markov. No Cap.3, descrevemos o circuito junção túnel-ressonador e derivamos o hamiltoniano de interação. No Cap.4, aplicamos o formalismo da equação mestra para o circuito junção túnel-ressonador, e exploramos a geração de fótons com diferentes propriedades variando a frequência de voltagem ac. Onde observamos que, dependendo da modulação da voltagem ac, os fótons de micro-ondas interagem com diferente reservatórios não-clássicos.

FORMALISMO DA EQUAÇÃO MESTRA

Neste capítulo, vamos primeiro apresentar o formalismo da equação mestra e depois derivar a equação mestra para um único modo do campo eletromagnético interagindo com (i) reservatório térmico e (ii) comprimido.

2.1 Equação mestra

Considere um sistema quântico S acoplado a um reservatório R. Este reservatório pode ser, por exemplo, um grande número de osciladores harmônicos em um sólido, ou um conjunto de níveis atômicos, enquanto o sistema é comumente tratado como um modo de campo eletromagnético. O hamiltoniano total do sistema é

$$H = H_S + H_R + \mathcal{V}_s, \quad (2.1.1)$$

sendo H_S e H_R os hamiltonianos do sistema e do reservatório, respectivamente. \mathcal{V}_s é o hamiltoniano de interação entre o sistema e o reservatório. O operador densidade total, na representação de Schrödinger, é dado por

$$\dot{\rho}_{tot} = -\frac{i}{\hbar}[H_S + H_R + \mathcal{V}_s, \rho_{tot}]. \quad (2.1.2)$$

Visto que buscamos estudar o acoplamento entre o sistema e o reservatório é mais conveniente trabalharmos na representação de interação. A correspondência entre o operador densidade na representação de interação e a representação de Schrödinger, é

$$\rho_{SR}(t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(H_S + H_R)t\right] \rho_{tot}(t) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(H_S + H_R)t\right]. \quad (2.1.3)$$

Diferenciando esta equação, temos

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{SR} &= \frac{i}{\hbar} (H_S + H_R) e^{i(H_S+H_R)t/\hbar} \rho_{tot}(t) e^{-i(H_S+H_R)t/\hbar} + e^{i(H_S+H_R)t/\hbar} \dot{\rho}_{tot}(t) e^{-i(H_S+H_R)t/\hbar} \\
&\quad - \frac{i}{\hbar} e^{i(H_S+H_R)t/\hbar} \rho_{tot}(t) (H_S + H_R) e^{-i(H_S+H_R)t/\hbar}, \\
&= \frac{i}{\hbar} [(H_S + H_R), \rho_{RS}(t)] + e^{i(H_S+H_R)t/\hbar} \dot{\rho}_{tot} e^{-i(H_S+H_R)t/\hbar}.
\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Substituindo as Eqs 2.1.2 e 2.1.3, na Eq. (2.1.4), obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{SR} &= \frac{i}{\hbar} [(H_S + H_R), e^{i(H_S+H_R)t/\hbar} \rho_{tot}(t) e^{-i(H_S+H_R)t/\hbar}] \\
&\quad - e^{i(H_S+H_R)t/\hbar} \frac{i}{\hbar} [H_S + H_R + \mathcal{V}_s, \rho_{tot}] e^{-i(H_S+H_R)t/\hbar}, \\
&= \frac{i}{\hbar} [(H_S + H_R), e^{i(H_S+H_R)t/\hbar} \rho_{tot}(t) e^{-i(H_S+H_R)t/\hbar}] \\
&\quad - \frac{i}{\hbar} [H_S + H_R, e^{i(H_S+H_R)t/\hbar} \rho_{tot} e^{-i(H_S+H_R)t/\hbar}] - e^{i(H_S+H_R)t/\hbar} \frac{i}{\hbar} [\mathcal{V}_s, \rho_{tot}] e^{-i(H_S+H_R)t/\hbar}, \\
&= -\frac{i}{\hbar} \left(e^{i(H_S+H_R)t/\hbar} \mathcal{V}_s \rho_{tot} e^{-i(H_S+H_R)t/\hbar} - e^{i(H_S+H_R)t/\hbar} \rho_{tot} \mathcal{V}_s e^{-i(H_S+H_R)t/\hbar} \right), \\
&= -\frac{i}{\hbar} \left(e^{i(H_S+H_R)t/\hbar} \mathcal{V}_s e^{-i(H_S+H_R)t/\hbar} e^{i(H_S+H_R)t/\hbar} \rho_{tot} e^{-i(H_S+H_R)t/\hbar} \right. \\
&\quad \left. - e^{i(H_S+H_R)t/\hbar} \rho_{tot} e^{-i(H_S+H_R)t/\hbar} e^{i(H_S+H_R)t/\hbar} \mathcal{V}_s e^{-i(H_S+H_R)t/\hbar} \right), \\
&= -\frac{i}{\hbar} [\mathcal{V}, \rho_{SR}],
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

sendo $\mathcal{V} = e^{i(H_S+H_R)t/\hbar} \mathcal{V}_s e^{-i(H_S+H_R)t/\hbar}$ o hamiltoniano de interação na representação de interação.

Consideremos a interação entre S e R é fraca, de modo a ser desprezível. Neste limite, a dinâmica de S pode ser obtida através do operador densidade ρ_{SR} , escrito na forma da Eq. (2.1.5). Assim, integrando a equação de movimento de ρ_{SR} , no intervalo de 0 a t , obtemos

$$\rho_{SR}(t) = \rho_{SR}(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t [\mathcal{V}(t'), \rho_{SR}(t')] dt', \tag{2.1.6}$$

e substituindo na Eq. (2.1.5), obtemos

$$\dot{\rho}_{SR}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\mathcal{V}(t), \rho_{SR}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t [\mathcal{V}(t), [\mathcal{V}(t'), \rho_{SR}(t')]] dt', \tag{2.1.7}$$

de onde, tomando o traço sobre as variáveis do reservatório, obtemos

$$\dot{\rho}_S = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t Tr_R [\mathcal{V}(t), [\mathcal{V}(t'), \rho_{SR}(t')]] dt', \tag{2.1.8}$$

supondo

$$\text{Tr}_R[\mathcal{V}(t), \rho_{SR}(0)] = 0. \quad (2.1.9)$$

Consideramos que o reservatório e o sistema são inicialmente independentes, ou seja, $\rho_{SR} = \rho_S(0) \otimes \rho_R$. Além disso, considerando que o reservatório é grande o suficiente para que as suas propriedades estatísticas não sejam afetadas pelo fraco acoplamento com o sistema [11], o operador densidade total pode ser escrito como o produto

$$\rho_{SR}(t) \simeq \rho_S(t) \otimes \rho_R(0) \equiv \rho_S(t)\rho_R. \quad (2.1.10)$$

Essa aproximação é conhecida como aproximação Born, e nos permite reescrever a Eq. (2.1.8) como

$$\dot{\rho}_S = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \text{Tr}_R[\mathcal{V}(t), [\mathcal{V}(t'), \rho_S(t')\rho_R]] dt'. \quad (2.1.11)$$

Uma vez que a interação é considerada fraca, a taxa de mudança do operador densidade do sistema na representação de interação será bastante lenta em comparação com a do reservatório, que irá variar em uma escala de tempo proporcional a $\mathcal{V}(t)$ [12]. Neste caso, podemos dizer que $\rho_S(t') \approx \rho_S(t)$, o que implica que a equação acima pode ser escrita como

$$\dot{\rho}_S = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \text{Tr}_R[\mathcal{V}(t), [\mathcal{V}(t'), \rho_S(t)\rho_R]] dt'. \quad (2.1.12)$$

Esta é conhecida como a *equação de Redfield* em um tempo local [12]. Como o sistema varia muito lentamente, é interessante introduzir a mudança de variável $t' = t - \tau$, de forma que o limite superior $t'_f = t$ se torna $\tau_f = 0$ e o limite inferior $\tau_i = t$. Reescrevendo a Eq. (2.1.12) como

$$\dot{\rho}_S = \frac{1}{\hbar^2} \int_t^0 \text{Tr}_R[\mathcal{V}(t), [\mathcal{V}(t - \tau), \rho_S(t)\rho_R]] d\tau, \quad (2.1.13)$$

podemos obter a equação de Markov supondo que t seja muito maior que o tempo de acoplamento, de modo que, o limite inferior da integral se torna $\tau_i = \infty$ [11]. Portanto a Eq. (2.1.12) pode ser escrita como

$$\dot{\rho}_S = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty \text{Tr}_R[\mathcal{V}(t), [\mathcal{V}(t - \tau), \rho_S(t)\rho_R]] d\tau, \quad (2.1.14)$$

que é a equação mestra na aproximação de Markov.

Para aprofundarmos no estudo da equação mestra, nas seções seguintes estudaremos um modo do campo eletromagnético interagindo com um reservatório térmico e um reservatório de vácuo comprimido.

2.1.1 Único modo do campo eletromagnético interagindo com um reservatório térmico

Nesta seção, estudaremos o acoplamento de um modo do campo eletromagnético de frequência ν (sistema S) com um reservatório de campo térmico (sistema R). O hamiltoniano de interação na representação de interação é [13]

$$\mathcal{V}(t) = \hbar \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} \left[\hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t} + \hat{a}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}} e^{i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t} \right], \quad (2.1.15)$$

sendo \hat{a} e \hat{a}^{\dagger} os operadores de criação e aniquilação do campo eletromagnético, $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ e $\hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ os operadores de criação e aniquilação para o campo amortecido que constitui o reservatório, \hbar a constante de Planck, $g_{\mathbf{k}}$ a constante de acoplamento e $\nu_{\mathbf{k}}$ a frequência do modo \mathbf{k} do reservatório térmico [13].

Como o reservatório está em equilíbrio térmico, o operador densidade do reservatório é dado por

$$\rho_R = \prod_{\mathbf{k}} \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\nu_{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}_B T}\right) \exp\left(-\frac{\hbar\nu_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}_B T}\right) \right], \quad (2.1.16)$$

sendo \mathbf{k}_B a constante de Boltzmann e T a temperatura. O reservatório térmico é caracterizado pelos seguintes valores esperados [13]:

$$\langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \rangle = \langle \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \rangle = 0, \quad (2.1.17)$$

$$\langle \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \rangle = \bar{n}_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (2.1.18)$$

$$\langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \rangle = (\bar{n}_{\mathbf{k}} + 1) \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (2.1.19)$$

$$\langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \rangle = \langle \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^{\dagger} \rangle = 0, \quad (2.1.20)$$

sendo

$$\bar{n}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\nu_{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}_B T}\right) - 1}, \quad (2.1.21)$$

o número médio de fótons [13].

Para investigar o acoplamento do sistema ao reservatório térmico, vamos utilizar o formalismo da equação mestra. Na aproximação de Born-Markov, a equação mestra é

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^{\infty} dt' Tr_R[\mathcal{V}(t), [\mathcal{V}(t-t'), \rho(t)\rho_R]], \quad (2.1.22)$$

Para simplificar o cálculo, vamos dividir a (2.1.22) em quatro termos

$$A_1 = \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty dt' Tr_R [\mathcal{V}(t)\mathcal{V}(t-t')\rho(t)\rho_R], \quad (2.1.23)$$

$$A_2 = \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty dt' Tr_R [\mathcal{V}(t-t')\rho_R\rho(t)\mathcal{V}(t)], \quad (2.1.24)$$

$$A_3 = \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty dt' Tr_R [\mathcal{V}(t-t')\rho(t)\rho_R\mathcal{V}(t)], \quad (2.1.25)$$

e

$$A_4 = \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty dt' Tr_R [\rho(t)\rho_R\mathcal{V}(t-t')\mathcal{V}(t)]. \quad (2.1.26)$$

Do primeiro termo (2.1.23), temos:

$$\begin{aligned} A_1 = & \hbar^2 \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} g_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}'} \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty dt' Tr_R \left[\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}'}) (t-t')} \rho(t) \rho_R \right. \\ & + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t} \hat{a}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}'}) (t-t')} \rho(t) \rho_R + \hat{a}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} e^{i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}'}) (t-t')} \rho(t) \rho_R \\ & \left. + \hat{a}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} e^{i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t} \hat{a}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'} e^{i(\nu - \nu_{\mathbf{k}'}) (t-t')} \rho(t) \rho_R \right]. \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

De onde podemos definir

$$\begin{aligned} Tr_R [\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a} \rho(t) \rho_R] &= \hat{a} \hat{a} \rho(t) Tr_R [\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \rho_R] \\ &= \hat{a} \hat{a} \rho(t) \langle \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \rangle = 0. \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

De forma análoga,

$$Tr_R [\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'} \rho(t) \rho_R] = \hat{a} \hat{a}^\dagger \rho(t) \langle \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'} \rangle = \hat{a} \hat{a}^\dagger \rho(t) \bar{n}_{\mathbf{k}}, \quad (2.1.29)$$

$$Tr_R [\hat{a}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a} \rho(t) \rho_R] = \hat{a}^\dagger \hat{a} \rho(t) \langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a} \rho(t) (\bar{n}_{\mathbf{k}} + 1), \quad (2.1.30)$$

$$Tr_R [\hat{a}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{a}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'} \rho(t) \rho_R] = \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \rho(t) \langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \rangle = 0, \quad (2.1.31)$$

onde utilizamos as relações definidas nas Eqs. (2.1.17), (2.1.18), (2.1.19) e (2.1.20). Assim, podemos escrever a Eq. (2.1.27) como

$$A_1 = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^2 \int_0^\infty dt' \left[\hat{a} \hat{a}^\dagger \rho(t) \bar{n}_{\mathbf{k}} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t'} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \rho(t) (\bar{n}_{\mathbf{k}} + 1) e^{i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t'} \right]. \quad (2.1.32)$$

De forma análoga, obtemos A_2 , A_3 , A_4 , sendo

$$A_2 = - \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^2 \int_0^{\infty} dt' \left[\hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger \bar{n}_k e^{-i(\nu-\nu_k)t'} + \hat{a}^\dagger \rho(t) \hat{a} (\bar{n}_k + 1) e^{i(\nu-\nu_k)t'} \right], \quad (2.1.33)$$

$$A_3 = - \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^2 \int_0^{\infty} dt' \left[\hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger \bar{n}_k e^{-i(\nu-\nu_k)t'} + \hat{a}^\dagger \rho(t) \hat{a} (\bar{n}_k + 1) e^{i(\nu-\nu_k)t'} \right], \quad (2.1.34)$$

$$A_4 = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^2 \int_0^{\infty} dt' \left[\rho(t) \hat{a} \hat{a}^\dagger \bar{n}_k e^{-i(\nu-\nu_k)t'} + \rho(t) \hat{a}^\dagger \hat{a} (\bar{n}_k + 1) e^{i(\nu-\nu_k)t'} \right]. \quad (2.1.35)$$

Portanto, a equação (2.1.22) pode ser escrita a partir das somas de (2.1.32), (2.1.33), (2.1.34) e (2.1.35), como

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = & - \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^2 \int_0^{\infty} dt' \left\{ \bar{n}_k \left[\hat{a} \hat{a}^\dagger \rho(t) - 2 \hat{a}^\dagger \rho(t) \hat{a} + \rho(t) \hat{a} \hat{a}^\dagger \right] e^{i(\nu-\nu_k)t'} \right. \\ & \left. + (\bar{n}_k + 1) \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} \rho(t) - 2 \hat{a} \rho(t) \hat{a}^\dagger + \rho(t) \hat{a}^\dagger \hat{a} \right] e^{-i(\nu-\nu_k)t'} \right\}. \end{aligned} \quad (2.1.36)$$

A soma sobre \mathbf{k} pode ser reescrita através da integral [13]

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{\infty} dk k^2. \quad (2.1.37)$$

Usando as relações $k = \nu_k/c$ e $g_{\mathbf{k}} = (\epsilon_{\mathbf{k}'} \mathcal{E}_{\mathbf{k}'} \cdot \epsilon_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}})/\hbar$, sendo $\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = (\hbar \nu_{\mathbf{k}}/2\epsilon_0 V)^{1/2}$ a amplitude do campo eletromagnético, podemos calcular

$$\begin{aligned} 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{\infty} dk k^2 g_{\mathbf{k}}^2 \bar{n}_k \int_0^{\infty} dt' e^{i(\nu-\nu_k)t'} = \\ 8\pi \frac{V}{(2\pi)^3 c^3} \left(\frac{\hbar \nu_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V} \right) \int_0^{\infty} d\nu_k \nu_k^3 \bar{n}_k \int_0^{\infty} dt' e^{i(\nu-\nu_k)t'} = \frac{\nu^4 \bar{n}_\nu}{3\pi V (2\epsilon_0)^2 c^3 \hbar} = \frac{\kappa}{2} \bar{n}_\nu, \end{aligned} \quad (2.1.38)$$

onde definimos

$$\frac{\nu^4}{3\pi V (2\epsilon_0)^2 c^3 \hbar} = \frac{\kappa}{2}.$$

Consideramos a variação da frequência muito pequena [14, 13], de forma que,

$$\int_0^{\infty} e^{i(\omega-\omega')t} dt = iP \frac{1}{\omega - \omega'} + \pi \delta(\omega - \omega') \approx \pi \delta(\omega - \omega'). \quad (2.1.39)$$

Analogamente,

$$2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{\infty} dk k^2 g_{\mathbf{k}}^2 (\bar{n}_k + 1) \int_0^{\infty} dt' e^{-i(\nu-\nu_k)t'} = \frac{\kappa}{2} (\bar{n}_\nu + 1). \quad (2.1.40)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = & -\frac{\kappa}{2}\bar{n}_\nu \left[\hat{a}\hat{a}^\dagger\rho(t) - 2\hat{a}^\dagger\rho(t)\hat{a} + \rho(t)\hat{a}\hat{a}^\dagger \right] \\ & -\frac{\kappa}{2}(\bar{n}_\nu + 1) \left[\hat{a}^\dagger\hat{a}\rho(t) - 2\hat{a}\rho(t)\hat{a}^\dagger + \rho(t)\hat{a}^\dagger\hat{a} \right]. \end{aligned} \quad (2.1.41)$$

Definindo o dissipador térmico $\mathcal{D}[\hat{O}]\rho = \hat{O}\rho\hat{O}^\dagger - \{\hat{O}^\dagger\hat{O}, \rho\}/2$, que surge devido a interação de um modo de onda com o reservatório térmico, podemos escrever a Eq.(2.1.41) como

$$\dot{\rho}(t) = \kappa\bar{n}_\nu\mathcal{D}[\hat{a}^\dagger]\rho + \kappa(\bar{n}_\nu + 1)\mathcal{D}[\hat{a}]. \quad (2.1.42)$$

sendo κ a constante de decaimento de fótons e \bar{n}_ν o número médio de fótons [13]. Definida na Eq. (2.1.37).

2.1.2 Reservatório de vácuo comprimido

Nesta seção, prosseguiremos estudando a equação mestra, para o acoplamento de um modo do campo eletromagnético de frequência ν (sistema S) com um reservatório de vácuo comprimido (sistema R), cujo o hamiltoniano de interação é dado pela Eq. (2.1.15). Sendo o operador densidade reduzido desse sistema dado por [13]

$$\rho_R = \prod_{\mathbf{k}} \hat{S}_{\mathbf{k}}(\epsilon) |0_{\mathbf{k}}\rangle \langle 0_{\mathbf{k}}| \hat{S}_{\mathbf{k}}^\dagger(\epsilon), \quad (2.1.43)$$

onde o operador de compressão é

$$\hat{S}_{\mathbf{k},\lambda}(\epsilon_{\mathbf{k}}) = \exp \left[\epsilon^* \hat{b}_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}}^2 - \epsilon \hat{b}_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}}^{\dagger 2} \right], \quad (2.1.44)$$

com $\epsilon = r \exp(i\theta)$, sendo r o parâmetro de compressão e θ a fase dos estados comprimidos [13]. Da Eq.(2.1.43), temos os valores esperados

$$\langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \rangle = \langle \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \rangle = 0, \quad (2.1.45)$$

$$\langle \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'} \rangle = N \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (2.1.46)$$

$$\langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \rangle = (N + 1) \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (2.1.47)$$

$$\langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \rangle = M \delta_{\mathbf{k}', 2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}}, \quad (2.1.48)$$

$$\langle \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \rangle = M^* \delta_{\mathbf{k}', 2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}}, \quad (2.1.49)$$

sendo $N = \sinh^2 r$ e $M = \exp(-i\theta) \cosh r \sinh r$ [13].

Para o caso do reservatório de vácuo comprimido, podemos aproveitar os resultados obtidos na seção anterior, nas Eq. (2.1.32), (2.1.33), (2.1.34) e (2.1.35), onde usaremos os valores esperados dos operadores $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$ e $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ dados pelas relações (2.1.45) à (2.1.49). De

tal forma que podemos escrever os quatro termos da equação mestra como

$$\begin{aligned}
 B_1 = \int_0^\infty dt' \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} g_{\mathbf{k}} g'_{\mathbf{k}'} \left[\hat{a} \hat{a} \rho(t) M^* \delta_{\mathbf{k}', 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}'}) (t - t')} \right. \\
 + \hat{a} \hat{a}^\dagger \rho(t) N \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t} e^{i(\nu - \nu_{\mathbf{k}'}) (t - t')} + \hat{a} \hat{a}^\dagger \rho(t) (N + 1) \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}'}) (t - t')} \\
 \left. + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \rho(t) M \delta_{\mathbf{k}', 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} e^{i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t} e^{i(\nu - \nu_{\mathbf{k}'}) (t - t')} \right], \quad (2.1.50)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_2 = \int_0^\infty dt' \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} g_{\mathbf{k}} g'_{\mathbf{k}'} \left[\hat{a} \rho(t) \hat{a} M^* \delta_{\mathbf{k}', 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}'}) (t - t')} \right. \\
 + \hat{a} \rho(t) \hat{a}^\dagger N \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t} e^{i(\nu - \nu_{\mathbf{k}'}) (t - t')} + \hat{a} \rho(t) \hat{a}^\dagger (N + 1) \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}'}) (t - t')} \\
 \left. + \hat{a}^\dagger \rho(t) \hat{a}^\dagger M \delta_{\mathbf{k}', 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} e^{i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t} e^{i(\nu - \nu_{\mathbf{k}'}) (t - t')} \right], \quad (2.1.51)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_3 = \int_0^\infty dt' \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} g_{\mathbf{k}} g'_{\mathbf{k}'} \left[\hat{a} \rho(t) \hat{a} M^* \delta_{\mathbf{k}', 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}'}) (t - t')} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t} \right. \\
 + \hat{a} \rho(t) \hat{a}^\dagger N \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}'}) (t - t')} e^{i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t} + \hat{a} \rho(t) \hat{a}^\dagger (N + 1) \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{i(\nu - \nu_{\mathbf{k}'}) (t - t')} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t} \\
 \left. + \hat{a}^\dagger \rho(t) \hat{a}^\dagger M \delta_{\mathbf{k}', 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} e^{i(\nu - \nu_{\mathbf{k}'}) (t - t')} e^{i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t} \right], \quad (2.1.52)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 B_4 = \int_0^\infty dt' \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} g_{\mathbf{k}} g'_{\mathbf{k}'} \left[\rho(t) \hat{a} \hat{a} M^* \delta_{\mathbf{k}', 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}'}) (t - t')} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t} \right. \\
 + \rho(t) \hat{a} \hat{a}^\dagger N \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}'}) (t - t')} e^{i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t} + \rho(t) \hat{a} \hat{a}^\dagger (N + 1) \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{i(\nu - \nu_{\mathbf{k}'}) (t - t')} e^{-i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t} \\
 \left. + \rho(t) \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger M \delta_{\mathbf{k}', 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} e^{i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t} e^{i(\nu - \nu_{\mathbf{k}'}) (t - t')} \right]. \quad (2.1.53)
 \end{aligned}$$

Substituindo as Eqs. (2.1.50), (2.1.51), (2.1.52) e (2.1.53) na Eq. (2.1.22) e usando a relação (2.1.37), obtemos

$$2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty dk k^2 g_k^2 \int_0^\infty dt' e^{i(\nu - \nu_{\mathbf{k}})t'} = \frac{\nu^4}{3\pi V (2\epsilon_0)^2 c^3 \hbar} = \frac{\kappa}{2}, \quad (2.1.54)$$

e

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}(t) = -\frac{\kappa}{2} N \left[\hat{a} \hat{a}^\dagger \rho(t) - 2\hat{a}^\dagger \rho(t) \hat{a} + \rho(t) \hat{a} \hat{a}^\dagger \right] - \frac{\kappa}{2} (N + 1) \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} \rho(t) - 2\hat{a} \rho(t) \hat{a}^\dagger + \rho(t) \hat{a}^\dagger \hat{a} \right] \\
 + \frac{\kappa}{2} M^* \left[\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \rho(t) - 2\hat{a}^\dagger \rho(t) \hat{a}^\dagger + \rho(t) \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \right] + \frac{\kappa}{2} M \left[\hat{a} \hat{a} \rho(t) - 2\hat{a} \rho(t) \hat{a} + \rho(t) \hat{a} \hat{a} \right]. \quad (2.1.55)
 \end{aligned}$$

Definindo o dissipador de compressão $\mathcal{S}[O]\rho = O\rho O - \{O^2, \rho\}/2$, que surge com a interação do modo de onda com o reservatório comprimido, e o dissipador térmico,

$\mathcal{D}[\hat{O}]\rho = \hat{O}\rho\hat{O}^\dagger - \{\hat{O}^\dagger\hat{O}, \rho\}/2$, podemos reescrever a Eq.(2.1.55) como

$$\dot{\rho}(t) = \kappa N \mathcal{D}[\hat{a}]\rho + \kappa (N + 1) \mathcal{D}[\hat{a}^\dagger]\rho + \kappa M^* \mathcal{S}[\hat{a}^\dagger]\rho + \kappa M \mathcal{S}[\hat{a}]\rho. \quad (2.1.56)$$

Os dois primeiros termos são correspondentes ao operador densidade para o reservatório térmico, o que pode ser obtido facilmente fazendo $N = \left[\exp\left(\frac{\hbar\nu_k}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1}$ e $M = 0$.

2.1.3 Propriedades estatísticas

A partir da equação mestra (2.1.56), podemos obter valores esperados de operadores de interesse. Por exemplo, podemos calcular o valor esperado do número de fótons através da relação [14]

$$\frac{d\langle \hat{N} \rangle}{dt} = Tr_S[\hat{N}\dot{\rho}(t)], \quad (2.1.57)$$

sendo Tr_S o traço sobre os graus de liberdade dos sistemas. Substituindo a Eq.(2.1.56) na Eq.(2.1.57), temos

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \hat{N} \rangle}{dt} = & Tr_S \left\{ \frac{\kappa}{2} M \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \rho(t) - 2 \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \rho(t) \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a} \rho(t) \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \right] \right. \\ & + \frac{\kappa}{2} M \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a} \rho(t) - 2 \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rho(t) \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \rho(t) \hat{a} \hat{a} \right] \\ & - \frac{\kappa}{2} N \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger \rho(t) - 2 \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \rho(t) \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \rho(t) \hat{a} \hat{a}^\dagger \right] \\ & \left. - \frac{\kappa}{2} (N + 1) \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \rho(t) - 2 \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \rho(t) \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \rho(t) \hat{a}^\dagger \hat{a} \right] \right\}. \quad (2.1.58) \end{aligned}$$

Usando a propriedade cíclica do traço $Tr(ABC) = Tr(BCA) = Tr(ACB)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \hat{N} \rangle}{dt} = & \frac{\kappa}{2} M \left[\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \rangle - 2 \langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle + \langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \right] \\ & + \frac{\kappa}{2} M \left[\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a} \rangle - 2 \langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle + \langle \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \right] \\ & - \frac{\kappa}{2} N \left[\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle - 2 \langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle + \langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \right] \\ & - \frac{\kappa}{2} (N + 1) \left[\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle - 2 \langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle + \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \right]. \quad (2.1.59) \end{aligned}$$

Para facilitar os nossos cálculos, iremos dividir (2.1.59) em quatro partes que chamaremos de N_1 , N_2 , N_3 e N_4 . Assim, temos

$$\begin{aligned}
N_1 &= M \left[\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \rangle - 2 \langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle + \langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \right], \\
&= M \left[\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \rangle - 2 \langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle + \langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle - \langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \rangle \right], \\
&= M \left[\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \rangle + \langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \rangle - \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \rangle - \langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \rangle \right], \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.1.60}$$

onde usamos a relação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Pode-se verificar que

$$N_2 = \frac{\kappa}{2} M \left[\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a} \rangle - 2 \langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle + \langle \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \right] = 0, \tag{2.1.61}$$

e também que

$$N_3 = \frac{\kappa}{2} N \left[2 \langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle - \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle - \langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \right] = \kappa N \langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle, \tag{2.1.62}$$

$$N_4 = -\frac{\kappa}{2} (N + 1) \left[\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle - 2 \langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle + \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \right] = -\kappa N \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle - \kappa \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle. \tag{2.1.63}$$

Somando (2.1.60) à (2.1.63), obtemos a equação de movimento do número de fótons;

$$\frac{d\langle \hat{N} \rangle}{dt} = \kappa N - \kappa \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle. \tag{2.1.64}$$

No estado estacionário, $d\hat{N}/dt = 0$, assim

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = N, \tag{2.1.65}$$

de forma que, o número médio de fótons no sistema é igual ao número médio de fótons no reservatório [14], sendo $N = \sinh^2(r)$ para um reservatório de vácuo comprimido.

Fazendo os mesmos cálculos para $\langle \hat{a}^2 \rangle$, temos

$$\frac{d\langle \hat{a}^2 \rangle}{dt} = -\kappa \langle \hat{a}^2 \rangle + \kappa M. \tag{2.1.66}$$

No estado estacionário, $\frac{d\langle \hat{a}^2 \rangle}{dt} = 0$, logo

$$\langle \hat{a}^2 \rangle = M, \tag{2.1.67}$$

o que indica a presença de efeitos devidos a pares de fótons [14]. Como veremos a seguir, os efeitos de dois fótons são responsáveis pela compressão do estado do campo eletromagnético.

Para \hat{a} , temos a equação de movimento

$$\frac{d\langle\hat{a}\rangle}{dt} = -\frac{\kappa}{2}\langle\hat{a}\rangle,$$

no estado estacionário,

$$\langle\hat{a}\rangle = 0, \quad (2.1.68)$$

da mesma forma,

$$\hat{a}^\dagger = 0. \quad (2.1.69)$$

Considerando o caso em que o sistema está em equilíbrio térmico, isto é, $N = \bar{n}_\nu$ [eq.(2.1.41)] e $M = 0$, vamos calcular a variância das quadraturas do campo eletromagnético

$$\Delta X^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2, \quad (2.1.70)$$

$$\Delta Y^2 = \langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2, \quad (2.1.71)$$

sendo $X = \hat{a} + \hat{a}^\dagger$ e $Y = -i(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$ as quadraturas do campo eletromagnético. Substituindo X em (2.1.70), e utilizando os valores esperados definidos nas Eqs. (2.1.65), (2.1.67) e (2.1.68) obtemos

$$\Delta X^2 = \langle \hat{a}^2 \rangle + \langle \hat{a}\hat{a}^\dagger \rangle + \langle \hat{a}^\dagger\hat{a} \rangle + \langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle - \langle \hat{a} \rangle^2 - \langle \hat{a} \rangle \langle \hat{a}^\dagger \rangle - \langle \hat{a}^\dagger \rangle \langle \hat{a} \rangle - \langle \hat{a}^\dagger \rangle^2 \quad (2.1.72)$$

$$= 2N + 1. \quad (2.1.73)$$

Fazendo o mesmo em relação a (2.1.71), obtemos

$$\Delta Y^2 = -(\langle \hat{a}^2 \rangle - \langle \hat{a}\hat{a}^\dagger \rangle - \langle \hat{a}^\dagger\hat{a} \rangle + \langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle - \langle \hat{a} \rangle^2 + 2\langle \hat{a} \rangle \langle \hat{a}^\dagger \rangle + \langle \hat{a}^\dagger \rangle^2) \quad (2.1.74)$$

$$= 2N + 1. \quad (2.1.75)$$

O que satisfaz as características de um estado térmico [14], isto é,

$$\Delta X = \Delta Y = \sqrt{2N + 1}, \quad (2.1.76)$$

que, também, satisfaz o princípio de incerteza, $(\Delta Y)(\Delta X) \geq 1$, Na ausência de fótons, $N = 0$, $\Delta X = \Delta Y = 1$. Assim, indicando que o vácuo quântico possui flutuações quânticas.

Considerando agora o caso do reservatório de vácuo comprimido, $M \neq 0$, e utilizando os valores esperados definidos nas Eqs. (2.1.65), (2.1.67) e (2.1.68), temos que

as variâncias dadas pelas Eq.s (2.1.72) e (2.1.74) para o campo comprimido, são

$$\Delta X^2 = 2N + 1 + 2|M| \cos \theta, \quad (2.1.77)$$

$$\Delta Y^2 = 2N + 1 - 2|M| \cos \theta. \quad (2.1.78)$$

Note agora que, com essa definição, podemos ver que existem valores de θ para os quais uma das quadraturas possui flutuações menores do que as flutuações do vácuo, ou seja, $\Delta X^2 < 1$ ou $\Delta Y^2 < 1$. Essa desigualdade implica que estados comprimidos serão observados toda vez em que $|N| < |M| \cos \theta$. Isso caracteriza a existência de estados de vácuo comprimido.

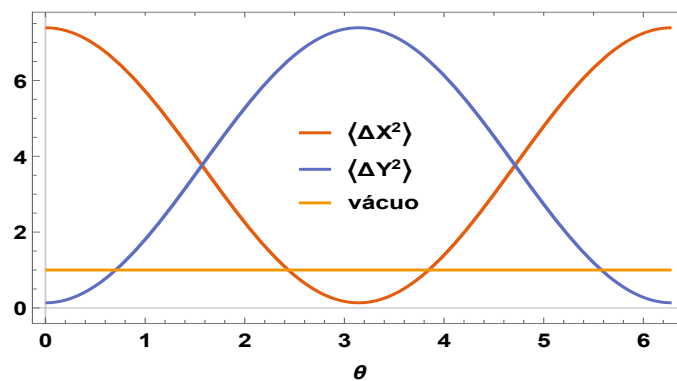


Figura 2.1: Gráfico das quadraturas ΔX^2 e ΔY^2 em função θ , para $r = 1$.

O estado comprimido é caracterizado pelo fato que uma de suas quadraturas possui incerteza de ruído menor que a do vácuo, no entanto, a outra quadratura, afim de satisfazer a incerteza de Heisenberg, possui sua incerteza maior que a do vácuo. Desta forma, no caso em que r é mantido fixo, Fig. (2.1), os estados comprimidos surgem em intervalos periódicos quando o valor das curvas ΔX^2 ou ΔY^2 assumem valores menores que o do vácuo.

JUNÇÃO TÚNEL RESSONADOR

Neste capítulo, derivaremos o hamiltoniano de interação entre um o ressonador de micro-ondas supercondutor e uma junção túnel, como ilustrado na Fig. (3.1). O ressonador de micro-ondas supercondutor é representado por um circuito LC. Já a junção túnel é formada pela combinação metal-isolante-metal (M-I-M), ou seja, dois metais separados por uma fina camada isolante. Exemplos típicos de junções túnel são as formadas for Al-AlO₂-Al ou Nb-AlO₂-Nb.

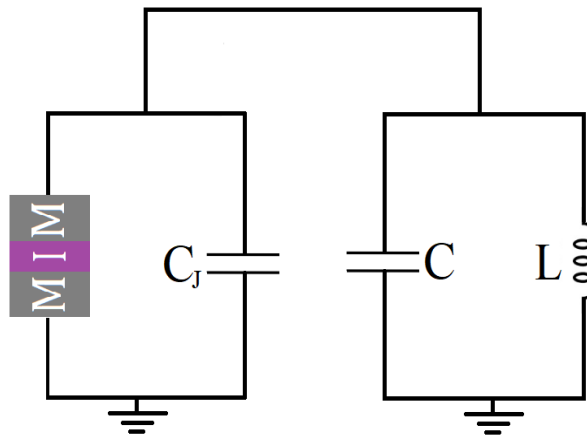


Figura 3.1: O circuito ilustra uma junção túnel formada pelas camadas M-I-M onde ocorre o tunelamento de elétrons. C_J é a capacitância geométrica da junção. Enquanto o ressonador supercondutor, representado por um circuito LC, é composto por sua indutância L e capacitância C .

3.1 Ressonador de micro-ondas supercondutor

Aqui, vamos derivar o hamiltoniano que descreve a dinâmica dos fótons no ressonador de micro-ondas supercondutor. Para isso, vamos utilizar a aproximação do

modelo de elemento aglomerado (*lumped-element model*) para descrever o ressonador. Essa aproximação é válida quando as dimensões do ressonador são muito menores do que o comprimento de onda do circuito. Tipicamente, a dimensão dos ressonadores de micro-ondas é da ordem de $100 \mu\text{m}$ e eles são operados em frequências próximas a 5 GHz, o que equivale a um comprimento de onda da ordem de 60 cm. No regime de elemento aglomerado, o ressonador é caracterizado por sua indutância L e capacitância C ou, equivalentemente, por sua frequência $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ e impedância $Z_r = \sqrt{L/C}$.

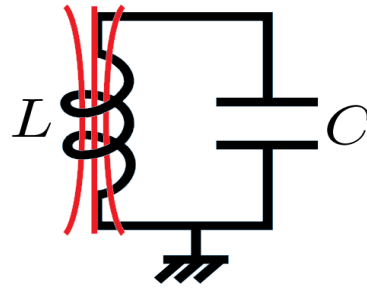


Figura 3.2: Representação no limite de elemento aglomerado para um ressonador de micro-ondas supercondutor, descrito por um circuito LC.

Para descrever as propriedades do circuito LC, vamos definir o fluxo $\Phi(t)$ como

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t dt' V(t') \rightarrow \dot{\Phi}(t) = V(t), \quad (3.1.1)$$

sendo $V(t)$ a voltagem através de um elemento do circuito. Também definimos a carga Q como

$$Q(t) = \int_{-\infty}^t dt' I(t') \rightarrow \dot{Q} = I(t), \quad (3.1.2)$$

sendo $I(t)$ a corrente através de um elemento do circuito. Iremos considerar que no tempo inicial, $t = -\infty$, o dispositivo está em repouso e $V = 0 = I$ [15].

A energia armazenada, $E_a(t)$, em cada elemento a do circuito é dada por

$$E_a(t) = \int_{-\infty}^t dt' V_a(t') I_a(t'), \quad (3.1.3)$$

sendo $V_a(t')$ e $I_a(t')$ a voltagem e a corrente através do elemento, respectivamente.

Vamos agora calcular a energia armazenada no capacitor:

$$E_C(t) = \int_{-\infty}^t dt' V_C(t') I_C(t'). \quad (3.1.4)$$

A voltagem através do capacitor é dada por $V_C(t) = Q(t)/C$, logo, a corrente é dada por

$$I_c(t) = \dot{Q}(t) = C\ddot{\Phi}(t). \quad (3.1.5)$$

Isso nos permite escrever a energia armazenada no capacitor como

$$\begin{aligned} E_C(t) &= C \int_{-\infty}^t dt' \dot{\Phi}(t') \ddot{\Phi}(t'), \\ &= C \int_{-\infty}^t d\dot{\Phi}(t') \dot{\Phi}(t'), \\ &= \frac{C}{2} \dot{\Phi}^2(t), \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

onde usamos $\ddot{\Phi}_C(t') = d\dot{\Phi}_C(t')/dt'$.

A energia armazenada no indutor, E_L , é obtida usando a relação $V_L(t) = L\dot{I}_L$, que implica, $I_L(t) = \Phi(t)/L$, isto é

$$\begin{aligned} E_L(t) &= \int_{-\infty}^t dt' \dot{\Phi}(t') I_L(t'), \\ &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t d\Phi(t') \Phi(t'), \\ &= \frac{1}{2L} \Phi^2(t), \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

onde usamos $\dot{\Phi}(t) = d\Phi(t)/dt$.

Como determinamos a energia de cada componente do circuito LC, a energia total E_T é dada pela soma das energias armazenadas no capacitor, Eq. (3.1.6) e no indutor, Eq. (3.1.7), ou seja,

$$\begin{aligned} E_T(t) &= \frac{C}{2} \dot{\Phi}^2(t) + \frac{1}{2L} \Phi^2(t), \\ &= \frac{C}{2} \dot{\Phi}^2(t) + \frac{C\omega_r^2}{2} \Phi^2(t), \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

onde usamos $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$. A energia escrita desta forma, dá ênfase na semelhança do circuito LC com um oscilador harmônico simples (OHS), cuja a energia é dada por

$$E_{OHS} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2, \quad (3.1.9)$$

o que permite identificar as energias armazenadas no capacitor, Eq. (3.1.6), e no indutor, Eq. (3.1.7), como sendo as energias cinética e potencial, respectivamente. Utilizando esta analogia, vemos que o fluxo $\Phi(t)$ faz o papel da variável dinâmica, e que a capacitância C é o análogo da massa [16].

Como temos as energias cinética e potencial do circuito LC, definimos a lagran-

giana como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{LC} &= E_C - E_L, \\ &= \frac{C}{2} \dot{\Phi}^2(t) - \frac{C\omega_r^2}{2} \Phi^2(t).\end{aligned}\quad (3.1.10)$$

Assim, podemos determinar o momento conjugado

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{LC}}{\partial \dot{\Phi}} = C\dot{\Phi} = Q, \quad (3.1.11)$$

e vemos que Q é o momento conjugado. Temos, então, as correspondências entre o circuito LC e o OHS

$$\begin{cases} x \rightarrow \Phi, \\ m \rightarrow C, \\ p \rightarrow Q. \end{cases} \quad (3.1.12)$$

3.1.1 Hamiltoniano do circuito LC

Uma vez que derivamos a lagrangiana, podemos obter a hamiltoniana do circuito LC e, na sequência, utilizando as regras de quantização, podemos obter o hamiltoniano que descreve a dinâmica dos fótons no ressonador de micro-ondas. A hamiltoniana é obtida a partir da transformada de Legendre da Eq. (3.1.10), isso é,

$$\begin{aligned}H_{LC} &= Q(t)\dot{\Phi}(t) - \mathcal{L}_{LC}, \\ &= \frac{1}{C}Q^2(t) - \frac{1}{2C}Q^2(t) + \frac{C\omega_r^2}{2}\Phi^2(t), \\ &= \frac{1}{2C}Q^2(t) + \frac{C\omega_r^2}{2}\Phi^2(t).\end{aligned}\quad (3.1.13)$$

O próximo passo é promover a carga, $Q(t)$, e o fluxo, $\Phi(t)$, a operadores, que obedecem à relação de comutação $[\hat{\Phi}, \hat{Q}] = i\hbar$ [16]. Isso nos permite escrever o hamiltoniano do circuito LC como

$$\hat{H}_{LC} = \frac{1}{2C}\hat{Q}^2 + \frac{C\omega_r^2}{2}\hat{\Phi}^2. \quad (3.1.14)$$

O hamiltoniano acima é diagonalizado através da seguinte transformação

$$\hat{Q} = iQ_{zpf} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \quad (3.1.15)$$

$$\hat{\Phi} = \Phi_{zpf} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (3.1.16)$$

sendo $Q_{zpf} = \sqrt{\hbar/2Z_r}$ e $\Phi_{zpf} = \sqrt{\hbar Z_r/2}$ as magnitudes das flutuações de vácuo da carga e fluxo, respectivamente, e \hat{a}^\dagger (\hat{a}) é o operador de criação (aniquilação), que obedecem a relação canônica de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Eles podem ser escritos como

$$\hat{a} = \left(\frac{1}{2\hbar Z_r}\right)^{1/2} (\hat{\Phi} + iZ_r\hat{Q}), \quad (3.1.17)$$

$$\hat{a}^\dagger = \left(\frac{1}{2\hbar Z_r}\right)^{1/2} (\hat{\Phi} - iZ_r\hat{Q}), \quad (3.1.18)$$

de onde vemos que o operador \hat{a}^\dagger (\hat{a}) cria (aniquila) uma excitação, isso é, ele cria (aniquila) um fóton de frequência ω_r no ressonador de micro-ondas [16].

Definindo o operador número de fótons $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$, temos que

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger\hat{a} &= \left(\frac{1}{2\hbar Z_r}\right) (\hat{\Phi} + iZ_r\hat{Q}) (\hat{\Phi} - iZ_r\hat{Q}) \\ &= \left(\frac{1}{2\hbar Z_r}\right) (\hat{\Phi} + iZ_r\hat{Q}) (\hat{\Phi} - iZ_r\hat{Q}) \\ &= \left(\frac{1}{2\hbar Z_r}\right) (\hat{\Phi}^2 + Z_r^2\hat{Q}^2 - iZ_r\hat{\Phi}\hat{Q} + iZ_r\hat{\Phi}\hat{Q}) \\ &= \left(\frac{1}{2\hbar Z_r}\right) \left\{ \left(\frac{2Z_r}{\omega_r}\right) \hat{H}_{LC} + iZ_r[\hat{\Phi}, \hat{Q}] \right\} \\ &= \frac{\hat{H}_{LC}}{\hbar\omega_r} - \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

onde usamos a Eq. (3.1.13), em que $Z_r = \sqrt{L/C}$, e a relação $[\hat{\Phi}, \hat{Q}] = i\hbar$. Desta forma, podemos escrever o hamiltoniano, Eq. (3.1.14), como

$$\hat{H}_{LC} = \hbar\omega_r \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right), \quad (3.1.20)$$

com auto-estados que satisfazem $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ para $n = 0, 1, 2, \dots$, o que é exatamente correspondente a um oscilador harmônico quântico (OHQ).

3.2 Junção túnel-ressonador

Vamos agora adicionar a junção túnel e obter a o hamiltoniano total do dispositivo. Considerando o circuito ilustrado na Fig. (3.1), vamos calcular a energia armazenada em cada elemento da junção túnel. Como a energia contida em cada elemento é dada pela Eq. (3.1.3), temos que a energia armazenada no capacitor C_J é

$$E_{C_J}(t) = \frac{C_J}{2} \dot{\Phi}^2(t). \quad (3.2.21)$$

A energia devido ao tunelamento de elétrons é

$$E_T(t) = \int_{-\infty}^t dt' V_T(t') I_T(t'), \quad (3.2.22)$$

sendo

$$I_T(t) = \frac{ie}{\hbar} \left(T^\dagger e^{ie\Phi(t)/\hbar} - T e^{-ie\Phi(t)/\hbar} \right), \quad (3.2.23)$$

a corrente de tunelamento de elétrons através da junção [17], que é definida em termos do operador de tunelamento $\hat{T} = \sum_{l,r} t_{l,r} c_l^\dagger c_r$ que transfere um elétron do eletrodo r para o eletrodo l com amplitude $t_{l,r}$. Como $V_T = \dot{\Phi}(t)$, temos

$$\begin{aligned} E_T(t) &= \frac{ie}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \left(\hat{T}^\dagger e^{ie\Phi(t')/\hbar} - \hat{T} e^{-ie\Phi(t')/\hbar} \right) \dot{\Phi}(t'), \\ &= \frac{ie}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \left(\hat{T}^\dagger e^{ie\Phi(t')/\hbar} - \hat{T} e^{-ie\Phi(t')/\hbar} \right) \frac{d\Phi(t')}{dt'}, \\ &= \frac{ie}{\hbar} \int_{-\infty}^t \left(\hat{T}^\dagger e^{ie\Phi(t')/\hbar} - \hat{T} e^{-ie\Phi(t')/\hbar} \right) d\Phi(t'), \\ &= \hat{T}^\dagger e^{ie\Phi(t)/\hbar} + \hat{T} e^{-ie\Phi(t)/\hbar}. \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

onde usamos $\dot{\Phi}(t') = d\Phi(t')/dt'$.

Combinando as Eqs. (3.1.10), (3.2.21) e (3.2.24), obtemos a, a lagrangiana total do dispositivo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} C_\Sigma \dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2L} \Phi^2 - E_T, \quad (3.2.25)$$

sendo $C_\Sigma = C + C_J$. A hamiltoniana desse circuito, fazendo a transformada de Legendre

$$H = Q\dot{\Phi} - \mathcal{L}, \quad (3.2.26)$$

onde $Q = C_\Sigma \dot{\Phi}$, análogo ao que vimos anteriormente Eq. (3.1.11). Logo, a hamiltoniana do sistema será

$$H_C = \frac{1}{2C_\Sigma} Q^2(t) + \frac{C_\Sigma \omega_r^2}{2} \Phi^2(t) + T^\dagger e^{ie\Phi/\hbar} + T e^{-ie\Phi/\hbar}, \quad (3.2.27)$$

sendo $\omega_r = 1/\sqrt{LC_\Sigma}$. A quantização de H_C é obtida ao elevar Φ e Q ao nível de operadores, que satisfazem a relação de comutação $[\hat{\Phi}, \hat{Q}] = i\hbar$. Dessa forma,

$$\hat{H}_C = \frac{1}{2C_\Sigma} \hat{Q}^2 + \frac{C_\Sigma \omega_r^2}{2} \hat{\Phi}^2 + \hat{T}^\dagger e^{ie\hat{\Phi}/\hbar} + \hat{T} e^{-ie\hat{\Phi}/\hbar}, \quad (3.2.28)$$

Utilizando as Eqs. (3.1.15) e (3.1.16), podemos reescrever a Eq. (3.2.28) como

$$\hat{H}_C = \hbar\omega_r \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{T}^\dagger e^{ie\hat{\Phi}/\hbar} + \hat{T} e^{-ie\hat{\Phi}/\hbar}. \quad (3.2.29)$$

O hamiltoniano total do circuito é obtido ao somar H_C com a energia cinética dos eletrodos [16, 17]

$$\hat{H}_{qp} = \sum_l \epsilon_l \hat{c}_l^\dagger \hat{c}_l + \sum_r \epsilon_r \hat{c}_r^\dagger \hat{c}_r, \quad (3.2.30)$$

sendo ϵ_α a energia orbital de cada nível do eletrodo. c_α^\dagger cria um elétron no mesmo eletrodo, enquanto \hat{c}_α aniquila um elétron no eletrodo α . Os operadores fermiônicos obedecem a seguinte relação de anti-comutação: $\{c_\alpha, c_{\alpha'}^\dagger\} = \delta_{\alpha, \alpha'}$. Portanto, o hamiltoniano que descreve o acoplamento da junção túnel com o ressonador de micro-ondas é

$$\hat{H} = \hbar\omega_r \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{T}^\dagger e^{ie\hat{\Phi}/\hbar} + \hat{T} e^{-ie\hat{\Phi}/\hbar} + \hat{H}_{qp}. \quad (3.2.31)$$

No próximo capítulo, vamos utilizar o hamiltoniano acima para derivar a equação mestra que descreve a dinâmica dos fótons no ressonador de micro-ondas acoplada com a junção túnel sob a influência de voltagens ac e dc.

DINÂMICA DE FÓTONS EM UMA JUNÇÃO TÚNEL-RESSONADOR

Uma junção túnel-ressonador se comporta como um reservatório de campo eletromagnético [9]. Recentemente, foi observado que ao submeter a junção túnel as voltagens dc e ac, o sistema junção túnel-ressonador passa a gerar fótons em estados comprimidos para ($\omega_{ac} = 2\omega_r$), sendo ω_{ac} a frequência de voltagem ac e ω_r a frequência do ressonador [10]. Além disso, foi observado que para altas voltagens ac, a junção túnel apresenta ruído não-gaussiano [7]. Neste capítulo, vamos derivar a equação mestra na aproximação de Markov para descrever a dinâmica de fótons em um junção túnel para os casos $\omega_{ac} = 0$, $\omega_{ac} = 2\omega_r$ e $\omega_{ac} = 3\omega_r$.

4.1 Introdução

Considere um ressonador de micro-ondas acoplado a uma junção túnel sob a influência de voltagens dc (V) e voltagem ac [$V_{ac}(t)$], veja Fig. (4.1). Como demonstrado no Cap.3, o hamiltoniano que descreve a interação do ressonador acoplado com uma junção túnel é dado por [6]

$$H = \hbar\omega_r\hat{a}^\dagger\hat{a} + H_{qp} + \hat{T}(t)e^{-i\lambda(\hat{a}^\dagger+\hat{a})} + \hat{T}^\dagger(t)e^{i\lambda(\hat{a}^\dagger+\hat{a})}. \quad (4.1.1)$$

O primeiro termo descreve o modo único do ressonador de micro-onda com frequência ω_r , sendo \hat{a} e \hat{a}^\dagger , respectivamente, os operadores de aniquilação e criação de fótons no ressonador. O segundo termo descreve a dinâmica dos elétrons nos eletrodos da junção túnel na ausência de tunelamento. Já os últimos dois termos descrevem a interação entre a junção túnel com o ressonador, que é definida a partir do operador de tunelamento $\hat{T}(t) = \sum_{l,r} t_{l,r} \hat{c}_l^\dagger \hat{c}_r e^{ieVt/\hbar} e^{-i\phi_{ac}(t)}$, que transfere um elétron do eletrodo r para o eletrodo l com amplitude $t_{l,r}$. c_α^\dagger cria um elétron no eletrodo $\alpha = r, l$. $\phi_{ac}(t) = i\frac{e}{\hbar} \int_\infty^t V_{ac}(t') dt'$ é a fase da voltagem ac e V_{ac} a amplitude da voltagem ac. Note que separamos os fluxos devido

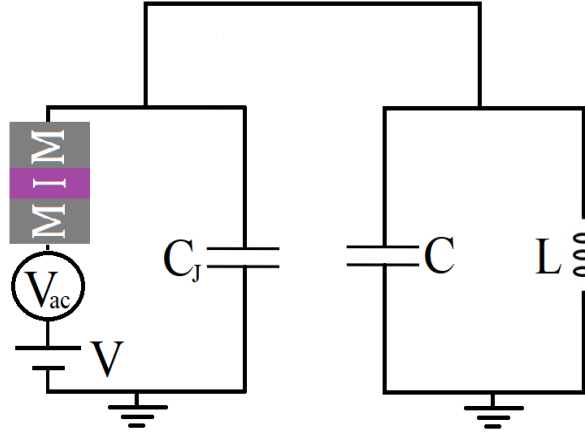


Figura 4.1: O esquema representa o acoplamento de uma junção túnel com um ressonador. A junção túnel é caracterizada por um eletrodo M-I-M, onde ocorre o tunelamento, por uma capacitância geométrica C_J e uma fonte de voltagem V e V_{ac} . Enquanto o ressonador, um circuito LC, é caracterizado por sua indutância L e capacitância C .

as voltagem clássicas (dc e ac) do fluxo quântico, isto é, $ie\hat{\Phi}/\hbar \equiv ieVt/\hbar + \phi_{ac} + ie\hat{\Phi}/\hbar$ e usamos a definição (3.1.16). O parâmetro de acoplamento $\lambda = \sqrt{\pi Z_r/R_K}$ é definido em termos da impedância característica do ressonador $Z_r = \sqrt{L/C}$ e resistência quântica $R_K = h/e^2 \approx 25,8 \text{ k}\Omega$. Valores típicos da indutância $L \approx 1,5 \text{ nH}$ e da capacitância $C \approx 0,6 \text{ pF}$ o que implica em $\omega_r = 2\pi \times 5 \text{ GHz}$ e $Z_r = 50 \text{ }\Omega$. Para este valor de impedância característica, a força de interação elétron-fóton λ é muito menor que um, ($\lambda \approx 0,077 \ll 1$), o que nos permite utilizar o formalismo da equação mestra para descrever a dinâmica dos fótons [3].

Antes de derivar a equação mestra, vamos simplificar o hamiltoniano de interação. Para isso, usaremos o teorema de Baker-Hausdorf-Campbell, $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{-[\hat{A},\hat{B}]}e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}$, o que nos permite escrever

$$H_{int}(t) = \hat{T}(t)e^{-\lambda^2/2}e^{-i\lambda\hat{a}^\dagger}e^{-i\lambda\hat{a}} + \hat{T}^\dagger(t)e^{-\lambda^2/2}e^{i\lambda\hat{a}^\dagger}e^{i\lambda\hat{a}}. \quad (4.1.2)$$

Expandindo os operadores exponencial da equação acima em série de Taylor, o hamiltoniano de interação fica

$$H_{int}(t) = e^{-\lambda^2/2} \sum_{k,l=0} \frac{(i\lambda)^{k+l}}{k!l!} [\hat{T}^\dagger(t) + (-1)^{k+l}\hat{T}(t)] \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^l. \quad (4.1.3)$$

$$H_{int}(t) = e^{-\lambda^2/2} \sum_{\substack{j,k \\ j \geq k}} \frac{(i\lambda)^j \hat{I}_j(t)}{k!(j-k)!} \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k}. \quad (4.1.4)$$

onde fizemos $j = k + l$ e $\hat{I}_j(t) = [\hat{T}^\dagger(t) + (-1)^j \hat{T}(t)]$.

A equação mestra, Eq. (2.1.22), pode ser expandida da seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau Tr_{qp} \left\{ [H_{\text{int}}(t)H_{\text{int}}(t-\tau)\rho(t)\rho_{qp}] - [\rho(t)\rho_{qp}H_{\text{int}}(t-\tau)H_{\text{int}}(t)] \right. \\ & \left. - [H_{\text{int}}(t-\tau)\rho(t)\rho_{qp}H_{\text{int}}(t)] + [H_{\text{int}}(t)\rho(t)\rho_{qp}H_{\text{int}}(t-\tau)] \right\}, \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

sendo $\rho(t)$ o operador densidade dos fótons do ressonador de micro-ondas (sistema), ρ_{qp} o operador densidade da junção túnel (reservatório), $H_{\text{int}}(t)$ o hamiltoniano de interação na representação de interação. Substituindo a Eq. (4.1.4) na Eq. (4.1.5), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -\frac{e^{-\lambda^2}}{\hbar^2} \sum_{\substack{j,k,p,q \\ j \geq k \\ q \geq p}} \left(\frac{(i\lambda)^{j+q}}{k!p!(j-k)!(q-p)!} \right) \int_0^\infty d\tau \left\{ \langle \hat{I}_j(t)\hat{I}_q(t-\tau) \rangle \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{q-p} \rho(t) e^{i(q-2p)\omega_r \tau} \right. \\ & - \langle \hat{I}_j(t-\tau)\hat{I}_q(t) \rangle \rho(t) \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{q-p} e^{i(j-2k)\omega_r \tau} - \langle \hat{I}_q(t)\hat{I}_j(t-\tau) \rangle \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \rho(t) \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{q-p} e^{i(j-2k)\omega_r \tau} \\ & \left. + \langle \hat{I}_q(t-\tau)\hat{I}_j(t) \rangle \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \rho(t) \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{q-p} e^{i(q-2p)\omega_r \tau} \right\} e^{i(2k+2p-j-q)\omega_r t}. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Dividindo a Eq.(4.1.6) em quatro termos A_1 , A_2 , A_3 e A_4 , temos, para o primeiro termo,

$$A_1 = e^{-\lambda^2} \int_0^\infty d\tau \langle \hat{I}_j(t)\hat{I}_q(t-\tau) \rangle \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{q-p} \rho(t) e^{i(2k+2p-j-q)\omega_r t} e^{i(q-2p)\omega_r \tau}. \quad (4.1.7)$$

Utilizando a definição da função de correlação $\langle I_j[\omega_1]I_q[\omega_2] \rangle$, derivada no Apêndice A, a integral em τ na equação acima resulta em

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\tau \langle \hat{I}_j(t)\hat{I}_q(t-\tau) \rangle e^{i(q-2p)\omega_r \tau} &= \int_{\omega_1, \omega_2} \langle \hat{I}_j[\omega_1]\hat{I}_q[\omega_2] \rangle e^{-i(\omega_1+\omega_2)t} \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega_2+(q-2p)\omega_r)\tau} \\ &= i \frac{\hbar^2}{e^2} (-1)^q \sum_n \int_{\omega_2} \frac{S_n^{(j-q)}(n\omega_{ac} - \omega_2)}{\omega_2 + (q-2p)\omega_r + i0^+} e^{-in\omega_{ac}t}, \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

onde $\int_\omega = \int_{-\infty}^\infty d\omega/2\pi$. Devido à modulação da voltagem ac, as propriedades da junção túnel são caracterizadas pela função de correlação [6] [ver Apêndice A, Eq. (A.12)]

$$\langle \hat{I}_j[\omega_1]\hat{I}_q[\omega_2] \rangle = 2\pi \frac{\hbar^2}{e^2} (-1)^q \sum_n S_n^{(j-q)}(\omega_1) \delta(\omega_1 + \omega_2 - n\omega_{ac}), \quad (4.1.9)$$

sendo $\hat{I}_j[\omega]$ a transformada de Fourier do operador $\hat{I}_j(t)$ e

$$S_n^{(j)}(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{n_1} [\hat{c}_{n_1} \hat{c}_{n_1+n}^* S_{eq}(\hbar\omega + eV + n_1\hbar\omega_{ac}) + (-1)^j \hat{c}_{n_1}^* \hat{c}_{n_1-n} S_{eq}(\hbar\omega - eV - n_1\hbar\omega_{ac})], \quad (4.1.10)$$

sendo $S_{eq}(\omega)$ o ruído de corrente em equilíbrio e c_n o coeficiente da expansão de Fourier

$$e^{i\phi_{ac}(t)} = \sum_n c_n e^{in\omega_{ac}t}.$$

Considerando $V_{ac}(t) = V_{ac} \cos(\omega_{ac}t)$, podemos identificar o o coeficiente da expansão de Fourier como

$$c_n = J_n \left(\frac{eV_{ac}}{\hbar\omega_{ac}} \right), \quad (4.1.11)$$

sendo $J_n(x)$ a função de Bessel de primeira espécie. Substituindo a Eq.(4.1.8) na Eq. (4.1.7), resulta

$$A_1 = i \frac{\hbar^2}{e^2} (-1)^q \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{q-p} \rho(t) \int_{\omega_2} \frac{S_n^{(j-q)}(n\omega_{ac} - \omega_2)}{\omega_2 + (q-2p)\omega_r + i0^+} e^{i(2k+2p-j-q)\omega_r t} e^{-in\omega_{ac}t}. \quad (4.1.12)$$

De modo análogo, obtemos para A_2 , A_3 e A_4 :

$$A_2 = i \frac{\hbar^2}{e^2} (-1)^q \rho(t) \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{q-p} \int_{\omega_1} \frac{S_n^{(j-q)}(\omega_1)}{\omega_1 + (j-2k)\omega_r + i0^+} e^{i(2k+2p-j-q)\omega_r t} e^{-in\omega_{ac}t}, \quad (4.1.13)$$

$$A_3 = i \frac{\hbar^2}{e^2} (-1)^j \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \rho(t) \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{q-p} \int_{\omega_2} \frac{S_n^{(q-j)}(n\omega_{ac} - \omega_2)}{\omega_2 + (j-2k)\omega_r + i0^+} e^{i(2k+2p-j-q)\omega_r t} e^{-in\omega_{ac}t}, \quad (4.1.14)$$

e

$$A_4 = i \frac{\hbar^2}{e^2} (-1)^j \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \rho(t) \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{q-p} \int_{\omega_1} \frac{S_n^{(q-j)}(\omega_1)}{\omega_1 + (q-2p)\omega_r + i0^+} e^{i(2k+2p-j-q)\omega_r t} e^{-in\omega_{ac}t}. \quad (4.1.15)$$

Substituindo as Eqs. (4.1.12), (4.1.13), (4.1.14) e (4.1.15) na Eq. (4.1.6), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i \frac{e^{-\lambda^2}}{e^2} \sum_{\substack{n,j,k,p,q \\ j \geq k \\ q \geq p}} \frac{(i\lambda)^{j+q}}{k! p! (j-k)! (q-p)!} \int_{\omega} \left[(-1)^q \frac{S_n^{(j-q)}(n\omega_{ac} - \omega)}{\omega + (q-2p)\omega_r + i0^+} \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{q-p} \rho(t) \right. \\ & + (-1)^q \frac{S_n^{(j-q)}(\omega)}{\omega + (j-2k)\omega_r + i0^+} \rho(t) \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{q-p} - (-1)^j \left(\frac{S_n^{(q-j)}(n\omega_{ac} - \omega)}{\omega + (j-2k)\omega_r + i0^+} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{S_n^{(q-j)}(\omega)}{\omega + (q-2p)\omega_r + i0^+} \right) \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \rho(t) \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{q-p} \right] e^{i(2k+2p-j-q)\omega_r t} e^{-in\omega_{ac}t}, \quad (4.1.16) \end{aligned}$$

que é a equação mestra que usaremos para investigar as propriedades do campo eletro-

magnético quando a junção está sob a influência de voltagem ac oscilando em frequências iguais a $2\omega_r$ e $3\omega_r$.

4.2 Dinâmica dos fótons para diferentes frequências da voltagem ac

4.2.1 Caso geral

Vamos começar aplicando a aproximação de onda girante (RWA-da sigla em inglês). Para isso, devemos fixar o valor da frequência ac. Contudo, na Eq. (4.1.16), o termo com $n = 0$ está sempre presente, e ele é independente da frequência ω_{ac} . Para $n = 0$, RWA implica em $2k + 2p - j - q = 0$ com a condição $2k + p - j \geq 0$. Assim, para $n = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{n=0} = & -i \frac{e^{-\lambda^2}}{e^2} \sum_{\substack{j,k,p \\ j \geq k}} \frac{(-1)^j (i\lambda)^{2k+2p}}{k! p! (j-k)! (2k+p-j)!} \int_{\omega} \left[\frac{S_0^{(2)}(-\omega)}{\omega + (2k-j)\omega_r + i0^+} \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{2k+p-j} \rho(t) \right. \\ & + \frac{S_0^{(2)}(\omega)}{\omega + (j-2k)\omega_r + i0^+} \rho(t) \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{2k+p-j} \\ & \left. - \left(\frac{S_0^{(2)}(-\omega)}{\omega + (j-2k)\omega_r + i0^+} + \frac{S_0^{(2)}(\omega)}{\omega + (2k-j)\omega_r + i0^+} \right) \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \rho(t) \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{2k+p-j} \right]. \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Utilizando a identidade [14]

$$\int_0^{\infty} e^{i(\omega+\omega')t} dt = \frac{i}{\omega + \omega' + i0^+} = i\mathcal{P} \frac{1}{\omega + \omega'} + \pi\delta(\omega + \omega'), \quad (4.2.18)$$

sendo \mathcal{P} a parte principal. Podemos reescrever a Eq. (4.2.17) como

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{n=0} = & \frac{e^{-\lambda^2}}{e^2} \sum_{\substack{j,k,p \\ j \geq k}} \frac{(-1)^j (i\lambda)^{2k+2p}}{k! p! (j-k)! (2k+p-j)!} \left[i\mathcal{P} \int_{\omega} \frac{S_0^{(2)}(\omega)}{\omega + (j-2k)\omega_r} \right. \\ & \times [\hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{2k+p-j}, \rho(t)] - \frac{1}{2} S_0^{(2)}((2k-j)\omega_r) \{ \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{2k+p-j}, \rho(t) \} \\ & \left. + S_0^{(2)}((j-2k)\omega_r) \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \rho(t) \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{2k+p-j} \right]. \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Como o acoplamento entre fótons e elétrons é fraco, vamos considerar somente termos proporcionais a λ^2 . Neste caso, a soma (4.2.19) esta restrita aos valores $\{k, p\} = \{1, 0\}$ e

$\{k, p\} = \{0, 1\}$ e às condições $2k + p - j \geq 0$ e $j \geq k$, de forma que

$$\dot{\rho}_{n=0} = \frac{1}{e^2} (\dot{\rho}_{1,0}^{\lambda^2} + \dot{\rho}_{0,1}^{\lambda^2}). \quad (4.2.20)$$

Para $\{k, p\} = \{1, 0\}$, temos $j = 1, 2$ e a contribuição para a equação mestra é

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{1,0}^{\lambda^2} = & \lambda^2 \sum_{j=0}^1 \frac{(-1)^j}{j!(1-j)!} \left[i\mathcal{P} \int_{\omega} \frac{S_0^{(2)}(\omega)}{\omega + (j-1)\omega_r} [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \rho] \right. \\ & \left. + S_0^{(2)}((j-1)\omega_r) \hat{a}^\dagger \hat{a}^j \rho \hat{a}^{1-j} - S_0^{(2)}((1-j)\omega_r) \{\hat{a}^\dagger \hat{a}, \rho\}/2 \right]. \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Onde realizamos a mudança de variável $j-1 \rightarrow j$. Calculando a equação mestra para o caso $\{k, p\} = \{0, 1\}$ com $j = 0, 1$. Obtemos a contribuição

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{0,1}^{\lambda^2} = & -\lambda^2 \sum_{j=0}^1 \frac{(-1)^j}{j!(1-j)!} \left[i\mathcal{P} \int_{\omega} \frac{S_0^{(2)}(\omega)}{\omega + j\omega_r} [\hat{a}^j \hat{a}^\dagger \hat{a}^{1-j}, \rho] \right. \\ & \left. + S_0^{(2)}(j\omega_r) \hat{a}^j \rho \hat{a}^\dagger \hat{a}^{1-j} - S_0^{(2)}(-j\omega_r) \{\hat{a}^j \hat{a}^\dagger \hat{a}^{1-j}, \rho\}/2 \right]. \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Somando as contribuições (4.2.21) e (4.2.22), e utilizando as definições do dissipador $\mathcal{D}[\hat{O}]\rho = \hat{O}\rho\hat{O}^\dagger - \{\hat{O}^\dagger\hat{O}, \rho\}/2$, e da admitância generalizada [5]

$$Y_n(\omega) = -\frac{i}{\hbar\omega} \int_{\omega_1} [S_n^{(2)}(\omega_1) - S_n^{(2)}(n\omega_{ac} - \omega_1)] \left(\frac{1}{\omega_1 + \omega + i0^+} - \frac{1}{\omega_1 + i0^+} \right),$$

obtemos

$$\dot{\rho}_{1,0}^{\lambda^2} + \dot{\rho}_{0,1}^{\lambda^2} = -i\lambda^2 \hbar\omega_r \text{Im}Y_0(\omega_r) [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \rho] + \lambda^2 S_0^{(2)}(\omega_r) \mathcal{D}[\hat{a}]\rho + \lambda^2 S_0^{(2)}(-\omega_r) \mathcal{D}[\hat{a}^\dagger]\rho. \quad (4.2.23)$$

Para a junção túnel, $\text{Im}Y_0(\omega_r) = 0$ [6]. Logo, substituindo a Eq. (4.2.23) na Eq. (4.2.20), temos

$$\dot{\rho}_{n=0} = e^{-2}\lambda^2 S_0^{(2)}(\omega_r) \mathcal{D}[\hat{a}]\rho + e^{-2}\lambda^2 S_0^{(2)}(-\omega_r) \mathcal{D}[\hat{a}^\dagger]\rho, \quad (4.2.24)$$

que podemos identificar como a equação mestra de um modo de campo eletromagnético acoplado a um reservatório térmico. Podemos identificar $\kappa\bar{n} = e^{-2}\lambda S_0^{(2)}(-\omega_r)$ e $\kappa(\bar{n}+1) = e^{-2}\lambda S_0^{(2)}(\omega_r)$, o que nos permite escrever o número de fótons \bar{n} e a constante de decaimento de fótons κ como

$$\kappa = e^{-2}\lambda^2 [S_0^{(2)}(\omega_r) - S_0^{(2)}(-\omega_r)], \quad (4.2.25)$$

$$\bar{n} = \frac{S_0^{(2)}(-\omega_r)}{S_0^{(2)}(\omega_r) - S_0^{(2)}(-\omega_r)}. \quad (4.2.26)$$

A taxa de decaimento é dada pela diferença entre o ruído de absorção $S_0^{(2)}(\omega_r)$ e o ruído de emissão $S_0^{(2)}(-\omega_r)$ de fótons pela junção. Sendo κ sempre maior do que zero, a junção sempre absorve mais fótons do que emite. Conseqüentemente, o número de fótons no ressonador é dado pelo ruído de emissão dividido pela taxa de perdas de fótons do ressonador para a junção.

Notamos que a (4.2.24) também descreve a dinâmica dos fótons na ausência de voltagem ac quando a junção túnel está apenas sob a influência da voltagem dc. Assim, neste limite, a junção comporta-se como um reservatório térmico. O que podemos deduzir comparando a Eq. (4.2.24) com a Eq. (2.1.42). Nas próximas duas sub-seções vamos mostrar que diferente reservatórios são criados simplesmente mudando a frequência da voltagem ac.

4.2.2 Dinâmica de fótons para $\omega_{ac} = 2\omega_r$

Nesta seção, vamos considerar a frequência $\omega_{ac} = 2\omega_r$, de forma que esperamos observar os fótons do ressonador interagindo com outro reservatório. Neste caso, considerando a aproximação de RWA da Eq. (4.1.16), que é satisfeita se $q = 2(k + p - n) - j$ e $2(k - n) + p - j$. Desta forma, a Eq. (4.1.16) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{n \neq 0} = & \frac{-i}{e^2} \sum_{\substack{n,j,k,p \\ n \neq 0}} \frac{(i\lambda)^{2(k+p-n)} (-1)^j}{k! p! (j-k)! (2k+p-2n-j)!} \int_{\omega} \left[\frac{S_n^{(2)}(2n\omega_r - \omega)}{\omega + (2k-j-2n)\omega_r + i0^+} \times \right. \\ & \times \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{2k+p-2n-j} \rho(t) + \frac{S_n^{(2)}(\omega)}{\omega + (j-2k)\omega_r + i0^+} \rho(t) \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{2k+p-2n-j} \\ & \left. - \left(\frac{S_n^{(2)}(2n\omega_r - \omega)}{\omega + (j-2k)\omega_r + i0^+} + \frac{S_n^{(2)}(\omega)}{\omega + (2k-j-2n)\omega_r + i0^+} \right) \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \rho(t) \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{2k+p-2n-j} \right]. \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

Como estamos interessados no caso λ^2 , temos a condição $k + p - n = 1 \rightarrow n = k + p - 1 \neq 0$. Portanto, $2(k - n) + p - j \geq 0 \rightarrow 2 - p - j \geq 0$. Assim, temos a contribuição de λ^2 como

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^{\lambda^2} = & i \frac{\lambda^2 e^{-\lambda^2}}{e^2} \sum_{j,k,p} \frac{(-1)^j}{k! p! (j-k)! (2-p-j)!} \int_{\omega} \left[\frac{S_n^{(2)}(2n\omega_r - \omega)}{\omega + (2-2p-j)\omega_r + i0^+} \times \right. \\ & \times \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{2-p-j} \rho(t) + \frac{S_n^{(2)}(\omega)}{\omega + (j-2k)\omega_r + i0^+} \rho(t) \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{2-p-j} \\ & \left. - \left(\frac{S_n^{(2)}(2n\omega_r - \omega)}{\omega + (j-2k)\omega_r + i0^+} + \frac{S_n^{(2)}(\omega)}{\omega + (2-2p-j)\omega_r + i0^+} \right) \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \rho(t) \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{2-p-j} \right], \\ = & \frac{\lambda^2}{e^2} \sum_{j \geq k} \dot{\rho}_{k,p}^{\lambda^2}. \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

Os valores de k, p e j que satisfazem $2 - p - j \geq 0$, $j \geq k$ e $n = k + p - 1 \neq 0$ são

1. $k = p = 0$, $n = -1$, com $j = 0, 1, 2$
2. $k = p = 1$, $n = 1$, com $j = 1$
3. $k = 2$, $p = 0$, $n = 1$, com $j = 2$
4. $k = 0$, $p = 2$, $n = 1$, com $j = 0$

Somando todas as contribuições acima, obtemos

$$\dot{\rho}_{n \neq 0}^{\lambda^2} = \frac{\hbar\omega_r\lambda^2 e^{-\lambda^2}}{2e^2} [Y_1(-\omega_r)\hat{a}^{\dagger 2} - Y_1^*(-\omega_r)\hat{a}^2, \rho] + \frac{\lambda^2 e^{-\lambda^2}}{e^2} S_1^{(2)}(\omega_r)(\mathcal{S}[\hat{a}]\rho + \mathcal{S}[\hat{a}^\dagger]\rho), \quad (4.2.29)$$

onde nós definimos o dissipador $\mathcal{S}[O]\rho = O\rho O - \{O^2, \rho\}/2$, e usamos as relações $S_{-1}(-\omega_r) = S_1(\omega_r)$, $S_{-1}(\omega) = S_1(\omega + 2\omega_r)$ e $S_{-1}(-2\omega_r - \omega) = S_1(-\omega)$.

Somando a Eq. (4.2.24) com a Eq. (4.2.29), a equação mestra para a frequência $\omega_{ac} = 2\omega_r$ é

$$\dot{\rho} = \frac{\lambda^2}{e^2} S_0^{(2)}(\omega_r)\mathcal{D}[\hat{a}]\rho + \frac{\lambda^2}{e^2} S_0^{(2)}(-\omega_r)\mathcal{D}[\hat{a}^\dagger]\rho + \frac{\lambda^2}{e^2} S_1^{(2)}(\omega_r)(\mathcal{S}[\hat{a}]\rho + \mathcal{S}[\hat{a}^\dagger]\rho). \quad (4.2.30)$$

para uma junção túnel [$Y_1(-\omega_r) = 0$]* [6]. Já os demais termos da equação descreve a compressão dissipativa de um modo do campo eletromagnético [6]. Podemos identificar este caráter ao comparar à equação mestra para um modo do campo acoplado a reservatório de campo comprimido, o que identificamos ao comparar a Eq. (4.2.30) com a Eq. (2.1.56). Portanto, os fótons do ressonador estão acoplados a um reservatório comprimido. Vamos agora caracterizar as propriedades estatísticas dos fótons [3].

4.2.2.1 Cálculo das propriedades estatísticas dos fótons

Seguindo o que fizemos no Cap. 2, vamos realizar o cálculo da variância das quadraturas do campo eletromagnético, que são

$$(\Delta X)^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2, \quad (4.2.31)$$

$$(\Delta Y)^2 = \langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2, \quad (4.2.32)$$

sendo $X = \hat{a} + \hat{a}^\dagger$ e $Y = -i(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$ as quadraturas do campo eletromagnético. Vamos começar calculando os valores esperados dos operadores \hat{a} , $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ e \hat{a}^2 . Começando com o valor esperado de \hat{a}

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{a} \rangle = Tr_S[\hat{a}\dot{\rho}] = Tr_S\left\{ \frac{\lambda^2}{e^2} S_0^{(2)}(\omega_r)\hat{a}\mathcal{D}[\hat{a}]\rho + \frac{\lambda^2}{e^2} S_0^{(2)}(-\omega_r)\hat{a}\mathcal{D}[\hat{a}^\dagger]\rho + \frac{\lambda^2}{e^2} S_1^{(2)}(\omega_r)\hat{a}(\mathcal{S}[\hat{a}]\rho + \mathcal{S}[\hat{a}^\dagger]\rho) \right\}. \quad (4.2.33)$$

Escrevendo a relação entre os operadores da Eq. (4.2.33) em três partes A , B e C . De A

$$\langle A \rangle = Tr_S(\hat{a}\mathcal{D}[\hat{a}]) = \langle \hat{a} \rangle / 2. \quad (4.2.34)$$

Para o segundo termo, temos

$$\langle B \rangle = Tr_S(\hat{a}\mathcal{D}[\hat{a}^\dagger]) = \langle \hat{a} \rangle / 2. \quad (4.2.35)$$

Da mesma forma, temos para o terceiro termo,

$$\langle C \rangle = Tr_S\{\hat{a}(\mathcal{S}[\hat{a}] + \mathcal{S}[\hat{a}^\dagger])\} = 0. \quad (4.2.36)$$

Substituindo os três termos, na Eq. (4.2.33), e considerando o regime de estado estacionário, temos o valor esperado do operador \hat{a}

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{a} \rangle = \frac{\lambda^2}{e^2} \left[S_0^{(2)}(-\omega_r) - S_0^{(2)}(\omega_r) \right] \langle \hat{a} \rangle = 0 \rightarrow \langle \hat{a} \rangle = 0. \quad (4.2.37)$$

Analogamente, temos os valores esperados dos demais operadores de interesse no estado estacionário

$$\langle n \rangle = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \frac{S_0^{(2)}(-\omega_r)}{S_0^{(2)}(\omega_r) - S_0^{(2)}(-\omega_r)}, \quad (4.2.38)$$

e

$$\langle \hat{a}^2 \rangle = \frac{S_1^{(2)}(\omega_r)}{S_0^{(2)}(\omega_r) - S_0^{(2)}(-\omega_r)}. \quad (4.2.39)$$

A Fig. (4.2) (a) mostra o comportamento do número de fótons, $\langle n \rangle$, como função de V para diferentes valores da amplitude de voltagem ac $\alpha = eV_{ac}/2\hbar\omega_r$, em temperatura nula ($T = 0$) e frequência $\omega_{ac} = 2\omega_r$. Observamos que a população de fótons é mínima em $|eV/\hbar\omega_r| \leq 1$ e depois cresce linearmente. A Fig. (4.2) (b) ilustra o operador anômalo $\langle \hat{a}^2 \rangle$, como função de V para diferentes valores de α , o qual podemos notar que o comportamento é sempre linear, exceto em $eV = \hbar\omega_r$ ou $eV = 3\hbar\omega_r$. Nesses pontos, há uma mudança de inclinação, pois o ressonador passa a aniquilar pares de fótons de maneira mais efetiva. Podemos notar ainda, na Fig. (4.2), que quanto maior a voltagem ac, maior é o número de fótons inicialmente no ressonador, e mais pares de fótons são aniquilados no ressonador.

A Fig. (4.3) ilustra os valores esperados de $\langle n \rangle$ e $\langle \hat{a}^2 \rangle$ como função da voltagem dc para amplitude de voltagem ac fixa em $eV_{ac}/(2\hbar\omega_r) = 0,5$. Observamos que há uma região na qual $\langle n \rangle < \langle \hat{a}^2 \rangle$, o que ocorre na região $|eV/\hbar\omega_r| \leq 1$, ou seja, a aniquilação e criação de pares de fótons é o efeito dominante. Observe, ainda, que na área entre

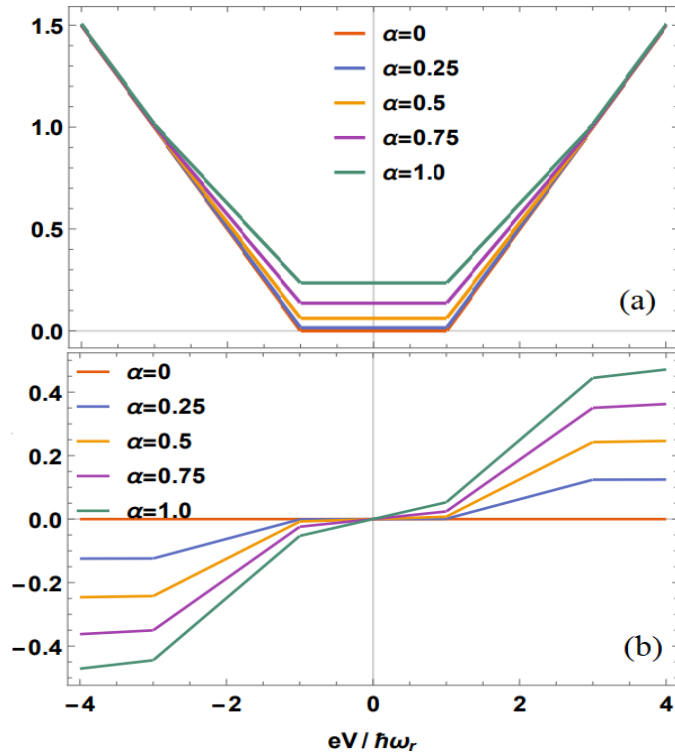


Figura 4.2: Gráfico de $\langle n \rangle$ e $\langle \hat{a}^2 \rangle$ como função da voltagem dc para algumas voltagem ac fixa em $\alpha = eV_{ac}/(2\hbar\omega_r) = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ para $\omega_{ac} = 2\omega_r$.

$0,196\hbar\omega_r < eV < 1,393\hbar\omega_r$ o valor esperado de $\langle \hat{a}^2 \rangle$ é maior que $\langle n \rangle$ indicando a possibilidade de geração de estados comprimidos da luz.

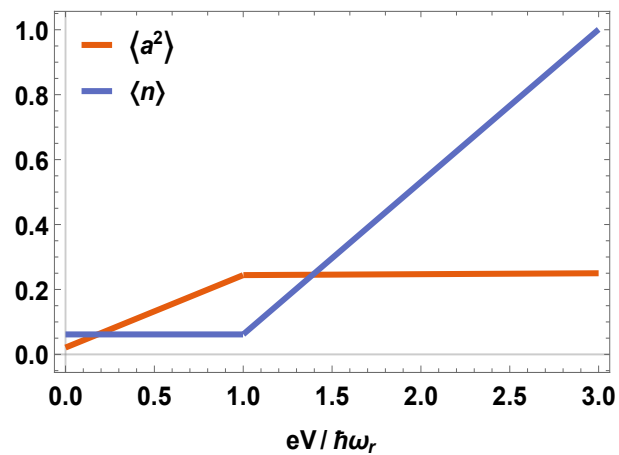


Figura 4.3: Valores esperados de $\langle n \rangle$ e $\langle \hat{a}^2 \rangle$ em função da voltagem dc para voltagem ac fixa, $eV = 0,5\hbar\omega_r$, $\omega_{ac} = 2\omega_r$.

Afim de obter dados mais precisos sobre a geração de estados de vácuo comprimido, utilizamos as Eq. (4.2.37) Eq. (4.2.38) e Eq. (4.2.39) para escrever a variância das

quadraturas $(\Delta Y)^2$ e $(\Delta X)^2$, de forma que

$$\begin{aligned} (\Delta Y)^2 &= -(\langle \hat{a}^2 \rangle - \langle \hat{a}\hat{a}^\dagger \rangle - \langle \hat{a}^\dagger\hat{a} \rangle + \langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle - \langle \hat{a} \rangle^2 + \langle \hat{a} \rangle \langle \hat{a}^\dagger \rangle + \langle \hat{a}^\dagger \rangle \langle \hat{a} \rangle + \langle \hat{a}^\dagger \rangle^2) \\ &= 1 - \langle \hat{a}^2 \rangle - \langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle + 2\langle n \rangle, \end{aligned} \quad (4.2.40)$$

e

$$(\Delta X)^2 = 1 + \langle \hat{a}^2 \rangle + \langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle + 2\langle n \rangle, \quad (4.2.41)$$

ou seja,

$$(\Delta Y)^2 = 1 + 2 \frac{S_0^{(2)}(-\omega_r) - S_1^{(2)}(\omega_r)}{S_0^{(2)}(\omega_r) - S_0^{(2)}(-\omega_r)}, \quad (4.2.42)$$

e

$$(\Delta X)^2 = 1 + 2 \frac{S_0^{(2)}(-\omega_r) + S_1^{(2)}(\omega_r)}{S_0^{(2)}(\omega_r) - S_0^{(2)}(-\omega_r)}. \quad (4.2.43)$$

A Fig. (4.4) mostra o comportamento das variâncias $(\Delta Y)^2$ e $(\Delta X)^2$ como função da voltagem ac para voltagem dc fixa em $eV = \hbar\omega_r$. Podemos observar que para certos valores de voltagem ac, as quadraturas possuem variância menores do que a do vácuo. Isso implica na geração de estados comprimidos. Para $V_{ac} > 0$, o valor de maior compressão do campo é $(\Delta Y)^2 = 0,618$ com $(\Delta X)^2 = 1,865$ que ocorre para $eV_{ac} \approx 0,706 \times 2\hbar\omega_r$, e que satisfaz o princípio da incerteza $\sqrt{(\Delta Y)^2(\Delta X)^2} = 1,073 \geq 1$.

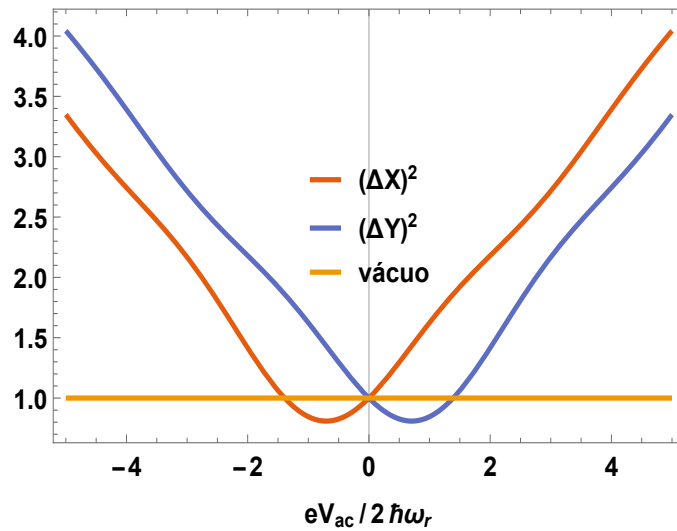


Figura 4.4: Gráfico de $(\Delta X)^2$ e $(\Delta Y)^2$ em função da voltagem ac para voltagem dc fixa, $eV = \hbar\omega_r$ e $\omega_{ac} = 2\omega_r$.

A Fig. (4.5) mostra a medida das variâncias $(\Delta Y)^2$ e $(\Delta X)^2$ como função da voltagem dc e voltagem ac fixa, $eV_{ac} = 0,75 \times 2\hbar\omega_r$, onde podemos ver que quando uma

das variâncias tiver ruído menor que o ruído do vácuo, há a geração de estados de vácuo comprimido.

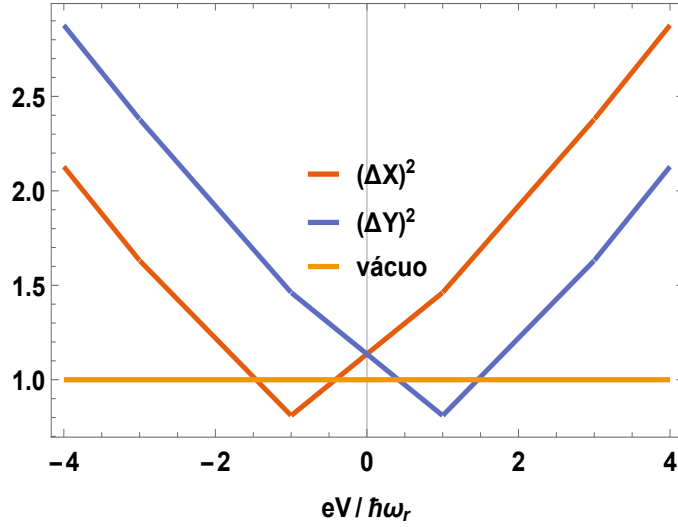


Figura 4.5: Gráfico de $(\Delta Y)^2$ e $(\Delta X)^2$ em função da voltagem dc para voltagem ac fixa, $eV_{ac} = 0,75 \times 2\hbar\omega_r$. Onde há geração de estados de vácuo comprimido para valores de ruído de $(\Delta Y)^2$ e $(\Delta X)^2$ menores que o valor de ruído do vácuo.

Em síntese, observamos que estados comprimidos são gerados utilizando uma frequência ac oscilando em um frequência igual a duas vezes a do ressonador. Além disso, o grau de compressão pode ser controlado variando as amplitudes da voltagens ac e dc.

4.3 Voltagem ac $\omega_{ac} = 3\omega_r$

Na seção anterior, vimos que a junção túnel funciona como um reservatório comprimido para o caso em que a frequência $\omega_{ac} = 2\omega_r$. Agora queremos calcular as propriedades estatísticas dos fótons quando a junção é submetida a uma frequência ac, ω_{ac} , igual a $3\omega_r$, o que foi feito experimentalmente pela primeira vez em 2003 em [18].

Analisando a equação mestra (4.1.16), para $\omega_{ac} = 3\omega_r$, temos as condições $2k + 2p - j - q - 3n = 0 \rightarrow q = 2k + 2p - j - 3n$, de modo que, $2k + p - 3n - j \geq 0$ e $j \geq k$, o que permitem que escrevamos a equação mestra (4.1.16) como

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & \frac{e^{-\lambda^2}}{e^2} \sum_{n,j,k,p} \frac{(i\lambda)^{2(k+p)-3n} (-1)^j}{k! p! (j-k)! (2k+p-j-3n)!} \left[(-1)^{3n} i \mathcal{P} \int_{\omega} \frac{S_n^{(n)}(\omega)}{\omega + (j-2k)\omega_r} \times \right. \\ & \times [\hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{2k+p-j-3n}, \rho(t)] + S_n^{(n)} [(3n+j-2k)\omega_r] \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \rho(t) \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{2k+p-j-3n} \\ & \left. - (-1)^n S_n^{(n)} [(2k-j)\omega_r] \{ \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^{j-k} \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{2k+p-j-3n}, \rho(t) \} / 2 \right]. \end{aligned} \quad (4.3.44)$$

A primeira contribuição para a Eq. (4.3.44) não nula é $2(k+p) - 3n = 3$, que gera um termo proporcional a força de acoplamento elétron-fóton λ^3 . De forma que, os valores de k, p e j que satisfazem as condições $2k + p - 3n - j \geq 0$, $j \geq k$ são

1. $k = 3, p = 0, n = 1$, com $j = 3$;
2. $k = 2, p = 1, n = 1$, com $j = 2$;
3. $k = 1, p = 2, n = 1$, com $j = 1$;
4. $k = 0, p = 3, n = 1$, com $j = 0$;
5. $k = 0, p = 0, n = -1$, com $j = 0, 1, 2, 3$.

Para $n = -1$, nós temos

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}_{n=-1} &= \sum_{j=0}^3 \frac{-i\lambda^3(-1)^j}{j!(3-j)!} \left[-i\mathcal{P} \int_{\omega} \frac{S_{-1}^{(1)}(\omega)}{\omega + j\omega_r} [\hat{a}^3, \rho(t)] + S_{-1}^{(1)}[(j-3)\omega_r] \hat{a}^j \rho(t) \hat{a}^{3-j} \right. \\
 &\quad \left. + S_{-1}^{(1)}(-j\omega_r) \{ \hat{a}^3, \rho(t) \} / 2 \right] \\
 &= -\frac{i\lambda^3}{6} \left\{ \left[-i\mathcal{P} \int_{\omega} \frac{S_{-1}^{(1)}(\omega) + S_{-1}^{(1)}(-3\omega_r - \omega)}{\omega} + 3i\mathcal{P} \int_{\omega} \frac{S_{-1}^{(1)}(\omega) + S_{-1}^{(1)}(-\omega - \omega_r)}{\omega + \omega_r} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{S_{-1}^{(1)}(-3\omega) + S_{-1}^{(1)}(0)}{2} \right] [a^3, \rho] + 3S_{-1}^{(1)}(-\omega_r)(a^2 \rho a - \{a^3, \rho\} / 2) \right. \\
 &\quad \left. - 3S_{-1}^{(1)}(-2\omega_r)(a \rho a^2 - \{a^3, \rho\} / 2) \right\}. \tag{4.3.45}
 \end{aligned}$$

Usando as relações $S_{-1}^{(1)}(-\omega_r) = S_1^{(1)}(2\omega_r)$, $S_{-1}^{(1)}(-2\omega_r) = S_1^{(1)}(\omega_r)$, $S_{-1}^{(1)}(-3\omega_r - \omega) = S_1^{(1)}(-\omega)$ e $S_{-1}^{(1)}(\omega) = S_1^{(1)}(3\omega_r + \omega)$, temos

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}_{n=-1} &= -\frac{i\lambda^3}{6} \left\{ \left[-i\mathcal{P} \int_{\omega} \frac{S_1^{(1)}(3\omega_r + \omega) + S_1^{(1)}(-\omega)}{\omega} + 3i\mathcal{P} \int_{\omega} \frac{S_1^{(1)}(3\omega_r + \omega) + S_1^{(1)}(-\omega)}{\omega + \omega_r} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{S_1^{(1)}(3\omega_r) + S_1^{(1)}(0)}{2} \right] [a^3, \rho] + 3S_1^{(1)}(2\omega_r)(a^2 \rho a - \{a^3, \rho\} / 2) 3S_1^{(1)}(\omega_r)(a \rho a^2 - \{a^3, \rho\} / 2) \right\} \\
 &= -\frac{i\lambda^3}{6} \left\{ \left[i\mathcal{P} \int_{\omega} \frac{S_1^{(1)}(3\omega_r - \omega) + S_1^{(1)}(\omega)}{\omega} - 3i\mathcal{P} \int_{\omega} \frac{S_1^{(1)}(3\omega_r - \omega) + S_1^{(1)}(\omega)}{\omega - \omega_r} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{S_1^{(1)}(3\omega_r) + S_1^{(1)}(0)}{2} \right] [a^3, \rho] + 3S_1^{(1)}(2\omega_r)(a^2 \rho a - \{a^3, \rho\} / 2) - 3S_1^{(1)}(\omega_r)(a \rho a^2 - \{a^3, \rho\} / 2) \right\}. \tag{4.3.46}
 \end{aligned}$$

Definindo

$$\begin{aligned}
 \chi(\omega) &= i \int_{\omega'} \frac{S_n^{(1)}(\omega') + S_n^{(1)}(3\omega_r - \omega')}{\omega' + \omega + i0^+} \\
 &= i\mathcal{P} \int_{\omega'} \frac{S_1^{(1)}(\omega') + S_1^{(1)}(3\omega_r - \omega')}{\omega' + \omega} + \frac{1}{2} [S_1^{(1)}(\omega) - S_1^{(1)}(3\omega_r - \omega)]. \tag{4.3.47}
 \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{n=-1} = & i \frac{\lambda^3}{3!} \frac{e^{-\lambda^2}}{e^2} \left\{ \left[\chi^*(0) + 3i\mathcal{P} \int_{\omega} \frac{S_1^{(1)}(\omega) + S_1^{(1)}(3\omega_r - \omega)}{\omega - \omega_r} \right] [\hat{a}^3, \rho] \right. \\ & \left. + 3S_1^{(1)}(\omega_r)(\hat{a}\rho\hat{a}^2 - \{\hat{a}^3, \rho\}/2) - 3S_1^{(1)}(2\omega_r)(\hat{a}^2\rho\hat{a} - \{\hat{a}^3, \rho\}/2) \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.48)$$

De forma análoga, para $n = 1$, nós obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{n=1} = & i \frac{\lambda^3}{3!} \frac{e^{-\lambda^2}}{e^2} \left\{ \left[\chi(0) - 3i\mathcal{P} \int_{\omega} \frac{S_1^{(1)}(\omega) + S_1^{(1)}(3\omega_r - \omega)}{\omega - \omega_r} \right] [\hat{a}^{\dagger 3}, \rho] \right. \\ & \left. + 3S_1^{(1)}(2\omega_r)(\hat{a}^{\dagger}\rho\hat{a}^{\dagger 2} - \{\hat{a}^{\dagger 3}, \rho\}/2) - 3S_1^{(1)}(\omega_r)(\hat{a}^{\dagger 2}\rho\hat{a}^{\dagger} - \{\hat{a}^{\dagger 3}, \rho\}/2) \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.49)$$

Somando Eq. (4.3.48) e Eq. (4.3.49), temos que a contribuição para a equação mestra da força de acoplamento elétron fóton, λ^3 , é

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^{\lambda^3} = \dot{\rho}_{n=1} + \dot{\rho}_{n=-1} = & i \frac{\lambda^3}{3!e^2} \left\{ [\chi(0)\hat{a}^{\dagger 3} + \chi^*(0)\hat{a}^3, \rho] - 3i\mathcal{P} \int_{\omega} \frac{S_1^{(1)}(\omega) + S_1^{(1)}(3\omega_r - \omega)}{\omega - \omega_r} [\hat{a}^{\dagger 3} + \hat{a}^3, \rho] \right. \\ & \left. + 3S_1^{(1)}(\omega_r)(\mathcal{P}[\hat{a}]\rho - \mathcal{Q}[\hat{a}^{\dagger}]\rho) + 3S_1^{(1)}(2\omega_r)(\mathcal{P}[\hat{a}^{\dagger}]\rho - \mathcal{Q}[\hat{a}]\rho) \right\}, \end{aligned} \quad (4.3.50)$$

onde definimos os dissipadores $\mathcal{P}[\hat{O}]\rho = \hat{O}\rho\hat{O}^2 - \{\hat{O}^3, \rho\}/2$ e $\mathcal{Q}[\hat{O}]\rho = \hat{O}^2\rho\hat{O} - \{\hat{O}^3, \rho\}/2$. De modo que obtemos a equação mestra para o caso em que $\omega_{ac} = 3\omega_r$ ao somar a Eq. (4.2.24) e a Eq. (4.3.50),

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{3\omega_r} = & i \frac{\lambda^3}{3!e^2} \left\{ [\chi(0)\hat{a}^{\dagger 3} + \chi^*(0)\hat{a}^3, \rho] - 3i\mathcal{P} \int_{\omega} \frac{S_1^{(1)}(\omega) + S_1^{(1)}(3\omega_r - \omega)}{\omega - \omega_r} [\hat{a}^{\dagger 3} + \hat{a}^3, \rho] \right\} \\ & + \frac{\lambda^2}{e^2} S_0^{(2)}(\omega_r)\mathcal{D}[\hat{a}]\rho + \frac{\lambda^2}{e^2} S_0^{(2)}(-\omega_r)\mathcal{D}[\hat{a}^{\dagger}]\rho \\ & + i \frac{\lambda^3}{2e^2} \left[S_1^{(1)}(\omega_r)(\mathcal{P}[\hat{a}]\rho - \mathcal{Q}[\hat{a}^{\dagger}]\rho) + S_1^{(1)}(2\omega_r)(\mathcal{P}[\hat{a}^{\dagger}]\rho - \mathcal{Q}[\hat{a}]\rho) \right]. \end{aligned} \quad (4.3.51)$$

Usando a definição

$$G(\omega_r) = \frac{1}{3}\chi(0) - iP \int_{\omega} \frac{S_1^{(1)}(\omega) + S_1^{(1)}(3\omega_r - \omega)}{\omega - \omega_r}, \quad (4.3.52)$$

podemos reescrever a Eq. (4.3.51) como

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{3\omega_r} = & i \frac{\lambda^3}{3!e^2} \left\{ G(\omega_r)[\hat{a}^{\dagger 3} + \hat{a}^3, \rho] + \frac{\lambda^2}{e^2} S_0^{(2)}(\omega_r) \mathcal{D}[\hat{a}] \rho + \frac{\lambda^2}{e^2} S_0^{(2)}(-\omega_r) \mathcal{D}[\hat{a}^\dagger] \rho \right. \\ & \left. + i \frac{\lambda^3}{2e^2} \left[S_1^{(1)}(\omega_r) (\mathcal{P}[\hat{a}] \rho - \mathcal{Q}[\hat{a}^\dagger] \rho) + S_1^{(1)}(2\omega_r) (\mathcal{P}[\hat{a}^\dagger] \rho - \mathcal{Q}[\hat{a}] \rho) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.3.53)$$

que somada com a Eq. (4.2.23) se torna a equação mestra que descreve o sistema junção-túnel para a frequência de voltagem ac $\omega_{ac} = 3\omega_r$, isso é,

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & \frac{\lambda^2}{e^2} S_0^{(2)}(\omega_r) \mathcal{D}[\hat{a}] \rho + \frac{\lambda^2}{e^2} S_0^{(2)}(-\omega_r) \mathcal{D}[\hat{a}^\dagger] \rho + i \frac{\lambda^3}{3!e^2} \left\{ [G(\omega_r) \hat{a}^{\dagger 3} + G^*(\omega_r) \hat{a}^3, \rho] + \frac{\lambda^2}{e^2} S_0^{(2)}(\omega_r) \mathcal{D}[\hat{a}] \rho \right. \\ & \left. + \frac{\lambda^2}{e^2} S_0^{(2)}(-\omega_r) \mathcal{D}[\hat{a}^\dagger] \rho + i \frac{\lambda^3}{2e^2} \left[S_1^{(1)}(\omega_r) (\mathcal{P}[\hat{a}] \rho - \mathcal{Q}[\hat{a}^\dagger] \rho) + S_1^{(1)}(2\omega_r) (\mathcal{P}[\hat{a}^\dagger] \rho - \mathcal{Q}[\hat{a}] \rho) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.54)$$

Substituindo a Eq. (4.3.52) na Eq. (4.3.47) e usando a definição Eq. (A.23), temos que

$$G(\omega_r) = \frac{1}{6} [S_0^{(2)}(0) + S_0^{(2)}(3\omega_r)], \quad (4.3.55)$$

que nos permite reescrever a Eq. (4.3.54)

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & \frac{\lambda^2}{e^2} S_0^{(2)}(\omega_r) \mathcal{D}[\hat{a}] \rho + \frac{\lambda^2}{e^2} S_0^{(2)}(-\omega_r) \mathcal{D}[\hat{a}^\dagger] \rho + i \frac{\lambda^3}{3!e^2} \left\{ \frac{1}{6} [S_0^{(2)}(0) + S_0^{(2)}(3\omega_r)] [\hat{a}^{\dagger 3} + \hat{a}^3, \rho] \right. \\ & + \frac{\lambda^2}{e^2} S_0^{(2)}(\omega_r) \mathcal{D}[\hat{a}] \rho + \frac{\lambda^2}{e^2} S_0^{(2)}(-\omega_r) \mathcal{D}[\hat{a}^\dagger] \rho + i \frac{\lambda^3}{2e^2} \left[S_1^{(1)}(\omega_r) (\mathcal{P}[\hat{a}] \rho - \mathcal{Q}[\hat{a}^\dagger] \rho) \right. \\ & \left. \left. + S_1^{(1)}(2\omega_r) (\mathcal{P}[\hat{a}^\dagger] \rho - \mathcal{Q}[\hat{a}] \rho) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.56)$$

Como fizemos anteriormente, podemos calcular o valor médio da variação número de fótons no tempo $\langle \dot{n} \rangle = Tr_R(\hat{a}^\dagger \dot{\rho})$, onde $\dot{\rho}$ é dado pela Eq. (4.3.56). Tomando o traço sobre as variáveis do sistema na Eq. (4.3.56) vezes o número de fótons, cada parcela deste produto pode ser escrita como

$$\langle i \rangle = tr_R(\hat{a}^\dagger \dot{\rho}) = -\langle \hat{a}^\dagger \dot{\hat{a}} \rangle. \quad (4.3.57)$$

De forma análoga, temos que as demais parcelas podem ser escritas como

$$\langle ii \rangle = \text{tr}_R(\hat{a}^\dagger \hat{a} D[\hat{a}^\dagger] \rho) = 1 + \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle, \quad (4.3.58)$$

$$\langle iii \rangle = \text{tr}_R(\hat{a}^\dagger \hat{a} [\hat{a}^{\dagger 3}, \rho]) = 3 \langle \hat{a}^{\dagger 3} \rangle, \quad (4.3.59)$$

$$\langle iv \rangle = \text{tr}_R(\hat{a}^\dagger \hat{a} [\hat{a}^3, \rho]) = -3 \langle \hat{a}^3 \rangle, \quad (4.3.60)$$

$$\langle v \rangle = \text{tr}_R(\hat{a}^\dagger \hat{a} P[\hat{a}] \rho) = \frac{1}{2} \langle \hat{a}^3 \rangle, \quad (4.3.61)$$

$$\langle vi \rangle = \text{tr}_R(\hat{a}^\dagger \hat{a} Q[\hat{a}^\dagger] \rho) = \frac{1}{2} \langle \hat{a}^{\dagger 3} \rangle, \quad (4.3.62)$$

$$\langle vii \rangle = \text{tr}_R(\hat{a}^\dagger \hat{a} P[\hat{a}^\dagger] \rho) = -\frac{1}{2} \langle \hat{a}^{\dagger 3} \rangle, \quad (4.3.63)$$

$$\langle viii \rangle = \text{tr}_R(\hat{a}^\dagger \hat{a} Q[\hat{a}] \rho) = -\frac{1}{2} \langle \hat{a}^3 \rangle. \quad (4.3.64)$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} \langle \dot{n} \rangle = & -\frac{\lambda^2}{e^2} S_0^{(2)}(\omega_r) \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle + \frac{\lambda^2}{e^2} S_0^{(2)}(-\omega_r) (1 + \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle) + i \frac{\lambda^3}{3!e^2} \left\{ \frac{1}{6} [S_0^{(2)}(0) + S_0^{(2)}(3\omega_r)] (3 \langle \hat{a}^{\dagger 3} \rangle - 3 \langle \hat{a}^3 \rangle) \right. \\ & \left. + i \frac{\lambda^3}{2e^2} \left[S_1^{(1)}(\omega_r) \left(\frac{1}{2} \langle \hat{a}^3 \rangle - \frac{1}{2} \langle \hat{a}^{\dagger 3} \rangle \right) + S_1^{(1)}(2\omega_r) \left(\frac{1}{2} \langle \hat{a}^3 \rangle - \frac{1}{2} \langle \hat{a}^{\dagger 3} \rangle \right) \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (4.3.65)$$

ou,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2}{e^2} [S_0^{(2)}(\omega_r) - S_0^{(2)}(-\omega_r)] \langle n \rangle = & \frac{\lambda^2}{e^2} S_0^{(2)}(-\omega_r) + i \frac{\lambda^3}{3!e^2} \left\{ \frac{1}{6} [S_0^{(2)}(0) + S_0^{(2)}(3\omega_r)] (3 \langle \hat{a}^{\dagger 3} \rangle - 3 \langle \hat{a}^3 \rangle) \right. \\ & \left. + i \frac{\lambda^3}{2e^2} \left[S_1^{(1)}(\omega_r) \left(\frac{1}{2} \langle \hat{a}^3 \rangle - \frac{1}{2} \langle \hat{a}^{\dagger 3} \rangle \right) + S_1^{(1)}(2\omega_r) \left(\frac{1}{2} \langle \hat{a}^3 \rangle - \frac{1}{2} \langle \hat{a}^{\dagger 3} \rangle \right) \right] \right\}, \\ \langle n \rangle = & n_q + i B_0 (\langle \hat{a}^{\dagger 3} \rangle - \langle \hat{a}^3 \rangle) \end{aligned} \quad (4.3.66)$$

onde

$$n_q = \frac{S_0^{(2)}(-\omega_r)}{S_0^{(2)}(\omega_r) - S_0^{(2)}(-\omega_r)}, \quad (4.3.67)$$

$$B_0 = \left(\frac{\lambda}{4} \right) \frac{S_0^{(2)}(0) + S_0^{(2)}(3\omega_r) - S_1^{(1)}(\omega_r) - S_1^{(1)}(2\omega_r)}{S_0^{(2)}(\omega_r) - S_0^{(2)}(-\omega_r)}. \quad (4.3.68)$$

Considerando o ruído na forma da equação Eq. (A.23), e utilizando as propriedades da função do primeiro tipo de Bessel $\sum_l J_l(x) J_{l+k}(x) = 0$, temos que

$$\begin{aligned} S_1^{(1)}(0) + S_1^{(1)}(3\omega_r) = & S_1^{(1)}(\omega_r) + S_1^{(1)}(2\omega_r) \\ = & \frac{3\omega_r \hbar}{R_T} \sum_n n J_n(\alpha) [J_{n+1}(\alpha) - J_{n-1}(\alpha)], \end{aligned} \quad (4.3.69)$$

o que implica que $B_0 = 0$, e que

$$\langle n \rangle = n_q = \frac{S_0^{(2)}(-\omega_r)}{S_0^{(2)}(\omega_r) - S_0^{(2)}(-\omega_r)}. \quad (4.3.70)$$

A fim de calcular os momentos $\langle X^3 \rangle$ e $\langle Y^3 \rangle$, que são dadas pelas relações

$$\langle X^3 \rangle = \langle \hat{a}^{\dagger 3} \rangle + \langle \hat{a}^3 \rangle + \langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^2 \rangle + \langle \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a} \rangle + \langle \hat{a}^2 \hat{a}^\dagger \rangle + \langle \hat{a} \hat{a}^{\dagger 2} \rangle + \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle + \langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle, \quad (4.3.71)$$

$$\langle Y^3 \rangle = -i(\langle \hat{a}^{\dagger 3} \rangle - \langle \hat{a}^3 \rangle - \langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^2 \rangle - \langle \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a} \rangle + \langle \hat{a}^2 \hat{a}^\dagger \rangle - \langle \hat{a} \hat{a}^{\dagger 2} \rangle - \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle + \langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle), \quad (4.3.72)$$

onde todos os termos além de $\langle \hat{a}^{\dagger 3} \rangle$ e $\langle \hat{a}^3 \rangle$ são nulos, note que isso, também, ocorreu na seção anterior, Eq. (4.2.37), quando calculávamos as variâncias $(\Delta X)^2$ e $(\Delta Y)^2$. O que ocorreu, nos dois casos, porque na representação de interação eles oscilam com frequência $\omega_{ac} = \omega_r$, enquanto o sistema oscila com frequência $\omega_{ac} = 3\omega_r$, e na seção anterior, o sistema oscilava com frequência $\omega_{ac} = 2\omega_r$. De modo que, as equações acima podem ser escritas como

$$\langle X^3 \rangle = \langle \hat{a}^{\dagger 3} \rangle + \langle \hat{a}^3 \rangle, \quad (4.3.73)$$

$$\langle Y^3 \rangle = -i(\langle \hat{a}^{\dagger 3} \rangle - \langle \hat{a}^3 \rangle). \quad (4.3.74)$$

Para calcular os termos acima, podemos repetir o processo que fizemos para obter Eq. (4.3.66), de forma que obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \hat{a}^3 \rangle = & -\frac{\lambda^2}{e^2} [S_0^{(2)}(\omega_r) - S_0^{(2)}(-\omega_r)] \langle \hat{a}^3 \rangle - i \frac{\lambda^3}{2e^2} \left\{ S_0^{(2)}(0) \left[\frac{1}{3} + \langle \hat{n} \rangle + \frac{1}{2} \langle \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 \rangle \right] \right. \\ & - S_1^{(1)}(\omega_r) \left[1 + \langle \hat{n} \rangle - \frac{1}{2} \langle \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 \rangle \right] + S_1^{(1)}(2\omega_r) \left[1 + 3\langle \hat{n} \rangle + \frac{1}{2} \langle \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 \rangle \right] \\ & \left. + S_1^{(1)}(3\omega_r) \left[\frac{1}{3} + \langle \hat{n} \rangle + \frac{1}{2} \langle \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 \rangle \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (4.3.75)$$

de forma que, podemos escrever

$$\langle \hat{a}^3 \rangle = \frac{C_0}{\kappa_1^*} + \frac{C_1}{\kappa_1^*} \langle n \rangle + \frac{C_2}{\kappa_1^*} \langle \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 \rangle. \quad (4.3.76)$$

De forma análoga

$$\langle \hat{a}^{\dagger 3} \rangle = \frac{C_0}{\kappa_1} + \frac{C_1}{\kappa_1} \langle n \rangle + \frac{C_2}{\kappa_1} \langle \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 \rangle, \quad (4.3.77)$$

onde definimos

$$\kappa_1 = \frac{i\lambda^2}{2e^2} [S_1^{(1)}(\omega_r) - S_1^{(1)}(-\omega_r)], \quad (4.3.78)$$

$$C_0 = \frac{\lambda^3}{e^2} [S_1^{(1)}(0) + 3S_1^{(1)}(\omega_r) - 3S_1^{(1)}(2\omega_r) + S_1^{(1)}(3\omega_r)], \quad (4.3.79)$$

$$C_1 = \frac{\lambda^3}{e^2} [S_1^{(1)}(0) + S_1^{(1)}(\omega_r) - 3S_1^{(1)}(2\omega_r) + S_1^{(1)}(3\omega_r)], \quad (4.3.80)$$

$$C_2 = \frac{\lambda^3}{e^2} [S_1^{(1)}(0) - S_1^{(1)}(\omega_r) - S_1^{(1)}(2\omega_r) + S_1^{(1)}(3\omega_r)]. \quad (4.3.81)$$

Desta forma, o coeficiente, C_2 , Eq. (4.3.81), é nulo, o que implica que os coeficientes (4.3.79) e (4.3.80) tornam-se

$$C_0 = \frac{\lambda^3}{3e^2} [2S_1^{(1)}(\omega_r) - S_1^{(1)}(2\omega_r)], \quad (4.3.82)$$

$$C_1 = \frac{\lambda^3}{e^2} [S_1^{(1)}(\omega_r) - S_1^{(1)}(2\omega_r)], \quad (4.3.83)$$

e as equações (4.3.54), (4.3.76) e (4.3.77) tornam-se

$$\langle n \rangle = n_q, \quad (4.3.84)$$

$$\langle \hat{a}^3 \rangle = \frac{C_0}{\kappa_1^*} + \frac{C_1}{\kappa_1^*} n_q, \quad (4.3.85)$$

$$\langle \hat{a}^{\dagger 3} \rangle = \frac{C_0}{\kappa_1} + \frac{C_1}{\kappa_1} n_q. \quad (4.3.86)$$

A partir da relação (A.23), temos que a relação (4.3.78) pode ser escrita como $\kappa_1 = i(Z_r/2R_T)\omega_r$, que usada juntamente com as relações $\lambda^2 = \pi Z_r/R_K$ e $R_k = h/e^2$, podemos reescrever as Eq. (4.3.73) e (4.3.74), como

$$\langle X^3 \rangle = \frac{2}{\omega_r Z_r^2 / (4R_T^2)} (C_0 + C_1 n_q), \quad (4.3.87)$$

$$\langle Y^3 \rangle = -\frac{Z_r}{R_T \omega_r Z_r^2 / (4R_T^2)} (C_0 + C_1 n_q) = -\frac{Z_r}{2R_T} \langle X^3 \rangle. \quad (4.3.88)$$

A Fig. (4.6) ilustra $\langle X^3 \rangle$ como função da voltagem dc para diferentes valores da amplitude de voltagem $\alpha = eV_{ac}/3\hbar\omega_r$. Podemos notar que, para frequências de voltagem menores que $|5\omega_r|$, as características dos fótons gerados quando o dispositivo junção-túnel é submetidos a uma frequência $\omega_{ac} = 3\omega_r$, são ampliada com o aumento da voltagem ac.

A Fig. (4.7) ilustra o comportamento do número de fótons, $\langle n \rangle$, como função de V para diferentes valores da amplitude de voltagem ac, $\alpha = eV_{ac}/3\hbar\omega_r$, em temperatura nula ($T = 0$) e frequência $\omega_{ac} = 3\omega_r$, onde observamos que a população de fótons é mínima em $|eV/\hbar\omega_r| \leq 1$ e depois cresce linearmente. Podemos notar ainda que quanto maior a voltagem ac, maior é o numero de fótons inicialmente no ressonador.

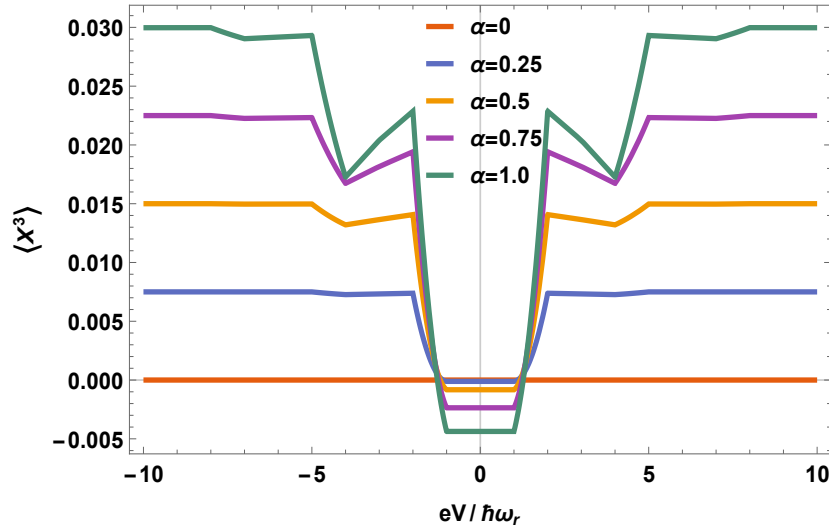


Figura 4.6: $\langle X^3 \rangle$ em função da voltagem dc, onde consideramos $\lambda \approx 0,078$ e $Z_r = 50\Omega$ para diferentes valores da amplitude da voltagem ac $\alpha = eV_{ac}/3\hbar\omega$.

A partir desses resultados, podemos observar através das Eq.(4.3.87) e Eq.(4.3.88), que as propriedades dos fótons gerados pelo dispositivo, junção túnel-ressonador submetido a frequência de voltagem ac $3\omega_r$, desviam da estatística poissoniana de um estado coerente [14].

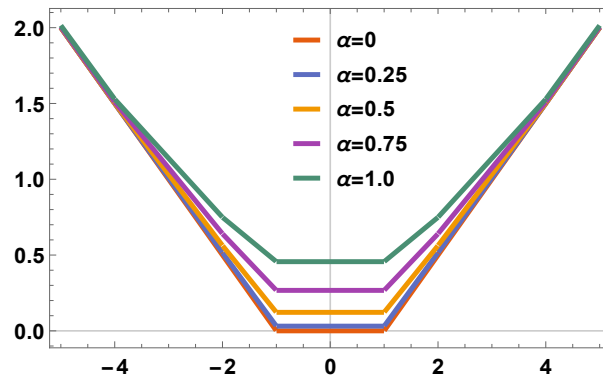


Figura 4.7: $\langle n \rangle$ em função da voltagem dc, onde consideramos diferentes valores da amplitude da voltagem ac $\alpha = eV_{ac}\hbar\omega$, em temperatura $T = 0$ e $\omega_{ac} = 3\omega_r$.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho, investigamos as propriedades estatísticas de fótons de micro-ondas gerados por uma junção túnel. Para esse propósito, consideramos o acoplamento da junção túnel com um ressonador de micro-ondas. Em particular, investigamos os casos em que a frequência de voltagem ac é nula, duas vezes maior e três vezes maior que a frequência do ressonador. Para estes três casos, observamos que a junção comporta-se como diferentes reservatórios fotônicos.

Como resultado, para o caso em que $\omega_{ac}=0$, observamos que os fótons estão acoplados a um reservatório térmico, o que foi possível ao comparar os resultados obtidos na Sec.4.2.1 com os obtidos previamente na Sec.2.1.1. Já no caso em que $\omega_{ac}=2\omega_r$, ao comparar os resultados obtidos na Sec.4.2.2 com os obtidos previamente na Sec.2.1.2, inferimos que a junção túnel comporta-se como um reservatório comprimido. Além disso, vimos que a junção túnel emite de forma regular pares de fótons, o que é descrito pelo operador anômalo, $\langle \hat{a}^2 \rangle$, e se a taxa de emissão for maior que o número de fótons, o dispositivo junção túnel-ressonador gera estados de vácuo comprimido. O que é corroborado pelos cálculos das quadraturas $(\Delta Y)^2$ e $(\Delta X)^2$, as quais se possuem incerteza menor que a incerteza do vácuo, o que é visto na Fig. (4.5), indica que o sistema está gerando estados de vácuo comprimido.

Portanto, simplesmente mudando a frequência da voltagem ac, podemos investigar as propriedades dos fótons interagindo com diferentes reservatórios não clássicos. Nessa perspectiva, além dos dois casos supracitados, queríamos explorar o sistema junção túnel-ressonador, para a frequência de oscilação da voltagem ac $\omega_{ac}=3\omega_r$. Para a qual, pudemos verificar que o sistema gera trios de fótons, Eq. (4.3.85), e que, também, conseguimos calcular os momentos, Eq. (4.3.87) e Eq. (4.3.88). Contudo, não conseguimos inferir as suas propriedades semelhantemente ao que fizemos para os casos anteriores. O que se torna o nosso objetivo para o futuro, juntamente com o cálculo das propriedades dos fótons gerados por este mesmo sistema quando a frequência de oscilação da voltagem ac $\omega_{ac}=4\omega_r$.

Desta forma, as propriedades dos fótons gerados a partir do sistema junção-túnel

tem grande valor como ferramentas para o desenvolvimento da computação quântica de variável contínua, detecção de ondas gravitacionais, detecção quântica de posição e força além da leitura de bits-quânticos. Para altas frequências de voltagem ac pode ser observada a geração de estados não gaussianos. A possibilidade de gerar fótons com diferentes propriedades faculta que o sistema junção túnel-ressonador seja utilizado para o desenvolvimento, por exemplo, da criptografia quântica. O que torna interesse não apenas o desenvolvimento do caso em $\omega_{ac} = 3\omega_r$, mas também do caso em que $\omega_{ac} = 4\omega_r$.

APÊNDICES

FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO CORRENTE-CORRENTE

A.1 Função de correlação corrente-corrente

Nesta seção apresentamos a derivação da correlação corrente-corrente $\langle \hat{I}_j(t) \hat{I}_q(t) \rangle$. Nós iremos calcular a definição generalizada da current-noise, que é gerada pela variação da corrente em função do tempo, para isso devemos escrever o operador de tunelamento $\hat{T}(t) = \sum_{l,r} t_{l,r} c_l^\dagger c_r e^{ieVt/\hbar} e^{-i\phi_{ac}(t)}$ na representação de interação

$$\hat{T}(t) = \sum_{k,q} t_{k,q} c_{l,q}^\dagger c_{r,k} e^{ieVt/\hbar} e^{-i\omega_{kq}} e^{-i\phi_{ac}(t)} \quad (\text{A.1})$$

onde $\omega_{kq} = (\epsilon_k - \epsilon_q)/\hbar$. Usando a definição da transformação de Fourier $\hat{I}_j(t) = \int_{\omega} \hat{I}_j[\omega] e^{-\omega t}$, com $\int_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega/2\pi$, nós definimos a função de correlação current-current como

$$\begin{aligned} \langle \hat{I}_j[\omega_1] \hat{I}_q[\omega_2] \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \langle \hat{I}_j(t_1) \hat{I}_q(t_2) \rangle e^{i\omega_1 t_1} e^{i\omega_2 t_2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \left[(-1)^q \langle \hat{T}_j^\dagger(t_1) \hat{T}_q(t_2) \rangle + (-1)^j \langle \hat{T}_j(t_1) \hat{T}_q^\dagger(t_2) \rangle \right] e^{i\omega_1 t_1} e^{i\omega_2 t_2} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde

$$\langle \hat{T}_j^\dagger(t_1) \hat{T}_q(t_2) \rangle = \sum_{k,q} t_{k,q}^* t_{k',q'} \langle c_{l,q}^\dagger c_{r,k} c_{l,q'}^\dagger c_{r,k'} \rangle e^{ieVt/\hbar} e^{-i\omega_{kq}} e^{-i\phi_{ac}(t)}.$$

Reescrevendo

$$\langle c_{r,k}^\dagger c_{r,k'} \rangle = n_k \delta_{k,k'} \quad (\text{A.3})$$

$$\langle c_{l,q} c_{l,q'}^\dagger \rangle = (1 - n_q) \delta_{q,q'} = \bar{n}_q \delta_{q,q'}, \quad (\text{A.4})$$

temos

$$\langle \hat{T}_j^\dagger(t_1) \hat{T}_q(t_2) \rangle = \sum_{k,q} |t_{k,q}|^2 n_k \bar{n}_q e^{-i(\omega_{qk} - eVt/\hbar)(t_1 - t_2)} e^{-i\omega_{kq} t} e^{-i\phi_{ac}(t)}.$$

e reescrevendo a somatória em k como

$$\sum_k = \int_{-\infty}^{\infty} g(\epsilon_k) d\epsilon_k, \quad (\text{A.5})$$

sendo $g(\epsilon_k)$ a densidade de estado de modo que $\bar{n}_q \rightarrow \bar{f}(\epsilon_q)$ e $n_k \rightarrow f(\epsilon_k)$, temos

$$\langle \hat{T}_j^\dagger(t_1) \hat{T}_q(t_2) \rangle = |t|^2 g_0^2 \int d\epsilon_q d\epsilon_k f(\epsilon_k) \bar{f}(\epsilon_q) e^{-i(\omega_{qk} - eVt/\hbar)(t_1 - t_2)} e^{i\phi_{ac}(t_1)} e^{-i\phi_{ac}(t_2)},$$

sendo $t \equiv t_{k,q}$ e a densidade de estado $g = g(\epsilon)$, analogamente

$$\langle \hat{T}_j(t_1) \hat{T}_q^\dagger(t_2) \rangle = |t|^2 g_0^2 \int d\epsilon_q d\epsilon_k f(\epsilon_q) \bar{f}(\epsilon_k) e^{-i(\omega_{qk} - eVt/\hbar)(t_1 - t_2)} e^{-i\phi_{ac}(t_1)} e^{i\phi_{ac}(t_2)},$$

de modo que

$$\begin{aligned} \langle \hat{I}_j[\omega_1] \hat{I}_q[\omega_2] \rangle &= |t|^2 g_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \int d\epsilon_q d\epsilon_k \left[(-1)^q f(\epsilon_k) \bar{f}(\epsilon_q) e^{-i(\omega_{qk} - eVt/\hbar)(t_1 - t_2)} e^{i\phi_{ac}(t_1)} e^{-i\phi_{ac}(t_2)} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^j f(\epsilon_q) \bar{f}(\epsilon_k) e^{i(\omega_{qk} - eVt/\hbar)(t_1 - t_2)} e^{-i\phi_{ac}(t_1)} e^{i\phi_{ac}(t_2)} \right] e^{i\omega t_1} e^{i\omega t_2}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Realizando a mudança de variável $\epsilon_q \rightarrow \epsilon_k$ e $\epsilon_k \rightarrow \epsilon_q$ no segundo termo da integral (A.6)

$$\begin{aligned} \langle \hat{I}_j[\omega_1] \hat{I}_q[\omega_2] \rangle &= |t|^2 g_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \int d\epsilon_q d\epsilon_k f(\epsilon_k) \bar{f}(\epsilon_q) \left[(-1)^q e^{-i(\omega_{qk} - eVt/\hbar)(t_1 - t_2)} e^{i\phi_{ac}(t_1)} e^{-i\phi_{ac}(t_2)} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^j e^{i(\omega_{kq} - eVt/\hbar)(t_1 - t_2)} e^{-i\phi_{ac}(t_1)} e^{i\phi_{ac}(t_2)} \right] e^{i\omega t_1} e^{i\omega t_2}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Definindo a resistência de tunelamento como

$$\frac{1}{R_T} = \frac{e^2 |t|^2 g_0^2}{\hbar}, \quad (\text{A.8})$$

e usando a transformação de Fourier

$$e^{i\phi_{ac}(t)} = \sum_n c_n e^{in\omega_{ac} t} \quad (\text{A.9})$$

de modo que substituindo em (A.7), temos

$$\begin{aligned} \langle \hat{I}_j[\omega_1] \hat{I}_q[\omega_2] \rangle = & |t|^2 g_0^2 \sum_{n_1, n_2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \int d\epsilon_q d\epsilon_k f(\epsilon_k) \bar{f}(\epsilon_q) \left[(-1)^q c_{n_1}^* c_{n_2}^* e^{i(n_1 - n_2)\omega_{ac}t} e^{-i(\omega_{qk} - eVt/\hbar)(t_1 - t_2)} \right. \\ & \left. + (-1)^j c_{n_1}^* c_{n_2} e^{-i(n_1 - n_2)\omega_{ac}t} e^{i(\omega_{qk} - eVt/\hbar)(t_1 - t_2)} \right] e^{i\omega t_1} e^{i\omega t_2}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Escrevendo a (A.10) em termos da função delta, nós temos

$$\begin{aligned} \langle \hat{I}_j[\omega_1] \hat{I}_q[\omega_2] \rangle = & \frac{4\pi^2 \hbar^2}{e^2 R_t} \sum_{n_1, n_2} \int d\epsilon_q d\epsilon_k f(\epsilon_k) \bar{f}(\epsilon_q) \left[(-1)^q c_{n_1}^* c_{n_2}^* \delta(\epsilon_k - \epsilon_q + eV + \hbar n_1 \omega_{ac} + \hbar \omega_1) \right. \\ & \times \delta(\omega_1 + \omega_2 + (n_1 - n_2)\omega_{ac}) + (-1)^j c_{n_1}^* c_{n_2} \delta(\epsilon_k - \epsilon_q + eV + \hbar n_1 \omega_{ac} + \hbar \omega_1) \\ & \left. \times \delta(\omega_1 + \omega_2 + (n_1 - n_2)\omega_{ac}) \right], \\ = & \frac{4\pi^2 \hbar^2}{e^2 R_t} \sum_{n_1, n_2} \int d\epsilon_q d\epsilon_k f(\epsilon_k) \bar{f}(\epsilon_q) \left\{ \left[(-1)^q c_{n_1}^* c_{n_1+n}^* \delta(\epsilon_k - \epsilon_q + eV + \hbar n_1 \omega_{ac} + \hbar \omega_1) \right. \right. \\ & \left. \left. + (-1)^j c_{n_1}^* c_{n_1-n} \delta(\epsilon_k - \epsilon_q + eV + \hbar n_1 \omega_{ac} + \hbar \omega_1) \right] \delta(\omega_1 + \omega_2 + n\omega_{ac}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

onde fizemos $n = n_1 - n_2$. Agora iremos definir de fato a função current-noise $S_n^{(j)}$, como

$$\langle \hat{I}_j[\omega_1] \hat{I}_q[\omega_2] \rangle = \frac{2\pi \hbar^2}{e^2} (-1)^q \sum_n S_n^{(j-q)}(\omega_1) \delta(\omega_1 + \omega_2 - n\omega_{ac}), \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} S_n^{(j-q)}(\omega_1) = & \frac{2\pi}{R_t} \int d\epsilon_q d\epsilon_k f(\epsilon_k) \bar{f}(\epsilon_q) c_{n_1}^* c_{n_1+n}^* \delta(\epsilon_k - \epsilon_q + eV + \hbar n_1 \omega_{ac} + \hbar \omega_1) \\ & + (-1)^{(j-q)} \frac{2\pi}{R_t} \int d\epsilon_q d\epsilon_k f(\epsilon_k) \bar{f}(\epsilon_q) c_{n_1}^* c_{n_1-n} \\ & \times \delta(\epsilon_k - \epsilon_q + eV + \hbar n_1 \omega_{ac} + \hbar \omega_1) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

onde ainda definimos

$$S_{eq}(\omega_1) = \frac{4\pi}{R_t} \int d\epsilon_q d\epsilon_k f(\epsilon_k) \bar{f}(\epsilon_q) \quad (\text{A.14})$$

ou ainda

$$\begin{aligned} S_{eq}(\omega_1) = & \frac{4\pi}{R_t} \int d\epsilon_q d\epsilon_k f(\epsilon_k) \bar{f}(\epsilon_q) \delta(\epsilon_k - \epsilon_q + eV + \hbar n_1 \omega_{ac} + \hbar \omega_1) \\ S_{eq}(eV + \hbar n_1 \omega_{ac} + \hbar \omega_1) = & \frac{4\pi}{R_t} \int d\epsilon_q d\epsilon_k f(\epsilon_k) \bar{f}(\epsilon_k + \hbar n_1 \omega_{ac} + \hbar \omega_1) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

analogamente

$$S_{eq}(-eV - \hbar n_1 \omega_{ac} + \hbar \omega_1) = \frac{4\pi}{R_t} \int d\epsilon_q d\epsilon_k f(\epsilon_k) \bar{f}(\epsilon_k - \hbar n_1 \omega_{ac} - \hbar \omega_1) \quad (\text{A.16})$$

onde a partir do trabalho de [17], temos que

$$\int d\epsilon_q d\epsilon_k f(\epsilon_k) \bar{f}(\epsilon_k - \hbar n_1 \omega_{ac} - \hbar \omega_1) = e \left(\frac{\hbar \omega}{e R_T} I_{qp}(\omega) \Theta(\omega) \right) \quad (\text{A.17})$$

no caso em que a temperatura é nula e $\Theta(\omega)$ é a função de Heaviside. Portanto,

$$S_{eq}(\hbar \omega) = 2e I_{qp}(\omega) \Theta(\omega) \quad (\text{A.18})$$

Usando Eq. (A.15) e (A.16), podemos reescrever Eq. (A.13), como

$$\begin{aligned} S_n^{(j-q)}(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_{n_1} [c_{n_1} c_{n_1+n}^* S_{eq}(\hbar \omega + eV + n_1 \hbar \omega_{ac}) \\ &\quad + (-1)^{(j-q)} c_{n_1}^* c_{n_1-n} S_{eq}(\hbar \omega - eV - n_1 \hbar \omega_{ac})] \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

que é a forma generalizada do ruído de corrente.

No caso em que a voltagem ac comporta-se de forma senoidal, $V_{ac}(t) = V \cos(\omega_{ac} t)$ [6], a fase $\phi_{ac}(t) = i(e/\hbar) \int_0^t V_{ac}(t') dt'$, pode ser escrita como

$$\phi_{ac}(t) = \left(\frac{eV}{\hbar \omega_{ac}} \right) \sin(\omega_{ac} t). \quad (\text{A.20})$$

Desta forma, nós podemos escrever o termo $e^{i\phi_{ac}(t)}$, presente na Eq. (A.7), como uma função de Bessel do primeiro tipo. Escrevendo a Eq. (A.20) em termos da função exponencial, temos

$$\sin(\omega_{ac} t) = \frac{1}{2i} (e^{i\omega_{ac} t} - e^{-i\omega_{ac} t}), \quad (\text{A.21})$$

fazendo $e^{i\omega_{ac} t} = x$, temos

$$\begin{aligned} e^{i\phi_{ac}(t)t} &= \exp \frac{\alpha}{2} (x - x^{-1}) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^r \frac{x^r}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{\alpha}{2} \right)^s \frac{x^{-s}}{s!} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(n+s)! s!} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{(n+2s)} \right] x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) x^n \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) e^{in\omega_{ac}t}
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

onde fizemos $n = r - s$, $\alpha = eV/\hbar\omega_{ac}$ e $J_n(\alpha) = \sum_{s=0}^{\infty} \{(-1)^s / [(n+s)!s!]\} (\alpha/2)^{(n+2s)}$. comparando as Eq. (A.9) e (A.22), vemos que há uma correspondência entre os coeficientes de expansão, tal que, $c_n = J_n(\alpha)$. Portanto, o ruído Eq. (A.19), pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 S_n^{(j-q)}(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_{n_1} J_n(\alpha) [J_{n_1+n}(\alpha) S_{eq}(\hbar\omega + eV + n_1\hbar\omega_{ac}) \\
 &\quad + (-1)^{(j-q)} J_{n_1-n}(\alpha) S_{eq}(\hbar\omega - eV - n_1\hbar\omega_{ac})].
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] FORGUES, J.-C.; LUPIEN, C.; REULET, B. Emission of microwave photon pairs by a tunnel junction. **Physical review letters**, APS, v. 113, n. 4, p. 043602, 2014. Citado na página 10.
- [2] BEDNORZ, A. et al. Nonsymmetrized correlations in quantum noninvasive measurements. **Physical Review Letters**, APS, v. 110, n. 25, p. 250404, 2013. Citado na página 10.
- [3] GRIMSMO, A. L. et al. Quantum optics theory of electronic noise in coherent conductors. **Physical review letters**, APS, v. 116, n. 4, p. 043602, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 10, 32 e 38.
- [4] GASSE, G.; LUPIEN, C.; REULET, B. Observation of squeezing in the electron quantum shot noise of a tunnel junction. **Physical review letters**, APS, v. 111, n. 13, p. 136601, 2013. Citado na página 10.
- [5] MENDES, U. C. et al. Parametric amplification and squeezing with an ac-and dc-voltage biased superconducting junction. **Physical Review Applied**, APS, v. 11, n. 3, p. 034035, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 36.
- [6] MENDES, U. C.; MORA, C. Cavity squeezing by a quantum conductor. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 17, n. 11, p. 113014, 2015. Citado 6 vezes nas páginas 10, 31, 33, 36, 38 e 56.
- [7] FÉVRIER, P.; LUPIEN, C.; REULET, B. Fundamental and environmental contributions to the cyclostationary third moment of current fluctuations in a tunnel junction. **Physical Review B**, APS, v. 101, n. 24, p. 245440, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 31.
- [8] DUŠEK, M.; LÜTKENHAUS, N.; HENDRYCH, M. Quantum cryptography. **Progress in Optics**, Elsevier Amsterdam, v. 49, p. 381–454, 2006. Citado na página 10.
- [9] TIEN, P.; GORDON, J. Multiphoton process observed in the interaction of microwave fields with the tunneling between superconductor films. **Physical Review**, APS, v. 129, n. 2, p. 647, 1963. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 31.
- [10] BEDNORZ, A. et al. Nonsymmetrized correlations in quantum noninvasive measurements. **Physical review letters**, APS, v. 110, n. 25, p. 250404, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 31.
- [11] GARDINER, C.; ZOLLER, P. **Quantum Noise: A Handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic Methods with Applications**

- to **Quantum Optics**. Springer Berlin Heidelberg, 2010. (Springer Series in Synergetics). ISBN 9783642060946. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=PygdvgAACAAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 14.
- [12] BREUER, H. et al. **The Theory of Open Quantum Systems**. Oxford University Press, 2002. ISBN 9780198520634. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=0Yx5VzaMYm8C>>. Citado na página 14.
- [13] SCULLY, M.; ZUBAIRY, M. **Quantum Optics**. Cambridge University Press, 1997. ISBN 9780521435956. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=20ISsQCKKmQC>>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 17 e 18.
- [14] WALLS, D.; MILBURN, G. **Quantum Optics**. Springer Berlin Heidelberg, 2008. ISBN 9783540285731. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=LiWsc3NIf0kC>>. Citado 6 vezes nas páginas 17, 20, 21, 22, 35 e 49.
- [15] VOOL, U.; DEVORET, M. Introduction to quantum electromagnetic circuits. **International Journal of Circuit Theory and Applications**, Wiley Online Library, v. 45, n. 7, p. 897–934, 2017. Citado na página 25.
- [16] BLAIS, A. et al. Circuit quantum electrodynamics. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 93, n. 2, p. 025005, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 26, 27 e 28.
- [17] INGOLD, G.-L.; NAZAROV, Y. V. Charge tunneling rates in ultras-small junctions. In: **Single charge tunneling**. [S.l.]: Springer, 1992. p. 21–107. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 56.
- [18] REULET, B.; SENZIER, J.; PROBER, D. Environmental effects in the third moment of voltage fluctuations in a tunnel junction. **Physical Review Letters**, APS, v. 91, n. 19, p. 196601, 2003. Citado na página 42.