



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS (UFG)
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA (IME)
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ALEJANDRA MUÑOZ GONZÁLEZ

**Classificação de Superfícies de
Translação, Homotéticas e Separáveis
com curvaturas constantes no espaço
Euclidiano**

Goiânia
2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

ALEJANDRA MUÑOZ GONZÁLEZ

3. Título do trabalho

Classificação de Superfícies de Translação, Homotéticas e Separáveis com Curvaturas Constantes no Espaço Euclidiano

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Levi Rosa Adriano, Professor do Magistério Superior**, em 29/01/2024, às 14:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alejandra Muñoz González, Discente**, em 23/02/2024, às 09:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4343249** e o código CRC **A3F89418**.

ALEJANDRA MUÑOZ GONZÁLEZ

Classificação de Superfícies de Translação, Homotéticas e Separáveis com curvaturas constantes no espaço Euclidiano

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade Federal de Goiás (UFG), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Pós-Graduação em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Levi Rosa Adriano

Goiânia
2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Muñoz González, Alejandra
Classificação de Superfícies de Translação, Homotéticas e Separáveis com curvaturas constantes no espaço Euclidiano [manuscrito] / Alejandra Muñoz González. - 2024.
83 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Levi Rosa Adriano.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2024.

Bibliografia.

Inclui tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Superfícies de translação. 2. Superfície homotéticas. 3. Superfície separáveis. 4. Curvatura Gaussiana constante. 5. Curvatura média constante. I. Adriano, Levi Rosa, orient. II. Título.

CDU 514.77



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **04** da sessão de Defesa de Dissertação de **Alejandra Muñoz González**, que confere o título de Mestre em **Matemática**, na área de concentração em **Geometria Diferencial**.

Aos **(26/01/2024) vigésimo sexto dia do mês de janeiro de dois mil e vinte e quatro**, a partir da(s) **10:00h**, via Web Videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **“Classificação de Superfícies de Translação, Homotéticas e Separáveis com Curvaturas Constantes no Espaço Euclidiano”**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor **Levi Rosa Adriano - IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Ernani de Sousa Ribeiro Júnior - MAT/UFG**, membro titular externo; Professor Doutor **Benedito Leandro Neto - MAT/UNB**, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Levi Rosa Adriano - IME/UFG**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao(s) **(26/01/2024) vigésimo sexto dia do mês de janeiro de dois mil e vinte e quatro**.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Ernani de Sousa Ribeiro Junior, Usuário Externo**, em 26/01/2024, às 11:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Levi Rosa Adriano, Professor do Magistério Superior**, em 26/01/2024, às 12:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Benedito Leandro Neto, Usuário Externo**, em 06/02/2024, às 11:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4278814** e o código CRC **67BDB345**.

ALEJANDRA MUÑOZ GONZÁLEZ

Classificação de Superfícies de Translação, Homotéticas e Separáveis com curvaturas constantes no espaço Euclidiano

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade Federal de Goiás (UFG) como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Pós-Graduação em Matemática, aprovada em 26 de Janeiro de 2024, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Levi Rosa Adriano

Instituto de Matemática e Estatística (IME) – UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Jr

Departamento de Matemática – UFC

Prof. Dr. Benedito Leandro Neto

Departamento de Matemática – UNB

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Alejandra Muñoz González

Graduou-se em Licenciatura em Matemática na Unicauca - Universidad del Cauca. Durante sua graduação, foi monitora da biblioteca de Matemática no departamento de Matemática da UniCauca. Durante o mestrado na UFG - Universidade Federal de Goiás, foi bolsista da CAPES.

Aos meus pais Maria Eugenia González e Jesús Albeiro Muñoz.

Agradecimentos

A meu orientador, professor Dr. Levi Rosa Adriano, pelo seu apoio, incentivo e pelas horas dedicadas para a realização deste trabalho.

Ao Instituto de Matemática e Estatística-(IME) por permitir-me estudar no programa de mestrado e ao Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

A todos os colegas e professores da pós-graduação em matemática pelo convívio e aprendizado.

À minha avó Melida Sarria e avô Medardo González, que descansam em paz, e que sempre levarei em meu coração, guardando suas sábias palavras. Aos meus pais, pelo apoio incondicional, seu amor e imensa paciência, e aos demais familiares, pelo carinho e incentivo.

Aos amigos e demais pessoas que fizeram parte desses momentos sempre me ajudando e incentivando.

A Matemática apresenta invenções tão subtis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos, como também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.

René Descartes,
Discurso Sobre O Método, 1596-1650 .

Resumo

Muñoz González, Alejandra. **Classificação de Superfícies de Translação, Homotéticas e Separáveis com curvaturas constantes no espaço Euclidiano.** Goiânia, 2024. 83p. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Universidade Federal de Goiás (UFG).

Neste trabalho, estudamos algumas classes de superfícies com curvatura Gaussiana (K) ou média (H) constante no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 . Na primeira parte, vamos estudar as superfícies que são obtidas como a soma de duas curvas ou que são gráficos do produto de duas funções. Vamos considerar o problema de encontrar todas as superfícies destes tipos com curvatura Gaussiana constante (CGC). Estendemos os resultados para superfícies não degeneradas no espaço de Lorentz-Minkowski. Na segunda parte, consideramos superfícies com curvatura Gaussiana constante que são dadas por uma equação implícita do tipo $f(x) + g(y) + h(z) = 0$, onde f , g e h são funções reais de uma variável. Se $K = 0$, mostramos que a superfície é de revolução, ou uma superfície cilíndrica ou uma superfície cônica, obtendo parametrizações explícitas dessas superfícies. Se $K \neq 0$, a superfície é de revolução.

Palavras-chave

Superfícies de translação, superfícies homotéticas, superfícies separáveis, superfícies homotéticas mínimas, curvatura Gaussiana constante, curvatura média constante

Abstract

Muñoz González, Alejandra. **Classification of Translation, Homothetic, and Separable Surfaces with Constant Curvatures in Euclidean Space**. Goiânia, 2024. 83p. MSc. Dissertation. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Universidade Federal de Goiás (UFG).

In this work, we study some classes of surfaces with constant Gaussian (K) or mean curvature (H) in Euclidean space \mathbb{R}^3 . In the first part, we investigate surfaces obtained as the sum of two curves or as graphs of the product of two functions. We consider the problem of finding all surfaces of these types with constant Gaussian curvature (CGC). We extend the results to non-degenerate surfaces in Lorentz-Minkowski space. In the second part, we consider surfaces with constant Gaussian curvature given by an implicit equation of the form $f(x) + g(y) + h(z) = 0$, where f , g , and h are real functions of one variable. If $K = 0$, we show that the surface is a surface of revolution, a cylindrical surface, or a conical surface, obtaining explicit parametrizations of these surfaces. If $K \neq 0$, the surface is a surface of revolution.

Keywords

Translation surfaces, homothetic surfaces, separable surfaces, minimal homothetic surfaces, constant Gaussian curvature, constant mean curvature.

Contents

List of Figures	10
List of Tables	11
Introdução	12
1 Preliminares	15
Preliminares	15
1.1 Superfícies no espaço Euclidiano.	15
1.2 Fórmulas de Curvatura para Curvas e Superfícies Implícitas	20
2 Superfícies de Translação e Homotéticas com Curvatura Constante	36
2.1 Superfície de Translação	36
2.1.1 Caso $K = 0$	40
Caso $K \neq 0$	42
2.2 Superfície Homotéticas	46
2.3 O Caso Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^3 .	57
2.3.1 Extensão do Teorema 2.5	58
2.3.2 Extensão do Teorema 2.9	58
3 Superfícies Separáveis Com Curvatura Gaussiana Constante.	60
3.1 Expressão da curvatura Gaussiana para superfícies separáveis.	64
3.2 Prova do Teorema 3.2.	67
3.3 Demonstração do Teorema 2: Caso $K \neq 0$.	73
3.3.1 Demonstração do Teorema 3.3.	80
Bibliography	82

List of Figures

1.1	Superfície regular	15
1.2	Vetor tangente	17
2.1	$\psi(x, y) = (x, 0, -\frac{1}{a} \log \cos(ax)) + (0, y, \frac{1}{a} \log \cos(ay)), a > 0$	37
2.2	$\psi(u, v) = (\cos u, \sin u, 0) + (0, 0, v), 0 < u < 2\pi$	38
2.3	$\psi(u, v) = P_0 + uW_1 + vW_2$	38
2.4	Superfície Cilíndrica Geral	38
2.5	$z(x, y) = x \tan(y), x \in \mathbb{R} \text{ e } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.	52
2.6	$z(x, y) = 2e^{x+y}$	57
2.7	$z(x, y) = \frac{x^2}{4y}$	57
3.1	$\cosh^2(z) = x^2 + y^2$	60
3.2	$\tan(z) = \frac{x}{y}$	61
3.3	$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$	63
3.4	$x^2 = yz$	72
3.5	$-e^x + e^y + e^z = 0$.	72
3.6	$z = \frac{-xy}{x+y}$ com $x+y \neq 0$.	72

List of Tables

- 1.1 Fórmulas explícitas para a curvatura e torção em termos dos vetores tangente e normal e suas derivadas. Essas fórmulas são facilmente deduzidas das equações de Frenet. 21
- 1.2 O operador adjunto $*$ para constantes, vetores linha e coluna bidimensionais, e matrizes 2×2 26

Introdução

No estudo das superfícies (mergulhadas ou imersas), é natural questionar se estas satisfazem uma condição específica relacionada à curvatura. Ao longo deste trabalho, investigaremos quais superfícies no espaço Euclidiano tridimensional do tipo translação, homotética ou separável possuem curvatura média ou curvatura Gaussiana constante.

Na primeira parte do trabalho, exploramos dois tipos de superfícies no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 . O primeiro tipo são as superfícies de translação, inicialmente introduzidas por S. Lie [15]. Uma superfície de translação, S , pode ser expressa como a soma de duas curvas $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\beta : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde S é descrita parametricamente como $X(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$.

As superfícies de translação possuem a propriedade de que as translações de uma curva paramétrica $s = \text{constante}$ por $\beta(t)$ permanecem em S (o mesmo vale para as curvas paramétricas $t = \text{constante}$). Um problema aberto até recentemente [12, 2021] foi classificar todas as superfícies de translação com curvatura média constante (CMC) ou curvatura de Gauss constante (CGC).

Apresentamos exemplos de superfícies de translação com CMC, como a superfície de Scherk. No texto, abordamos o progresso na classificação destas superfícies, considerando a disposição das curvas α e β . Também discutimos sobre as superfícies homotéticas, onde a adição na definição de uma superfície de translação $z = f(x) + g(y)$ é substituída pela operação de multiplicação.

Destacam-se resultados importantes, incluindo a classificação completa de superfícies de translação com curvatura de Gauss constante zero, que se revelam ser superfícies cilíndricas. Além disso, são apresentados resultados sobre superfícies homotéticas, com foco especial em superfícies mínimas, comprovando que planos e helicoides são as únicas superfícies mínimas homotéticas em \mathbb{R}^3 . O presente trabalho fornece uma classificação completa de superfícies homotéticas com curvatura de Gauss constante. No final do Capítulo 2, os resultados são estendidos para o espaço de Lorentz-Minkowski.

A segunda parte desta dissertação tem como objetivo a classificação de todas as superfícies com curvatura Gaussiana constante no espaço tridimensional Euclidiano \mathbb{R}^3 que podem ser expressas por uma equação implícita da forma $f(x) + g(y) + h(z) = 0$, onde f , g e h são funções reais de uma variável. A motivação para essa investigação emerge da

teoria clássica das superfícies mínimas, que teve seus primórdios com notáveis exemplos como o catenóide de Euler em 1744 e o helicóide de Meusnier em 1776.

A busca por compreender as características das superfícies mínimas evoluiu com as descobertas de Scherk em 1835, que identificou todas as superfícies mínimas da forma $z = \phi(x) + \psi(y)$, e de Weingarten, que, mais tarde, abordou o problema de classificar as superfícies mínimas do tipo $f(x) + g(y) + h(z) = 0$. Esse último estudo revelou uma família vasta e rica de superfícies mínimas, incluindo exemplos expressos em termos de integrais elípticas e superfícies periódicas como as conhecidas superfícies de Schwarz.

Neste contexto, introduzimos a terminologia de superfícies separáveis, definindo-as como aquelas que podem ser expressas como

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x) + g(y) + h(z) = 0 \},$$

onde f , g e h são funções suaves definidas em intervalos específicos de \mathbb{R} .

Este trabalho aprofunda na seguinte questão: quais são as características das superfícies separáveis em \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana constante? Exploramos três exemplos particulares de tais superfícies: cilindros retos, superfícies de translação e superfícies de rotação, e, discutimos abordagens anteriores para o estudo destas, incluindo uma classificação inicial conduzida pelos autores López e Hasanis em trabalhos anteriores [16, 17].

O cerne desta parte do trabalho consiste em fornecer uma classificação abrangente de todas as superfícies separáveis com curvatura Gaussiana constante. O resultado final é uma compreensão detalhada dessas superfícies, incluindo parametrizações explícitas. A classificação é elaborada considerando os casos em que a curvatura Gaussiana é nula e não nula.

No caso $K = 0$, salvo por um movimento rígido, as únicas superfícies separáveis com curvatura Gaussiana nula são: um cilindro reto sobre uma curva plana contida num dos planos coordenados; uma superfície de translação $z = ax + g(y)$, onde $a \neq 0$ e g é qualquer função diferenciável; uma superfície de rotação com curvatura Gaussiana nula; uma superfície cilíndrica ou uma superfície cônica.

Finalmente, no caso em que K é uma constante não nula, a classificação é a seguinte: as únicas superfícies separáveis com curvatura Gaussiana constante não nula são as superfícies de rotação de curvatura constante cujo eixo de rotação é paralelo a um dos eixos coordenados.

A dissertação está organizada como segue: No primeiro capítulo, introduziremos algumas definições básicas da geometria diferencial, como a teoria local das curvas e superfícies em \mathbb{R}^3 . Apresentamos também as fórmulas de curvatura para superfícies implícitas, objeto de estudo deste trabalho.

No segundo capítulo, estudamos as superfícies de translação e homotéticas

com curvaturas constantes. Entre outras coisas, provamos que as únicas superfícies de translação com curvatura Gaussiana nula são as superfícies cilíndricas. Abordamos também a questão das superfícies homotéticas mínimas no espaço Euclidiano e também no espaço de Lorentz-Minkowski.

No terceiro capítulo, apresentamos o estudo sobre as superfícies separáveis, onde fornecemos uma classificação completa de todas as superfícies separáveis com curvatura Gaussiana constante, obtendo parametrizações explícitas para tais superfícies.

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos os conceitos, ferramentas, definições e notações fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Maiores detalhes poderão ser encontrados nas referências citadas ao longo deste texto.

1.1 Superfícies no espaço Euclidiano.

Denota-se por \mathbb{R}^3 o espaço Euclidiano e por (x, y, z) suas coordenadas. Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $U \subseteq \mathbb{R}^2$, uma aplicação diferenciável de classe C^∞ . Denotamos as derivadas parciais em relação a u e a v da aplicação X por $\frac{\partial X}{\partial u}(u, v) = X_u$ e $\frac{\partial X}{\partial v}(u, v) = X_v$. A seguir, estabelecemos o conceito de superfície regular.

Definição 1.1 Uma aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de um conjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ é dita regular quando $X_u \wedge X_v \neq 0$ para todo ponto em U . Chamamos de parametrização uma aplicação regular $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de um conjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ em \mathbb{R}^3 que é injetiva.

Definição 1.2 Uma **superfície regular** em \mathbb{R}^3 é um subconjunto não vazio $S \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que para cada ponto $p \in S$ existe uma vizinhança $V \subset S$ contida na imagem de alguma parametrização $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

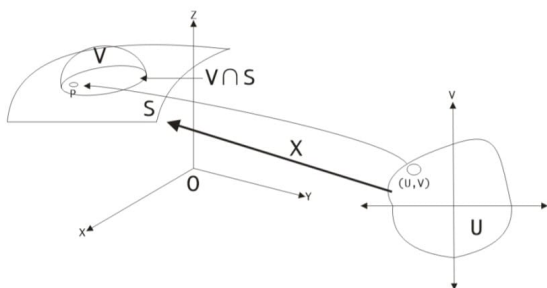


Figure 1.1: Superfície regular

Nos resultados a seguir obtemos uma ampla classe de superfícies regulares.

Proposição 1.3 *Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, então o gráfico de f , isto é, o subconjunto de \mathbb{R}^3 dado por $(x, y, f(x, y))$ para $(x, y) \in U$, é uma superfície regular.*

Definição 1.4 *Dada uma aplicação diferenciável $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida em um conjunto aberto U de \mathbb{R}^n , dizemos que $p \in U$ é um ponto crítico de F se a diferencial $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ não é uma aplicação sobrejetiva. A imagem $F(p) \in \mathbb{R}^m$ de um ponto crítico é chamado um valor crítico de F . Um ponto de \mathbb{R}^m que não é um valor crítico é chamada um valor regular de F .*

Se $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então df_p aplicada ao vetor $(1, 0, 0)$ é obtida calculando-se o vetor tangente em $f(p)$ à curva

$$x \rightarrow f(x, y_0, z_0).$$

Decorre daí que

$$df_p(1, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = f_x$$

e, analogamente,

$$df_p(0, 1, 0) = f_y, \quad df_p(0, 0, 1) = f_z.$$

Concluimos que a matriz de df_p na base $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ é dada por

$$df_p = (f_x, f_y, f_z)$$

Note que, nesse caso, dizer que df_p não é sobrejetiva é equivalente a dizer que $f_x = f_y = f_z = 0$ em p . Portanto, $a \in f(U)$ é um valor de $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ se, e somente se, f_x , f_y e f_z não se anulam simultaneamente em qualquer ponto da imagem inversa

$$f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in U : f(x, y, z) = a\}.$$

Proposição 1.5 *Se $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $a \in f(U)$ é um valor regular de f , então $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular em \mathbb{R}^3 .*

Definição 1.6 *Um vetor tangente a um ponto $p \in S$ é um vetor tangente a uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto de todos os vetores tangentes a S em p , denotado por $T_p S$ é chamada de **plano tangente** a S em p . Se X é uma parametrização de S em p , então $T_p S$ coincide com o subespaço vetorial gerado por $\left\{ \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\}$, onde $p = X(q)$. Diz-se que S é **orientável** se for possível determinar um campo vetorial diferenciável unitário N normal a $T_p S$ para cada $p \in S$. Neste caso, diz-se que N é a **aplicação normal de Gauss** de S e que tal campo determina uma orientação em S .*

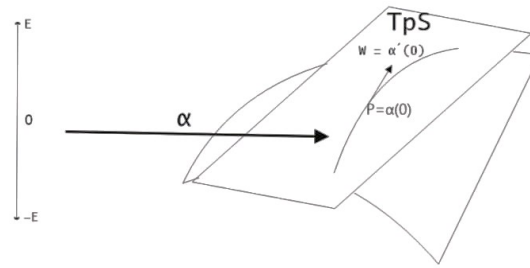


Figure 1.2: Vetor tangente

No que segue, denote-se V um espaço vetorial de dimensão 2 munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definição 1.7 Diz-se que uma aplicação linear $A : V \rightarrow V$ é *auto-adjunta* se $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$ para todo $v, w \in V$. Se $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal de V , e (α_{ij}) , $i, j = 1, 2$, é uma matriz de A relativa a esta base, então diz-se que a matriz (α_{ij}) é *simétrica* se $(\alpha_{ij}) = (\alpha_{ji})$ para todo $i, j = 1, 2$.

Observação 1.8 Dada uma aplicação linear $A : V \rightarrow V$ em um espaço vetorial de dimensão 2, e dada uma base $\{v_1, v_2\}$ de V , tem-se que o determinante de $A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, e o traço de $A = a_{11} + a_{22}$, onde (a_{ij}) é a matriz de A associada na base $\{v_1, v_2\}$. Sabe-se que esses números não dependem da base escolhida, e são, portanto, associados à aplicação linear A .

Teorema 1.9 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Se A é uma aplicação linear simétrica em V então A é auto-adjunta (ver [5]).

Teorema 1.10 Seja $A : V \rightarrow V$ uma aplicação linear auto-adjunta. Então existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V tais que $A(e_1) = \lambda_1 e_1$, $A(e_2) = \lambda_2 e_2$ (isto é, e_1 e e_2 são autovetores, e λ_1, λ_2 são auto-valores de A). Na base $\{e_1, e_2\}$, a matriz de A é diagonal e os elementos λ_1 e λ_2 , $\lambda_1 \geq \lambda_2$, da diagonal são o máximo e o mínimo, respectivamente, da forma quadrática $Q(v) = \langle Av, v \rangle$ sobre o círculo unitário de V (ver [5]).

O produto interno usual de \mathbb{R}^3

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},$$

induz, de forma natural, um produto interno da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p S \times T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (w_1, w_2) &\longmapsto \langle w_1, w_2 \rangle_p, \end{aligned}$$

onde $p \in S$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ é uma forma bilinear, simétrica e definida positiva. À forma bilinear, podemos associar uma forma quadrática que se define da seguinte maneira.

Definição 1.11 A *primeira forma fundamental I* de S é a restrição do produto interno canônico de \mathbb{R}^3 aos plano tangente $T_p S$. Logo, para cada $p \in S$

$$I_p(w_1, w_2) = \langle w_1, w_2 \rangle,$$

com $w_1, w_2 \in T_p S$.

A expressão da primeira forma fundamental (I_p) em coordenadas locais pode ser obtida do seguinte modo: Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização local numa vizinhança de $p \in S$. Temos $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, então

$$\alpha'(t) = X_u u'(t) + X_v v'(t).$$

portanto,

$$\begin{aligned} w = \alpha'(0) &= X_u(q)u'(0) + X_v(q)v'(0) \\ &= aX_u(q) + bX_v(q), \end{aligned}$$

onde $a = u'(0)$ e $b = v'(0)$. Assim,

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle aX_u(q) + bX_v(q), aX_u(q) + bX_v(q) \rangle \\ &= a^2 \langle X_u(q), X_u(q) \rangle + 2ab \langle X_u(q), X_v(q) \rangle + b^2 \langle X_v(q), X_v(q) \rangle \\ &= a^2 E(q) + 2abF(q) + b^2 G(q), \end{aligned}$$

onde $E, F, G : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis, chamados **coeficientes da primeira forma fundamental** com respeito à parametrização X .

Definição 1.12 A *Segunda forma fundamental II* é definida da seguinte forma:

$$II_p(w_1, w_2) = \langle -dN_p(w_1), w_2 \rangle,$$

com $w_1, w_2 \in T_p S$, onde $p \in S$, dN_p é a diferencial da aplicação normal de Gauss em p .

A expressão da segunda forma fundamental (II_p) em coordenadas locais pode ser escrita da seguinte forma: seja $X(u, v)$ uma parametrização em um ponto $p \in S$ de uma

superfície S , e seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em S , como $\alpha(0) = p$. Para simplificar a notação, convencionaremos que todas as funções que aparecem abaixo indicam seus valores no ponto p .

O vetor tangente a $\alpha(t)$ em p é $\alpha' = X_u u' + X_v v'$ e

$$dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'.$$

A expressão da segunda forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ é dada por

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= I(u')^2 + 2m u' v' + n(v')^2, \end{aligned}$$

onde, já que $\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$,

$$\begin{aligned} l &= -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle, \\ m &= -\langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle, \\ n &= -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle, \end{aligned}$$

onde $l, m, n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis, chamados **coeficientes da segunda forma fundamental** com respeito à parametrização X .

Observação 1.13 Para cada $p \in S$, dN_p é auto-adjunta com respeito a primeira forma fundamental I . Consequentemente, a segunda forma fundamental II é uma forma bilinear simétrica sobre $T_p S$, para todo $p \in S$.

Definição 1.14 As **curvaturas principais** k_1, k_2 de S em um ponto p , são os autovalores de dN_p . Dessa forma, definimos a **curvatura média** H e a **curvatura de Gauss** K por:

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{\text{tra}(-dN_p)}{2} = \frac{1}{2} \frac{lG - 2mF + nE}{EG - F^2}, \quad (1-1)$$

e

$$K = k_1 k_2 = \det(-dN_p) = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}, \quad (1-2)$$

onde tra e \det denotam, respectivamente, o traço e o determinante de dN_p , e, $\{E, F, G\}$, $\{l, m, n\}$ os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais.

Nas próximas seções, deduziremos as fórmulas de curvatura, curvatura Gaussiana e curvatura média para curvas e superfícies implícitas, respectivamente, com base nos estudos realizados por Ron Goldman em [9].

1.2 Fórmulas de Curvatura para Curvas e Superfícies Implícitas

As fórmulas de curvatura para curvas e superfícies implícitas são um pouco mais complexas do que as fórmulas para curvas e superfícies parametrizadas. Aqui fazemos um resumo de algumas das fórmulas gerais para curvatura em curvas e superfícies implícitas.

Para curvas planares, a curvatura possui várias definições equivalentes:

- (i) Quantidade de desvio da curva da reta tangente;
- (ii) Taxa de variação da direção tangente;
- (iii) Recíproco do raio do círculo osculador;
- (iv) Razão entre o elemento de área da imagem circular pelo elemento de comprimento de arco.

Para superfícies, a curvatura é mais complexa. Em analogia com as curvas, a curvatura das superfícies deve capturar o desvio da superfície em relação ao plano tangente. No entanto, ao contrário das curvas planares, existem várias maneiras de medir esse desvio. A forma do parabolóide osculante fornece uma medida aproximada de como a superfície se desvia localmente do plano tangente. Informações mais precisas são fornecidas pelas curvaturas média e Gaussiana. Abaixo algumas características destas curvaturas.

Curvatura Gaussiana

- (i) Produto das curvaturas principais;
- (ii) Razão entre o elemento de área da imagem esférica e o elemento de área superficial.

Curvatura Média

- (iii) Média aritmética das curvaturas principais;
- (iv) Taxa de variação da área superficial sob pequenas deformações na direção normal.

A partir desses princípios, podem ser derivadas fórmulas explícitas de curvatura para curvas e superfícies parametrizadas. Vamos revisar essas fórmulas nas duas subseções seguintes.

Fórmulas de Curvatura para Curvas Parametrizadas

Considere uma curva parametrizada $X(s)$ em 3-dimensões parametrizada pelo comprimento de arco. Seja $X(t)$ qualquer outra parametrização de X , e seja X' , X'' e X''' a primeira, segunda e terceira derivadas de X em relação a t . O vetor tangente unitário de X é dado por

$$T = \frac{dX}{ds} = \frac{X'}{|X'|}.$$

Portanto, em dimensões 3, a curvatura

$$k = \left| \frac{dX}{ds} \right| = \frac{|X' \times X''|}{|X'|}.$$

Em dimensões 2, esta fórmula de curvatura se reduz a

$$k = \left| \frac{dX}{ds} \right| = \frac{|\det(X', X'')|}{|X'|^3}.$$

A torção mede o desvio do plano osculador. Sua fórmula é dada por

$$\tau = \frac{\det\left(\frac{dT}{ds}, \frac{d^2T}{ds^2}\right)}{k^2} = \frac{\det(X', X'', X''')}{|X' \times X''|^2}.$$

As equações de Frenet (veja abaixo) expressam as derivadas do vetor tangente (T), vetor normal (N) e vetor binormal ($T \times N$) em termos da tangente, normal, binormal, curvatura e torção. Podemos usar as equações de Frenet para gerar fórmulas explícitas para a curvatura e torção em termos dos vetores tangente e normal e suas derivadas (veja Tabela 1.1). Vamos utilizar essas fórmulas explícitas para desenvolver fórmulas fechadas para a curvatura e torção de curvas implícitas.

Table 1.1: Fórmulas explícitas para a curvatura e torção em termos dos vetores tangente e normal e suas derivadas. Essas fórmulas são facilmente deduzidas das equações de Frenet.

Equações de Frenet (Stoker,1969)	Fórmulas da curvatura	Fórmulas da torção
$\frac{dT}{ds} = kN$	$k = \frac{dT}{ds} \cdot N$	$\tau = \frac{dN}{ds} \cdot (T \times N)$
$\frac{dN}{ds} = -kT + \tau(T \times N)$	$k = -\frac{dN}{ds} \cdot T$	$\tau = -\frac{d(T \times N)}{ds} \cdot N$
$\frac{d(T \times N)}{ds} = -\tau N$	$k = \left \frac{dT}{ds} \times T \right $	$\tau = \det\left(T, N, \frac{dN}{ds}\right)$
	$k = \left \frac{dN}{ds} \times N \right $ se $\tau = 0$	$\tau = \frac{\det\left(T, \frac{dT}{ds}, \frac{d^2T}{ds^2}\right)}{k^2}$

Fórmulas de curvatura para superfícies parametrizadas

Seja $X(s, t)$ uma superfície parametrizada e seja X_s e X_t as derivadas parciais de X em relação a s e t . (As derivadas de ordem superior serão denotadas da maneira usual repetindo s e t o número apropriado de vezes). O vetor normal à superfície é perpendicular aos vetores tangentes X_s e X_t . Portanto, o vetor normal unitário é dado por

$$N = N(s, t) = \frac{X_s \times X_t}{|X_s \times X_t|}.$$

A curvatura média e Gaussiana geralmente são definidas em termos das primeiras e segundas formas fundamentais da superfície. Essas formas são representadas pelas seguintes matrizes [21]:

Primeira forma fundamental:

$$I = \begin{pmatrix} X_s \cdot X_s & X_s \cdot X_t \\ X_t \cdot X_s & X_t \cdot X_t \end{pmatrix};$$

Segunda forma fundamental:

$$II = \begin{pmatrix} X_{ss} \cdot N & X_{st} \cdot N \\ X_{ts} \cdot N & X_{tt} \cdot N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} X_s \cdot N_s & X_s \cdot N_t \\ X_t \cdot N_s & X_t \cdot N_t \end{pmatrix}.$$

Observe que em nossas duas matrizes para a segunda forma fundamental, $X_{ss} \cdot N = -X_s \cdot N_s$ pelo fato de $X_s \cdot N = 0$. Derivando $X_s \cdot N = 0$ em relação a s , obtemos $X_{ss} \cdot N + X_s \cdot N_s = 0$. As outras igualdades nessas matrizes para a segunda forma fundamental podem ser estabelecidas de maneira semelhante.

Em termos das primeira e segunda formas fundamentais, as curvaturas média e Gaussiana são calculadas pelas expressões dadas abaixo. Na fórmula para a curvatura média, II^* denota a adjunta de II , isto é,

$$II^* = \begin{pmatrix} X_{tt} \cdot N & -X_{ts} \cdot N \\ -X_{st} \cdot N & X_{ss} \cdot N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X_t \cdot N_t & X_t \cdot N_s \\ X_s \cdot N_t & -X_s \cdot N_s \end{pmatrix}$$

Curvatura Gaussiana:

$$K = \frac{\det(II)}{\det(I)}.$$

Curvatura Média:

$$H = \frac{\text{tra}(I \cdot II^*)}{2\det(I)},$$

onde \det e tra denotam, respectivamente, o determinante e o traço das matrizes.

Embora essas fórmulas de curvatura sejam as fórmulas clássicas encontradas na maioria dos livros de Geometria Diferencial [21], precisamos ajustar um pouco essas fórmulas para usá-las efetivamente quando estudamos superfícies implícitas. Com as notações acima, obtemos as seguintes fórmulas.

Lema 1.15

1. $\det(I) = |X_s \times X_t|^2$.

$$2. \det(II) = (X_s \times X_t) \cdot (N_s \times N_t).$$

Prova. ver em [9]. □

Corolário 1.16

$$K = \frac{(X_s \times X_t) \cdot (N_s \times N_t)}{|X_s \times X_t|^2}.$$

Lema 1.17

$$\text{tra}(I \cdot II^*) = (X_s \times X_t) \cdot (X_t \times N_s) - (X_s \times X_t) \cdot (X_s \times N_t).$$

Prova. ver em [9]. □

Corolário 1.18

$$H = \frac{(X_s \times X_t) \cdot ((X_t \times N_s) - (X_s \times N_t))}{2 |X_s \times X_t|^2}.$$

Fórmulas da curvatura para curvas planas implícitas.

A curvatura é um efeito de segunda ordem, onde apenas as derivadas primeira e segunda aparecem na fórmula de curvatura para curvas parametrizadas. Portanto, para curvas planares implícitas $F(x, y) = 0$, a curvatura deve depender apenas do gradiente ∇F e da Hessiana $H(F)$. Vamos adotar a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \nabla F &= (F_x, F_y), \\ H(F) &= \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{pmatrix} = \nabla(\nabla F), \end{aligned}$$

aqui, ∇ aplicado ao vetor ∇F que é um vetor linha significa calcular o gradiente de cada componente e escrever esses gradientes de componentes em uma matriz como vetores coluna consecutivos.

Como o gradiente de $F(x, y)$ é perpendicular às curvas de nível $F(x, y) = c$, o gradiente ∇F é paralelo à normal de $F(x, y) = 0$. Portanto, temos as seguintes fórmulas:

Curvas implícitas planares:

1. Curva implícita: $F(x, y) = 0$.

2. Normal: $\nabla F = (F_x, F_y)$.
3. Normal unitário: $N(F) = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{(F_x, F_y)}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}$.
4. Tangente: $Tan(F) = k \times \nabla F = (-F_y, F_x)$.
5. Tangente unitário: $T(F) = \frac{Tan(F)}{|Tan(F)|} = \frac{(-F_y, F_x)}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}$.

Proposição 1.19 (*Fórmula de curvatura para curvas planares implícitas*).

$$k = -\frac{T(F) \cdot H(F) \cdot T(F)^T}{|\nabla F|} = -\frac{(-F_y, F_x) \cdot \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix}}{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1-3)$$

Prova. Das equações de Frenet temos,

$$k = -\frac{dN}{ds} \cdot T.$$

Logo, pela regra da cadeia,

$$k = -\left(\frac{\partial N}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{dy}{ds}\right) \cdot T = -T \cdot \nabla N \cdot T^T.$$

Mas pela regra do quociente,

$$\nabla N = \nabla \left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right) = \frac{|\nabla F| \nabla(\nabla F) - \nabla(|\nabla F|)^T \cdot \nabla F}{|\nabla F|^2}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla F) &= H(F), \\ \nabla F \cdot T^T &= \nabla F \cdot T = 0. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$k = -\frac{T(F) \cdot H(F) \cdot T(F)^T}{|\nabla F|}.$$

□

Uma observação sobre a invariância é apropriada aqui. A curva $F(x, y) = 0$ é idêntica à curva $cF(x, y) = 0$ para qualquer constante $c \neq 0$. Portanto, esperamos que a curvatura de $F(x, y) = 0$ seja a mesma que a curvatura de $cF(x, y) = 0$. Se $c > 0$, substituir F por cF no lado direito da Equação (1-3) introduz um fator de c^3 tanto no numerador quanto no denominador, portanto, a curvatura k permanece inalterada. No

entanto, substituir F por $-F$ no lado direito da Eq.(1-3) altera o sinal do numerador, mas não o sinal do denominador, mudando assim o sinal de k . Substituir F por $-F$ também altera a direção do vetor normal unitário $N(F) = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$. Portanto, o vetor de curvatura,

$$\tilde{k} = kN(F) = k \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$$

é invariante, mas o sinal da curvatura escalar k depende da escolha da direção da normal unitária, que, por sua vez, depende do sinal de F . Essa dependência de sinal também se manifesta no contexto paramétrico. Pelas equações de Frenet, $\frac{dT}{ds} = kN$. A derivada $\frac{dT}{ds}$ é uma invariante; os sinais de k e N não são invariantes, mas são mutuamente dependentes. No entanto, continuaremos a focar em expressões para a curvatura escalar k em vez do vetor de curvatura \tilde{k} , já que são expressões para a curvatura escalar que planejamos estender para fórmulas de curvatura de curvas espaciais implícitas e superfícies implícitas.

Para encontrar novas expressões para a curvatura, podemos proceder da seguinte maneira. Na tabela 1.1, apresentamos quatro fórmulas para a curvatura em termos do vetor tangente unitário, do normal unitário e de suas derivadas em relação ao comprimento de arco. Usando essas fórmulas e procedendo como na Proposição 1.19, aplicando a regra da cadeia e a regra do quociente, chegamos aos seguintes resultados.

Fórmulas alternativas de curvatura.

Para $k = \frac{dN}{ds} \cdot T$, temos

$$k = -\frac{\text{Tan}(F) \cdot H(F) \cdot \text{Tan}(F)^T}{|\nabla F|^3} = -\frac{(-F_y F_x) \cdot \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix}}{|\nabla F|^3}.$$

Para k dada por $k = \frac{dT}{ds} \cdot N$, temos

$$k = \frac{\text{Tan}(F) \cdot \nabla(\text{Tan}(F)) \cdot \nabla F^T}{|\nabla F|^3} = -\frac{\begin{pmatrix} -F_y & F_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -F_{xy} & F_{xx} \\ -F_{yy} & F_{xy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}. \quad (1-4)$$

Para $k = \left| \frac{dT}{ds} \times N \right|$ ($\tau = 0$), temos

$$k = \frac{|\text{Tan}(F) \cdot (H(F)) \times \nabla F|}{|\nabla F|^3} = \frac{\begin{pmatrix} -F_y & F_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x & F_y \end{pmatrix}}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}. \quad (1-5)$$

Finalmente, para $k = \frac{dT}{ds} \times T$, temos

$$k = \frac{|(\text{Tan}(F) \cdot \nabla(\text{Tan}(F))) \times \nabla F|}{|\text{Tan}(F)|^3} = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} -F_y & F_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -F_{xy} & F_{xx} \\ -F_{yy} & F_{xy} \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} -F_y & F_x \end{pmatrix} \right|}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}. \quad (1-6)$$

Observe que no plano, os produtos cruzados que aparecem nas Eqs. (1-5) e (1-6) são realmente escalares, os determinantes dos dois fatores. Portanto, se desejarmos a curvatura com sinal, devemos calcular esses determinantes e ignorar o valor absoluto.

Podemos verificar facilmente a validade das Eqs.(1-4) e (1-6) expandindo os lados direitos e observando que essas expressões são cada uma iguais ao lado direito da Eq.(1-4). A Eq. (1-6) é particularmente interessante porque o lado direito depende apenas de $\text{Tan}(F)$. Para curvas espaciais implícitas, a direção tangente é conhecida, já que se a curva espacial é dada pela interseção de duas superfícies implícitas $F_1(x, y, z) = 0 \cap F_2(x, y, z) = 0$, então a tangente é paralela a $\nabla F_1 \times \nabla F_2$. Portanto, esperamos que a Eq. (1-6) para a curvatura de curvas planares implícitas se estenda facilmente para curvas espaciais implícitas. Em relação às fórmulas de curvatura para superfícies implícitas, é nosso interesse contemplar tanto a curvatura média quanto a curvatura Gaussiana. Portanto, precisamos de duas expressões diferentes para a curvatura de uma curva planar implícita que se estendam facilmente, mas de maneiras diferentes, para superfícies implícitas. Nenhuma das expressões em Eqs. (1-4)-(1-6) serviram, já que todas essas expressões dependem de $\text{Tan}(F)$, e para superfícies implícitas não há um análogo de $\text{Tan}(F)$. Para superfícies implícitas, precisamos de fórmulas que dependam apenas do gradiente e da Hessiana. Portanto, devemos adotar uma abordagem diferente. Um método para desenvolver novas expressões para a curvatura é explorar o operador adjunto (veja Tabela 1.2). Adotando a notação da Tabela 1.2, é fácil verificar as seguintes identidades:

Table 1.2: O operador adjunto $*$ para constantes, vetores linha e coluna bidimensionais, e matrizes 2×2

Constante	k	$k^* = k$
Vetores linha	$r = (r_1, r_2)$	$r^* = (-r_2, r_1)^T$
Vetores coluna	$c = (c_1, c_2)^T$	$c^* = -(-c_2, c_1)$
Matrizes	$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$	$M^* = \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{21} \\ -m_{12} & m_{11} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}c^* \cdot r^* &= r \cdot c, \\(M \cdot c)^* &= c^* \cdot M^*, \\(r \cdot M)^* &= M^* \cdot r^*,\end{aligned}$$

Portanto, para quaisquer vetores linha e coluna bidimensionais r , c e qualquer matriz 2×2 M ,

$$r \cdot M \cdot c = (r \cdot M \cdot c)^* = c^* \cdot M^* \cdot r^*.$$

O adjunto $H^*(F)$ da matriz hessiana é dado por

$$H^*(F) = \begin{pmatrix} F_{yy} & -F_{yx} \\ -F_{xy} & F_{xx} \end{pmatrix} = -\nabla(\text{Tan}(F)).$$

Além disso, por construção, o adjunto do gradiente é o vetor tangente, e o adjunto do vetor tangente é o negativo do gradiente, ou seja,

$$\begin{aligned}\nabla^*(F) &= \text{Tan}(F)^T, \\ \text{Tan}^*(F) &= -\nabla(F)^T.\end{aligned}$$

Portanto, aplicando o operador adjunto à fórmula de curvatura

$$k = -\frac{\text{Tan}(F) \cdot H(F) \cdot \text{Tan}(F)^T}{|\nabla F|^3},$$

gera a seguinte fórmula adjunta da hessiana para a curvatura de uma curva planar implícita:

Fórmula adjunta da Hessiana

$$k = -\frac{\nabla F \cdot H^*(F) \cdot \nabla F^T}{|\nabla F|^3} = \frac{\begin{pmatrix} F_x & F_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{yy} & -F_{yx} \\ -F_{xy} & F_{xx} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}. \quad (1-7)$$

Novamente, é fácil verificar diretamente que o lado direito da Eq.(1-7) concorda com o lado direito da Eq.(1-4), portanto, a Eq.(1-7) é de fato mais uma expressão válida para a curvatura de uma curva planar implícita. Além disso, esta expressão em termos do gradiente e da adjunta da hessiana se estende facilmente a superfícies implícitas, então podemos esperar que esta fórmula adjunta da hessiana represente a curvatura de uma superfície implícita. Voltaremos a este tópico adiante.

A fórmula adjunta da hessiana pode se estender a uma das duas curvaturas (média ou Gaussiana) para uma superfície implícita, mas precisamos de outra expressão de curvatura equivalente se esperamos representar a outra curvatura para superfícies implícitas. Além disso, podemos preferir trabalhar diretamente com a hessiana em vez do adjunto da hessiana. Afortunadamente, há outra fórmula equivalente para a curvatura de uma curva planar implícita que usa apenas o gradiente e a matriz Hessiana.

Para eliminar $H^*(F)$ da Eq.(1-7), observe que

$$H(F) + H^*(F) = \text{Tra}(H(F))I,$$

onde I é a matriz identidade. Agora, substituindo $H^*(F)$ na Eq.(1-7), obtemos a seguinte expressão para a curvatura:

Fórmula da hessiana

$$K = \frac{\nabla F \cdot H(F) \cdot \nabla F^T - |\nabla F|^2 \text{tra}(H(F))}{|\nabla F|^3}. \quad (1-8)$$

Encerramos esta seção com mais duas expressões alternativas adicionais para a curvatura de uma curva planar implícita, que aparecerão novamente quando estudarmos a curvatura para superfícies implícitas. Como de costume, a validade dessas fórmulas pode ser verificada por meio do cálculo direto dos lados direitos.

Cálculo de determinante

$$k = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} H(F) & \nabla F^T \\ \nabla F & 0 \end{pmatrix}}{|\nabla F|^3}. \quad (1-9)$$

Fórmula da divergência

$$k = -\nabla \cdot N(F) = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right). \quad (1-10)$$

A divergência do normal unitário é frequentemente adotada como a definição da curvatura para uma curva planar implícita. Não utilizamos essa definição aqui porque queríamos desenvolver fórmulas de curvatura para curvas implícitas diretamente a partir de fórmulas de curvatura conhecidas para curvas paramétricas. Além disso, embora de interesse teórico, essa fórmula de divergência é menos prática como ferramenta

computacional do que muitas das outras expressões para a curvatura desenvolvidas nesta seção.

Formulas da Curvatura para Superfícies Implícitas.

Queremos obter fórmulas de curvatura para superfícies implícitas $F(x, y, z) = 0$, assim como fórmulas de curvatura para curvas implícitas $F(x, y) = 0$, dependendo apenas do gradiente ∇F , da matriz hessiana $H(F)$ e do adjunto da matriz hessiana $H^*(F)$. Adotaremos a seguinte notação para as superfícies:

$$\begin{aligned}\nabla F &= (F_x \ F_y \ F_z), \\ H(F) &= \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix} = \nabla(\nabla F), \\ H^*(F) &= \begin{pmatrix} \text{Cofactor}(F_{xx}) & \text{Cofactor}(F_{xy}) & \text{Cofactor}(F_{xz}) \\ \text{Cofactor}(F_{yx}) & \text{Cofactor}(F_{yy}) & \text{Cofactor}(F_{yz}) \\ \text{Cofactor}(F_{zx}) & \text{Cofactor}(F_{zy}) & \text{Cofactor}(F_{zz}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{yy}F_{zz} - F_{yz}F_{zy} & F_{yz}F_{zx} - F_{yx}F_{zz} & F_{yx}F_{zy} - F_{yy}F_{zx} \\ F_{xz}F_{zy} - F_{xy}F_{zz} & F_{xx}F_{zz} - F_{xz}F_{zx} & F_{xy}F_{zx} - F_{xx}F_{zy} \\ F_{xy}F_{yz} - F_{xz}F_{yy} & F_{yx}F_{xz} - F_{xx}F_{yz} & F_{xx}F_{yy} - F_{xy}F_{yx} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Se aplicamos ∇ a um vetor linha significa calcular o gradiente de cada componente e escrever esses gradientes de componentes em uma matriz como vetores coluna consecutivos. Como acontece com as curvas, o gradiente ∇F é paralelo à normal da superfície $F(x, y, z) = 0$. Portanto, a normal unitária é dada por:

$$N(F) = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{(F_x \ F_y \ F_z)}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}$$

Com esta notação em mãos, estamos agora prontos para desenvolver fórmulas de curvatura para superfícies implícitas. As seguintes fórmulas de curvatura para superfícies implícitas aparecem em [20, p.204]; consulte também [14, pp.89-94].

Curvatura Gaussiana

$$K = \frac{\nabla F \cdot H^*(F) \cdot \nabla F^T}{|\nabla F|^4} = - \frac{\begin{vmatrix} H(F) & \nabla F^T \\ \nabla F & 0 \end{vmatrix}}{|\nabla F|^4}. \quad (1-11)$$

Curvatura Média

$$H = \frac{\nabla F \cdot H(F) \cdot \nabla F^T - |\nabla F|^2 \text{tra}(H)}{2|\nabla F|^3} = \frac{-\text{coeff}(\lambda) \text{in} \begin{vmatrix} H(F) - \lambda I & \nabla F^T \\ \nabla F & 0 \end{vmatrix}}{2|\nabla F|^3}. \quad (1-12)$$

Observe que a Eq. (1-11) para a curvatura Gaussiana é uma extensão para superfícies da fórmula do adjunto da hessiana Eq. (1-7) para a curvatura de curvas implícitas planas. O fator de normalização $|\nabla F|^4$ que aparece no denominador garante que $cF(x, y, z) = 0$ tenha a mesma curvatura que $F(x, y, z) = 0$. Além disso, a Eq. (1-12) para a curvatura média é uma extensão para superfícies implícitas da fórmula da hessiana Eq. (1-8) para a curvatura de curvas implícitas planas. O fator dois no denominador ocorre porque a curvatura média é a média das duas curvaturas principais.

As curvaturas principais k_1 e k_2 podem ser calculadas a partir das curvaturas média e Gaussiana H e K usando a fórmula padrão

$$k_1, k_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K}. \quad (1-13)$$

Também é possível verificar que

$$k_1, k_2 = \frac{-\text{roots} \left\{ \begin{vmatrix} H(F) - \lambda I & \nabla F^T \\ \nabla F & 0 \end{vmatrix} \right\}}{|\nabla F|} \quad (1-14)$$

Usando as equações (1-11) e (1-12) para demonstrar que a Eq. (1-14) é equivalente à Eq. (1-13). Agora, vamos derivar as equações (1-11) e (1-12) para as curvaturas Gaussiana e média de superfícies implícitas a partir das fórmulas de curvatura correspondentes para superfícies paramétricas.

Teorema 1.20

$$K = \frac{\nabla F \cdot H^*(F) \cdot \nabla F^T}{|\nabla F|^4}.$$

Prova. Vamos considerar apenas pontos regulares na superfície implícita, ou seja, pontos onde $\nabla F \neq 0$, já que a curvatura Gaussiana não é definida em pontos na superfície que não são regulares. Pelo teorema da função implícita, se $\nabla F \neq 0$, então a superfície possui uma parametrização local $X(s, t)$. Vamos considerar

$$N = N(s, t) = \frac{X_s \times X_t}{|X_s \times X_t|}.$$

Então, N é a normal unitária à superfície. Portanto, segundo o Corolário 1.16.

$$K = \frac{(X_s \times X_t) \cdot (N_s \times N_t)}{|X_s \times X_t|^2}.$$

Agora, mostraremos como transformar o lado direito desta equação no lado direito da Eq.(1-11). Já que a normal unitária à superfície também é dada pela fórmula

$$N = \frac{\nabla F}{|\nabla F|};$$

segue-se pela regra da cadeia que se $u = s, t$, então

$$N_u = \frac{X_u \cdot H(F)}{|\nabla F|} + \text{ termo paralelo a } \nabla F.$$

Portanto,

$$N_s \times N_t = \frac{(X_s \cdot H(F)) \times (X_t \cdot H(F))}{|\nabla F|} + \text{ termos perpendiculares a } \nabla F.$$

Mas para todos os vetores tridimensionais a, b e todas as matrizes M que pertencem ao espaço $\mathbb{R}^{3 \times 3}$,

$$(a \cdot M) \times (b \cdot M) = (a \times b) \cdot M^*$$

onde M^* denota o adjunto de M . Então,

$$N_s \times N_t = \frac{(X_s \times X_t) \cdot H^*(F)}{|\nabla F|^2} + \text{ termos perpendiculares a } \nabla F.$$

Agora, como ∇F e $X_s \times X_t$ são ambos paralelos à normal da superfície, existe uma constante λ tal que $X_s \times X_t = \lambda \nabla F$. Assim,

$$(X_s \times X_t) \cdot (N_s \times N_t) = \frac{\lambda^2 \nabla F \cdot H^*(F) \cdot \nabla F^T}{|\nabla F|^2},$$

$$|X_s \times X_t|^2 = \lambda^2 |\nabla F|^2.$$

Portanto,

$$K = \frac{(X_s \times X_t) \cdot (N_s \times N_t)}{|X_s \times X_t|^2} = \frac{\nabla F \cdot H^*(F) \cdot \nabla F^T}{|\nabla F|^4}.$$

□

Corolário 1.21

$$K = - \frac{\begin{vmatrix} H(F) & \nabla F^T \\ \nabla F & 0 \end{vmatrix}}{|\nabla F|^4}.$$

Teorema 1.22

$$H = \frac{\nabla F \cdot H(F) \cdot \nabla F^T - |\nabla F|^2 \text{tra}(H)}{2|\nabla F|^3}.$$

Prova. Novamente, consideraremos apenas pontos regulares na superfície implícita, pontos onde $\nabla F \neq 0$, pois a curvatura média não é definida em pontos na superfície que não são regulares. Pelo teorema da função implícita, se $\nabla F \neq 0$, então a superfície possui uma parametrização local $X(s, t)$. Seja

$$N = N(s, t) = \frac{X_s \times X_t}{|X_s \times X_t|};$$

então N é o normal unitário à superfície. Portanto, pelo Corolário 1.18,

$$H = \frac{(X_s \times X_t) \cdot ((X_t \times N_s) - (X_s \times N_t))}{2|X_s \times X_t|^2}.$$

Vamos agora mostrar como transformar o lado direito desta equação no lado direito da Eq.(1-12). Já que a normal unitária à superfície também é dada pela fórmula:

$$N = \frac{\nabla F}{|\nabla F|},$$

segue-se pela regra da cadeia, exatamente como na prova do Teorema 1.20, que se $u = s, t$, então

$$N_u = \frac{X_u \cdot H(F)}{|\nabla F|} + \text{termo paralelo a } \nabla F.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} X_t \times N_s &= \frac{X_t \times (X_s \cdot H(F))}{|\nabla F|} + \text{termos perpendiculares a } \nabla F, \\ X_s \times N_t &= \frac{X_s \times (X_t \cdot H(F))}{|\nabla F|} + \text{termos perpendiculares a } \nabla F. \end{aligned}$$

Então,

$$X_t \times N_s - X_s \times N_t = \frac{(X_s \times X_t) \cdot H(F) - \text{tra}(H(F))(X_s \times X_t)}{|\nabla F|} + \text{termos perpendiculares a } \nabla F,$$

Mas para todos os vetores tridimensionais a, b e todas as matrizes simétricas M que

pertecem ao espaço $\mathbb{R}^{3 \times 3}$,

$$b \times (a \cdot M) - a \times (b \cdot M) = (a \times b) \cdot M - \text{tra}(M)(a \times b).$$

Logo,

$$X_t \times N_s - X_s \times N_t = \frac{(X_s \times X_t) \cdot H(F) - \text{tra}(H(F))(X_s \times X_t)}{|\nabla F|} + \text{termos perpendiculares a } \nabla F.$$

Agora, como ∇F e $X_s \times X_t$ são ambos paralelos à normal da superfície, existe uma constante λ tal que $X_s \times X_t = \lambda \nabla F$. Assim

$$(X_s \times X_t) \cdot ((X_t \times N_s) - (X_s \times N_t)) = \frac{\lambda^2 \nabla F \cdot H(F) \cdot \nabla F^T - \lambda^2 \text{tra}(H(F)) |\nabla F|^2}{|\nabla F|},$$

$$|X_s \times X_t|^2 = \lambda^2 |\nabla F|^2.$$

Assim,

$$H = \frac{(X_s \times X_t) \cdot ((X_s \times N_t) - (X_t \times N_s))}{2|X_s \times X_t|^2} = \frac{\nabla F \cdot H(F) \cdot \nabla F^T - |\nabla F|^2 \text{tra}(H)}{2|\nabla F|^3}.$$

□

Corolário 1.23

$$H = \frac{-\text{coeff}(\lambda) \text{in} \begin{vmatrix} H(F) - \lambda I & \nabla F^T \\ \nabla F & 0 \end{vmatrix}}{2|\nabla F|^3}.$$

Prova. Este corolário é obtido expandindo o lado direito e verificando que o resultado fornece a mesma expressão que a expansão do lado direito na fórmula de curvatura no Teorema 1.22. □

Corolário 1.24

$$H = -\nabla \cdot N(F) = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right).$$

Prova. Novamente, este corolário é obtido expandindo o lado direito e verificando que o resultado fornece a mesma expressão que a expansão do lado direito na fórmula de curvatura no Teorema 1.22. □

A divergência da normal unitária é frequentemente considerada como a definição da curvatura média para superfícies implícitas. Essa fórmula de divergência imita a fórmula de divergência correspondente para a curvatura de uma curva implícita. Não usamos essa definição aqui porque, assim como no caso de curvas, queríamos desenvolver a fórmula da curvatura média para superfícies implícitas diretamente a partir da conhecida fórmula para a curvatura média de superfícies paramétricas. Além disso, embora de interesse teórico, essa fórmula de divergência é menos prática como uma ferramenta computacional do que a Eq.(1-12).

Sobre a invariância dessas fórmulas de curvatura. A superfície $F(x, y, z) = 0$ é idêntica à superfície $cF(x, y, z) = 0$ para qualquer constante $c \neq 0$. Portanto, ingenuamente, esperaríamos que a curvatura de $F(x, y, z) = 0$ fosse a mesma que a curvatura de $cF(x, y, z) = 0$. Para curvas implícitas, vimos que essa invariância não se mantém completamente se $c < 0$. Agora com relação às superfícies implícitas, temos que: para a curvatura Gaussiana, essa invariância é de fato mantida. Se $c \neq 0$, então substituir F por cF no lado direito da Eq.(1-11) introduz um fator de c^4 tanto no numerador quanto no denominador, assim a curvatura Gaussiana K não é alterada.

No entanto, a curvatura média se comporta mais como a curvatura de curvas planas implícitas. Se $c > 0$, substituir F por cF no lado direito da Eq.(1-12) introduz um fator de c^3 tanto no numerador quanto no denominador, então a curvatura média H não é alterada. No entanto, substituir F por $-F$ no lado direito da Eq.(1-12) muda o sinal do numerador, mas não o sinal do denominador, assim muda o sinal de H . Naturalmente, substituir F por $-F$ também muda a direção da normal unitária $N(F) = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$. Portanto, o vetor da curvatura média,

$$\tilde{H} = HN(F) = H \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$$

é invariante, mas o sinal da curvatura média H depende da escolha da direção da normal unitária, que, por sua vez, depende do sinal de F . Essa dependência de sinal é exatamente a mesma dependência de sinal que observamos na fórmula de curvatura para curvas planas implícitas. Dessa forma, a curvatura média, mais do que a curvatura Gaussiana, assemelha-se à curvatura de curvas planas implícitas. A fórmula de divergência é mais uma maneira pela qual a curvatura média imita mais de perto o comportamento da curvatura de curvas planas implícitas.

Exemplo 1.1 (*Esfera*). Podemos verificar nossas fórmulas de curvatura na esfera.

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Para calcular as curvaturas média e Gaussiana, precisamos de

$$\begin{aligned}\nabla F &= (F_x \ F_y \ F_z) = (2x \ 2y \ 2z), \\ H(F) &= \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ H^*(F) &= \begin{pmatrix} \text{Cofactor}(F_{xx}) & \text{Cofactor}(F_{xy}) & \text{Cofactor}(F_{xz}) \\ \text{Cofactor}(F_{yx}) & \text{Cofactor}(F_{yy}) & \text{Cofactor}(F_{yz}) \\ \text{Cofactor}(F_{zx}) & \text{Cofactor}(F_{zy}) & \text{Cofactor}(F_{zz}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\text{tra}(H(F)) = 6.$$

Curvatura Gaussiana:

$$\begin{aligned}K &= \frac{\nabla F \cdot H^*(F) \cdot \nabla F^T}{|\nabla F|^4}, \\ K &= \frac{(2x \ 2y \ 2z) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}}{(4x^2 + 4y^2 + 4z^2)^2} = \frac{16(x^2 + y^2 + z^2)}{16(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{1}{R^2}.\end{aligned}$$

Curvatura Média:

$$\begin{aligned}H &= \frac{\nabla F \cdot H(F) \cdot \nabla F^T - |\nabla F|^2 \text{tra}(H(F))}{2|\nabla F|^3}, \\ H &= \frac{(2x \ 2y \ 2z) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} - 6(4x^2 + 4y^2 + 4z^2)}{2(4x^2 + 4y^2 + 4z^2)^{3/2}} = \frac{8R^2 - 24R^2}{2(8R^3)} = -\frac{1}{R}.\end{aligned}$$

Observe que a curvatura média aqui é negativa, mas observe também que $\nabla F = (2x, 2y, 2z)$ é a normal apontando para fora. Assim, como era de se esperar, o vetor de curvatura média $\tilde{H} = H \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$ aponta para dentro da esfera e tem magnitude $|H| = \frac{1}{R}$.

Superfícies de Translação e Homotéticas com Curvatura Constante

Uma pergunta natural na geometria diferencial é saber quais são as superfícies regulares (mergulhadas ou imersas) que verificam uma determinada condição sobre a curvatura. Neste capítulo, abordaremos o problema de classificar as superfícies de translação e homotéticas com curvatura média constante (CMC) ou curvatura Gaussiana constante (CGC) no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 , baseado nos resultados obtidos no artigo [17]. O primeiro resultado refere-se ao caso em que a curvatura Gaussiana K é constante. Vamos provar que, sem nenhuma hipótese sobre as curvas geradoras, as únicas superfícies de translação com curvatura nula são as superfícies cilíndricas. O segundo resultado trata das superfícies homotéticas mínimas ($H = 0$), abordamos um resultado já conhecidos para o espaço Lorentz-Minkowski, e ofertaremos uma prova diferente para a versão Euclidiana. O terceiro resultado considera superfícies homotéticas no espaço Euclidiano com curvatura Gaussiana K constante, obtendo uma classificação completa.

O primeiro tipo de superfícies que estudaremos são as chamadas superfícies de translação que são obtidas ao transladar (mover sem girar) uma curva plana ao longo de uma direção no espaço.

2.1 Superfície de Translação

A motivação histórica do nosso problema provém do texto clássico de G. Darboux [2, livre I], onde são consideradas as chamadas "surface définies par des propriétés cinématiques", posteriormente conhecidas como superfícies de Darboux na literatura. Uma superfície de Darboux é definida cinematicamente como o movimento de uma curva por uma família uniparamétrica de movimentos rígidos de \mathbb{R}^3 . Então, uma parametrização para essa superfície $X(s, t) = A(t)\alpha(s) + \beta(t)$, onde α e β são duas curvas espaciais e $A(t)$ é uma matriz ortogonal. No caso que estamos considerando neste trabalho, $A(t)$ é a identidade. Mais precisamente, apresentamos a seguinte definição:

Definição 2.1 Uma superfície $S \subseteq \mathbb{R}^3$ é chamada de superfície de translação se esta pode ser descrita localmente como a soma $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$ de duas curvas espaciais $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\beta : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Observação 2.2

Sobre a Definição 2.2 temos as seguintes observações.

1. As curvas α e β são chamadas de curvas geratrizes de S .
2. No caso onde α e β são curvas planas contidas em planos ortogonais, a superfície de translação é dita do tipo *planar*.
3. O nome de superfície de translação se deve ao fato de que a superfície é obtida pela translação de α ao longo de β (ou vice-versa, pois os papéis de α e β podem ser trocados) e, portanto, todas as curvas coordenadas com $s = \text{constante}$ são congruentes por translação (de maneira similar para as curvas coordenadas com $t = \text{constante}$).

Podemos considerar um primeiro exemplo para superfícies mínimas ($H = 0$), Scherk demonstrou em 1835 que as únicas superfícies mínimas com curvatura Gaussiana não nula do tipo $z = f(x) + g(y)$ para duas funções suaves f e g é

$$z(x, y) = \frac{1}{a} \log \left| \frac{\cos(ay)}{\cos(ax)} \right|,$$

onde a é uma constante distinta de zero. Uma superfície $z = f(x) + g(y)$ pode ser vista como a soma das curvas planas $x \mapsto (x, 0, f(x))$ e $y \mapsto (0, y, g(y))$. Portanto, a superfície de Scherk é a única superfície de translação mínima com curvatura Gaussiana diferente de zero ($K \neq 0$) do tipo planar, ver fig. 2.1.

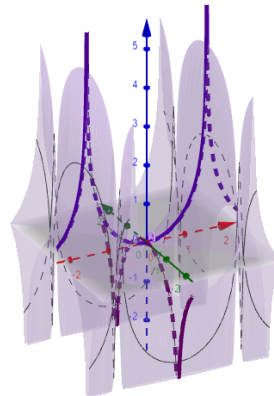


Figure 2.1: $\psi(x, y) = (x, 0, -\frac{1}{a} \log |\cos(ax)|) + (0, y, \frac{1}{a} \log |\cos(ay)|)$, $a > 0$

Outros exemplos de superfícies de translação que satisfazem a condição de ter a curvatura Gaussiana constante (CGC) ou curvatura media constante (CMC) são:

Exemplo 2.1 (cilindro reto) *O cilindro reto é uma superfície de translação com curvatura Gaussiana e ($K = 0$) e curvatura média constante diferente de zero ($H \neq 0$).*

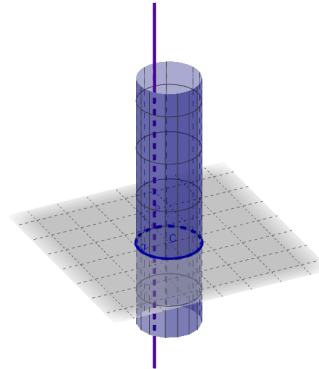


Figure 2.2: $\psi(u, v) = (\cos u, \sin u, 0) + (0, 0, v)$, $0 < u < 2\pi$

Exemplo 2.2 (Superfície cilíndrica) *O plano é um tipo de superfície cilíndrica que tem curvatura Gaussiana e curvatura média constante ($K = H = 0$). E em geral, as superfícies cilíndricas têm curvatura Gaussiana Constante ($K = 0$).*

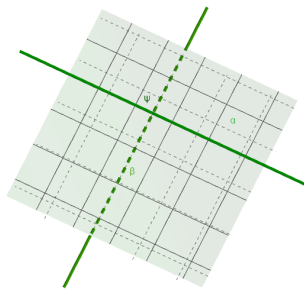


Figure 2.3: $\psi(u, v) = P_0 + uW_1 + vW_2$

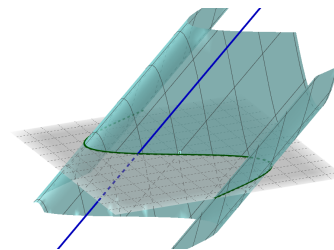


Figure 2.4: Superfície Cilíndrica Geral

Observação 2.3 *Por superfície cilíndrica queremos dizer uma superfície regrada cuja diretriz está contida em um plano e as geratrizes (retas) são paralelas a uma direção fixa em \mathbb{R}^3 .*

O problema de classificação de superfícies de translação com curvatura Gaussiana constante K é menos conhecido, no entanto, podemos encontrar na literatura o progresso desse problema.

1. Se α e β estão em planos ortogonais, as únicas superfícies mínimas de translação são os planos e a superfície de Scherk [19].
2. Se α e β estão em plano ortogonais, a únicas superfícies de translação com curvatura média constante são os planos, a superfície de Scherk e os cilindros circulares [15].

3. Se α e β estão em planos ortogonais, as únicas superfícies de translação com curvatura Gaussiana constante ($K = 0$), são as superfícies cilíndricas [15].
4. Se as duas curvas α e β são planas, as únicas superfícies mínimas de translação são os planos ou as superfícies que pertencem à família de superfícies de Scherk [4].
5. Se somente uma das curvas α ou β é plana, não existem superfícies mínimas de translação [4].

Observação 2.4 *Recentemente, López e Hazanis [12] provaram que, As superfícies cilíndricas são as únicas superfícies de translação em \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana constante. Respondendo ao problema inicial de classificar todas as superfícies de translação com curvatura Gaussiana constante.*

O resultado a seguir, sem qualquer hipótese sobre as curvas α e β , classifica as superfícies de translação com curvatura Gaussiana K constante.

Teorema 2.5

1. *As únicas superfícies de translação com curvatura Gaussiana nula ($K = 0$), são as superfícies cilíndricas.*
2. *Não existem superfícies de translação com curvatura Gaussiana constante não nula ($K \neq 0$), se uma das curvas geradoras é planar.*

Prova.

Suponha que a superfície S seja a soma de duas curvas $\alpha(s)$ e $\beta(t)$. Localmente, α e β são gráficos sobre os eixos coordenados de \mathbb{R}^3 . Pelo que podemos supor,

$$\alpha(s) = (s, f_1(s), f_2(s)), \quad s \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad \beta(t) = (g_1(t), t, g_2(t)), \quad t \in J \subseteq \mathbb{R}$$

para certas funções f_1, f_2, g_1 e g_2 . Observe que, se substituirmos as funções f_i ou g_i por uma constante aditiva, a superfície muda por uma translação do espaço Euclidiano. E portanto, no que se segue, consideramos essas funções a menos de constantes aditivas. A curvatura Gaussiana em coordenadas locais $X = X(s, t)$ se escreve como

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} \tag{2-1}$$

onde $\{E, F, G\}$ e $\{l, m, n\}$ são os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais em relação a X , respectivamente. No nosso caso, a parametrização de S é $X(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$, assim

$$X_s = \alpha'(s) = (1, f_1', f_2'), \quad X_t = \beta'(t) = (g_1', 1, g_2'), \quad X_{ss} = (0, f_1'', f_2''), \quad X_{tt} = (g_1'', 0, g_2''), \quad X_{st} = 0.$$

Calculando a normal obtemos

$$N = \frac{X_s \wedge X_t}{\|X_s \wedge X_t\|} = \frac{1}{\|X_s \wedge X_t\|} \begin{pmatrix} f'_1 g'_2 - f'_2 & g'_1 f'_2 - g'_2 & 1 - f'_1 g'_1 \end{pmatrix},$$

onde

$$\|X_s \wedge X_t\| = \sqrt{(f'_1 g'_2 - f'_2)^2 + (g'_1 f'_2 - g'_2)^2 + (1 - f'_1 g'_1)^2}.$$

Logo, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = 1 + (f'_1)^2 + (f'_2)^2, \quad F = g'_1 + f'_1 + f'_2 g'_2, \quad G = 1 + (g'_1)^2 + (g'_2)^2,$$

e da segunda forma fundamental

$$l = \frac{f''_1 (g'_1 f'_2 - g'_2) + f''_2 (1 - f'_1 g'_1)}{\sqrt{(f'_1 g'_2 - f'_2)^2 + (g'_1 f'_2 - g'_2)^2 + (1 - f'_1 g'_1)^2}},$$

$$m = 0,$$

$$n = \frac{g''_1 (f'_1 g'_2 - f'_2) + g''_2 (1 - f'_1 g'_1)}{\sqrt{(f'_1 g'_2 - f'_2)^2 + (g'_1 f'_2 - g'_2)^2 + (1 - f'_1 g'_1)^2}},$$

e como, $\|X_s \wedge X_t\|^2 = EG - F^2$, o cálculo de K nos leva a

$$K = \frac{[f''_2 - f''_1 g'_2 + g'_1 (f''_1 f'_2 - f'_1 f''_2)][g''_2 - f'_2 g''_1 + f'_1 (g''_1 g'_2 - g'_1 g''_2)]}{[1 + (f'_1)^2 + (f'_2)^2][1 + (g'_1)^2 + (g'_2)^2] - (g'_1 + f'_1 + f'_2 g'_2)^2}. \quad (2-2)$$

2.1.1 Caso $K = 0$

Como $k = 0$, de (2-1) temos que $l = 0$ ou $n = 0$. Suponha sem perda de generalidade que $l = 0$ (se $n = 0$ o argumento é similar). Deste modo temos,

$$l = f''_2 - f''_1 g'_2 + g'_1 (f''_1 f'_2 - f'_1 f''_2) = 0. \quad (2-3)$$

Então, temos vários casos a considerar.

1. Assuma $f''_1 = 0$. Então, $f'_1 = a$ e $f_1 = as$, para $a \in \mathbb{R}$, então substituindo em (2-3) teremos, $f''_2 (1 - ag'_1) = 0$.
 - (a) Se $f''_2 = 0$, então $f'_2 = b$ e $f_2 = bs$, para $b \in \mathbb{R}$. O que implica que a curva $\alpha(s) = (s, as, bs)$ é uma reta e portanto, a superfície é uma superfície cilíndrica cuja diretriz é a curva β .

(b) Se $f_2'' \neq 0$, então $a \neq 0$ e $g_1' = \frac{1}{a}$ o que implica $g_1 = \frac{t}{a}$. Então, $\alpha(s) = (s, as, f_2(s))$ e $\beta(t) = (\frac{t}{a}, t, g_2(t))$. Observe que α e β satisfazem a equação do plano $ax - y = 0$, portanto a superfície $X(s, t) = (s + \frac{t}{a}, as + t, f_2(s) + g_2(t))$ também está contida no mesmo plano.

2. Assuma $f_1'' \neq 0$ e $g_1'' = 0$. Então, $g_1' = a$ e $g_1 = at$, para $a \in \mathbb{R}$ e de (2-3) temos

$$f_2'' - g_2' f_1'' + a(f_1'' f_2' - f_1' f_2'') = 0$$

ou seja,

$$g_2' = \frac{f_2'' + a(f_1'' f_2' - f_1' f_2'')}{f_1''}. \quad (2-4)$$

O lado esquerdo da equação depende de s enquanto que o lado direito depende de t , então concluímos que as duas funções em (2-4) devem ser iguais a uma mesma constante $b \in \mathbb{R}$. Em particular, $g_2 = bt$. Agora, a curva $\beta(t) = (at, t, bt)$ é uma reta e a superfície é cilíndrica com a curva α como diretriz.

Note que sob estas condições, a equação (2-4) não oferece mais informação sobre a curva α .

3. Assuma $f_1'' g_1'' \neq 0$. Derivando (2-3) com relação a t temos,

$$-f_1'' g_2'' + g_1'(f_1'' f_2' - f_1' f_2'') = 0.$$

Então,

$$\frac{g_2''}{g_1'} = \frac{f_1'' f_2' - f_1' f_2''}{f_1''}.$$

Com o mesmo argumento utilizado acima, concluímos que existe uma constante $a \in \mathbb{R}$ de modo que

$$ag_1'' = g_2''.$$

Neste caso temos que,

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} \beta' & \beta'' & \beta''' \end{bmatrix} \right) &= \begin{vmatrix} g_1' & g_1'' & g_1''' \\ 1 & 0 & 0 \\ g_2' & ag_1'' & ag_1''' \end{vmatrix} \\ &= g_1' \cdot 0 - g_1''(ag_1''') + g_1'''(ag_1'') = 0, \end{aligned}$$

o que implica que a torsão de β é identicamente nula, isto prova que β é uma curva plana.

Agora, voltando para o início da demonstração, suponhamos que β está contida no

plano yz (ou equivalente, $g_1 = 0$), então a curvatura Gaussiana fica

$$K = \frac{(f_2'' - f_1'' g_2') g_2''}{((1 + (f_1')^2 + (f_2')^2)(1 + (g_2')^2) - (f_1' + f_2' g_2')^2)^2} = 0.$$

Isto é,

$$(f_2'' - f_1'' g_2') g_2'' = 0.$$

- (a) Se $g_2'' = 0$, então $g_2' = a$ e $g_2 = at$ para $a \in \mathbb{R}$. Portanto g_2 é linear, e consequentemente $\beta(t) = (0, t, at)$ é uma reta, provando assim que S é uma superfície cilíndrica com a curva α como diretriz.
- (b) Se $g_2'' \neq 0$, então $f_2'' - f_1'' g_2' = 0$ e como $f_1'' \neq 0$ então existe um $a \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\frac{f_2''}{f_1''} = a = g_2',$$

e assim, $g_2'' = 0$, o que leva a uma contradição.

Caso $K \neq 0$

Seguindo as mesmas idéias que em [4] distinguiremos dois casos: no primeiro, assumiremos que as duas curvas são planas, e no segundo, que só uma das curvas é plana.

1. Caso no qual α e β são curvas planas. Pelo resultado de Liu [15], consideraremos apenas o caso em que as curvas α e β não estão em planos mutuamente ortogonais. Note que, se as curvas estão em planos paralelos, a superfície de translação é um plano ou uma região do plano.

Sem perda de generalidade, podemos supor que α se encontra no plano xz e β no plano de equação $x \cos \theta - y \sin \theta = 0$ com $\cos \theta, \sin \theta \neq 0$. então, α e β se escrevem como

$$\alpha(s) = (s, 0, f(s)), \quad \beta(t) = (t \sin \theta, t \cos \theta, g(t)),$$

com f e g sendo funções suaves em s e t , respectivamente. Calculando K temos

$$K = \frac{\cos^2 \theta f'' g''}{(f'^2 + g'^2 + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta f' g')^2}.$$

Observe que o denominador sempre é diferente de zero, pois

$$\begin{aligned} f'^2 + g'^2 + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta f' g' &= (f')^2 - 2f' g' \sin \theta + (g')^2 \sin^2 \theta + (g')^2 - (g')^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\ &= (f' - g' \sin \theta)^2 + (g')^2 (1 - \sin^2 \theta) + \cos^2 \theta \\ &= (f' - g' \sin \theta)^2 + (g')^2 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

já que $\cos \theta \neq 0$. Continuando com a demonstração, observe que $K \neq 0$ implica f'' , $g'' \neq 0$. Derivando em relação a s e a t obtemos respectivamente,

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta f''' g'' &= 4K(f'^2 + g'^2 + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta f' g')(f' f'' - \sin \theta f'' g') \\ \cos^2 \theta f'' g''' &= 4K(f'^2 + g'^2 + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta f' g')(g' g'' - \sin \theta f' g''). \end{aligned}$$

Usando o fato de $f'' g'' \neq 0$, temos

$$\frac{\cos^2 \theta f''' g''}{(f' f'' - \sin \theta f'' g')} = \frac{\cos^2 \theta f'' g'''}{(g' g'' - \sin \theta f' g'')}.$$

Então

$$\frac{f'''}{f''^2} (g' - \sin \theta f') = \frac{g'''}{g''^2} (f' - \sin \theta g'). \quad (2-5)$$

Derivando com relação a s , obtemos

$$\left(\frac{f'''}{f''^2} \right)' (g' - \sin \theta f') + \left(\frac{f'''}{f''^2} \right) (-\sin \theta f'') = \left(\frac{g'''}{g''^2} \right)' (f').$$

Agora derivando com relação a t temos

$$\left(\frac{f'''}{f''^2} \right)' (g'') = \left(\frac{g'''}{g''^2} \right)' (f'').$$

Portanto, dividindo por $f'' g''$, temos

$$\left(\frac{f'''}{f''^2} \right)' \left(\frac{1}{f''} \right) = \left(\frac{g'''}{g''^2} \right)' \left(\frac{1}{g''} \right).$$

Assim, temos uma identidade de duas funções onde uma depende de s e a outra depende de t . Logo, ambas funções são iguais a mesma constante $a \in \mathbb{R}$,

$$\left(\frac{f'''}{f''^2} \right)' = a f'', \quad \left(\frac{g'''}{g''^2} \right)' = a g''.$$

Logo, existem constantes $b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\left(\frac{f'''}{f''^2} \right) = a f' + b, \quad \left(\frac{g'''}{g''^2} \right) = a g' + c.$$

Substituindo em (2-5), obtemos

$$(af' + b)(g' - \sin \theta f') = (ag' + c)(f' - \sin \theta),$$

ou ainda

$$a \sin \theta f'^2 + b \sin \theta f' + cf' = a \sin \theta g'^2 + c \sin \theta g' + bg'.$$

Novamente, temos uma identidade de duas funções, uma depende de s e a outra depende de t . Então existe uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que

$$a \sin \theta f'^2 + b \sin \theta f' + cf' = \lambda, \quad a \sin \theta g'^2 + c \sin \theta g' + bg' = \lambda.$$

Isto implica que f' e g' são constantes, o que contradiz nossa hipótese de $f'' g'' \neq 0$.

2. Suponha que α é uma curva plana e β não está contida num plano. Fazendo uma mudança de coordenadas, podemos supor

$$\alpha(s) = (s, 0, f(s)), \quad \beta(t) = (g_1(t), t, g_2(t)),$$

para funções f , g_1 e g_2 suaves. A contradição ocorrerá demonstrando que β é uma curva plana. Por esta razão, observe que β é uma curva plana se e só se sua torção é nula para todo t , isto é $\det([\beta'(t), \beta''(t), \beta'''(t)]) = 0$, para todo t , ou de modo equivalente,

$$g_1''' g_2'' - g_1'' g_2''' = 0. \quad (2-6)$$

Calculando K obtemos,

$$K = \frac{f''(g_2'' - g_1'' f')}{(1 + g_2'^2 + f'^2 + f'^2 g_2'^2 - 2f' g_1' g_2')^2}. \quad (2-7)$$

Como $K \neq 0$, temos que $f'' \neq 0$. Deste modo, movendo f'' ao primeiro membro na equação acima obtemos uma função que depende somente da variável s . Portanto a derivada com respeito a t do lado direito é zero, o que nos dá

$$4(f' g_1' - g_2')(f' g_1'' - g_2'') - (f' g_1''' - g_2''')(1 + f'^2(1 + g_1'^2) - 2f' g_1' g_2' + g_2'^2) = 0.$$

Para cada t fixo, podemos ver esta expressão como uma equação polinomial sobre $f'(s)$ e, portanto, todos os coeficientes se anulam. A equação anterior pode ser escrita de maneira precisa como

$$\sum_{n=0}^3 A_n(t) f'(s)^n = 0.$$

O cálculo dos A_n nos dá:

$$\begin{aligned} A_0 &= (1 + g_2'^2)g_2'''' - 4g_2'g_2''^2 \\ A_1 &= 8g_1''g_2'g_2'' + 4g_1'g_2''^2 - (1 + g_2'^2)g_1'''' - 2g_1'g_2'g_2'''' \\ A_2 &= -8g_1'g_1''g_2'' - 4g_1''^2g_2' + 2g_1'g_2'g_1'''' - (1 + g_1'^2)g_2'''' \\ A_3 &= -(1 + g_1'^2)g_1'''' + 4g_1'g_1''^2. \end{aligned}$$

De $A_0 = 0$ e $A_3 = 0$ obtemos para $i = 1, 2$,

$$(1 + g_i'^2)g_i'''' - 4g_i'g_i''^2 = 0. \quad (2-8)$$

Então,

$$\frac{g_i''''}{g_i''} = \frac{4g_i'g_i''}{1 + g_i'^2}.$$

Integrando esta expressão temos,

$$\int \frac{g_i''''}{g_i''} dt = \int \frac{4g_i'g_i''}{1 + g_i'^2} dt,$$

fazendo $h(t) = g_i'$, a integral fica

$$\int \frac{h''}{h'} dt = 2 \int \frac{2hh'}{1 + h^2} dt,$$

então

$$\ln h' = \ln(1 + h^2)^2 + \ln \lambda, \quad \lambda > 0,$$

assim

$$g_i'' = \lambda_i(1 + g_i'^2)^2, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, 2. \quad (2-9)$$

Em particular de (2-8),

$$g_i'''' = 4\lambda_i^2 g_i'(1 + g_i'^2)^3.$$

Antes de continuar com a informação obtida até o momento, reescrevemos a condição (2-6) que deve satisfazer β para ser uma curva plana. Em termos de g_1' e g_2' e usando (2-9), a equação (2-6) é equivalente a

$$\lambda_1 g_1'(1 + g_1'^2) - \lambda_2 g_2'(1 + g_2'^2) = 0. \quad (2-10)$$

A partir dos dados obtidos para g_i'' e g_i'''' , substituímos nos coeficientes A_1 e A_2 . Depois de algumas manipulações, a identidade $A_1 g_2'(1 + g_1'^2) + A_2 g_1'(1 + g_2'^2) = 0$

simplifica em

$$[\lambda_1 g_2'(1 + g_1'^2) + \lambda_2 g_1'(1 + g_2'^2)][\lambda_1 g_1'(1 + g_1'^2) - \lambda_2 g_2'(1 + g_2'^2)] = 0.$$

Se o colchete direito é zero, então β é plana por (2-10) e obtemos uma contradição.

Se o primeiro colchete é zero, então

$$1 + g_2'^2 = -\frac{\lambda_2 g_2'}{\lambda_1 g_1'}(1 + g_1'^2).$$

Colocamos esta informação junto com (2-9) no coeficiente A_1 , e obtemos que $A_1 = 0$, é equivalente à identidade

$$g_1'^4 + g_2'^4 + g_1'^2 + g_2'^2 + 2g_1'^2 g_2'^2 = 0.$$

Então, $g_1 = g_2 = 0$. Ou seja, a curva é planar, obtendo novamente uma contradição. Isso finaliza a prova do Teorema 2.5.

□

Observe que quando $K = 0$, fornecemos uma classificação completa C.G.C. de superfícies de translação e, para $K \neq 0$, estendemos o resultado dado [15] para superfícies de translação C.M.C.

2.2 Superfície Homotéticas

Um segundo tipo de superfície de nosso interesse são as superfícies homotéticas, onde substituímos o sinal + na definição de uma superfície de translação $z = f(x) + g(y)$ pela operação de multiplicação. Em seguida, definimos esta classe de superfícies.

Definição 2.6 *Uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é chamada homotética, se esta é o gráfico de uma função $z = f(x)g(y)$, onde $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis.*

Até onde sabemos, a primeira abordagem desse tipo de superfície surgiu em 1992, quando Van de Woestyne estudou o problema de encontrar superfícies mínimas homotéticas não degeneradas no espaço de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^3 em [22]. Posteriormente, alguns autores têm considerado superfícies mínimas homotéticas em espaços Euclidianos e espaços semi-Euclidianos [13, 23].

Nosso primeiro resultado está relacionado com as superfícies mínimas. Van Woestyne em [22] provou que no espaço \mathbb{L}^3 , as únicas superfícies mínimas homotéticas

são planos e helicóides. No final de [22], o autor afirma que, com pequenos ajustes na demonstração, é factível obter um resultado análogo no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 . Neste estudo, introduzimos uma abordagem distinta para comprovar esse resultado.

Teorema 2.7 *Os planos e os helicóides são as únicas superfícies mínimas homotéticas no espaço Euclidiano.*

Prova. Assuma que S é uma superfície homotética que é o gráfico de $z = f(x)g(y)$ e seja $X(x, y) = (x, y, f(x)g(y))$ a parametrização de S . Temos que

$$X_x = (1, 0, f'g), \quad X_y = (0, 1, fg'), \quad X_{xx} = (0, 0, f''g), \quad X_{yy} = (0, 0, fg''), \quad X_{xy} = (0, 0, f'g').$$

Calculando a normal obtemos

$$N = \frac{X_x \wedge X_y}{\|X_x \wedge X_y\|} = \frac{1}{\|X_x \wedge X_y\|} (-f'g, -fg', 1), \quad (2-11)$$

onde

$$\|X_x \wedge X_y\| = \sqrt{(f'g)^2 + (fg')^2 + 1}.$$

Logo, os coeficientes da primeira $\{E, F, G\}$ e segunda formas fundamentais $\{l, m, n\}$ são:

$$E = 1 + (f'g)^2, \quad F = f'fg'g, \quad G = 1 + (fg')^2, \quad (2-12)$$

$$\begin{aligned} l &= \frac{f''g}{\sqrt{(f'g)^2 + (fg')^2 + 1}}, \\ m &= \frac{f'g'}{\sqrt{(f'g)^2 + (fg')^2 + 1}}, \\ n &= \frac{fg''}{\sqrt{(f'g)^2 + (fg')^2 + 1}}. \end{aligned} \quad (2-13)$$

Assim, calculando H obtemos:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{En - 2Fm + Gl}{EG - F^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1 + (f'g)^2)fg'' - 2f'fg'gf'g' + (1 + (fg')^2)f''g}{(f'g)^2 + (fg')^2 + 1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isto implica que,

$$(1 + (f'g)^2)fg'' - 2ff''gg'^2 + (1 + (fg')^2)f''g = 0. \quad (2-14)$$

Como os papéis de l e n em (2-14) são simétricos, então vamos discutir apenas os casos de acordo com a função l . Distinguimos vários casos.

1. Caso $f' = 0$. Então $f(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e de (2-14) teríamos que $fg'' = 0$. Deste modo
 - (a) Se $f = 0$, S é um plano horizontal de equação $z = 0$.
 - (b) Se $g'' = 0$, então $g'(y) = a$ e $g(y) = ay + b$ para $a, b \in \mathbb{R}$. Logo, nossa parametrização $X(x, y) = (x, y, \lambda(ay + b))$ é do plano de equação $\lambda ay - z = \lambda b$.
2. Caso $f'' = 0$ com $f' \neq 0$, e pela simetria $g' \neq 0$. Então $f(x) = ax + b$ para $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Agora (2-14) se reduz a,

$$(ax + b)g''(1 + a^2g^2) - 2(ax + b)a^2gg'^2 = 0,$$

ou

$$-2a^2gg'^2 + g''(1 + a^2g^2) = 0.$$

Então,

$$\frac{g''}{g'} = 2a^2 \frac{gg'}{1 + a^2g^2}.$$

Integrando temos,

$$\int \frac{g''}{g'} dy = \int 2a^2 \frac{gg'}{1 + a^2g^2} dy,$$

ou seja

$$\int \frac{d}{dy}(\ln g') dy = \int \frac{d}{dy}(\ln(1 + a^2g^2)) dy.$$

Assim

$$\ln g' = \ln(1 + a^2g^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Logo, temos que existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal que $\ln(k) = c$, donde

$$\ln g' = \ln(1 + a^2g^2) + \ln(k).$$

E portanto,

$$g' = k(1 + a^2g^2).$$

Resolvendo a EDO, temos:

$$\int \frac{g'(y)}{1 + a^2g^2(y)} dy = \int k dy,$$

fazendo $u = ag(y)$ e $du = ag'(y)dy$ temos

$$\frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + u^2} du = k \int dy,$$

assim

$$\arctan(ag(y)) = aky + d,$$

onde $d \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$g(y) = \frac{1}{a} \tan(aky + d),$$

para $k > 0$ e y num domínio apropriado.

Resta apenas concluir que a superfície obtida é um helicóide. Neste caso, a parametrização de S é,

$$X(x, y) = (x, y, f(x)g(y)) = (0, y, bg(y)) + x(1, 0, ag(y))$$

O que indica que a superfície é regrada. Mas é bem conhecido na literatura que as únicas superfícies mínimas regradas em \mathbb{R}^3 são planos e helicóides [1] e como g não é uma função constante, S deve ser um helicóide.

3. Caso $f'' \neq 0$. Vamos provar que este caso não é possível. Por simetria na discussão do caso, também supomos $g'' \neq 0$. Se dividirmos (2-14) por $ff''gg''$ temos,

$$\frac{f''}{ff''g'^2} + \frac{f''f}{f'^2} - 2 + \frac{g''}{f'^2gg'^2} + \frac{gg''}{g'^2} = 0,$$

isto é

$$\left(\frac{f''}{ff''}\right) \left(\frac{1}{g'^2}\right) + \left(\frac{f''f}{f'^2}\right) - 2 + \left(\frac{1}{f'^2}\right) \left(\frac{g''}{gg'^2}\right) + \left(\frac{gg''}{g'^2}\right) = 0.$$

Derivando com respeito a x e depois com respeito a y , obtemos

$$\left(\frac{f''}{ff''}\right)' \left(\frac{1}{g'^2}\right)' + \left(\frac{1}{f'^2}\right)' \left(\frac{g''}{gg'^2}\right)' = 0. \quad (2-15)$$

Como $f''g'' \neq 0$, então podemos dividir (2-15) por

$$\left(\frac{1}{g'^2}\right)' \left(\frac{1}{f'^2}\right)',$$

e concluímos que

$$\left(\frac{f''}{ff''}\right)' \frac{1}{\left(\frac{1}{f'^2}\right)'} = - \left(\frac{g''}{gg'^2}\right)' \frac{1}{\left(\frac{1}{g'^2}\right)'}$$

Logo, como o lado direito depende só de y e o lado esquerdo de x , então, existe uma constante $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left(\frac{f''}{ff''}\right)' \frac{1}{\left(\frac{1}{f'^2}\right)'} = a = - \left(\frac{g''}{gg'^2}\right)' \frac{1}{\left(\frac{1}{g'^2}\right)'}$$

Portanto, integrando as equações acima, temos que existem constantes $b, c \in \mathbb{R}$ tais

que,

$$\frac{f''}{ff'^2} = \frac{a}{f'^2} + b, \quad \frac{g''}{gg'^2} = \frac{-a}{g'^2} + c,$$

ou

$$f'' = f(a + bf'^2), \quad g'' = -g(a + cg'^2). \quad (2-16)$$

Levando em consideração (2-16), substituímos f'' e g'' em (2-14) donde obtemos

$$(a + bf'^2)(1 + f'^2g'^2) - 2(f'^2g'^2) - (a + cg'^2)(1 + f'^2g'^2) = 0.$$

Dividindo esta última por $f'^2g'^2$, obtemos

$$\left(\frac{a}{f'^2} + b\right) \left(\frac{1}{g'^2} + f'^2\right) - 2 - \left(\frac{a}{g'^2} + c\right) \left(\frac{1}{f'^2} + g'^2\right) = 0.$$

Ou seja,

$$\frac{a}{f'^2g'^2} + \frac{af^2}{f'^2} + \frac{b}{g'^2} + bf^2 = 2 + \frac{a}{f'^2g'^2} + \frac{ag^2}{g'^2} + \frac{c}{f'^2} + cg^2.$$

Assim,

$$\frac{b - ag^2}{g'^2} - cg^2 = \frac{c - af^2}{f'^2} - bf^2 + 2.$$

Usando novamente o fato de que um lado da equação depende de x e o outro de y respectivamente, temos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{b - ag^2}{g'^2} - cg^2 = \lambda = \frac{c - af^2}{f'^2} - bf^2 + 2,$$

isto é,

$$f'^2 = \frac{c - af^2}{\lambda + bf^2 - 2}, \quad g'^2 = \frac{b - ag^2}{\lambda + cg^2}. \quad (2-17)$$

Derivando a equação acima com respeito a x temos

$$2f'f'' = \frac{-2aff'(\lambda + bf^2 - 2) - (c - af^2)2bff'}{(\lambda + bf^2 - 2)^2},$$

ou

$$f'' = -\frac{f(a(\lambda - 2) + cb)}{(\lambda + bf^2 - 2)^2}. \quad (2-18)$$

Analogamente, derivando (2-17) com relação a y obtemos

$$g'' = -\frac{g(a\lambda + cb)}{(\lambda + cg^2)^2}. \quad (2-19)$$

Vamos comparar estas expressões de f'' e g'' com as obtidas em (2-16) e substituir f'^2 e g'^2 pelas obtidas em (2-17) e assim obtemos,

$$f\left(a+b\left(\frac{c-af^2}{\lambda+bf^2-2}\right)\right) = -\frac{f(a(\lambda-2)+cb)}{(\lambda+bf^2-2)^2},$$

ou

$$(a(\lambda-2)+cb)(\lambda+bf^2-1) = 0. \quad (2-20)$$

Do mesmo modo,

$$-g\left(a+c\left(\frac{b-ag^2}{\lambda+cg^2}\right)\right) = -\frac{g(a\lambda+cb)}{(\lambda+cg^2)^2},$$

ou

$$(a\lambda+cb)(\lambda+cg^2-1) = 0. \quad (2-21)$$

Vamos agora discutir todas as possibilidades de (2-20) e (2-21).

- (a) Se $a(\lambda-2)+cb = a\lambda+cb = 0$, então $a = 0$ e $cb = 0$. Então de (2-18) e (2-19) temos que $f'' = 0$ ou $g'' = 0$, uma contradição.
- (b) Se $a(\lambda-2)+cb = 0$ e $c = \lambda-1 = 0$, obtemos que $a = 0$. E de (2-19) nós temos que $g'' = 0$, uma contradição.
- (c) Se $a\lambda+cb = 0$ e $b = \lambda-1 = 0$, então $a = 0$ e de (2-18) temos que $f'' = 0$, uma contradição.
- (d) Se $b = c = 0$ e $\lambda = 1$, da expressão de f'^2 e g'^2 em (2-17), temos $f'^2 = af^2$ e $g'^2 = -ag^2$, que implica $a = 0$. Então em (2-18) e (2-19) temos $f'' = g'' = 0$, uma contradição novamente.

□

Observação 2.8 *O Helicóide homotético ao qual fazemos referência neste resultado é o dado pelo gráfico da função,*

$$z(x, y) = (x + b) \tan(cy + d)$$

com $b, c, d \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$.

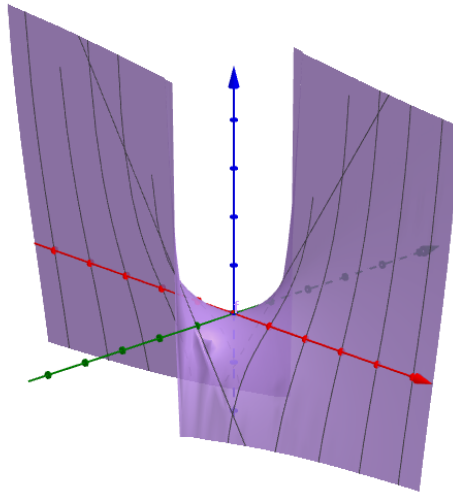


Figure 2.5: $z(x, y) = x \tan(y)$, $x \in \mathbb{R}$ e $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

O próximo resultado considera superfícies homotéticas no espaço Euclidiano com curvatura Gaussiana constante, obtendo uma classificação completa.

Teorema 2.9 *Se S é uma superfície homotética no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana constante K , então $K = 0$. Além disso, a superfície é um plano, ou uma superfície cilíndrica ou uma superfície cuja a parametrização é dada por:*

1. $z(x, y) = ae^{bx+cy}$, com $a, b, c > 0$.
2. $z(x, y) = \left(\frac{bx}{m} + d\right)^m \left(\frac{cy}{m-1} + e\right)^{1-m}$ com $b, c, d, e \in \mathbb{R}$ e $b \neq c \neq 0, m \neq 0, 1$

Prova. Usando os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental calculados em (2-12) e (2-13), a expressão de K para a superfície $X(x, y) = (x, y, f(x)g(y))$ é dada por,

$$K = \frac{fgf''g'' - f'^2g'^2}{(1 + f'^2g'^2 + f^2g'^2)^2}. \quad (2-22)$$

(i) Se $K = 0$, então

$$ff''gg'' = f'^2g'^2. \quad (2-23)$$

Dado que o papel das funções f e g são simétricos em (2-23), então discutiremos os diferentes casos de acordo com a função f .

1. Caso $f' = 0$. Então f é uma função constante ($f(x) = x_0$) e a parametrização da superfície é escrita como $X(x, y) = (0, y, x_0g(y)) + x(1, 0, 0)$. Isto significa que S é uma superfície cilíndrica cuja diretriz está no plano xy e a geratriz (reta) é paralela ao eixo x .

2. Caso $f'' = 0$ e $f' \neq 0$. Agora $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Além disso, (2-23) implica que $g' = 0$ e $g(y) = y_0$ é uma função constante. E, neste caso, S é um plano de equação $z = y_0(ax + b)$.
3. Caso $f'' \neq 0$. Pela simetria nos argumentos, temos $g'' \neq 0$. A equação (2-23) escreve-se,

$$\frac{ff''}{f'^2} = \frac{g'^2}{gg''}.$$

Como em cada lado da equação as funções dependem de uma variável, ao esquerdo de x e a direita de y , então existe $a \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\frac{ff''}{f'^2} = a = \frac{g'^2}{gg''}.$$

Uma integração direta implica que existem $b, c \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\frac{f''}{f'} = a \frac{f'}{f},$$

integrando esta equação, obtemos

$$\int \frac{d}{dx}(\ln f') dx = a \int \frac{d}{dx}(\ln(f)) dx,$$

ou seja

$$\ln f' = \ln(bf^a),$$

onde b é constante. De modo similar, da equação

$$a \frac{g''}{g'} = \frac{g'}{g},$$

obtemos

$$\ln(g') = \ln(cg^{\frac{1}{a}}),$$

onde c é constante. Portanto,

$$f' = bf^a \quad e \quad g' = cg^{\frac{1}{a}}.$$

(a) Caso $a = 1$. Então,

$$\int \frac{f'}{f} dx = \int b dx \quad e \quad \int \frac{g'}{g} dy = \int c dy,$$

onde

$$\ln(f) = bx + c_1, \quad e \quad \ln(g) = cy + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$f(x) = pe^{bx} \quad e \quad g(y) = qe^{cy}, \quad p, q > 0.$$

Portanto,

$$z(x, y) = \alpha e^{bx+cy}, \quad \alpha, b, c > 0.$$

(b) Caso $a \neq 1$.

Fazendo $u = f$, então $du = f' dx$ e $v = g$ então $dv = g' dy$, donde obtemos:

$$f' = bf^a, \quad g' = cg^{\frac{1}{a}},$$

ou

$$\int \frac{1}{u^a} du = \int b dx, \quad \int \frac{1}{v^{\frac{1}{a}}} dv = \int c dy,$$

o que encontramos

$$u = [(1-a)(bx+c_1)]^{\frac{1}{1-a}} \quad e \quad v = \left[\left(\frac{a-1}{a} \right) (cy+c_2) \right]^{\frac{a}{a-1}}.$$

Portanto

$$f(x) = ((1-a)bx+p)^{\frac{1}{1-a}} \quad e \quad g(y) = \left[\left(\frac{a-1}{a} \right) cy+q \right]^{\frac{a}{a-1}}$$

para $p, q \in \mathbb{R}$. Agora, ao fazer $m = \frac{1}{1-a}$, obtemos

$$z(x, y) = \left(\frac{bx}{m} + p \right)^m \left(\frac{cy}{m-1} + q \right)^{1-m}$$

. Com isto concluímos o caso em que $K = 0$.

(ii) No caso $K \neq 0$, faremos a prova por contradição. Assumimos a existência de uma superfície homotética S com curvatura Gaussiana constante $K \neq 0$. Observemos a simetria da equação (2-22) sobre f e g . Se $f = 0$ ou $f' = 0$, então (2-22) implica que $K = 0$, o que não é nosso caso. Se $f'' = 0$, então $f' = a$ e $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Então, (2-22) se escreve,

$$K[(1+a^2g^2+(ax+b)^2g'^2)^2] = -a^2g'^2$$

ou

$$K[1+2a^2g^2+a^4g^4+2(1+a^2g^2)(ax+b)^2g'^2+(ax+b)^4g'^4]+a^2g'^2 = 0.$$

Esta é uma equação polinomial sobre x de grau 4 porque $K \neq 0$. Então o coeficiente líder, ou seja, $Ka^4g'^4$, deve se anular. Isso significa que $g' = 0$ e (2-22) dá agora $K = 0$, uma contradição.

Assim $f'' \neq 0$. Pela simetria usaremos o mesmo argumento com g , então também supomos $g'' \neq 0$. Em particular, $fg'g' \neq 0$. Então, escrevemos (2-22) como

$$K(1 + f'^2 g^2 + f^2 g'^2)^2 - fgf''g'' + f'^2 g'^2 = 0. \quad (2-24)$$

Isto é,

$$\ln((1 + f'^2 g^2 + f^2 g'^2)^2 + \frac{1}{K} f'^2 g'^2) = \ln\left(\frac{1}{K} fgf''g''\right).$$

Derivando primeiramente com relação a x ,

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln((1 + f'^2 g^2 + f^2 g'^2)^2 + \frac{1}{K} f'^2 g'^2) = \frac{f'f'' + ff''}{ff''}.$$

E derivando agora com relação a y , obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln((1 + f'^2 g^2 + f^2 g'^2)^2 + \frac{1}{K} f'^2 g'^2) = 0.$$

Isto implica,

$$\begin{aligned} & (f'^2 g'^2 + KD^2)(f''g'' + 2K(D(f''g + fg'')) + (fg'^2 + f''g^2)(f'^2g + f^2g'')) \\ & - (f''g'^2 + 2KD(fg'^2 + f''g))(f'^2g'' + 2KD(f'^2g + f^2g'')) = 0, \end{aligned} \quad (2-25)$$

onde $D = a + f'^2 g^2 + f^2 g'^2$. Por outro lado, derivando (2-24) com respeito a x , temos:

$$2K(1 + f'^2 g^2 + f^2 g'^2)(2f'f''g^2 + 2ff'g'^2) - gg''(f'f'' + f''f''') + 2f'f''g'^2 = 0,$$

ou seja,

$$4Kf'D(fg'^2 + f''g^2) + 2f'f''g'^2 - (f'f'' + f''f''')gg'' = 0. \quad (2-26)$$

Logo, da relação (2-24) obtemos g'' como

$$g'' = \frac{KD^2 + f'^2 g'^2}{fgf''}.$$

Substituindo esta última, primeiro na equação (2-25) e depois na equação (2-26), obtemos duas equações $P_1(f, f', f'', f''', g, g') = 0$ e $P_2(f, f', f'', f''', g, g') = 0$. Vemos ambas expressões como dois polinômios em g' . Como eles têm uma solução comum g' , então sua resultante se anulará. O cálculo para sua resultante fornece um polinômio em g com coeficientes dependendo de f e suas primeira, segunda e terceira derivadas. Tomando os coeficientes identicamente nulos, obtemos um sistema de equações para f e suas derivadas. Estamos interessados apenas nos coeficientes líder, ou seja, aquele para g^{28}

que deve ser nulo. Isso é equivalente a

$$K^{16} f^{16} f'^{20} (f'^2 - ff'')^{14} = 0.$$

Isso implica $f'^2 - ff'' = 0$, então $f'^2 = ff''$ e integrando, obtemos

$$\int \frac{f'}{f} dx = \int \frac{f''}{f'} dx$$

ou

$$\ln(f) + \ln(\xi) = \ln(f'), \quad \xi > 0,$$

portanto

$$\xi = \frac{f'}{f}.$$

Integrando novamente, obtemos

$$\int \frac{f'}{f} dx = \int \xi dx,$$

ou seja

$$\ln(f) = \xi x + \eta, \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$f(x) = ce^{\xi x}.$$

Finalmente, provaremos que isso dá uma contradição. Substituindo este valor de f em (2-24), obtemos

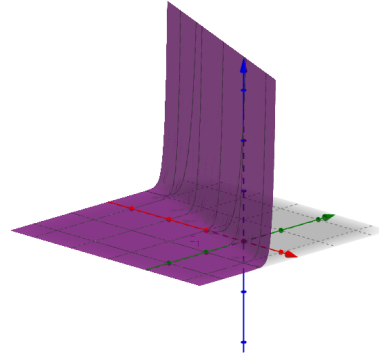
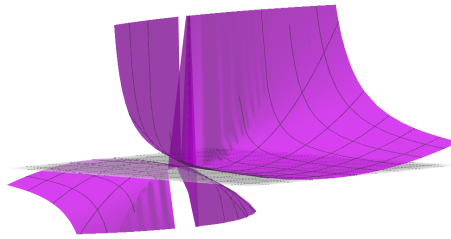
$$K + c^2(2\xi^2 K g^2 + (\xi^2 + 2K)g'^2 - \xi^2 g g'')e^{2\xi x} + c^4 K(\xi^2 g^2 + g'^2)^2 e^{4\xi x} = 0.$$

Esta é uma expressão é uma equação polinomial sobre $e^{\xi x}$. E assim, os coeficientes se anulam. Isto implica $K = 0$, uma contradição. □

Concluiremos esta seção apresentando duas superfícies homotéticas com curvatura Gaussiana nula dadas pelo Teorema 2.9.

Exemplo 2.3 Para o item 1, escolhamos $a = 2$ e $b = c = 1$. A superfície é $z(x, y) = 2e^{x+y}$, ver Fig. 2.6.

Exemplo 2.4 Para o item 2, escolhamos $b = c = 1$, $d = e = 0$ e $m = 2$. A superfície é $z(x, y) = \frac{x^2}{4y}$ para $y \neq 0$, ver Fig. 2.7.

Figure 2.6: $z(x, y) = 2e^{x+y}$ Figure 2.7: $z(x, y) = \frac{x^2}{4y}$

2.3 O Caso Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^3 .

Considerando o espaço de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^3 , ou seja, \mathbb{R}^3 equipado com a métrica $(dx)^2 + (dy)^2 - (dz)^2$. Uma superfície imersa em \mathbb{L}^3 é chamada de não degenerada se a métrica induzida em S não for degenerada. A métrica induzida pode ser de apenas dois tipos: definida positiva, e a superfície é chamada de *spacelike*, ou uma métrica Lorentziana, e a superfície é chamada de *timelike*. Para ambos tipos de superfícies, a curvatura média H e a curvatura de Gauss K estão definidas e têm as seguintes expressões em coordenadas locais $X = X(s, t)$:

$$H = \epsilon \frac{1}{2} \frac{lG - 2mF + nE}{EG - F^2}, \quad K = \epsilon \frac{ln - m^2}{EG - F^2},$$

onde $\epsilon = -1$ se S é *spacelike*, $\epsilon = 1$ se S é *timelike*. Aqui consideraremos $\{E, F, G\}$ e $\{l, m, n\}$ os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental em relação a X , respectivamente. Para mais detalhes, o leitor pode consultar a referência [16]. Novamente, questionaremos sobre superfícies de translação e homotéticas em \mathbb{L}^3 com curvatura média constante e curvatura Gaussiana constante. Lembre-se de que a propriedade de uma

superfície ser uma superfície de translação ou uma superfície homotética não se origina da métrica, mas sim da estrutura afim de \mathbb{R}^3 e pela multiplicação de funções reais de \mathbb{R} . Generalizamos os resultados obtidos nas seções anteriores para superfícies não degeneradas em \mathbb{L}^3 . As demonstrações são similares e omitiremos os detalhes.

2.3.1 Extensão do Teorema 2.5

Assuma que S é uma superfície de translação. O calculo de K é

$$K = -\frac{(f_2'' - f_1'' g_2' + g_1'(f_1'' f_2' - f_1' f_2''))(g_2'' - f_2' g_1'' + f_1'(g_1'' g_2' - g_1' g_2''))}{((1 + (f_1')^2 - (f_2')^2)(1 + (g_1')^2 - (g_2')^2) - (f_1' + g_1' - f_2' g_2')^2)^2}$$

Se $K = 0$, então o numerador coincide com o de (2-2), porém a demonstração é similar e a conclusão é a mesma: que S é uma superfície cilíndrica. No caso de $K \neq 0$, o resultado afirma que, sob a mesma hipótese, não há mais exemplos. Assim, discutimos os casos em que α e β estão em dois planos não ortogonais e quando uma das curvas é plana. No primeiro caso, a expressão de K é

$$K = -\frac{\cos^2 \theta f'' g''}{(-f'^2 - g'^2 + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta f' g')^2}.$$

A prova funciona da mesma maneira que no caso Euclidiano. No segundo caso,

$$K = -\frac{f''(g_2'' - f' g_1'')}{(1 - g_2'^2 - f'^2 - f'^2 g_1'^2 + 2f' g_1' g_2')^2}.$$

Novamente, a prova é semelhante porque podemos mover f'' para o lado esquerdo, derivar em relação a t e observar que aparece uma expressão que é um polinômio na função f' .

Observação 2.10 *A extensão do Teorema 2.7, como já mencionamos na seção anterior, este resultado foi provado em [22].*

2.3.2 Extensão do Teorema 2.9

Suponhamos agora que S é uma superfície homotética e estudamos aquelas superfícies com curvatura Gaussiana constante. Se S é spacelike, então a superfície é localmente um gráfico no plano xy e S é escrita como $z = f(x) + g(y)$. A expressão de K é.

$$K = -\frac{f g f'' g'' - f'^2 g'^2}{(1 - f'^2 g^2 - f^2 g'^2)^2}, \quad \text{com } 1 - f'^2 g^2 - f^2 g'^2 > 0.$$

Se S é timelike, então a superfície é localmente um gráfico no plano xz ou no plano yz . Sem perda de generalidade, supomos que a superfície é escrita como $x = f(y)g(z)$. Agora, a curvatura de Gauss K é

$$K = -\frac{fgf''g'' - f'^2g'^2}{(1 + f^2g'^2 - f'^2g^2)^2}, \quad \text{com } 1 + f^2g'^2 - f'^2g^2 < 0.$$

Devido a que ambas expressões são as mesmas que em (2-22) e os argumentos são os mesmos que no espaço euclidiano, apenas fornecemos as afirmações. Se $K \neq 0$, então não existem superfícies homotéticas (spacelike ou timelike) com curvatura Gaussiana constante K . Se $K = 0$, então $fgf''g'' - f'^2g'^2 = 0$, que é o mesmo que (2-23). Portanto, a conclusão é:

- (a) A superfície é um plano ou uma superfície cilíndrica cuja diretriz está contida em um dos três planos de coordenadas, e as retas são ortogonais a este plano.
- (b) A função $z = f(x)g(y)$ está em conformidade com o Teorema 2.5, nos itens 1) e 2).

Superfícies Separáveis Com Curvatura Gaussiana Constante.

Neste capítulo, estudaremos as superfícies separáveis, ou seja, aquelas que podem ser expressas por meio de uma equação implícita do tipo $f(x) + g(y) + h(z) = 0$, onde f , g e h são funções reais de uma variável. Nosso objetivo será fornecer uma classificação completa de todas as superfícies separáveis com curvatura Gaussiana constante, obtendo parametrizações explícitas dessas superfícies. A classificação dependerá do valor da curvatura Gaussiana ser zero ou não.

A motivação para estudar este tipo de superfície surge da teoria clássica das superfícies mínimas. Historicamente, podemos identificar duas superfícies mínimas separáveis:

1. O **Catenóide** $(\cosh(z))^2 = x^2 + y^2$, é a rotação da catenária em torno de um eixo apropriado, este gera a esta superfície de área mínima. Essa forma é assumida por uma película de água e sabão limitada por dois círculos, como demonstrou Euler em 1744, ver Fig. 3.1.

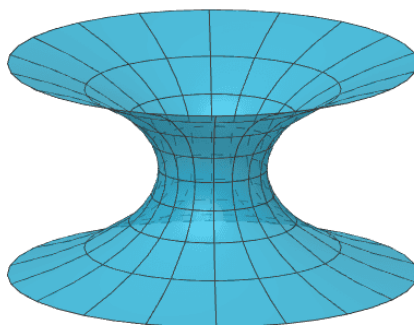


Figure 3.1: $\cosh^2(z) = x^2 + y^2$

2. O **Helicóide** $\tan(z) = \frac{x}{y}$, que foi descoberto em 1776 por Meusnier, ver Fig. 3.2.

Durante muito tempo, esses foram os únicos exemplos conhecidos (além do plano) de superfícies mínimas. Só em 1835, Scherk encontrou novos exemplos e estas

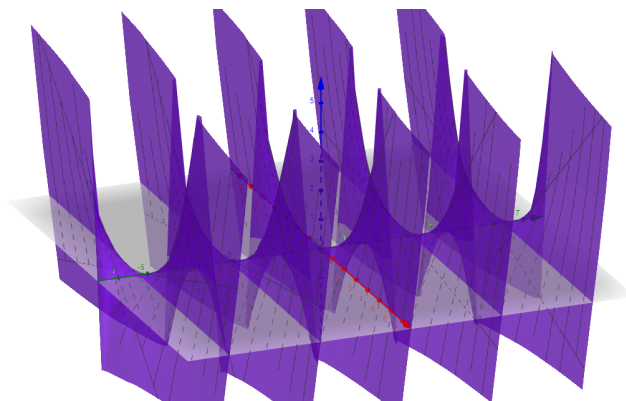


Figure 3.2: $\tan(z) = \frac{x}{y}$

novas superfícies eram do tipo $z = \phi(x) + \psi(y)$ onde ϕ e ψ são duas funções reais [19]. Mais tarde, Weingarten abordou o problema de classificar todas as superfícies mínimas do tipo $f(x) + g(y) + h(z) = 0$ e encontrou uma ampla família de superfícies [24]. No meio do século passado, Fréchet aprofundou o estudo dessas superfícies obtendo exemplos com parametrizações explícitas [7, 8]. Em [18, II-5.2], o leitor pode encontrar uma descrição dessas superfícies.

Introduzimos a seguinte terminologia. Seja \mathbb{R}^3 o espaço Euclidiano tridimensional, isto é, o espaço vetorial tridimensional real \mathbb{R}^3 dotado da métrica Euclidiana $\langle \cdot, \cdot \rangle = dx^2 + dy^2 + dz^2$, onde (x, y, z) representa as coordenadas canônicas de \mathbb{R}^3 . Localmente, qualquer superfície em \mathbb{R}^3 é o conjunto de nível zero $F(x, y, z) = 0$ de uma função F definida em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Nosso interesse são aquelas superfícies onde a função F é uma função cujas variáveis x , y e z são separáveis.

Definição 3.1 *Uma superfície regular $S \subseteq \mathbb{R}^3$ é dita de separável se esta pode ser escrita como*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x) + g(y) + h(z) = 0\}, \quad (3-1)$$

onde $f : I_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I_2 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : I_3 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves.

Pela regularidade de S temos

$$f'(x)^2 + g'(y)^2 + h'(z)^2 \neq 0,$$

$\forall x \in I_1, \forall y \in I_2$ e $\forall z \in I_3$.

Para alcançar o objetivo que propusemos de classificar todas as superfícies separáveis, faremos a seguinte pergunta: quais são as superfícies separáveis no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana constante?.

Para responder a esta pergunta, podemos começar com três exemplos particulares, estas superfícies separáveis merecem ser destacadas, pois são obtidos por escolhas simples das funções f , g e h na Equação (3-1).

Exemplo 3.1 (Cilindro Reto.) *O cilindro reto esta formado por todas as retas que são ortogonais a uma curva C . Se C é contida num plano coordenado então a superfície é separável onde uma das funções f , g ou h é constante. Por exemplo,*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - a^2 = 0\}$$

corresponde ao cilindro circular reto.

Exemplo 3.2 (Superfícies de Translação.) *Uma superfície de translação é uma superfície que, após renomearmos as coordenadas, pode-se escrever como $z = \varphi(x) + \psi(y)$, onde φ , ψ são funções suaves. Esta superfície é a soma das curvas $x \mapsto (x, 0, \varphi(x))$ e $y \mapsto (0, y, \psi(y))$, então a superfície é gerada quando movemos uma dessas curvas por meio das translações ao longo da outra. Uma superfície separável é uma superfície de translação se apenas uma das três funções em*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x) + g(y) + h(z) = 0\}$$

é linear, digamos, $h(z) = az + b$ com $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ e $a \neq 0$ ($a = 0$ corresponde ao exemplo do cilindro reto).

Exemplo 3.3 (Superfícies de Rotação.) *Uma superfície de revolução cujo eixo de rotação é paralelo a um dos eixos de coordenadas é uma superfície separável. Renomeando as coordenadas, uma superfície de rotação em torno do eixo Oz pode ser escrita como $h(z) = x^2 + y^2$, portanto, uma superfície separável. Em geral, se o eixo de rotação é paralelo a Oz , a equação implícita da superfície é $h(z) = x^2 + y^2 + ax + by + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

Um exemplo particular de superfície de rotação com curvatura Gaussiana constante e positiva ($K > 0$) é a esfera unitária, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$ (ver Fig.3.7).

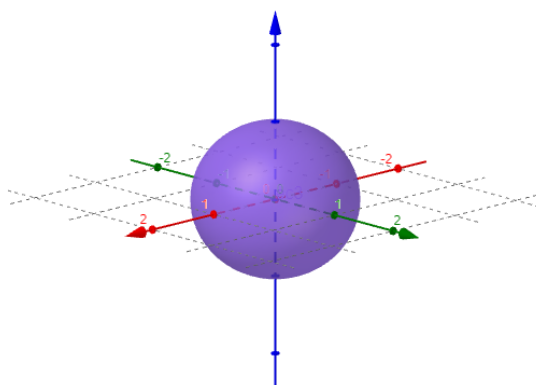


Figure 3.3: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$

Entre os três tipos de superfícies anteriores, nossa pergunta tem resposta conhecida, pois, qualquer cilindro reto tem curvatura Gaussiana constante zero. Além disso, as superfícies de translação $z = \phi(x) + \psi(y)$ com curvatura Gaussiana constante foram classificadas por Liu, demonstrando que $K = 0$ e uma das funções ϕ ou ψ é linear [15]. Nesse caso, se $\phi(x) = ax + b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, a equação implícita da superfície é $z = ax + b + \psi(y)$, tornando-a uma superfície cilíndrica não-reta.

Finalmente, as superfícies rotacionais com curvatura Gaussiana constante são bem conhecidas na literatura; (veja, por exemplo, [10]).

Uma primeira aproximação ao estudo de superfícies separáveis com curvatura Gaussiana constante foi realizada no por López e Moruz [17] e descritos no capítulo anterior (2.9), onde se classificam todas as superfícies do tipo $z = \phi(x)\psi(y)$ (superfícies homotéticas) com curvatura Gaussiana constante. Observe que tomando logaritmos, esta equação se transforma em,

$$\ln(z) = \ln(\phi(x)) + \ln(\psi(y)),$$

o que nos indica que as superfícies Homotéticas são superfícies separáveis com curvatura Gaussiana nula ($K = 0$) e estas aparecem como um caso particular do primeiro resultado deste capítulo.

Teorema 3.2 *As únicas superfícies separáveis com curvatura Gaussiana constante nula são congruentes a:*

- I. *Um cilindro reto sobre uma curva plana contida num dos planos coordenados.*
- II. *Uma superfície de translação $z = ax + g(y)$, com $a \neq 0$ e g qualquer função suave.*
- III. *A superfície de revolução com curvatura Gaussiana constante zero.*
- IV. *Uma superfície cilíndrica e uma superfície cônica com parametrizações dadas por:*

a. $m_3z + n_3 = (m_1x + n_1)^p(m_2y + n_2)^q$, com $p + q = 1$. Ver (3-11).

b. $n_1e^{m_1x} + n_2e^{m_2y} + n_3e^{m_3z} = 0$, $n_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$. Ver (3-13).

c. $\xi_1(m_1x + n_1)^{\frac{1}{1-k}} + \xi_2(m_2y + n_2)^{\frac{1}{1-k}} + \xi_3(m_3z + n_3)^{\frac{1}{1-k}} = 0$, com $k \neq 1$, $\xi_i = \pm 1$ e $m_i \neq 0$ para $i = 1, 2, 3$. Ver (3-14).

No caso em que $K \neq 0$, a classificação é a seguinte.

Teorema 3.3 *As únicas superfícies separáveis com curvatura Gaussiana constante distinta de zero são as superfícies de rotação de curvatura constante cujo eixo de rotação é paralelo a um dos eixos coordenados.*

3.1 Expressão da curvatura Gaussiana para superfícies separáveis.

Para realizar o estudo, necessitamos da expressão da curvatura Gaussiana K para uma superfície definida pela equação implícita $F(x, y, z) = 0$ para uma função suave F definida num domínio de \mathbb{R}^3 . Até onde sabemos, a primeira referência onde aparece tal cálculo é [6]. De fato, Dombrowski obtém a expressão da curvatura K de Gauss-Kronecker para hipersuperfícies $F(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = 0$ no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , ver [20]. De [6], se deriva a seguinte fórmula para K :

$$K = \frac{1}{|\nabla F|^{n+2}} \nabla F^T \cdot \text{co}(\text{Hess})(F) \cdot \nabla F,$$

onde ∇F e ∇F^T representam o gradiente e o gradiente transposto de F respectivamente. Além disso, $\text{co}(\text{Hess})(F)$ denota a matriz formada pelos cofatores da Hessiana de F . No espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 temos

$$K|\nabla F|^4 = \langle \text{co}(\text{Hess})(F) \cdot \nabla F, \nabla F \rangle.$$

Esta formula se reduz a,

$$\begin{aligned} K|\nabla F|^4 = & F_x^2 \begin{vmatrix} F_{yy} & F_{yz} \\ F_{yz} & F_{zz} \end{vmatrix} + F_y^2 \begin{vmatrix} F_{zz} & F_{xz} \\ F_{xz} & F_{xx} \end{vmatrix} + F_z^2 \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix} \\ & - 2F_x F_y \begin{vmatrix} F_{xy} & F_{yz} \\ F_{xz} & F_{zz} \end{vmatrix} - 2F_y F_z \begin{vmatrix} F_{yz} & F_{xz} \\ F_{xy} & F_{xx} \end{vmatrix} - 2F_x F_z \begin{vmatrix} F_{xz} & F_{xy} \\ F_{yz} & F_{yy} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Se a superfície é definida pela equação implícita $f(x) + g(y) + h(z) = 0$, então pela fórmula acima, a expressão de K fica

$$f'^2 g'' h'' + g'^2 f'' h'' + h'^2 f'' g'' = K(f'^2 + g'^2 + h'^2)^2. \quad (3-2)$$

Um primeiro caso a considerar é quando uma das funções f , g ou h é constante. Sem perda de generalidade, podemos assumir que h é constante, então $h(z) = a$, $z \in I_3$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Então a equação da superfície é $f(x) + g(y) + a = 0$, ou seja, a superfície é um cilindro reto sobre a curva plana $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) + g(y) + a = 0\}$ e sua curvatura Gaussiana é $K = 0$. Este caso é o item 1 do Teorema 3.2

Agora, suponha que S não é um cilindro reto sobre uma curva plana contida em uns dos três planos coordenados. Isto é equivalente a $f'(x)g'(y)h'(z) \neq 0$ para todo, $(x, y, z) \in I_1 \times I_2 \times I_3$. Deste modo, podemos introduzir as seguintes variáveis

$$u = f(x), \quad v = g(y), \quad w = h(z). \quad (3-3)$$

Observe que as equações em (3-3) estão relacionadas pela equação $u + v + w = 0$ em razão de (3-1). Vamos definir as funções

$$X(u) = f'(x)^2, \quad Y(v) = g'(y)^2, \quad Z(w) = h'(z)^2.$$

Então,

$$X'(u) = 2f''(x), \quad Y'(v) = 2g''(y), \quad Z'(w) = 2h''(z).$$

Com esta mudança de variável, a Equação (3-2) torna-se

$$XY'Z' + YX'Z' + ZX'Y' = 4K(X + Y + Z)^2, \quad (3-4)$$

para todos os valores de u , v e w que satisfazem a condição $u + v + w = 0$.

Ao longo deste trabalho, precisamos derivar equações similares a (3-26) envolvendo funções dependentes de u , v e w . Como essas variáveis não são independentes, devido a $u + v + w = 0$, o resultado a seguir será útil em nossos cálculos.

Lema 3.4 *Seja $Q = Q(u, v, w)$ uma função suave definida num domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Se $Q(u, v, w) = 0$ na seção $\Pi \cap \Omega$, onde Π é o plano de equação $u + v + w = 0$, então na seção temos*

$$Q_u = Q_v = Q_w,$$

onde Q_u , Q_v e Q_w são as derivadas parciais de Q .

Prova. Seja $w = -u - v$ e seja $\alpha(u, v) = (u, v, -u - v)$. Então, $(Q \circ \alpha)(u, v) = Q(u, v, -u - v)$. Logo, derivando com respeito a u temos

$$\nabla Q \cdot (1, 0, -1) = Q_u - Q_w = 0,$$

$$Q_u = Q_w. \quad (3-5)$$

Mudando os papéis de u , v e w obtemos

$$Q_U = Q_V. \quad (3-6)$$

Portanto, de (3-5) e (3-6) temos que $Q_U = Q_V = Q_W$. \square

Precisamos distinguir os três casos especiais de superfícies separáveis: o cilindro reto, a superfície de translação e as superfícies de rotação em termos das funções X , Y e Z .

Proposição 3.5 *Com a notação acima, temos:*

1. Se uma das funções X , Y ou Z é nula, então a superfície é um cilindro reto sobre uma curva plana contida em um dos três planos coordenados.
2. Se uma das funções X' , Y' ou Z' é nula, então a superfície é um cilindro reto sobre uma curva plana contida em um dos três planos coordenados ou é uma superfície de translação.
3. Se uma das funções $X' - Y'$, $X' - Z'$ ou $Y' - Z'$ se anula, então a superfície é do tipo estudado no item anterior, ou é uma superfície de revolução cujo eixo de rotação é paralelo a um dos três eixos coordenados.

Prova. Discutiremos caso a caso.

1. Quando introduzimos as variáveis u , v e w em (3-3), mostramos que se uma das funções f' , g' ou h' é nula, então a superfície é um cilindro reto sobre uma curva plana contida em um dos três planos coordenados.
2. Sem perda de generalidade, supomos que $Z' = 0$ e como $Z = h^2$, então $h(z) = az + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Isso prova que a superfície é um cilindro reto se $a = 0$ ou uma superfície de translação se $a \neq 0$. (Ver exemplo 3.2).
3. Sem perda de generalidade, supomos que $X' - Y' = 0$. Então existe um $a \in \mathbb{R}$ tal que $X' = Y' = a$. O caso $a = 0$ foi estudado no item anterior. Assumamos agora que $a \neq 0$. Resolvendo as equações $X'(u) = a$, $Y'(v) = a$, obtemos,

$$f'(x)^2 = af(x) + b_1, \quad e \quad g'(y)^2 = ag(y) + b_2,$$

ou ainda,

$$f'(x) = \pm \sqrt{af(x) + b_1}, \quad g'(y) = \pm \sqrt{ag(y) + b_2},$$

para algumas constantes $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Para resolver estas EDOs, faremos a seguinte separação de variáveis

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{af(x) + b_1}} = \pm 1, \quad \frac{g'(y)}{\sqrt{ag(y) + b_2}} = \pm 1.$$

Observe que fazendo a seguinte substituição $u = \sqrt{af(x) + b_1}$ então $du = \frac{af'(x)}{2\sqrt{af(x) + b_1}} dx$, ou seja,

$$\int \frac{2}{a} du = \pm \int 1 dx.$$

Logo,

$$\frac{2}{a}u = \pm x + c,$$

para $c \in \mathbb{R}$, constante. Assim,

$$\sqrt{af(x) + b_1} = \frac{a}{2}(\pm x + c).$$

Aplicando a mesma técnica para g e g' , temos que as soluções dessas EDOs são dadas por

$$f(x) = \frac{(ax + c_1)^2}{4a} - \frac{b_1}{a}, \quad g(y) = \frac{(ay + c_2)^2}{4a} - \frac{b_2}{a},$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Assim, a superfície é de revolução cujo eixo de rotação é paralelo ao eixo Oz .

□

3.2 Prova do Teorema 3.2.

Prova. Caso $K = 0$. Da equação (3-4), temos que

$$XY'Z' + YX'Z' + ZX'Y' = 0, \text{ para todo } u + v + w = 0. \quad (3-7)$$

Pela Proposição 3.5, os casos em que uma das funções, X , Y ou Z é constante, ou X' , Y' ou Z' é zero, ou $X' - Y'$, $Y' - Z'$ ou $X' - Z'$ é zero correspondem aos itens 1, 2 e 3 do Teorema 3.2, respectivamente.

O passo seguinte é assumir que a superfície não pertence aos três casos anteriores. Em particular que $X', Y', Z' \neq 0$, assim, a equação (3-7) pode ser escrita como

$$X'Y'Z' \left(\frac{X}{X'} + \frac{Y}{Y'} + \frac{Z}{Z'} \right) = 0,$$

ou

$$\frac{X}{X'} + \frac{Y}{Y'} + \frac{Z}{Z'} = 0. \quad (3-8)$$

Utilizando o Lema 3.4, derivamos com relação a u , v e w , respectivamente.

Obtendo

$$\left(\frac{X}{X'}\right)' = \left(\frac{Y}{Y'}\right)' = \left(\frac{Z}{Z'}\right)'.$$

Como temos três funções dependendo das variáveis u , v e w , então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left(\frac{X}{X'}\right)' = \left(\frac{Y}{Y'}\right)' = \left(\frac{Z}{Z'}\right)' = k. \quad (3-9)$$

Vamos analisar os dois casos.

1. Caso $k = 0$. Como $XYZ \neq 0$, deduzimos que existem constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a, b, c \neq 0$, tais que

$$\frac{X}{X'} = \frac{a}{2}, \quad \frac{Y}{Y'} = \frac{b}{2}, \quad \frac{Z}{Z'} = \frac{c}{2},$$

com $u + v + w = 0$ devido a (3-8). Vamos proceder à integração destas equações. Veja que,

$$f'(x)^2 = af''(x).$$

Introduzindo uma nova variável $t = f'(x)$, então

$$t^2 = a \frac{dt}{dx}.$$

Assim

$$\int \frac{dt}{t^2} = \int \frac{dx}{a},$$

onde

$$-\frac{1}{t} = \frac{1}{a}x + C,$$

onde $C \in \mathbb{R}$. Integrando novamente obtemos

$$f(x) = \int t dx = - \int \frac{1}{\frac{x}{a} + C} dx.$$

Portanto

$$f(x) = -a \ln \left(\frac{x}{a} + C \right) + D,$$

onde $D \in \mathbb{R}$. Observe que pela sobrejetividade do logaritmo temos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\log(\alpha) = D$, então,

$$f(x) = -a \ln(m_1 x + n_1).$$

De modo análogo, obtemos

$$g(y) = -b \ln(m_2 y + n_2),$$

$$h(z) = -c \ln(m_3 z + n_3),$$

onde $m_i, n_i \in \mathbb{R}$ e $m_i \neq 0, 1 \leq i \leq 3$. Assim a equação implícita da superfície $f(x) + g(y) + h(z) = 0$ torna-se

$$(m_1x + n_1)^a (m_2y + n_2)^b (m_3z + n_3)^c = 1, \quad (3-10)$$

e pela Eq.(3-8) temos $a + b + c = 0$, então $-c = a + b$, logo (3-10) é equivalente a

$$\left(x + \frac{n_1}{m_1}\right)^a \left(y + \frac{n_2}{m_2}\right)^b = m_1^{-a} m_2^{-b} m_3^{a+b} \left(z + \frac{n_3}{m_3}\right)^{a+b}.$$

Esta superfície é o cone generalizado com vértice $\left(-\frac{n_1}{m_1}, -\frac{n_2}{m_2}, -\frac{n_3}{m_3}\right)$ e a diretriz é a curva plana

$$\begin{cases} \left(x + \frac{n_1}{m_1}\right)^a \left(y + \frac{n_2}{m_2}\right)^b = m_1^{-a} m_2^{-b} m_3^{a+b} \left(d + \frac{n_3}{m_3}\right)^{a+b} \\ z = d \neq -\frac{n_3}{m_3}. \end{cases}$$

Este caso conclui o item (4) do Teorema 3.2. Podemos escrever a equação (3-10) como

$$(m_3z + n_3) = (m_1x + n_1)^p (m_2y + n_2)^q, \quad p + q = 1, \quad (3-11)$$

onde $p = \frac{a}{a+b}$ e $q = \frac{b}{a+b}$. Esta superfície é o gráfico do produto de duas funções de variáveis x, y respectivamente. (ver Teorema 2.9).

2. Caso $k \neq 0$. Substituindo k por $\frac{1}{2k}$ em (3-9),

$$\left(\frac{X}{X'}\right)' = \left(\frac{Y}{Y'}\right)' = \left(\frac{Z}{Z'}\right)' = \frac{1}{2k},$$

e integrando, deduzimos que existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{X}{X'} = \frac{u+a}{2k}, \quad \frac{Y}{Y'} = \frac{v+b}{2k}, \quad \frac{Z}{Z'} = \frac{w+c}{2k}.$$

Substituindo em (3-8),

$$u + v + w + a + b + c = a + b + c = 0,$$

posto que $u + v + w = 0$. Assim $a + b + c = 0$ e

$$\frac{X'}{X} = \frac{2k}{u+a}, \quad \frac{Y'}{Y} = \frac{2k}{v+b}, \quad \frac{Z'}{Z} = \frac{2k}{w+c}. \quad (3-12)$$

Integrando a primeira equação em (3-12), obtemos

$$\int \frac{d}{du} (\ln X(u)) du = 2k \int \frac{1}{u+a} du,$$

ou seja,

$$\ln X(u) = 2k \ln |u + a| + D,$$

onde D é uma constante real. Então, existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $\ln \alpha = D$

$$\ln X(u) = \ln (\alpha u + \alpha a)^{2k},$$

ou seja,

$$f'(x) = m_1 (f(x) + a)^k,$$

onde $m_1 = \alpha^k$, uma constante real. De modo similar, obtemos

$$g'(y) = m_2 (g(y) + b)^k,$$

$$h'(z) = m_3 (h(z) + c)^k,$$

onde $m_2, m_3 \in \mathbb{R}$. As soluções dessas equações dependem de $k = 1$ ou $k \neq 1$.

(a) No caso $k = 1$. Existem constantes $n_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, com $1 \leq i \leq 3$ tal que tais que

$$f(x) = n_1 e^{m_1 x} - a,$$

$$g(y) = n_2 e^{m_2 y} - b,$$

$$h(z) = n_3 e^{m_3 z} - c.$$

E assim, a equação da superfície é

$$n_1 e^{m_1 x} + n_2 e^{m_2 y} + n_3 e^{m_3 z} = 0. \quad (3-13)$$

Esta superfície é um cilindro generalizado cujas geratrizes são paralelas a $\left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \frac{1}{m_3}\right)$ e a curva diretriz é

$$\begin{cases} \frac{x}{m_1} + \frac{y}{m_2} + \frac{z}{m_3} = 0 \\ n_1 e^{m_1 x} + n_2 e^{m_2 y} + n_3 e^{m_3 z} = 0. \end{cases}$$

(b) Caso $k \neq 1$. temos que,

$$\int \frac{f'(x)}{(f(x) + a)^k} dx = \int m_1 dx,$$

fazendo $t = f(x) + a$, temos

$$\int \frac{dt}{t^k} = \int m_1 dx,$$

ou seja,

$$\frac{t^{1-k}}{1-k} = m_1 x + n_1, \quad n_1 \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $(f(x) + a)^{1-k} = (1-k)(m_1x + n_1)$.

Procedendo de modo similar com $g'(y)$ e $h'(z)$, obtemos

$$f(x) = \varepsilon_1 ((1-k)(m_1x + n_1))^{\frac{1}{1-k}} - a,$$

$$g(y) = \varepsilon_2 ((1-k)(m_2y + n_2))^{\frac{1}{1-k}} - b,$$

$$h(z) = \varepsilon_3 ((1-k)(m_3z + n_3))^{\frac{1}{1-k}} - c,$$

onde $\varepsilon_i = \pm 1$, $1 \leq i \leq 3$. ε_i é o sinal da raiz $\frac{1}{1-k}$. Portanto, a equação implícita da superfície é:

$$\varepsilon_1(m_1x + n_1)^{\frac{1}{1-k}} + \varepsilon_2(m_2y + n_2)^{\frac{1}{1-k}} + \varepsilon_3(m_3z + n_3)^{\frac{1}{1-k}} = 0. \quad (3-14)$$

Esta superfície é cônica cujo vértice é o ponto $\left(-\frac{n_1}{m_1}, -\frac{n_2}{m_2}, -\frac{n_3}{m_3}\right)$ e a curva diretriz é

$$\begin{cases} z = d \neq -\frac{n_3}{m_3} \\ \varepsilon_1(m_1x + n_1)^{\frac{1}{1-k}} + \varepsilon_2(m_2y + n_2)^{\frac{1}{1-k}} = -\varepsilon_3(m_3d + n_3)^{\frac{1}{1-k}}. \end{cases}$$

Vale ressaltar que em alguns casos, a equação (3-14) representa apenas um ponto. Por exemplo, se $k = \frac{2n-1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, e $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ têm o mesmo sinal.

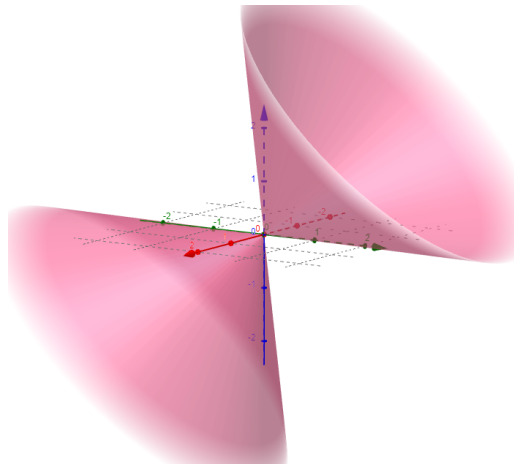
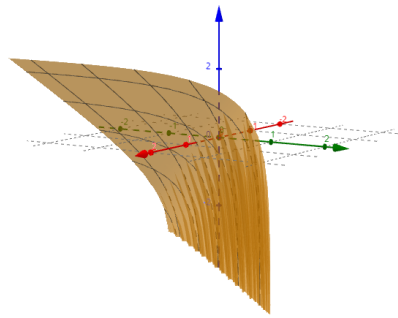
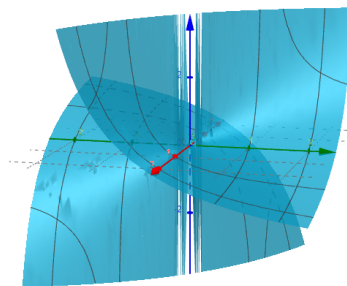
Os casos anteriores $k = 1$ e $k \neq 1$ correspondem ao item (4) do Teorema 3.2 e isso completa a prova. \square

Concluiremos esta seção mostrando alguns exemplos de superfícies separáveis com curvatura Gaussiana constante zero para o item(4) do Teorema 3.2.

Exemplo 3.4 Caso $k = 0$ na Eq. (3-11). Escolhemos $p = 2$, $q = -1$, $m_i = 1$ e $n_i = 0$. A superfície é $x^2 = yz$, ver Fig. 3.4.

Exemplo 3.5 Caso $k = 1$ na Eq. (3-13). Escolhemos $n_1 = -1$, $n_2 = n_3 = 1$ e $m_i = 1$. A equação implícita da superfície é $-e^x + e^y + e^z = 0$, ver Fig. 3.5.

Exemplo 3.6 Caso $k = 2$ na Eq. (3-14). Escolhemos $n_i = 0$ e $m_i = 1$, obtendo $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, ou equivalente a, $z = \frac{-xy}{x+y}$ com $x+y \neq 0$, ver Fig.3.6.

Figure 3.4: $x^2 = yz$ Figure 3.5: $-e^x + e^y + e^z = 0$.Figure 3.6: $z = \frac{-xy}{x+y}$ com $x+y \neq 0$.

3.3 Demonstração do Teorema 2: Caso $K \neq 0$.

Nesta seção, provamos o Teorema 3.3. Considere uma superfície separável definida por (3-1) e suponhamos que a curvatura Gaussiana K é uma constante não nula. Com estas hipóteses, os casos particulares em que uma das funções X , Y ou Z é constante, ou que X' , Y' ou Z' é zero, e que descrevemos na Proposição 3.5, não podem ocorrer. Porque, neste caso, a curvatura Gaussiana deverá ser zero. Por outro lado, o caso em que uma das funções $X' - Y'$, $X' - Z'$ ou $Y' - Z'$ se anula prova que a superfície é de revolução, cujo eixo de rotação é paralelo a um dos eixos coordenados, provando precisamente o enunciado do Teorema 3.3.

Portanto, além das superfície de revolução, resta provar que não existem mais superfícies do tipo separável com curvatura Gaussiana constante diferente de zero. A prova do Teorema 3.3 será feita por contradição. Assuma, que a superfície não é uma superfície de revolução em torno de uma reta paralela a um dos eixos coordenados. Em particular, nenhuma das funções $X' - Y'$, $X' - Z'$ ou $Y' - Z'$ é identicamente nula. Escrevemos novamente a Equação (3-4),

$$XY'Z' + YX'Z' + ZX'Y' = 4K(X + Y + Z)^2. \quad (3-15)$$

Dado que $K \neq 0$, a superfície não é cilíndrica nem do tipo translação. Isso implica que $XYZ \neq 0$ e $X'Y'Z' \neq 0$. Então a Eq.(3-15) é

$$(X'Y + XY')Z' + (X'Y' - 8K(X + Y))Z - 4KZ^2 - 4K(X + Y)^2 = 0. \quad (3-16)$$

Afim de simplificar a notação desta equação, escrevemos

$$PZ' + QZ + R = 4KZ^2, \quad (3-17)$$

onde

$$P(u, v) = X'Y + XY', \quad Q(u, v) = X'Y' - 8K(X + Y) \text{ e } R(u, v) = -4K(X + Y)^2.$$

Antes de prosseguir com a prova do Teorema 3.3, precisamos de um lema que nos garanta que o coeficiente de Z' em (3-16), ou seja, a função P , seja diferente de zero.

Lema 3.6 *A função $P(u, v) = X'Y + XY'$ em (3-16) não se anula em nenhum conjunto aberto.*

Prova. Esta prova será feita por contradição. Se $X'Y + XY' = 0$ em um conjunto aberto,

então

$$\frac{X'}{X} = a = -\frac{Y'}{Y}, \quad (3-18)$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante. Substituindo (3-18) na Eq. (3-15) e multiplicando por $\frac{XY}{XY}$, temos

$$XY(-aZ' + aZ' - a^2Z) = 4K(X + Y + Z)^2.$$

Assim, a Eq.(3-15) se torna

$$-a^2XYZ = 4K(X + Y + Z)^2. \quad (3-19)$$

Em particular, $a \neq 0$. Logo, Derivando Eq.(3-19) com relação a u obtemos

$$-a^2YZX' = 8K(X + Y + Z)X',$$

agora derivamos a Eq. (3-19) com relação a v donde obtemos

$$-a^2XZY' = 8K(X + Y + Z)Y'.$$

Aplicando o Lema 3.4 em Eq.(3-19) temos que as derivadas parciais da Eq.(3-19) são iguais, isto é

$$8K(X + Y + Z)X' + a^2YZX' = 8K(X + Y + Z)Y' + a^2XZY'.$$

Multiplicando por $\frac{1}{XY}$ ambos os lados da igualdade acima e simplificando, obtemos

$$-2a^3Z = 8aK(X + Y + Z) \left(\frac{X + Y}{XY} \right).$$

Ou seja

$$-2a^3XYZ = 8aK(X + Y + Z)(X + Y). \quad (3-20)$$

Substituindo a Eq.(3-19) em Eq.(3-20) temos

$$8aK(X + Y + Z)^2 = 8aK(X + Y + Z)(X + Y).$$

Logo,

$$8aK(X + Y + Z) - 8aK(X + Y) = 0.$$

Portanto

$$8aKZ = 0$$

o qual é uma contradição, pois $a \neq 0$, $K \neq 0$ e $Z \neq 0$. □

Depois deste resultado, voltamos para a Eq.(3-17). Aplicando o Lema 3.4 à Eq.(3-17) e derivando em relação a u e v , temos

$$P_u Z' + Q_u Z + R_u = P_v Z' + Q_v Z + R_v, \text{ para } u + v + w = 0.$$

Assim,

$$(P_u - P_v) Z' + (Q_u - Q_v) Z + R_u - R_v = 0.$$

Ou equivalentemente,

$$(X''Y - XY'') Z' + (X''Y' - X'Y'' - 8K(X' - Y')) Z - 8K(X + Y)(X' - Y') = 0. \quad (3-21)$$

Escrevendo

$$\begin{aligned} A(u, v) &= P_u - P_v = X''Y - XY'' \\ B(u, v) &= Q_u - Q_v = X''Y' - X'Y'' - 8K(X' - Y') \\ C(u, v) &= R_u - R_v = -8K(X + Y)(X' - Y'), \end{aligned} \quad (3-22)$$

a Eq.(3-21) se torna

$$AZ' + BZ + C = 0, \text{ para } u + v + w = 0. \quad (3-23)$$

Agora apresentamos os passos a seguir para a prova do Teorema 3.3. Provaremos dois lemas, que são resultados técnicos. Primeiro, mostraremos que as funções A , B e C não se anulam (Lema 3.7) e em seguida provaremos que $\frac{B}{A}$ e $\frac{C}{A}$ são funções de variável $u + v$ (Lema 3.8). Depois disso, a prova volta para a Eq. (3-17) e, após sucessivas aplicações do Lema 3.4, chegaremos à contradição desejada.

Lema 3.7 *Os coeficientes A , B ou C em (3-22) não podem ser identicamente nulos.*

Prova. Observe que se $C = 0$ então

$$-8K(X + Y)(X' - Y') = 0,$$

e assim

$$X + Y = 0 \text{ ou } X' - Y' = 0,$$

o que nos leva a uma contradição, pois se $X + Y = 0$ então $X = a = -Y$ com $a \in \mathbb{R}$. O que implica que $X' = Y' = 0$. Se $X' - Y' = 0$ então pelo item 3 da Proposição 3.5, a superfície será revolução. Suponhamos que $A = 0$ ou $B = 0$.

1. Caso $A = 0$. Então $X''Y = XY''$, assim $\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = a$, onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Então, a Eq.(3-21) torna-se em:

$$F := (a(XY' - X'Y) - 8K(X' - Y'))Z - 8K(X + Y)(X - Y) = 0. \quad (3-24)$$

Aplicando o Lema 3.4 a F , temos a expressão $F_u - F_v = 0$, isto é,

$$G := (2aX'Y' - 2a^2XY - 8aK(X + Y))Z - 8K((X' - Y')^2 + a(X + Y)^2) = 0.$$

Usando novamente o Lema 3.4 para a função G , a equação $G_u - G_v = 0$ torna-se

$$(4a^2(XY' - X'Y) - 8aK(X' - Y'))Z - 32aK(X + Y)(X' - Y') = 0. \quad (3-25)$$

Multiplicando (3-24) por $4a$. E subtraindo (3-25) de (3-24), deduzimos

$$24aK(X' - Y') = 0,$$

o que é uma contradição.

2. Caso $B = 0$. Então,

$$X''Y' - X'Y'' - 8K(X' - Y') = 0.$$

Dividindo por $X'Y'$, temos

$$\frac{X''}{X'} - \frac{Y''}{Y'} - 8K\left(\frac{1}{Y'} - \frac{1}{X'}\right) = 0.$$

Então, deduzimos que existe uma constante $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{X'' + 8K}{X''} = \frac{Y'' + 8K}{Y''} = a.$$

Logo,

$$X'' = aX' - 8K \text{ e } Y'' = aY' - 8K. \quad (3-26)$$

Substituindo as expressões de (3-26) na Eq. (3-21), temos

$$F := (a(X'Y - XY') + 8K(X - Y))Z' - 8K(X + Y)(X' - Y') = 0. \quad (3-27)$$

Agora, aplicando o Lema 3.4 sobre F , obtemos a expressão $F_u - F_v = 0$, para todo $u + v + w = 0$. Logo, usando (3-26), obtemos

$$G := (a^2(X'Y + XY') - 8aK(X + Y) - 2aX'Y' + 8K(X' + Y'))Z' - 8K(X' - Y')^2 - 8aK(X + Y)(X' + Y') + 128K^2(X + Y) = 0.$$

Novamente aplicamos o Lema 3.4 a G e obtemos $G_u - G_v = 0$, para todo $u + v + w = 0$,

usando (3-26) temos

$$\begin{aligned} & (a^3(X'Y - XY') - 16aK(X' - Y') + 8a^2K(X - Y))Z' \\ & - 24aK(X' - Y')(X' + Y') - 8a^2K(X + Y)(X' - Y') + 384K^2(X' - Y') = 0. \end{aligned}$$

Se $a = 0$ então $384K^2(X' - Y') = 0$, implica que $X' - Y' = 0$, o que não é possível. Logo, $a \neq 0$. Fatorando esta equação obtemos

$$\begin{aligned} & a^2 [(a(X'Y - XY') + 8K(X - Y))Z' - 8K(X + Y)(X' - Y')] \\ & - 8K(X' - Y')(2aZ' + 3a(X' + Y') - 48K) = 0. \end{aligned}$$

Substituindo (3-27) nesta equação e simplificado, deduzimos

$$H := 2aZ' + 3a(X' + Y') - 48K = 0.$$

Finalmente, usando o Lema 3.4 para a função H e logo (3-26) sobre a equação $H_u - H_v = 0$, temos

$$3a(X'' - Y'') = 3a^2(X' - Y') = 0,$$

o que é uma contradição. □

Após o Lema 3.7, derivamos (3-23) em relação a u e v e usamos o Lema 3.4, obtendo

$$(A_u - A_v)Z' + (B_u - B_v)Z + (C_u - C_v) = 0.$$

Lema 3.8 *Com a notação acima, temos*

$$\frac{A_u - A_v}{A} = \frac{B_u - B_v}{B} = \frac{C_u - C_v}{C},$$

ou, de forma equivalente

$$\left(\frac{B}{A}\right)_u = \left(\frac{B}{A}\right)_v, \quad \left(\frac{C}{A}\right)_u = \left(\frac{C}{A}\right)_v, \quad \left(\frac{C}{B}\right)_u = \left(\frac{C}{B}\right)_v.$$

Prova.

O Lema 3.6 nos permite escrever (3-16) como

$$\frac{4K}{X'Y + XY'}Z^2 + \frac{8K(X + Y) - X'Y'}{X'Y + XY'}Z + \frac{4K(X + Y)^2}{X'Y + XY'} = Z'.$$

Por outro lado, pelo Lema 3.7 podemos escrever (3-23) como

$$-\frac{B}{A}Z - \frac{C}{A} = Z'.$$

Então, igualando estas duas equações e fatorando temos

$$\begin{aligned} 4KAZ^2 + \{(8K(X+Y) - X'Y')A + (X'Y + XY')B\}Z \\ + 4K(X+Y)^2A + (X'Y + XY')C = 0. \end{aligned} \quad (3-28)$$

Vamos escrever esta equação como

$$LZ^2 + MZ + N = 0, \quad (3-29)$$

onde

$$\begin{aligned} L &= 4KA \\ M &= (8K(X+Y) - X'Y')A + (X'Y + XY')B \\ N &= 4K(X+Y)^2A + (X'Y + XY')C. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 3.4 a (3-29), derivando em relação a u e v , obtemos

$$L_u Z^2 + 2ZZ'(-1)L + M_u Z + MZ'(-1) + N_u = L_v Z^2 + 2ZZ'(-1)L + M_v Z + MZ'(-1) + N_v,$$

ou seja,

$$(L_u - L_v)Z^2 + (M_u - M_v)Z + N_u - N_v = 0. \quad (3-30)$$

Os cálculos destas derivadas dão

$$\begin{aligned} L_u - L_v &= 4K(A_u - A_v) \\ M_u - M_v &= (8K(X+Y) - X'Y')(A_u - A_v) + (X'Y + XY')(B_u - B_v) \\ N_u - N_v &= 4K(X+Y)^2(A_u - A_v) + (X'Y + XY')(C_u - C_v). \end{aligned} \quad (3-31)$$

Distinguímos dois casos na prova do Lema 3.8.

1. Caso $L_u - L_v \neq 0$. Visto que as equações quadráticas (3-29) e (3-30) têm as mesmas soluções, então

$$Z_1 + Z_2 = -\frac{M_u - M_v}{L_u - L_v} = -\frac{M}{L}, \quad Z_1 Z_2 = \frac{N_u - N_v}{L_u - L_v} = \frac{N}{L},$$

onde Z_1 e Z_2 são as raízes de (3-29) e (3-30). Assim

$$\frac{L_u - L_v}{L} = \frac{M_u - M_v}{M} = \frac{N_u - N_v}{N},$$

ou ainda

$$\begin{aligned} M(L_u - L_v) &= L(M_u - M_v) \\ N(L_u - L_v) &= L(N_u - N_v). \end{aligned} \quad (3-32)$$

Substituindo as expressões de $L_u - L_v$, $M_u - M_v$ e $N_u - N_v$ em (3-31), as duas equações de (3-32) ficam, respectivamente

$$\begin{aligned} B(X'Y + XY') (A_u - A_v) &= A(X'Y + XY') (B_u - B_v) \\ C(X'Y + XY') (A_u - A_v) &= A(X'Y + XY') (C_u - C_v). \end{aligned} \quad (3-33)$$

Pelo Lema 3.6, temos que $X'Y + XY' \neq 0$, logo

$$\begin{aligned} B(A_u - A_v) &= A(B_u - B_v) \\ C(A_u - A_v) &= A(C_u - C_v), \end{aligned} \quad (3-34)$$

portanto

$$\frac{A_u - A_v}{A} = \frac{B_u - B_v}{B} = \frac{C_u - C_v}{C},$$

como queríamos provar.

2. Caso $L_u - L_v = 0$.

(a) Subcaso $M_u - M_v = 0$. Então de (3-30) temos que $N_u - N_v = 0$. Como $K \neq 0$ então de (3-31) deduzimos que $A_u - A_v = 0$. Logo, como $M_u - M_v = 0$ e pelo Lema 3.6, temos que $X'Y + XY' \neq 0$, então de (3-31) novamente, temos que $B_u - B_v = 0$ e por último que $C_u - C_v = 0$. Isto é,

$$A_u - A_v = B_u - B_v = C_u - C_v = 0,$$

provando o resultado.

(b) Subcaso $M_u - M_v \neq 0$. De (3-30), temos

$$Z = -\frac{N_u - N_v}{M_u - M_v}.$$

Logo, deduzimos que (3-29) tem solução única dada por

$$Z = -\frac{M}{2L}.$$

Então

$$\left(\frac{M}{L}\right)_u - \left(\frac{M}{L}\right)_v = 0.$$

Isso implica $(M_u - M_v)L = 0$, ou $M_u - M_v = 0$, uma contradição. A prova do Lema está completa e então existem duas funções de Φ e ψ de uma variável tais que

$$\Phi(u+v) = \frac{B(u, v)}{A(u, v)}, \quad \Psi(u+v) = \frac{C(u, v)}{A(u, v)}.$$

□

Uma vez provados os Lemas 3.7 e 3.8, estamos em condições de completar prova do Teorema 3.3.

3.3.1 Demonstração do Teorema 3.3.

Prova. O Lema 3.7 garante que $A \neq 0$ e como supomos que $K \neq 0$ então $L = 4KA \neq 0$, assim podemos escrever (3-29) como

$$Z^2 + \frac{M}{L}Z + \frac{N}{L} = 0. \quad (3-35)$$

Esta é uma equação polinomial quadrática de Z . Então, as duas raízes $Z_1(w)$ e $Z_2(w)$ satisfazem

$$Z_1(w) + Z_2(w) = -\frac{M(u, v)}{L(u, v)}, \quad Z_1(w)Z_2(w) = \frac{N(u, v)}{L(u, v)}.$$

Como $u + v + w = 0$, as funções $\frac{M}{L}$ e $\frac{N}{L}$ dependem apenas da variável $u + v$. Denotemos

$$\Psi_1(u+v) = \frac{M(u, v)}{L(u, v)}, \quad \Phi_1(u+v) = \frac{N(u, v)}{L(u, v)}.$$

Assim (3-35) é agora

$$Z^2 + \Psi_1 Z + \Phi_1 = 0.$$

Aplicando o Lema 3.4 a esta equação com respeito a w e u , levando em conta que $u + v = -w$, então a derivada com relação a u é nula e a derivada com relação a w é

$$2ZZ' + \Psi_1'(-1)Z + \Psi_1 Z' + \Phi_1'(-1) = 0,$$

então

$$(2Z + \Psi_1)Z' - \Psi_1'Z - \Phi_1' = 0.$$

Pelo Lema 3.6 temos que $P \neq 0$ e pelo Lema 3.7 temos que $A, B \neq 0$, isto implica que $M \neq 0$ e portanto $\Psi_1 \neq 0$. Então da equação anterior e de (3-17) podemos eliminar Z' , isto é,

$$\frac{4K}{P}Z^2 - \frac{Q}{P}Z - \frac{R}{P} = \frac{\Psi_1'}{(2Z + \Psi_1)}Z + \frac{\Phi_1'}{(2Z + \Psi_1)},$$

então

$$(2Z + \Psi_1)QZ + (2Z + \Psi_1)R + P\Psi_1'Z + P\Phi_1' = 4KZ^2(2Z + \Psi_1),$$

logo

$$((2Z + \Psi_1)Q + P\Psi_1')Z + (2Z + \Psi_1)R + P\Phi_1' = 8KZ^3 + 4K\Psi_1Z^2,$$

ou de modo equivalente,

$$Z^3 + \left(\frac{\Psi_1'}{2} - \frac{Q}{4K}\right)Z^2 - \left(\frac{P\Psi_1' + 2R + Q\Psi_1}{8K}\right)Z - \frac{P\Phi_1' + R\Psi_1}{8K} = 0. \quad (3-36)$$

Esta é uma equação polinomial cúbica em Z . Se $Z_1(w)$, $Z_2(w)$ e $Z_3(w)$ denotam as três raízes desta equação, então a função

$$T(u+v) = Z_1(w) + Z_2(w) + Z_3(w),$$

é o oposto do coeficiente de Z^2 em (3-36), assim

$$T(u+v) = \frac{Q(u+v)}{4K} - \frac{\Psi_1(u+v)}{2}. \quad (3-37)$$

Aplicando a esta equação o Lema 3.4 derivando em relação às variáveis u e v , obtemos

$$\frac{Q_u}{4K} = \frac{Q_v}{4K},$$

então

$$0 = \frac{Q_u}{4K} - \frac{Q_v}{4K} = \frac{1}{4K}B$$

por (3-22). Isto é uma contradição do Lema 3.7, e isso completa a prova do Teorema 3.3. \square

Bibliography

- [1] BARBOSA, J. L. M.; COLARES, A.; G., A. **Minimal Surfaces in \mathbb{R}^3** , volume 1195 de **Lecture Notes in Mathematics**. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [2] DARBOUX, G. **Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces et ses Applications Géométriques du Calcul Infinitésimal**. Chelsea Publ. Co, 1972. Reprint.
- [3] DARBOUX, J. G. **Théorie Générale des Surfaces, Livre I**. Gauthier-Villars, Paris, 1914.
- [4] DILLEN, F.; VAN DE WOESTYNE, I.; VERSTRAELEN, L.; WALRAVE, J. T. **The surface of scherk in \mathbb{E}^3 : a special case in the class of minimal surfaces defined as the sum of two curves**. *Bull. Inst. Math. Acad. Sin.*, 26:257–267, 1998.
- [5] DO CARMO, M. P.; VALERO. **Geometría Diferencial de Curvas y Superficies**. Alianza Editorial, 1990.
- [6] DOMBROWSKI, P. **Krümmungsgrößen gleichungsdefinierter untermannigfaltigkeiten riemannscher mannigfaltigkeiten**. *Math. Nachr.*, 38:133–180, 1968.
- [7] FRÉCHET, M. **Détermination des surfaces minima du type $a(x) + b(y) = c(z)$** . *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 5:238–259, 1956.
- [8] FRÉCHET, M. **Détermination des surfaces minima du type $a(x) + b(y) = c(z)$** . *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 6:5–32, 1957.
- [9] GOLDMAN, R. **Curvature formulas for implicit curves and surfaces**. *Computer Aided Geometric Design*, 22:632–658, 2005.
- [10] GRAY, A.; ABBENA, E.; SALAMON, S. **Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica**. Studies in Advanced Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, third edition, 2006.
- [11] HASANIS, T.; LÓPEZ, R. **Classification of separable surfaces with constant gaussian curvature**. *Manuscripta Math.*, 166(3-4):403–417, 2021.

- [12] HASANIS, T.; LÓPEZ, R. **Translation surfaces in euclidean space with constant gaussian curvature.** *Comm. Anal. Geom.*, 29(6):1415–1447, 2021.
- [13] JIU, L.; SUN, H. **On minimal homothetical hypersurfaces.** *Colloq. Math.*, 109:239–249, 2007.
- [14] KNOBLAUCH, J. **Grundlagen der Differentialgeometrie.** Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1913.
- [15] LIU, H. **Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces.** *J. Geom.*, 64:141–149, 1999.
- [16] LÓPEZ, R. **Differential geometry of curves and surfaces in lorentz-minkowski space.** *Internat. Electronic J. Geom.*, 7:44–107, 2014.
- [17] LÓPEZ, R.; MORUZ, M. **Translation and homothetical surfaces in euclidean space with constant curvature.** *J. Korean Math. Soc.*, 52:523–535, 2015.
- [18] NITSCHKE, J. C. C. **Lectures on Minimal Surfaces.** Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [19] SCHERK, H. F. **Bemerkungen über die kleinste fläche innerhalb gegebener grenzen.** *J. Reine Angew. Math.*, 13:185–208, 1835.
- [20] SPIVAK, M. **A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. III.** Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.
- [21] STOKER, J. J. **Differential Geometry.** Wiley, New York, 1969.
- [22] VAN DE WOESTYNE, I. **A new characterization of the helicoids.** p. 267–273, 1993.
- [23] VAN DE WOESTYNE, I. **Minimal homothetical hypersurfaces of a semi-euclidean space.** *Results Math.*, 27:333–342, 1995.
- [24] WEINGARTEN, J. **Ueber die durch eine gleichung der form $x + y + z = 0$ darstellbaren minimalflächen.** *Nachr. Königl. Ges. d. Wissensch. Univ. Göttingen*, p. 272–275, 1887.