

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

OSCAR ALEXANDER RAMÍREZ CESPEDES

**Ciclos Limite e Singularidades Típicas
de Sistemas de Equações Diferenciais
Suaves por Partes**

Goiânia
2017

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: ☐ Dissertação ☒ Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação

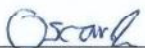
Nome completo do autor: Oscar Alexander Ramírez Cespedes

Título do trabalho: Ciclos Limite e Singularidades Típicas de Sistemas de Equações Diferenciais Suaves por Partes

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM ☐ NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.



Assinatura do (a) autor (a)

Data: 21 / 03 / 2019

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

OSCAR ALEXANDER RAMÍREZ CESPEDES

Ciclos Limite e Singularidades Típicas de Sistemas de Equações Diferenciais Suaves por Partes

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado

Goiânia
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Ramírez Cespedes, Oscar Alexander
Ciclos Limite e Singularidades Típicas de Sistemas de Equações
Diferenciais Suaves por Partes [manuscrito] / Oscar Alexander
Ramírez Cespedes. - 2017.
C, 100 f.: il.

Orientador: Prof. João Carlos da Rocha Medrado.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de
Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em
Matemática, Goiânia, 2017.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. sistemas diferenciais lineares por partes. 2. ciclos limite. 3.
singularidades típicas. 4. campo deslizante. I. da Rocha Medrado,
João Carlos, orient. II. Título.

CDU 517.938



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.

Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

ATA DA REUNIÃO DA BANCA EXAMINADORA DA DEFESA DE TESE DE OSCAR ALEXANDER RAMÍREZ CESPEDES – Aos sete dias do mês de março do ano de dois mil e dezessete (07/03/2017), às 14:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. João Carlos da Rocha Medrado - Orientador, Prof. Durval José Tonon, Prof. Claudio Aguinaldo Buzzzi, Prof. Paulo Ricardo da Silva, e Prof. Ricardo Miranda Martins, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada na sala de aula do Instituto de Matemática e Estatística, procederem a avaliação da defesa de tese intitulada: **“Ciclos Limite e Singularidades Típicas de Sistemas de Equações Diferenciais Suaves por Partes.”**, em nível de Doutorado, área de concentração em Sistemas Dinâmicos, de autoria de Oscar Alexander Ramírez Céspedes, discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. João Carlos da Rocha Medrado que fez a apresentação formal dos membros da Banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor da tese que, em 45 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da Banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1068 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta o Programa de Pós-Graduação em Matemática e procedidas as correções recomendadas, a tese foi **APROVADA** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **DOUTOR EM MATEMÁTICA**, na área de concentração em Sistemas Dinâmicos, pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do PPGM da versão definitiva da tese, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 16:00 horas a presidência da mesa encerrou esta sessão de defesa de tese e para constar eu, Ulisses José Gabry, secretário do PPGM, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, será assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado
Presidente - IME/UFG

Prof. Dr. Durval José Tonon
Membro – IME/UFG

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzzi
Membro – IBILCE/UNESP

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva
Membro – IBILCE/UNESP

Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins
Membro – IMECC/UNICAMP

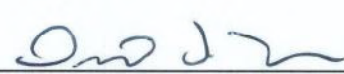
OSCAR ALEXANDER RAMÍREZ CESPEDES

**CICLOS LIMITE E SINGULARIDADES TÍPICAS DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS SUAVES POR PARTES**

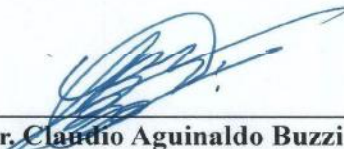
Tese defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática, aprovada em 07 de março de 2017, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado
Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Presidente da Banca



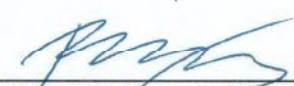
Prof. Dr. Durval José Tonon
Instituto de Matemática e Estatística - UFG



Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - UNESP



Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - UNESP



Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - UNICAMP

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Oscar Alexander Ramírez Cespedes

Graduou-se em Matemática na Universidad Distrital Francisco José de Cladda, Bogotá, Colômbia.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Oscar Alexander Ramírez Cespedes

Graduou-se em Matemática na Universidad Distrital Francisco José de Cladas, Bogotá, Colômbia.

Dedico este trabajo a mi familia.

Agradecimentos

Gracias por leer mi tesis.

À FAPEG pelo apoio financeiro.

"If you can't love yourself How in the hell you gonna love somebody else??"

RuPaul Andre Charles.

Resumo

Ramírez, Oscar. **Ciclos Limite e Singularidades Típicas de Sistemas de Equações Diferenciais Suaves por Partes**. Goiânia, 2017. 100p. Tese de Doutorado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho, estudamos uma versão do 16º Problema de Hilbert para sistemas de equações diferenciais lineares por partes, PWLS, em $\mathbb{R}^2$. Mais precisamente, determinamos o número máximo de certos tipos de ciclos limite quando o sistema está definido em duas zonas separadas por uma linha reta. Alguns resultados sobre o número de máximo de ciclos de um PWLS definido em dois setores são estabelecidos. Além disso, estudamos e classificamos singularidades típicas de um sistema suave por partes em $\mathbb{R}^3$ levando em consideração o comportamento do campo deslizando associado.

Palavras-chave

sistemas diferenciais lineares por partes, ciclos limite, singularidades típicas, campo deslizando,.

Abstract

Ramírez, Oscar. **Limit Cycles and Typical Singularities of Piecewise Smooth System of Differential Equations**. Goiânia, 2017. 100p. PhD. Thesis. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work, we analyse the version of Hilbert's 16th problem for a piecewise linear differential system, PWLS, in $\mathbb{R}^2$. More precisely, we determinate the maximum number of certain types of limit cycles when the system is define in two zones separated by a straight line. Some results on the maximum number of cycles of a PWLS defined in two sectors were established. In addition, we classify typical singularities of a piecewise smooth system in $\mathbb{R}^3$, taking into account the behaviour of the associated sliding field.

Keywords

piecewise linear differential system, limit cycle, typical singularities, sliding.

Sumário

Lista de Figuras	11
Introdução	13
1 Preliminares	17
1.1 Campos de Vetores Definidos em Variedades com Bordo	17
1.2 Campos de Vetores Suaves por partes	23
1.3 Função W de Lambert	23
2 Cotas Máximas de Ciclos Limite de um Sistema Linear de Equações Diferenciais Por Partes em Duas Zonas Separadas Por Uma Linha Reta	25
2.1 Sistemas Lineares de Equações Diferenciais por Partes em Duas Zonas	25
2.1.1 Classificação de Sistemas Laterais de Um PWLS	27
2.1.2 Campo Deslizante e Ciclos Limite de um PWLS	28
2.2 Ciclos Limite	29
2.2.1 Ciclos Deslizantes	29
2.2.2 Ciclos Limite Críticos	33
2.2.3 Ciclos Limite de Costura	35
2.3 Condições para a Coexistência de Diferentes Tipos de Ciclos	39
2.4 Principais Resultados	44
3 Cotas Máximas de Ciclos Limite de um Sistema Linear Por Partes em Dois Setores	49
3.1 Sistemas Lineares Por Partes em Dois Setores	49
3.2 Sistemas de Chebyshev e Resultados Técnicos	50
3.3 Principais Resultados	53
4 Singularidades Típicas de um Sistema de Equações Diferenciais Suave por Partes em $\mathbb{R}^3$	61
4.1 Conjuntos de Filippov e Equivalência Topológica	61
4.2 Singularidades	62
4.3 Principais Resultados	65
4.4 Resultados Técnicos	68
4.4.1 Submersões	68
4.4.2 Equivalência Topológica	74
4.4.3 Curvas de Bifurcação	87
4.5 Diagramas de Bifurcação	91

5	Direções Futuras	96
5.1	Método do Pinching e Sistemas de Equações Diferenciais Suaves por Partes	96
5.1.1	Principais Problemas a Serem Abordados	97
	Referências Bibliográficas	98

Lista de Figuras

1.1	Função W de Lambert definida univocamente no intervalo $(-1/e, \infty)$.	23
2.1	Imagens pela aplicação de Poincaré do ponto p .	31
2.2	Dois ciclos limites deslizantes.	33
2.3	Tipos de Ciclos Deslizantes.	34
2.4	Configuração de dois ciclos limite deslizantes.	34
2.5	Tipos de Ciclos Limite Crítico.	35
2.6	Aplicações de Poincaré: $P_L(y)$ e $P_R^{-1}(y)$.	38
2.7	Imagens dos pontos 0 e b pelas aplicações de Poincaré caso $\gamma_R, \gamma_L > 0$.	41
2.8	Imagens dos pontos 0 e b pelas aplicações de Poincaré caso $\gamma_R, \gamma_L < 0$.	42
2.9	Configuração de três ciclos limite de um PWLS: dois ciclos limite deslizantes e um de costura.	43
2.10	Configuração de três ciclos limite de um PWLS: dois ciclos limite de costura e um de deslize.	44
3.1	Caso 1: Definição da aplicação de Poincaré P^+ quando a origem é um ponto singular de X^- . Nesta Figura a origem é um centro ou um foco de X^- e (p, q) é um ponto singular virtual de X^+ .	54
3.2	Caso 2: Definição da aplicação de Poincaré P^- quando a origem é um ponto singular de X^+ . Neste figura a origem é um ponto de sela e (p, q) é um ponto singular de X^- .	55
4.1	Algumas singularidades do campo deslizante.	63
4.2	(a) Blowing-up Polar em torno de $\omega_2(h)_{1,-1,1}$ -singularidade. (b) Configuração das órbitas de $\mathbf{FE}^Z$ em torno de uma $\omega_2(h)_{1,-1,1}$ -singularidade,	77
4.3	Vizinhança U' para uma $\omega_2(h)_{1,-1,1}$ -singularidade em $\text{dom}(\mathbf{F}^Z)$.	77
4.4	Comportamento qualitativo das órbitas em torno de uma $\omega_2(b)_{1,1}$ -singularidade.	79
4.5	Comportamento qualitativo das órbitas em torno de uma $\omega_2(b)_{1,2}$ -singularidade.	80
4.6	Comportamento qualitativo das órbitas em torno de uma $\omega_2(b)_{1,-1,3}$ -singularidade.	81
4.7	(a) Blowing-up polar em torno de $\omega_2(h)_{1,-1,1}$ -singularidade. (b) Configuração das órbitas de $\mathbf{FE}^Z$ em torno de uma $\omega_2(h)_{1,-1,1}$ -singularidade,	83
4.8	Configuração das órbitas de $\mathbf{FE}^Z$ em torno de uma $\omega_2(i)_{1,1,1,1}$ -singularidade.	84
4.9	Configuração das órbitas de $\mathbf{FE}^Z$ em torno de uma $\omega_2(g)_{-1,-1,-1,1}$.	85
4.10	Configuração das órbitas de $\mathbf{FE}^Z$ em torno de uma $\omega_2(j)_{1,1,1,1}$ -singularidade.	87

4.11	Curvas de bifurcação em torno de Υ com $v(0, 0) \in \Omega_f^2(0)$.	88
4.12	Curvas de bifurcação em torno de Υ com $v(0, 0) \in \Omega_g^2(0)$.	89
4.13	Curvas de bifurcação em torno de Υ com $v(0, 0) \in \Omega_h^2(0)$.	90
4.14	Curvas de bifurcação em torno de Υ com $v(0, 0) \in \Omega_j^2(0)$.	91
4.15	Diagrama de bifurcação de $Z \in \Omega_f^2(0)$	92
4.16	Diagrama de bifurcação de $Z \in \Omega_g^2(0)$	93
4.17	Diagrama de bifurcação de $Z \in \Omega_h^2(0)$	94
4.18	Diagrama de bifurcação de $Z \in \Omega_j^2(0)$.	95
5.1	Método do Pinching em torno de Σ para $\varepsilon > 0$.	97

Introdução

Durante os últimos anos, a teoria geométrica e qualitativa dos sistemas suaves por partes tem se desenvolvido rapidamente devido a sua estreita relação com os outros ramos da ciência como a engenharia e a física.

Nesta tese, são estudados dois problemas relacionados a tais sistemas. O Primeiro referente à determinação do número máximo de ciclos limite, para um sistema linear por partes no plano, e o segundo em relação ao estudo e classificação de singularidades típicas de um campo suave por partes segundo a dinâmica do seu campo deslizante. A seguir descrevemos com mais detalhes cada um destes problemas.

O Número Máximo De Ciclos Limite em um Sistema Linear Por Partes no Plano

Um dos principais problemas na teoria qualitativa de sistemas de equações diferenciais suaves em $\mathbb{R}^2$ é a determinação de Ciclos Limite. Estes objetos foram definidos por Poincaré [15], em 1886. No final da década de 1920, Van der pol [33] e Lienard [1] mostraram que uma órbita fechada de uma oscilação contínua em um circuito tubular à vácuo era um ciclo limite, como considerado por Poincaré. Após esses trabalhos, a não-existência, existência, unicidade e outras propriedades de ciclos limite foram estudadas extensivamente por matemáticos e físicos e, mais recentemente, por químicos, biólogos, economistas, etc, veja [4, 35].

Os sistemas de equações diferenciais suaves por partes emergem de forma natural ao modelar diversos processos e fenômenos reais, por exemplo, recentemente sistemas lineares por partes, (PWLS) , com duas zonas separadas por uma linha reta tem sido usados para descrever modelos de atividades celular [5, 31, 32]. Em particular, a teoria geométrica e qualitativa para a classes destes sistemas cujas descontinuidades se concentram ao longo de uma variedade suave de codimensão um tem se desen-

volvido rapidamente durante os últimos anos, principalmente segundo o trabalho de Filippov [10], no qual o ponto chave encontra-se em dividir a variedade de descontinuidade em conjuntos chamados: deslize, costura e escape. Neste contexto a "noção" de ciclo limite se estende de forma natural e problemas da não-existência, existência, unicidade e outras propriedades destes objetos tem se tornado um tópico bastante promissor de pesquisa.

Um caso interessante e aparentemente simples é o cálculo de cotas superiores para o número de ciclos limite num PWLS com duas zonas separadas por uma linha reta no plano. Na literatura recente este problema tem sido nomeado de 16° Problema de Hilbert para PLWS, e tem sido objeto de diversas pesquisas nas últimas duas décadas e mesmo assim continua em aberto. A fim de dar uma resposta a este problema, consideremos o plano dividido por uma linha reta $\Sigma = f^{-1}(0)$ onde $f(x, y) = x$. Assim, $\mathbb{R}^2 = \Sigma^+ \cup \Sigma \cup \Sigma^-$, onde $\Sigma^\pm = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{sgn}(\pm x) > 0\}$. Seja $(\dot{x}, \dot{y}) = X(x, y) = (X^+(x, y), X^-(x, y))$ um PWLS definido em duas zonas por

$$X(x, y) = \begin{cases} X^+(x, y), & (x, y) \in \Sigma^+, \\ X^-(x, y), & (x, y) \in \Sigma^-. \end{cases} \quad (0.1)$$

Os campos vetoriais $X^\pm$ são lineares e serão chamados de **Sistemas Laterais**.

São vários os pesquisadores que têm contribuído com respostas parciais ao a 16° Problema de Hilbert para PWLS. Em 1991, Lum e Chua [23] conjecturaram que um PWLS contínuo tinha no máximo um ciclo limite. Em 1998, esta conjectura foi provada por Freire, Ponce, Rodrigo e Torres em [11]. Posteriormente, em 2010 Han e Xhang em [16] conjecturaram que um PWLS descontínuo tinha ao máximo dois ciclos limite. Entretanto, em 2012, Huan e Yang em [17] deram uma resposta negativa a esta conjectura, exibindo um exemplo concreto com 3 ciclos limite de costura, i.e. ciclos limite que intersectam Σ em pontos do conjunto de costura. Em [14] foram estudadas condições gerais para obter 3 ciclos limite de costura.

Recentemente, Libre e Euzébio, em [9], provaram que se cada um dos sistemas laterais tem uma singularidade isolada e uma delas está em Σ , então o número máximo de ciclos limite de costura está limitado superiormente por 4. Em [22] Llibre, Novaes e Teixeira conseguiram que estabelecer o número máximo de ciclos de costura é dois quando os sistemas laterais tem um ponto singular isolado e: (i) algum destes pontos de equilíbrio está em Σ ou (ii) a divergência de X^+ ou X^- é nula. Não obstante, nestes trabalhos não foram considerados o caso em que algum dos sistemas laterais

não tem singularidades ou tem infinitas singularidades, usando uma aproximação diferente provamos e estendemos estes resultados incluindo todos os possíveis casos, o que constitui o Teorema [B](#).

O 16º problema de Hilbert para PWLS, pode ser dividido em dois subproblemas dependendo se o sinal do produto das divergências dos seus sistemas laterais é negativo ou não.

Quando o produto das divergências é não negativo, Freire, Ponce e Torres provaram, em [\[14\]](#), que se cada sistema lateral tem um ponto de equilíbrio do tipo foco ou centro então o número máximo de ciclos limite de costura é dois. Usando um argumento similar, Huan e Yang, em [\[18, 19\]](#), determinaram que o máximo é dois desde que ambos os pontos de equilíbrio sejam selas ou nós. Neste trabalho damos uma resposta completa em relação ao máximo quando a divergência é não negativa e isto constitui o Teorema [C](#).

A pesquisa em relação aos outros tipos de ciclos que pode exibir um PWLS, e que involucram intrinsecamente o caráter não determinístico sugerido por Filippov, está em desenvolvimento e possui um número ainda pequeno de resultados. Neste trabalho, o número máximo destes objetos é determinado e constitui o Teorema [A](#).

Recentemente, alguns pesquisadores tem se interessado em determinar o número máximo de ciclos para um PWLS em que a variedade de descontinuidade tem curvatura diferente de zero ou, simplesmente não é regular. Nos Teoremas [E](#) e [F](#) estudamos em conjunto com Professor Jaume Llibre o número de ciclos de um PWLS com variedade de descontinuidade sob certas condições. Estes resultados estão apresentados em [\[25\]](#).

Classificação das Singularidades Típicas Deslizantes de um Sistema de Equações Diferenciais por Partes em $\mathbb{R}^3$

Para um dado sistemas de equações diferenciais suaves por partes, da forma $\dot{q} = Z(q)$ onde $q \in \mathbb{R}^n$ e $Z = (X, Y)$ aplicação suave por partes cujas descontinuidades estão concentradas numa sub-variedade de codimensão um de $\mathbb{R}^n$, Σ , as trajetórias de $Z = (X, Y)$ sobre Σ , quando é possível, estão definidas segundo a convenção de Filippov, para mais detalhes ver [\[10\]](#). Em particular, genericamente existem regiões em Σ , chamadas de regiões de escape e de deslize, onde ambos os

campos de vetores, X e Y , apontam para dentro ou fora de Σ . Neste caso a trajetória de $Z = (X, Y)$ através de um ponto nestas regiões segue a órbita do campo vetorial deslizante $\mathbf{F}[Z]$. Este campo vetorial é tangente a Σ e está definido em $q \in \Sigma$ pelo vetor $\mathbf{F}[Z](q) = m - q$, onde m é o ponto em que o segmento que une $q + X(q)$ e $q + Y(q)$ é tangente a Σ .

Atualmente, há um crescente interesse no estudo da dinâmica local deslizante de um sistema de equações diferenciais suaves por partes, dada as suas múltiplas aplicações nas diversas áreas da ciência. Existem alguns trabalhos que fornecem uma análise da dinâmica local deslizante de um sistemas de equações diferenciais em $\mathbb{R}^2$, ver por exemplo [13]. No entanto, em $\mathbb{R}^n$ com $n > 2$ a compreensão geral da dinâmica deslizante é dificultada pela presença de órbitas de X e Y que são simultaneamente tangentes a Σ em um ponto.

Em [28, 30] foi feita uma classificação de algumas singularidades típicas, de codimensão 0,1 e 2, do campo deslizante de um sistema suave por partes em $\mathbb{R}^3$ restrito exclusivamente à região de deslize. Nos Teoremas G, H e I estendemos e completamos tal classificação, levando em consideração a possível presença da região de escape, este é um trabalho em conjunto com o Professor Marco Antonio Teixeira.

O trabalho está dividido da seguinte maneira:

No Capítulo 3, primeiro assumimos que a variedade de descontinuidade coincide com o eixo y . Posteriormente, estabelecemos a configuração dos conjuntos de Filippov em relação com os coeficientes do PWLS. Logo, definimos o que é um ciclo limite de um PWLS e determinamos os tipos de ciclos limite de um PWLS. E concluímos determinando condições para a existência de ciclos limite, com as quais provamos os Teoremas A, B e C e D.

No Capítulo 4, primeiro estabelecemos a notação básica, fornecemos alguns definições e resultado elementares. Logo, os principais resultados são apresentados nos Teorema G, H e I. E Finalmente, alguns diagramas de bifurcação são exibidos.

No Capítulo 5 damos algumas direções para estudos futuros.

Preliminares

Neste capítulo vamos introduzir algumas definições e resultados básicos que nos serão úteis no decorrer do texto.

1.1 Campos de Vetores Definidos em Variedades com Bordo

Consideremos N uma variedade compacta C^∞ , orientável de dimensão três, com fronteira Σ . Denotemos por $\Xi^r(n)$ o espaço de todos os germes de campos de vetores de classe C^r em $(\mathbb{R}^n, 0)$ com a topologia C^r , onde r é grande suficiente para nossos propósitos. Para maiores detalhes com relação à estabilidade estrutural de campos de vetores definidos em variedades com bordo remetemos ao leitor as trabalhos [6] e [26]. Por simplicidade consideramos que N é mergulhada em uma variedade de dimensão n em $\mathbb{R}^n$ sem fronteira.

Definição 1.1.1. *Dois campos Z e $\tilde{Z}$ são ditos germe equivalentes se eles coincidem em uma vizinhança não vazia de N .*

As classes de equivalência para esta relação de equivalência são chamados de germes de campos de vetores. Podemos definir analogamente germes de funções. Um campo de vetores X em N é, por definição, um representante da classe de campos de vetores tangentes a N , definidos em $\bar{N} = \partial N \cup N$. Seja φ_X o fluxo do representante X dos campos de vetores definidos em um conjunto $D(X) = \{(x, t) \in \bar{N} \times \mathbb{R} : t \in I_X\}$, onde I_X é o intervalo maximal aberto com extremos $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ contendo 0, com $\varphi_X(0, x) = x$, para o qual $\varphi_X(t, p) \in N$, para todo $t \in I_X$. Podemos ter $\alpha(x), \beta(x)$ infinitos. Além disso, o fluxo φ_X não depende da particular escolha do representante da classe de campos.

A órbita $\gamma(x)$ de X passando por $x \in N$ é por definição a imagem de I_X pela curva integral $\varphi_X(., x) : t \rightarrow \varphi(t, x)$. Órbitas são orientadas pela orientação induzida

por essa aplicação via orientação positiva de I_X .

O estudo qualitativo de uma equação diferencial consiste na descrição da geometria do seu espaço de órbitas. É então natural perguntar-se quando é que dois espaços de órbitas tem a mesma descrição, ou seja, corresponde a estabelecermos uma relação de equivalência entre equações diferenciais. Uma relação de equivalência que exprime a estrutura geométrica das órbitas é a equivalência topológica.

Definição 1.1.2. *Dois campos de vetores X, Y em N são ditos topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo $h : N \rightarrow N$ levando órbitas de X em órbitas de Y , preservando a orientação, isto é, dados $p \in N$ e $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que se $0 < t < \delta$ então $h(\varphi_X(t, p)) = \varphi_Y(t', h(p))$ para algum $0 < t' < \epsilon$. Dizemos que h é uma equivalência topológica entre X e Y . Desta forma definimos uma relação de equivalência em $\Xi^r(n)$.*

Uma relação mais forte é a conjugação entre os fluxos dos campos de vetores. Dois campos X e Y são topologicamente conjugados se existir uma equivalência topológica que preserva o parâmetro t , isto é, $h(\varphi_X(t, p)) = \varphi_Y(t, h(p))$, para todo $p \in N$ e $t \in \mathbb{R}$.

Definição 1.1.3. *Dizemos que $X \in \Xi^r(n)$ é estruturalmente estável em $\Xi^r(n)$ se existe uma vizinhança $B \subset \Xi^r$ de X tal que todo $Y \in B$ é topologicamente equivalente a X .*

Faremos a seguir um resumo dos resultados sobre estabilidade estrutural para variedades com bordo de dimensão dois e três. Seguindo a linha do trabalho de Vishik, em 1972, definimos os tipos de contato genérico para uma variedade de dimensão n .

Suponhamos que Σ contém a origem e é dada implicitamente pela imagem inversa $f^{-1}(0)$, onde $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é o germe de uma aplicação C^∞ que tem a origem como valor regular.

Neste contexto de germes de campos definidos em variedades de dimensão $n + 1$, onde $n > 1$, denotamos por $\Sigma_0(n + 1)$ o conjunto dos elementos em $\Xi(n + 1)$ satisfazendo as seguintes condições:

1. $X.f(0) \neq 0$, 0 é dito de ponto regular de X .
2. $X.f(0) = 0$ e $X^2.f(0) \neq 0$, 0 é dito de ponto dobra de X .
3. $X.f(0) = X^2.f(0) = 0$ e $X^3.f(0) \neq 0$ e o conjunto $\{df(0), d(X.f)(0), d(X^2.f)(0)\}$ é linearmente independente, 0 é dito de ponto cúspide de X .
4. $X.f(0) = X^2.f(0) = \dots = X^{j-1}.f(0) = 0$ e $X^j.f(0) \neq 0$ e o conjunto $\{df(0), d(X.f)(0), d(X^2.f)(0), \dots, d(X^j.f)(0)\}$ é linearmente independente e 0 um ponto regular da aplicação $X.f|_M$, com $j \in \{1, \dots, n + 1\}$,

onde $X^j.f = X.\nabla X^{j-1}.f$ com $X^0.f = f$ e $d(\cdot)$ denotado o operador diferencial. Vishik em seu trabalho, [34], prova que os elementos de $\Sigma_0(n+1)$ são estruturalmente estáveis em $\Xi(n+1)$ e exhibe as suas respectivas formas normais. Na sequência, centramos nossa atenção nos casos em que a dimensão da variedade N é baixa, i.e, 2 ou 3.

Para $n = 2$, em [15] são provados os seguintes teoremas, em que é caracterizado o conjunto de elementos estruturalmente estáveis em $\Xi^r(2)$.

Teorema 1.1.4. *Seja Σ_0 o conjunto de elementos estruturalmente estáveis em $\Xi^r(2)$. As seguintes afirmações são válidas*

1. $X \in \Xi^r(2)$ está em $\Sigma_0(2)$ se e somente se
 - (a) $X(0) \neq 0$
 - (b) para toda definição local, f , de M em 0, uma das seguintes condições é satisfeita:
 - i. $X.f(0) \neq 0$;
 - ii. Dobra, $X.f(0)$ e $X^2.f(0) \neq 0$;
 - (c) Fixando $h(x, y) = y$, as formas normais genéricas de X em $\Sigma_0(2)$ são dadas por:
 - i. Regular $X(x, y, z) = (0, 1)$;
 - ii. Dobra $X(x, y, z) = (1, x)$;
 - (d) $\Sigma_0(2)$ é um conjunto aberto e denso em $\Xi^r(2)$.

Teorema 1.1. *Seja $\Sigma_1(2)$ o conjunto dos elementos estruturalmente estáveis em $\Xi_1^r(2) = \Xi^r(2) \setminus \Sigma_0(2)$, com a topologia induzida. As seguintes afirmações valem:*

1. $\Sigma = \Sigma_1(a) \cup \Sigma_1(b)$;
2. Σ_1 é uma subvariedade de codimensão 1 de $\Xi_1^r(2)$;
3. Σ_1 é aberto e denso em Ξ_1^r , na topologia induzida de $\Xi^r(2)$;
4. Qualquer família a um parâmetro X_μ , $\mu \in (-\epsilon, \epsilon)$ em Ξ^r , transversal a Σ_1 em X_0 , tem uma das seguintes C^0 - formas normais:
 - (a) Cúspide: $X_\mu(u, v) = (1, \mu + u^2)$;
 - (b) Nó: $X_\mu(u, v) = (au, u + bv\mu)$ com $a = 1, b = 2$ ou $a = -1, b = -2$;
 - (c) Sela: $X_\mu = (u, u - v + \lambda)$;
 - (d) Foco: $X_\mu = (u + v, -u + v\lambda)$.

Teorema 1.2. *Seja $\Sigma_2(2)$ o conjunto dos elemento estruturalmente estáveis em $\Xi_2^r(2) = \Xi_1^r(2)/\Sigma_1(2)$, com a topologia induzida. As seguintes afirmações valem:*

1. $\Sigma_2(2)$ é uma subvariedade de codimensão 2 em Ξ_1^r ;

2. $\Sigma_2(2)$ é aberto e denso em Ξ_2^r , na topologia induzida de Ξ_1^r ;
3. Qualquer família a dois parâmetro $X_{\alpha,\beta}$, $(\alpha, \beta) \in (-\epsilon, \epsilon) \times (-\delta, \delta)$ em Ξ^r , transversal a Σ_2 em $X_{0,0}$, tem uma das seguintes C^0 -formas normais:

- (a) Dove's Tail: $X_{\alpha,\beta}(u, v) = (1, bu^3 + \alpha u + \beta)$ com $b = \pm 1$;
- (b) Sela-nó: $X_{\alpha,\beta}(u, v) = (a(u - v) + \beta(u + v), \alpha + (u + v)^2)$ com $a = \pm 1$;
- (c) Sela-nó: $X_{\alpha,\beta}(u, v) = (u - v + \beta(u + v), \alpha + a(u + v)^2)$ com $a = \pm 1$;
- (d) Hop bifurcation: $X_{\alpha,\beta} = (-v + u(\alpha, u^2 + v^2), u - v(\alpha + u^2 + v^2) + \beta)$;
- (e) No-degenerado: $X_{\alpha,\beta} = (u + \alpha v, u + v + \beta)$;
- (f) Sela-Tangente: $X_{\alpha,\beta} = (u, \alpha u - v + au^2 + \beta)$ com $a = \pm 1$;
- (g) Nó-Tangente: $X_{\alpha,\beta} = (au, \alpha u - v + au^2 + \beta)$ com $a = \pm 1$.

Teorema 1.3. As seguintes afirmações valem:

1. Σ_1 é uma subvariedade de codimensão 1 de Ξ_1^r ;
2. Σ_1 é aberto e denso em Ξ_1^r , na topologia induzida de Ξ^r ;

Para $n = 3$, Sotomayor e Teixeira, caracterizaram o conjunto dos elementos estruturalmente estáveis: (i) $\Sigma_0(3)$ em $\Xi(3)$ e (ii) $\Sigma_1(3)$ em $\Xi_1^r(3) = \Xi^r(3) \setminus \Sigma_0(3)$ com a topologia induzida.

Teorema 1.4. As seguintes afirmações são válidas

1. $X \in \Xi^r(3)$ está em $\Sigma_0(3)$ se, e somente se,
 - (a) $X(0) \neq 0$.
 - (b) Para toda definição local, f , de Σ em 0, uma das seguintes condições é satisfeita
 - i. $X.f(0) \neq 0$;
 - ii. Dobra, $X.f(0)$ e $X^2.f(0) \neq 0$;
 - iii. Cúspide, $X.f(0)$ e $X^2.f(0) \neq 0$;
 - (c) Fixando $h(x, y, z) = z$, as formas normais genéricas de X em $\Sigma_0(3)$ são dadas por:
 - i. Regular $X(x, y, z) = (0, 0, 1)$;
 - ii. Dobra $X(x, y, z) = (1, 0, x)$;
 - iii. Cúspide $X(x, y, z) = (1, 0, x^2 + y)$.
 - (d) $\Sigma_0(3)$ é um conjunto aberto e denso em $\Xi^r(3)$.

Afim de caracterizar os elementos que são estruturalmente estáveis em $\Xi_1^r(3) = \Xi^r(3) \setminus \Sigma_0(3)$, introduzimos a seguinte definição:

Definição 1.1.5. Dizemos que X está em $\Sigma_1(a)$ se as seguintes condições valem:

1. 0 é um ponto crítico hiperbólico de X .
2. os autovalores de $DX(0)$ são distintos aos pares e os autoespaços correspondentes são transversais a Σ em 0 .
3. cada par de autovalores complexos não conjugados de $DF(0)$ tem partes reais distintas.

Definição 1.1.6. Dizemos que X está em $\Sigma_1(b)$ se $X(0) \neq 0$, $X.f(0) = 0$, $X^2.f(0) = 0$ e vale uma das seguintes condições:

1. $X^3.f(0) \neq 0$, $\text{rank}\{df(0), d(X.f)(0), d(X^2.f)(0)\} = 2$ e 0 é um ponto crítico não degenerado, Morse, da aplicação $X.f|_M$;
2. $X^3.f(0) = 0$, $X^4.f(0) \neq 0$ e 0 é um ponto regular de $X.h|_\Sigma$.

A próxima definição caracteriza com detalhes os campos vetoriais os elementos de $\Sigma_1(3)$. Denotemos por H_f o Hessiano de uma aplicação f .

Definição 1.1.7. 1. Os elementos de $\Sigma_1(a)$ são classificados por:

- (a) Nó: $X(0) = 0$, os autovalores de $DX(0)$, λ_j com $j = 1, 2, 3$, são reais, distintos, $\lambda_1 \lambda_j > 0$ para $j = 2, 3$, e os autoespaços são transversais a Σ em 0 ;
- (b) Sela: $X(0) = 0$, os autovalores de $DX(0)$, λ_j com $j = 1, 2, 3$, são reais, distintos, $\lambda_1 \lambda_j < 0$ para $j = 2, 3$, e os autoespaços são transversais a Σ em 0 ;
- (c) Nó: $X(0) = 0$, os autovalores de $DX(0)$, λ_j com $j = 1, 2, 3$, $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = a + ib$ e $\lambda_3 = c$, como a, b, c não nulos, $c \neq a$, e os autoespaços são transversais a M em 0 .

2. Os elementos de $\Sigma_1(b)$ são classificados por:

- (a) Lips: $X^3.f(0) \neq 0$, $\text{rank}\{df(0), d(X.f)(0), d(X^2.f)(0)\} = 2$ e 0 é um ponto crítico não degenerado, Morse, da aplicação $X.f|_\Sigma$; e $H_{X.f|_\Sigma} > 0$;
- (b) Bec to Bec: $X^3.f(0) \neq 0$, $\text{rank}\{df(0), d(X.f)(0), d(X^2.f)(0)\} = 2$ e 0 é um ponto crítico não degenerado, Morse, da aplicação $X.f|_\Sigma$; e $H_{X.f|_\Sigma} < 0$;
- (c) $X^3.f(0) = 0$, $X^4.f(0) \neq 0$ e 0 é um ponto regular de $X.h|_\Sigma$.

No próximo Teorema são classificados todos os tipos topológicos de $\Sigma_1(3)$.

Teorema 1.5. Qualquer família a um parâmetro X_μ , $\mu \in (-\epsilon, \epsilon)$, em $\Xi^r(3)$, transversal a $\Sigma_1(3)$ em X_0 , tem uma das seguintes C^0 -formas normais:

1. L 11-Nó: $X_\mu(u, v, w) = (au, bv, au + cw + \mu)$ com $(a, b, c) = \delta(3, 2, 1)$ e $\delta = \pm 1$.
2. L 12-Nó: $X_\mu(u, v, w) = (au, bv, au + cw + \mu)$ com $(a, b, c) = \delta(1, 3, 2)$ e $\delta = \pm 1$;

3. *L 13-Nó*: $X_\mu(u, v, w) = (au, bv, au + cw + \mu)$ com $(a, b, c) = \delta(1, 2, 3)$, e $\delta = \pm 1$;
4. *Sela*: $X_\mu(u, v, w) = (u, 2v, u + 2v - w + \mu)$;
5. *Foco*: $X_\mu(u, v, w) = (-v + u, -u - v, -3u - v + w + \mu)$;
6. *Lips*: $X_\mu(u, v, w) = (1, 0, -3u^2 + v^2 + \mu)$;
7. *Bec to Bec*: $X_\mu(u, v, w) = (1, 0, -3u^2 - v^2 + \mu)$;
8. *Dove's Tail*: $X_\mu(u, v, w) = (1, 0, 4\delta u^3 + v + \mu u)$ com $\delta = \pm 1$.

Medrado e Teixeira, em [6], classificaram os elementos estruturalmente estáveis em $\Xi_2^r(3) = \Xi_1^r(3) \setminus \Sigma_1(3)$, com a topologia induzida de $\Xi_1^r(3)$.

Definição 1.1.8. Denotamos por $\Sigma_2(a)$ o conjunto de elementos, X , em $\Xi_2^r(3)$, os quais tem um único ponto, 0 , em Σ tal que $X(0) = 0$ e vale uma das seguintes condições:

1. *Sela-Nó*: 0 é uma sela-nó de X e os autoespaços de $DX(0)$ são transversais à Σ em 0 .
2. *Hopf*: 0 é um ponto de equilíbrio de codimensão um de Hopf de X e os auto-espaços de $DX(0)$ são transversais a Σ em 0 .
3. *Hiperbólico Tangente*: Os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ de $DX(0)$ são distintos e existe uma variedade invariante de dimensão 1 com contato quadrático a M em 0 . Mas ainda, os outros auto-espaços são transversais à Σ em 0 .
4. *Nó-Degenerado*: Os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ de $DX(0)$ satisfazendo $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, $\text{rank}\{DX(0) - \lambda_1 Id\} = 2$. Mas ainda, os auto-espaços associados aos autovalores são transversais à Σ em 0 .
5. *Foco- Tangente*: Os autovalores $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ e $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$. Mais ainda, os auto-espaços associados aos autovalores complexos tem contato quadrático com Σ em 0 , Morse, e o auto-espaço associado ao autovalor real é transversal à Σ em 0 .

Definição 1.1.9. Denotamos por $\Sigma_2(b)$ o conjunto de elementos $X \in \Xi^2(3)$, o qual $X(0) \neq 0$, $X^2.f(0) = 0$ e vale uma das seguintes condições:

1. *Goose*: $X^3.f(0) \neq 0$, $\text{rank}\{df(0), d(X.f)(0), d(X^2.f)(0)\} = 2$ e a função $X.h|_\Sigma$ é equivalente, em 0 , a um germe simples de codimensão 1;
2. *Gull*: $X^3.f(0) = 0$, $X^4.f(0) \neq 0$ e 0 é um ponto crítico não degenerado de $X.f|_\Sigma$.
3. *Butterfly*: $X^3.f(0) = X^4.f(0)$, $X^5.f(0) \neq 0$ e 0 é um ponto regular de $X.f|_\Sigma$.

Teorema 1.6. As seguintes afirmações valem:

1. $\Sigma_2(3) = \Sigma_2(a) \cup \Sigma_2(b)$;
2. X é estruturalmente estável relativo a $\Xi_2^r(3)$ se, e somente se, $X \in \Sigma_2(3)$;
3. $\Sigma_2(3)$ é uma subvariedade de codimensão 2 de $\Xi^r(3)$.

1.2 Campos de Vetores Suaves por partes

Nesta seção introduziremos algumas definições e resultados preliminares acerca de sistemas suaves por partes, que nos serão úteis. Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ uma aplicação de classe C^r , $r \geq 1$ que possui a origem como valor regular. Consideremos Ξ o espaço de todos os germes de campos de vetores Z em $(\mathbb{R}^n, 0)$ tais que

$$Z(q) \begin{cases} X(q), & \text{se } f(q) \leq 0, \\ Y(q), & \text{se } f(q) < 0, \end{cases}$$

onde f é uma representação implícita local de Σ no 0. Quando escrevemos $Z = (X, Y)$ estamos assumindo que o campo X está definido e é suave em $f^{-1}((0, \infty))$ e Y está definido e é suave em $f^{-1}((-\infty, 0))$. As órbitas de Z sobre os pontos Σ , quando é possível, são consideradas através da convenção de Filippov estabelecidas em [10], as quais serão discutidas a seguir.

Definição 1.2.1. *Distinguiremos as seguintes conjuntos em Σ ;*

Conjunto de Costura: $\Sigma_c = \{p \in \Sigma : (X.f(p))(Y.f(p)) > 0\}$;

Conjunto de Escape: $\Sigma_e = \{p \in \Sigma : (X.f(p)) > 0 \text{ e } (Y.f(p)) < 0\}$;

Conjunto de Deslize: $\Sigma_s = \{p \in \Sigma : (X.f(p)) < 0 \text{ e } (Y.f(p)) > 0\}$;

Conjunto Crítico: $\Sigma_s = \{p \in \Sigma : (X.f(p))(Y.f(p)) = 0\}$;

Consideremos $\wp = \Sigma_s \cup \Sigma_e \cup \Sigma_c$, temos que, genericamente, $\wp$ é aberto e denso em Σ .

Na região de deslize e escape definiremos o campo deslizante Z_s associado a $Z = (X, Y)$ da seguinte maneira: se $p \in \Sigma_s \cup \Sigma_e$ então Z_s denota o cone gerado por $X(p)$ e $Y(p)$ tangente a Σ , i.e., $Z_s = m - p$, onde m é ponto onde o segmento ligando $p + X(p)$ e $p + Y(p)$ é tangente a Σ .

1.3 Função W de Lambert

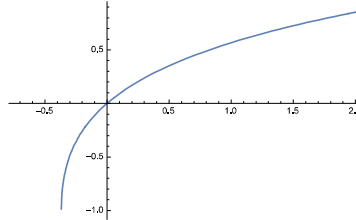


Figura 1.1: Função W de Lambert definida univocamente no intervalo $(-1/e, \infty)$.

A Função W de Lambert, devida ao matemático suíço Johann Heinrich Lambert, é definida como a inversa, como vários valores da função real $y \rightarrow ye^y$. Ou seja, se $W(y)$ satisfaz a equação $W(y)e^{W(y)} = y$.

Observe que se a função real $f(y) = ye^y$, é decrescente para $y < -1$ e crescente para $y > -1$. O mínimo global de f é dado por $f(-1) = -1/e$. Por esta razão $W(y)$ é uma função multivaluada, mas pode ser definida univocamente como uma função real no intervalo $(-1/e, \infty)$.

Cotas Máximas de Ciclos Limite de um Sistema Linear de Equações Diferenciais Por Partes em Duas Zonas Separadas Por Uma Linha Reta

Neste Capítulo 2, primeiro assumimos que a variedade de descontinuidade coincide com o eixo y . Posteriormente, estabelecemos a configuração dos conjuntos de Filippov em relação com os coeficientes do PWLS. Logo, definimos e determinamos o que é um ciclo limite de um PWLS. Finalizamos o capítulo determinando condições para a existência de ciclos limite, com as quais provamos os Teoremas A, B C, e D.

2.1 Sistemas Lineares de Equações Diferenciais por Partes em Duas Zonas

Sem perda de generalidade podemos assumir que PWLS (3.2) é dado por

$$X(x, y) = \begin{cases} X^+(x, y) = (a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y) + (b_1, b_2), & (x, y) \in \overline{\Sigma}^+, \\ X^-(x, y) = (e_{11}x + e_{12}y, e_{21}x + e_{22}y) + (g_1, g_2), & (x, y) \in \overline{\Sigma}^-, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde a_{ij}, b_i, e_{ij} e g_i são números reais para $i, j = 1, 2$. Como antes, mencionado o campo vetorial X é definido sobre Σ segundo a convenção de Filippov, para mais detalhes ver [10]. Segundo esta convenção, distinguimos os seguintes conjuntos em Σ : (i) *conjunto de Costura* Σ_c ; (ii) O *conjunto de deslize* Σ_s ; (ii) O *conjunto de escape* Σ_e ; e (iii) O *conjunto singular* Σ_T . Observemos que $\Sigma = \Sigma_c \cup \Sigma_s \cup \Sigma_e \cup \Sigma_T$.

Na sequência determinamos as possíveis configurações dos conjuntos de Filippov para um PWLS na forma (2.1).

Proposição 2.1. *Seja $X = (X^+, X^-)$ um PWLS na forma (2.1).*

S1: *Caso $a_{12}e_{12} < 0$ então existem $p^+, p^- \in \mathbb{R}$, tais que:*

1. *Se $-a_{12}, e_{12} < 0$, temos que:*
 - (a) $\Sigma_e = \{(0, y) : y \in (\max\{p^+, p^-\}, \infty)\}$;
 - (b) $\Sigma_s = \{(0, y) : y \in (-\infty, \min\{p^+, p^-\})\}$;
 - (c) $\Sigma_T = \{(0, p^+), (0, p^-)\}$.
2. *Se $-a_{12}, e_{12} > 0$, temos que:*
 - (a) $\Sigma_s = \{(0, y) : y \in (\max\{p^+, p^-\}, \infty)\}$;
 - (b) $\Sigma_e = \{(0, y) : y \in (-\infty, \min\{p^+, p^-\})\}$;
 - (c) $\Sigma_T = \{(0, p^+), (0, p^-)\}$.

Em particular, se $p^+ \neq p^-$ segue que

$$\Sigma_c = \{(0, y) : y \in (\min\{p^+, p^-\}, \max\{p^+, p^-\})\}.$$

S2: *Se $a_{12}e_{12} > 0$ então existem $p^+, p^- \in \mathbb{R}$, tais que:*

1. $\Sigma_c = \{(0, y) : y \in (-\infty, \min\{p^+, p^-\}) \cup (\max\{p^+, p^-\}, \infty)\}$;
2. $\Sigma_T = \{(0, p^+), (0, p^-)\}$.

Em particular, se $p^+ \neq p^-$, temos que Σ_s ou Σ_e é

$$\{(0, y) : y \in (\min\{p^+, p^-\}, \max\{p^+, p^-\})\}.$$

S3: *Se $a_{12}g_1 \neq 0$ e $e_{12} = 0$ ou $e_{12}b_1 \neq 0$ e $a_{12} = 0$, temos que só um dos sistemas laterais possui um ponto de tangência, $(0, p)$, e*

1. $\Sigma_c = \{(0, y) : y \in (-\infty, p)\}$ e $\Sigma_s = \{(0, y) : y \in (p, \infty)\}$ ou;
2. $\Sigma_c = \{(0, y) : y \in (-\infty, p)\}$ e $\Sigma_e = \{(0, y) : y \in (p, \infty)\}$ ou;
3. $\Sigma_e = \{(0, y) : y \in (-\infty, p)\}$ e $\Sigma_c = \{(0, y) : y \in (p, \infty)\}$ ou;
4. $\Sigma_s = \{(0, y) : y \in (-\infty, p)\}$ e $\Sigma_e = \{(0, y) : y \in (p, \infty)\}$.

S4: *Se $a_{12} = e_{12} = 0$ e $g_1b_1 \neq 0$, então*

1. $\Sigma_c = \{(0, y) : y \in (-\infty, \infty)\}$ ou;
2. $\Sigma_s = \{(0, y) : y \in (-\infty, \infty)\}$ ou;
3. $\Sigma_e = \{(0, y) : y \in (-\infty, \infty)\}$.

S5: *Se $a_{12} = e_{12} = 0$ e $g_1b_1 = 0$, temos que um dos sistemas laterais possui infinitas tangências. Em particular $\Sigma_T = \{(0, y) : y \in (-\infty, \infty)\}$.*

Demonstração. Este resultado segue diretamente das definições dos conjuntos de Filippov. □

2.1.1 Classificação de Sistemas Laterais de Um PWLS

Um PWLS, $X = (X^+, X^-)$, na forma (2.1) pode ser classificado segundo o comportamento qualitativo dos seus sistemas laterais, que por sua vez são sistemas de equações diferenciais lineares no plano. Com esse propósito, consideremos, $\mathcal{L}$, o conjunto de todos os sistemas lineares no plano. Diremos que $W \in \mathcal{L}$ é degenerado se o determinante da sua matriz associada é zero, caso contrário W será dito não degenerado. Se W for não degenerado é fácil estabelecer que o sistema possui um único ponto de equilíbrio em $\mathbb{R}^2$ que pode ser: sela, nó, centro ou foco. Levando em consideração esta classificação, distinguimos as seguintes classes em $\mathcal{L}$:

1. $S = \{W \in \mathcal{L} : W \text{ tem uma singularidade do tipo sela com raio de hiperbolicidade diferente de } 1\}$,
2. $S^0 = \{W \in \mathcal{L} : W \text{ tem uma singularidade do tipo sela com raio de hiperbolicidade igual a } -1\}$,
3. $N = \{W \in \mathcal{L} : W \text{ tem uma singularidade do tipo nó com autovalores diferentes}\}$,
4. $N^* = \{W \in \mathcal{L} : W \text{ tem uma singularidade do tipo nó diagonalizável com autovalores iguais}\}$,
5. $N^0 = \{W \in \mathcal{L} : W \text{ tem uma singularidade do tipo nó não diagonalizável}\}$.
6. $F = \{W \in \mathcal{L} : W \text{ tem uma singularidade do tipo foco}\}$.
7. $C = \{W \in \mathcal{L} : W \text{ tem uma singularidade do tipo centro}\}$.

Caso W seja degenerado, o sistema possui infinitos pontos de equilíbrio ou simplesmente não tem. Para este tipo de sistemas distinguimos os seguintes classes em $\mathcal{L}$

1. $D^0 = \{W \in \mathcal{L} : W \text{ não tem pontos de equilíbrio nem linhas retas invariantes}\}$.
2. $D^1 = \{W \in \mathcal{L} : W \text{ tem uma reta invariante e não possui pontos de equilíbrio}\}$.
3. $D^2 = \{W \in \mathcal{L} : W \text{ tem só uma linha reta singularidades}\}$.
4. $D^3 = \{W \in \mathcal{L} : W \text{ tem duas linhas de singularidades}\}$.

Observemos que família de classes $\{S, S^0, N, N^*, N^0, D^1, D^2, D^3\}$ formam uma partição de $\mathcal{L}$.

Para um dado sistema linear W definida no subespaço Σ^+ (ou Σ^-). Dizemos que W tem um ponto de tangência quadrática: (i) invisível, se existe $p \in \Sigma$ com $X^+.f(p) = 0$ e $(X^+)^2.f(p) > 0$ (ou $(X^-)^2.f(p) < 0$); (ii) visível, se existe $p \in \Sigma$ com $X^+.f(p) = 0$ e $(X^+)^2.f(p) < 0$ (ou $X^-.f(p) = 0$ e $(X^-)^2.f(p) > 0$).

Agora, definiremos subclasses para os sistemas laterais de X dependendo da posição do seu ponto de equilíbrio caso o sistema for não degenerado ou do tipo de

contato com Σ , caso contrário.

Seja $W \in \{S, S^0, N, N^*, N^0, F, C\}$ um sistema lateral de (2.3) definido em $\Sigma^w \in \{\Sigma^+, \Sigma^-\}$ e $q \in \mathbb{R}^2$ com $W(q) = 0$. W será dito do tipo: (i) r , ou *real*, se $q \in \Sigma^w$; (ii) v , ou *virtual*, se $q \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Sigma^w}$, ou (iii) b , ou *de fronteira*, se $q \in \Sigma$. Caso $W \in \{D^1, D^2, D^3\}$ diremos, que W é do tipo (i) V , se W tem uma tangência quadrática visível; (ii) I , se W tem tangência quadrática invisível; ou (iii) C , caso contrário.

Diremos que $W \in J_j$, com $J \in \{S, S_0, N, N^*, N^0\}$ e $j \in \{r, v, b\}$, se $W \in J$ e do tipo tipo j . Ou $W \in J_j$, com $J \in \{D^1, D^2, D^3\}$ e $j \in \{I, V, O\}$, se $W \in J$ e é do tipo j .

2.1.2 Campo Deslizante e Ciclos Limite de um PWLS

Em particular, em $\Sigma_s \cup \Sigma_e$ o PWLS $X = (X^+, X^-)$ tem associado um campo vetorial, X^s , que é uma combinação linear convexa de X^+ e X^- tangente a Σ e é definido formalmente por

$$X^s(0, y) = \frac{(X^+ f(0, y) X^-(0, y) - X^- f(0, y) X^+(0, y))}{X^+ f(0, y) - X^- f(0, y)}. \quad (2.2)$$

Para $w \in \{+, -, s\}$, denotamos por $\varphi_w(t, p)$ a solução de X^w passando por $p \in \mathbb{R}^2$ no tempo t .

Diremos que uma curva fechada orientada Υ homeomorfa a S^1 é uma órbita periódica do um PLWS $X = (X^+, X^-)$, se $\Upsilon = \bigcup_{k=1}^n \overline{\gamma_k}$, onde cada γ_i é uma curva, é tal que:

1. Se $\gamma_k \subset \Upsilon \cap \Sigma^\pm$ então existe $p \in \mathbb{R}^2$ e $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ de modo que $\gamma_k = \{\varphi_\pm(t, p) : t \in (t_1, t_2)\}$. E $\overline{\gamma_k} \cap \Sigma \neq \emptyset$;
2. Se $\gamma_k \subset \Upsilon \cap \Sigma$ então existe $p \in \mathbb{R}^2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ e $w \in \{+, -, s\}$ tal que $\gamma_k = \{\phi_w(t, p) : t \in (t_1, t_2)\}$;
3. Se $\gamma_i \in \Sigma_j$ com $j \in \{s, e, T\}$ então $\gamma_{i+1}, \gamma_{i-1} \not\subset \Sigma_j$;
4. $\overline{\gamma_i} \cap \overline{\gamma_{i+1}} = \{p\}$, para algum $p \in \Sigma$.

Distinguimos quatro tipos de órbita periódicas para um PLWS. Formalmente, uma órbita periódica de um PWLS, Υ , é dita:

1. Standard, se $\Upsilon \subset \Sigma^\pm$;
2. Costura, se $\Upsilon \cap \Sigma \subset \Sigma_e$;
3. Deslizante, se $\Upsilon \cap (\Sigma_s \cup \Sigma_e) \neq \emptyset$;

4. Crítica, caso contrário.

Se para uma dada órbita periódica de um PWLS, Υ , existe uma vizinhança, U de Υ em $\mathbb{R}^2$, tal que Υ é a única órbita periódica que intersecta U , diremos que Υ é um **ciclo limite**. Logo, é possível distinguir quatro tipos de ciclo limite segundo o seu tipo como órbita periódica.

Se $X = (X^+, X^-)$ um PWLS na forma (2.1) denotaremos por: $\eta_{st}(X)$, o número de ciclos limites standard; $\eta_c(X)$, o número de ciclos de costura; $\eta_s(X)$, o número de ciclos deslizantes; $\eta_{ct}(X)$, o número de ciclos de críticos; $\eta(X)$, o número de ciclos de X .

2.2 Ciclos Limite

Neste seção, apresentamos condições para a existência de ciclos limite para um PWLS.

2.2.1 Ciclos Deslizantes

Por definição o campo deslizante é um campo vetorial definido em $\Sigma_s \cup \Sigma_e$, no resultado seguinte provaremos que é possível estender este campo vetorial aos pontos de acumulação do seu domínio de definição, isto será fundamental para estabelecer se existem órbitas de X^s que se aproximam, em tempo finito, a algum destes pontos.

Proposição 2.2. *Seja $X = (X^-, X^+)$ um PWLS na forma (2.1). Se $(0, p) \in \partial\Sigma_s \cup \partial\Sigma_e$ então $\lim_{y \rightarrow p} X^s(0, y)$ existe.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos assumir que $\Sigma_s \subset (0, \infty)$, $(0, 0) \in \partial\Sigma_s$ e $X^+.f(0, 0) = 0$. Logo, $b_1 = 0$, $a_{12} < 0$ e (i) $g_1 > 0$ ou (ii) $g_1 = 0$ e $e_{12} > 0$. Por definição, X^s para $X = (X^+, X^-)$ pode ser escrito explicitamente como,

$$X^s(0, y) = \left(0, \frac{(a_{12}y)(a_{22}y + b_2) - (e_{12}y + g_1)(e_{22}y + g_2)}{a_{12}y - e_{12}y - g_1} \right)$$

portanto, se $b_1 = 0$, $a_{12} < 0$ e (i) $g_1 > 0$ ou (ii) $g_1 = 0$ e $e_{12} > 0$, resulta que $\lim_{y \rightarrow 0} X^s(0, y)$ existe e logo o resultado está provado. $\square$

Para estudar a existência de órbitas periódicas deslizantes, introduzimos a seguinte definição auxiliar:

Definição 2.2.1. *Sejam W um campo vetorial definido num conjunto Σ^w de $\mathbb{R}^2$, e $\phi_W(t, p_0)$ a órbita de W passando por p no tempo t . Diremos que $\gamma(p, q, W)$ é um segmento de órbita se: (i) $W(q) \neq 0$; (ii) existem $r \in \gamma(p, q, W)/\{p, q\}$, t_1 e $t_2 \in \mathbb{R}$ com $t_1 < 0 < t_2$. Tal que, $\phi_W(t, p) \in \gamma(p, q, W)$ para $t \in (t_1, t_2)$, $\lim_{t \rightarrow t_1} \phi_W(t, r) = p$ e $\lim_{t \rightarrow t_2} \phi_W(t, r) = q$.*

Logo, se Υ é um ciclo limite de um PWLS então Υ é a união finita de segmentos de órbita.

No resultado a seguir fornecemos uma condição necessária para a existência de ciclos limite deslizantes.

Proposição 2.3. *Seja $X = (X^+, X^-)$ um PWLS na forma (2.1), se Υ é uma órbita periódica deslizante de X , então existe $q \in (\partial\Sigma_s \cup \partial\Sigma_e) \subset \Sigma_T$ tal que $q \in \Upsilon$. Em particular,*

1. *Se $q \in \partial\Sigma_s \cap \partial\Sigma_e$, então Υ não é um ciclo limite.*
2. *Se $q \in (\partial\Sigma_s \cap \partial\Sigma_c) \cup (\partial\Sigma_e \cap \partial\Sigma_c)$ então Υ é um ciclo limite deslizante. Além disso, se $X^+ \cdot f(q) = 0$ (ou $X^- \cdot f(q) = 0$) então $X^+ \in F_r$ (ou $X^- \in F_r$).*

Demonstração. Sejam $X = (X^-, X^+)$ a PWLS na forma (2.1) e Υ uma órbita periódica deslizante de X . É claro que $\Sigma_s \cup \Sigma_e \neq \emptyset$ e a derivada de Lie de cada um dos seus sistemas laterais tem sinal constante em cada um destes conjuntos, então deve existir $q \in \Sigma_T$ tal que $q \in \Upsilon$, caso contrário qualquer união de segmentos finitos de órbita saindo de um ponto em Σ^s estará contido em Σ , o que impede a existência de órbitas periódicas de deslize. Segue, dos itens (i) e (ii) da Proposição 2.1 que $q \in \partial\Sigma_s \cup \partial\Sigma_e$ ou $q \in (\partial\Sigma_s \cap \partial\Sigma_c) \cup (\partial\Sigma_e \cap \partial\Sigma_c)$.

1. Se $q \in \partial\Sigma_s \cap \partial\Sigma_e$, segue da Proposição 2.1 que $\Sigma = \Sigma_s \cap \Sigma_e \cup \{q\}$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $q = (0, 0)$, $\Sigma_s = \{(0, y) | y \in (-\infty, 0)\}$, $\Sigma_e = \{(0, y) | y \in (0, \infty)\}$ e que existe $\gamma(p, r, X^+) \subset \Upsilon \cup \Sigma_+ \neq \emptyset$ com $p \in \Sigma_s$ e $r \in \overline{\Sigma_e}$. Segue da continuidade do fluxo de X^+ que existem vizinhanças, V_p e V_r em Σ de p e r respectivamente, de modo que para cada $p_1 \in V_p$ existe $r(p_1) \in V_r$ tal que $\gamma(p_1, r(p_1), X^+) \subset \Sigma^+$. Caso $r \in \Sigma_e$ e levando em consideração que Υ é uma órbita periódica obtemos que existem $\gamma(q, p, X^s) \subset \Sigma_s$, $\gamma(r, q, X^s) \subset \Sigma_e$ e $\gamma(q, p, X^s), \gamma(r, q, X^s) \subset \Upsilon$, ver Figura 2.1-(a), da continuidade de X^s , e abusando da notação, obtemos que as curvas orientadas $\gamma(p_1, r(p_1), X^+) \cup \gamma(q, p_1, X^s) \cup \gamma(r(p_1), q, X^s) \cup \{p_1, r(p_1), q\}$ são órbitas periódicas passando por q , portanto Υ não é um ciclo limite. Para $r \in \partial\Sigma_e$, o resultado segue de forma similar, ver Figura 2.1-(b).

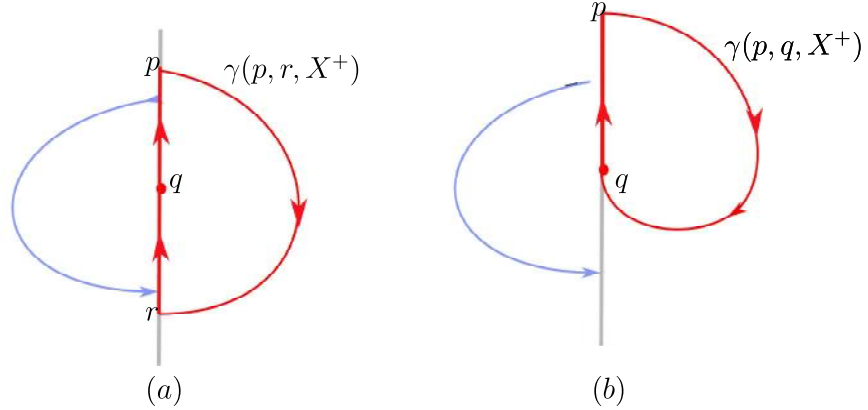


Figura 2.1: Imagens pela aplicação de Poincaré do ponto p .

2. Se $q \in (\partial\Sigma_s \cap \partial\Sigma_c) \cup (\partial\Sigma_e \cap \partial\Sigma_c)$, podemos considerar sem perda da generalidade que $q = (0, 0)$ e $\Sigma_s \subset \{(0, y) : y \in (-\infty, 0)\}$.

Caso 1 Se Σ_s não é um conjunto limitado, i.e., $\Sigma_s = \{(0, y) : y \in (-\infty, 0)\}$, segue da Proposição 2.1 que $\Sigma_c \subset \{(0, y) : y \in (0, \infty)\}$. Usando um argumento similar ao caso anterior, podemos assumir que existe $\gamma(p_1, q, X^s) \subset \Sigma_s \cap \Upsilon$ e $\gamma(q, p_1, X^+) \subset \Sigma^+ \cap \Upsilon$ com $p_1 \in \Sigma$, o que implica que $X^+ \in F_r$ e $p_1 \in \Sigma_s$, i.e., $\Upsilon = \gamma(p_1, q, X^s) \cup \gamma(q, p_1, X^+) \cup \{q, p_1\}$. Decorre da continuidade dos fluxos dos sistemas laterais e do deslizante que existe uma vizinhança de Υ em $\mathbb{R}^2$ de modo que, se ha uma órbita periódica, Υ_2 , passando por algum $r \in V$ então Υ_2 deve intersectar Σ_s e portanto $q \in \Upsilon_2$. E consequentemente $\Upsilon \subset \Upsilon_2$, o que é uma contradição, então Υ_2 não é uma órbita periódica. Portanto, Υ é um ciclo limite.

Caso 2 Se Σ_s é um conjunto limitado, i.e., $\Sigma_s = \{(0, y) : y \in (-1, 0)\}$. O resultado segue com um argumento similar ao caso anterior.

□

Agora ilustramos alguns exemplos de PWLS's exibindo um ciclo limite deslizante.

Exemplo 2.2.2. Sejam os PWLS, $X = (X^+, X^-)$, $Y = (Y^+, X^-)$ e $Z = (Z^+, X^-)$ com

$$\begin{cases} X^+(x, y) = (2rx - y + b, (r^2 + 1)x - 1), \\ X^-(x, y) = (2rx - y, (r^2 + 1)x + 1), \\ Y^+(x, y) = (-2rx - y + b, (r^2 + 1)x - 1), \\ Z^+(x, y) = (-y + b, x - 1) \end{cases}$$

e consideremos $\Theta_1(t)$ e $\Theta_2(t)$ duas curvas orientadas fechadas simples dadas por,

$$\Theta_1(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right], \\ \gamma_2(t) & t \in [0, t_1]. \end{cases} \quad e \quad \Theta_2(t) = \begin{cases} \gamma_3(t) & t \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right], \\ \gamma_4(t) & t \in [0, t_1]. \end{cases}$$

$$\gamma_1(t) = \left(\frac{e^{rt}(r \sin(t) - \cos(t)) + 1}{r^2 + 1}, \frac{br^2 + b + e^{rt}((r^2 - 1) \sin(t) - 2r \cos(t)) + 2r}{r^2 + 1} \right),$$

$$\gamma_2(t) = \left(0, \frac{1}{2} \left(b - (b - 2b_0) e^{-\frac{2t}{b}} \right) \right),$$

$$\gamma_3(t) = \left(\frac{e^{rt}(\cos(t) - r \sin(t)) - 1}{r^2 + 1}, \frac{e^{rt}(r^2(-\sin(t)) + 2r \cos(t) + \sin(t)) - 2r}{r^2 + 1} \right),$$

$$\gamma_4(t) = \left(0, \frac{1}{2} \left(b - (b - 2b_1) e^{-\frac{2t}{b}} \right) \right),$$

onde $b = -12\pi \left(W \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right)^{-1}$, $r = 2W \left(\frac{3\pi}{2} \right) (3\pi)^{-1}$, $b_0 = -7e^{W(\frac{3\pi}{2})}$ e $t_1 = \ln \left(\frac{4}{3} \right) \frac{6\pi}{W(\frac{3\pi}{2})}$ e $b_1 = -e^{W(\frac{3\pi}{2})}$. Sendo $W(z)$ a parte principal da função de Lambert o qual esta definida implicitamente pela equação $z = we^{wz}$.

Determinando o fluxo de cada um dos sistemas laterais e do campo deslizando estabelecemos facilmente que: $\Theta_1(t)$ é um ciclo limite deslizando de X , Y e Z , e Θ_2 é um ciclo limite de X , ver Figura 5.1.

Observemos que no Exemplo 2.2.2 temos que para X o produto das divergências dos seus sistemas laterais é positivo, para Y é negativo e para Z é zero. No resultado subsequente relacionamos o sinal do produto dos sistemas laterais com o número de ciclos deslizantes que um PWLS pode exibir.

Proposição 2.4. *Seja $X = (X^+, X^-)$ um PWLS na forma (2.1) com o conjunto $\Sigma_s \cup \Sigma_e$ limitado e não vazio. Se a divergência dos seus sistemas laterais não muda de sinal então $\eta_s(X) \leq 2$, caso contrário $\eta_s(X) \leq 1$.*

Demonstração. Seja $X = (X^+, X^-)$ um PWLS na forma (2.1) tal que conjunto $\Sigma_s \cup \Sigma_e$ é limitado e não vazio, segue da Proposição 2.1 que existem $p^+, p^- \in \Sigma_T$ com $p^+ \neq p^-$, $X^+.f(p^+) = 0$ e $X^-.f(p^-) = 0$. Sem perda da generalidade podemos assumir que $p^+ > p^-$ e $\Sigma_e = \emptyset$, logo $\Sigma_s = \{(0, y) : p^- > y > p^+\}$. Da Proposição 2.3 temos que uma condição necessária para a existência de dois ciclos limite de deslize é que

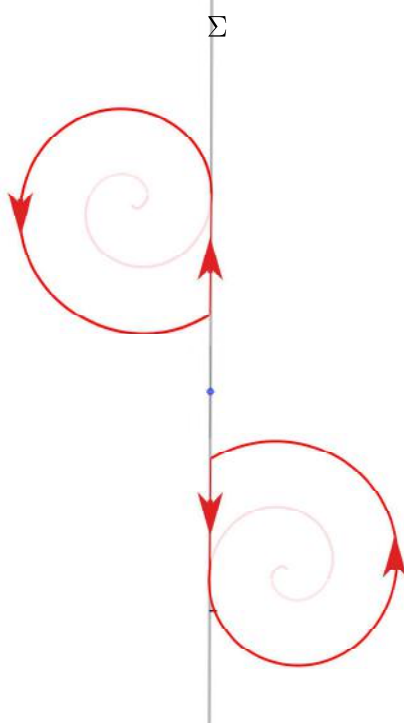


Figura 2.2: Dois ciclos limites deslizantes.

$X^\pm \in F_r$. Sob estas condições é possível inferir que o movimento de ambos os focos tem o mesmo sentido, por esse motivo assumiremos que é anti-horário.

1. Caso $\text{div}(X^+)\text{div}(X^-) < 0$ temos que o foco associado a X^- é estável e o do X^+ é instável, Isto implica que não existe $q \in \Sigma$ de modo que $\gamma(p^-, q, X^-) \subset \Sigma^-$ ou $\gamma(p^-, q, X^+) \subset \Sigma^+$, o que implica que não há uma órbita periódica deslizante passando por p^- . Logo $\eta_s(X) < 2$.
2. Caso $\text{div}(X)\text{div}(Y) = 0$, temos X tem no máximo um foco real, logo $\eta_s(X) < 2$.

Segue do exemplo 2.2.2 que as cotas máximas são atingidas, com isto fica provado o resultado. $\square$

Para um PWLS na forma (2.1) é fácil estabelecer que existem só dois tipos de ciclos deslizantes, que não são equivalentes por homeomorfismos que preservem a variedade de descontinuidade, ver Figura 2.3. E, as possíveis configurações com dois ciclos limite são ilustradas na Figura 2.4.

2.2.2 Ciclos Limite Críticos

Condições para a existência de ciclos limite críticos são estabelecidas a seguir,

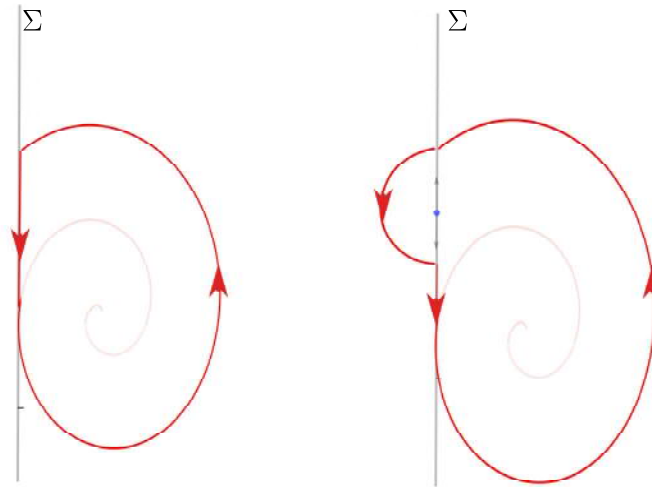


Figura 2.3: Tipos de Ciclos Deslizantes.

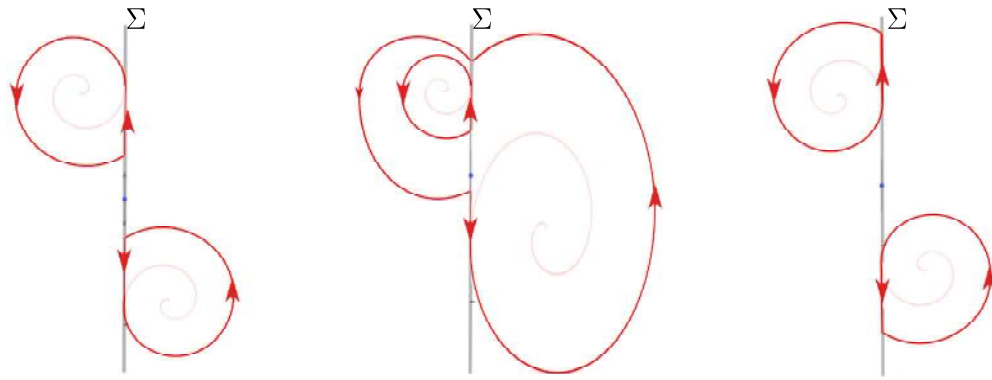


Figura 2.4: Configuração de dois ciclos limite deslizantes.

Proposição 2.5. Seja $X = (X^+, X^-)$ um PWLS na forma (2.1). Se Υ é um ciclo limite crítico de X , então $\Sigma_T \subset \Sigma$ e existe $p \in \partial\Sigma_c \subset \Sigma_T$ tal que $q \in \Upsilon$. Em particular, se $q \in (\partial\Sigma_s \cap \partial\Sigma_c) \cup (\partial\Sigma_e \cap \partial\Sigma_c)$ e $X^+.f(q) = 0$ (ou $X^-.f(q) = 0$) então, $X^+ \in F_r$ (ou $X^- \in F_r$).

Demonstração. A demonstração é análoga a prova da Proposição 2.3. □

Proposição 2.6. Seja $X = (X^+, X^-)$ um PWLS na forma (2.1) com o conjunto $\Sigma_s \cup \Sigma_e$ limitado e não vazio. Se a divergência dos seus sistemas laterais não muda de sinal então $\eta_{cr}(X) < 3$, caso contrário $\eta_{cr}(X) < 2$.

Demonstração. A demonstração é análoga a prova da Proposição 2.4. □

Os tipos de ciclos limite críticos possíveis são ilustrados na Figura 2.5.

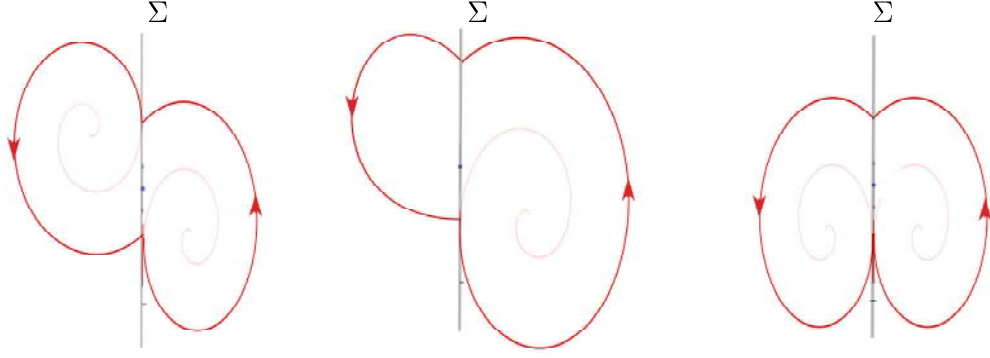


Figura 2.5: Tipos de Ciclos Limite Crítico.

É importante observar que a existência e configuração de um ciclo limite crítico depende basicamente da órbita da tangencia visível associada com o sistema lateral que possui um foco real.

2.2.3 Ciclos Limite de Costura

Agora, focamos nossa atenção nas condições para a existência de ciclos limite de costura. A seguir apresentamos um resultado clássico, que nos fornece uma primeira condição.

Proposição 2.7. *Seja $X = (X^+, X^-)$ um PWLS na forma (2.1). Se existe uma órbita periódica de costura de X então $\Sigma_s \cup \Sigma_e \cup \Sigma_T$ é um conjunto limitado não vazio.*

Demonstração. Ver Proposição 3.1 em [12]. □

Se um PWLS está na forma (2.1), segue da Proposição 2.1 que $\Sigma_s \cup \Sigma_e \cup \Sigma_T$ é um conjunto limitado não vazio se, e só se, $a_{12}e_{12} > 0$. Assim, segue da Proposição 1 em [12] o seguinte resultado;

Proposição 2.8. *Seja $X = (X^+, X^-)$ um PWLS na forma (2.1) tal que o conjunto $\Sigma_s \cup \Sigma_e \cup \Sigma_T$ é limitado e não vazio. Então existe um Σ -homeomorfismo, que restrito a $\Sigma^\pm$ é um difeomorfismo, que transforma X em $\bar{X} = (\bar{X}^+, \bar{X}^-)$ onde,*

$$\bar{X}(x, y) = \begin{cases} \bar{X}^+(x, y) = (2\gamma_R x - y, (\gamma_R^2 - m_R^2)x) - (-b, a_R), & (x, y) \in \bar{\Sigma}^+, \\ \bar{X}^-(x, y) = (2\gamma_L x - y, (\gamma_L^2 - m_L^2)x) - (0, a_L), & (x, y) \in \bar{\Sigma}^-, \end{cases} \quad (2.3)$$

com $m_R, m_L \in \{0, 1, i\}$, $\gamma_R, \gamma_L, a_R, a_L, b \in \mathbb{R}$ e i a unidade imaginária. Em particular, $2\gamma_R = \text{div}(X^+)$ e $2\gamma_L = \text{div}(X^-)$.

Diremos que o PWLS $\bar{X} = (\bar{X}^+, \bar{X}^-)$ é a forma canônica de Lienard de $X = (X^+, X^-)$. É importante observar que o fato do homeomorfismo ser um difeomorfismo por partes, implica que a transversalidade do fluxo e as tangências com Σ dos sistemas laterais são preservadas. Em particular, órbitas periódicas de costura são enviadas em órbitas periódicas de costura, por esse motivo para estudar o número deste tipos de órbitas vamos assumir que o PWLS está na forma (2.3). Entretanto o mesmo não acontece com as órbitas deslizantes pois mesmo que as regiões de deslize e escape sejam preservadas as dinâmicas dos seus campos deslizantes não são necessariamente preservadas, por exemplo:

Exemplo 2.2.3. Sejam $X = (X^+, X^-)$, $\bar{X} = (\bar{X}^+, \bar{X}^-)$ PWLS na forma (2.1) com

$$X(x, y) = \begin{cases} X^+(x, y) = (2x - y + 9, 2x - 1), & (x, y) \in \bar{\Sigma}^+, \\ X^-(x, y) = (2x - y, 2x + y - 1), & (x, y) \in \Sigma^-, \end{cases}$$

$$\bar{X}(x, y) = \begin{cases} \bar{X}^+(x, y) = (2x - y + 9, 2x - 1), & (x, y) \in \bar{\Sigma}^+, \\ \bar{X}^-(x, y) = (3x - y, 4x - 1), & (x, y) \in \Sigma^-, \end{cases}$$

e $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo definido por

$$h(x, y) = \begin{cases} \{x, y\} & (x, y) \in \Sigma^+, \\ \{x, x + y\}, & (x, y) \in \Sigma^-. \end{cases}$$

Usando h é possível determinar que $\bar{X} = (\bar{X}^+, \bar{X}^-)$ é a forma canônica de Lienard de $X = (X^+, X^-)$. A região deslizante é a mesma para os dois PWLS, $\Sigma_s = \{(0, y) : 0 < y < 9\}$. E os campos deslizantes de X e $\bar{X}$ são (respectivamente):

$$\bar{X}^s(0, y) = -1 \quad X^s(0, y) = \frac{1}{9}((9 - y)(y - 1) - y),$$

É claro, que X^s tem dois pontos de equilíbrio em Σ , enquanto $\bar{X}^s$ é um campo constante.

Aplicações de Poincaré

Se para um dado PWLS $X = (X^+, X^-)$ na forma (2.3), a direção do fluxo de X^- assegura que a sua órbita positiva no ponto $(0, y)$ (com $y > 0$), está contida em Σ^- até encontrar Σ num ponto $(0, y_1)$ com $y_1 \leq 0$ depois de um tempo $t_1 > 0$. Então, podemos definir a Aplicação de Poincaré à esquerda como $y_1 = P_L(y_0)$. De forma

similar é definida a aplicação de Poincaré à direita, P_R , em relação a X^+ e Σ^+ .

Em [12, 14] foram caracterizadas as aplicações de Poincaré à esquerda e à direita de um PWLS na forma (2.3) quando os seus sistemas laterais são não degenerados. Nas duas proposições a seguir, adaptamos os resultados mencionados e incluímos os casos restantes,

Proposição 2.9 (Aplicação de Poincaré à esquerda). *Seja $X = (X^+, X^-)$ um PWLS na forma (2.3). As seguintes proposições são verdadeiras,*

1. Se $X^- \in \Gamma_1 := C_b \cup C_r \cup C_v \cup S_r^0 \cup D_I^0$ então $P_L(y) = -y$. Além disso,
 - (a) $\text{dom}(P_L) = [0, a_L/(\gamma_L + m_L))$ se $X^- \in S_r^0$.
 - (b) $\text{dom}(P_L) = [0, \infty)$, caso contrário.
2. Se $X^- \in \Gamma_2 := F_b$ então $P_L(y) = -e^{\gamma_L \pi} y$ e $\text{dom}(P_L) = [0, \infty)$.
3. Se $X^- \in \Gamma_3 := F_v \cup N_v \cup N_v^0 \cup S_r \cup D_I^I$ então
 - (a) $\text{dom}(P_L) = [0, \infty)$, se $X^- \in F_v$ ou $X^- \in N_v \cup N_v^0 \cup D_I^I$ com $\gamma_L < 0$.
 - (b) $\text{dom}(P_L) = [0, a_L/(\gamma_L + m_L))$, se $X^- \in S_r$ ou $X^- \in N_v \cup N_v^0 \cup D_I^I$ com $\gamma_L > 0$.

Além disso, $P_L(0) = 0$, $\lim_{y \rightarrow 0^+} P'_L(y) = -1$, $P'_L(y) < 0$ e $\text{sgn}(P''_L(y)) = -\text{sgn}(\gamma_L)$ para $y \in \text{dom}(P_L)/\{0\}$.
4. Se $X^- \in \Gamma_4 := F_r$ então $\text{dom}(P_L) = [h, \infty)$. Se $\gamma_L > 0$ temos que $h = 0$, e se $\gamma_L < 0$ então $h = a_L \sin(t_L) e^{-\gamma_L t_L}$, onde $t_L \in (0, 2\pi)$ é a raiz de $1 - e^{-\gamma_L t} (\cos(t) + \gamma_L \sin(t))$. Além disso, $P'_L(y) < 0$ e $\text{sgn}(P''_L(y)) = -\text{sgn}(\gamma_L)$ para $y \in \text{dom}(P_L)/\{h\}$.
5. Para os outros casos a aplicação de Poincaré à esquerda não está definida.

Demonstração. Quando $X^- \in C_b \cup C_r \cup C_v$ ou se $X^- \in S_r^0$ então a prova segue da Proposição 7 de [12] ou Proposição 5 (d) de [14], respectivamente. O domínio de P_L é $[0, \infty)$ no primeiro caso e no segundo é $[0, h)$ onde h é a segunda componente do ponto de intersecção da variedade estável associada à sela e Σ . Se $X^- \in D_I^I$ em (2.3) segue que $a_L < 0$, $\gamma_L = m_L = 0$ e a sua integral primeira no ponto $(0, y_0)$ é dada por $x(y) = \frac{1}{2a_L}(y_0^2 - y^2)$. Isto implica que a aplicação de Poincaré à esquerda é $P_L(y) = -y$ e $\text{dom}(P_L) = [0, \infty)$. Então, concluímos a prova do item (1).

A prova do item 2 segue da Proposição 7.1 de [12]. Para provar o item 3 usamos a Proposição 5 (b e c) de [14] e a Proposição 7.1 de [12]. Neste caso, se $X^- \in D_I^I$

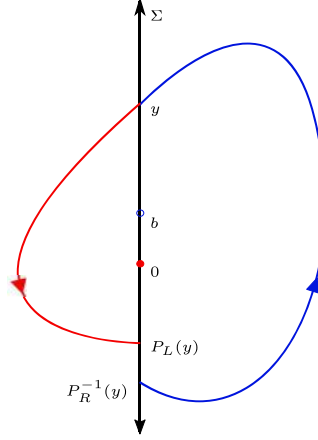


Figura 2.6: Aplicações de Poincaré: $P_L(y)$ e $P_R^{-1}(y)$.

obtemos que $\text{dom}(P_L) = [0, \infty)$ quando $\gamma_L < 0$ e para $\gamma_L > 0$ resulta que $\text{dom}(P_L) = [0, a_L/(\gamma_L + m_L))$. Além disso, a origem coincide com um ponto de dobra invisível para X^- , logo P_L é uma involução portanto: (i) $P_L(0) = 0$ e (ii) $P'_L(0) = -1$. Da Proposição 6(b) temos a prova do item (4).

Agora, caso $X^- \in S_b^0 \cup S_v^0 \cup S_b \cup S_v \cup N_r \cup N_b \cup N_r^0 \cup N_b^0 \cup D_2$ existe uma linha reta invariante que proíbe a definição da aplicação de Poincaré à esquerda. Assim, concluímos a prova do item (5) e, conseqüentemente, a prova da Proposição. $\square$

Analogamente, conseguimos um resultado similar para a aplicação de Poincaré à direita.

Proposição 2.10 (Inversa da aplicação de Poincaré à direita). *Seja $X = (X^+, X^-)$ um PWLS na forma (2.3). Os seguintes itens são verdadeiros:*

1. Se $X^+ \in \Gamma_1 := C_b \cup C_r \cup C_v \cup S_r^0 \cup D_0^I$ então $P_R^{-1}(y) = -y + 2b$. Além disso,
 - (a) $\text{dom}(P_R^{-1}) = [b, b + a_R/(\gamma_R - m_R))$ se $X^+ \in S_r^0$.
 - (b) $\text{dom}(P_R^{-1}) = [b, \infty)$, caso contrário.
2. Se $X^+ \in \Gamma_2 := F_b$ então $P_R^{-1}(y) = -e^{-\gamma_R \pi} y + (1 + e^{-\gamma_R \pi})b$ e $\text{dom}(P_R^{-1}) = [b, \infty)$.
3. Se $X^+ \in \Gamma_3 := F_v \cup N_v \cup N_v^0 \cup S_r \cup D_1^I$ então:
 - (a) $\text{dom}(P_R^{-1}) = [b, \infty)$, se $X^+ \in F_v$ ou $X^+ \in N_v \cup N_v^0 \cup D_1^I$ com $\gamma_R > 0$.
 - (b) $\text{dom}(P_R^{-1}) = [b, b + a_R/(\gamma_R - m_R))$ se $X^+ \in S_r$ ou $X^+ \in N_v \cup N_v^0 \cup D_1^I$ com $\gamma_R < 0$.

Além disso, P_R^{-1} satisfaz $(P_R^{-1})(b) = b$, $\lim_{y \rightarrow b^+} (P_R^{-1})'(y) = -1$, $(P_R^{-1})'(y) < 0$ e $\text{sgn}((P_R^{-1})''(y)) = \text{sgn}(\gamma_R)$ para $y \in \text{dom}(P_R^{-1})/\{b\}$.

4. Se $X^+ \in F_r$ então $\text{dom}(P_R^{-1}) = [b + h, \infty)$.

(a) $h = 0$, se $\gamma_R < 0$.

(b) $h = -a_R \sin(t_R) e^{\gamma_R t_R}$, Se $\gamma_R > 0$. Onde $t_R \in (0, 2\pi)$ é a raiz de $1 - e^{\gamma_R t} (\cos(t) - \gamma_R \sin(t))$.

Além disso, $(P_R^{-1})'(y) < 0$ e $\text{sgn}((P_R^{-1})''(y)) = -\text{sgn}(\gamma_R)$ para $y \in \text{dom}(P_L) \setminus \{b + h\}$.

5. Para os outros casos a aplicação de Poincaré à direita não está definida.

Demonstração. A prova segue como da Proposição 2.9, usando a Proposição 3.2 de [14] e a Proposição 7.1 de [12]. $\square$

Devemos notar que se alguma das aplicações de Poincaré não está definida ou $\text{int}(\text{dom}(P_L)) \cap \text{int}(\text{dom}(P_R^{-1})) = \emptyset$ então o PWLS $X = (X^+, X^-)$ na forma (2.3) no admite órbitas periódicas de costura, e consequentemente, ciclos limite de costura. Assim, temos o seguinte resultado

Proposição 2.11. Se $X = (X^+, X^-)$ um PWLS na forma (2.3) tem uma órbita periódica de costura então $X \pm \in \cup_{i=1,2,3,4} \Gamma_i$ e $\text{int}(\text{dom}(P_L)) \cap \text{int}(\text{dom}(P_R^{-1})) \neq \emptyset$.

Demonstração. Segue diretamente das Proposições 2.9 e 2.10. $\square$

2.3 Condições para a Coexistência de Diferentes Tipos de Ciclos

Segue da Proposição 2.5 e da Proposição 2.3, que se o PWLS $X = (X^+, X^-)$ é tal que $X^+ \in F_r$ e $X^+ \cdot f(q) = 0$ para algum $q \in \Sigma$ então existe um único ciclo limite passando por q , portanto o número de ciclos deslizantes é igual ao número de focos reais de um PWLS, que é no máximo dois. No resultado seguinte relacionamos a possível existência desses ciclos com a divergência dos sistemas laterais,

Proposição 2.12. Seja $X = (X^+, X^-)$ um PWLS da forma (2.1) com o conjunto $\Sigma_s \cup \Sigma_e$ limitado e não vazio. Se o produto das divergência dos seus sistemas laterais é positivo então $\eta_{cr}(X) + \eta_s(X) \leq 2$, caso contrário $\eta_{cr}(X) + \eta_s(X) \leq 1$.

Demonstração. Das Proposições 2.4 e 2.6 obtemos que $\eta_{cr}(X) + \eta_s(X) < 5$ e $X^\pm \in F_r$. Se $\eta_{cr}(X) + \eta_s(X) > 2$ das Proposições 2.3 e 2.5 obtemos que ao menos um dos sistemas laterais de X tem mais de um ponto de tangência com Σ e isto é uma contradição, consequentemente $\eta_{cr}(X) + \eta_s(X) < 3$. Em particular

1. Se $\text{div}(X^+)\text{div}(X^-) > 0$, usando o exemplo 2.2.2, resulta que $\eta_{cr}(X) + \eta_s(X) \leq 2$.
2. Se $\text{div}(X^+)\text{div}(X^-) < 0$, usando um argumento similar ao da demonstração da Proposição 2.4 e junto com Exemplo 2.2.2, obtemos que $\eta_{cr}(X) + \eta_s(X) \leq 1$.

□

Na sequência, determinaremos condições necessárias para coexistência algum ciclo de costura com dois ciclos que não são de costura. A Proposição 2.7 nos fornece duas condições: (i) o conjunto $\Sigma_s \cup \Sigma_e \cup \Sigma_T$ deve ser limitado; e (ii) ambos os sistemas laterais devem ter focos reais. Sabemos que as possíveis configurações dos ciclos que não são de costura dependem basicamente das imagens, pelas aplicações de Poincaré, dos pontos de tangência de cada um dos sistemas laterais, por esse motivo é possível inferir condições para a existência usando a forma canônica de Lienard um PWLS.

Proposição 2.13. *Seja $X = (X^+, X^-)$ um PWLS tal que: (i) $\Sigma_s \cup \Sigma_e \cup \Sigma_T$ é um conjunto limitado e não vazio; (ii) $X^\pm \in F_r$. Se X tem dois ciclos limite que não são de costura, então na sua forma canônica o PWLS verifica alguma das seguintes condições:*

1. $-b, \gamma_L, \gamma_R > 0, P_L(0) > b$ e $P_R(b) < 0$;
2. $-b, \gamma_L, \gamma_R > 0, P_L(0) < b, P_R(b) < 0$ e $P_R(P_L(0)) \leq 0$;
3. $-b, \gamma_L, \gamma_R > 0, P_L(0) > b, P_R(b) > 0$ e $P_L(P_L(b)) \geq b$;
4. $-b, \gamma_L, \gamma_R < 0, P_L^{-1}(0) < b, P_R^{-1}(b) > 0$;
5. $-b, \gamma_L, \gamma_R < 0, P_L^{-1}(0) < b, P_R^{-1}(b) < 0$ e $P_L^{-1}(P_R^{-1}(b)) \leq b$;
6. $-b, \gamma_L, \gamma_R < 0, P_L^{-1}(0) > b, P_R^{-1}(b) > 0$ e $P_R^{-1}(P_L^{-1}(0)) \geq 0$.

Demonstração. Seja $X = (X^+, X^-)$ um PWLS tal que $\Sigma_s \cup \Sigma_e$ é um conjunto limitado e não vazio e $X^\pm \in F_r$, logo X possui uma forma canônica, por esse motivo podemos assumir que $X = (X^+, X^-)$ está na forma (2.3). Da Proposição 2.1, temos que se $b > 0$ $\Sigma_T = \{(0, 0), (0, b)\}$, $\Sigma_c = \{(0, y) : y > b, y < 0\}$ e $\Sigma_e = \{(x, y) : 0 < y < b\}$, $X^+.f(0, b) = 0$ e $X^-.f(0, 0) = 0$. Usando a Proposição 2.12 obtemos que $\gamma_L \gamma_R > 0$. Caso $\gamma_R, \gamma_L > 0$, a configuração pelas aplicações de Poincaré dos pontos de tangência são ilustradas na Figura 2.7.

Usando os fluxos dos campos laterais um argumento similar ao prova da Proposição 2.4, resulta que sob estas condições o sistema não exibe ciclos limites deslizantes nem críticos. Para $\gamma_L, \gamma_R < 0$, as possíveis configurações pelas aplicações de Poincaré dos pontos de tangência são ilustradas na Figura 2.8.

Usando os fluxos dos campos laterais, é possível concluir que só nos casos (a), (c), (d), (g) e (h) é possível ter mais de um ciclo limite que não é de costura. Assim, segue o resultado caso $-b, \gamma_R, \gamma_L < 0$. □

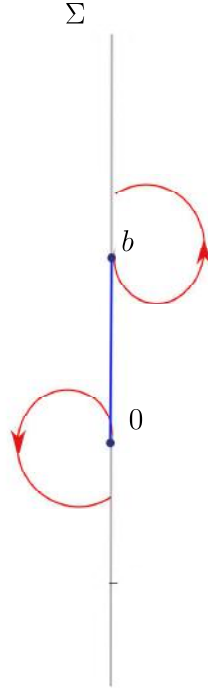


Figura 2.7: Imagens dos pontos 0 e b pelas aplicações de Poincaré caso $\gamma_R, \gamma_L > 0$.

Exemplo 2.3.1 (PWLS com dois ciclos deslizantes e um de costura). Seja $X = (X^+, X^-)$ um PWLS na forma (2.1) com

$$\begin{cases} X(x, y) = \left(\frac{4W\left(\frac{3\pi}{2}\right)x}{3\pi} - y - 10, \left(\frac{4W\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}{9\pi^2} + 1 \right) x - 1 \right), \\ X^-(x, y) = \left(\frac{4W\left(\frac{3\pi}{2}\right)x}{3\pi} - y, \left(\frac{4W\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}{9\pi^2} + 1 \right) x + 1 \right), \end{cases}$$

Assim,

1. $\Sigma_c = \{(0, y); e^{W(\frac{3\pi}{2})} - 10 > y > 0\}$;
2. $\Sigma_s = \{(0, y) : e^{W(\frac{3\pi}{2})} - 10 < y < 0\}$;
3. $\Sigma_T = \{(0, e^{W(\frac{3\pi}{2})} - 10), (0, 0)\}$;
4. $X^s(0, y) = \left(0, \frac{1}{10}(2y + 10) \right)$;
5. $X^\pm \in F_r$;
6. X^s tem um equilíbrio repulsor em $(0, -5)$.

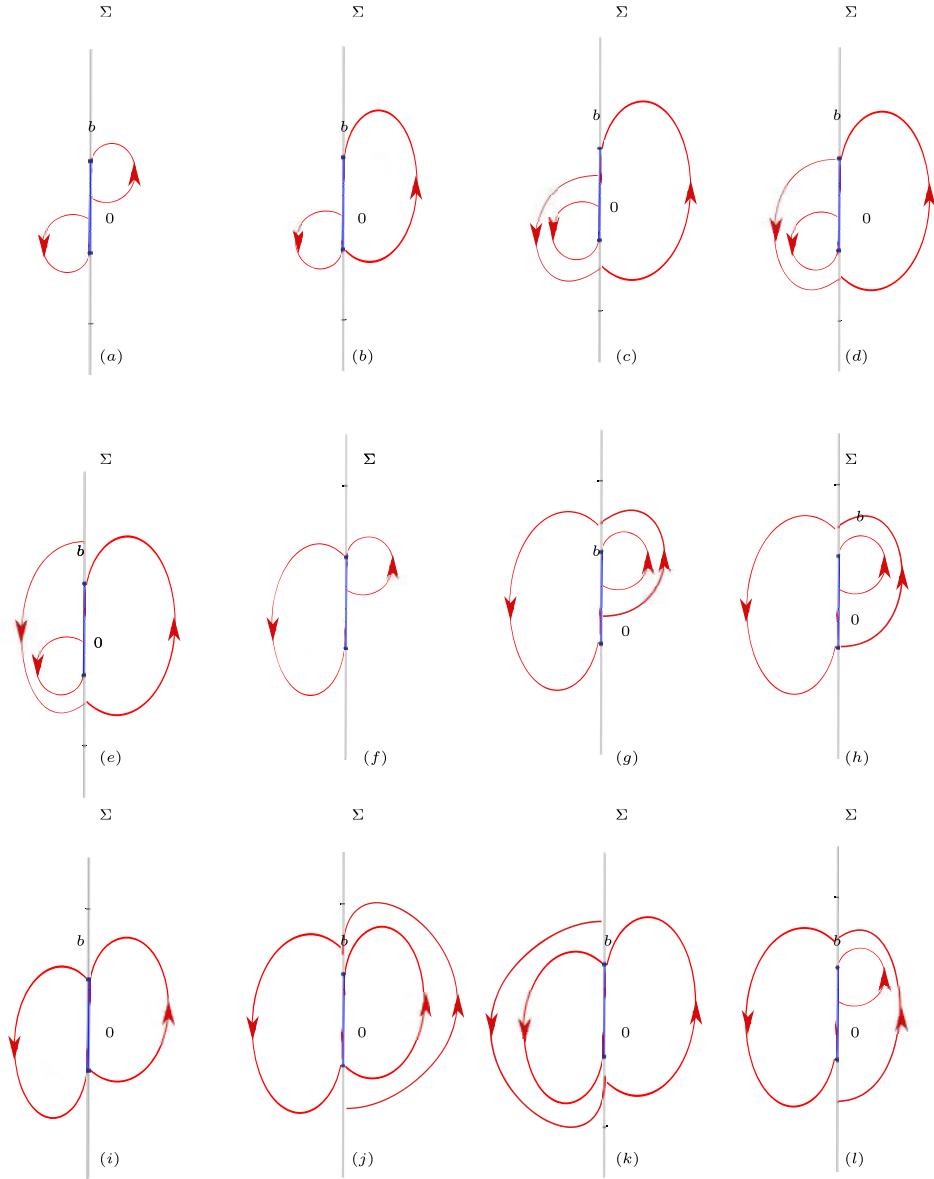


Figura 2.8: Imagens dos pontos 0 e b pelas aplicações de Poincaré caso $\gamma_R, \gamma_L < 0$.

Das Proposições 2.9 e 2.10 obtemos que as aplicações de Poincaré estão definidas. Em particular

$$\text{dom}(P_R^{-1}) = \left[e^{W(\frac{3\pi}{2})} - 10, \infty \right)$$

e a expressão paramétrica de P_R^{-1} é

$$y_0(t) = - \frac{e^{\frac{2tW(\frac{3\pi}{2})}{3\pi}} \csc(t) \left(1 - e^{-\frac{2tW(\frac{3\pi}{2})}{3\pi}} \left(\frac{2W(\frac{3\pi}{2}) \sin(t)}{3\pi} + \cos(t) \right) \right)}{\frac{4W(\frac{3\pi}{2})^2}{9\pi^2} + 1} - 10,$$

$$y_1(t) = \frac{e^{-\frac{2tW(\frac{3\pi}{2})}{3\pi}} \csc(t) \left(1 - e^{-\frac{2tW(\frac{3\pi}{2})}{3\pi}} \left(\cos(t) - \frac{2W(\frac{3\pi}{2}) \sin(t)}{3\pi} \right) \right)}{\frac{4W(\frac{3\pi}{2})^2}{9\pi^2} + 1} - 10,$$

com $t \in (\pi, 3\pi/2)$ e $P_R^{-1}(y_0(t)) = y_1(t)$. Mas ainda, $P_L^{-1}(y)$ está definida, $\text{dom}(P_L(y)) = [0, \infty)$ e sua expressão paramétrica é

$$z_0(t) = -\frac{9\pi^2 e^{-\frac{2tW(\frac{3\pi}{2})}{3\pi}} \csc(t) \left(1 - e^{-\frac{2tW(\frac{3\pi}{2})}{3\pi}} \left(\cos(t) - \frac{2W(\frac{3\pi}{2}) \sin(t)}{3\pi} \right) \right)}{4W(\frac{3\pi}{2})^2 + 9\pi^2},$$

$$y_1(t) = \frac{9\pi^2 e^{\frac{2tW(\frac{3\pi}{2})}{3\pi}} \csc(t) \left(1 - e^{-\frac{2tW(\frac{3\pi}{2})}{3\pi}} \left(\frac{2W(\frac{3\pi}{2}) \sin(t)}{3\pi} + \cos(t) \right) \right)}{4W(\frac{3\pi}{2})^2 + 9\pi^2},$$

com $t \in (\pi, 3\pi/2)$ e $P_L(z_0(t)) = z_1(t)$. Assim, $Q(y)$ está definida e o seu domínio é $\text{dom}(Q) = [0, \infty)$. Além disso, $Q(y)$ é côncava, $Q(0) > 0$ e $\lim_{y \rightarrow \infty} Q(y) > 0$, o que implica que Q tem um único zero. Portanto $N_{\eta_c}(X) = 1$. Como no Exemplo 2.2.2 estabelecemos que $\eta_s(X) = 2$. A configuração destes ciclos é ilustrado na Figura 2.9.

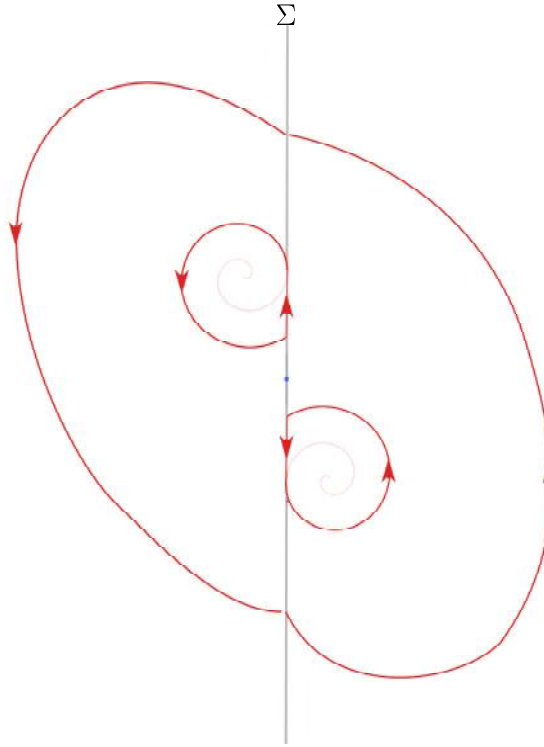


Figura 2.9: Configuração de três ciclos limite de um PWLS: dois ciclos limite deslizantes e um de costura.

Exemplo 2.3.2 (PWLS com dois ciclos de costura e um deslizante). *Seja $X = (X^+, X^-)$ um PWLS na forma (2.1) definido por*

$$\begin{cases} X^+(x, y) = \left(\frac{4W\left(\frac{3\pi}{2}\right)x}{3\pi} - y - 26, \left(\frac{4W\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}{9\pi^2} + 1 \right) x - 10 \right), \\ X^-(x, y) = \left(\frac{4W\left(\frac{3\pi}{2}\right)x}{3\pi} - y, \left(\frac{4W\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}{9\pi^2} + 1 \right) x + 1 \right). \end{cases}$$

De forma análoga ao exemplo anterior é possível provar que $\eta_s(X) = 1$ e $\eta_c(X) = 2$. A configuração destes ciclos é ilustrada a seguir.

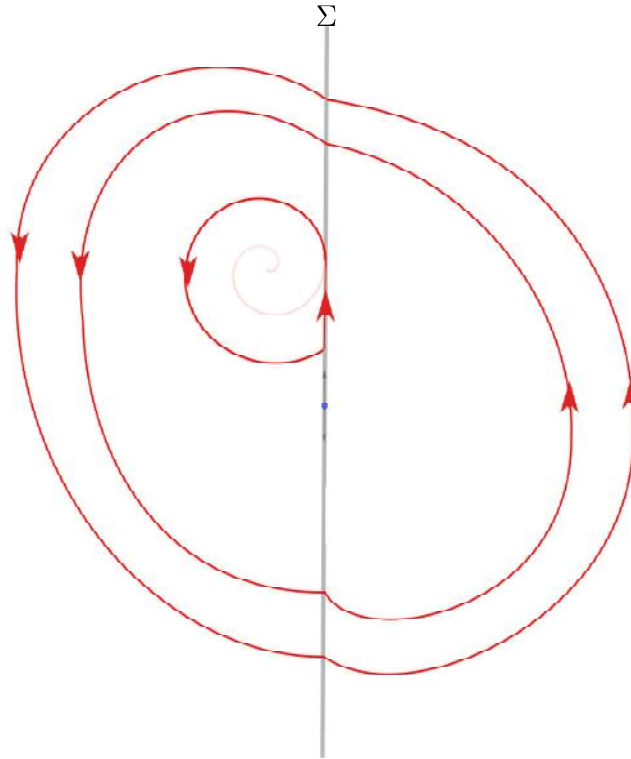


Figura 2.10: Configuração de três ciclos limite de um PWLS: dois ciclos limite de costura e um de deslize.

2.4 Principais Resultados

Na sequência apresentamos nossos principais resultados:

Teorema A. *Seja $X = (X^+, X^-)$ um PWLS na forma (2.1) então são válidas as seguintes afirmações:*

1. $\eta_{st}(X) = 0$;
2. $\eta_s(X) \leq 2$;
3. $\eta_{ct}(X) < 3$;
4. $\eta_s(X) + \eta_{cr}(X) \leq 2$.

Demonstração. Seja $X = (X^+, X^-)$ é um PWLS na forma (2.1). Assuma que X possui um ciclo limite standard Υ , por definição, Υ não intersecta Σ . Sem perda de generalidade podemos considerar que $\Upsilon \subset \Sigma^+$, logo $X^+ \in C_r$, o que implica que Υ não é um ciclo limite, o que é uma contradição, e isto prova o Item 1.

Segue da Proposição 2.3 que uma condição necessária para a existência de ciclos limite deslizantes é que $\partial\Sigma_s \cup \partial\Sigma_c$ (ou $\partial\Sigma_s \cup \partial\Sigma_c$) é um conjunto não vazio, logo da Proposição 2.1 obtemos que este é um conjunto discreto, com no máximo dois elementos, e levando em consideração que por cada um destes pontos passa no máximo um ciclo limite deslizante e do Exemplo 2.2.2, obtemos que esta cota máxima é realizável, i.e., $\eta_s(X) \leq 2$, e isto prova o Item 2. Usando a Proposição 2.5 e um argumento similar ao usado acima a prova do Item 3.

Segue dos Itens 1, 2 e 3 que $\eta_{st}(X) = 0$, $\eta_s(X) \leq 2$ e $\eta_{cr}(X) < 3$, i.e., $\eta(X) - \eta_c(X) < 5$. Assuma que X tem mais que dois ciclos limite que não são de costura, da Proposição 2.3 e 2.5 temos que $\Sigma_T \subset \Sigma$ e que ha menos três pontos de tangencia. Entretanto, decorre da Proposição 2.7 que isto não é possível, portanto $\eta(X) - \eta_c(X)$ é limitado superiormente por dois e esta cota é atingida, ver Exemplo 2.2.2, e isto prova o Item 4.

□

Teorema B. *Seja $X = (X^+, X^-)$ um PWLS na forma (2.1). Então $\eta_c(X) \leq 2$ se alguma das seguintes afirmações se verifica para um dos sistemas laterais de X ,*

1. *Tem um ponto de equilíbrio em Σ .*
2. *Tem um ponto de equilíbrio e a sua divergência é zero.*
3. *Não tem pontos de equilíbrio nem linhas retas invariantes.*

Demonstração. Seja $X = (X^+, X^-)$ um PWLS tal que o conjunto $\Sigma_s \cup \Sigma_c \cup \Sigma_T$ é limitado e não vazio, segue da Proposição 2.7 que esta é uma condição necessária para a existência de ciclos limite de costura. Da Proposição 2.8, podemos assumir sem perda de generalidade que X está na forma (2.3). Pela Proposição 2.11 é suficiente considerar

que X^+ ou X^- pertence a $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ e $\text{int}(\text{dom}(P_L)) \cap \text{int}(\text{dom}(P_R^{-1})) \neq \emptyset$. Observemos que $\eta_c(X)$ coincide com o número de zeros isolados da função $Q(y) = P_L(y) - P_R^{-1}(y)$ em $y \in \text{int}(\text{dom}(P_L)) \cap \text{int}(\text{dom}(P_R^{-1}))$. Para caracterizar Q , consideramos os seguintes dois casos: (1) $X^\pm \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ e (2) Se X^+ ou X^- pertence a $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Para Caso (1) distinguimos 4 sub-casos:

1. Se $X^\pm \in \Gamma_1$ então do item 1 da Proposição 2.9 e da Proposição 2.10 segue que $Q(y) = -2b$;
2. Se $X^- \in \Gamma_2$ e $X^+ \in \Gamma_1$, dos itens (2) e (1) da Proposição 2.9 e Proposição 2.10, respectivamente, temos que $Q(y) = (1 - e^{-\gamma_L \pi})y - 2b$;
3. Se $X^- \in \Gamma_1$ e $X^+ \in \Gamma_2$, dos itens (1) e (2) da Proposição 2.9 e Proposição 2.10, respectivamente, resulta que $Q(y) = (e^{-\gamma_R \pi} - 1)y - (1 + e^{\gamma_R \pi})b$;
4. Se $X^\pm \in \Gamma_2$, então dos itens (2) $Q(y) = (e^{-\gamma_R \pi} - 1)y - (1 + e^{\gamma_R \pi})b$ da Proposição 2.9 e Proposição 2.10, obtemos que $Q(y) = (e^{-\gamma_R \pi} - e^{\gamma_L \pi})y - (1 + e^{-\gamma_R \pi})b$.

Assim, se $X^\pm \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ implica que $Q(y) = my + k$, onde k e m dependem dos parâmetros de X . Consequentemente, $Q(y)$ tem no máximo um zero isolado, logo $\eta_c(X) \leq 1$.

Agora, para o caso (2), consideremos dois sub-casos: (i) Se $X^- \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ e $X^+ \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ segue que $\gamma_R \neq 0$. Então, dos itens (1) e (2) da Proposição 2.9 e os itens (3) e (4) da Proposição 2.10 temos que $P_L''(y) = 0$ e $\text{sgn}((P_R^{-1})''(y)) = \text{sgn}(\gamma_R)$. Assim, $\text{sgn}(Q''(y)) = -\text{sgn}(P_R^{-1})'' = -\text{sgn}(\gamma_R) \neq 0$, o qual implica que $Q'(y)$ tem no máximo um zero e, consequentemente, $Q(y)$ tem no máximo dois zeros, i.e., $\eta_c(X) \leq 2$. (ii) A análise para $X^+ \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ e $X^- \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, é análoga ao sub-caso anterior, e isto prova o Teorema B. $\square$

Teorema C. *Seja $X = (X^+, X^-)$ um PWLS na forma (2.1). Se o produto das divergências de X^+ e X^- é não negativa, então $\eta_c(X) \leq 2$. Em particular, se ambos os sistemas laterais não tem um ponto de equilíbrio do tipo foco então $\eta_c(X) \leq 1$, caso contrário $\eta_c(X) \leq 2$.*

Demonstração. Como na prova da Teorema B, consideremos que $X = (X^+, X^-)$ é um PWLS na forma (2.3) e que $X^\pm \in \Gamma$ e $\text{int}(\text{dom}(P_L)) \cap \text{int}(\text{dom}(P_R^{-1})) \neq \emptyset$. Já que $\text{div}(X^+)\text{div}(X^-) \geq 0$ segue que $\gamma_L \gamma_R \geq 0$. Separemos a prova em três casos: (i) Se $\gamma_L \gamma_R = 0$, então X^+ ou X^- pertence a Γ_1 do Teorema B temos que $\eta_c(X) \leq 2$; (ii) Se $\gamma_R \gamma_L > 0$ e $a_R a_L = 0$ então algum dos sistemas laterais tem um ponto de equilíbrio em Σ . Assim, do Teorema B resulta que $\eta_c(X) \leq 2$; e (iii) Se $\gamma_R \gamma_L > 0$ e $a_R a_L \neq 0$ segue

que $X^\pm \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, do itens (3) e (4) da Proposição 2.9 e Proposição 2.10 temos que $\text{sgn}(P_L''(y)) = -\text{sgn}(\gamma_L)$ e $\text{sgn}((P_R^{-1})''(y)) = \text{sgn}(\gamma_R)$, assim $\text{sgn}(Q''(y)) = -\text{sgn}(\gamma_R)$. Logo $Q'(y)$ tem no máximo um zero, o que implica que $Q(y)$ tem no máximo dois zeros, i.e., $\eta_c(X) \leq 2$.

Na sequência, vamos provar que se o produto das divergências dos sistemas laterais é não negativo e nenhum deles tem pontos de equilíbrio do tipo foco, então $\eta_c(X) \leq 1$. Da Proposição 2.11 é suficiente assumir que $X^\pm \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \setminus F_v$ e $\text{int}(\text{dom}(P_L)) \cap \text{int}(\text{dom}(P_R^{-1})) \neq \emptyset$. Distinguimos dois casos: (i) $X^\pm \in \Gamma_1$; e (ii) X^+ ou X^- pertence a $\Gamma_3 \setminus F_v$.

Quando $X^\pm \in \Gamma_1$, segue do item (1) da Proposição 2.9 e da Proposição 2.10 que $Q(y) = 2b$, assim $\eta_c(X) \leq 0$. Se X^+ ou X^- pertence a Γ_3 , podemos assumir sem perda de generalidade que $X^- \Gamma_3 \setminus F_v$ e $X^+ \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \setminus F_v$, logo $\gamma_L \neq 0$. Se $b\gamma_L \leq 0$ segue da Proposição 3.7 de [12] que $\eta_c(X) = 0$. Agora, assumamos que $b\gamma_L < 0$, se $b > 0$ do item (3) da Proposição 2.9 resulta que se $Q(y)$ está definida então $\text{dom}(Q)$ é um intervalo da forma $[b, b+h)$ com $h > 0$ ou $[b, \infty)$, $Q(b) < 0$ e $\text{sgn}(Q''(y)) = -\gamma_L > 0$ para $y \in \text{int}(\text{dom}(Q))$, isto implica que $Q(y)$ tem no máximo um zero, assim $\eta_c(X) \leq 1$. De forma similar para $b < 0$. e isto prova o Teorema C. $\square$

Teorema D. *Seja $X = (X^+, X^-)$ um PWLS na forma (2.1). Se o produto das divergências de X^+ e X^- é não negativa, então $\eta(X) \leq 3$.*

Demonstração. Seja $X = (X^+, X^-)$ um PWLS na forma (2.1) com $\text{div}(X^+)\text{div}(X^-) \leq 0$. Do Teorema A segue que $\eta(X) - \eta_c(X) \leq 2$ e do Teorema C, $\eta_c(X) \leq 2$. Assuma que $\eta(X) = 4$, portanto da Proposições 2.7 2.12 e do Teorema 2.1 obtemos que $\Sigma_T \cup \Sigma_e \cup \Sigma_s$ é um conjunto limitado não vazio e $X^\pm \in F_r$. É claro que o PWLS tem dois ciclos que não são de costura o que implica que sua forma canônica deve verificar algum dos itens da Proposição 2.13. Sem perda de generalidade podemos considerar que $-b, \gamma_L, \gamma_R > 0$, logo:

1. Se $P_L(0) > b$ e $P_R(b) < 0$, então $\text{dom}(P_L) \cap \text{dom}(P_R^{-1}) = [0, \infty)$. Assim, do item (4) da Proposição 2.9 e da Proposição 2.10, obtemos que $Q(0) > 0$ e $\text{sgn}(Q''(y)) < 0$ para $y \in \text{int}(\text{dom}(Q(y)))$, logo Q tem no máximo um zero, i.e., $\eta_c(X) \leq 1$ o que implica que $\eta(X) \leq 3$ o que é uma contradição.
2. Se $P_L(0) < b$, $P_R(b) < 0$ e $P_R(P_L(0)) \leq 0$, de forma similar ao caso anterior obtemos que $\text{dom}(P_L) \cap \text{dom}(P_R^{-1}) = [0, \infty)$, $Q(0) > 0$ e $\text{sgn}(Q''(y)) < 0$ para $y \in (0, \infty)$, assim $\eta_c(X) \leq 1$, i.e., $\eta(X) \leq 3$, o que é uma contradição.

3. Se $P_L(0) > b$, $P_R(b) > 0$ e $P_L(P_R(b)) \leq b$, então $\text{dom}(P_L) \cap \text{dom}(P_R^{-1}) = [P_R(b), \infty)$, $Q(P_R(b)) > 0$ e $\text{sgn}(Q''(y)) < 0$ para $y \in (0, \infty)$, assim $\eta_c(X) \leq 1$, i.e, $\eta(X) \leq 3$, o que é uma contradição.

Em consequência obtemos que se $-b, \gamma_L, \gamma_R > 0$, então $\eta(X) < 3$. Para $-b, \gamma_L, \gamma_R < 0$ o resultado segue de forma análoga. e isto prova o Teorema D. $\square$

Cotas Máximas de Ciclos Limite de um Sistema Linear Por Partes em Dois Setores

Neste Capítulo 3, primeiro algumas considerações sobre a variedade de descontinuidade de um PWLS são feitas. Posteriormente, estabelecemos alguns resultados técnicos. E finalmente, provamos os Teoremas E e F.

3.1 Sistemas Lineares Por Partes em Dois Setores

Neste capítulo estudamos o caso em que a variedade é não regular. De fato, consideramos dois setores fechados Σ^+ e Σ^- onde a variedade de descontinuidade Σ consiste em dois raios com a mesma origem, a origem do sistema de coordenadas, que formam um ângulo θ diferente de 0 e π .

Um PWLS X em dois setores, Σ^+ e Σ^- , é definido por,

$$X(x, y) = \begin{cases} X^+(x, y), & \text{se } (x, y) \in \Sigma^+, \\ X^-(x, y), & \text{se } (x, y) \in \Sigma^-. \end{cases} \quad (3.1)$$

Os campos vetoriais X^+ e X^- são lineares e serão chamados de *sistemas laterais*. Seja $\Sigma^* = \Sigma \setminus \{(0, 0)\}$. O PWLS X é definido em Σ^* segundo a convenção de Filippov, ver [10]. Os pontos em Σ^* onde ambos os campos de vetores apontam simultaneamente para fora ou para dentro de Σ^* define o conjunto de escape ou deslize, e o complemento destes em Σ excluindo os pontos de tangência de $X^\pm$ define o *conjunto de costura*.

Lembremos que uma curva suave por partes homeomorfa a S^1 formada por segmentos de órbita dos sistemas laterais que intersecta Σ^* só em pontos de costura é chamada de *órbita periódica de costura*. Quando esta órbita é isolada no conjunto de

todas as órbitas periódicas de PWLS, é dita de *ciclo limite de costura*.

Para provar os Teoremas E e F precisaremos de alguns resultados técnicos, os quais serão enunciados e provados no seguinte seção.

3.2 Sistemas de Chebyshev e Resultados Técnicos

Sejam funções $f_j : I \rightarrow \mathbb{R}$ para $j = 0, 1, \dots, n$ onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. As funções f_j formam um *Sistema Estendido de Chebyshev* em I se, e somente se, qualquer combinação linear não trivial destas funções $c_0 f_0 + c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$ com $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tem no máximo n zeros contando as suas multiplicidades e este número é atingido. As funções $\{f_0, \dots, f_n\}$ formam um *Sistema Completo Estendido de Chebyshev* em I se, e só se, para todo $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, o conjunto $\{f_0, \dots, f_k\}$ é um Sistema Estendido de Chebyshev. O próximo resultado é provado em [20].

Teorema 3.2.1. *As funções analíticas $f_0, \dots, f_n$ definidas em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ formam um Sistema Completo Estendido de Chebyshev em I se, e só se, para cada $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ e $y \in I$ os Wronskianos*

$$W(f_0, \dots, f_k)(y) = \begin{vmatrix} f_0(y) & f_1(y) & \cdots & f_k(y) \\ f'_0(y) & f'_1(y) & \cdots & f'_k(y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0^{(k)}(y) & f_1^{(k)}(y) & \cdots & f_k^{(k)}(y) \end{vmatrix}$$

para $k = 0, 1, \dots, n$ não tem zeros em I .

Consideremos as funções

$$\begin{aligned} \omega_0(v) &= e^{v(\alpha+\beta)} - e^{\alpha v}, \\ \omega_1(v) &= e^{\beta v} - e^{\alpha v}, \\ \omega_2(v) &= 1 - e^{\alpha v}, \\ \omega_3(v) &= v e^{\alpha v}, \\ \omega_4(v) &= v, \\ \omega_5(v) &= v^2, \end{aligned}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Agora, definamos os conjuntos ordenados de funções $\mathfrak{F}_1 = \{\omega_0(v), \omega_1(v)\}$, $\mathfrak{F}_2 = \{\omega_0(v), \omega_1(v), \omega_2(v)\}$, $\mathfrak{F}_3 = \{\omega_0(v), \omega_2(v), \omega_3(v)\}$, $\mathfrak{F}_4 = \{\omega_2(v), \omega_3(v), \omega_4(v)\}$ e $\mathfrak{F}_5 = \{\omega_4(v), \omega_5(v)\}$.

Os seguintes lemas técnicos, serão usados para estabelecer o número máximo ciclos limite de costura do PWLS na forma (3.1) no Teorema F.

Lema 3.2.2. Consideremos os conjuntos de funções $\mathfrak{F}_1$ e $\mathfrak{F}_2$ com $\alpha \neq \beta$, e $\mathfrak{F}_3$ com $\alpha = \beta$. Então são válidas as seguintes afirmações;

- (a) Se $\alpha\beta \neq 0$ o conjunto de funções $\mathfrak{F}_1$ é um Sistema Completo Estendido de Chebyshev no intervalo $(0, \infty)$.
- (b) Se $\alpha\beta \neq 0$ e $\alpha + \beta \neq 0$, então o conjunto de funções $\mathfrak{F}_2$ é um Sistema Estendido Completo de Chebyshev no intervalo $(0, \infty)$.
- (c) Se $\alpha = \beta \neq 0$ o conjunto de funções $\mathfrak{F}_3$ é um Sistema Estendido Completo de Chebyshev no intervalo $(0, \infty)$.

Demonstração. Para provar este lema, calculamos os Wronskianos $W_0(v) = W(\omega_0(v))$, $W_1(v) = W(\omega_0(v), \omega_1(v))$ e $W_2(v) = W(\omega_0(v), \omega_1(v), \omega_2(v))$ e obtemos que

$$\begin{aligned} W_0(v) &= e^{\alpha v} (e^{\beta v} - 1), \\ W_1(v) &= e^{v(\alpha+\beta)} (\alpha (1 - e^{\beta v}) + \beta (e^{\alpha v} - 1)), \\ W_2(v) &= -\alpha\beta e^{v(\alpha+\beta)} (\alpha (e^{\alpha v} + 1) (e^{\beta v} - 1) - \beta (e^{\alpha v} - 1) (e^{\beta v} + 1)). \end{aligned}$$

Se $\beta \neq 0$ então $W_0(v)$ não se anula para $v \in (0, \infty)$. Os Wronskianos $W_1(v)$ e $W_2(v)$ podem ser reescritos como $e^{v(\alpha+\beta)}\phi_1(v)$ e $-\alpha\beta e^{2v(\alpha+\beta)}\phi_2(v)$ respectivamente, onde

$$\begin{aligned} \phi_1(v) &= \alpha (1 - e^{\beta v}) + \beta (e^{\alpha v} - 1), \\ \phi_2(v) &= e^{-v(\alpha+\beta)} (\alpha (e^{\alpha v} + 1) (e^{\beta v} - 1) - \beta (e^{\alpha v} - 1) (e^{\beta v} + 1)). \end{aligned}$$

Na sequência provamos que se $\alpha\beta \neq 0$ e $\alpha \neq \beta$ então W_0 e W_1 não se anula no intervalo $(0, \infty)$. Observe que $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$ e $\phi_1'(v) = \alpha\beta (e^{\alpha v} - e^{\beta v})$ tem sinal constante em $(0, \infty)$, i.e., $\phi_1(v) \neq 0$ para $v \in (0, \infty)$. Consequentemente, $W_1 \neq 0$. Então, a prova do item (a) segue do Teorema 3.2.1.

Agora, para $\alpha + \beta \neq 0$, resulta que $\phi_2'(v) = (\alpha + \beta)e^{-2v(\alpha+\beta)}W_1(v)$ assim obtemos que $\phi_2'(v)$ também tem sinal constante em $(0, \infty)$. Logo, $W_2(v)$ não se anula para nenhum ponto no domínio $(0, \infty)$. Portanto, usando, uma vez, o item (b) do Teorema 3.2.1 é provado.

O item (c) é provado de forma similar. Neste caso, obtemos que $W_0(v) = e^{\alpha v}(-1 + e^{\alpha v})$, $W_1(v) = \alpha e^{\alpha v}(-1 + e^{\alpha v})^2$ e $W_2(v) = 2\alpha^2 e^{3\alpha v}(\alpha v - \sinh(\alpha v))$, e é claro que estes Wronskianos não tem zeros em $(0, \infty)$. $\square$

Lema 3.2.3. Os conjuntos de funções $\mathfrak{F}_4$ com $\alpha \neq 0$, e $\mathfrak{F}_5$, são Sistemas Estendidos Completos de Chebyshev no intervalo $(0, \infty)$.

Demonstração. A prova deste lema é feita de forma similar à prova do Lema 3.2.2 $\square$

Lema 3.2.4. A função $\kappa(v) = c_0 f_0(v) + c_1 f_1(v) + c_2 f_2(v)$ onde $c_0 = Kq$, $c_1 = -p$, $c_2 = -(\beta^2 Kp - (K(\alpha - m) + n)(mp + nq - \alpha p)) / \beta n$, $f_0(v) = e^{2\alpha v} - e^{\alpha v} \cos(\beta v)$, $f_1(v) = 1 - e^{\alpha v} \cos(\beta v)$ e $f_2(v) = e^{\alpha v} \sin(\beta v)$ com $\beta \neq 0$ tem no máximo 3 zeros no intervalo $(0, 2\pi/\beta)$.

Demonstração. Para provar este lema, calculamos $\kappa'(v)$ e obtemos que

$$\kappa'(v) = e^{\alpha t} (2\alpha c_0 e^{\alpha t} + \sin(\beta t)(\beta(c_0 + c_1) + \alpha c_2) - \cos(\beta t)(\alpha(c_0 + c_1) - \beta c_2)),$$

esta última expressão pode ser reescrita como $e^{2\alpha t} \rho(v)$ onde

$$\rho(v) = e^{\alpha(-t)} (2\alpha c_0 e^{\alpha t} + \sin(\beta t)(\beta(c_0 + c_1) + \alpha c_2) - \cos(\beta t)(\alpha(c_0 + c_1) - \beta c_2)).$$

Observe que $\rho'(v) = (\alpha^2 + \beta^2) e^{\alpha(-t)} ((c_0 + c_1) \cos(\beta t) - c_2 \sin(\beta t))$ tem no máximo dois zeros no intervalo $(0, 2\pi/\beta)$, i.e., pelo Teorema de Rolle segue que $\rho(v)$ tem no máximo 3 zeros em $(0, 2\pi/\beta)$. Portanto, $\kappa'(v)$ tem no máximo 3 zeros em $(0, 2\pi/\beta)$, aplicando uma vez o Teorema de Rolle e levando em consideração que $\kappa(0) = 0$ concluímos que $\kappa(v)$ tem no máximo três zeros em $(0, 2\pi/\beta)$. $\square$

O próximo lema prova que, sem perda de generalidade, podemos assumir que $\theta = \pi/2$.

Lema 3.2.5. Se $\theta \neq 0, \pi$ no PWLS (3.1) podemos assumir que o ângulo θ do sector Σ^+ é $\pi/2$.

Demonstração. Se $\theta = \pi/2$ o lema segue. Assim, consideraremos o caso em que $\theta \neq \pi/2$. Através da mudança linear de variáveis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\cot \theta \\ 0 & \csc \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

o PWLS (3.1) com ângulo θ se transforma em outro PWLS (3.1) com ângulo $\pi/2$. $\square$

Consideramos $\Sigma = \Sigma_H \cup \Sigma_V = \{(x, 0) | x \geq 0\} \cup \{(0, y) | y \geq 0\}$, e os setores o plano como

$$\Sigma^+ = \{(x, y) : x, y \geq 0\} \quad \text{and} \quad \Sigma^- = \overline{\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma^+}.$$

e o PWLS (3.1) dado por

$$X(x, y) = \begin{cases} (ax + by + e, cx + dy + f), & \text{se } (x, y) \in \Sigma^-, \\ (mx + ny + p, rx + sy + q), & \text{se } (x, y) \in \Sigma^+, \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $m, n, p, q, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ são números reais constantes.

Lema 3.2.6. *Sejam $i \in \{+, -\}$, X^i um sistema planar homogêneo linear de equações diferenciais em Σ^i e $\varphi^\pm(t, (x_0, y_0))$ a sua respectiva solução passando através do ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ quando $t = 0$. Se existem $r_0, t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi^i(t, (r_0, 0)) \subset \Sigma^i$ para $t \in (0, t_0)$ e $\varphi^i(t_0, (r_0, 0)) = (0, R_0) \in \Sigma_V \setminus \{(0, 0)\}$, então para todo $r > 0$ existe uma constante real $K > 0$ de modo que $\varphi^i(t, (r, 0)) \subset \Sigma^\pm$ para $t \in (0, t_0)$ e $\varphi^i(t_0, (r, 0)) = (0, Kr) \in \Sigma_V \setminus \{(0, 0)\}$.*

Demonstração. O problema de valor inicial

$$(\dot{x}, \dot{y}) = X^\pm(x, y), \quad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0),$$

tem uma única solução dada por

$$\varphi^\pm(t, (x_0, y_0)) = e^{A^\pm t}(x_0, y_0)^T,$$

onde $A^\pm$ é a matriz Jacobiana de $X^\pm$. Assim, fixando $t = s_0$ a imagem do raio L através da origem é o raio $e^{As_0}L$. Por hipótese, existe um ponto $(r_0, 0) \in \Sigma_H \setminus (0, 0)$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi^\pm(t, (r_0, 0)) \subset \Sigma_\pm$ para $t \in (0, t_0)$ e $\varphi^\pm(t_0, (r_0, 0)) = (0, R_0) \in \Sigma_V \setminus \{(0, 0)\}$, i.e., $e^{A^\pm t_0}(r_0, 0) = (0, R_0)$. Isto implica que para $r > 0$, $e^{A^\pm t_0}(r, 0) = (0, q)$, e que a matriz

$$e^{A^\pm t_0} = \begin{pmatrix} I & J \\ K & L \end{pmatrix}$$

satisfaz $I = 0$ e $R_0 = K r_0$ com $K \neq 0$. Portanto, segue que $q = Kr$. □

3.3 Principais Resultados

Nossos principais resultados são os seguintes:

Teorema E. *Se um PWLS na forma (3.1) é contínuo então não existem ciclos limite de costura.*

Demonstração. Agora, assumimos que o PWLS (3.1) é contínua em Σ , então $X^+(x, 0) = X^-(x, 0)$ e $X^+(0, y) = X^-(0, y)$ para $x, y \geq 0$. Assim, obtemos que $m = a$, $n = b$,

$p = e, r = c, s = d$ e $q = f$, i.e. $X^+(x, y) = X^-(x, y)$ para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Isto conclui a prova do Teorema E. $\square$

Teorema F. *Seja um PWLS na forma (3.1) tal que um dos seus sistemas laterais tem um ponto singular na origem do sistema de coordenadas. São validas as seguintes afirmações:*

- (a) *O número máximo de ciclos limite de costura é limitado superiormente por 3.*
- (b) *Se o outro sistema lateral não tem um ponto singular do tipo foco então o número máximo de ciclos limite de costura é 2.*

Demonstração. Distinguímos nesta prova quando X^- ou X^+ é homogêneo. Iniciamos considerando que X^- é homogêneo, assim se existe uma linha reta invariante de X^- contida em Σ^- então não existem órbitas periódicas de costura e, portanto, não existem ciclos limite de costura. Isto nos garantem que podemos assumir que X^- tem um ponto de equilíbrio do tipo foco ou centro, ver Figura 3.1. Se X^+ é homogêneo segue que a origem é um ponto singular deste sistema lateral.

Agora, a existência de um ciclo limite força X^+ a ter um ponto de equilíbrio do tipo foco ou centro, ou, que qualquer dos raios das suas linhas invariantes não está contida em Σ^+ , ver Figura 3.2. Dividimos a prova em dois casos: Caso 1: quando X^+ é homogêneo e Caso 2: quando X^- é homogêneo

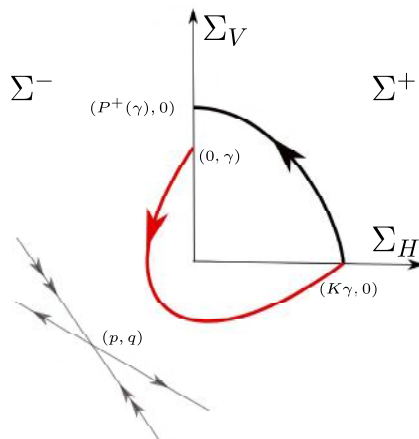


Figura 3.1: Caso 1: Definição da aplicação de Poincaré P^+ quando a origem é um ponto singular de X^- . Nesta Figura a origem é um centro ou um foco de X^- e (p, q) é um ponto singular virtual de X^+ .

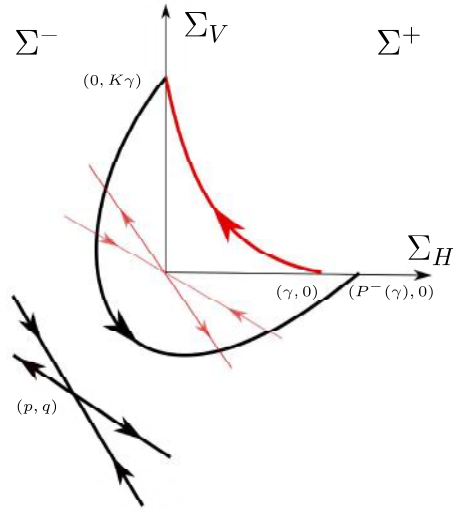


Figura 3.2: Caso 2: Definição da aplicação de Poincaré P^- quando a origem é um ponto singular de X^+ . Neste figura a origem é um ponto de sela e (p, q) é um ponto singular de X^- .

Caso 1: Consideremos a órbita de X^- no sentido anti-horário $\varphi^-(t, p)$ contida em Σ^- com $\varphi^-(0, (0, \gamma)) = (0, \gamma) \in \Sigma_V$. Notemos que, neste caso, $b < 0$. Seja $t^-(\gamma)$ o tempo de voo de $(0, \gamma)$ até $(K\gamma, 0)$, i.e., $\varphi^-(t^-(\gamma), (0, \gamma)) = (K\gamma, 0) \in \Sigma_H$ pelo Lema 3.2.6. Assim, a aplicação de Poincaré $P^- : \Sigma_V \rightarrow \Sigma_H$ é dada por $P^-(\gamma) = K\gamma$.

Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ os autovalores da matriz do sistema linear X^+ . Separamos a prova do Caso 1 em cinco sub-casos:

- (a) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ com $\lambda_1 \neq \lambda_2$,
- (b) $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- (c) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,
- (d) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \lambda_2 = 0$ e $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, e
- (e) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \lambda_2 = 0$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

Se $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ sem perda de generalidade pode reescrever X^+ no PWLS (3.1) na forma

$$X^+(x, y) = (m(x - p) + n(y - q), r(x - p) + s(y - q)), \quad (3.3)$$

caso contrário,

$$X^+(x, y) = (mx + ny + p, rm x + rn y + q).$$

Subcaso (a): Seja $\varphi^+(t, \gamma) = (\varphi_1^+(t), \varphi_2^+(t))$ a solução de X^+ com condição inicial $(K\gamma, 0)$. E sejam λ_1 e λ_2 os autovalores associados com X^+ de modo que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Então,

$$\begin{aligned}\varphi_1^+(t) &= \frac{1}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{-\lambda_1 t} \left(e^{2\lambda_1 t} (-(p - \gamma K)(\lambda_1 - \lambda_2 + m - s) - 2nq) \right. \\ &\quad \left. + e^{t(\lambda_1 + \lambda_2)} (2nq - (p - \gamma K)(\lambda_1 - \lambda_2 - m + s)) + 2p(\lambda_1 - \lambda_2) e^{\lambda_1 t} \right), \\ \varphi_2^+(t) &= \frac{(e^{\lambda_2 t} - 1)(q(\lambda_1 - \lambda_2 + m - s) - 2r(p - \gamma K))}{2(\lambda_2 - \lambda_1)},\end{aligned}\tag{3.4}$$

com $\lambda_1 = \left(m + s + \sqrt{(m - s)^2 + 4nr}\right) / 2$ e $\lambda_2 = \left(m + s - \sqrt{(m - s)^2 + 4nr}\right) / 2$.

Seja $t^+(\gamma) > 0$ o tempo de voo, caso exista, desde $(K\gamma, 0)$ até $(\gamma_1, 0)$ com $\gamma_1 > 0$, i.e., $\varphi^+(t^+(\gamma), (K\gamma, 0)) = (0, \gamma_1) \in \Sigma_V$ e $\varphi^+(t, (K\gamma, 0)) \in \Sigma^+$ para $t \in (0, t^+(\gamma))$.

Observemos que o PWLS tem uma órbita periódica de costura se, e so se, existe $\gamma > 0$ que é solução de equação

$$\varphi(t^+(\gamma), K\gamma) = (0, \gamma)\tag{3.5}$$

Portanto, o número máximo de soluções isoladas desta equação corresponde ao número máximo de ciclos limite de costura. Para estudar esta quantidade de soluções isoladas de (3.5) consideraremos o seguinte sistema de equações

$$(e_1(v, \gamma), e_2(v, \gamma)) = \varphi(v, K\gamma) - (0, \gamma) = (0, 0)\tag{3.6}$$

com

$$e_1(v, \gamma) = c_{11}(v)\gamma + c_{12}(v) \text{ e } e_2(v, \gamma) = c_{21}(v)\gamma + c_{22}(v),$$

onde $c_{11}(v)$, $c_{12}(v)$, $c_{21}(v)$ e $c_{22}(v)$ são funções suaves de $v \in \mathbb{R}$ e são dadas por

$$\begin{aligned}c_{11}(v) &= \frac{K e^{\lambda_1 v} (\lambda_1 - \lambda_2 + m - s) + K e^{\lambda_2 v} (\lambda_1 - \lambda_2 - m + s)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}, \\ c_{12}(v) &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)p(e^{\lambda_1 v} + e^{\lambda_2 v} - 2) - (e^{\lambda_1 v} - e^{\lambda_2 v})(mp + 2nq - ps)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}, \\ c_{21}(v) &= \frac{-\lambda_1 + \lambda_2 + Kr(1 - e^{\lambda_2 v})}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ c_{22}(v) &= \frac{(1 - e^{\lambda_2 v})(-2pr + q(\lambda_1 - \lambda_2 + m - s))}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}.\end{aligned}$$

É importante notar que o número de soluções isoladas de (3.6) corresponde ao número máximo da equação (3.5). Para determinar as soluções de (3.6), consideremos este sistema restrito aos subconjuntos:

$$J_1 = \{\gamma > 0\} \times \{v > 0 | c_{11}(v) = 0\} \text{ e } J_2 = \{\gamma > 0\} \times \{v > 0 | c_{11}(v) \neq 0\}.$$

Primeiro, seja $(v_0, \gamma_0) \in J_1$ uma solução de (3.6). Se $c_{12}(v_0) = 0$. Então, existe no máximo uma solução isolada de (3.6) em $(v_0, \gamma_0) \in J_1$. Caso contrário, não existem soluções ou há um contínuo delas. Portanto, o sistema (3.6) tem no máximo uma solução isolada em J_1 .

O número de soluções isoladas de (3.6) em J_2 é equivalente ao número de zeros isolados da função $\zeta(v) = c_{21}(v)c_{12}(v) - c_{22}(v)c_{11}(v)$ em $\{v > 0 | c_{11}(v) \neq 0\}$. Podemos reescrever,

$$\zeta(v) = \frac{c_0 f_0(v) + c_1 f_1(v) + c_2 f_2(v)}{4(\lambda_1 - \lambda_2)^2}, \quad (3.7)$$

onde

$$\begin{aligned} c_0 &= -4p(\lambda_1 - \lambda_2)(-Kr + \lambda_1 - \lambda_2), \\ c_1 &= 2(\lambda_1 - \lambda_2)(-2nq + p(2(\lambda_1 - m) - 2Kr)) \\ c_2 &= Kq((\lambda_1 - \lambda_2 + m - s)^2 + 4nr), \end{aligned}$$

$$\text{e } f_0(v) = 1 - e^{\lambda_1 v}, f_1(v) = e^{\lambda_2 v} - e^{\lambda_1 v} \text{ e } f_2(v) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)v} - e^{\lambda_1 v}.$$

Observemos que c_0, c_1 e c_2 são linearmente independentes já que p, q e r são números reais arbitrários.

Se $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, é fácil ver que $f_0(v) = f_2(v)$. Assim, aplicando o Lema 3.2.2 obtemos que $\{f_0(v), f_1(v)\}$ é um sistema Estendido Completo de Chebyshev e já que os coeficientes c_0, c_1 e c_2 são linearmente independentes, resulta que o número máximo de zeros de $\zeta(v)$ é um em $(0, \infty)$, e consequentemente, o número máximo de soluções de (3.6) em J_2 é um.

Se $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ segue do Lema 3.2.2 que $\{f_0(v), f_1(v), f_2(v)\}$ é um Sistema Estendido Completo de Chebyshev, e como os coeficientes c_0, c_1 e c_2 são linearmente independentes, resulta que o número máximo de zeros de $\zeta(v)$ é dois em $(0, \infty)$. Assim, o número máximo de soluções isoladas de (3.6) em J_2 é dois.

É claro que se o sistema tem uma solução isolada (γ_0, v_0) em J_1 , então $c_{11}(v_0) = c_{12}(v_0) = 0$ e, consequentemente, v_0 é uma zero de (3.7) em $(0, \infty)$. Isto

implica que o número máximo de soluções isoladas de (3.7) é igual ao número máximo de soluções de (3.6) em $\{\gamma > 0\} \times \{v > 0\} = J_1 \cup J_2$. Logo, o número de ciclos limite do PWLS (2.1) limite é dois.

Subcaso (b): Agora, assumamos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Para $r \neq 0$ em (3.3) a solução de X^+ com condição inicial $(\gamma, 0)$ é

$$\varphi_1^+(t) = \frac{e^{\lambda t} (2\gamma Kr(mt - st + 2) - 2pr(mt - st + 2) + qt(m - s)^2) + 4pr}{4r},$$

$$\varphi_2^+(t) = \frac{1}{2}e^{\lambda t}(q(mt - st - 2) - 2rt(p - \gamma K)) + q.$$

Podemos reescrever (3.7) como

$$\zeta(v) = -pf_0(v) + Kqf_1(v) + \frac{(2Kr + m - s)(-mq + 2pr + qs)}{4r}f_2(v),$$

onde $f_0(v) = 1 - e^{\lambda v}$, $f_1(v) = e^{2\lambda v} - e^{\lambda v}$, e $f_2(v) = ve^{\lambda v}$.

Do Lema 3.2.2 obtemos que $\{f_0(v), f_1(v), f_2(v)\}$ é um sistema Estendido Completo de Chebyshev. Os coeficientes de f_0 , f_1 e f_2 são linearmente independentes pois K , p e q são números reais arbitrários. Logo, o número máximo de zeros de $\zeta(v)$ é dois em $(0, \infty)$. Em consequência, o número máximo de ciclos limite é dois.

Para $r = 0$ a solução é $\varphi^+(t) = (p - e^{mt}(-\gamma K + nqt + p), q - qe^{\lambda t})$ e (3.7) é $\zeta(v) = -pf_0(v) + Kqf_1(v) + nqf_2(v)$ onde $f_0(v) = 1 - e^{\lambda v}$, $f_1(v) = e^{2\lambda v} - e^{\lambda v}$, e $f_2(v) = ve^{\lambda v}$. Do Lema 3.2.2 obtemos que $\{f_0(v), f_1(v), f_2(v)\}$ é um Sistema Estendido Completo de Chebyshev e já que os coeficientes de f_0 , f_1 e f_2 são linearmente independentes, então o número máximo de zeros de $\zeta(v)$ é dois em $(0, \infty)$. O que implica que, o número máximo de ciclos limite é dois.

Sub-caso (c) : Neste caso, os autovalores $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Assim, consideramos $\lambda_{12} = \alpha \pm i\beta$ e usando a solução (3.4) obtemos que os coeficientes c_0, c_1, c_2 de (3.7) são

$$\begin{aligned} c_0 &= Kq, \\ c_1 &= -p, \\ c_2 &= -\frac{\beta^2 Kp - (K(\alpha - m) + n)(mp + nq - \alpha p)}{\beta n}, \end{aligned}$$

e $f_1(v) = 1 - e^{\alpha v} \cos(\beta v)$, $f_2(v) = e^{\alpha v} \sin(\beta v)$ e $f_0(v) = e^{2\alpha v} - e^{\alpha v} \cos(\beta v)$ com $\beta \neq 0$ e $v \in (0, 2\pi/\beta)$. Segue do Lema 3.2.4 obtemos que o sistema (3.6) tem no máximo três

zeros em $(0, 2\pi/\beta)$.

Sub-caso (d): Agora, temos que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1\lambda_2 = 0$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Assumindo $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$, então a solução de X^+ com condição inicial $(K\gamma, 0)$ é

$$\begin{aligned}\varphi_1^+(t) &= \frac{1}{\lambda_1^2} \left(\lambda_1 \left(e^{\lambda_1 t} (\gamma \lambda_1 K - \gamma K n r + p) + \gamma K n r + n p r t - n q t - p \right) \right. \\ &\quad \left. + n (e^{\lambda_1 t} - 1) (q - p r) \right), \\ \varphi_2^+(t) &= \frac{1}{\lambda_1^2} \left(\lambda_1 r \left(e^{\lambda_1 t} (p - \gamma K n r) + \gamma K n r + n p r t - n q t - p \right) \right. \\ &\quad \left. + n r (e^{\lambda_1 t} - 1) (q - p r) + \lambda_1^2 (q t - r (\gamma K - \gamma K e^{\lambda_1 t} + p t)) \right),\end{aligned}$$

onde $\lambda_1 = m + r n$. Podemos reescrever (3.7) como

$$\zeta(v) = \frac{c_0 f_0(v) + c_1 f_1(v) + c_2 f_2(v)}{\lambda_1^2},$$

onde

$$\begin{aligned}c_0 &= -K n p r^2 + K n q r + \lambda_1 K p r - n p r + n q + \lambda_1 p, \\ c_1 &= -\lambda_1 K n p r^2 + \lambda_1 K n q r + \lambda_1^2 K p r - \lambda_1^2 K q, \\ c_2 &= \lambda_1 n q - \lambda_1 n p r,\end{aligned}$$

e $f_0(v) = 1 - e^{\lambda_1 v}$, $f_1(v) = v e^{\lambda_1 v}$ e $f_2(v) = v$.

Do Lema 3.2.3 obtemos que $\{f_0(v), f_1(v), f_2(v)\}$ é um Sistema Estendido Completo de Chebyshev e já que os coeficientes c_0 , c_1 e c_2 são linearmente independentes em relação aos parâmetros então, o número máximo de zeros de $\zeta(v)$ é dois em $(0, \infty)$. Assim, o número máximo de ciclos é dois.

Subcaso (e): Agora temos que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1\lambda_2 = 0$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Então a solução de X^+ na condição inicial $(K\gamma, 0)$ é

$$\begin{aligned}\varphi_1^+(t) &= \gamma K + \frac{1}{2} t (-2\gamma K n r - n p r t + n q t + 2p), \\ \varphi_2^+(t) &= \frac{1}{2} t (q(n r t + 2) - n r^2 (2\gamma K + p t)).\end{aligned}$$

Podemos reescrever (3.7) como

$$\zeta(v) = -(p + K q) f_0(v) - \frac{(n q - n p r - K n q r + K n p r^2)}{2} f_1(v),$$

onde $f_0(v) = v$ e $f_1(v) = v^2$.

Do Lema 3.2.3 obtemos que $\{f_0(v), f_1(v)\}$ é um Sistema Estendido Completo de Chebyshev, e já que os coeficientes de f_0, f_1 e f_2 são linearmente independentes. Então, o número máximo de zeros de $\zeta(v)$ é um em $(0, \infty)$. Portanto, o número máximo de ciclos é um.

Caso 2: Quando X^+ é homogênea e a origem é um centro ou um foco ou qualquer raio das suas linhas invariantes está contido em σ^+ , isto implica que a solução em Σ^+ conecta $(\gamma, 0) \in \Sigma_H$ com $(0, K\gamma) \in \Sigma_V$. Assim, como acima, podemos trabalhar com a aplicação de Poincaré $P^+ : \Sigma_H \rightarrow \Sigma_V$ como $P^+(\gamma) = k\gamma$ e usando um argumento similar ao prova do **Caso 1**, concluímos a prova do Teorema F. $\square$

Singularidades Típicas de um Sistema de Equações Diferenciais Suave por Partes em $\mathbb{R}^3$

Neste Capítulo 4, primeiro estabelecemos a notação básica, fornecemos alguns definições e resultado elementares. Logo, os principais resultados são apresentados nos Teorema G, H e I. E finalmente, alguns diagramas de bifurcação são exibidos.

4.1 Conjuntos de Filippov e Equivalência Topológica

A seguir estabelecemos a linguagem e os fatos básicos e necessários para a compreensão dos resultados subsequentes.

Seja $\Sigma = f^{-1}(0)$, onde $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é uma função suave tendo $0 \in \mathbb{R}$ como valor regular. Assumimos que $0 \in \Sigma$ e denotamos por $\Omega^r(0)$ o espaço de todos os germes de campos de vetores C^r de $(\mathbb{R}^3, 0)$ com $0 \in \Sigma$, munido com a topologia C^r , onde $r > 1$ é suficientemente grande para nossos propósitos. Seja $\Xi^r(0)$ o espaço de todos os campos de vetores Z em $(\mathbb{R}^3, 0)$ definidos da forma

$$Z(p) = \begin{cases} X(p) & f(p) \leq 0, \\ Y(p) & f(p) \geq 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $X, Y \in \Omega^r(0)$. O campo vetorial acima será denotado por $Z = (X, Y)$ e munimos $\Xi^r(0)$ com a topologia produto.

É claro que existe uma dependência entre um campo $Z = (X, Y)$ e a configuração dos conjuntos de Filippov sobre Σ , por este motivo neste capítulo denotaremos por:

Conjunto de Costura: $\Sigma_c^Z = \{p \in \Sigma \mid (X.f)(Y.f)(p) > 0\};$

Conjunto de Escape: $\Sigma_e^Z = \{p \in \Sigma \mid (X.f)(p) > 0 \text{ e } (Y.f)(p) < 0\};$

Conjunto de Deslize: $\Sigma_s^Z = \{p \in \Sigma \mid (X.f)(p) < 0 \text{ e } (Y.f)(p) > 0\};$

Conjunto de Crítico: $\Sigma_{cr}^Z = \{p \in \Sigma \mid (X.f)(p)(Y.f)(p) = 0\};$

Conjunto de tangência de X : $S_X = \{p \in \Sigma \mid (X.f)(p) = 0\};$

Conjunto de tangência de Y : $S_Y = \{p \in \Sigma \mid (Y.f)(p) = 0\}.$

Sabemos que, segundo a convenção de Filippov, se $p \in \Sigma_s^Z \cup \Sigma_e^Z$, então Z admite uma trajetória através de 0 em Σ que satisfaz o problema de valor inicial sobre a variedade de descontinuidade, $\dot{s} = \mathbf{F}^Z(s)$ com $s(0) = p$ onde $s \in \Sigma$ e

$$\mathbf{F}^Z(s) = \frac{(Y.f)X - (X.f)Y}{Y.f - X.f}(s).$$

Este campo é chamado de campo deslizando e seu domínio de definição é $\text{dom}(\mathbf{F}^Z) = \Sigma_s^Z \cup \Sigma_e^Z$. Através de um reescalonamento de tempo é possível estabelecer que $\mathbf{F}^Z$ é orbitalmente equivalente, em $\text{dom}(\mathbf{F}^Z)$, ao campo deslizando normalizado, $\mathbf{F}\mathbf{E}^Z = (Y.f)X - (X.f)Y$, este campo é de classe C^{r-1} e pode ser suavemente estendido à fronteira de $\text{dom}(\mathbf{F}^Z)$.

Levando em consideração o comportamento qualitativo do campo deslizando normalizado, introduzimos uma noção de equivalência topológica para elementos de $\Xi^r(0)$. No que segue, assumiremos que se $Z \in \Xi^r(0)$ então $0 \in \overline{\text{dom}(\mathbf{F}^Z)}$.

Definição 4.1 (Equivalência Topológica). *Sejam $Z = (X, Y), Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi^r(0), 0 \in \overline{\text{dom}(\mathbf{F}^Z)} \cap \overline{\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0})}$. Dizemos que Z_0 é C^0 -equivalente a Z , em 0, se existem vizinhanças U e U_0 de 0 em $\overline{\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0})}$ e $\overline{\text{dom}(\mathbf{F}^Z)}$, respectivamente, e um homeomorfismo $h : U_0 \rightarrow U$ que envia órbitas de $\mathbf{F}\mathbf{E}^{Z_0}$ em órbitas de $\mathbf{F}\mathbf{E}^Z$.*

Decorre diretamente da definição anterior que se h fornece uma equivalência topológica de $Z, Z_0 \in \Xi^r$ então, localmente, h envia $\partial(\text{dom}(\mathbf{F}^Z))$ em $\partial(\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0}))$.

4.2 Singularidades

Neste contexto consideraremos que, $p \in \Sigma$ é uma singularidade de $\mathbf{F}^Z$ para $Z \in \Xi^r(0)$ se

1. $p \in \text{dom}(\mathbf{F}^Z)$ sendo ele um ponto singular de $\mathbf{F}^Z$ ou;
2. 0 é um ponto de tangência entre $\partial(\text{dom}(\mathbf{F}^Z))$ e $\mathbf{F}^Z$, ou;
3. 0 é um ponto não regular de $\partial(\text{dom}(\mathbf{F}^Z))$.

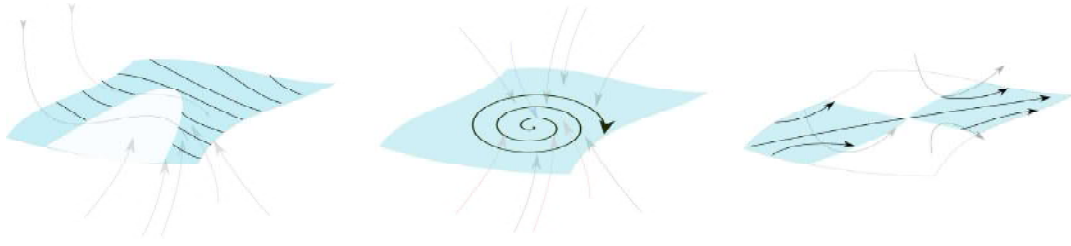


Figura 4.1: Algumas singularidades do campo deslizante.

Distinguimos os seguintes tipos de singularidades típicas baseados, principalmente, na posição relativa dos seguintes objetos: Σ , X e Y . Para $Z = (X, Y) \in \Xi^r(0)$ e $0 \in \Sigma$ definimos:

Definição 4.2. Dizemos que 0 é uma $\omega_0(a)$ –singularidade de Z se: (i) 0 é Σ –regular para Y e (ii) é uma cúspide para X (ou vice-versa).

Definição 4.3. Dizemos que 0 é uma $\omega_0(b)$ –singularidade de Z , se: (i) 0 é uma dobra de X e de Y e, (ii) os conjuntos de tangência, S_X e S_Y , intersectam-se transversalmente em 0 . Além disso, uma das seguintes condições é válida:

Condição 1: (i) 0 é um ponto de equilíbrio hiperbólico de $\mathbf{FE}^Z$; (ii) os autovalores de $d\mathbf{FE}^Z(0)$ são reais e diferentes; (iii) e os autoespaços associados não estão contidos em $\text{dom}(\mathbf{F}^Z)$.

Condição 2: (i) 0 é um ponto de equilíbrio hiperbólico de $\mathbf{FE}^Z$; (ii) os autovalores de $d\mathbf{FE}^Z(0)$ são reais e iguais; (iii) matriz $d\mathbf{FE}^Z(0)$ é não diagonalizável; (iv) o autoespaço de $d\mathbf{FE}^Z(0)$ não está contido em $\text{dom}(\mathbf{F}^Z)$.

Condição 3: (i) 0 é um ponto de equilíbrio semi-hiperbólico de $\mathbf{FE}^Z$; (ii) os autoespaços de $d\mathbf{FE}^Z(p)$ não estão contidos em $\text{dom}(\mathbf{F}^Z)$.

Condição 4: A parte linear de $d\mathbf{FE}^Z(p)$ não possui autovalores reais.

Definição 4.4. Dizemos que 0 é uma $\omega_0(c)$ –singularidade de Z se: (i) 0 é um ponto de dobra de X e de Y ; (ii) os conjuntos de tangência, S_X e S_Y , são transversais em 0 ; (iii) 0 é um ponto de equilíbrio hiperbólico de $\mathbf{FE}^Z$; (iv) os autovalores de $d\mathbf{FE}^Z(0)$ são reais e diferentes; (v) pelo menos um dos seus autoespaços de $d\mathbf{FE}^Z(0)$ está contida $\text{dom}(\mathbf{F}^Z)$.

Definição 4.5. Dizemos que 0 é uma $\omega_0(d)$ –singularidade de Z se: (i) $0 \in \text{dom}(\mathbf{F}^Z)$; (ii) 0 é um ponto de equilíbrio hiperbólico de $\mathbf{FE}^Z$.

Definição 4.6. Dizemos que 0 é uma $\omega_1(a)$ –singularidade se $0 \in \text{dom}(\mathbf{F}^Z)$ é um ponto de equilíbrio de codimensão um de $\mathbf{FE}^Z$.

Definição 4.7. Dizemos que 0 é uma $\omega_1(b)$ –singularidade de Z se: (i) 0 é Σ –regular para Y e (ii) 0 é um ponto do tipo Lips, bec to bec ou Dove’s Tail para X , ou vice-versa.

Definição 4.8. Dizemos que 0 é uma $\omega_1(c)$ —singularidade de Z se: (i) 0 é um ponto dobra de X e de Y ; (ii) as linhas de dobra, S_X e S_Y , intersectam-se transversalmente em 0 ; (iii) 0 é um ponto de equilíbrio do tipo sela-nó de $\mathbf{FE}^Z$; (iv) o autoespaço associado com o autovalor nulo de $d\mathbf{FE}^Z(0)$ está contido em $\text{dom}(\mathbf{F}^Z)$.

Definição 4.9. Dizemos que 0 é uma $\omega_1(d)$ —singularidade de Z se: (i) 0 é um ponto dobra de X e de Y ; (ii) o contato entre as linhas de dobra, S_X e S_Y , em 0 é quadrático; (iii) $X.f^2(0) - Y.f^2(0) \neq 0$ é diferente de zero; (iv) 0 é um ponto de equilíbrio do tipo sela-nó de $\mathbf{FE}^Z$.

Definição 4.10. Dizemos que 0 é $\omega_1(e)$ —singularidade se: (i) 0 é um ponto de dobra de X e de cúspide de Y ; (ii) as linhas de tangência, S_X e S_Y , são transversais em 0 ; (iii) $X.Y.f(p)Y.X.f(p) \neq 0$; (iv) $(Y.X.f - X.Y.f)(0) \neq 0$; (v) $(X.Y.f + 2Y.X.f)(0) \neq 0$.

Definição 4.11. Dizemos que 0 é uma $\omega_1(f)$ singularidade de Z se: (i) 0 é um ponto dobra de X e de Y ; (ii) as linhas de dobra, S_X e S_Y , intersectam-se transversalmente em 0 ; (iii) 0 é um ponto de equilíbrio hiperbólico de $\mathbf{FE}^Z$. (iv) os autovalores de $d\mathbf{FE}^Z(0)$ são iguais; (v) $d\mathbf{FE}^Z(0)$ não é diagonalizável e o seu autoespaço está contido $\text{dom}(\mathbf{F}^Z)$.

Definição 4.12. Dizemos que 0 é uma $\omega_1(g)$ —singularidade de Z se: (i) 0 é um ponto regular de X e um ponto de equilíbrio de Y ; (ii) os autoespaços de $DY(p)$ são transversais a Σ em 0 ; (iii) 0 é um ponto de equilíbrio hiperbólico de $\mathbf{FE}^Z$; (iv) os autovalores de $d\mathbf{FE}^Z(0)$ são diferentes e os seus autoespaços associados são transversais a S_Y em 0 .

Definição 4.13. Dizemos que 0 é uma $\omega_2(a)$ —singularidade de Z se: (i) $0 \in \text{dom}(\mathbf{F}^Z)$; (ii) 0 é um ponto de equilíbrio de codimensão dois de $\mathbf{FE}^Z$.

Definição 4.14. Dizemos que 0 é uma $\omega_2(b)$ —singularidade de Z se $Y.f(0) \neq 0$ e uma das seguintes condições é satisfeita:

- (b1) (Goose) $X^3.f(0) \neq 0$, $\text{rank}\{df(0), d(X.h)(0), d(X^2.f)(0)\} = 2$ e $X.h|_\Sigma$ é equivalente, em 0 , a um germe simples de codimensão um.
- (b2) (Gull) $X^3.f(p) = 0$, $X^4.h(p) \neq 0$ e 0 é uma ponto crítico não degenerado de $X.f|_\Sigma$.
- (b3) (Butterfly) $X^3.f(p) = X^4.f(p) = 0$, $X^5.f(p) \neq 0$ e 0 é um ponto regular de $X.f|_\Sigma$.

Definição 4.15. Dizemos que 0 é uma $\omega_2(c)$ —singularidade de Z se: (i) 0 é um ponto dobra de X e de Y ; (ii) O contato entre as linhas de dobra, S_X e S_Y , em 0 é cúbico; (iii) $X.f^2(p) - Y.f^2(p) \neq 0$; (iii) 0 é um ponto de equilíbrio semi-hiperbólico de $\mathbf{FE}^Z$ de codimensão dois.

Definição 4.16. Dizemos que 0 é uma $\omega_2(d)$ —singularidade de Z se: (i) 0 é um ponto dobra de X e cúspide de Y ; (ii) O contato entre as linhas de dobra, S_X e S_Y , em 0 é quadrático.

Definição 4.17. Dizemos que 0 é uma $\omega_2(e)$ -singularidade de Z se as seguintes condições se tem: (i) 0 é um ponto cúspide de X e de Y ; (ii) as linhas de tangência, S_X e S_Y , são transversais em 0 ; (iii) $X.Y.f(0)Y.X.f(0) \neq 0$; (iv) $(Y.X.f - X.Y.f)(0) \neq 0$; (v) $(Y.X.f + 2X.Y.f)(0)(X.Y.f + 2Y.X.f)(0) \neq 0$.

Definição 4.18. Dizemos que 0 é uma $\omega_2(f)$ -singularidade de Z se: (i) 0 é um ponto dobra de X e cúspide de Y ; (ii) as linhas de tangência, S_X e S_Y , são transversais em 0 ; (iii) $X.Y.f(0)Y.X.f(0) \neq 0$; (iv) $(Y.X.f - X.Y.f)(0) \neq 0$; (v) $(X.Y.f + 2Y.X.f)(0) = 0$.

Definição 4.19. Dizemos que 0 é uma $\omega_2(g)$ -singularidade de Z se: (i) 0 é um ponto de dobra de X e de Y ; (ii) as linhas de tangência, S_X e S_Y , são transversais em 0 ; (iii) 0 é um ponto de equilíbrio semi-hiperbólico de $\mathbf{FE}^Z$ de codimensão dois; (iv) o autoespaço associado com o autovalor nulo de $d\mathbf{FE}^Z$ está contido em $\text{dom}(\mathbf{F}^Z)$.

Definição 4.20. Dizemos que 0 é uma $\omega_2(h)$ -singularidade de Z se: (i) 0 é um ponto de dobra de X e cúspide de Y ; (ii) as linhas de tangência, S_X e S_Y , são transversais em 0 ; (iii) $(X.Y.f + Y.X.f)(0) = 0$ (iv) $(X.Y.f)(Y.X.f)(0) \neq 0$.

Definição 4.21. Dizemos que 0 é uma $\omega_2(i)$ -singularidade de Z se: (i) 0 é um ponto dobra de X e Dove's Tail de Y ; (ii) as linhas de tangência, S_X e S_Y , são transversais em 0 ; (iii) $(X.Y.f + Y.X.f)(p) \neq 0$; (iv) $(X.Y.f)(X.Y.f)(p) \neq 0$; (v) $(3Y.X.f + X.Y.f)(2Y.X.f + X.Y.f)(p) \neq 0$.

Definição 4.22. Dizemos que 0 é uma $\omega_2(j)$ -singularidade de Z se: (i) 0 é um ponto dobra de X e um ponto de equilíbrio de Y ; (ii) os autoespaços de $DY(0)$ são transversais a Σ em 0 ; (iii) as linhas de tangência, S_X e S_Y , são transversais em 0 ; (iv) $(X.Y.f)(H_{Y.X.f}.Y.f)(H_{Y^2.f}.Y.f)(p) \neq 0$; (v) $((H_{Y.X.f})(X.Y.f) - (H_{Y^2.f})(X^2.f))(p) \neq 0$.

Definição 4.23. Dizemos que 0 é uma $\omega_2(k)$ -singularidade de Z se as seguintes condições se tem: (i) 0 é um ponto de dobra de X e um ponto crítico de Y ; (ii) Os autoespaços de $DY(0)$ são transversais a Σ em 0 ; (iii) 0 é uma singularidade de codimensão dois de $\mathbf{FE}^Z$.

4.3 Principais Resultados

Em [28, 30] foi feita uma classificação de algumas singularidades típicas do campo deslizando restrito exclusivamente à região de deslize. O nosso principal objetivo é estender e completar tal classificação, levando em consideração a possível

presença da região de escape. Os principais resultados são listados abaixo:

Seja $\Omega_\lambda^0(0)$ o conjunto dos campos $Z \in \Xi^r(0)$ tais que 0 é uma $\omega_0(\lambda)$ -singularidade para $\lambda \in \{a, b, c, d\}$.

Teorema G (Codimensão zero). *São válidas as seguintes afirmações:*

1. $\Omega_0(0) = \Omega_a^0(0) \cup \Omega_b^0(0) \cup \Omega_c^0(0) \cup \Omega_d^0(0)$.
2. $\Omega_0(0)$ é aberto e denso em $\Xi^r(0)$.
3. Se $f(x, y, z) = z$ as formas normais de $Z \in \Omega_0(0)$ são:
 - (a) $\omega_0(a) : X = (0, ax, y), Y = (0, 0, b)$ com $ab \neq 0$.
 - (b) $\omega_0(b) : X = (0, c, y), Y = (c, 0, x)$ com $c \neq 0$.
 - (c) $\omega_0(c) : X = (b, c, y + x), Y = (ab, -c, ay - x)$ com $0 < |a| < 1/2$ e $bc(b - c) \neq 0$.
 - (d) $\omega_0(d) : X = (ax + ey, cx + dy, b), Y = (0, 0, -b)$ com $b(a + d)(ad - ce) \neq 0$.

Demonstração. A prova do Teorema G é análoga à prova do Teorema 1 em [28], por esse motivo será omitida. $\square$

Sejam $\Omega_\lambda^1(0)$ o conjunto de campos $Z \in \Xi^r(0)$ tais que 0 é uma $\omega_1(\lambda)$ -singularidade para $\lambda \in \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $\Xi_1^r(0) = \Xi^r(0) \setminus \Omega_0(0)$.

Teorema H (Codimensão um). *São válidas as seguintes afirmações:*

1. $\Omega_1(0) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda^1(0)$ com $\Lambda = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.
2. $\Omega_1(0)$ é uma subvariedade de codimensão um em $\Xi^r(0)$.
3. $\Omega_1(0)$ é aberto e denso em $\Xi_1^r(0)$ com a topologia induzida.
4. Se $f(x, y, z) = z$, as formas normais de qualquer família a um parâmetro F_α transversal a $\Omega_1(0)$ no $Z_0 = (X_0, Y_0)$ são:
 - (a) $\omega_1(a) : Y_\alpha = (0, 0, a), ab < 0$
 - i. Sela-nó, $X_\alpha = (\alpha + x^2, y, b)$.
 - ii. Hopf, $X_\alpha = (\alpha x - y - x(x^2 + y^2), x + \alpha y - y(x^2 + y^2), b)$.
 - (b) $\omega_1(b) : Y_\alpha = (0, 0, a), ab < 0$
 - i. Lips, $X_\alpha = (1, 0, b(-x^2 + y^2 + \alpha))$.
 - ii. Bec to Bec, $X_\alpha = (1, 0, b(x^2 + y^2 + \alpha))$.
 - iii. Dove's Tail, $X_\alpha = (1, 0, b(y - x^3))$.
 - (c) $\omega_1(c) : X = (\alpha, ac, x + y)$ e $Y = (dx, c, x/a + by)$ com $a > 0$ dc $(1 - ab) \neq 0$.
 - (d) $\omega_1(d) : X = (a, b, y)$ e $Y = (c, d, y - x^2 + \alpha)$ com $bd(b - d)(ad - bc) \neq 0$.

Demonstração. A prova do Teorema H é análoga à prova do Teorema 2 em [28], por esse motivo será omitida. $\square$

Seja $\Omega_\lambda^2(p)$ o conjunto de campos $Z \in \Xi^r(0)$ tais que 0 é uma singularidade do tipo $\omega_2(\lambda)$ para $\lambda \in \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$. E seja $\Xi^r(0)_2 = \Xi_1^r(p)/\Omega_1(p)$

Teorema I (Codimensão dois). *São válidas as seguintes afirmações,*

1. $\Omega_2(p) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda^2(p)$ com $\Lambda = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$.
2. $\Omega_2(p)$ é uma subvariedade de codimensão dois de $\Xi^r(0)$.
3. $\Omega_2(0)$ é aberto em $\Xi_2^r(0)$ com a topologia induzida de $\Xi^r(0)$.
4. Se $Z \in \Omega_2(0)$ então Z é localmente estável, em 0, relativo a $\Xi_2^r(0)$.
5. Se $f(x, y, z) = z$, as formas normais de qualquer família a dois parâmetros, $Z_{\alpha, \beta}$, transversal a $\Omega_2(0)$ em $Z_{0,0}$ são:

- (a) $\omega_2(b.1): X = (1, 0, -3x^2 - y^3 + \alpha x + \beta)$ e $Y = (0, 0, a)$ com $a \neq 0$.
- (b) $\omega_2(b.2): X = (1, 0, 4x^3 + 2xy + y^2 + \alpha y + \beta)$ e $Y = (0, 0, a)$ com $a \neq 0$.
- (c) $\omega_2(b.3): X = (1, 0, 5x^4 + 3\epsilon x^2 y + y + \alpha y + \beta)$ e $Y = (0, 0, a)$ com $a \neq 0$ e $\epsilon = \pm 1$.
- (d) $\omega_2(c): X = (a, b, y)$ e $Y = (c, d, y - x^3 + \alpha x + \beta)$ com $bd(b-d)(ad-bc) \neq 0$.
- (e) $\omega_2(d): X = (0, a, y + \alpha x + \beta)$ e $Y = (b, cx, y - x^2)$ com $ab(-2b+c) \neq 0$.
- (f) $\omega_2(f): X = (a, -2b + \beta, x)$ e $Y = (b, dx, y - \alpha d)$ com $abd \neq 0$.
- (g) $\omega_2(g): X = (\alpha, ac, x + y)$ e $Y = (\beta x + dx^2, c, x/a + by)$ com $a > 0$ e $dc(1-ab) \neq 0$.
- (h) $\omega_2(h): X = (a, b + \beta, x)$ e $Y = (-b, cx + \alpha, y)$ com $ac \neq 0$.
- (i) $\omega_2(i): X = (c, d, x - \beta)$ e $Y = (a, bx^2 - b\alpha, y)$ com $adbc(a+d)(2a+d)(3a+d) \neq 0$.
- (j) $\omega_2(j): X = (e, f, x)$ e $Y = (\alpha, cx + \beta, x)$ com $efc \neq 0$.

Demonstração. Primeiro, provamos que $\Omega_2(0) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda^2(0)$ com $\Lambda = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ é uma variedade de codimensão dois em $\Xi^r(0)$. Com esse propósito, consideremos que $Z \in \Omega_f^2(0)$, pelo Lema 4.25, temos que, existem vizinhanças B , de Z_0 em $\Xi^r(0)$, e U , de 0 em $\mathbb{R}^3$, e uma aplicação $C^{r-3} \varepsilon : (B, Z_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, tais que:

1. Se $Z \in B$ tem uma $\omega_2(f)$ -singularidade em U se, e só se, $\varepsilon(Z) = 0$.
2. $D\varepsilon(Z_0)$ é sobrejetiva.

i.e., que ε é um submersão diferenciável. Além disso, pelo Lema 4.39, obtemos que se $\varepsilon(Z) \neq 0$ então Z possui exclusivamente singularidades de codimensão 0 e 1 em $U \cap \text{dom}(\mathbf{F}^Z)$. Portanto, $\Omega^2(0) \cap B = \varepsilon^{-1}(0) \cap B$ é uma variedade de codimensão 2 em $\Xi^r(0)$ e que $\Omega^2(0)$ é um aberto com a topologia induzida de $\Xi^1(0)$.

De forma análoga se procede para $Z \in \Omega_\lambda^2(0)$ com $\lambda \in \{a, b, c, d, e, g, h, i, j, k\}$. Em particular: Se $\lambda = a$, como Lema 4.4.1. Para $\lambda = b$, como nos Lemas 4.4.1 4.34, 4.32, 4.33 e o Teorema D em [6]. Para $\lambda \in \{c, d, e\}$, com Teorema A em [30]. Para $\lambda = h$, com os Lemas 4.27 e 4.41. Para $\lambda = i$, com os Lemas 4.28 e 4.39. Para $\lambda = j$, com os Lemas 4.29 e 4.42. Para $\lambda = k$, com Teorema 5.4 em [30]. Com isto provamos os Itens (2) e (3).

Agora, provaremos que se $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega_2(0)$ então Z_0 é localmente estável em $\Xi_2(0)$. De fato, se $Z_0 \in \Omega_f^2(0)$ consideremos as vizinhanças, B e U , e aplicação, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, estabelecidos na demonstração do Lema 4.25 obtemos que, se $Z \in B$ tal que $\varepsilon(Z) \neq 0$, então Z possui exclusivamente singularidades de codimensão 0 e 1 em $U \cup \text{dom}(\mathbb{F}^Z)$. Portanto, decorre dos Lemas 4.25 e 4.35 que: (i) $B \cup \Omega_f^2(0)$ é uma vizinhança de Z_0 em $\Omega_f(0)$, com a topologia induzida de $\Xi_1^r(0)$; (ii) Se $Z, Z_0 \in B \cup \Omega_f^2(0)$ segue que Z, Z_0 são topologicamente equivalentes. Consequentemente, Z_0 é estruturalmente estável em $\Xi_2^r(0)$.

De forma análoga se procede para $Z \in \Omega_\lambda^2(0)$ com $\lambda \in \{a, b, c, d, e, g, h, i, j, k\}$. Em particular: Se $\lambda = a$, como Lema 4.4.1. Para $\lambda = b$, com o Lema 4.4.1 4.34, 4.32, 4.33 e o Teorema D em [6]. Para $\lambda \in \{c, d, e\}$, com Teorema A em [30]. Para $\lambda = h$, com os Lemas 4.27, 4.41 e 4.31. Para $\lambda = i$, com os Lemas 4.28, 4.39 e 4.36. Para $\lambda = j$, com os Lemas 4.29, 4.42 e 4.38. Para $\lambda = k$, com Teorema 5.4 em [30]. Com isto provamos os itens (4). $\square$

A seguir provamos os resultados técnicos mencionados na prova do Teorema I.

4.4 Resultados Técnicos

Explicamos brevemente a organização deste capítulo, Na Subseção 4.4.1, se encontram os resultados referentes às submersões. Posteriormente, na Subseção 4.4.2 os referentes às equivalentes topológicas. Logo, na Subseção 4.4.3 os relacionados com as curvas de bifurcação.

4.4.1 Submersões

Lema 4.24. *Seja 0 uma $\omega_2(\lambda)$ -singularidade de $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi^r(0)$ com $\lambda \in \{a, b, c, d, e\}$. Então, existem vizinhanças B , de Z_0 em $\Xi^r(0)$, e U , de $0 \in \mathbb{R}^3$, e uma aplicação, C^r com $r > 2$, $\varepsilon : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que:*

1. $Z \in B$ tem uma $\omega_2(\lambda)$ -singularidade em U se, e só se, $\varepsilon(Z) = 0$.
2. $D\varepsilon(Z_0)$ é sobrejetiva.

Demonstração. Para a demonstração distinguimos os seguintes casos: (i) Se $\lambda = a$ o resultado segue da teoria clássica de sistemas suaves de sistemas de equações diferenciais; (ii) Se $\lambda = b$ é uma consequência imediata da teoria de singularidades de aplicações; (iii) Para $\lambda \in \{c, d, e\}$ a prova é análoga à prova das Proposições 3.1, 3.2 e 5.1 em [?]. $\square$

Lema 4.25. *Seja 0 uma $\omega_2(f)$ -singularidade de $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi^r(0)$. Então, existem vizinhanças B , de Z_0 em $\Xi^r(0)$, e U , de 0 em $\mathbb{R}^3$, e uma aplicação C^{r-3} $\varepsilon : (B, Z_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, tais que:*

1. *Se $Z \in B$ tem uma $\omega_2(f)$ -singularidade em U se, e só se, $\varepsilon(Z) = 0$.*
2. *$D\varepsilon(Z_0)$ é sobrejetiva.*

Demonstração. Seja 0 uma $\omega_2(f)$ -singularidade de $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi^r(0)$, decorre de (iii) da Definição 4.18, que as curvas de tangência, S_{X_0} e S_{Y_0} , são transversais em 0, portanto escolhemos coordenadas (x, y, z) ao redor de 0 de modo que $X_0.f(x, y, 0) = x$ e $Y_0.f(x, y, 0) = y$. Deste modo, obtemos da Definição 4.18, que $X_0(x, y, 0) = (a, -2b, x) + h.o.t$ e $Y_0(x, y, z) = (b, cy + dx, y) + h.o.t$ com $abd \neq 0$.

Pela transversalidade das linhas de dobra de Z_0 , segue que existem vizinhanças B , de Z_0 in $\Xi^r(0)$, e U , de 0 em $\mathbb{R}^3$, e uma aplicação de classe C^{r-1} $P : (B, Z_0) \rightarrow (U, 0)$ que a cada $Z = (X, Y)$ associa o ponto de intersecção de S_X e S_Y .

Agora, definimos a aplicação C^{r-2} , $\varepsilon : (B, Z_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dada por $\varepsilon(Z) = (\varepsilon_1(Z), \varepsilon_2(Z))$ onde $\varepsilon_1(Z) = Y^2 f(P(Z))$ e $\varepsilon_2(Z) = X.Y.f(P(Z)) + 2Y.Xf(P(Z))$. É claro que $Z \in B$ e $\varepsilon(Z) = 0$ se, e só se, Z possui uma $\omega_2(f)$ -singularidade em U , com isto fica provado o Item (1).

O Item (2) é facilmente provado considerando a seguinte família em B , $Z_{\alpha, \beta} = (X_{\alpha, \beta}, Y_{\alpha, \beta})$ com $Z_{0,0} = Z_0$, $X_{\alpha, \beta} = X_0 + (0, \beta, 0)$ e $Y_{\alpha, \beta} = Y_0 + (0, 0, -\alpha d)$. Logo, $p(Z_{\alpha, \beta}) = (0, 0)$, $\varepsilon_1(Z_{\alpha, \beta}) = -d\alpha$ e $\varepsilon_2(Z_{\alpha, \beta}) = \beta$. $\square$

Lema 4.26. *Seja 0 uma $\omega_2(g)$ -singularidade de $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi^r(0)$. Então, existem vizinhanças B , de Z_0 em $\Xi^r(0)$, e U , de 0 in $\mathbb{R}^3$, e uma aplicação C^{r-3} $\varepsilon : (B, Z_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, tais que:*

1. *$Z \in B$ tem uma $\omega_2(g)$ -singularidade em U se, e só se, $\varepsilon(Z) = 0$.*
2. *$D\varepsilon(Z_0)$ é sobrejetiva.*

Demonstração. Seja 0 uma $\omega_1(g)$ -singularidade de $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi^r(0)$, de (ii) na Definição 4.12 segue que as curvas de tangência se intersectam transversalmente, logo é possível escolher coordenadas (x, y, z) , em torno de 0, de modo que $X.f(x, y, 0) = x$ e $Y.f(x, y, 0) = y$. De (i)-(iv) obtemos que $X(x, y, 0) = (bc/d, b, x) + h.o.t$ e $Y(x, y, z) = (c, dy, y) + h.o.t$ com $bcd(b - c) \neq 0$. Para garantir a condição (ii), i.e, que a origem é um ponto de equilíbrio semi-hiperbólico de codimensão dois de $\mathbf{FE}^Z$, introduzimos a mudança de coordenadas

$$\left(\frac{bx}{b-c} - \frac{bcy}{bd-cd}, \frac{bcy}{bd-cd} - \frac{cx}{b-c}, z \right)$$

obtendo assim que $X(x, y, 0) = (0, uw, x + y) + h.o.t$ e $Y(x, y, 0) = (0, w, x/u + vy) + h.o.t$ onde $u = b/d, v = d/c$ e $w = c$. Em particular, $\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0}) = \{(x, y) : (x + y)(x/u + vy) < 0\}$. Agora, considerando os termos de ordem dois em cada um dos campos,

$$X_0(x, y, 0) = \begin{pmatrix} x^2\rho_{20} + x\rho_{10} + xy\rho_{11} + y^2\rho_{02} + y\rho_{01} + h.o.t \\ x^2\eta_{20} + x\eta_{10} + xy\eta_{11} + y^2\eta_{02} + y\eta_{01} + uw + h.o.t \\ x + y \end{pmatrix}$$

$$Y_0(x, y, 0) = \begin{pmatrix} x^2\mu_{20} + x\mu_{10} + xy^2\mu_{12} + xy\mu_{11} + y^2\mu_{02} + y\mu_{01} + h.o.t \\ x^2\kappa_{20} + x\kappa_{10} + xy\kappa_{11} + y^2\kappa_{02} + y\kappa_{01} + w + h.o.t \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Resulta que,

$$\mathbf{FE}^{Z_0}(x, y) = \begin{pmatrix} A(x, y) \\ w(uv - 1)y + B(x, y) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

com

$$\begin{aligned} A(x, y) = & y^3(v\rho_{0,2} - \mu_{0,2}) + y^2(v\rho_{0,1} - \mu_{0,1}) + x^3\left(\frac{\rho_{2,0}}{u} - 2\mu_{2,0}\right) + \\ & x^2\left(-\mu_{1,0} + \frac{\rho_{1,0}}{u} + y\left(-2\mu_{1,1} - 2\mu_{2,0} + \frac{\rho_{1,1}}{u} + v\rho_{2,0}\right)\right) + \\ & x\left(y^2\left(-\mu_{0,2} - 2\mu_{1,1} + \frac{\rho_{0,2}}{u} + v\rho_{1,1}\right) + y\left(-\mu_{0,1} - \mu_{1,0} + \frac{\rho_{0,1}}{u} + v\rho_{1,0}\right)\right) + h.o.t \end{aligned}$$

e

$$B(x, y) = y^2 (v\eta_{0,1} - \kappa_{0,1}) + y^3 (v\eta_{0,2} - \kappa_{0,2}) + x^3 \left(\frac{\eta_{2,0}}{u} - \kappa_{2,0} \right) + \\ x^2 \left(-\kappa_{1,0} + \frac{\eta_{1,0}}{u} + y \left(-\kappa_{1,1} - \kappa_{2,0} + \frac{\eta_{1,1}}{u} + v\eta_{2,0} \right) \right) \\ x \left(y^2 \left(-\kappa_{0,2} - \kappa_{1,1} + \frac{\eta_{0,2}}{u} + v\eta_{1,1} \right) + y \left(-\kappa_{0,1} - \kappa_{1,0} + \frac{\eta_{0,1}}{u} + v\eta_{1,0} \right) \right) + h.o.t.$$

E $u < 0$ e $1 - uv \neq 0$, esta última condição nos garante que o autoespaço associado com o autovalor nulo está contido em $\text{dom}(\mathbf{F}^Z)$.

A solução da equação $\mathbf{F}_2^{Z_0}(x, y) = 0$, i.e., $w(uv - 1)y + B(x, y) = 0$, é localmente dada por

$$y(x) = \frac{2x^2 (u\kappa_{10} - \eta_{10})}{uw(uv - 1)} + \frac{6 \left(\kappa_{20} + \frac{(\eta_{10} - u\kappa_{10})(\eta_{01} + u(-\kappa_{01} - \kappa_{10} + v\eta_{10}))}{u^2 w(uv - 1)} - \frac{\eta_{20}}{u} \right)}{w(uv - 1)} x^3 + h.o.t.$$

logo a função $g(x) = A(x, y(x))$ possui a seguinte expressão

$$x^3 \left(-\mu_{20} + \frac{2(u\kappa_{10} - \eta_{10})(\rho_{01} - u\mu_{01} - u\mu_{10} + uv\rho_{10})}{u^2 w(uv - 1)} + \frac{\rho_{20}}{u} \right) + x^2 \left(\frac{\rho_{10}}{u} - \mu_{10} \right) + h.o.t.$$

Assim, para que a origem seja um ponto de equilíbrio semi-hiperbólico de codimensão dois é preciso que $\mu_{10} = \frac{\rho_{10}}{u}$ e

$$u\rho_{20} + \frac{2(\eta_{10} - u\kappa_{10})(-\rho_{01} + u\mu_{01} + (1 - uv)\rho_{10})}{w(uv - 1)} - \mu_{20}u^2 \neq 0.$$

Já estabelecido um sistema de coordenadas apropriado, temos que $\mathbf{F}\mathbf{E}^{Z_0}(0, 0) = 0$ e $\nabla \mathbf{F}\mathbf{E}^{Z_0}(0, 0) \neq 0$. Pela continuidade, existem vizinhanças B_1 , de Z_0 em $\Xi^r(0)$, e U , de 0 em Σ , de modo que $\nabla \mathbf{F}\mathbf{E}_2^Z(p) \neq 0$ para $(Z, p) \in B_1 \times U_1$. Seja $y = y(x, Z)$ a solução de $\mathbf{F}\mathbf{E}_2^Z(x, y) = 0$ e $\beta(Z, x) = \mathbf{F}\mathbf{E}_1^Z(x, y(x, Z))$.

Pela transversalidade das linhas de tangência de Z_0 segue que existem vizinhanças B_2 , de Z_0 em $\Xi^r(0)$, e U_2 , de 0 em Σ , e uma aplicação de classe C^{r-1} $P : (B_2, Z_0) \rightarrow (U_2, 0)$ que, a cada $Z = (X, Y)$, associa o ponto de intersecção de S_X e S_Y , da forma $P(Z) = (p_1(Z), p_2(Z), 0)$. Decorre, diretamente da definição do campo deslizando normalizado que $(p_1(Z), p_2(Z))$ é um dos seus pontos singulares, i.e., $\beta(Z, p_1(Z)) = 0$.

Seja a aplicação C^{r-2} , $\varepsilon : (B_1 \cup B_2, Z_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dada por $\varepsilon(Z) =$

$(\varepsilon_1(Z), \varepsilon_2(Z))$ onde

$$\varepsilon_1(Z) = \frac{\partial \beta}{\partial x}(Z, p_1(Z)) \quad \text{e} \quad \varepsilon_2(Z) = \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}(Z, p_1(Z)).$$

É claro que $Z \in B_1 \cap B_2$ tem uma $\omega_2(g)$ -singularidade e $U_1 \cap U_2$ se, e só se, $\varepsilon(Z) = 0$, com isto fica provado o Item (1).

O Item (2) é facilmente provado considerando a seguinte família em $B = B_1 \cap B_2$ $Z_{\alpha, \beta} = (X_{\alpha, \beta}, Y_{\alpha, \beta})$ com $Z_{0,0} = Z_0$, $X_{\alpha, \beta} = X_0 + (\alpha, 0, 0)$ e $Y_{\alpha, \beta} = (\beta x, 0, 0) + Y_0$. O que implica que $p(Z_{\alpha, \beta}) = (0, 0)$,

$$\varepsilon_1(Z_{\alpha, \beta}) = \frac{\alpha}{u} \quad \text{e} \quad \varepsilon_2(Z_{\alpha, \beta}) = -\frac{4\alpha v (\eta_{10} - u\kappa_{10})}{uw(uv - 1)} - 2\beta.$$

□

Lema 4.27. *Seja 0 uma $\omega_2(h)$ -singularidade de $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi^r(0)$. Então, existem vizinhanças B , de Z_0 em $\Xi^r(0)$, U , de 0 em Σ , e uma aplicação $C^{r-3} \varepsilon : (B, Z_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tais que:*

1. $Z \in B$ tem uma $\omega_2(h)$ -singularidade em U se, e só se, $\varepsilon(Z) = 0$.
2. $D\varepsilon(Z_0)$ é sobrejetiva.

Demonstração. Seja 0 uma $\omega_1(h)$ -singularidade de $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi^r(0)$, decorre da Definição 4.20 segue que podemos escolher coordenadas (x, y, z) , em torno de 0, de modo que $X(x, y, 0) = (a, b, x) + h.o.t$ e $Y(x, y, z) = (-b, cx + dy, y) + h.o.t$ com $ac \neq 0$. Usando a aplicação P estabelecida no Lema 4.25, definimos a aplicação C^{r-2} , $\varepsilon : (V, Z_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dada por $\varepsilon(Z) = (\varepsilon_1(Z), \varepsilon_2(Z))$ onde

$$\varepsilon_1(Z) = Y^2.f(P(Z)) \quad \text{e} \quad \varepsilon_2(Z) = (X.Y.f + Y.X.f)(P(Z)).$$

É claro que $Z \in B$ tem $\omega_2(h)$ -singularidade em U se, e só se, $\varepsilon(Z) = 0$, com isto fica provado o Item (1).

O Item (2) é facilmente provado considerando a seguinte família em B , $Z_{\alpha, \beta} = (X_{\alpha, \beta}, Y_{\alpha, \beta})$ com $Z_{0,0} = Z_0$, $X_{\alpha, \beta} = (a, b + \beta, x)$ e $Y_{\alpha, \beta} = (-b, \alpha + cx + dy, y)$ com $abc \neq 0$. Logo, $p(Z_{\alpha, \beta}) = (0, 0)$,

$$\varepsilon_1(Z_{\alpha, \beta}) = \alpha \quad \text{e} \quad \varepsilon_2(Z_{\alpha, \beta}) = \beta.$$

□

Lema 4.28. *Seja 0 uma $\omega_2(i)$ -singularidade de $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi^r(0)$. Então existem vizinhanças B , de Z_0 em $\Xi^r(0)$, U , de $0 \in \Sigma$, e uma aplicação C^{r-3} , $\varepsilon : (B, Z_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, tais que:*

1. $Z \in B$ tem $\omega_2(i)$ -singularidade em U se, e só se, $\varepsilon(Z) = 0$.
2. $D\varepsilon(Z_0)$ é sobrejetiva.

Demonstração. Seja 0 uma $\omega_2(h)$ -singularidade de $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi^r(0)$, decorre da Definição 4.20 segue que podemos escolher coordenadas (x, y, z) em torno de 0 de modo que $X_0(x, y, 0) = (c, d, x) + h.o.t$ e $Y_0(x, y, z) = (a, bx^2, y) + h.o.t$ com $cdab \neq 0, (a+d)(2a+d)(3a+d) \neq 0$. Portanto, $\mathbf{FE}^{Z_0} = (cy - ax, dy - bx^3)$.

Existem uma vizinhança B , de Z_0 em $\Xi^r(0)$, um intervalo aberto J contendo o zero e uma função C^r , $\kappa : U \times J \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $y = \kappa(Z, x)$ é solução da equação $Y.f(x, y, 0) = 0$ para $Z = (X, Y) \in B$, onde $\kappa(Z_0, 0) = 0$. Agora, consideremos a aplicação $\tau : B \times J \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tau(Z, x) = \mathbf{FE}^Z.(Y.h|_{\Sigma})(x, \kappa(Z, x), 0),$$

é fácil verificar que $\tau(Z_0, x) = -bx^3 + h.o.t$. Sejam, $x = \varphi(Z)$ a solução de $\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}(Z, x) = 0$, P como no Lema 4.25 e $x = h(Z)$ a solução local de $-(x, \kappa(Z, x)) - P(Z) = 0$. Agora, definamos a aplicação C^{r-2} , $\varepsilon : (B, Z_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dada por $\varepsilon(Z) = (\varepsilon_1(Z), \varepsilon_2(Z))$ onde

$$\varepsilon_1(Z) = \frac{\partial \tau}{\partial x}(Z, \varphi(Z)) \quad \text{e} \quad \varepsilon_2(Z) = h(Z) - \varphi(Z).$$

É claro que $Z \in B$ tem uma $\omega_2(i)$ -singularidade em U se, e somente se, $\varepsilon(Z) = 0$, com isto fica provado o Item (1).

O Item (2) é facilmente provado considerando a seguinte família em V : $Z_{\alpha, \beta} = (X_{\alpha, \beta}, Y_{\alpha, \beta})$ com $Z_{0,0} = Z_0$, $X_{\alpha, \beta} = X_0 + (0, 0, 3\alpha)$ e $Y_{\alpha, \beta} = Y_0 + (0, \beta, 0)$. Logo $\varphi(Z_{\alpha, \beta}) = 3\alpha^2 b - \beta$ e $h(Z_{\alpha, \beta}) = -3\alpha$,

$$\varepsilon_1(Z_{\alpha, \beta}) = 3\alpha^2 b - \beta \quad \text{e} \quad \varepsilon_2(Z_{\alpha, \beta}) = -4\alpha.$$

com isto concluímos a demonstração do lema. □

Lema 4.29. *Seja 0 uma $\omega_2(j)$ -singularidade de $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi^r$. Então, existem vizinhanças, B , de Z_0 em $\Xi^r(0)$, U , de 0 em $\mathbb{R}^3$, e uma aplicação C^{r-3} , $\varepsilon : (B, Z_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, tais que:*

1. $Z \in B$ tem uma $\omega_2(j)$ -singularidade se, e somente se, $\varepsilon(Z) = 0$.
2. $D\varepsilon(Z_0)$ é sobrejetiva.

Demonstração. Seja 0 uma $\omega_2(j)$ -singularidade de $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi^r(0)$, decorre da Definição 4.22 que podemos escolher coordenadas (x, y, z) , em torno de 0, que $Y(x, y, 0) = (ax + by, cx + dy, y) + h.o.t$ e $X(x, y, z) = (e, f, x) + h.o.t$ com $efc \neq 0$, $(ce - af) \neq 0$.

Considerando P, κ, h como no Lema 4.28, definimos a aplicação $C^{r-2}, \varepsilon : (V, Z_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dada por $\varepsilon(Z) = (\varepsilon_1(Z), \varepsilon_2(Z))$ onde

$$\varepsilon_1(Z) = Y^2 \cdot f(\kappa(Z, h(Z))) \quad \text{e} \quad \varepsilon_2(Z) = Y \cdot X \cdot f(\kappa(Z, h(Z))).$$

Observemos que o conjunto $\{\nabla f, \nabla(X \cdot f), \nabla(Y \cdot f)\}$ em $P(Z)$ é linearmente independente. Portanto, $Z \in B$ tem uma $\omega_2(j)$ -singularidade em U se, e somente se, $\varepsilon(Z) = 0$, com isto fica provado o Item (1).

O Item (2) é facilmente provado considerando a seguinte família em B : $Z_{\alpha, \beta} = (X_{\alpha, \beta}, Y_{\alpha, \beta})$ com $Z_{0,0} = Z_0$, $X_{\alpha, \beta} = X_0$ e $Y_{\alpha, \beta} = Y_0 + (\alpha, \beta, 0)$. Logo $p(Z_{\alpha, \beta}) = (0, 0)$,

$$\varepsilon_1(Z_{\alpha, \beta}) = \beta \quad \text{e} \quad \varepsilon_2(Z_{\alpha, \beta}) = \alpha.$$

com isto fica provado o lema. □

Lema 4.30. *Seja 0 uma $\omega_2(k)$ -singularidade de $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi^r(0)$. Então, existem vizinhanças B , de Z_0 em $\Xi^r(0)$, U , de 0 in $\mathbb{R}^3$, e uma aplicação $C^{r-3}, \varepsilon : (B, Z_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, tais que:*

1. $Z \in B$ tem uma $\omega_2(k)$ -singularidade se, e só se, $\varepsilon(Z) = 0$.
2. $D\varepsilon(Z_0)$ é sobrejetiva.

Demonstração. Segue do Teorema B em [29]. □

4.4.2 Equivalência Topológica

Para cada $\lambda \in \Lambda$ onde $\Lambda = \{a, b, c, d, e, f, g, i, j, k\}$, existem diferentes classes de $\omega_2(\lambda)$ -singularidades. A seguir caracterizamos cada uma destas classes para $\lambda \in \{b, f, g, h, i, j, k\}$, as restantes tem sido amplamente estudadas em [30] e [29].

Caso $\lambda = b$, segue do Teorema D, em [6], que existe um sistema de coordenadas (x, y, z) , em torno da singularidade, de modo que $f(x, y, z) = z$, $Y(0, 0, 0) = (a, b, c)$ com $c \neq 0$ e

1. (Goose) $X(x, y, z) = (1, 0, -3x^2 - y^3)$,
2. (Gull) $X(x, y, z) = (1, 0, 4x^3 + exy + y^2)$,
3. (Butterfly) $X = (x, y, z) = (1, 0, 5x^4 + \epsilon 3x^2y + y)$, com $\epsilon = \pm 1$.

Levando em consideração o sistema de coordenadas introduzido acima, diremos que

1. 0 é uma $\omega_2(b)_{\eta,1}$ -singularidade de Z se 0 é uma $\omega_2(b)$ -singularidade, $\eta = \text{sgn}(Y^3.f(p))$ e 0 é um Goose de X .
2. 0 é uma $\omega_2(b)_{\eta,2}$ -singularidade de Z se 0 é uma $\omega_2(b)$ -singularidade, $\eta = \text{sgn}(Y^3.f(p))$ e 0 é um Gull de X .
3. 0 é uma $\omega_2(b)_{\eta,\sigma,3}$ -singularidade de Z se 0 é uma $\omega_2(b,3)$ -singularidade, $\eta = \text{sgn}(Y^3.f(p))$, $\sigma = \epsilon$ e 0 é um "butterfly" de X ,

Para $\lambda \in \{f, g, h, i, j\}$ assumimos que a singularidade está no sistema de coordenadas estabelecido nos Lemas 4.25, 4.26, 4.27, 4.28 e 4.29, respectivamente. Seja $Z = (X, Y) \in \Xi^r(0)$

1. 0 é uma $\omega_2(f)_{\eta,\sigma,\varsigma}$ -singularidade de Z se 0 é uma $\omega_2(f)$ -singularidade e

$$(\eta, \sigma, \varsigma) = (\text{sgn}(X^2.f), \text{sgn}(Y.X.f), \text{sgn}(Y^3.f))(p).$$

2. 0 é uma $\omega_2(g)_{\eta,\sigma,\varsigma,\nu}$ -singularidade de Z se 0 é uma $\omega_2(g)$ -singularidade e

$$(\eta, \sigma, \varsigma, \nu) = (\text{sgn}(Y^2.f), \text{sgn}(Y.X.f), \text{sgn}(X.Y.f - Y.X.f), \text{sgn}(B(X, Y))),$$

com $B(X, Y)$ dada por (4.2).

3. 0 é uma $\omega_2(h)_{\eta,\sigma,\varsigma}$ -singularidade de Z se 0 é uma $\omega_2(h)$ -singularidade e

$$(\eta, \sigma, \varsigma) = (\text{sgn}(X^2.f), \text{sgn}(Y^3.f), \text{sgn}(X.Y.f)).$$

4. 0 é uma $\omega_2(i)_{\eta,\sigma,\varsigma,\nu,\mu}$ -singularidade de Z se 0 é uma $\omega_2(i)$ -singularidade e

$$(\eta, \sigma, \varsigma, \nu, \mu) = (\text{sgn}(Y.X.f), \text{sgn}(X^2.f), \text{sgn}(X.Y.f + Y.X.f), \text{sgn}(3Y.X.f - X.Y.f)).$$

5. 0 é uma $\omega_2(j)_{\eta,\sigma,\varsigma,\nu,\mu}$ -singularidade de Z se 0 é uma $\omega_2(i)$ -singularidade e

$$(\eta, \sigma, \varsigma, \nu, \mu) = (\text{sgn}(X.Y.f), \text{sgn}(X^2.f), \text{sgn}(H_{Y^2.f}.Y.f), \text{sgn}((H_{Y.X.f}.Y.f)(X.Y.f) - (H_{Y^2.f}.Y.f)(X^2.f))).$$

Para estabelecer a equivalência topológica entre dois elementos de $\Xi^r(0)$, Z e Z_0 , que exibem uma $\omega_2(\lambda)$ -singularidade em 0, primeiro determinamos o compor-

tamento qualitativo das órbitas do campo deslizante de Z_0 em torno de 0, posteriormente escolhemos uma vizinhança apropriada U , de 0 em Σ . Finalmente identificamos uma estratificação associada com Z_0 e a usamos para construir os homeomorfismos.

Na sequência, ilustramos a construção do homeomorfismo para uma $\omega_2(h)$ -singularidade, o procedimento é análogo para cada umas das outras singularidades. Logo, de forma ilustrativa, determinamos uma estratificação para $\omega_2(\lambda)$ -singularidade com $\lambda \in \{f, g, i, j\}$.

Lema 4.31. *Sejam $Z = (X, Y)$, $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi^r(0)$. Se 0 é uma $\omega_2(h)_{\eta, \sigma, \varsigma}$ -singularidade de Z e Z_0 respectivamente, com $\eta, \sigma, \varsigma \in \{1, -1\}$ fixos. Então, Z é topologicamente equivalente, em 0, a Z_0 .*

Demonstração. Seja 0 uma $\omega_2(h)$ -singularidade de $Z_0 = (X_0, Y_0)$. Usando as coordenadas locais estabelecidas no Lema 4.27, temos que

$$\mathbf{FE}^{Z_0}(x, y) = (ay + bx, y(b - dx) - cx^2)$$

e $\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0}) = \{(x, y) | xy < 0\}$. Portanto, 0 é uma singularidade do tipo nó para $\mathbf{FE}^{Z_0}$ com as seguintes propriedades: (i) b é único autovalor de $d\mathbf{FE}^{Z_0}(0, 0)$; (ii) A matriz $d\mathbf{FE}^{Z_0}$ é não diagonalizável; (iii) O auto-espaço associado é tangente a S_Y , $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, na origem; (iv) $X^2.f(0) = a$, $Y.X.f(0) = -b$ e $Y^3.f(0) = -bc$. Estes parâmetros, vão determinar o tipo de singularidade e a posição relativa das variedades distinguíveis em relação as linhas de dobra.

Caso 0 seja uma $\omega_2(h)_{1, -1, 1}$ -singularidade, i.e., $a, -b, c > 0$, segue que 0 é um nó instável de $\mathbf{FE}^{Z_0}$. Para determinar o comportamento qualitativo das suas órbitas, em torno de 0, em $\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0})$ usamos o blowing up polar $(x, y) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$. Nestas coordenadas temos que

$$\mathbf{FE}^{Z_0}(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \rho(\sin(\theta) \cos(\theta)(a - \rho(c \cos(\theta) + d \sin(\theta))) + b) + h.o.t \\ -a \sin^2(\theta) - c\rho \cos^3(\theta) - d\rho \sin(\theta) \cos^2(\theta) + h.o.t \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Em $S^1 \times \{0\}$ o campo normalizado (4.3) exibe dois pontos de equilíbrio, $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$, que são semi-hiperbólicos do tipo sela-nó. O comportamento local em torno de 0 em $\overline{\text{dom}(\mathbf{F}^Z)}$ é ilustrado na Figura 4.2.

Já que 0 é um nó instável, localmente existe uma vizinhança U , de 0 em $\mathbb{R}^2$, de modo que ∂U é transversal ao fluxo de $\mathbf{FE}^{Z_0}$ e às linhas de dobra. Seja $U' = \text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0}) \cap U$, logo U' é um aberto de $\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0})$ com a topologia induzida.

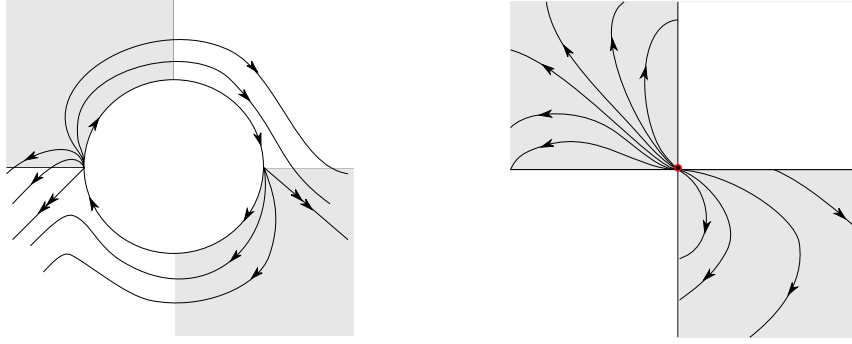


Figura 4.2: (a) *Blowing-up Polar* em torno de $\omega_2(h)_{1,-1,1}$ -singularidade. (b) Configuração das órbitas de $\mathbf{F}^Z$ em torno de uma $\omega_2(h)_{1,-1,1}$ -singularidade,

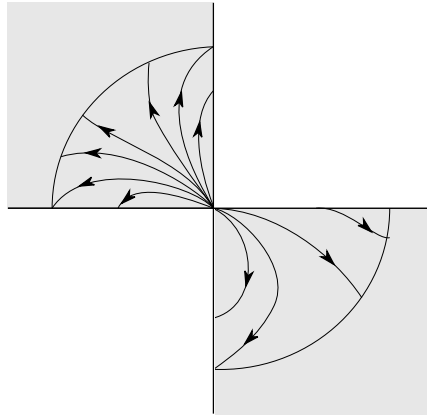


Figura 4.3: Vizinhança U' para uma $\omega_2(h)_{1,-1,1}$ -singularidade em $\text{dom}(\mathbf{F}^Z)$.

Agora, distinguiamos os seguintes elementos em $\partial U'$ para Z_0 :

1. $\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = (\partial U \cup S_X) \cup (\partial U \cap S_Y)$;
2. $\gamma^\pm(p_i) \cap U'$ para $i = 1, \dots, 4$;
3. $S_X \cap S_Y$;
4. $\gamma \cap U'$,
5. $\gamma \cap \partial U'$;
6. $\partial U'$.

onde γ a órbita que corresponde a variedade instável do ponto $(0, 0)$ no blowing up polar, ver Figura 4.3.

Seja Z com uma $\omega_2(h)_{1,1,1}$ -singularidade em 0 , é possível determinar uma vizinhança U'_1 , de 0 em $\text{dom}(\mathbf{F}^Z)$, com os mesmos elementos distinguidos sobre $\partial U'_1$. Assim, definimos o homeomorfismo de $\partial U'$ em $\partial U'_1$ impondo que os elementos distin-

guidos Z_0 sejam levados nos correspondentes de Z_1 , e então estendemos para U' aplicando, por exemplo, a técnica de comprimento de arco que preservam determinada proporção. $\square$

Lema 4.32. *Sejam $0 \in \Sigma$ e $Z = (X, Y)$, $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi^r(0)$. Se 0 é uma $\omega_2(b)_{\eta,1}$ -singularidade de Z e Z_0 , com $\eta \in \{1, -1\}$ fixos. Então, Z é topologicamente equivalente a Z_0 em 0 .*

Demonstração. Seja $0 \in \Sigma$ uma $\omega_2(b)$ -singularidade de $Z_0 = (X_0, Y_0)$, é possível escolher coordenadas (x, y, z) , ao redor de 0 , de modo que $X_0(x, y, z) = (1, 0, -3x^2 - y^3)$ e $Y_0(0, 0, 0) = (a, b, c)$ com $c \neq 0$. Assim, temos que

$$\mathbf{FE}^{Z_0}(x, y) = (c - a(-3x^2 - y^3), -b(-3x^2 - y^3))$$

e $\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0}) = \{(x, y) | c(-3x^2 - y^3) < 0\}$. Portanto, $\mathbf{FE}^{Z_0}(0) \neq 0$ e $S_X = g_1^{-1}(0) \cup g_2^{-1}(0)$ onde

$$g_1(x, y) = x + \frac{Iy^{3/2}}{\sqrt{3}} \quad e \quad g_2(x, y) = x - \frac{Iy^{3/2}}{\sqrt{3}},$$

para $(x, y) \in D = \mathbb{R} \times (-\infty, 0]$, onde I é a unidade imaginária. Para determinar o comportamento de $\mathbf{FE}^Z$, em torno do 0 , em $\overline{\text{dom}(\mathbf{F}^Z)}$ é preciso estabelecer o tipo de “contato” de $\mathbf{FE}^Z$ e S_X na origem. Observe que

$$\lim_{(x,y) \in D, (x,y) \rightarrow (0,0)} \nabla g_1(x, y) = \lim_{(x,y) \in D, (x,y) \rightarrow (0,0)} \nabla g_2(x, y) = (1, 0)$$

e que $\mathbf{FE}^{Z_0}(0) = (c, 0)$. Usando estes dois fatos e o Teorema do Fluxo Tubular, segue que localmente toda órbita de $\mathbf{FE}^Z$ com condição inicial em $g_1^{-1}(0)$ intersecta uma única vez $g_2^{-1}(0)$. Se 0 é uma $\omega_2(b)_{1,1}$ -singularidade, temos que o comportamento local de $\mathbf{FE}^Z$, em torno de 0 , em $\overline{\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0})}$ é ilustrado na Figura 4.5.

Como 0 é um ponto regular de $d\mathbf{FE}^{Z_0}$, localmente existe uma caixa de fluxo em torno deste ponto U . Logo $U' = \text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0}) \cap U$ é um aberto de $\text{dom}(\mathbf{F}^Z)$ com a topologia induzida, agora definimos uma estratificação de U' para Z_0

1. $\{p_1, p_2\} = (\partial U \cup S_X)$;
2. 0 , o ponto não regular de S_X ;
3. $\partial U'$.

Levando em consideração estes elementos distinguidos e usando um argumento ao da prova da demonstração da Proposição 4.31, segue o resultado. $\square$

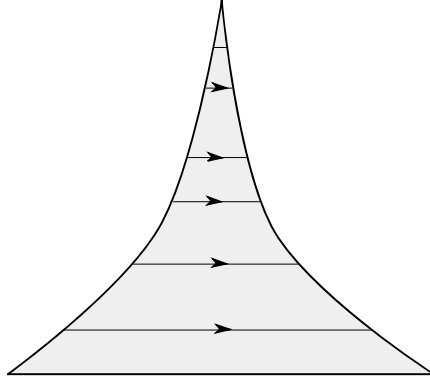


Figura 4.4: Comportamento qualitativo das órbitas em torno de uma $\omega_2(b)_{1,1}$ -singularidade.

Lema 4.33. *Sejam $0 \in \Sigma$ e $Z = (X, Y)$, $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi^r(0)$. Se 0 é uma $\omega_2(b)_{\eta,2}$ -singularidade de Z e Z_0 , com $\eta \in \{1, -1\}$. Então, Z é topologicamente equivalente a Z_0 em 0 .*

Demonstração. Seja 0 uma $\omega_2(b)_{\eta,2}$ -singularidade de Z_0 , é possível escolher um sistema de coordenadas (x, y, z) ao redor de 0 de modo que $X(x, y, z) = (1, 0, -3x^2 - y^3)$ e $Y(0, 0, 0) = (a, b, c)$ com $c \neq 0$. Assim, temos que

$$\mathbf{FE}^{Z_0}(x, y) = (c - a(-3x^2 - y^3), -b(-3x^2 - y^3))$$

e $\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0}) = \{(x, y) | c(-3x^2 - y^3) < 0\}$. Portanto, $\mathbf{FE}^{Z_0}(0) \neq 0$ e

$$S_X = g_1^{-1}(0) \cup g_2^{-1}(0)$$

onde g_i são dada por

$$g_1(x, y) = y - \frac{1}{2}(-\sqrt{9x^2 - 16x^3} - 3x),$$

$$g_2(x, y) = y - \frac{1}{2}(\sqrt{9x^2 - 16x^3} - 3x),$$

é imediato que $G_1 = g_1^{-1}(0) \cap \mathbb{R}^+$, $G_2 = g_1^{-1}(0) \cap \mathbb{R}^-$, $G_3 = g_2^{-1}(0) \cap \mathbb{R}^+$ e $G_4 = g_2^{-1}(0) \cap \mathbb{R}^-$ são variedades suaves e $0 \in \partial G_i$ para $i = 1, \dots, 4$.

De forma similar a Proposição 4.32, para determinar o comportamento de $\mathbf{FE}^Z$, em torno do 0 em $\overline{(\text{dom}(\mathbf{F}^Z))}$, é preciso entender o tipo de “contato” de $\mathbf{FE}^Z$ e S_X na origem. Com esse propósito, estudamos os limites das derivadas de Lie de g_1, g_2 ao longo de $\mathbf{FE}^{Z_0}$ em 0 restritos a cada variedade G_i para $i = 1, \dots, 4$. Logo,

$$\lim_{(x,y) \in G_1, (x,y) \rightarrow (0,0)} \nabla \mathbf{FE}^{Z_0} \cdot g_1(x, y) = 3c,$$

$$\lim_{(x,y) \in G2, (x,y) \rightarrow (0,0)} \nabla \mathbf{F} \mathbf{E}^{Z_0} . g_1(x, y) = 0,$$

$$\lim_{(x,y) \in G2, (x,y) \rightarrow (0,0)} \nabla (\mathbf{F} \mathbf{E}^{Z_0})^2 . g_1(x, y) = \frac{8c^2}{3},$$

$$\lim_{(x,y) \in G4, (x,y) \rightarrow (0,0)} \nabla \mathbf{F} \mathbf{E}^{Z_0} . g_2(x, y) = 3c,$$

$$\lim_{(x,y) \in G3, (x,y) \rightarrow (0,0)} \nabla \mathbf{F} \mathbf{E}^{Z_0} . g_2(x, y) = 0,$$

$$\lim_{(x,y) \in G2, (x,y) \rightarrow (0,0)} \nabla (\mathbf{F} \mathbf{E}^{Z_0})^2 . g_2(x, y) = -\frac{8c^2}{3}$$

e $\mathbf{F} \mathbf{E}^{Z_0}(0) = (c, 0)$. Se 0 seja uma $\omega_2(b)_{1,2}$ -singularidade, temos que o comportamento local de $\mathbf{F} \mathbf{E}^Z$ em torno da origem em $\overline{\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0})}$ é ilustrado na Figura 4.5

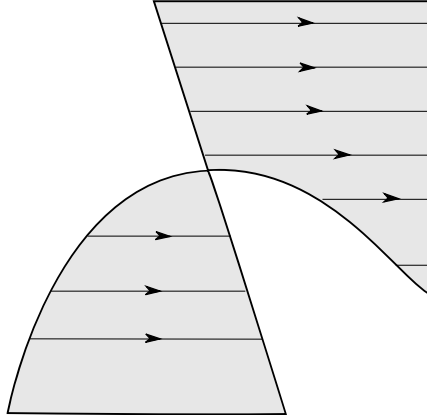


Figura 4.5: Comportamento qualitativo das órbitas em torno de uma $\omega_2(b)_{1,2}$ -singularidade.

Como 0 é um ponto regular de $\mathbf{F} \mathbf{E}^{Z_0}$ e este é um campo suave numa vizinhança deste ponto, então existe uma caixa de fluxo, em torno de 0, em Σ , U . Seja, $U' = \text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0}) \cap U$, assim U' é um aberto de $\text{dom}(\mathbf{F}^Z)$ com a topologia induzida, agora distinguiamos os seguintes elementos em $\partial U'$ para Z_0 :

1. $\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = (\partial U \cup S_X)$,
2. 0, é o ponto não regular de S_X ,
3. $\partial U'$.

Levando em consideração estes elementos distinguidos e usando um argumento ao da prova da demonstração da Proposição 4.31, segue o resultado. $\square$

Lema 4.34. *Sejam $0 \in \Sigma$ e $Z = (X, Y)$, $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi^r(0)$. Se 0 é $\omega_2(b)_{\eta,\sigma,3}$ -singularidade de Z e Z_0 , com $\eta, \sigma \in \{1, -1\}$. Então, Z é topologicamente equivalente a Z_0 em 0 .*

Demonstração. Seja 0 uma $\omega_2(b)_{\eta,\sigma,3}$ -singularidade de Z_0 , então existe um sistema de coordenadas (x, y, z) , ao redor de 0 , de modo que $X(x, y, z) = (1, 0, 5x^4 + 3x^2y + y)$ e $Y(0, 0, 0) = (a, b, c)$ com $c \neq 0$. Assim, temos que

$$\mathbf{FE}^{Z_0}(x, y) = (c - a(5x^4 + 3x^2y + y), -b(5x^4 + 3x^2y + y)),$$

$\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0}) = \{(x, y) | c(-3x^2 - y^3) < 0\}$ e $S_X = \{(x, y) | 5x^4 + 3x^2y + y = 0\}$. Determinamos o comportamento de $\mathbf{FE}^Z$, em torno do 0 , em $\overline{\text{dom}(\mathbf{F}^Z)}$, estabelecendo o “contato” de $\mathbf{FE}^Z$ e S_X na origem, se $g = 5x^4 + 3x^2y + y$ obtemos que:

$$\mathbf{FE}^{Z_0}.g(0) = (\mathbf{FE}^{Z_0})^2.g(0) = (\mathbf{FE}^{Z_0})^3.g(0) = 0, \quad (\mathbf{FE}^{Z_0})^2.g(0) = 120c^4 \neq 0$$

e $\mathbf{FE}^{Z_0}(0) = (c, 0)$, i.e., que o campo deslizante tem uma tangência de ordem 4 com S_X .

Caso 0 seja uma singularidade do tipo $\omega_2(b)_{1,-1,3}$, temos que o comportamento de $\mathbf{FE}^Z$, em torno de 0 , em $\overline{\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0})}$ é ilustrado Figura 4.6.

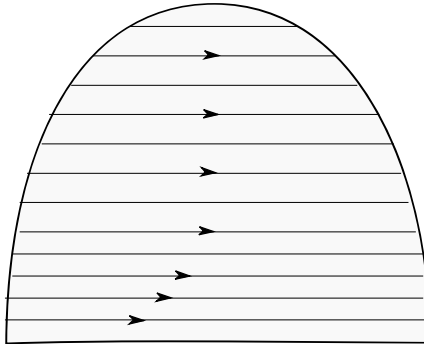


Figura 4.6: Comportamento qualitativo das órbitas em torno de uma $\omega_2(b)_{1,-1,3}$ -singularidade.

Como 0 é um ponto regular de $\mathbf{FE}^{Z_0}$, existe uma caixa de fluxo, em torno de 0 , U . Seja $U' = \text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0}) \cap U$, então U' é um aberto de $\text{dom}(\mathbf{F}^Z)$ com a topologia induzida, agora distinguiamos os seguintes elementos em $\partial U'$ para Z_0 :

1. $\{p_1, p_2\} = (\partial U \cup S_X)$,
2. 0 , é o ponto de tangencia de ordem 4 de $\mathbf{FE}^Z$ com S_X ,
3. $\partial U'$.

Levando em consideração estes elementos distinguidos e usando um argumento ao da prova da demonstração da Proposição 4.31, segue o resultado. $\square$

Lema 4.35. *Sejam $0 \in \Sigma$ e $Z = (X, Y)$, $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi^r(0)$. Se 0 é uma $\omega_2(f)_{\eta, \sigma, \varsigma, \nu}$ -singularidade de Z e Z_0 , com $\eta, \sigma, \varsigma, \nu \in \{1, -1\}$. Então, Z é topologicamente equivalente a Z_0 , em 0 .*

Demonstração. Seja $0 \in \Sigma$ é uma $\omega_2(f)$ -singularidade de $Z_0 = (X_0, Y_0)$. Nas coordenadas locais estabelecidas na Proposição 4.25 temos que:

$$\mathbf{FE}^{Z_0}(x, y) = (ay - bx, -2by - x(cy + dx))$$

e $\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0}) = \{(x, y) | xy < 0\}$. Então, 0 é um ponto de equilíbrio do tipo nó de $\mathbf{FE}^{Z_0}$, com as seguintes propriedades: (i) Os autovalores de $d\mathbf{FE}^{Z_0}(0)$ são diferentes; (ii) o autoespaço associado com autovalor de menor módulo é tangente a linha S_Y na origem; (iii) o outro auto-espaço é transversal a S_X e S_Y e tangente a $y = -a/bx$ em 0 ; (iv) $X^2.f(0) = a$, $Y.X.f(0) = b$ e $Y^3.f(0) = bd$. Portanto, estes três valores vão determinar o tipo de nó e a posição relativas das suas variedades distinguíveis com as linhas de dobra.

Caso 0 seja $\omega_2(f)_{1, -1, 1}$ -singularidade, i.e., $a > 0, b < 0$ e $d > 0$. Para determinar o comportamento qualitativo das órbitas do campo, em torno da singularidade, em $\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0})$, usamos o blowing up polar $(x, y) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$. Nestas coordenadas temos que:

$$\mathbf{FE}^{Z_0}(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \rho (\sin(\theta) \cos(\theta)(a - c\rho \sin(\theta)) + \cos^2(\theta)(-(b + d\rho \sin(\theta))) \\ -2b \sin^2(\theta)) + h.o.t \\ -a \sin^2(\theta) - \sin(\theta) \cos(\theta)(b + c\rho \cos(\theta)) - d\rho \cos^3(\theta) + h.o.t \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Logo, em $S^1 \times \{0\}$ o campo regularizado exibe quatro pontos de equilíbrio, $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(\arctan(-b/a), 0)$ e $(\arctan(-b/a) + \pi, 0)$, que são hiperbólicos, sendo os dois primeiras do tipo nó, com autovalores iguais e matriz não diagonalizável, e os outros dois do tipo sela. O comportamento de $\mathbf{FE}^Z$, em torno de 0 , em $\overline{\text{dom } \mathbf{F}^{Z_0}}$ é ilustrado na Figura 4.7.

Como 0 é um nó de $\mathbf{FE}^{Z_0}$, e já que este campo é suave numa vizinhança da origem em Σ , existe, localmente, uma vizinhança U de 0 em Σ , tal que ∂U é transversal ao fluxo de $\mathbf{FE}^{Z_0}$ e às linhas de dobra. Seja $U' = \text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0}) \cap U$, assim este conjunto é um

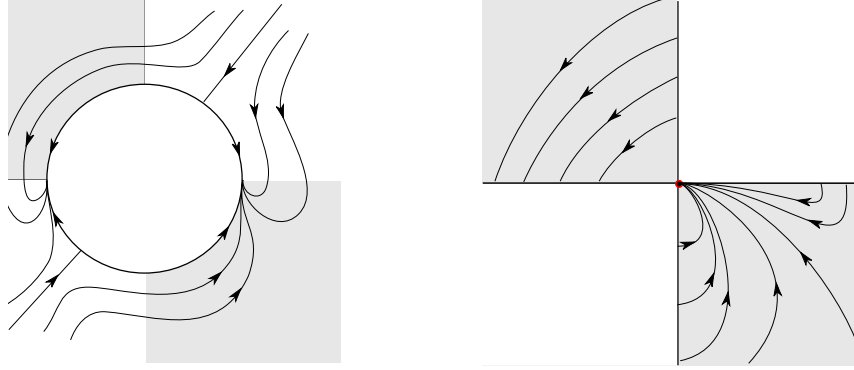


Figura 4.7: (a) *Blowing-up polar em torno de $\omega_2(h)_{1,-1,1}$ -singularidade.* (b) *Configuração das órbitas de $\mathbf{FE}^Z$ em torno de uma $\omega_2(h)_{1,-1,1}$ -singularidade,*

aberto de $\text{dom}(\mathbf{F}^Z)$ com a topologia induzida. Identificamos elementos distinguíveis em $\partial U'$ para Z_0 :

1. $\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = (\partial U' \cap S_X) \cup (\partial U' \cap S_Y)$;
2. $\gamma^+(p_i) \cap U'$ para $i = 1, \dots, 4$;
3. $S_X \cap S_Y$;
4. $\partial U'$.

onde $\gamma^+(q)$ é a trajetória positiva de $\mathbf{FE}^Z$ contida em $\overline{\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0})}$ passando por q .

Levando em consideração estes elementos distinguidos e usando um argumento ao da prova da demonstração da Proposição 4.31, segue o resultado. $\square$

Lema 4.36. *Sejam $0 \in \Sigma$ e $Z = (X, Y)$, $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi^r(0)$. Se 0 é uma $\omega_2(i)_{\eta,\sigma,\varsigma,\nu}$ -singularidade de Z e Z_0 , com $\eta, \sigma, \varsigma, \nu \in \{1, -1\}$. Então, Z é topologicamente equivalente a Z_0 , em 0 .*

Demonstração. Seja $0 \in \Sigma$ uma $\omega_2(i)$ -singularidade de $Z_0 = (X_0, Y_0)$. Nas coordenadas locais da Proposição 4.28 temos que:

$$\mathbf{FE}^{Z_0}(x, y) = (-ax + cy, -bx^3 + dy)$$

e $\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0}) = \{(x, y) | xy < 0\}$. Então, 0 é um ponto de equilíbrio hiperbólico de $\mathbf{FE}^{Z_0}$, com as seguintes propriedades: (i) os autovalores de $d\mathbf{FE}^{Z_0}(0, 0)$ são reais, diferentes e não nulos; (ii) um dos auto-espacos é tangente a $y = 0$, o outro é transversal a S_X e S_Y e tangente à curva $(c/(a+d)t, t)$ em 0 ; (iv) existe uma variedade tangente a S_Y no zero dada por

$$y(x) = \frac{3b}{3a+d}x^3 + h.o.t;$$

(v) $Y.X.f(0) = a$, $X^2.f(0) = c$, $X.Y.f(0) = d$. Portanto, os parâmetros c , a , $a+d$ e $3a+d$ vão determinar o tipo de singularidade e a posição relativa das variedades distinguíveis em relação as linhas de dobra. Caso 0 seja uma $\omega_2(i)_{1,1,1,1}$ -singularidade, i.e., $a, b, c, d > 0$, temos que 0 é um ponto de equilíbrio do tipo sela de $\mathbf{F}^{Z_0}$ e as suas variedades distinguíveis não estão contidas em $\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0})$. Em particular, o comportamento qualitativo das órbitas em torno da singularidade é ilustrado na Figura 4.8.

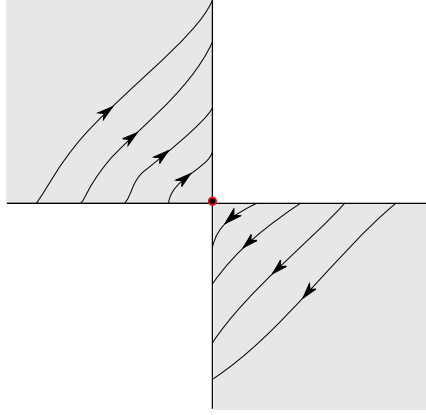


Figura 4.8: Configuração das órbitas de $\mathbf{F}^Z$ em torno de uma $\omega_2(i)_{1,1,1,1}$ -singularidade.

Como 0 é um ponto de equilíbrio do tipo sela de $\mathbf{F}^{Z_0}$, então existe uma vizinhança de 0 em Σ , de modo que ∂U é transversal ao fluxo de $\mathbf{F}^{Z_0}$ e às linhas de dobra, exceto em 4 pontos que não estão contidos em $\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0})$. Seja $U' = \text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0}) \cap U$ e identificamos elementos distinguíveis em $\partial U'$ para Z_0 :

1. $\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = (\partial U \cup S_X) \cup (\partial U \cap S_Y)$;
2. $\gamma^+(p_i) \cap \text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0})$ para $i = 1, \dots, 4$;
3. $S_X \cap S_Y$;
4. $\partial U'$;

onde $\gamma^+(q)$ é a trajetória positiva de $\mathbf{F}^Z$ contida em $\overline{\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0})}$ passando por q .

Levando em consideração estes elementos distinguidos e usando um argumento ao da prova da demonstração da Proposição 4.31, segue o resultado. $\square$

Lema 4.37. *Seja $0 \in \Sigma$ e $Z = (X, Y)$, $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi^r(0)$. Se 0 é uma $\omega_2(g)_{\eta, \sigma, \varsigma, \nu}$ -singularidade de Z e Z_0 respectivamente, com $\eta, \sigma, \varsigma \in \{1, -1\}$. Então, Z é topologicamente equivalente a Z_0 em 0.*

Demonstração. Nas coordenadas da Proposição 4.26, temos que o campo deslizante é dado por (4.2) e $\text{dom}(\mathbf{F}^Z) = \{(x, y) : (x + y)(x/u + vy) < 0\}$. O que implica que, 0 é uma singularidade semi-hiperbólica, com as seguintes propriedades: (i) os autovalores

de $d\mathbf{F}\mathbf{E}^{Z_0}(0)$ são 0 e $w(uv - 1) \neq 0$; (iii) os auto-espacos associados a 0 e $w(uv - 1)$ são transversais as linhas de dobra em 0 e são gerados por $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respectivamente; (iv) a dinâmica do fluxo sobre a variedade central é determinada pela seguinte equação diferencial $\dot{x} = Bx^3 + h.o.t$ com

$$B = u\rho_{20} + \frac{2(\eta_{10} - u\kappa_{10})(-\rho_{01} + u\mu_{01} + (1 - uv)\rho_{10})}{w(uv - 1)} - \mu_{20}u^2 \neq 0;$$

(v) $Y^2.f(0) = vw$, $Y.X.f(0) = w$ e $X.Y.f(0) = uvw$. Portanto, os parâmetros $vw, w, -w + uvw, B$ vão determinar o tipo de singularidade e a posição relativa das variedades distinguíveis em relação as linhas de dobra. Caso 0 seja uma singularidade do tipo $\omega_2(g)_{-1,-1,-1,1}$ para Z_0 , segue que 0 é uma sela topológica para $\mathbf{F}\mathbf{E}^{Z_0}$ e a sua variedade estável não está contida em $\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0})$ e a central está contida em $\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0})$. Como no caso anterior, o comportamento qualitativo das órbitas em torno da singularidade é simples de determinar, pois ele é completamente determinado pelas variedades central e estável (ou instável), e é ilustrado na Figura 4.9.

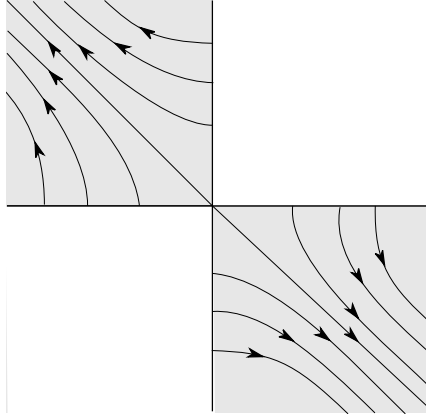


Figura 4.9: Configuração das órbitas de $\mathbf{F}\mathbf{E}^Z$ em torno de uma $\omega_2(g)_{-1,-1,-1,1}$.

Como 0 é uma sela topológica de $\mathbf{F}\mathbf{E}^Z$, localmente existe uma vizinhança de 0 em Σ , tal que ∂U é transversal ao fluxo de $\mathbf{F}\mathbf{E}^{Z_0}$ e as linhas de dobra, exceto em 4 pontos que não estão contidos em $\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0})$. Seja $U' = \text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0}) \cap U$ e identificamos

1. $\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = (\partial U \cup S_X) \cup (\partial U \cap S_Y)$;
2. $\gamma^+(p_i) \cap \text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0})$ para $i = 1, \dots, 4$;
3. $S_X \cap S_Y$;
4. $U^c(0)$;
5. $\partial U' \cap U^c(0)$;
6. $\partial U'$.

onde $\gamma^+(q)$ é a trajetória positiva de $\mathbf{F}\mathbf{E}^Z$ contida em $\overline{\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0})}$ passando por q .

Levando em consideração estes elementos distinguidos e usando um argumento ao da prova da demonstração da Proposição 4.31, segue o resultado. $\square$

Lema 4.38. *Sejam $0 \in \Sigma$ e $Z = (X, Y)$, $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi^r(0)$. Se 0 é uma $\omega_2(j)_{\eta, \sigma, \varsigma}$ -singularidade de Z e Z_0 , com $\eta, \sigma, \varsigma \in \{1, -1\}$. Então, Z é topologicamente equivalente a Z_0 , em 0 .*

Demonstração. Nas coordenadas da Proposição 4.29 temos que:

$$\mathbf{FE}^{Z_0}(x, y) = (ey - x(ax + by), fy - x(cx + dy))$$

e $\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0}) = \{(x, y) | xy < 0\}$. Logo, 0 é um ponto de equilíbrio semi-hiperbólico de $\mathbf{FE}^{Z_0}$, com as seguintes propriedades: (i) 0 é uma sela-nó de $\mathbf{FE}^{Z_0}$; (ii) os autovalores de $d\mathbf{FE}^{Z_0}(0)$ são 0 e $f \neq 0$; (iii) O auto-espaço de $d\mathbf{FE}^{Z_0}(0)$ associado com autovalor nulo é tangente a S_Y na origem; (iv) o auto-espaço de $d\mathbf{FE}^{Z_0}(0)$ associado com f é transversal a S_X e S_Y e tangente a $y = (e/f)x$ em 0 ; (v) a variedade central localmente é dada por

$$y(x) = \frac{c}{f}x^2 + h.o.t;$$

(vi) A dinâmica do fluxo sobre esta variedade é determinada por

$$\dot{x} = \left(-a + \frac{ce}{f}\right)x^2 + h.o.t;$$

(vii) $X^2.f(0) = e$, $X.Y.f(0) = f$, $H_{Y.X}.f.Y.f(0) = a$ e $H_{Y^2}.f.Y.f(0) = c$. Portanto, os parâmetros e, f, c e $\left(-a + \frac{ce}{f}\right)$ vão determinar a posição relativa das variedades distinguíveis em relação as linhas de dobra.

Caso 0 seja $\omega_2(j)_{1,1,1,1}$ -singularidade para Z_0 , i.e., $e, c, f, (-af + ce) > 0$ o comportamento das órbitas é ilustrado na Figura 4.10.

OSCAR

Como 0 é uma sela-nó de $\mathbf{FE}^Z$, localmente existe uma vizinhança de 0 em Σ tal que ∂U é transversal ao fluxo de $\mathbf{FE}^{Z_0}$ e às linhas de dobra, excepto em 2 pontos que não estão contidos em $\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0})$. Seja $U' = \text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0}) \cap U$ e identificamos elementos distinguíveis, em U' , para Z_0

1. $\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = (\partial U \cup S_X) \cup (\partial U \cap S_Y)$;
2. $\gamma^+(p_i) \cap \text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0})$ para $i = 1, \dots, 4$;
3. $S_X \cap S_Y$;
4. $U^c(0)$;

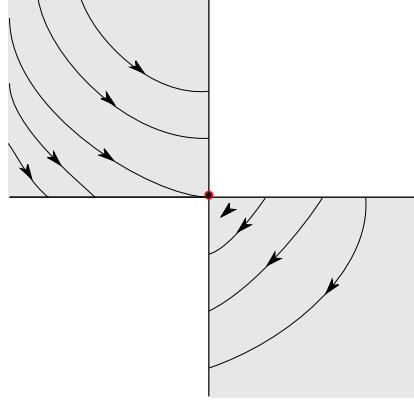


Figura 4.10: Configuração das órbitas de $\mathbf{FE}^Z$ em torno de uma $\omega_2(j)_{1,1,1,1}$ -singularidade.

5. $\partial U' \cap U^c(0)$;
6. $\partial U'$.

onde $\gamma^+(q)$ é a trajetória positiva de $\mathbf{FE}^Z$ contida em $\overline{\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0})}$ passando por q .

Levando em consideração estes elementos distinguidos e usando um argumento ao da prova da demonstração da Proposição 4.31, segue o resultado.

□

4.4.3 Curvas de Bifurcação

As variedades de bifurcação de uma família a dois parâmetros, $Z_{\alpha,\beta} \in \Xi^r(0)$ transversal a $\Omega_2(0)$ em $Z_{0,0}$, se derivam facilmente da teoria clássica, do Teorema D em [6] e o Lema 5.4 em [29], caso $Z_{0,0} \in \Omega_2(\lambda)$ com $\lambda \in \{a, b, k\}$. Se $\lambda \in \{c, d, e, j\}$ as curvas podem ser descrita como na Proposição 3.1, 4.1 e 5.1 em [30]. Por esse motivo, centramos nossa atenção em caracterizar as curvas de bifurcação dos casos restantes.

Lema 4.39. *Seja $\eta : A \rightarrow \Xi^r(0)$ com $h(\alpha, \beta) = Z_{\alpha,\beta}$ tal que: (i) A é um aberto de $(0, 0)$ em $\mathbb{R}^2$; (ii) $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega_g^2(0)$ e; (iii) $h(A)$ transversal a $\Omega_f^2(0)$ em $Z_{0,0}$. Então, existem vizinhanças, U de 0 de Σ e E em A de $(0, 0)$, e duas curvas, γ_i com $i = 1, 2$, que divide E em dois abertos, V_1 e V_2 , ver o gráfico 4.11.*

1. Se $(\alpha, \beta) \in (\gamma_1 \cup \gamma_2) \cap E$ então $Z_{\alpha,\beta}$ possui uma única singularidade em U e é do tipo $\omega_1(e)$;
2. Se $(\alpha, \beta) \in V_1$ o sistema exibe duas singularidades em U , uma do tipo $\omega_0(a)$ e outra do tipo $\omega_0(b)$ (ou $\omega_0(c)$);
3. Se $(\alpha, \beta) \in V_2$ o sistema exibe duas singularidades em U , uma do tipo $\omega_0(a)$ e outra do tipo $\omega_0(c)$ (ou $\omega_0(b)$).

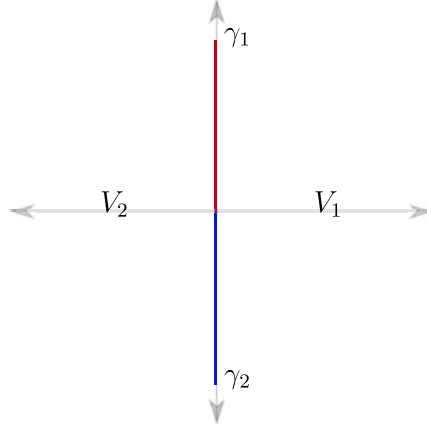


Figura 4.11: Curvas de bifurcação em torno de Υ com $v(0,0) \in \Omega_f^2(0)$.

Demonstração. Seja $h : A \rightarrow \Xi_r$, $h(\alpha, \beta) = Z_{\alpha, \beta} \in \Xi^r(0)$ uma família de campos a dois parâmetros com $(\alpha, \beta) \in A \subset \mathbb{R}^2$ tal que: (i) $(0,0) \in D$; (ii) $Z_{0,0} \in \Omega_f^2(0)$ e (iii) $Z_{\alpha, \beta}$ transversal a $\Xi^r(0)$ em $Z_{0,0}$. Considerando as aplicações $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ e a vizinhança U como na demonstração do Lema 4.25. Segue que:

1. $D(\varepsilon \circ h)(0,0)$ é um difeomorfismo;
2. o conjunto $\Gamma = \{Z \in U \mid \varepsilon_1(Z) = 0\}$ é uma variedade, de codimensão um de $Z_{0,0}$ em $\Xi^r(0)$, e é transversal a $h(A)$ em $Z_{0,0}$.
3. o conjunto $\Gamma = \{Z \in U \mid \varepsilon_2(Z) = 0\}$ é uma variedade, de codimensão um de $Z_{0,0}$ em $\Xi^r(0)$, e é transversal a $h(A)$ em $Z_{0,0}$.

Portanto, existe uma vizinhança, E de 0 em A , duas curvas, $\gamma_1 = h^{-1}(\Gamma \cap h(A)) \cap E \cap h^{-1}(Z \in V : \varepsilon_2(Z) > 0)$ e $\gamma_2 = h^{-1}(\Gamma \cap h(A)) \cap E \cap h^{-1}(Z \in V : \varepsilon_2(Z) < 0)$, que divide E em dois conjuntos abertos conexos de interior não vazios: $V_1 = h^{-1}(\{Z \in V : \varepsilon_1(Z) > 0\} \cap h(A)) \cap E$ e $V_2 = h^{-1}(\{Z \in V : \varepsilon_1(Z) < 0\} \cap h(A)) \cap E$, como no gráfico. Decorre, das definições de ε_1 e ε_2 que:

1. Se $(\alpha, \beta) \in (\gamma_1 \cup \gamma_2) \cap E$ então $Z_{\alpha, \beta}$ possui uma única singularidade em U e é do tipo $\omega_1(e)$;
2. Se $(\alpha, \beta) \in V_1$ o sistema exibe duas singularidades em U , uma do tipo $\omega_0(a)$ e outra do tipo $\omega_0(b)$ (ou $\omega_0(c)$);
3. Se $(\alpha, \beta) \in V_2$ o sistema exibe duas singularidades em U , uma do tipo $\omega_0(a)$ e outra do tipo $\omega_0(c)$ (ou $\omega_0(b)$).

Admitimos que 0 é uma $\omega_2(f)_{1,-1,1}$ -singularidade de $Z_{0,0} = (X_{0,0}, Y_{0,0})$, decorre do Lema 4.25 que ∂U é transversal as linhas de dobra, de S_{X_0} e S_{Y_0} , e ao fluxo de $\mathbf{FE}^{Z_0}$. Da continuidade de h , podemos assumir que estas duas propriedades se

verificam para quaisquer $Z_{\alpha,\beta}$ com $(\alpha, \beta) \in E$.

A seguir, determinaremos uma série de elementos distinguíveis na fronteira de $U \cap \text{dom}(\mathbf{F}(Z_{\alpha,\beta}))$ para $Z_{\alpha,\beta}$ com $\text{Se } \alpha, \beta \in \gamma_1$ então

1. $\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = (\partial U' \cap S_X) \cup (\partial U' \cap S_Y)$,
2. $\gamma^+(p_i) \cap U'$ para $i = 1, \dots, 4$.
3. $S_{X_0}\{\alpha, \beta\} \cap S_{Y_{\alpha,\beta}}$.
4. $\partial U'$
5. q_0, q_1 as singularidades.

onde $\gamma^+(q)$ é a trajetória positiva de $\mathbf{F}^Z$ contida em $\overline{\text{dom}(\mathbf{F}^{Z_0})}$ passando por q . Observemos, que estes elementos foram determinados para um $Z_{\alpha,\beta}$ arbitrário com (α, β) , assim como no prova do lema 4.25 garante-se a existência de um homeomorfismo que da uma equivalência entre topologia de dois campos em V_1 .

De forma análoga se procede para V_2, γ_1 e γ_2 . □

Lema 4.40. *Seja $\eta : A \rightarrow \Xi^r(0)$ com $h(\alpha, \beta) = Z_{\alpha,\beta}$ tal que: (i) A é uma vizinhança, de $(0, 0)$ em $\mathbb{R}^2$; (ii) $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega_g^2(0)$; (iii) $h(A)$ transversal a $\Omega_g^2(0)$ em $Z_{0,0}$. Então, existem vizinhanças, U , de 0 de Σ , e E , em A de $(0, 0)$, e quatro curvas, γ_i com $i = 1, 2, 3, 4$, que divide E em quatro abertos, V_1, V_2, V_3 e V_4 , ver a Figura 4.12.*

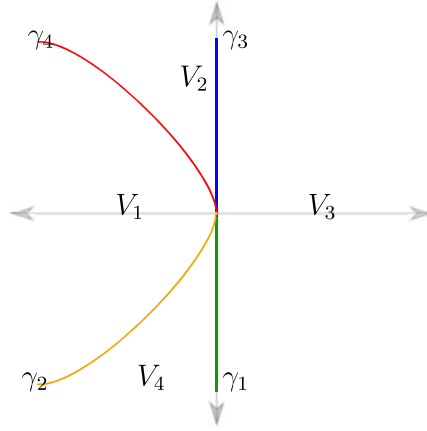


Figura 4.12: Curvas de bifurcação em torno de Υ com $v(0, 0) \in \Omega_g^2(0)$.

1. Se $(\alpha, \beta) \in \gamma_1 \cup \gamma_4$, então $Z_{\alpha,\beta}$ possui duas singularidades em $U \cap \text{dom}(\mathbf{F}^Z)$, uma do tipo $\omega_1(a)$ e outra do tipo $\omega_0(c)$.
2. Se $(\alpha, \beta) \in V_1 \cup V_3 \cup V_2$, então $Z_{\alpha,\beta}$ possui três singularidades em $U \cap \text{dom}(\mathbf{F}^Z)$, sendo uma delas do tipo $\omega_0(c)$ e as outras duas $\omega_0(a)$.

3. Se $(\alpha, \beta) \in \gamma_2 \cup \gamma_3$, então $Z_{\alpha, \beta}$ possui duas singularidades em $U \cap \text{dom}(\mathbf{F}^Z)$, sendo uma delas do tipo $\omega_0(a)$ e a outra do tipo $\omega_1(c)$.
4. Se $(\alpha, \beta) \in V_4$, então $Z_{\alpha, \beta}$ tem uma única singularidade em $U \cap \text{dom}(\mathbf{F}^Z)$, que é do tipo $\omega_0(c)$.

E se $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in G$ com $G \in V_1, V_2, V_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, então $Z_{\alpha, \beta}$ em $U \cap \text{dom}(\mathbf{F}[Z_{\alpha, \beta}])$ é topologicamente equivalente a $Z_{\alpha', \beta'}$ em $U \cap \text{dom}(\mathbf{F}[Z_{\alpha, \beta}])$.

Lema 4.41. Seja $\Upsilon : A \rightarrow \Xi^r(0)$ com $\Upsilon(\alpha, \beta) = Z_{\alpha, \beta}$ tal que: (i) A é um vizinhança, de $(0, 0)$ em $\mathbb{R}^2$; (ii) $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega_h^2(0)$ e; (iii) $\Upsilon(A)$ transversal a $\Omega_h^2(0)$ em $Z_{0,0}$. Então, existem vizinhanças, U , de 0 de Σ , e E , em $A(0, 0)$, e 4 curvas, γ_λ com $\lambda = 1, 2, 3$, que dividem E em três abertos, V_λ com $\lambda = 1, 2, 3$, ver o Figura 4.13.

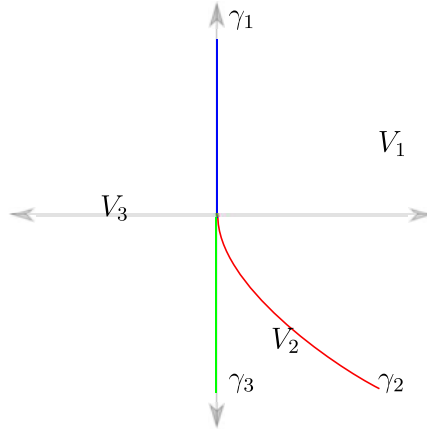


Figura 4.13: Curvas de bifurcação em torno de Υ com $v(0, 0) \in \Omega_h^2(0)$.

1. Se $(\alpha, \beta) \in V_1 \cup V_2 \cup V_3$, então $Z_{\alpha, \beta}$ possui duas singularidades em $U \cap \text{dom}(\mathbf{F}^Z)$, sendo uma delas do tipo $\omega_0(a)$ e a outra $\omega_1(b)$ ou $\omega(c)$.
2. Se $(\alpha, \beta) \in \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, então $Z_{\alpha, \beta}$ possui uma singularidade em $U \cap \text{dom}(\mathbf{F}^Z)$ que é do tipo $\omega_1(e)$.

E se $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in G$ então $Z_{\alpha, \beta}$ em $U \cap \text{dom}(\mathbf{F}[Z_{\alpha, \beta}])$ é topologicamente equivalente a $Z_{\alpha', \beta'}$ em $U \cap \text{dom}(\mathbf{F}[Z_{\alpha, \beta}])$.

Lema 4.42. Seja $\eta : A \rightarrow \Xi^r(0)$ com $h(\alpha, \beta) = Z_{\alpha, \beta}$ tal que: (i) A é um aberto de $(0, 0)$ em $\mathbb{R}^2$; (ii) $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega_j^2(0)$; (iii) $h(A)$ transversal a $\Omega_i^2(0)$ em $Z_{0,0}$. Então, existem vizinhanças, U , de 0 de Σ , e E , em $A(0, 0)$, e 5 curvas, γ_λ com $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$, que divide E em 5 conjuntos abertos, V_λ com $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$, ver o Figura 4.14.

1. Se $(\alpha, \beta) \in V_1 \cup V_2 \cup V_3$, então $Z_{\alpha, \beta}$ possui duas singularidades em $U \cap \text{dom}(\mathbf{F}^Z)$, sendo uma delas do tipo $\omega_0(c)$ e a outra $\omega_1(g)$.

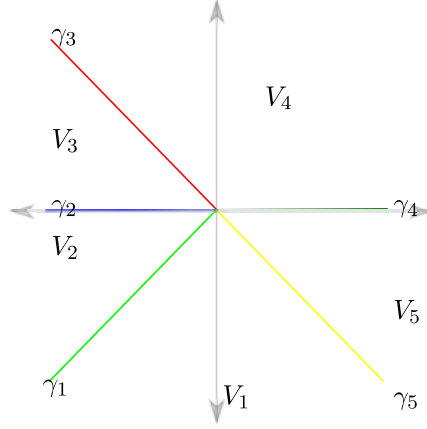


Figura 4.14: Curvas de bifurcação em torno de Υ com $v(0,0) \in \Omega_j^2(0)$.

2. Se $(\alpha, \beta) \in \gamma_1$, então $Z_{\alpha,\beta}$ possui duas singularidades em $U \cap \text{dom}(\mathbf{F}^Z)$, uma do tipo $\omega_1(c)$ e outra do tipo $\omega_0(a)$.
3. Se $(\alpha, \beta) \in \gamma_2$, então $Z_{\alpha,\beta}$ possui duas singularidades em $U \cap \text{dom}(\mathbf{F}^Z)$, uma do tipo $\omega_1(c)$ e outra do tipo $\omega_0(d)$.
4. Se $(\alpha, \beta) \in \gamma_3 \cup \gamma_5$, então $Z_{\alpha,\beta}$ possui duas singularidades em $U \cap \text{dom}(\mathbf{F}^Z)$, uma do tipo $\omega_1(g)$ e outra do tipo $\omega_0(b)$ ou $\omega_0(c)$.
5. Se $(\alpha, \beta) \in V_4$, então $Z_{\alpha,\beta}$ possui duas singularidades em $U \cap \text{dom}(\mathbf{F}^Z)$, uma do tipo $\omega_1(a)$ e outra do tipo $\omega_0(b)$ ou $\omega_0(c)$.
6. Se $(\alpha, \beta) \in \gamma_4$, então $Z_{\alpha,\beta}$ possui uma singularidades em $U \cap \text{dom}(\mathbf{F}^Z)$ que é do tipo $\omega_1(e)$.
7. Se $(\alpha, \beta) \in V_5$, então $Z_{\alpha,\beta}$ possui duas singularidades em $U \cap \text{dom}(\mathbf{F}^Z)$, uma do tipo $\omega_0(c)$ e outra do tipo $\omega_0(a)$.

E se $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in G$ com $G \in \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5$ então $Z_{\alpha,\beta}$ em $U \cap \text{dom}(\mathbf{F}[Z_{\alpha,\beta}])$ é topologicamente equivalente a $Z_{\alpha',\beta'}$ em $U \cap \text{dom}(\mathbf{F}[Z_{\alpha,\beta}])$.

4.5 Diagramas de Bifurcação

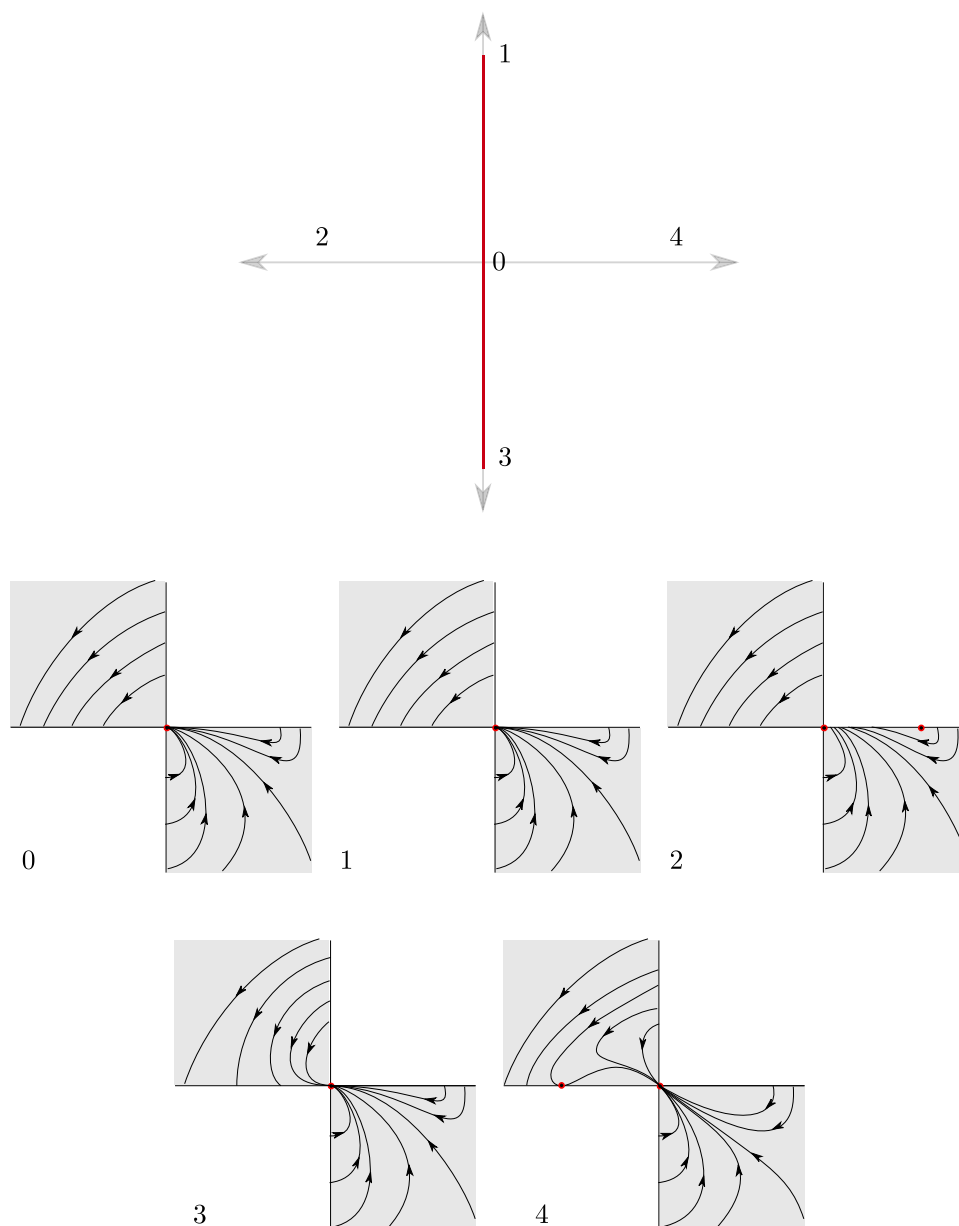


Figura 4.15: Diagrama de bifurcação de $Z \in \Omega_f^2(0)$

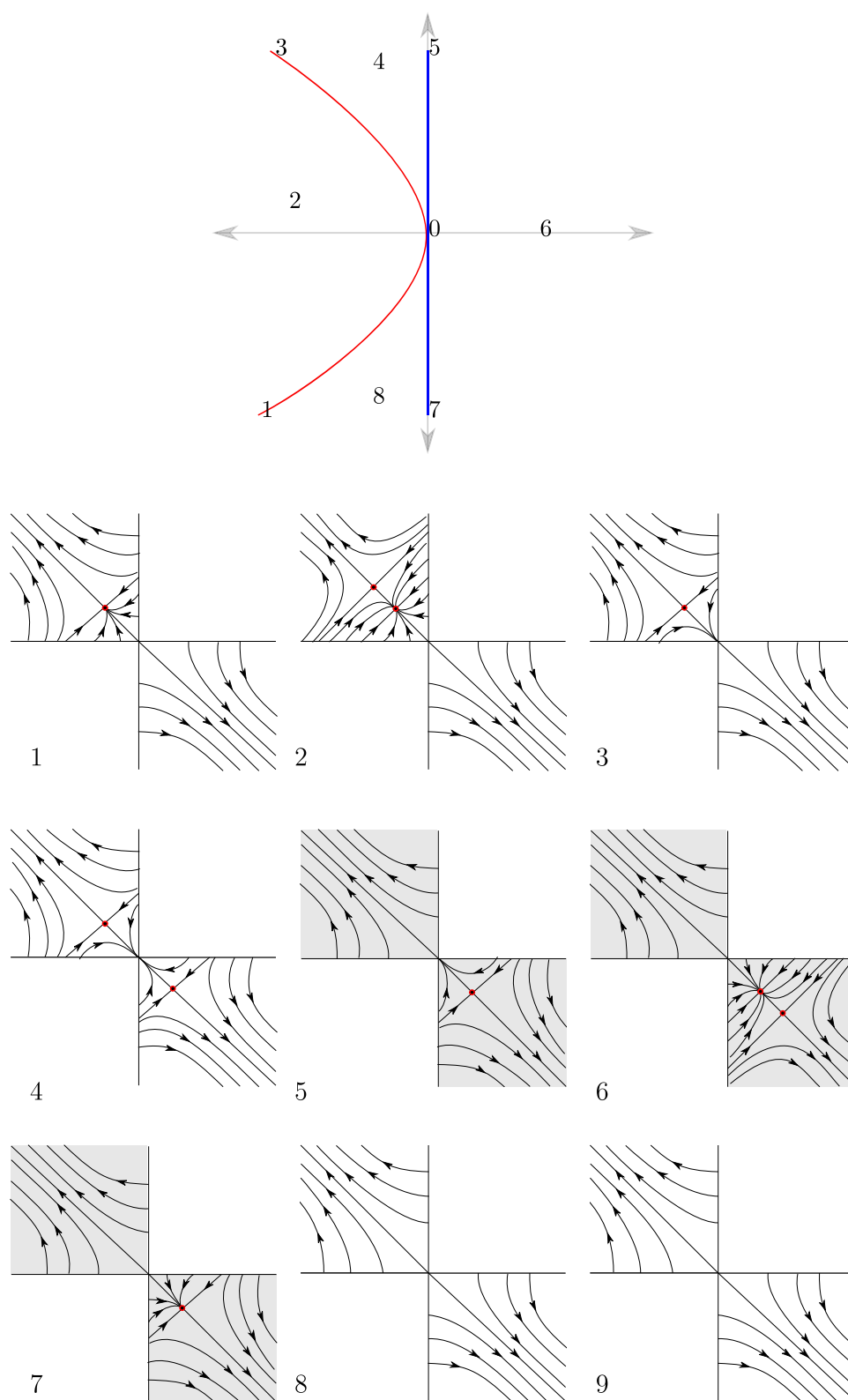


Figura 4.16: Diagrama de bifurcação de $Z \in \Omega_g^2(0)$

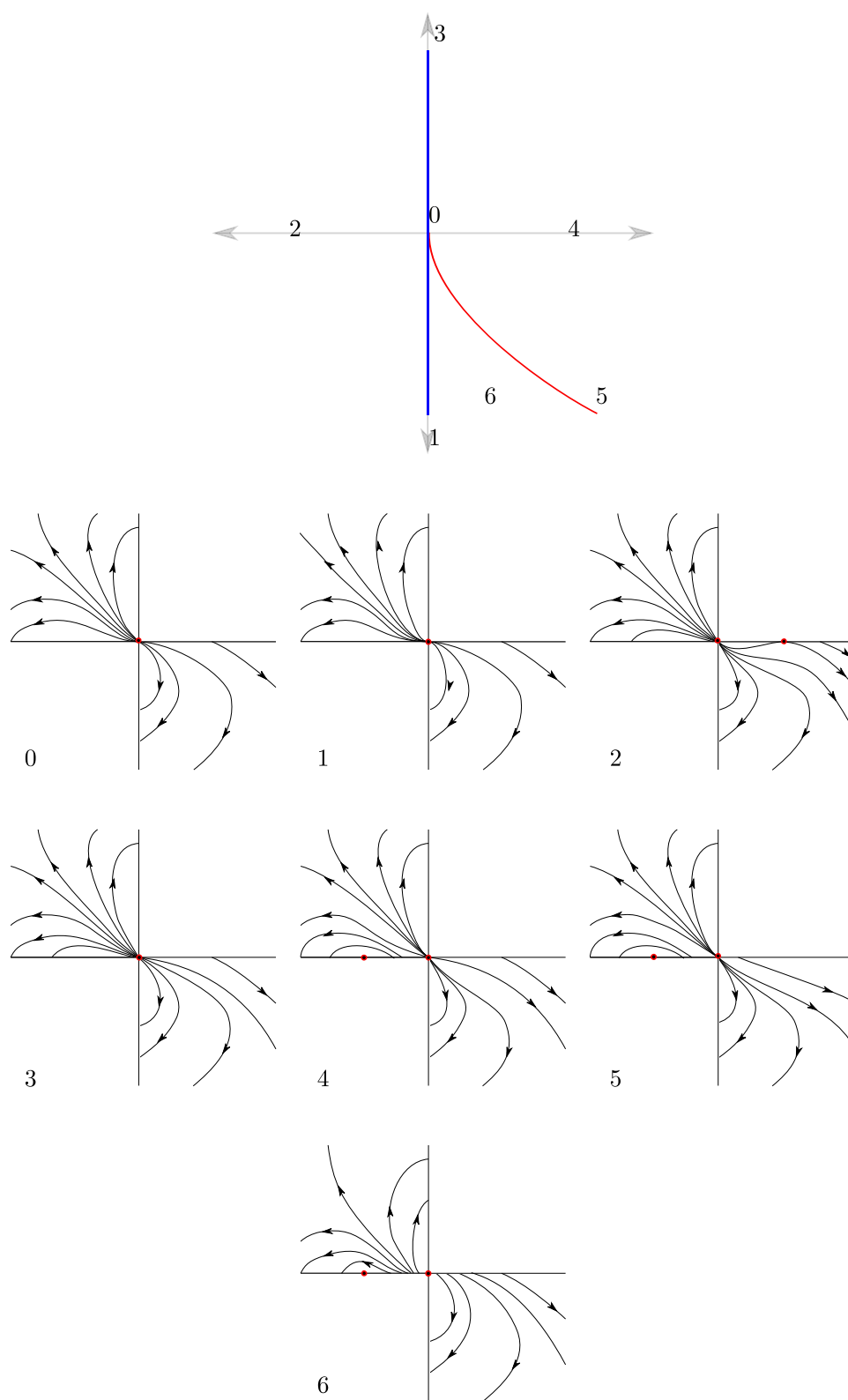


Figura 4.17: Diagrama de bifurcação de $Z \in \Omega_h^2(0)$

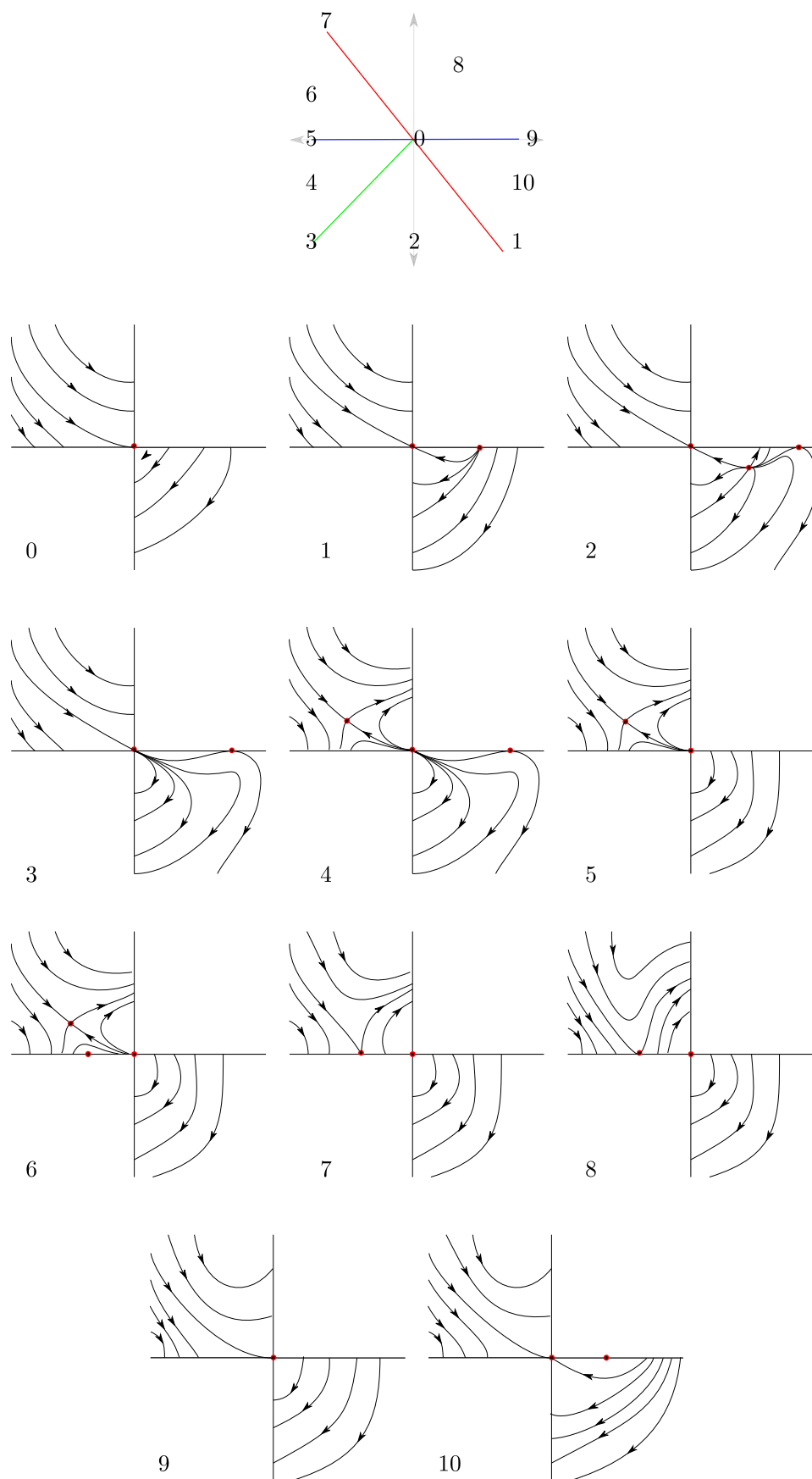


Figura 4.18: Diagrama de bifurcação de $Z \in \Omega_j^2(0)$.

Direções Futuras

Neste trabalho, utilizamos diversas ferramentas associadas a campos vetoriais suaves por partes, incluindo várias técnicas novas e/ou adaptadas advindas da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. A seguir descrevemos uma direção para investigações futuras.

5.1 Método do Pinching e Sistemas de Equações Diferenciais Suaves por Partes

Mudanças abruptas na dinâmica de certos fenômenos podem ser modelados por um conjunto de sistemas de equações diferenciais, X , cujas soluções variam bruscamente próximas de certos objetos. Se estas são consideradas descontinuidades ou não de X , a abordagem matemática do problema pode ser completamente diferente uma da outra. Entretanto, é natural assumir que existe um limite em que a variação do X sobre algum destes objetos, digamos Σ , é suave porém é bastante rápida, e assim, o sistema pode ser considerado como não suave em torno de Σ . Contudo, caracterizar e formalizar matematicamente esse limite não é trivial. Por exemplo, analiticamente a dificuldade está no fato que em muitos casos o limite pode ser um objeto degenerado, o que implica que as soluções do sistema suave podem não ser limite das soluções do sistema não suave no sentido usual. Computacionalmente, a dificuldade de estudar o limite não suave de sistemas suaves está no fato que eles se tornam bastante rígidos e os métodos numéricos, em geral, falham no limite de interesse.

Em [2] desenvolve-se um método chamado “Pinching”, que deriva um sistema não suave como uma aproximação de um sistema suave em torno de uma variedade de codimensão um, Σ , colapsando uma ε -vizinhança de Σ . Esta técnica foi usada no estudo da generacidade de sistemas dinâmicos suaves por partes segundo as convenções de Filippov. Em [7, 8] este método é desenvolvido e é usado em conjunto com a teoria de perturbação singular, [3, 21, 27], e análise não standard, para mostrar que o método do Pinching caracteriza a dinâmica do sistema não suave limite, pelo menos

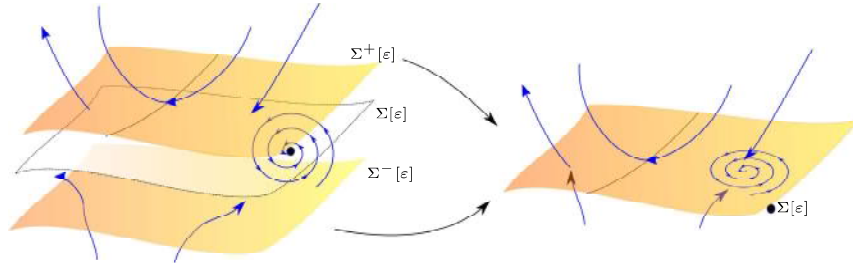


Figura 5.1: Método do Pinching em torno de Σ para $\varepsilon > 0$.

qualitativamente, preservando certas singularidades e propriedades geométricas. Tal método é aplicado em conhecidos sistemas rápidos e lentos, por exemplo o sistema Van der Pol, cuja variedade lenta é normalmente hiperbólica e estabelece-se uma relação do denominado fenômeno de Canard entre o sistema suave e o sistema não suave derivado, para mas detalhes ver [7]. Recentemente, em [24] é feita uma caracterização matemática formal do Pinching, usando uma convenção de Filippov não linear, conseguindo estabelecer uma equivalência entre as dinâmicas do sistema limite e do sistema suave.

5.1.1 Principais Problemas a Serem Abordados

A seguir descrevemos os problemas que devem ser abordados neste projeto.

Considere Σ uma variedade de codimensão um, orientável conexa e mergulhada no $\mathbb{R}^n$, F um sistema de equações diferenciais suaves em $\mathbb{R}^n$ e F_ε o sistema não suave derivado de um pinching de F em relação a Σ .

Problema 1 Caracterizar a dinâmica de F_ε em torno de Σ , caso esta variedade seja invariante e normalmente hiperbólica em relação a F .

Problema 2 Determinar condições para que: Se F_ε é estruturalmente estável então F também o é.

Problema 3 Estudar conjuntos e propriedades qualitativas de F_ε que persistem e que possuem um equivalente para F , em torno de Σ .

Problema 4 Analisar que efeito tem na dinâmica de F algumas singularidades de F_ε que são aparentemente simples como, por exemplo, a singularidade Teixeira. Esta singularidade caracteriza-se por um ponto singular na variedade de descontinuidade a qual se constitui de tangências quadráticas invisíveis em ambos os lados da superfície de descontinuidade que divide o espaço

Referências Bibliográficas

- [1] **Etude des oscillations entretenues.** *Revue Generale de l Electricite*, 23:901 – 912, 1928.
- [2] BROUCKE, M. E.; PUGH, C. C.; SIMIĆ, S. N. **Structural stability of piecewise smooth systems.** *Comput. Appl. Math.*, 20(1-2):51–89, 2001. The geometry of differential equations and dynamical systems.
- [3] CARDIN, P. T.; DA SILVA, P. R.; TEIXEIRA, M. A. **Geometric singular perturbation theory for non-smooth dynamical systems.** *Publ. Mat.*, 58(suppl.):111–134, 2014.
- [4] CHOW, S.-N.; LI, C. Z.; WANG, D. **Normal forms and bifurcation of planar vector fields.** Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [5] COOMBES, S. **Neuronal networks with gap junctions: a study of piecewise linear planar neuron models.** *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 7(3):1101–1129, 2008.
- [6] DA ROCHA MEDRADO, J. A. C.; TEIXEIRA, M. A. **Codimension-two singularities of reversible vector fields in 3D.** *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 2(2):399–428, 2001.
- [7] DESROCHES, M.; JEFFREY, M. R. **Canards and curvature: nonsmooth approximation by pinching.** *Nonlinearity*, 24(5):1655–1682, 2011.
- [8] DESROCHES, M.; JEFFREY, M. R. **Canards and curvature: the ‘smallness of ϵ ’ in slow-fast dynamics.** *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 467(2132):2404–2421, 2011.
- [9] EUZÉBIO, R. D.; LLIBRE, J. **On the number of limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two pieces separated by a straight line.** *J. Math. Anal. Appl.*, 424(1):475–486, 2015.
- [10] FILIPPOV, A. F. **Differential equations with discontinuous right-hand sides, and differential inclusions.** In: *Nonlinear analysis and nonlinear differential equations (Russian)*, p. 265–288. FizMatLit, Moscow, 2003.

- [11] FREIRE, E.; PONCE, E.; RODRIGO, F.; TORRES, F. **Bifurcation sets of continuous piecewise linear systems with two zones.** *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 08(11):2073–2097, 1998.
- [12] FREIRE, E.; PONCE, E.; TORRES, F. **Canonical discontinuous planar piecewise linear systems.** *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 11(1):181–211, 2012.
- [13] FREIRE, E.; PONCE, E.; TORRES, F. **The discontinuous matching of two planar linear foci can have three nested crossing limit cycles.** *Publ. Mat.*, 58(suppl.):221–253, 2014.
- [14] FREIRE, E.; PONCE, E.; TORRES, F. **A general mechanism to generate three limit cycles in planar Filippov systems with two zones.** *Nonlinear Dynam.*, 78(1):251–263, 2014.
- [15] H., P. **Sur les courbes définies par les équations différentielle.** *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.*, 2:151–218, 1886.
- [16] HAN, M.; ZHANG, W. **On hopf bifurcation in non-smooth planar systems.** *Journal of Differential Equations*, 248(9):2399 – 2416, 2010.
- [17] HUAN, S.-M.; YANG, X.-S. **On the number of limit cycles in general planar piecewise linear systems.** *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 32(6):2147–2164, 2012.
- [18] HUAN, S.-M.; YANG, X.-S. **Existence of limit cycles in general planar piecewise linear systems of saddle-saddle dynamics.** *Nonlinear Anal.*, 92:82–95, 2013.
- [19] HUAN, S.-M.; YANG, X.-S. **On the number of limit cycles in general planar piecewise linear systems of node node types.** *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 411(1):340 – 353, 2014.
- [20] KARLIN, S.; STUDDEN, W. J. **Tchebycheff systems: With applications in analysis and statistics.** Pure and Applied Mathematics, Vol. XV. Interscience Publishers John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1966.
- [21] LLIBRE, J.; DA SILVA, P. R.; TEIXEIRA, M. A. **Regularization of discontinuous vector fields on $\mathbb{R}^3$ via singular perturbation.** *J. Dynam. Differential Equations*, 19(2):309–331, 2007.
- [22] LLIBRE, J.; NOVAES, D. D.; TEIXEIRA, M. A. **Maximum number of limit cycles for certain piecewise linear dynamical systems.** *Nonlinear Dynam.*, 82(3):1159–1175, 2015.

- [23] LUM, R.; CHUA, L. O. **Global properties of continuous piecewise-linear vector fields part ii: Simplest symmetric case in r^2** . Technical Report UCB/ERL M90/29, EECS Department, University of California, Berkeley, 1990.
- [24] NOVAES, D. D.; JEFFREY, M. R. **Regularization of hidden dynamics in piecewise smooth flows**. *J. Differential Equations*, 259(9):4615–4633, 2015.
- [25] RAMÍREZ, O.; JAO, M.; LLIBRE, J. **Limit cycles of planar piecewise linear differential systems defined on two sectors**. (*Preprint*).
- [26] SOTOMAYOR, J.; TEIXEIRA, M. A. **Vector fields near the boundary of a 3-manifold**. In: *Dynamical systems, Valparaíso 1986*, volume 1331 de **Lecture Notes in Math.**, p. 169–195. Springer, Berlin, 1988.
- [27] TEIXEIRA, M. A.; DA SILVA, P. R. **Regularization and singular perturbation techniques for non-smooth systems**. *Phys. D*, 241(22):1948–1955, 2012.
- [28] TEIXEIRA, M. A. **Generic bifurcation of sliding vector fields**. *J. Math. Anal. Appl.*, 176(2):436–457, 1993.
- [29] TEIXEIRA, M. A. **Singularities of reversible vector fields**. *Phys. D*, 100(1-2):101–118, 1997.
- [30] TEIXEIRA, M. A. **Codimension two singularities of sliding vector fields**. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 6(3):369–381, 1999.
- [31] TONNELIER, A. **The McKean’s caricature of the FitzHugh-Nagumo model. I. The space-clamped system**. *SIAM J. Appl. Math.*, 63(2):459–484 (electronic), 2002.
- [32] TONNELIER, A.; GERSTNER, W. **Piecewise linear differential equations and integrate-and-fire neurons: insights from two-dimensional membrane models**. *Phys. Rev. E* (3), 67(2):021908, 16, 2003.
- [33] VAN DER POL JUN. D.Sc, B. **Lxxxviii. on relaxation-oscillations**. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 2(11):978–992, 1926.
- [34] VISHIK, S. M. **Vector elds near the boundary of a manifold**. In: *Vestnik Moskovskogo Universiteta Matematika*, volume 1 de **Lecture Notes in Math.**, p. 21–28. 1972.
- [35] YE, Y.; LO, C. **Theory of Limit Cycles**. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 1986.