

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Derivação de uma Equação Diferencial Parcial Não-Linear na
Propagação de Frentes de Reação em Química

por

João Lopes Cardoso Filho

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Arbieto Alarcon

Dissertação de Mestrado em Matemática

Goiânia, Goiás

2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Derivação de uma Equação Diferencial Parcial Não-Linear na
Propagação de Frentes de Reação em Química

por

João Lopes Cardoso Filho

Área de Concentração : **Análise**

Orientador: **Prof. Dr. Eduardo Arbieto Alarcon**

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Conselho Diretor do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Goiânia, Goiás

2008

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(GPT/BC/UFG)

C268d Cardoso Filho, João Lopes.
Derivação de uma equação diferencial parcial não-linear na
propagação de frentes de reação em química [manuscrito] / João
Lopes Cardoso Filho. – 2008.
69 f.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Arbieto Alarcon.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2008.

Bibliografia: f.67-69.

1. Equações diferenciais parciais 2. Equação de evolução não-
linear 3. Cauchy, Problemas de 4. Reações químicas – Propagação
vertical I. Alarcon, Eduardo Arbieto II. Universidade Federal de
Goiás, **Instituto de Matemática e Estatística**. III. Título.

CDU: 517.955

Aos meus pais João e Elci

Agradecimentos

A Deus, nosso Pai, que tenha misericórdia de nós, que somos tão egoístas e não olhamos para o próximo. Agradeço pela saúde que me foi dada, pelo conhecimento adquirido e principalmente por ter aprendido a encarar problemas com mais paciência.

Ao Prof. Dr. Eduardo Arbieto Alarcon, pela amizade, paciência e dedicação, que foram indispensáveis para a concretização desta dissertação.

Aos meus pais, João Lopes Cardoso e Elci Campos Cardoso que sempre apoiaram e acreditaram em meu potencial.

À minha noiva Mariana Rodrigues Gil Daher pela paciência e compreensão nos momentos em que estive ausente.

Aos meus irmãos Eduardo Campos Cardoso e Larissa Campos Cardoso Mota que são verdadeiros companheiros.

Aos professores Marina Tuyako Mizukoshi, Mário José de Souza e José Hilário da Cruz pela atenção e paciência durante a construção deste trabalho e por serem pessoas humanas, no sentido de conversar, escutar e aconselhar o aluno .

Aos colegas Vitor Braga, Gleisson Santana, Tibério, Alexsander Sampaio e principalmente a Luiz Gustavo Alves de Souza que sempre auxiliaram nos momentos difíceis. Ao CNPQ pelo suporte financeiro.

Enfim, a todos, que contribuíram de maneira direta ou indireta para a realização deste trabalho.

Toda disciplina, com efeito, no momento não parece ser motivo de alegria, mas de tristeza; ao depois, entretanto, produz fruto pacífico aos que têm sido por ela exercitados, frutos de justiça. (Hb 12:11)

Sumário

Resumo	2
Abstract	3
1 Modelagem de uma Equação de Evolução de Frentes de Onda em Reações Químicas	4
1.1 Introdução	4
1.2 As Equações do Movimento	5
1.3 Resultados para a estabilidade linear de frentes horizontais planas	8
1.4 Determinação das escalas a serem usadas nas expansões assintóticas	10
1.5 Derivação da equação de evolução	11
2 Teoria Básica	28
2.1 Problema de Cauchy para Equações de Evolução	28
2.2 Operadores Lineares	29
2.3 Resultados de Teoria da Medida	33
2.4 Transformada de Fourier	35
2.5 Espaços de Sobolev em $\mathbb{R}^n$	38
2.6 Espaços de Sobolev Periódicos	41
2.7 Semigrupos de Operadores Lineares	43
3 O Problema de Cauchy para uma Equação do Tipo Kuramoto-Sivashinsky	56
3.1 A Equação Linear	56
3.2 O Problema Local	61
Conclusão	66
Referências Bibliográficas	67

Resumo

Nesta dissertação deduzimos uma equação de evolução não-linear que modela a propagação vertical de frentes de reação em química. Também resolvemos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u - \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 - \mu(1 - \partial_x^2)^{-1/2}u = 0, & x \in [-\pi, \pi], \ t > 0 \\ u(\cdot, 0) = \phi, & 2\pi - \text{periódica}. \end{cases} \quad (1)$$

Demonstrando a boa-postura do Problema de Cauchy, localmente no tempo.

Abstract

In this dissertação we deduced a nonlinear evolution equations which model vertical propagation of chemical reaction fronts. We establish which the initial value problem

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u - \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 - \mu(1 - \partial_x^2)^{-1/2}u = 0, & x \in [-\pi, \pi], \ t > 0 \\ u(\cdot, 0) = \phi, & 2\pi - \text{periodic} \end{cases}$$

it is a the Cauchy problem locally well-posed.

Capítulo 1

Modelagem de uma Equação de Evolução de Frentes de Onda em Reações Químicas

1.1 Introdução

Em reações químicas tais como a mistura de ácidos iodato-arsênico, encontra-se frentes exotérmicas de reações auto-catalíticas convertendo o fluido não reagido de densidade um, em um fluido reagido de menor densidade. Trabalhos experimentais têm demonstrado a existência de frentes com curvatura constante, movendo-se a velocidade constante. A curvatura destas frentes é devido à presença de um estado convectivo do fluido, próximo à frente de reação. O movimento convectivo é devido à instabilidade hidrodinâmica do sistema.

A instabilidade pode aparecer pela diferença de densidades entre os fluidos reagidos e não reagidos, (modelo de Rayleigh-Taylor) ou por efeitos térmicos, (modelo de Rayleigh-Bernard). Como já foi mostrado em Wilder, et al [30], efeitos térmicos são de uma menor importância que a diferença de densidade entre o fluido reagido e não reagido, como resultado disto, devemos somente considerar os casos limites de difusividade térmica infinita e zero.

Recentes experimentos mostram estados de convecção assimétrico, próximos a frente de reação do ácido iodato-arsênico em tubos verticais longos.

1.2 As Equações do Movimento

As equações governando estes sistemas autocatalíticos envolvendo propagação reação-difusão têm sido derivadas previamente em Edwards, et al [13].

Como estamos considerando a frente como uma fonte de calor (devido à natureza exotérmica da reação), a conservação da energia causa variações descontínuas do gradiente de temperatura na frente de onda, enquanto a temperatura tem variação contínua. Outra consideração é quantificar como a densidade dos fluidos mudam com a temperatura. Dado que a variação da densidade nos fluido é pequena causada pela expansão térmica, podemos considerar uma variação de primeira ordem entre as densidades. Escreveremos como

$$\rho(T) = \rho_1[1 - \alpha(T - T_1)] \quad (1.1)$$

onde $\rho(T)$ é a densidade na temperatura T , ρ_1 é a densidade na temperatura referência T_1 e α é o clássico coeficiente de dilatação térmica, sobre pressão constante. (Existe uma equação correspondente para cada fluido).

A diferença relativa entre a densidade destes dois fluidos na frente é um dos parâmetros chaves neste estudo e é definido por:

$$\delta = \frac{\rho^a - \rho^b}{\rho^b} \quad (1.2)$$

onde ρ^a é a densidade do fluido acima da frente (não reagido) e ρ^b é a densidade do fluido abaixo da frente (reagido) também chamaremos δ_0 o valor de δ onde a difusibilidade térmica assumida é zero e δ_1 o valor de δ onde a difusibilidade térmica assumida é infinita.

Se na adição destas hipóteses assumirmos infinita a difusibilidade térmica, o sistema de equações é segundo Wilder, et al [30]

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V = \frac{1}{\rho_1} \nabla P_r + \nu \nabla^2 V \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (1.4)$$

$$c = \hat{n} \cdot \hat{z} \frac{\partial H}{\partial t} - \hat{n} \cdot V|_{z=H} \quad (1.5)$$

Com condições de salto através da região entre o fluido reagido e não reagido dado por:

$$[\hat{n} \cdot V]_{-}^{+} = 0$$

$$\begin{aligned}
[\hat{n} \times V]_{-}^{+} &= 0 \\
[P_r]_{-}^{+} - [n_i n_j T_{ij}^V]_{-}^{+} &= \delta_1 \rho_1 g H \\
[\epsilon_{ijk} n_j n_l T_{kl}^V]_{-}^{+} &= 0
\end{aligned}$$

e tensor de stress viscoso

$$T_{ij}^V = -\nu \rho_1 \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right).$$

onde:

P_r é a pressão reduzida dada por $P_r = P + \rho_1 g z$;

ν é a viscosidade cinemática;

c a velocidade da frente normal com respeito ao fluido não reagido;

H é a posição vertical da frente como função de (x, y, z) ;

$\hat{n}$ é um vetor unitário normal na frente, apontado no fluido não reagido, ϵ_{ijk} é o tensor totalmente anti-simétrico definido tal que $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$, $\epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1$ e $\epsilon_{ijk} = 0$ fora isso. A notação $[\xi]_{-}^{+}$ indica a diferença de valores entre a quantidade ξ nos lados reagidos e não reagidos da frente.

A seguir definimos as coordenadas adimensionais x^* e t^* tal que $x = \nu c_0^{-1} x^*$ e $t = \nu c_0^{-2} t^*$, onde c_0 é a velocidade da frente na ausência de condução de calor (obtida experimentalmente) e variáveis dependentes adimensionais por

$$p(x^*, t^*) = (\rho_1 c_0^2)^{-1} P_r(x, t)$$

$$k(x^*, t^*) = \nu c_0^{-1} K(x, t)$$

$$v(x^*, t^*) = c_0^{-1} V(x, t)$$

$$h(x^*, t^*) = \nu^{-1} c_0 H(x, t)$$

onde K é a curvatura dimensionada da frente. Podemos escrever as equações (1.3), (1.4) e (1.5) em forma adimensional, com equações movimento

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v = -\nabla p + \nabla^2 v \quad (1.6)$$

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (1.7)$$

$$\hat{n} \cdot \hat{z} \frac{\partial h}{\partial t} = \hat{n} \cdot v_{-} + 1 + \mathcal{D}_C k \quad (1.8)$$

Com condições de salto

$$\begin{aligned} [\hat{n} \cdot v]_{-}^{+} &= 0 \\ [\hat{n} \times v]_{-}^{+} &= 0 \\ [p]_{-}^{+} &= \delta_1 Gh - [n_i n_j T_{ij}^v]_{-}^{+} \\ [\epsilon_{ijk} n_i n_j T_{kl}^v]_{-}^{+} &= 0 \end{aligned}$$

e tensor de stress viscoso

$$T_{ij}^v = -\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i},$$

onde temos usado a velocidade eikonal $c = c_0 + D_C K$ e temos abandonado o asterisco para as variáveis adimensionais. A velocidade eikonal relata a velocidade da frente normal para a velocidade de uma frente plana, na ausência de condução de calor (c_0), a curvatura da frente (k) e a difusibilidade química da espécie reagente (D_C).

Os parâmetros adimensionais que aparecem nestas equações são

$$G = g\nu c_0^{-3}$$

e

$$\mathcal{D}_C = \frac{D_C}{\nu},$$

onde D_C é a difusibilidade química. O vetor unitário normal na frente apontando no fluido não reagido é dado por

$$\hat{n} = \pm \frac{\hat{z} - \nabla h}{(1 + |\nabla h|^2)^{\frac{1}{2}}},$$

onde o sinal “+” é usado no fluido não reagido, que esta acima da frente (propagação ascendente).

No caso de difusibilidade térmica zero, é facilmente visto que a única diferença nas equações é que δ_1 é substituído por

$$\delta_0 = \delta_1 + \alpha \Delta T,$$

onde α é o coeficiente de expansão térmica de fluido, e ΔT é o salto de temperatura através da interface [13]. Como esta é a única mudança necessária para considerar os dois casos, no restante deste trabalho nós devemos usar o símbolo δ sem o subscrito para significar que ele pode ser δ_1 ou δ_2 , dependendo de qual caso está sendo considerado

1.3 Resultados para a estabilidade linear de frentes horizontais planas

Neste trabalho devemos restringir ao caso de sistema lateralmente ilimitado, isso irá permitir o estudo da instabilidade da frente sem a influência das bordas. A análise da estabilidade linear deste sistema tem sido considerada previamente, e pode ser encontrada em detalhes em [13].

As equações (1.6), (1.7) e (1.8) foram derivadas para uma coordenada fixa construída em uma propagação ascendente de frente horizontal. A localização da frente não-perturbada é fixada em $z = h = 0$. O fluido não reagido está no domínio $z > 0$ (para propagação ascendente da frente), enquanto o fluido reagido está descrito por $z < 0$. Nesta construção, as equações (1.6), (1.7) e (1.8) produzem velocidade do fluido adimensional constante e perfil de temperatura para a frente plana não distribuída (com $k=0$)

$$v^{(0)} = -\hat{z}. \quad (1.9)$$

Executando o modelo da análise da estabilidade linear, introduzimos uma pequena perturbação dependente do tempo para o estado constante na forma

$$h = h^{(1)} \quad (1.10)$$

$$v = v^{(0)} + v^{(1)} \quad (1.11)$$

$$p = p^{(0)} + p^{(1)} \quad (1.12)$$

Com expressões similares para $\hat{n}$ e k . Substituindo estas expressões nas equações (1.6), (1.7), (1.8) e retendo os termos lineares nas perturbações, produzimos um sistema linear de equações diferenciais parciais e condições de salto. Como estas equações representam um conjunto de equações diferenciais homogêneas e lineares podemos introduzir uma perturbação número onda q e taxa de crescimento σ , e favorecer as perturbações $h^{(1)}$, $v^{(1)}$ e $p^{(1)}$ com dependência exponencial $e^{iqx+\sigma t}$. Como detalhado na referência [13], o problema pode ser reescrito somente em termos da componente vertical da velocidade perturbada $w^{(1)}$. Isto leva para uma equação diferencial ordinária linear a qual está resolvida para dar a solução mostrada abaixo

$$w^{(1)} = e^{iqx+\sigma t} \times \begin{cases} Ae^{-qz} + Be^{k-z} & , z \geq 0 \\ Ce^{qz} + De^{k+z} & , z < 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

com

$$k_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \sigma + q^2}. \quad (1.14)$$

Se assumirmos a forma para a posição da frente ser

$$h^{(1)} = Ee^{iqx+\sigma t} \quad (1.15)$$

e usar isto adiante nas condições de salto na componente vertical da perturbação de velocidade, o problema reduz a um sistema algébrico linear descrevendo o início da condução de calor. A solução deste sistema leva a uma condição de auto-valor na taxa de crescimento σ e número onda q da perturbação na forma abaixo, veja [13]

$$\delta q G[q + 2\sigma(q - s)] - 4s(\sigma + \mathcal{D}_C q^2)(q^2 - \sigma^2) = 0 \quad (1.16)$$

onde

$$s = \left(\frac{1}{4} + \sigma + q^2 \right)^{1/2}.$$

Se examinarmos a região perto do início da condução de calor ($q = q_c$) encontramos que

$$q_c = \left(\frac{\delta G}{4\mathcal{D}_C} \right)^{1/3} \quad (1.17)$$

$$\sigma = \frac{\delta G}{4q} - \mathcal{D}_C q^2, \quad (q \sim q_c). \quad (1.18)$$

Se examinarmos o comportamento de σ quando ($q \rightarrow 0$) temos que, veja em [13].

$$\sigma = \left(\frac{1}{2} \delta G q \right)^{1/2}, \quad (q \rightarrow 0) \quad (1.19)$$

Notemos que (1.17), (1.18) e (1.19) implicam que para qualquer valor de δ maior que zero a frente plana é estável se as perturbações são adotadas com comprimento de ondas maior que um dado

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{q_c}.$$

1.4 Determinação das escalas a serem usadas nas expansões assintóticas

Como tem sido visto em trabalhos prévios a instabilidade da frente é devido à diferença da densidade relativa entre o fluido reagido e o não reagido, $\delta_1(\delta_0)$, ser diferente de zero. Devido a importância deste parâmetro e sua insignificância, iremos olhar para soluções do problema que podem ser escritas como expansões de termos deste pequeno parâmetro.

Também precisaremos determinar as escalas necessárias para variáveis de espaço e tempo. Para isso, consideremos o seguinte: devemos de novo assumir que as soluções são da forma dada pelas equações (1.10), e as perturbações estamos na tentativa de encontrar. Assim, a análise linear descrita acima pode ser usada para encontrar as escalas apropriadas em termos do parâmetro δ .

Se examinarmos as equações (1.17), (1.18) e notar que devido a insignificância de $\mathcal{D}_C$ podemos escrever $\mathcal{D}_C = \mathcal{O}(\delta)$, é claro que $q = \mathcal{O}(1)$ e $\sigma = \mathcal{O}(\delta)$.

Usando os resultados da análise linear, resolvendo para os coeficientes, e usando as escalas acima para q e σ é encontrado que

$$v^{(1)} = \mathcal{O}(\delta^2)$$

e

$$p^{(1)} = \mathcal{O}(\delta^2)$$

.

As escalas para q e σ sugerem $t = \mathcal{O}(\delta)$ e $x = \mathcal{O}(1)$. Se examinarmos as equações (1.13), vemos que as escalas de q , k_+ e k_- são todas $\mathcal{O}(1)$ assim, a escala apropriada para z deve ser $z = \mathcal{O}(1)$. Devemos notar que esta coordenada z não é o z da construção em laboratório, mas o z definido por $\tilde{z} = z + H(x, t)$. Para uma análise não-linear, não devemos restringir a pequena perturbação $h^{(1)}(x, t)$, e sim devemos usar $\tilde{z} = z + F(x, t)$ (onde $\tilde{z}$ é a posição vertical construída em laboratório) para fazer esta diferença mais óbvia. Notemos que nesta notação, $z = 0$ corresponde a localização da frente verticalmente. Então vemos que as escalas são encontradas para a análise linear na variável z , a qual mede o deslocamento vertical para a frente de propagação. Assim, pela análise linear nós

chegamos nas seguintes variáveis características de espaço e tempo.

$$\eta = x \quad (1.20)$$

$$\xi = z \quad (1.21)$$

$$\tau = \delta t \quad (1.22)$$

Não é possível obter a escala de F pela análise linear. Porém, se usarmos as escalas acima na equação (1.8) é óbvio que todos os termos devem estar na mesma ordem de δ , então devemos ter $F = \mathcal{O}(\delta)$.

1.5 Derivação da equação de evolução

Fazendo a análise assintótica, devemos usar as escalas descritas acima para espaço e tempo, bem como aquelas para outras variáveis e parâmetros envolvidos, e assumir expansões assintóticas para variáveis na forma

$$v_x = \delta^2[u_0(\eta, \xi, \tau) + \delta u_1(\eta, \xi, \tau) + \dots]$$

$$v_z = -1 + \delta^2[w_0(\eta, \xi, \tau) + \delta w_1(\eta, \xi, \tau) + \dots]$$

$$p = p^{(0)} + \delta^2[p_0(\eta, \xi, \tau) + \delta p_1(\eta, \xi, \tau) + \dots]$$

$$F = \delta[f_0(\eta, \tau) + \delta f_1(\eta, \tau) + \dots]$$

onde $p^{(0)}$ é a solução para a frente plana encontrada pela análise da estabilidade linear, a qual era exatamente uma constante. Se estas formas forem usadas na equações (1.6), (1.7), (1.8) e os termos de baixa ordem são examinados, o sistema reduz a

$$-\frac{\partial u_0}{\partial \xi} = -\frac{\partial p_0}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} \quad (1.23)$$

$$-\frac{\partial w_0}{\partial \xi} = -\frac{\partial p_0}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi} \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \eta} + \frac{\partial w_0}{\partial \xi} = 0 \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial \tau} = \Delta_C \frac{\partial^2 f_0}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \eta} \right)^2 + w_0(\eta, 0, \tau), \quad (1.26)$$

com condições de salto

$$[u_0]_{-}^{+} = 0$$

$$[w_0]_{-}^{+} = 0$$

$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial \xi} + \frac{\partial w_0}{\partial \eta} \right]_{-}^{+} = 0$$

$$[p_0]_{-}^{+} = -Gf_0$$

onde temos usado $\mathcal{D}_C = \delta \Delta_C$.

Verifiquemos a equação (1.26), pela equação (1.8) temos que $\widehat{n}\widehat{z}\frac{\partial h}{\partial t} = \widehat{n}v_{-} + 1 + \mathcal{D}_C k$ que será tomada por $\widehat{n}\widehat{z}\frac{\partial F}{\partial t} = \widehat{n}v_{-} + 1 + \mathcal{D}_C k$. Lembrando que $\widehat{n} = \pm \frac{\widehat{z} - \nabla h}{(1 + |\nabla h|^2)^{\frac{1}{2}}}$, temos

$$\widehat{n} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(-\frac{\partial F}{\partial x}, 0, 1 \right); \quad \widehat{z} = (0, 0, 1)$$

$$\widehat{v} = (\delta^2 u_0 + \delta^3 u_1 + \dots, 0, -1 + \delta^2 w_0 + \delta^3 w_1 + \dots)$$

$$F = \delta f_0 + \delta^2 f_1 + \dots$$

com

$$\eta = x; \quad \xi = z; \quad e\tau = \delta t.$$

Daí

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} = \delta \frac{\partial F}{\partial t}$$

ou seja,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \delta \left(\delta \frac{\partial f_0}{\partial \tau} + \delta^2 \frac{\partial f_1}{\partial \tau} + \dots \right),$$

que é equivalente a

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \delta^2 \frac{\partial f_0}{\partial \tau} + \delta^3 \frac{\partial f_1}{\partial \tau} + \dots$$

Por outro lado,

$$\widehat{n}\widehat{z} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}},$$

logo,

$$\begin{aligned}\widehat{nv} &= \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(-\frac{\partial F}{\partial x}, 0, 1\right) (\delta^2 u_0 + \delta^3 u_1 + \dots, 0, -1 + \delta^2 w_0 + \delta^3 w_1 + \dots) \\ &= \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \left[-\frac{\partial F}{\partial x}(\delta^2 u_0 + \delta^3 u_1 + \dots) + (-1) + \delta^2 w_0 + \delta^3 w_1 + \dots\right].\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \left[-\frac{\partial F}{\partial x}(\delta^2 u_0 + \delta^3 u_1 + \dots) + (-1) + \delta^2 w_0 + \delta^3 w_1 + \dots\right. \\ &\quad \left. + \dots\right] (1 + D_c k),\end{aligned}$$

então

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left(-\frac{\partial F}{\partial x}\right) (\delta^2 u_0 + \delta^3 u_1 + \dots) - 1 + \delta^2 w_0 + \delta^3 w_1 + \dots + (1 + D_c k) \left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\delta^2 \frac{\partial f_0}{\partial \tau} + \delta^3 \frac{\partial f_1}{\partial \tau} + \dots &= -\delta \left(\frac{\partial f_0}{\partial \eta} - \delta^2 \frac{\partial f_1}{\partial \eta} + \dots\right) (\delta^2 u_0 + \delta^3 u_1 + \dots) - 1 + \delta^2 w_0 + \delta^3 w_1 + \dots \\ &\quad \dots + (1 + D_c k) \left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Pela referência [13] temos que

$$k = \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

então

$$\begin{aligned} \delta^2 \frac{\partial f_0}{\partial \tau} + \delta^3 \frac{\partial f_1}{\partial \tau} + \dots &= -\delta^3 \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \eta} - \delta \frac{\partial f_1}{\partial \eta} + \dots \right) (u_0 + \delta u_1 + \dots) - 1 + \delta^2 w_0 + \delta^3 w_1 + \dots \\ &\dots + \left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{D_c \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} \left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \dots \\ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 &= \left(\delta \frac{\partial f_0}{\partial \eta} + \delta^2 \frac{\partial f_1}{\partial \eta} + \dots \right)^2 = \delta^2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \eta} \right)^2 + \delta^3 \frac{\partial f_0}{\partial \eta} \frac{\partial f_1}{\partial \eta} + \dots \\ \left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} &= 1 + \delta^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \eta} \right)^2 + \delta^3 \frac{1}{2} \frac{\partial f_0}{\partial \eta} \frac{\partial f_1}{\partial \eta} + \dots \\ \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2} &= 1 - \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \dots \\ \frac{D_c \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2} &= D_c \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \dots \right] = D_c \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - D_c \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \delta \frac{\partial^2 f_0}{\partial \eta^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial \eta^2} + \dots \\ \frac{D_c \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2} &= D_c \delta \frac{\partial^2 f_0}{\partial \eta^2} + \dots = \delta^2 \Delta_c \frac{\partial^2 f_0}{\partial \eta^2} + \dots \end{aligned}$$

com

$$\Delta_c = \frac{D_c}{\delta} \quad e \quad D_c = \mathcal{O}(\delta).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \delta^2 \frac{\partial f_0}{\partial \tau} + \dots &= \delta^3 \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \eta} - \delta \frac{\partial f_1}{\partial \eta} + \dots \right) (u_0 + \delta u_1 + \dots) - 1 + \\ &+ \delta^2 w_0 + \delta^3 w_1 + \dots + 1 + \delta^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \eta} \right)^2 + \dots + \delta^2 \Delta_c \frac{\partial^2 f_0}{\partial \eta^2} + \dots \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \eta} \right)^2 + \Delta_c \frac{\partial^2 f_0}{\partial \eta^2} + w_0.$$

A equação (1.26) representa uma equação não-linear para a propagação da frente a qual esta incluída o fluxo do fluido somente através do último termo no lado direito o qual é a velocidade vertical do fluido na frente. As equações (1.23), (1.24) e (1.25) podem agora ser resolvidas para encontrar $w_0(\eta, 0, \tau)$ para ser usada em (1.26).

Fazendo assim, pensamos que no final das contas deve ser explorado a dinâmica da frente pelo método de diferença finita para analisar a equação (1.26). Como ele é impossível para resolver um problema o qual tem uma extensão regional infinita, devemos travar a dimensão do espaço lateral em algum valor finito de η . Devemos impor condições de borda periódica no fim do domínio, ou seja

$$\begin{aligned} f_0(-\pi, \tau) &= f_0(\pi, \tau) \\ \frac{\partial f_0}{\partial \eta}(-\pi, \tau) &= \frac{\partial f_0}{\partial \eta}(\pi, \tau) \end{aligned}$$

Com isto em mente devemos agora considerar o problema posto na equações (1.23), (1.24) e (1.25) com condições de salto.

Para se obter as equações ((1.23) a (1.26)) foram necessárias escalas de variáveis apropriadas, poderíamos continuar o trabalho nestas variáveis, porém a forma das equações são simplificadas se retornar-mos as variáveis originais, isto é, substituiremos η por x , ξ por z , τ por δt , w_0 por $\frac{W_0}{\delta^2}$, u_0 por $\frac{U_0}{\delta^2}$, f por $\frac{F_0}{\delta}$ e $\Delta_c = \frac{\mathcal{D}_c}{\delta}$.

Então voltando (1.26) em termos originais temos

$$\frac{\partial f_0}{\partial \tau} = \Delta_c \frac{\partial^2 f_0}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \eta} \right)^2 + w_0(\eta, 0, \tau),$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \delta t} \left(\frac{\partial F_0}{\delta} \right) &= \frac{\mathcal{D}_C}{\delta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F_0}{\delta} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_0}{\delta} \right) \right)^2 + \frac{W_0(x, 0, \delta t)}{\delta^2}, \\
\frac{1}{\delta^2} \frac{\partial F_0}{\partial t} &= \mathcal{D}_C \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\delta^2} \left(\frac{\partial F_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{W_0(x, 0, \delta t)}{\delta^2}, \\
\frac{\partial F_0}{\partial t} &= \mathcal{D}_C \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_0}{\partial x} \right)^2 + W_0(x, 0, \delta t).
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Se após transformarmos as equações ((1.23) - (1.25)) uma vez escrita a velocidade do fluido em termos da função corrente

$$U_0 = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad e \quad W_0 = \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

e tomarmos a transformada de Fourier (com respeito a coordenada lateral x) da equação para a função corrente resultando pela consideração ((1.23) - (1.25)), é visível que a função corrente cumpre

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right)^2 \hat{\phi}_k + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \hat{\phi}_k = 0, \tag{1.28}$$

com condições de salto

$$\begin{aligned}
[\hat{\phi}_k]_-^+ &= 0, \\
\left[\frac{\partial \hat{\phi}_k}{\partial z} \right]_-^+ &= 0, \\
\left[\frac{\partial^2 \hat{\phi}_k}{\partial z^2} \right]_-^+ &= 0, \\
\left[\frac{\partial^3 \hat{\phi}_k}{\partial z^3} \right]_-^+ &= -ik\delta G \hat{F}_k,
\end{aligned}$$

onde $\hat{\phi}_k$ e $\hat{F}_k$ são as transformadas de Fourier de ϕ e F_0 com respeito a x respectivamente. Verifiquemos a equação (1.28), substituiremos η por x , ξ por z , τ por δt , w_0 por $\frac{w_0}{\delta^2}$, u_0 por $\frac{U_0}{\delta^2}$ e f_0 por $\frac{F_0}{\delta}$ e ϕ : Função corrente, tal que $U_0 = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$ e $W_0 = \frac{\partial \phi}{\partial x}$.

Verificando (1.25) temos

$$\frac{\partial u_0}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U_0}{\delta^2} \right) = \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial U_0}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{W_0}{\delta^2} \right) = \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial W_0}{\partial z}.$$

Portanto

$$\frac{\partial u_0}{\partial \eta} + \frac{\partial w_0}{\partial \xi} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial W_0}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial W_0}{\partial z} = 0$$

e

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \quad ; \quad \frac{\partial W_0}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x}.$$

Agora verificando (1.23) temos

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{U_0}{\delta} \right) = -\frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x} \left(\frac{U_0}{\delta^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{U_0}{\delta^2} \right)$$

$$-\frac{1}{\delta^2} \frac{\partial U_0}{\partial z} = -\frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial z} = -\delta^2 \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2}. \quad (*)$$

Analogamente de (1.24), temos

$$-\frac{\partial w_0}{\partial \xi} = -\frac{\partial p_0}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} \Rightarrow -\frac{\partial w_0}{\partial z} = -\delta^2 \frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2}. \quad (**)$$

Agora de (*) substituindo $U_0 = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$, temos

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = -\delta^2 \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Rightarrow -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\delta^2 \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial z} - \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \quad (1*)$$

e substituindo $W_0 = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ em (**) temos

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = -\delta^2 \frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} = -\delta^2 \frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^2 \partial x}. \quad (2*)$$

Derivando (1*) em relação a z

$$-\frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} = -\delta^2 \frac{\partial^2 p_0}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^4 \phi}{\partial z \partial x^2 \partial z} - \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = -\delta^2 \frac{\partial p_0}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial z^2} - \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4}. \quad (a)$$

Derivando (2*) em relação a x temos

$$-\frac{\partial^3 \phi}{\partial z \partial x^2} = -\delta^2 \frac{\partial p_0}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^2 \partial x^2}. \quad (b)$$

Fazendo (a) - (b) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial z \partial x^2} &= -\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial z^2} - \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} - \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial z^2} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) &= - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial z^2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Isso verifica (1.28), depois de resolver este problema e tomando a inversa da transformada de Fourier uma vez achamos

$$W_0(x, 0, t) = \frac{\delta G}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')} \frac{F_0(x', t)}{\sqrt{k^2 + 1/4}} dx' dk. \quad (1.29)$$

Analogamente no caso periódico, encontramos

$$W_0(x, 0, t) = \frac{\delta G}{8\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ik(x-x')} \frac{F_0(x', t)}{\sqrt{k^2 + 1/4}} dx'. \quad (1.30)$$

Verifiquemos a equação (1.30)

$$\begin{aligned} W_0(x, 0, t) &= \frac{\delta G}{4} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ikx'} \frac{F_0(x', t)}{\sqrt{k^2 + 1/4}} dx' \right) \\ &= \frac{\delta G}{4\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ikx'} \frac{F_0(x', t)}{\sqrt{k^2 + 1/4}} dx' \right) \\ &= \frac{\delta G}{4\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \frac{\widehat{F_0}(k, t)}{\sqrt{k^2 + 1/4}} \\ &= \frac{\delta G}{4} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\widehat{F_0}(k, t)}{\sqrt{k^2 + 1/4}} \right), \end{aligned}$$

onde $\mathcal{F}^{-1}$ é a transformada de Fourier inversa. Logo

$$\widehat{W}_0(k, t) = \frac{\delta G}{4} \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1/4}} \widehat{F}_0(k, t) dk.$$

Dizemos que

$$W_0 = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Rightarrow \widehat{W}_0(k, t) = ik \widehat{\phi}_k(0, t).$$

Logo

$$\widehat{\phi}_k(0, t) = -i \frac{\delta G}{4} \frac{\widehat{F}_0(k, t)}{k \sqrt{k^2 + 1/4}} \quad (1.31)$$

Seja a equação (1.28), chamamos $y(z) = \phi_k(z, t)$ e denotamos $D^j = \frac{\partial^j}{\partial z^j}$, logo, (1.28) é equivalente a

$$(D^2 - k^2)^2 y + D(D^2 - k^2)y = 0. \quad (1.32)$$

Logo obtemos

$$y^{iv} - k^2 y'' - k^2 y'' + k^4 y + y''' - k^2 y' = 0.$$

E então teremos

$$y^{iv} + y''' - 2k^2 y'' - k^2 y' + k^4 y = 0. \quad (1.33)$$

Supondo soluções da forma

$$y = Ce^{\lambda z}; \quad y' = \lambda Ce^{\lambda z}; \quad y'' = \lambda^2 Ce^{\lambda z}; \quad y''' = \lambda^3 Ce^{\lambda z}; \quad y^{(iv)} = \lambda^4 Ce^{\lambda z}.$$

Substituindo em (1.33) obtemos,

$$(\lambda^4 + \lambda^3 - 2k^2 \lambda^2 - k^2 \lambda + k^4) Ce^{\lambda t} = 0,$$

e temos a equação algébrica

$$\lambda^4 + \lambda^3 - 2k^2 \lambda^2 - k^2 \lambda + k^4 = 0 \quad (1.34)$$

Observamos que k e $-k$ são raízes de (1.34), logo fatorando (1.34) temos

$$(\lambda - k)(\lambda + k)(\lambda^2 + \lambda - k^2) = 0.$$

E teremos como raízes de (1.34)

$$\lambda_1 = k, \quad \lambda_2 = -k, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}, \quad \lambda_4 = -\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}$$

Então (1.28) tem soluções gerais da forma

$$y_1(z) = A_1 e^{kz} + A_2 e^{-kz} + A_3 e^{\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right)z} + A_4 e^{\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right)z},$$

para $z < 0$ e

$$y_2(z) = B_1 e^{kz} + B_2 e^{-kz} + B_3 e^{\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right)z} + B_4 e^{\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right)z},$$

para $z > 0$.

Suponhamos as soluções limitadas y_1 e y_2 de (1.28), assim obtemos que $A_2 = A_4 = 0$ e $B_1 = B_2 = 0$ então,

$$y(z) = \begin{cases} y_1(z) = A_1 e^{kz} + A_3 e^{\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right)z}, & z < 0 \\ y_2(z) = B_3 e^{\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right)z} + B_4 e^{\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right)z}, & z > 0 \end{cases}$$

Da condição $[\widehat{\phi}_k]_-^+ = 0$ se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (y(z)) - \lim_{x \rightarrow 0^-} (y(z))$, logo

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} (y(z)) = \lim_{z \rightarrow 0^+} (y_2(z)) = B_3 + B_4$$

e

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} (y(z)) = \lim_{z \rightarrow 0^-} (y_1(z)) = A_1 + A_3,$$

o que resulta em

$$B_3 + B_4 = A_1 + A_3. \quad (1.35)$$

De $\left[\frac{\partial \widehat{\phi}_k}{\partial z}\right]_-^+ = 0$ se, e somente se, $\lim_{z \rightarrow 0^+} (y'(z)) - \lim_{z \rightarrow 0^-} (y'(z)) = 0$, logo

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} (y'(z)) = \lim_{z \rightarrow 0^+} (y'_2(z)), \quad y'_2(z) = -kB_3 e^{-kz} + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right) B_4 e^{\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right)z},$$

também

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} (y'(z)) = \lim_{z \rightarrow 0^-} (y'_1(z)), \quad y'_1(z) = -kA_1 e^{kz} + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right) A_3 e^{\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right)z}.$$

Portanto

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} (y'(z)) = -kB_2 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right) B_4$$

e

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} (y'(z)) = kA_1 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right) A_3,$$

logo, obtemos a equação

$$-kB_2 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right) B_4 + kA_1 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right) A_3. \quad (1.36)$$

De $\left[\frac{\partial^2 \widehat{\phi}_k}{\partial z^2}\right]_{-}^{+} = 0$ se, e somente se, $\lim_{z \rightarrow 0^+} (y''(z)) - \lim_{z \rightarrow 0^-} (y''(z)) = 0$, logo

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} (y''(z)) = \lim_{z \rightarrow 0^+} (y''_2(z))$$

e

$$y''_2(z) = k^2 B_2 e^{-kz} + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right) B_4 e^{\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right)z},$$

assim

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} (y''(z)) = k^2 B_2 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right) B_4. \quad (1.37)$$

Por outro lado,

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} (y''(z)) = \lim_{z \rightarrow 0^-} (y''_1(z)),$$

$$y''_1(z) = k^2 A_1 e^{kz} + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right) A_3 e^{\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right)z}$$

e

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} (y_1''(z)) = k^2 A_1 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} \right) A_3. \quad (1.38)$$

De (1.37) e (1.38) obtemos

$$k^2 B_2 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} \right) B_4 + k^2 A_1 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} \right) A_3. \quad (1.39)$$

Agora de $\left[\frac{\partial^3 \widehat{\Phi}_k}{\partial z^3} \right]_-^+ = -ik\delta G \widehat{F}_k$ se, e somente se, $\lim_{z \rightarrow 0^+} (y'''(z)) - \lim_{z \rightarrow 0^-} (y'''(z)) = -ik\delta G \widehat{F}_k$, logo

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} (y'''(z)) = \lim_{z \rightarrow 0^+} (y_2'''(z))$$

e

$$y_2'''(z) = -k^3 B_2 e^{-kz} + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} \right) B_4 e^{\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} \right) z}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} (y'''(z)) = -k^3 B_2 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} \right) B_4. \quad (1.40)$$

Por outro lado,

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} (y'''(z)) = \lim_{z \rightarrow 0^-} (y_1'''(z)),$$

$$y_1'''(z) = k^3 A_1 e^{kz} + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} \right)^3 A_3 e^{\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} \right) z}$$

e

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} (y_1'''(z)) = k^3 A_1 + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} \right)^3. \quad (1.41)$$

de (1.40) e (1.41) obtemos

$$\left\{ -k^3 B_2 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} \right)^3 B_4 \right\} - \left\{ -k^3 A_1 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} \right)^3 A_3 \right\} = -ik\delta G \widehat{F}_k. \quad (1.42)$$

De (1.35), (1.36), (1.39) e (1.42) obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} A_1 + A_3 + (-B_2) + (-B_4) & = 0 \\ kA_1 + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right) A_3 + (-k)(-B_2) + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}}\right) (-B_4) & = 0 \\ k^2 A_1 + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right)^2 A_3 + (-k)^2(-B_2) + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}}\right)^2 (-B_4) & = 0 \\ k^3 A_1 + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right)^3 A_3 + (-k)^3(-B_2) + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}}\right)^3 (-B_4) & = ik\delta G\hat{F}_k \end{cases} \quad (1.43)$$

Observamos que o sistema (1.43) tem a forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \\ -B_2 \\ -B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ik\delta G\hat{F}_k \end{pmatrix}$$

onde $\lambda_1 = k$; $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}$; $\lambda_3 = -k$; e $\lambda_4 = -\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}}$.

Temos assim que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{pmatrix} \text{ é o conhecido determinante de Vandermonde que é dado por}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{pmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3).$$

Observamos que

$$\begin{aligned} \lambda_2 - \lambda_1 &= \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} - \left(k + \frac{1}{2}\right); & \lambda_3 - \lambda_1 &= -2k; & \lambda_4 - \lambda_1 &= -\left[\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} + \left(k + \frac{1}{2}\right)\right]; \\ \lambda_3 - \lambda_2 &= -\left[\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} + \left(k - \frac{1}{2}\right)\right]; & \lambda_4 - \lambda_3 &= -\left[\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} - \left(k - \frac{1}{2}\right)\right]; & \lambda_4 - \lambda_2 &= \\ & & & & -2\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

além disso,

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1) = k$$

e

$$(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3) = k,$$

logo, usando a regra de Crammer, obtemos

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ 0 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ ik\delta G\widehat{F}_k & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix}},$$

ou seja,

$$A_1 = -(ik\delta G\widehat{F}_k) \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix}}.$$

Assim,

$$A_1 = -\frac{ik\delta G\widehat{F}_k}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} = -\frac{ik\delta G\widehat{F}_k}{k2k} = -\frac{ik\delta G\widehat{F}_k}{2k^2}.$$

Por outro lado,

$$A_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & 0 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & ik\delta G\widehat{F}_k & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix}} = (ik\delta G\widehat{F}_k) \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix}}.$$

Logo,

$$A_3 = \frac{ik\delta G\widehat{F}_k}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)}.$$

De $(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) = \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$, temos que

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2) = -2\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} \left(\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right),$$

logo,

$$A_3 = -\frac{ik\delta G\hat{F}_k}{2\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} \left(\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right)},$$

portanto,

$$A_1 + A_3 = -\frac{ik\delta G\hat{F}_k}{2} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} \left(\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right)} \right),$$

que é equivalente a

$$A_1 + A_3 = -\frac{ik\delta G\hat{F}_k}{2} \left(-\frac{1}{2k^2\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}} \right) = -\frac{ik\delta G\hat{F}_k}{4k\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}}.$$

Da condição $[\hat{\phi}_k]_-^+ = 0$, temos que $y(z)$ é contínua em $z = 0$ e

$$\lim_{z \rightarrow 0} y(z) = \lim_{z \rightarrow 0^-} y_1(z) = A_1 + A_3,$$

então

$$\hat{\phi}_k(0, t) = A_1 + A_3 = -\frac{ik\delta G\hat{F}_k}{4k\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}},$$

o que prova (1.31).

Assim, (1.27), no caso contínuo, torna-se

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} = \mathcal{D}_c \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{\delta G}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')} \frac{F_0(x', t)}{\sqrt{k^2 + 1/4}} dx' dk \quad (1.44)$$

e no caso periódico

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} = \mathcal{D}_c \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{\delta G}{8\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ik(x-x')} \frac{F_0(x', t)}{\sqrt{k^2 + 1/4}} dx' \quad (1.45)$$

Agora faremos uma dilatação nas variáveis dependentes e independente na forma $x = \alpha y, t = \beta z, u(y, z) = F_0(x, t) = F_0(\alpha y, \beta z)$, assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial F_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial F_0}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} = \beta \frac{\partial F_0}{\partial t}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial F_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F_0}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} = \alpha \frac{\partial F_0}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} &= \alpha^3 \frac{\partial^3 F_0}{\partial x^3} \end{aligned}$$

e

$$\frac{\delta G}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')} \frac{F_0(x', t)}{\sqrt{k^2 + 1/4}} dx' dk = \frac{\delta G}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{k^2 + 1/4}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx'} F_0(x', t) dx' \right) dk$$

analogamente no caso periódico

$$\frac{\delta G}{8\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ik(x-x')} \frac{F_0(x', t)}{\sqrt{k^2 + 1/4}} dx' = \frac{\delta G}{4} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{k^2 + 1/4}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ikx'} F_0(x', t) dx' \right)$$

substituindo as variáveis expandidas, temos

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial z} = \mathcal{D}_C \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\delta G}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha k y}}{\sqrt{k^2 + 1/4}} \left(\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha k y'} u(y', z) dy' \right) dk.$$

Fazendo $k' = \alpha k$, obtemos

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial z} = \mathcal{D}_C \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\delta G}{4} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik'y}}{\sqrt{(\frac{k'}{\alpha})^2 + 1/4}} \left(\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik'y'} u(y', z) dy' \right) dk'.$$

Fazendo uma dilatação na função F_0 , da forma $u(y, z) = \gamma F_0(x, t)$ com $\alpha = 2$ temos

$$\frac{\gamma}{\beta} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\mathcal{D}_C}{4} \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\gamma^2}{2} \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \gamma \frac{\delta G}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e^{ik'y}}{\sqrt{(k')^2 + 1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik'y'} u(y', z) dy' \right) dk',$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \beta \frac{\mathcal{D}_C}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\gamma \beta}{8} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \beta \delta G \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik'y}}{\sqrt{(k')^2 + 1}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik'y'} u(y', z) dy' \right) dk'.$$

Agora tomemos

$$\begin{aligned} \frac{\beta \mathcal{D}_C}{4} = 1 &\Rightarrow \beta = \frac{4}{\mathcal{D}_C}, \\ \gamma \beta = 4 &\Rightarrow \gamma \frac{4}{\mathcal{D}_C} = 4 \Rightarrow \gamma = \mathcal{D}_C \end{aligned}$$

e fazendo $\mu = \beta \delta G = \frac{4\delta G}{\mathcal{D}_C}$ a equação (1.44) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \mu (1 - \partial_y^2)^{-1/2} u \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \mu (1 - \partial_y^2)^{-1/2} u &= 0. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Teoria Básica

2.1 Problema de Cauchy para Equações de Evolução

Sejam X, Y espaços de Banach e $T_0 > 0$ um problema da forma

$$\begin{cases} F \in C([0, T_0] \times Y, X) \\ \partial_t u = F(t, u), \quad t > 0 \\ u(0) = \phi \in Y, \end{cases} \quad (2.1)$$

é chamado um problema de Cauchy, ou de valor inicial, para uma equação de evolução, quando estuda-se as seguintes questões:

- a) *Existência local de soluções*: Seja $T_0 > 0$, existe $T \in (0, T_0]$ e $u \in C([0, T]; Y)$ tal que (2.1) é satisfeito.
- b) *Unicidade*: Existe $T_1 \in (0, T_0]$, com $T_0 > 0$, tal que (2.1) possui no máximo uma solução em $[0, T_1]$.
- c) *Persistência*: Se $u(0) \in Y$, então $u(t) \in Y, \forall t \in (0, T_0)$.
- d) *Dependência dos dados iniciais*: A função $\phi \mapsto u$ é contínua em relação às normas de Y e $C([0, T]; Y)$.

Se as hipóteses a), b) e c) anteriores forem verificadas, o problema (2.1) será dito *localmente bem colocado*. Se alguma das hipóteses anteriores não for verificada o problema (2.1) será dito *mal colocado*. Finalmente, se $F(t, \cdot)$ estiver definida em $[0, \infty)$

e a), b) e c) forem verificadas em $[0, T]$, $\forall T > 0$, o problema (2.1) será dito *globalmente bem colocado*.

Para maiores informações veja o capítulo I de Iório & Nunes [20].

2.2 Operadores Lineares

Sejam X e Y espaços de Banach. Uma aplicação T com domínio $D(T)$ é um *operador linear de X em Y* , se $D(T)$ é um subespaço de X e $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, u, v \in D(T)$.

O operador T é dito limitado se

$$\sup\{\|Tu\|_Y : \|u\|_X \leq 1\} < \infty.$$

Teorema 2.1. *Seja um operador linear $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$, então T é limitado, se e somente se, T é contínuo.*

Se X e Y têm dimensão finita, então todo operador linear de X em Y é limitado. O mesmo não é válido em dimensão infinita, o operador H_0 , definido na seção 2.4 deste capítulo, é um exemplo de operador linear não limitado. A demonstração disto pode ser vista em Iório [21], onde podem ser encontradas maiores informações sobre o assunto.

Um operador linear $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ é densamente definido se $\overline{D(T)} = X$.

Lema 2.1. *Se X é um espaço de Banach, então $C([0, T]; X)$ é um espaço de Banach munido da norma $\|f\| = \max\{\|f(t)\|_X : t \in [0, T]\}$.*

Lema 2.2. *Sejam $T, M > 0$, $\phi \in X$, onde X é um espaço de Banach. Então*

$$\chi(T) = \{f \in C([0, T]; X) : \sup_{[0, T]} \|f(t) - \phi\|_X \leq M\}$$

é um espaço métrico completo. Onde a distância em $\chi(T)$ é induzida pela norma de $C([0, T]; X)$.

Demonstração A distância em $\chi(T)$ é dada por

$$d(f, g) = \sup_{[0, T]} \|f(t) - g(t)\|_X.$$

É fácil ver que esta função define uma distância. Seja $\{f_n\} \subseteq \chi(T)$, $\{f_n\}$ de Cauchy em relação a d . Então $\{f_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $C([0, T]; X)$. Pelo lema anterior, existe $f \in C([0, T]; X)$ tal que $d(f_n, f) \rightarrow 0$. Temos $\|f_n(t) - \phi\|_X \leq M$, para todo $t \in [0, T]$, portanto $\sup_{[0, T]} \|f(t) - \phi\|_X \leq M$, então $f \in \chi(T)$.

Proposição 2.1. (*Teorema do Ponto Fixo de Banach*). *Sejam M um espaço métrico completo e $f : M \rightarrow M$, uma contração. Então f possui um único ponto fixo em M .*

Para a demonstração, veja Lima [25].

Os resultados a seguir podem ser encontrados em Thayer [29].

No restante desta seção $\mathcal{H}$ será um espaço de Hilbert.

Teorema 2.2. (*Teorema de Representação de Riesz*) *Seja $\eta \in \mathcal{H}$, defina $\Lambda_\eta(\xi) = \langle \xi, \eta \rangle$, então $\Lambda_\eta \in \mathcal{H}^*$ e a aplicação*

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}^* \\ \eta &\longmapsto \Lambda_\eta \end{aligned}$$

é isométrica, antilinear e sobrejetiva.

Seja $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ o espaço dos operadores lineares limitados, tomemos $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, então pelo teorema de representação de Riesz existe um único operador $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, T^*\eta \rangle$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.

Definição 2.1. *O operador T^* acima é chamado o adjunto de T . Se $T = T^*$, T é chamado Auto-Adjunto(ou hermitiano, ou simétrico).*

$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é dito normal se

$$TT^* = T^*T.$$

Podemos notar que os operadores Auto-Adjuntos e os operadores unitários (i.e. operadores lineares sobrejetivos em que $\|T\xi\| = \|\xi\|$) são também normais.

Os operadores lineares $T : D(T) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e $T_1 : D(T_1) \subseteq \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ são ditos unitariamente equivalentes se, existe um operador unitário $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_1$ tal que

$$V(D(T)) = D(T_1)$$

e

$$T_1 V \eta = V T \eta, \quad \eta \in D(T).$$

O operador V é chamado entrelaçante, dizemos que T e T_1 são entrelaçados por V .

Definição 2.2. *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. $L_\mu^p(X)$ é o espaço das funções mensuráveis $\psi : X \rightarrow \mathbb{C}$ tais que*

$$\|\psi\|_p = \left[\int_X |\psi(\omega)|^p d\mu(\omega) \right]^{1/p} < \infty,$$

onde identificamos as funções que são equivalentes q. t. p..

Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função mensurável. O operador maximal de multiplicação por g $\mathcal{M}_g$ é definido por

$$D(\mathcal{M}_g) = \{\psi \in L_\mu^2(X) : g \cdot \psi \in L_\mu^2(X)\}$$

$$\mathcal{M}_g \psi = g \cdot \psi, \quad \psi \in D(\mathcal{M}_g).$$

No próximo teorema precisaremos da seguinte definição, $M^b(X)$ é o conjunto das funções mensuráveis $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$\|\psi\|_\infty = \sup\{|\psi(x)| : x \in X\} < \infty.$$

Teorema 2.3. *(Teorema Espectral para Operadores Normais). Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, onde $\mathcal{H}$ é separável, então T é normal se, e só se, existem um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ (separável e σ -finito) e uma função $g \in M^b(X)$ tais que T é unitariamente equivalente a $\mathcal{M}_g$, em $L_\mu^2(X)$.*

Definição 2.3. *Seja $T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$ um operador linear densamente definido. O operador T^* , chamado o adjunto de T é definido por*

$$D(T^*) = \{\eta \in \mathcal{H} : \exists \phi \in \mathcal{H} \mid \langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, \phi \rangle, \forall \xi \in D(T)\}$$

$$T^* \eta = \phi, \quad \eta \in D(T^*).$$

Diremos que T é Auto-Adjunto se $T^* = T$.

Se $\eta \in D(T^*)$, $T^*\eta$ é o único vetor em $\mathcal{H}$ tal que

$$\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, T^*\eta \rangle, \quad \forall \xi \in D(T).$$

Isto segue da densidade de $D(T)$.

Um operador $T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$ é dito simétrico se

$$\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, T\eta \rangle, \quad \forall \xi, \eta \in D(T).$$

A seguir, a imagem do operador $T + i$ será denotada por $\text{ran}(T + i)$. Se T é um operador simétrico densamente definido, então a sua transformada de Cayley $W = W(T)$ é definida por

$$D(W(T)) = \text{ran}(T + i)$$

$$W((T + i)\eta) = (T - i)\eta.$$

Seja $W : D(W) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Se $\|W\xi\| = \|\xi\|, \forall \xi \in D(W)$, W é dito uma isometria parcial.

Proposição 2.2. *T é Auto-Adjunto se, e só se, $W(T)$ é unitário.*

Lema 2.3. *Seja $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então*

i) $W(\mathcal{M}_g) = \mathcal{M}_z$, onde $z : X \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por

$$z(w) = (g(w) - i)(g(w) + i)^{-1}.$$

ii) $\mathcal{M}_g$ é Auto-Adjunto.

Lema 2.4. *Se $W(T)$ e $W(T_1)$ são unitariamente equivalentes, então T em $\mathcal{H}$ e T_1 em $\mathcal{H}_1$, são unitariamente equivalentes.*

Teorema 2.4. *(Teorema Espectral para Operadores Auto-Adjuntos).*

$T : D(T) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é Auto-Adjunto se, e só se, T é unitariamente equivalente a um operador $\mathcal{M}_g$, onde g é uma função mensurável real.

Demonstração Pelo lema 2.3 $\mathcal{M}_g$ é Auto-Adjunto. Um operador unitariamente equivalente a um operador Auto-Adjunto é Auto-Adjunto. Logo a condição é suficiente. Se T é Auto-Adjunto, então pela proposição 2.2 $W(T)$ é unitário, daí pelo teorema espectral para operadores unitários, $W(T)$ é unitariamente equivalente ao operador $\mathcal{M}_z$ em $L^2_\mu(X)$, onde $z : X \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função mensurável. $z \neq 1$, q. t. p.. De fato, suponha que existe E , $\mu(E) > 0$, tal que $E \subseteq z^{-1}\{1\}$. Então $X_E \in L^2_\mu(X)$, $X_E \neq 0$ e

$$(1 - \mathcal{M}_z)X_E = (1 - z)X_E = 0.$$

Como $1 - W(T)$ é injetivo e $W(T)$ é unitariamente equivalente a $\mathcal{M}_z$ temos que $1 - \mathcal{M}_z$ é injetivo, isto contradiz a igualdade acima.

Seja $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(w) = i(1 + z(w))(1 - z(w))^{-1},$$

g é definida q. t. p. em X .

Tem-se,

$$z(w) = (g(w) - i)(g(w) + i)^{-1}, \text{ q. t. p..}$$

Pela proposição 2.2 $\mathcal{M}_z = W(\mathcal{M}_g)$. Então $W(T)$ é unitariamente equivalente a $W(\mathcal{M}_g)$, daí pelo lema 2.4 T é unitariamente equivalente a $\mathcal{M}_g$.

Definição 2.4. *Seja T um operador Auto-Adjunto em $\mathcal{H}$, então T é dito não-negativo se*

$$\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0,$$

para todo $\xi \in D(T)$.

Proposição 2.3. *Seja T um operador Auto-Adjunto em $\mathcal{H}$, então T é não-negativo se, e só se, $Sp(T) \subseteq (-\infty, 0)$.*

Veja o significado de $Sp(T)$ na definição 2.14.

2.3 Resultados de Teoria da Medida

A teoria desta seção pode ser encontrada em, Fernandez [14].

Teorema 2.5. (*Teorema da Convergência Dominada*). Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis definidas em X tal que $f_n \rightarrow f$ q. t. p. em X . Suponha que $|f_n| \leq g$, onde g é integrável. Então f é integrável e

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Teorema 2.6. Suponha que para algum $t_0 \in [a, b]$, a função $x \rightarrow f(x, t_0)$ é integrável em X , $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe em $X \times [a, b]$ e existe g integrável tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x).$$

Então a função

$$F(t) = \int_X f(x, t) d\mu,$$

é derivável em $[a, b]$ e

$$\frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt} \int_X f(x, t) d\mu = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu.$$

Seja $L = L(X, \mathcal{A}, \mu)$, o conjunto das funções reais integráveis com respeito a medida μ . A relação

$$f \sim g, \text{ se } \mu\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = 0,$$

é uma relação de equivalência em L .

Definição 2.5. Se $1 \leq p < \infty$, o espaço $L^p = L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ consiste de todas as classes de equivalência de funções reais mensuráveis f tais que $|f|^p$ tem integral finita com respeito a medida μ sobre X . A norma em L^p será definida por

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f|^p d\mu \right\}^{1/p}.$$

Os espaços usados no capítulo três serão os $L^p(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \mu)$, com $p = 1$ ou 2 , onde $B(\mathbb{R})$ é a σ -álgebra de Borel em $\mathbb{R}$ e μ é a medida de Lebesgue.

Teorema 2.7. O espaço L^p é um espaço de Banach, com a norma acima.

Definição 2.6. O espaço $L^\infty = L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ consiste de todas as classes de equivalência de funções reais mensuráveis que são limitadas q. t. p..

Se $f \in L^\infty$ e $N \in \mathcal{A}$, com $\mu(N) = 0$, definimos

$$S(N) = \sup\{|f(x)| : x \in N\}$$

e

$$\|f\|_\infty = \inf\{S(N) : N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0\}.$$

Teorema 2.8. *O espaço L^∞ é um espaço de Banach, com a norma acima.*

Teorema 2.9. *(Desigualdade de Holder). Sejam $p, q \geq 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então se $f \in L^p$ e $g \in L^q$ temos $fg \in L^1$ e*

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

No teorema a seguir $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ são espaços de medida e $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ é a σ -álgebra gerada pelos conjuntos da forma $A \times B$, onde $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$.

Teorema 2.10. *(Teorema de Fubini). Sejam μ e ν medidas σ -finitas e f mensurável em relação a $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Então*

$$\int_X \left(\int_Y |f(x, y)|d\nu \right) d\mu < \infty$$

se, e só se,

$$\int_Y \left(\int_X |f(x, y)|d\mu \right) d\nu < \infty.$$

Se uma das desigualdades acima ocorrer as integrais repetidas são iguais.

2.4 Transformada de Fourier

As demonstrações dos teoremas da próxima seção podem ser encontrados em [21].

Definição 2.7. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a transformada de Fourier de f é a função*

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx,$$

e a transformada de Fourier inversa de f é definida por

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \check{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

Onde $\xi \cdot x = \xi_1 \cdot x_1 \dots \xi_n \cdot x_n$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a convolução de f e g é a função

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Teorema 2.11. *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).$$

Sejam $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ então denotamos

$$\partial/\partial x_i = D_i, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \text{ e } x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

O espaço de Schwartz, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto das funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$, veja em Folland [15].

Seja $\mathbb{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ que são contínuas e tendem a zero com $|x| \rightarrow \infty$. Dizemos que f tem suporte compacto se o fecho de $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$ for compacto, seja $\mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções $\mathcal{C}^\infty$ de suporte compacto, se $1 \leq p < \infty$, então $\mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ (veja o teorema 2.19 de Adams [1]) e é denso em $\mathbb{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$ na norma L^∞ .

Sejam $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\{f_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tais que $f_n \rightarrow f$ na norma de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Definimos

$$\hat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n.$$

Teorema 2.12. *A função*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \\ f &\longmapsto \mathcal{F}f = \hat{f} \end{aligned}$$

é um operador unitário. $\mathcal{F}$ é a transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.13. *(Identidade de Parseval). Se $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle,$$

a igualdade anterior é equivalente a

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Consideremos o operador maximal de multiplicação por $|\xi|^2$ definido por

$$D(M_0) = \{g \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid |\xi|^2 g \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

$$(M_0 g)(\xi) = |\xi|^2 g(\xi), g \in D(M_0).$$

O operador H_0 é definido por

$$D(H_0) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid |\xi|^2 \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

$$H_0 f = \mathcal{F}^{-1}(M_0 \mathcal{F} f), f \in D(H_0).$$

A seguir definiremos funções do operador H_0 .

Seja $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, uma função mensurável, o operador maximal de multiplicação por $F(|\xi|^2)$, $F(M_0)$ é definido por

$$D(F(M_0)) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid F(|\cdot|^2) \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

$$(F(M_0) \varphi)(\xi) = F(|\xi|^2) \varphi(\xi), \varphi \in D(F(M_0)).$$

Definimos então $F(H_0)$ por

$$D(F(H_0)) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid F(|\cdot|^2) \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

$$F(H_0) f = \mathcal{F}^{-1}(F(M_0) \mathcal{F} f), f \in D(F(H_0)).$$

Teorema 2.14. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ então $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}.$$

Denotaremos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ o espaço dos operadores $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ tais que T é linear e contínuo. Os elementos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ são chamados *distribuições temperadas*. Se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $T\varphi$ será denotado por

$$T\varphi = \langle T, \varphi \rangle.$$

Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, então a transformada de Fourier de f é definida pela fórmula

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Analogamente a transformada inversa é definida por

$$\langle \check{f}, \varphi \rangle = \langle f, \check{\varphi} \rangle, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

2.5 Espaços de Sobolev em $\mathbb{R}^n$

Na seção a seguir as referências sobre espaços de Sobolev podem ser encontradas em Iório [21].

Definição 2.8. Os conjuntos $H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$, $s \in \mathbb{R}$ são chamados espaços de Sobolev de tipo L^2 em $\mathbb{R}^n$.

Se $s \in \mathbb{R}$ o espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$ munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi,$$

é um espaço de Hilbert. A norma de $H^s(\mathbb{R}^n)$ é

$$\|f\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Usando a identidade de parseval temos

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_s &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi) \overline{(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{g}(\xi)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} ((1 - \partial_x^2)^{s/2} f)^\wedge(\xi) \overline{((1 - \partial_x^2)^{s/2} g)^\wedge(\xi)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} ((1 - \partial_x^2)^{s/2} f)(x) \overline{((1 - \partial_x^2)^{s/2} g)(x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (J^s f)(x) \overline{(J^s g)(x)} dx. \end{aligned}$$

A norma de $H^s(\mathbb{R}^n)$ pode, portanto ser escrita como

$$\|f\|_s = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(J^s f)(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Teorema 2.15. Se $s > n/2$, então $H^s(\mathbb{R}^n)$ está continuamente imerso em $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C(n, s) \|f\|_s,$$

onde

$$C(n, s) = (2\pi)^{-n/2} \left[\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi \right]^{1/2}.$$

Os próximos lemas serão usados no capítulo três.

Lema 2.5. *Se $\lambda \geq 0$ e $r \in [0, \infty)$, então*

$$C_1(1 + r^\lambda) \leq (1 + r)^\lambda \leq C_2(1 + r^\lambda),$$

onde $C_1 = \min\{1, 2^{\lambda-1}\}$ e $C_2 = \max\{1, 2^{\lambda-1}\}$.

Sugestão para a demonstração: Estude o comportamento da função

$$\varphi(r) = \frac{(1 + r)^\lambda}{1 + r^\lambda}.$$

Lema 2.6. *(Lema de Gronwall). Sejam $f, k \in L^1([0, T])$, $k, C \geq 0$, onde C é constante. Então se*

$$f(t) \leq C + \int_0^t k(s)f(s)ds, \quad (2.2)$$

temos que

$$f(t) \leq C \exp \left[\int_0^t k(s)ds \right].$$

Demonstração Se

$$R(t) = \int_0^t f(s)k(s)ds,$$

então

$$\frac{d}{dt} \left\{ R(t) \exp \left[- \int_0^t k(s)ds \right] \right\} \leq C k(t) \exp \left[- \int_0^t k(s)ds \right],$$

logo, integrando de 0 a t , $t \in [0, T]$, obtemos

$$\begin{aligned} R(t) \exp \left[- \int_0^t k(s)ds \right] &\leq C \int_0^t k(s) \exp \left[- \int_0^s k(\tau)d\tau \right] ds \\ R(t) &\leq C \int_0^t k(s) \exp \left[\int_s^t k(\tau)d\tau \right] ds \\ &= -C + C \exp \left[\int_0^t k(s)ds \right] \\ &\leq C \exp \left[\int_0^t k(s)ds \right], \end{aligned}$$

daí, de (2.2) obtemos

$$f(t) \leq C \exp \left[\int_0^t k(s)ds \right].$$

Se $m \in \mathbb{N}$, seja $C_0^m(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções de classe C^m de suporte compacto em $\mathbb{R}^n$.

Lema 2.7. (*Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg*). Sejam q, r tais que $1 \leq q, r \leq \infty$, e α, β multi-índices satisfazendo $0 \leq |\alpha| < |\beta|$. Se $u \in C_0^{|\beta|}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\frac{1}{p} = \frac{|\alpha|}{n} + \theta \left(\frac{1}{r} - \frac{|\beta|}{n} \right) + (1 - \theta) \frac{1}{q},$$

então

$$\|D^\alpha u\|_{L^p} \leq C \|D^\beta u\|_{L^r}^\theta \|u\|_{L^q}^{1-\theta}, \quad (2.3)$$

para todo θ no intervalo

$$\frac{|\alpha|}{|\beta|} \leq \theta \leq 1,$$

onde $C = C(n, |\alpha|, |\beta|, q, r)$ e $|\beta| - |\alpha| - \frac{n}{r}$ não é um inteiro não-negativo. Se $|\beta| - |\alpha| - \frac{n}{r}$ é um inteiro não-negativo então (2.23) é válido apenas para $\theta = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$.

Veja a demonstração em, Friedman [16].

Lema 2.8. (*Desigualdade de Young*). Para quaisquer $a, b \geq 0$ e $\epsilon > 0$, se $1 < p < \infty$ e

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

então

$$ab \leq \epsilon a^p + C_\epsilon b^{p'},$$

onde $C_\epsilon = \epsilon^{-1/p-1}$.

Lema 2.9. Se $s > 1/2$ e $f, g \in H^s(\mathbb{R})$ então $fg \in H^s(\mathbb{R})$ e

$$\|fg\|_s \leq C(s) \|f\|_s \|g\|_s.$$

Veja a demonstração em, Ponce [27].

Lema 2.10. (*Desigualdade de Kato-Ponce*). Se $s > 1/2$ e $f, g \in H^s(\mathbb{R})$ então $fg \in H^s(\mathbb{R})$ e

$$\|fg\|_s \leq C(\|f\|_{L^\infty} \|g\|_s + \|f\|_s \|g\|_{L^\infty}).$$

Veja em, Kato [23] uma versão generalizada.

Lema 2.11. *Sejam $\theta \geq 0$, $0 < \lambda < 2$ e $a \geq 0$, então*

$$-\theta^2 + a\theta^\lambda \leq C(\lambda)a^{\frac{2}{2-\lambda}}.$$

Sugestão para demonstração: Calcule o máximo da função

$$F(\theta) = -\theta^2 + a\theta^\lambda, \quad \theta \geq 0.$$

2.6 Espaços de Sobolev Periódicos

Seja $\mathcal{P} = C_{per}^\infty$ o conjunto de todas as funções $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que são C^∞ e periódicas de período 2π . $\mathcal{P}$ é claramente um subspaço vetorial de C_{per}^n com respeito as normas de C^n

Definição 2.9. *Um funcional linear em $\mathcal{P}$, $T : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$, é chamado uma distribuição periódica se existe uma sequência $(\Psi_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{P}$ tal que*

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}.$$

O conjunto de todas as distribuições periódicas será denotado por $\mathcal{P}'$.

Definição 2.10. *Seja $s \in \mathbb{R}$. O espaço de Sobolev $H_{per}^s = H_{per}^s([-\pi, \pi])$ é o conjunto de todos $f \in \mathcal{P}'$ tal que*

$$\|f\|_s^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s |\hat{f}(k)|^2 < \infty.$$

Em outras palavras, uma distribuição periódica f ao longo de H_{per}^s se e somente se $((1 + |k|^2)^{s/2} \hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z})$. Nos iremos denotar por $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z})$ o espaço de todas as sequências $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ com

$$\|\alpha\|_{\ell_s^2} = \left[2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s |\alpha_k|^2 \right]^{1/2}.$$

Assim $f \in H_{per}^s$ se e somente se $(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell_s^2$; neste caso, $\|f\|_s = \|\hat{f}\|_{\ell_s^2}$.

É fácil ver que para todo $s \in \mathbb{R}$, H_{per}^s é um espaço de Hilbert com respeito ao produto interno

$$(f|g)_s = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)}.$$

No caso $s = 0$, obtemos um espaço de Hilbert que é isométricamente isomorfo a $L^2([-\pi, \pi])$, no que segue, H_{per}^0 será denotado por L_{per}^2 .

Proposição 2.4. *Seja $s, r \in \mathbb{R}$. Então $H_{per}^s \hookrightarrow H_{per}^r$, ou seja, H_{per}^s é contínuo e densamente imerso em H_{per}^r e*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s, \forall f \in H_{per}^s.$$

Em particular, se $s \geq 0$, $H_{per}^s \subset L^2([-\pi, \pi])$. Além disso, $(H_{per}^s)'$, o dual topológico de H_{per}^s , é isometricamente isomorfo a H_{per}^{-s} para todo $s \in \mathbb{R}$. A dualidade está implementada por

$$\langle f, g \rangle_s = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \widehat{g}(k), f \in H_{per}^{-s}, g \in H_{per}^s$$

Proposição 2.5. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Então $f \in H_{per}^m$ se e só se $\partial^j f = f^{(j)} \in L_{per}^2$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ onde as derivadas são tomadas no sentido de $\mathcal{P}'$. Além disso $\|f\|_m$ e*

$$\langle \langle f \rangle \rangle_m^2 = \left[\sum_{j=0}^m \|\partial^j f_0^2\| \right]^{1/2}$$

são equivalentes, ou seja, existem constantes positivas C_m e C'_m tal que

$$C_m \|f\|_m^2 \leq \langle \langle f \rangle \rangle_m^2 \leq C'_m \|f\|_m^2, \forall f \in H_{per}^m.$$

Teorema 2.16. *(Lema de Sobolev). Se $s > 1/2$, então $H_{per}^s \hookrightarrow C_{per}$ e*

$$\|f\|_{\infty} \leq \|\widehat{f}\|_{\ell^1} \leq C \|f\|_s, \forall f \in H_{per}^s.$$

Seja $f, g \in H_{per}^s$, $s > \frac{1}{2}$. Devido ao Lema de Sobolev podemos definir o produto $fg \in C_{per} \subset \mathcal{P}'$ pela fórmula

$$\langle fg, \varphi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in \mathcal{P}.$$

O importante ponto sobre este produto é que ele transforma H_{per}^s para $s > \frac{1}{2}$, em uma algebra de Banach. Para provar este resultado iremos necessitar de alguma preparação.

Definição 2.11. *Uma álgebra de Banach é um espaço de Banach X junto com um produto $(x, y) \in X \times X \mapsto xy \in X$ e para todo $s, r \in \mathbb{C}$.*

- (1) $(xy)z = x(yz)$;
- (2) $r(xy) = (rx)y = x(ry)$;
- (3) $(x + y)z = xz + yz$ e $x(y + z) = xy + xz$;
- (4) $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.

Lema 2.12. *Seja $a, b \in [0, \infty)$ e $s \geq 0$. Existem constantes positivas m_s e M_s dependendo somente de s tal que*

$$m_s(a^s + b^s) \leq (a + b)^s \leq M_s(a^s + b^s).$$

Definição 2.12. *Seja $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\beta = (\beta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ duas sequências de números complexos. A convolução de α e β é a sequência $\alpha * \beta$ definida por*

$$(\alpha * \beta)_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j \beta_{k-j}$$

Proposição 2.6. *Seja $\alpha \in \ell^1 = \ell^1(\mathbb{Z})$ e $\beta \in \ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z})$. Então $\alpha * \beta \in \ell^2$ e*

$$\|\alpha * \beta\|_{\ell^2} \leq \|\alpha\|_{\ell^1} \|\beta\|_{\ell^2}.$$

*Em particular, para cada $\alpha \in \ell^1$ fixado, a função $\beta \mapsto \alpha * \beta$ define um operador linear limitado de ℓ^2 nele mesmo.*

Teorema 2.17. *Se $s > \frac{1}{2}$, H_{per}^s é uma álgebra de Banach. Em particular, existe uma constante $C_s \geq 0$ dependendo somente de s tal que*

$$\|fg\|_s \leq C_s \|f\|_s \|g\|, \forall f, g \in H_{per}^s.$$

2.7 Semigrupos de Operadores Lineares

A teoria desta seção pode ser encontrada em Pazy [26].

Definição 2.13. *Um operador T de X em Y é dito fechado, se para qualquer sequência $\{u_n\} \subseteq D(T)$, com $u_n \rightarrow u$ e $Tu_n \rightarrow v$, tem-se*

$$u \in D(T) \text{ e } v = Tu.$$

Definição 2.14. *Seja $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ um operador linear. O conjunto dos números complexos λ , tais que $(\lambda - T)^{-1}$ existe e é limitado é chamado o Conjunto Resolvente de T e é denotado por $\rho(T)$. O conjunto $Sp(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ é chamado o Espectro de T . A aplicação $R(\lambda, T) = (\lambda - T)^{-1}$ é chamada o Resolvente de T .*

Na próxima definição I é a identidade em X .

Definição 2.15. *Seja X um espaço de Banach. Uma família $T(t), 0 \leq t < \infty$, de operadores lineares limitados em X é chamada um semigrupo de operadores lineares limitados em X se*

$$a) \ T(0) = I.$$

$$b) \ T(t + s) = T(t)T(s), t, s \geq 0.$$

O operador linear definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X \mid \exists \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T(t)x - x}{t} \right\}$$

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T(t)x - x}{t}, \ x \in D(A)$$

é chamado o gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)$.

Definição 2.16. *Um semigrupo de operadores lineares limitados em X , $T(t)$, é uniformemente contínuo se*

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \|T(t) - I\|_{\mathcal{B}(X)} = 0.$$

Teorema 2.18. *A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados $T(t)$ se, e somente se, A é um operador linear limitado. Além disso*

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Definição 2.17. *Seja X um espaço de Banach. Um semigrupo $T(t), 0 \leq t < \infty$ de Operadores Lineares Limitados em X é dito um semigrupo fortemente contínuo se*

$$\lim_{t \rightarrow 0+} T(t)x = x, \text{ para todo } x \in X.$$

Um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em X será chamado um semigrupo de classe C_0 ou um semigrupo C_0 .

Teorema 2.19. *Sejam $T(t)$ um semigrupo C_0 e A seu gerador infinitesimal.*

a) *Se $x \in X$, então*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

b) *Se $x \in X$, então*

$$\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$$

e

$$A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x$$

c) *Se $x \in D(A)$, então $T(t)x \in D(A)$ e*

$$\frac{dT(t)x}{dt} = AT(t)x = T(t)Ax.$$

d) *Se $x \in D(A)$, então*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau.$$

Corolário 2.1. *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 , $T(t)$, então A é fechado e densamente definido.*

Demonstração Sejam $x \in X$ e

$$x_t = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds, \quad t > 0.$$

Pelas partes a) e b) do teorema anterior temos respectivamente, $x_t \rightarrow x$, com $t \downarrow 0$ e $x_t \in D(A)$, logo $D(A)$ é denso em X .

Seja $x_n \in D(A)$, tal que $x_n \rightarrow x$ e $Ax_n \rightarrow y$. Pela parte d) do teorema anterior temos

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds. \quad (2.4)$$

Se $s \in (0, t)$ notemos que

$$\begin{aligned} \|T(s)Ax_n - T(s)y\|_X = \|T(s)(Ax_n - y)\|_X &\leq \|T(s)\|_{\mathcal{B}(X)}\|Ax_n - y\|_X \\ &\leq Me^{\omega s}\|Ax_n - y\|_X \\ &\leq Me^{\omega t}\|Ax_n - y\|_X \rightarrow 0, \end{aligned}$$

com $n \rightarrow \infty$. Logo $T(s)Ax_n$ converge uniformemente para $T(s)y$ no intervalo $(0, t)$, então tomando o limite nos dois lados de (2.4) temos

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y ds. \quad (2.5)$$

Dividindo os dois membros de (2.5) por $t > 0$ e fazendo $t \downarrow 0$, obtemos que $x \in D(A)$ e $Ax = y$, pela parte a) do teorema anterior.

Seja A um operador satisfazendo as condições:

- a) A é fechado e densamente definido.
- b) O conjunto resolvente de A $\rho(A) \supseteq (0, \infty)$ e para todo $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Usando as condições a) e b) anteriores provaremos os próximos lemas.

Lema 2.13. *Suponha que A satisfaz as hipóteses a) e b) acima, então $R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}$, satisfaz a igualdade*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall x \in X.$$

Demonstração

$$\begin{aligned} x \in D(A) \Rightarrow \|\lambda R(\lambda, A)x - x\|_X &= \|AR(\lambda, A)x\|_X \\ &= \|R(\lambda, A)Ax\|_X \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\|_X \rightarrow 0, \text{ com } \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Como $D(A)$ é denso em X e $\|\lambda R(\lambda, A)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq 1$, temos $\lambda R(\lambda, A)x \rightarrow x$, com $\lambda \rightarrow \infty$, $\forall x \in X$. De fato, sejam $x \in X$, $x_n \in D(A)$, $x_n \rightarrow x$. Então, dado $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow \|x_n - x\|_X < \frac{\epsilon}{4}$. Fixemos $n_0 > N$, então

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\|_X &\leq 2\|x_{n_0} - x\|_X + \|\lambda R(\lambda, A)x_{n_0} - x_{n_0}\|_X \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \|\lambda R(\lambda, A)x_{n_0} - x_{n_0}\|_X, \forall \lambda > 0, x \in X. \end{aligned}$$

Fazendo $\lambda \rightarrow \infty$ acima obtemos a igualdade

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall x \in X.$$

Se $\lambda > 0$, $A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda$ é chamada a aproximação de Yosida de A .

Lema 2.14. *Suponha que A satisfaz as hipóteses a) e b) acima. Então se A_λ é a aproximação de Yosida de A , temos*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax, \quad \text{se } x \in D(A).$$

Demonstração

$$\begin{aligned} x \in D(A) \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda A R(\lambda, A)x \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} R(\lambda, A)Ax \\ &= Ax \end{aligned}$$

Lema 2.15. *Seja A satisfazendo as hipóteses a) e b) anteriores. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de contrações e^{tA_λ} .*

Além disso tem-se

$$\|e^{tA_\lambda} - e^{tA_\mu}\|_{\mathcal{B}(X)} \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|_X, \quad \forall x \in X, \quad \lambda, \mu > 0.$$

Demonstração Pela definição temos que $A_\lambda \in \mathcal{B}(X)$, logo pelo teorema 2.13 A_λ é o

gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo e^{tA_λ} . Temos também

$$\begin{aligned}
 \|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{B}(X)} &= \|e^{t(\lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda)}\|_{\mathcal{B}(X)} \\
 &= \|e^{-t\lambda I} e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)}\|_{\mathcal{B}(X)} \\
 &\leq \|e^{-t\lambda I}\|_{\mathcal{B}(X)} \|e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)}\|_{\mathcal{B}(X)} \\
 &= \|e^{-t\lambda I}\|_{\mathcal{B}(X)} \|e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)}\|_{\mathcal{B}(X)} \\
 &\leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{B}(X)}} \leq 1
 \end{aligned}$$

Logo e^{tA_λ} é um semigrupo de contrações. Pelas definições temos que $e^{tA_\lambda}, e^{tA_\mu}, A_\lambda$ e A_μ comutam entre se. Então

$$\begin{aligned}
 \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\|_X &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} (e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x) ds \right\|_X \\
 &\leq \int_0^1 \|(tA_\lambda e^{tsA_\lambda} - e^{tsA_\lambda} tA_\mu) e^{t(1-s)A_\mu} x\|_X ds \\
 &= \int_0^1 \|te^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} (A_\lambda x - A_\mu x)\|_X ds \\
 &\leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|_X \int_0^1 \|e^{tsA_\lambda}\|_{\mathcal{B}(X)} \|e^{t(1-s)A_\mu}\|_{\mathcal{B}(X)} ds \\
 &\leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|_X
 \end{aligned}$$

Teorema 2.20. (Hille-Yosida). *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações $T(t)$, $t \geq 0$, se, e somente se*

- a) A é fechado e densamente definido.
- b) O conjunto resolvente de A $\rho(A) \supseteq (0, \infty)$ e para todo $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração

Do corolário 2.1 obtemos a). Seja $\lambda > 0$. Defina

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt. \quad (2.6)$$

$t \rightarrow T(t)x$ é contínua, logo $e^{-\lambda t}T(t)x$ é integrável no sentido de Riemann em $[0, a]$ para todo $a > 0$. Temos também

$$\|R(\lambda)x\|_X \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)x\|_X dt \leq \frac{1}{\lambda} \|x\|_X,$$

logo (2.6) existe como integral imprópria de Riemann. Além disso, se $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t+h)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda t} e^{\lambda h} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Fazendo $h \downarrow 0$ em (2.16) obtemos $AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x$, $\forall x \in X$, logo se $x \in X$, então $R(\lambda)x \in D(A)$, e

$$(\lambda - A)R(\lambda) = I. \quad (2.8)$$

Se $x \in D(A)$, então

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)Ax dt \\ &= \int_0^\infty A(e^{-\lambda t} T(t)x) dt \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a A(e^{-\lambda t} T(t)x) dt \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} A\left(\int_0^a (e^{-\lambda t} T(t)x) dt\right) \\ &= A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt\right) \\ &= AR(\lambda)x. \end{aligned}$$

Onde na quarta igualdade usamos o fato de A ser fechado. Então de (2.8) e da igualdade anterior obtemos

$$\begin{aligned} x \in D(A) \Rightarrow x = (\lambda - A)R(\lambda)x &= \lambda R(\lambda)x - AR(\lambda)x \\ &= \lambda R(\lambda)x - R(\lambda)Ax \\ &= R(\lambda)(\lambda - A)x. \end{aligned}$$

Logo

$$I = R(\lambda)(\lambda - A). \quad (2.9)$$

Portanto de (2.8) e (2.22) obtemos $R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$ e $(0, \infty) \subset \rho(A)$.

Provaremos a seguir que a condição é suficiente. Faremos duas provas distintas:

(1ª Prova)

Seja $x \in D(A)$, então usando o lema 2.15 temos

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\|_X &\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|_X \\ &\leq t\|A_\lambda x - Ax\|_X + t\|Ax - A_\mu x\|_X \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Logo $e^{tA_\lambda}x$, converge com $\lambda \rightarrow \infty$, $\forall x \in X$. Como $D(A)$ é denso em X e $\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{B}(X)} \leq 1$ temos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x, \quad \forall x \in X. \quad (2.10)$$

A prova desta afirmação é análoga à demonstração do lema 2.15. O limite (2.10) é uniforme em intervalos limitados. De (2.10) segue que $T(t)$ satisfaz as propriedades de semigrupo, de fato

$$T(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{0A_\lambda}x = Ix = x.$$

logo $T(0) = I$.

$$\begin{aligned} T(t+s)x &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{(t+s)A_\lambda}x \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}(e^{sA_\lambda}x) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}(\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{sA_\lambda}x) \\ &= T(t)(T(s)x) \\ &= T(t)T(s)x. \end{aligned}$$

logo, $T(t+s) = T(t)T(s)$, $t, s \geq 0$. Temos que $\|T(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq 1$ e a função $t \rightarrow T(t)x$, $t \geq 0$ é contínua pois é o limite uniforme de funções contínuas $t \rightarrow e^{tA_\lambda}x$.

Logo $T(t)$, é um semigrupo C_0 de contrações em X . Resta provar que A é o seu gerador infinitesimal. A equação (2.6) e o teorema 2.19 implicam que

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (e^{tA_\lambda}x - x) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x ds \\ &= \int_0^t T(t)Ax ds. \end{aligned} \quad (2.11)$$

A última igualdade segue da convergência uniforme de $e^{sA_\lambda} A_\lambda x$ para $T(t)Ax$ em intervalos limitados. Sejam B o gerador infinitesimal de $T(t)$ e $x \in D(A)$. Então (1.9) implica que $x \in D(B)$ e $Bx = Ax$. Logo $B \supseteq A$. Como B é o gerador infinitesimal de $T(t)$ segue das condições necessárias que $1 \in \rho(B)$. Por outro lado temos $1 \in \rho(A)$. Como $B \supseteq A$, temos $(1 - B)D(A) = (1 - A)D(A) = X$, logo $D(B) = (1 - B)^{-1}X = D(A)$, e portanto $A = B$.

(2ª Prova)

Por hipótese o resolvente $\rho(A) \supset \mathbb{R}^+$ e para cada $\lambda > 0$, o resolvente satisfaz a desigualdade

$$\|(A + \lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}, \lambda > 0. \quad (2.12)$$

Para ver isto notemos primeiro que (1.12) implica em

$$\|(1 + \alpha A)^{-1}\| \leq 1, \alpha \geq 0. \quad (2.13)$$

Definimos

$$V_n(t) = (1 + \frac{t}{n}A)^{-n}, t \geq 0, n = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Seque-se por (1.13) que $\|V_n(t)\| \leq 1$ de forma que $V_n(t)$ é uniformemente limitada. Além disso, $V_n(t)$ é holomorfa em t para $t > 0$ pois $(A + \lambda)^{-1}$ é holomorfa em $\lambda > 0$; em particular

$$V'_n(t) = \frac{d}{dt}V_n(t) = -A(1 + \frac{t}{n}A)^{-n-1} \in \mathcal{B}(X), t > 0. \quad (2.15)$$

$V_n(t)$ não é necessariamente holomorfa em $t = 0$ (pois definimos resolvente para $t > 0$), mas é fortemente contínua, isto é,

$$V_n(t) \rightarrow V_n(0) = 1, \text{ quando, } t \downarrow 0. \quad (2.16)$$

Esta propriedade segue-se por

$$(1 + \alpha A)^{-1} \rightarrow 1, \alpha \downarrow 0. \quad (2.17)$$

Para verificar a existência do limite $V_n(t)$, vamos estimar $V_n(t) - V_m(t)$

$$V_n(t) - V_m(t) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} \frac{d}{ds} [V_m(t-s)V_n(s)u] ds = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} [-V'_m(t-s)V_n(s)u + V_m(t-s)V'_n(s)u] ds. \quad (2.18)$$

Então por

$$V'_n(t) = \frac{d}{dt} V_n(t) = A(1 + \frac{t}{n}A)^{-n-1} \in \mathcal{B}(X), t > 0, \quad (2.19)$$

obtemos

$$\begin{aligned} V_n(t) - V_m(t)u &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} [-V'_m(t-s)V_n(s)u + V_m(t-s)V'_n(s)u] ds \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} [A(1 + \frac{(t-s)}{m}A)^{-m-1}(1 + \frac{s}{n}A)^{-n}u \\ &\quad - (1 + \frac{(t-s)}{m}A)^{-m}A(1 + \frac{s}{n}A)] ds \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} (1 + \frac{(t-s)}{m}A)^{-m-1} [A(1 + \frac{s}{n}A) \\ &\quad - (1 + \frac{(t-s)}{m}A)A(1 + \frac{s}{n}A)^{-n-1}(1 + \frac{s}{n}A)^{n+1}] (1 + \frac{s}{n}A)^{-n-1} u ds \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} (\frac{s}{n} - \frac{t-s}{m})(1 + \frac{t-s}{m}A)^{-m-1} A^2 (1 + \frac{s}{n}A)^{-n-1} u ds. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Como $u \in D(A^2)$, e o resolvente de A comuta com A , então por (2.20) segue-se que

$$V_n(t)u - V_m(t)u = \int_0^t (\frac{s}{n} - \frac{t-s}{m})(1 + \frac{t-s}{m}A)^{-m-1}(1 + \frac{s}{n}A)^{-n-1} A^2 u ds; \quad (2.21)$$

Notemos por

$$(1 + \alpha A)^{-1} \rightarrow 1, \alpha \downarrow 0 \quad (2.22)$$

que o integrando é contínuo para $0 \leq s \leq t$. Segue-se por $\|(1 + \alpha A)^{-1}\| \leq 1$, $\alpha \geq 0$ que

$$\begin{aligned} \|V_n(t)u - V_m(t)u\| &\leq \|T^2u\| \int_0^t \left(\frac{s}{n} + \frac{t-s}{m}\right) ds \\ &= \frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \|A^2u\|. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Assim $V_n(t)$ forma uma sequência de Cauchy e o $\lim V_n(t)$ existe, uniformemente em t em cada intervalo finito, desde que $u \in D(T^2)$.

Como $V_n(t)$ é uma sequência de operadores limitados, mais precisamente, $\|V_n(t)\| \leq 1$ e além disso como $\overline{D(A^2)} = X$, então o $\lim V_n(t)$ existe $\forall u \in X$, isto é,

$$U(t) = s - \lim V_n(t) = s - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}A\right)^{-n}, t \geq 0. \quad (2.24)$$

Veremos agora que $U(t)$ satisfaz as propriedades de semigrupo.

Desde que $V_n(t)u \rightarrow U(t)u$ uniformemente em t em cada intervalo finito e $V_n(t)$ é contínua em t , então $U(t)u$ é contínua em t . Em outras palavras, $U(t)$ é fortemente contínua para $t \geq 0$. Além disso, temos que

$$\|U(t)\| \leq 1, U(0) = 1, \quad (2.25)$$

desde que $\|V_n(t)\| \leq 1$ e $V_n(0) = 1$.

Agora segue-se por $V'_n(t) = \frac{d}{dt}V_n(t) = -A(1 + \frac{t}{n}A)$ que

$$\begin{aligned} V'_n(t) &= -A(1 + \frac{t}{n}A)^{-1}V_n(t) \\ &= -V_n(t)A(1 + \frac{t}{n}A)^{-1} \\ &= -AV_n(t)(1 + \frac{t}{n}A)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Mas

$$A(1 + \frac{t}{n}A)^{-1}u = (1 + \frac{t}{n}A)^{-1}Au \rightarrow Au \quad (2.27)$$

para $u \in D(A)$ por $(1 + \alpha A)^{-1} \rightarrow 1$ quando $n \downarrow \infty$.

Tomando o terceiro membro de (1.26) e aplicando a u temos

$$-V_n(t)A(1 + \frac{t}{n}A)u \rightarrow U(t)Au. \quad (2.28)$$

Da mesma forma, tomando o fator depois de A no quarto membro e aplicando a u temos:

$$V_n(t)(1 + \frac{t}{n}A)^{-1}u \rightarrow V(t)u. \quad (2.29)$$

Pela mesma razão anterior; segue-se do fechamento de A que $AU(t)u$ existe e $AU(t)u = U(t)Au$. Em outras palavras A comuta com $U(t)$:

$$AU(t) \supset U(t)A \quad (2.30)$$

Segue-se por $V'_n(t) = -A(1 + \frac{t}{n}A)^{-n-1} \in \mathcal{B}(X)$, $t > 0$ e por $V_n(t) \rightarrow V_n(0) = 1$ quando $t \downarrow 0$ que

$$V_n(t)u - u = - \int_0^t (1 + \frac{t}{n}A)^{-n-1} Auds, u \in D(T) \quad (2.31)$$

Desde que $(1 + \frac{t}{n}A)^{-n-1} = (1 + \frac{t}{n}A)^{-1}V_n(t) \rightarrow_s U(t)$ uniformemente em t em cada intervalo finito, quando passamos o limite com $n \rightarrow \infty$ dentro da integral (1.31) obtemos

$$U(t)u - u = - \int_0^t U(s)Auds, u \in D(A). \quad (2.32)$$

Desde que $U(s)Au$ é contínua em t , (1.32) mostra que $U(t)u$ é diferenciável em t se $u \in D(A)$, com

$$\frac{d}{dt}U(t)u = -U(t)Tu = -TU(t)u, t \geq 0, u \in D(A). \quad (2.33)$$

Assim $u(t) = U(t)u_0$ é solução da equação diferencial

$$\frac{du}{dt} = -Au, \text{ com } u_0 \in D(A). \quad (2.34)$$

Mostremos que a solução é única: Seja $u(t)$ qualquer solução de $\frac{du}{dt} = -Au$, onde $u(t)$ é contínua para $t \geq 0$, e a derivada $\frac{du}{dt}$ existe para $t > 0$, $u(t) \in D(A)$. Então pelo (lema1)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}U(t-s)u(s) &= \left(\frac{d}{ds}U(t-s)\right)u(s) + U(t-s)\frac{d}{ds}u(s) \\
&= U'(t-s)u(s) + U(t-s)u'(s) \\
&= U(t-s)Au(s) - U(t-s)Au(s) = 0, s < 0 \leq t.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Assim $U(t-s)u(s)$ é contínua para $0 \leq s \leq t$. Fazendo $s = t$ $s = 0$, nós temos:

$$u(t) = U(t-s)u(s) = U(t)u(0), 0 \leq s \leq t. \tag{2.36}$$

Aplicando (1.36) a solução $u(t) = U(t)u(0)$, obtemos $U(t)u_0 = U(t-s)u(s) = U(t-s)U(s)u_0$. Desde que isto é verdade para $u_0 \in D(T)$, obtemos que $U(t) = U(t-s)U(s)$. Podemos pois, escrever

$$U(t+s) = U(t)U(s), s, t \geq 0. \tag{2.37}$$

Assim $U(t)$ forma um semigrupo a um-parâmetro. Desde que $\|U(t)\| \leq 1$, $U(t)$ é chamado semigrupo contração. O operador $-A$ é chamado gerador infinitesimal do semigrupo. Nós escrevemos $U(t) = e^{-tA}$

Capítulo 3

O Problema de Cauchy para uma Equação do Tipo Kuramoto-Sivashinsky

3.1 A Equação Linear

Considere o problema associado à parte linear da equação (1), isto é,

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x^2 v - \mu(1 - \partial_x^2)^{-1/2} v = 0, & x \in [-\pi, \pi], \quad t > 0 \\ v(\cdot, 0) = \phi, & 2\pi - \text{periódica}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Usando transformada de Fourier vemos que o problema (3.1) é equivalente à

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{v}(k, t) + \left(k^2 - \frac{\mu}{(1 + k^2)^{1/2}} \right) \hat{v}(k, t) = 0, \\ \hat{v}(k, 0) = \hat{\phi}(k). \end{cases} \quad (3.2)$$

Logo

$$\hat{v}(k, t) = \exp \left\{ t \left[\frac{\mu}{(1 + k^2)^{1/2}} - k^2 \right] \right\} \hat{\phi}(k).$$

Definimos

$$F(k, t) = \exp \left\{ t \left[\frac{\mu}{(1 + k^2)^{1/2}} - k^2 \right] \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad t \geq 0.$$

Seja a família de operadores $\{E(t)\}_{t \geq 0}$, definidas por

$$E(t)f = \mathcal{F}^{-1} \left(F(\cdot, t) \hat{f} \right),$$

isto é,

$$E(t)f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(k, t)\hat{f}(k) e^{ikx},$$

Que define um semigrupo de operadores em $L^2 = L^2(\mathbb{R})$.

De fato, se $f \in L^2(\mathbb{R})$, então $\left(\hat{f}(k)\right)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2$, como $F(\cdot, t)$ é limitada temos que $\left(F(k, t)\hat{f}(k)\right)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2$, logo $\mathcal{F}^{-1}(F(\cdot, t)\hat{f}) \in L^2(\mathbb{R})$.

Temos também

$$a) E(0)f = \mathcal{F}^{-1}(F(\cdot, 0)\hat{f}) = \mathcal{F}^{-1}\hat{f} = f.$$

$$\begin{aligned} b) E(t+s)f &= \mathcal{F}^{-1}(F(\cdot, t)F(\cdot, s)\hat{f}) \\ &= E(t)(\mathcal{F}^{-1}F(\cdot, s)\hat{f}) \\ &= E(t)E(s)f, \quad t, s \geq 0. \end{aligned}$$

De a) e b) obtemos o resultado.

Lema 3.1. *Sejam $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$ e $t > 0$. Então*

$$k^{2\lambda}F(k, 2t) \leq C_\lambda \exp(2t\mu)t^{-\lambda},$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$, onde $C_\lambda = (1 + \lambda)^\lambda$. Além disso

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2)^\lambda F(k, 2t) \leq C(\lambda) e^{2t\mu} (t^{-1/2} + t^{-\frac{2\lambda+1}{2}}),$$

onde $C(\lambda)$ é uma constante que depende apenas de λ .

Demonstração

Seja $\varphi(r) = r^\lambda \exp(-2tr)$, $r \geq 0$, então $\varphi \leq 1$, se $\lambda = 0$ e $\varphi \leq (\lambda)^\lambda t^{-\lambda}$, se $\lambda > 0$. Portanto

$$\begin{aligned} k^{2\lambda}F(k, 2t) &\leq \exp(2\mu t)\varphi(k^2) \\ &\leq (1 + \lambda)^\lambda \exp(2\mu t)t^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Temos

$$(1 + k^2)^\lambda F(k, 2t) \leq \tilde{C}(\lambda) \exp(2t\mu) [\exp(-2tk^2) + \varphi(k^2)],$$

onde $\tilde{C}(\lambda) = \max\{1, 2^{\lambda-1}\}$.

Fazendo $k = \eta(2t)^{1/2}$ e $x = 2tk^2$ e somando os dois membros da desigualdade anterior obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^\lambda F(k, 2t) &\leq \tilde{C}(\lambda) \exp(2t\mu) \left[\sqrt{\pi}(2t)^{-1/2} + 2^{-\frac{2\lambda+1}{2}} \Gamma(\lambda + \frac{1}{2}) t^{-\frac{2\lambda+1}{2}} \right] \\ &\leq C(\lambda) e^{2t\mu} (t^{-1/2} + t^{-\frac{2\lambda+1}{2}}), \end{aligned}$$

onde

$$C(\lambda) = \tilde{C}(\lambda) \max\left\{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}, 2^{-\frac{2\lambda+1}{2}} \Gamma(\lambda + \frac{1}{2})\right\}.$$

Proposição 3.1. *Sejam μ, λ como no lema anterior. Então*

$$(1) \ E(t) \in \mathcal{B}(H_{per}^s, H_{per}^{s+\lambda}) \quad e$$

$$\|E(t)\phi\|_{s+\lambda} \leq C_\lambda e^{\mu t} (1 + t^{-\frac{\lambda}{2}}) \|\phi\|_s \quad (3.3)$$

para todo $t > 0$, $s \geq 0$ e $\phi \in H_{per}^s$, onde C_λ é uma constante que depende apenas de λ . Além disso a função $t \in (0, \infty) \rightarrow E(t)\phi$ é contínua com respeito à norma de $H_{per}^{s+\lambda}$ e pode ser estendida continuamente a $[0, \infty)$, se $\lambda = 0$;

$$(2) \ E(t) \in \mathcal{B}(L^1(\mathbb{R}), H_{per}^s) \quad e$$

$$\|E(t)\eta\|_s \leq C_s e^{\mu t} (t^{-1/4} + t^{-\frac{2s+1}{4}}) \|\eta\|_{L^1} \quad (3.4)$$

para todo $t > 0$, $s \geq 0$ e $\eta \in L^1$, onde C_s é uma constante que depende apenas de s . Além disso a função $t \in (0, \infty) \rightarrow E(t)\eta$ é contínua com respeito a norma de H_{per}^s .

Demonstração

Usando a estimativa (3.3) e o lema 2.14 temos

$$\begin{aligned} \|E(t)\phi\|_{s+\lambda}^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s+\lambda} |\widehat{E(t)\phi}(k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s+\lambda} |F(t, k) \hat{\phi}(k)|^2 \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} [C_2 F(k, 2t) (1+k^{2\lambda})] \|\phi\|_s^2 \\ &\leq C_2 \max\{1, C_\lambda\} e^{2t\mu} (1+t^{-\lambda}) \|\phi\|_s^2, \end{aligned}$$

daí obtemos a estimativa (3.3).

Seja $t \in (0, \infty)$, suponha que $\tau > t$ (o caso $\tau < t$ é análogo), então

$$(1 + k^2)^{s+\lambda} F(k, 2t) |1 - F(k, 2(\tau - t))|^2 |\hat{\phi}(k)|^2 \leq 4 \sup_{k \in \mathbb{Z}} \{ (1 + k^2)^\lambda F(k, 2t) \} (1 + k^2)^s |\hat{\phi}|^2,$$

portanto

$$\begin{aligned} \|E(t)\phi - E(\tau)\phi\|_{s+\lambda}^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2)^{s+\lambda} |\mathcal{F}(E(t)\phi - E(\tau)\phi)(k)|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2)^{s+\lambda} F(k, 2t) |1 - F(k, 2(\tau - t))|^2 |\hat{\phi}(k)|^2, \end{aligned}$$

a soma anterior converge para zero, com $\tau \rightarrow t$. Isto conclui a continuidade da aplicação

$$t \in (0, \infty) \rightarrow E(t)\phi.$$

Se $\lambda = 0$, então como anteriormente, pode-se mostrar que $t \in [0, \infty) \rightarrow E(t)\phi$ é contínua.

Passemos agora a prova de (2), se $\eta \in L^1(\mathbb{R})$, então

$$\begin{aligned} \|E(t)\eta\|_s^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2)^s |\widehat{E(t)\eta}(k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2) F(k, 2t) |\hat{\eta}(k)|^2 \\ &\leq \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}} \{ |\hat{\eta}(k)| \} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2)^s F(k, 2t) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} C(s) e^{2\mu t} (t^{-1/2} + t^{-\frac{2s+1}{2}}) \|\eta\|_{L^1}^2, \end{aligned}$$

portanto obtemos (3.4).

Seja $t \in [0, \infty)$, tomemos $\tau > t$ (se $t > 0$, o caso $\tau < t$ é análogo) então

$$\begin{aligned} \|E(t)\eta - E(\tau)\eta\|_s^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2)^s |F(k, t) - F(k, \tau)|^2 |\hat{\eta}(k)|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2)^s F(k, 2t) |1 - F(k, \tau - t)|^2 |\hat{\eta}(k)|^2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

com $\tau \rightarrow t$, assim temos a continuidade da aplicação $t \in (0, \infty) \rightarrow E(t)\eta$.

Proposição 3.2. *Se $s \in \mathbb{R}$ e $\phi \in H_{per}^s$, então $v(\cdot, t) = E(t)\phi$ é a única solução de (3.1) na classe*

$$C([0, \infty); H_{per}^s) \cap C^1([0, \infty); H^{s-2}).$$

Demonstração

Seja $h > 0$, então temos que $\left| \frac{F(k, h) - 1}{h} + k^2 - \frac{\mu}{(1 + k^2)^{1/2}} \right|^2 \rightarrow 0$, com $h \rightarrow 0$, para cada $k \in \mathbb{Z}$, logo existe $\delta > 0$ tal que

$$h \in (0, \delta) \Rightarrow \left| \frac{F(k, h) - 1}{h} + k^2 - \frac{\mu}{(1 + k^2)^{1/2}} \right|^2 < 1.$$

Seja $J^{-1} = (1 - \partial_x^2)^{-1/2}$, então

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{v(\cdot, t+h) - v(\cdot, t)}{h} - \partial_x^2 v(\cdot, t) - \mu J^{-1} v(\cdot, t) \right\|_s = \\ & \left\| \frac{E(t+h)\phi - E(t)\phi}{h} - \partial_x^2 (E(t)\phi) - \mu J^{-1} E(t)\phi \right\|_s = \\ & = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2)^s |F(k, 2t)| \left| \frac{F(k, h) - 1}{h} + k^2 - \frac{\mu}{(1 + k^2)^{1/2}} \right|^2 |\hat{\phi}(k)|^2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

portanto o termo no somatório de (3.5) converge para zero com $h \rightarrow 0$ e é limitado pela função

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ (1 + (k^2)^s |F(k, 2t)| |\hat{\phi}(k)|^2, (1 + k^2)^s \left(\frac{2}{\delta} + \left| k^2 - \frac{\mu}{(1 + k^2)^{1/2}} \right| \right)^2 |\hat{\phi}(k)|^2 \right\},$$

logo (3.5) converge para zero com $h \rightarrow 0$. Pela proposição anterior temos que $v \in C([0, \infty); H_{per}^s)$, portanto falta mostrar que $\partial_t v \in C([0, \infty); H_{per}^s)$, de fato $\partial_t v = \partial_x^2 + \mu J^{-1} v$, e se $t \in [0, \infty)$, então pondo $G(k, \mu) = \frac{\mu}{(1 + k^2)^{1/2}} - k^2$ temos

$$\begin{aligned} \|\partial_t v\|_s &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2)^s G(k, \mu) F(k, 2t) |\hat{\phi}(k)|^2 \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ G(k, \mu) F(k, 2t) \right\} \|\phi\|_s^2 < \infty, \end{aligned}$$

logo $\partial_t v \in H_{per}^s$. Tomemos $\tau > t$ (se $t > 0$, o caso $\tau < t$ é análogo) e seja $C(\mu, t) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \{G(k, \mu)F(k, 2t)\}$, então

$$\begin{aligned} \|\partial_t v(\cdot, t) - \partial_t v(\cdot, \tau)\|_s^2 &= \|(\partial_x^2 + \mu J^{-1})(v(\cdot, t) - v(\cdot, \tau))\|_s^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s G(k, \mu) F(k, 2t) |1 - F(k, \tau - t)|^2 |\hat{\phi}(k)|^2 \\ &\leq C(\mu, t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} |1 - F(k, \tau - t)|^2 (1+k^2)^s |\hat{\phi}(k)|^2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

com $\tau \rightarrow t$, logo $\partial_t v \in C([0, \infty); H_{per}^s)$. Temos $v(\cdot, t) \in H_{per}^s$, logo $v(\cdot, t) \in H^{s-2}$.

3.2 O Problema Local

Teorema 3.1. *Se $1 \leq s < \frac{3}{2}$ e $\phi \in H_{per}^s$, então existe $T_1 = T_1(s, \mu, \|\phi\|_s)$ e uma única função $u \in C([0, T]; H_{per}^s)$ satisfazendo a equação integral*

$$u(t) = E(t)\phi + \frac{1}{2} \int_0^t E(t-t') (\partial_x u)^2(t') dt'. \quad (3.6)$$

Demonstração

Consideremos $T, M > 0$. A seguir definiremos o operador

$$(Af)(t) = E(t)\phi + \frac{1}{2} \int_0^t E(t-t') (\partial_x f)^2(t') dt',$$

no espaço métrico completo, veja lema 2.2

$$\chi_s(T) = \left\{ f \in C([0, T]; H_{per}^s) \mid \sup_{[0, T]} \|f(t) - E(t)\phi\|_s \leq M \right\},$$

com a distância induzida pela norma de $C([0, T]; H_{per}^s)$.

Se $u \in C([0, T]; H_{per}^s)$, então $Au \in C([0, T]; H_{per}^s)$. Notemos primeiro que se $u(t') \in H^1$, $0 \leq t' \leq T$, então $(\partial_x u)(t')^2 \in L^1(\mathbb{R})$. De fato

$$\|(\partial_x u)(t')^2\|_{L^1} = \|(\partial_x u)(t')\|_0 \leq \|u(t')\|_1 < \infty.$$

Usando (3.3) e (3.4) obtemos

$$\begin{aligned}
\|Au(t)\|_s &\leq \|E(t)\phi\|_s + \int_0^t dt' \|E(t-t')(\partial_x u)^2(t')\|_s \\
&\leq e^{\mu t} \|\phi\|_s + C(s) \int_0^t e^{\mu(t-t')} ((t-t')^{-1/4} + (t-t')^{-\frac{2s+1}{4}}) \|(\partial_x u(t'))^2\|_{L^1} dt' \\
&\leq e^{\mu T} \|\phi\|_s + e^{\mu T} C(s) \sup_{[0,T]} \|u(t)\|_1^2 \left[\frac{4}{3} T^{3/4} + \frac{4}{3-2s} T^{\frac{3-2s}{4}} \right] < \infty.
\end{aligned}$$

A continuidade de Au segue da continuidade na proposição 3.1 e da estimativa (3.4). De fato, se $t \in [0, T]$, tomemos $\tau > t$ (o caso $\tau < t$ é análogo), então definindo

$$\psi(\tau) = \int_0^\tau E(\tau-t')(\partial_x u)^2(t') dt', \tau \in [0, T],$$

quando $\tau \rightarrow t$ temos

$$\begin{aligned}
\int_t^\tau \|E(\tau-t')(\partial_x u)^2(t')\|_s dt' &\leq C(\mu, s, T) \int_t^\tau ((\tau-t')^{-1/4} + (\tau-t')^{-\frac{2s+1}{4}}) dt' \\
&= C(\mu, s, T) \left[\frac{4}{3} (\tau-t)^{3/4} + \frac{4}{3-2s} (\tau-t)^{\frac{3-2s}{4}} \right] \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

e

$$\|E(\tau-t)\psi(t) - \psi(t)\|_s \rightarrow 0.$$

Como

$$\psi(\tau) - \psi(t) = E(\tau-t)\psi(t) - \psi(t) + \int_t^\tau E(\tau-t')(\partial_x u)^2(t') dt',$$

temos

$$\|\psi(\tau) - \psi(t)\|_s \rightarrow 0,$$

portanto

$$\|Au(\tau) - Au(t)\|_s \leq \|E(\tau)\phi - E(t)\phi\|_s + \|\psi(\tau) - \psi(t)\|_s \rightarrow 0, \text{ com } \tau \rightarrow t,$$

então $Au \in C([0, T]; H_{per}^s)$.

Se $u \in \chi_s(T)$, então $\|u(t)\|_s \leq \|E(t)\phi\|_s + M \leq e^{\mu t}\|\phi\|_s + M$, logo

$$\begin{aligned} \|Au(t) - E(t)\phi\|_s &\leq \int_0^t \|E(t-t')(\partial_x u)^2(t')\|_s dt' \\ &\leq C(s)e^{\mu T} \int_0^t [(t-t')^{-1/4} + (t-t')^{-\frac{2s+1}{4}}] \|u(t')\|_1 dt' \\ &\leq C(s)e^{\mu T} \sup_{[0,T]} \{\|u(t)\|_1^2\} \left[\frac{4}{3}t^{3/4} + \frac{4}{3-2s}t^{\frac{3-2s}{4}} \right] \\ &\leq 2C(s)e^{\mu T} (M^2 + e^{2\mu T}\|\phi\|_s^2) \left[\frac{4}{3}T^{3/4} + \frac{4}{3-2s}T^{\frac{3-2s}{4}} \right]. \end{aligned}$$

Seja

$$g(T) = \frac{4}{3}T^{\frac{3}{4}} + \frac{4}{3-2s}T^{\frac{3-2s}{4}},$$

tomemos $T_1 > 0$ tal que $2C(s)e^{\mu T_1}(M^2 + e^{2\mu T_1}\|\phi\|_s^2)g(T_1) < M$ e $2C(s)(M + e^{\mu T_1}\|\phi\|_s)g(T_1) < 1$, logo $A(\chi_s(T_1)) \subseteq \chi_s(T_1)$. Temos ainda que se u e $v \in \chi_s(T_1)$ então

$$\begin{aligned} \|Au(t) - Av(t)\|_s &\leq C(s) \sup_{[0,T_1]} \{ \|(\partial_x u)^2(t) - (\partial_x v)^2(t)\|_{L^1} \} g(T_1) \\ &\leq C(s) \sup_{[0,T_1]} \{ [\|u(t) - v(t)\|_1 (\|u(t)\|_1 + \|v(t)\|_1)] \} g(T_1) \\ &\leq 2C(s)(M + e^{\mu T_1}\|\phi\|_s)g(T_1) \sup_{[0,T_1]} \|u(t) - v(t)\|_s \\ &< \sup_{[0,T_1]} \|u(t) - v(t)\|_s, \end{aligned}$$

então A é uma contração em $\chi_s(T_1)$, onde $T_1 = T_1(\mu, s, \|\phi\|_s)$. Daí, usando o teorema 2.1 concluímos a demonstração. Note que obtivemos a unicidade da solução apenas em $\chi_s(T_1)$, a seguir estenderemos a unicidade a todo o espaço. Considere $u, v \in C([0, T_1]; H_{per}^s)$ tais que $u(0) = \phi$ e $v(0) = \psi$, $\phi, \psi \in H_{per}^s$, seja $w(t) = u(t) - v(t)$, então

$$w(t) = E(t)w(0) + \frac{1}{2} \int_0^t E(t-t') ((\partial_x u)^2(t') - (\partial_x v)^2(t')) dt', \quad (3.7)$$

logo

$$\|w(t)\|_s \leq e^{\mu T_1} \|\phi - \psi\|_s + C_s(1 + T_1^{s/2}) \int_0^t \frac{\|(\partial_x u)^2(t') - (\partial_x v)^2(t')\|_{L^1(\mathbb{R})}}{(t-t')^{\frac{2s+1}{4}}} dt', \quad (3.8)$$

temos

$$\begin{aligned} \|(\partial_x u)^2 - (\partial_x v)^2\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \|\partial_x u + \partial_x v\|_0 \|\partial_x u - \partial_x v\|_0 \\ &\leq (\|u\|_1 + \|v\|_1) \|u - v\|_s. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Temos também

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_1 &\leq \|E(t)\phi\|_1 + C_1 \int_0^t ((t-t')^{-1/4} + (t-t')^{-3/4}) \|u(t')\|_1 dt' \\ &\leq e^{\mu T_1} \|\phi\|_1 + C_1 e^{\mu T_1} (1 + T_1^{1/2}) \int_0^t \frac{\|u(t')\|_1}{(t-t')^{3/4}} dt'. \end{aligned}$$

Usando o lema 7.1.1 de [18] temos

$$\|u(t)\|_1 \leq e^{\mu T_1} \|\phi\|_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta T_1)^{\frac{n}{4}}}{\Gamma(\frac{n}{4} + 1)}, \quad (3.10)$$

onde $\theta = \left(C_1(1 + T_1^{1/2})e^{\mu T_1}\Gamma(1/4)\right)^4$. Analogamente para v temos

$$\|v(t)\|_1 \leq e^{\mu T_1} \|\psi\|_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta T_1)^{\frac{n}{4}}}{\Gamma(\frac{n}{4} + 1)}. \quad (3.11)$$

Usando (3.10) e (3.11) em (3.9) obtemos

$$\|(\partial_x u)^2 - (\partial_x v)^2\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C(\mu, T_1, \|\phi\|_1, \|\psi\|_1) \|u - v\|_s. \quad (3.12)$$

Usando (3.12) em (3.8) temos

$$\|w(t)\|_s \leq e^{\mu T_1} \|\phi - \psi\|_s + C(\mu, s, T_1, \|\phi\|_1, \|\psi\|_1) \int_0^t \frac{\|w(t')\|_s}{(t-t')^{\frac{2s+1}{4}}} dt'.$$

Então usando o lema 7.1.1 de [18] temos

$$\|w(t)\|_s \leq \tilde{C}(\mu, s, T_1, \|\phi\|_1, \|\psi\|_1) \|\phi - \psi\|_s, \quad (3.13)$$

daí obtemos a unicidade em $C([0, T_1]; H_{per}^s)$.

Teorema 3.2. *O problema (1) é localmente bem colocado em H_{per}^s , para $1 \leq s < \frac{3}{2}$.*

Demonstração

A demonstração consiste em notar que o problema (1) é equivalente ao problema

$$\begin{cases} u(t) = E(t)\phi + \frac{1}{2} \int_0^t E(t-t')(\partial_x u)^2(t')dt', t > 0 \\ u(0) = \phi, \end{cases}$$

daí usando o teorema anterior temos que existe uma solução u do problema acima em $C([0, T]; H_{per}^s)$, para algum $T > 0$, se $\phi \in H_{per}^s$. Note que pela desigualdade (3.13) obtida na demonstração do teorema anterior obtemos a dependência contínua em $C([0, T]; H_{per}^s)$, $1 \leq s < \frac{3}{2}$.

Obs.: Se $s \geq \frac{3}{2}$, pode-se usar o argumento usado por Kato, no teorema 4.1 de ([22]), combinando a integral (3.6) com a estimativa (3.3) e concluir que $u(t) \in H^\infty$, se $t > 0$. De fato, se $u \in C([0, T]; H_{per}^s)$, $s > \frac{3}{2}$, $0 < \delta < 1$ e $\phi \in H^{s+\delta}$, então $\partial_x u(t') \in H^{s-1}$, daí pelo teorema 2.17 temos

$$\|\partial_x u(t')\|_{L^\infty} \leq C(s) \|\partial_x u(t')\|_{s-1}.$$

Portanto pela desigualdade de Kato-Ponce temos

$$\|(\partial_x u)^2(t')\|_{s-1} \leq \|\partial_x u(t')\|_{L^\infty} \|\partial_x u(t')\|_{s-1} < \infty, \quad t' \in [0, T],$$

logo

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{s+\delta} &\leq \|E(t)\phi\|_{s+\delta} + \int_0^t \|E(t-t')(\partial_x u)^2(t')\|_{s+\delta} dt' \\ &\leq e^{\mu t} \|\phi\|_{s+\delta} + C_\delta e^{\mu T} \int_0^t \left(1 + (t-t')^{-\frac{\delta+1}{2}}\right) \|(\partial_x u)^2\|_{s-1} dt' \\ &\leq e^{\mu T} \|\phi\|_{s+\delta} + C_\delta e^{\mu T} \sup_{[0, T]} \|(\partial_x u)^2\|_{s-1} \left[T + \frac{2}{1-\delta} T^{\frac{1-\delta}{2}}\right] < \infty, \end{aligned}$$

para cada $t > 0$. Logo $u(t) \in H^{s+\delta}$. Procedendo assim, podemos mostrar que $u(t) \in H^{s+n\delta}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostra-se também que $u \in C([\epsilon, T]; H^q)$, para $q \geq s$ e $\epsilon > 0$, onde $T = T(s, \mu, \|\phi\|_1)$, além disso $\partial_t u \in C([0, T]; H^{q-2})$.

Conclusão

O modelo estudado, nos mostra como se propaga uma frente de reação, entre dois fluidos de densidade diferente, considerando-se como um processo termodinâmico. Das leis de conservação do momentum, energia e massa, obtém-se um sistema de equações (1.3) para a velocidade da frente de onda, pressão e da temperatura no fluido.

Observe-se que o sistema de equações diferenciais parciais não lineares é do tipo Navier-Stokes, veja Kato [24], por tanto pela complexidade deste sistema não é trivial sua resolução. No artigo de J. W. Wilder, Boyd F. Edwards, Desidério A. Vasquez e Gregory I. Sivashinsky [31], usando uma expansão assintótica num parâmetro δ que representa a diferença relativa entre as densidades dos fluidos (1.2), obtém-se a equação (1.45), uma aproximação de segunda ordem do sistema. Esta equação de evolução não linear é do tipo Kuramoto-Sivashinsky, veja Alarcon [2], nos consideramos o problema de valor inicial (1), mostramos existência de soluções no espaços de Sobolev periódicos, provando a boa postura do problema de Cauchy associado, no caso local em relação ao tempo. Assim obtemos resultados originais em relação a esta equação, até o momento conhece-se resultados nos espaços de Sobolev em $\mathbb{R}$. Este modelo pode ser generalizado, obtendo-se equações de ordem superior ou em dimensões superiores, com aproximações assintóticas de ordem maiores e frentes de ondas de dimensão 2. Assim podemos ter equações importantes e material para futuros projetos de pesquisa.

Referências Bibliográficas

- [1] Adams. R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Alarcon, A. E., *Existence of the global attractor for the n -dimensional Kuramoto-Sivashinsky equation*, 52o Seminário brasileiro de análise, (2000).
- [3] Alarcon, A.E, Angulo, J., Montenegro, F.J., *Stability and Instability of Solitary Waves for a Nonlinear Dispersive System*, Nonlinear Anal. 36, no. 8, Ser. A: Theory Methods, 1015–1035, (1999).
- [4] Alarcon, A.E, Otterson, J.P., *On the initial value problem for a nonlinear wave front evolution equation*, preprint
- [5] Bartle R.G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library, 1995.
- [6] Benjamin, T., Bona, J.L., Mahony, J., *Model Equations for Long Waves in Nonlinear Dispersive Systems*, Philos. Trans. Royal Soc. London A 272, 47-78 (1972).
- [7] Berestycki, H., Lions, P.L., *Nonlinear Scalar Field Equations I, Existence of a Ground State*, Arch. Rat. Mech. Anal. 82, 313-345 (1983).
- [8] Berezin F., Shubin M., *The Schrodinger equation*, Mathematics and its Application. Kluwer Academic (1991).
- [9] Bona, J.L., Ponce,G, Saut, J.C, and Tom, M.M.. *A Model System for Strong Interaction Between Internal Solitary Waves*, Comm. Math. Phys. 143, págs. 287-313. (1992).

-
- [10] Brézis, H., *Análisis Funcional: Teoría y Aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid-España (1984).
- [11] Coddington E., Levison N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York (1955).
- [12] Dieudonné, J., *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, (1960)
- [13] Edwards, F.B., Wilder, W.J., Showalter, K., *Onset of convection for autocatalytic reaction fronts: Laterally unbounded system*, Physical Review A 43, 749–760, (1991).
- [14] Fernandez, P., *Medida e Integração, Projeto Euclides*, IMPA, RJ-Brasil, (1976).
- [15] Folland. G. B., *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton Univ. Press, 1976.
- [16] Friedman. A., *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.
- [17] Grillakis, M., Shatah, J., Strauss, W., *Stability Theory of Solitary Waves in the Presence of Symmetry I*, J. Funct. Analysis 74, 160-197 (1987).
- [18] Henry. D., *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics 840, Springer, Berlin, 1981.
- [19] I. Moise, R. Rosa and X. Wang, *Attractors for non-compact semigroups via energy equations*, Nonlinearity 11, 1369-1393, (1998).
- [20] Íório R.J.& Nunes W.V.L., *Introdução às Equações de Evolução não Lineares*, 18 Colóquio Brasileiro de Matemática.
- [21] Júnior R.I.& Íório.V.de M., *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*, Projeto Euclides, 1988.
- [22] Kato T., *On the Cauchy Problem for the (Generalized) Korteweg-de Vries Equation*, Studies in Applied Mathematics Advances in Mathematics Supplementary Studies, Vol. 8, 93-128, 1983.

-
- [23] Kato T. & Ponce G., *Commutator Estimates and Euler and Navier-Stokes Equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XLI 891-907, 1988.
- [24] Kato T., *Remarks on the Euler and Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^2$* , Proc. Symp. Pure Math. Vol. 45, Amer. Math. Soc., 1986, pp. 1-7.
- [25] Lima E. L., *Espaços Métricos*, Projetos Euclides, CNPq, 1993.
- [26] Pazy A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1983.
- [27] Ponce G., *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales de Evolución*, Escuela de Geometría y Ecuaciones en Derivadas Parciales, Cali, junio de 1993.
- [28] Ponce, G., *Notas Sobre el Problema de Valores Iniciales Asociado a la Ecuación de Onda*. III Escuela de Verano en Geometría Dif., Eq. Dif. Parciales y Análisis Numérico. Universidade de los Andes, Colômbia(1995).
- [29] Thayer J., *Operadores Auto-Adjuntos e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, 1987.
- [30] Wilder, W.J., Edwards, F.B, Vasquez, A.D., *Finite thermal diffusivity at onset of convection in autocatalytic systems: Continuous fluid density*, Physical Review A 45, Number 4, 2320–2327, (1992)
- [31] Wilder, W.J., Edwards, F.B, Vasquez, A.D., Sivashinsky, I.G., *Derivation of a non-linear front evolution equation for chemical waves involving convection*, Physica D 73 (1994)