



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Física

MATEUS CALIXTO PEREIRA DOS SANTOS

**Redução dimensional para
Condensados de Bose-Einstein em
forma de “tubo” e “anilha plana”**

Goiânia
2019

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS
DE TESES E
DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

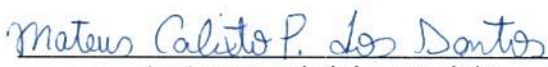
Nome completo do autor: Mateus Calixto Pereira dos Santos

Título do trabalho: **Redução dimensional para Condensados de Bose-Einstein em forma de “tubo” e “anilha plana”**

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.


Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:


Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 22 / 02 / 2019

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Nome completo do autor: Mateus Calixto Pereira dos Santos

Título do trabalho: Redução dimensional para Condensados de Bose-Einstein em forma de "tubo" e "anilha plana"

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Mateus Calixto P. dos Santos

Assinatura do (a) autor (a) ²

Data: 03 / 08 / 2022

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

²A assinatura deve ser escaneada.

MATEUS CALIXTO PEREIRA DOS SANTOS

Redução dimensional para Condensados de Bose-Einstein em forma de “tubo” e “anilha plana”

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás, como requisito para obtenção do título de Mestre em Física.

Área de pesquisa: Física Teórica e Computacional

Orientador: Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso

Goiânia
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Santos, Mateus Calixto Pereira dos
Redução dimensional para Condensados de Bose-Einstein em forma de “tubo” e “anilha plana” [manuscrito] / Mateus Calixto Pereira dos Santos. - 2019.
54 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Física (IF), Programa de Pós-Graduação em Física, Goiânia, 2019.
Bibliografia.
Inclui siglas, símbolos, gráfico, lista de figuras.

1. Condensado de Bose-Einstein. 2. Equação de Gross-Pitaevskii.
3. Redução Dimensional. I. Cardoso, Wesley Bueno, orient. II. Título.

CDU 53



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Ata Nº 175 de defesa de dissertação de Mateus Calixto Pereira dos Santos para obtenção do título de Mestre em Física.

Aos 28 dias do mês de fevereiro de 2019, às 14h00min, no Anfiteatro I do Instituto de Física, reuniu-se a Banca Examinadora designada pela Coordenadoria do Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás, composta pelo **Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso** (orientador – IF/UFG), **Prof. Dr. Ademir Eugênio de Santana** (IF/UnB) e **Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar** (IF/UFG), para julgar a dissertação de mestrado de **Mateus Calixto Pereira dos Santos**, intitulada: **Redução dimensional para Condensados de Bose-Einstein em forma de “tubo” e “anilha plana”**. O Presidente abriu os trabalhos agradecendo a presença dos membros da Banca Examinadora e concedeu a palavra a Mateus Calixto Pereira dos Santos, que expôs detalhadamente seu trabalho. Em seguida, os membros da Banca fizeram suas considerações e procederam à arguição do candidato. Concluída essa etapa, a Banca, em sessão fechada, deu prosseguimento ao julgamento do trabalho, atribuindo os seguintes conceitos:

Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso (orientador)

Aprovado

Prof. Dr. Ademir Eugênio de Santana (IF/UnB)

Aprovado!

Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar (IF/UFG)

Aprovado!

Novamente em sessão aberta, o presidente da Banca anunciou o resultado final do julgamento, declarando o candidato Mateus Calixto Pereira dos Santos APROVADO pela Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar, a sessão foi encerrada e lavrou-se a presente ata que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora.

Goiânia, 28 de fevereiro de 2019.

Wesley B. Cardoso
Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso (Orientador)

Ademir Eugênio de Santana
Prof. Dr. Ademir Eugênio de Santana (IF/UnB)

Ardiley Torres Avelar
Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar (IF/UFG)

Dedico este trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

- Agradeço ao Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso pela orientação.
- Agradeço à minha família pelo apoio.
- Agradeço ao Instituto de Física e ao CNPq pelo suporte financeiro.

RESUMO

O estudo da dinâmica não linear representa um considerável desafio da física contemporânea. Em particular, a investigação dos condensados de Bose-Einstein se mostrou uma tarefa laboriosa devido ao grande número de partículas interagentes. Portanto, visto a dificuldade de modelar esses sistemas, foram introduzidas aproximações, o que promoveu a descrição do estado de condensação de Bose-Einstein em gases atômicos interagentes como uma equação de Schrödinger não linear tridimensional, conhecida por equação de Gross-Pitaevskii. Neste trabalho fazemos uma revisão a respeito da utilização de um método de redução dimensional com o tratamento variacional a fim de derivar equações efetivas unidimensionais (1D) e bidimensionais (2D) para condensados de Bose-Einstein em forma de “charuto” e “panqueca”, onde mostramos que estas equações descrevem de maneira bastante precisa a dinâmica de seus respectivos modelos. Posteriormente, estudamos soluções de estado fundamental dos condensados de Bose-Einstein em forma de “tubo” e “anilha plana”, através das equações efetivas não polinomiais 1D e 2D, respectivamente, derivadas a partir do método de redução dimensional. Os resultados produzidos por estas equações foram concordantes com aqueles obtidos a partir da equação de Gross-Pitaevskii em 3D de cada um dos modelos.

Palavras - chave: Condensado de Bose-Einstein, Equação de Gross-Pitaevskii, Redução Dimensional.

ABSTRACT

The study of nonlinear dynamics represents a challenge of contemporary physics. In particular, the investigation of Bose Einstein condensates proved to be a hard task due to the large number of interacting particles. Therefore, given the difficulty of modeling these systems, approximations were introduced, which promoted the description of the Bose-Einstein condensation state in interacting atomic gases as a three-dimensional nonlinear Schrödinger equation, known as the Gross-Pitaevskii equation. In this work we review the dimensional reduction method, which use a variational treatment with the goal of derive effective one-dimensional (1D) and two-dimensional (2D) equations in cigar-shaped and pancake-shaped Bose-Einstein condensates, where we show that these equations describe almost exactly the dynamics of their respective models. Thus, we studied the ground-state solutions in tube-shaped and flat washer-shaped Bose-Einstein condensates by means of effective non-polynomials equations, derived from the dimensional reduction method. The results produced by this equations were in very good agreement with those obtained from the corresponding full 3D Gross-Pitaevskii equation.

Key - words: Bose-Einstein Condensate, Gross-Pitaevskii Equation, Dimensional Reduction.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1:	Representação gráfica da solução da equação KdV.	13
Figura 1.2:	Representação gráfica da interação entre dois sólitons.	13
Figura 2.1:	Densidade axial $\rho(z)$ do estado fundamental para BECs repulsivos ($g > 0$) com potencial axial $V(z) = \frac{z^2}{2}$, para quatro procedimentos diferentes: a solução numérica da EGP-3D (2.6) que está em linha sólida (vermelha), a solução numérica da Equação efetiva (2.14) que está em linha tracejada (preta), a solução numérica da Equação de acoplamento fraco (2.15) que está em linha pontilhada (cinza) e a solução numérica da Equação de acoplamento forte (2.16) que está em linha ponto-traço (verde escuro).	23
Figura 2.2:	Potencial químico para quatro procedimentos diferentes: μ_{EGP} em linha sólida (vermelha), μ_{EF} em linha tracejada (preta), μ_{FC} em linha pontilhada (cinza) e μ_{FT} em linha ponto-traço (verde escuro).	24
Figura 2.3:	Média do comprimento axial quadrático $\langle z^2 \rangle$ para a EGP-3D e suas aproximações. O $\langle z^2 \rangle$ da EGP-3D (2.6) está em linha sólida (vermelha), $\langle z^2 \rangle$ da Equação efetiva (2.14) está em linha tracejada (preta), $\langle z^2 \rangle$ da Equação de acoplamento fraco (2.15) está em linha pontilhada (cinza) e $\langle z^2 \rangle$ da Equação de acoplamento forte (2.16) está em linha ponto-traço (verde escuro).	25
Figura 2.4:	Densidade axial $\rho(z)$ do estado fundamental para BECs atrativos ($g < 0$) com potencial axial $V(z) = 0$, para três procedimentos diferentes: a solução numérica da EGP-3D (2.26) que está em linha sólida (vermelha), a solução numérica da Equação efetiva (2.27) que está em linha tracejada (preta) e a solução numérica da Equação de acoplamento fraco (2.28) que está em linha pontilhada (cinza).	26
Figura 2.5:	Oscilações de $\langle z^2 \rangle$ para quatro procedimentos diferentes: EGP-3D (2.6) em linha sólida (vermelha), a Equação efetiva (2.14) em linha tracejada (preta), a Equação de acoplamento fraco (2.15) em linha pontilhada (cinza) e a Equação de acoplamento forte (2.16) em linha ponto-traço verde (escuro). Em (a) $g = 1$ e (b), $g = 100$	26

Figura 2.6:	(a) Densidade axial $\rho(z)$ do estado fundamental dos BECs repulsivos, para quatro procedimentos diferentes: a solução numérica da EGP-3D (2.35) em linha sólida (vermelha), a solução numérica da Equação efetiva (2.39) em linha tracejada (preta), a solução numérica da Equação de acoplamento fraco com não linearidade cúbica em linha pontilhada (cinza) e a solução numérica da Equação de acoplamento forte (2.44) em linha ponto-traço (verde escuro), para $g = 1$. (b) As mesmas soluções apresentadas em (a).	28
Figura 2.7:	Densidade axial $\rho(z)$ do estado fundamental para BECs repulsivos, para quatro procedimentos diferentes: a solução numérica da EGP-3D (2.35) em linha sólida esta em (vermelha), a solução numérica da Equação efetiva não polinomial (2.39) em linha tracejada (preta), a solução numérica da Equação de acoplamento fraco com não linearidade cúbica está em linha pontilhada (cinza) e a solução numérica da Equação de acoplamento forte (2.44) em linha ponto-traço (verde escuro). Em (a) $g = 10$ e (b), $g = 100$	29
Figura 2.8:	Potencial químico para quatro procedimentos diferentes: μ_{EGP} em linha sólida (vermelha), μ_{EF} em linha tracejada (preta), μ_{FC} em linha pontilhada (cinza) e μ_{FT} em linha ponto-traço (verde escuro).	31
Figura 2.9:	(a) Densidade transversal $\rho(r)$ dos estados com vorticidade $S = 1$, para quatro procedimentos diferentes: a solução numérica da EGP-3D (2.55) em linha sólida (vermelha), a solução numérica da Equação efetiva (2.57) em linha tracejada (preta), a solução numérica da Equação de acoplamento fraco com não linearidade cúbica (2.58) em linha pontilhada (cinza) e a solução numérica da Equação de acoplamento forte (2.59) em linha ponto-traço (verde escuro), com $g = 1$. (b) As mesmas soluções apresentadas em (a), com $g = 100$	32
Figura 2.10:	(a) Densidade transversal $\rho(r)$ dos estados com vorticidade da Equação efetiva (2.57), para quatro procedimentos diferentes: $S = 0$ que está em linha sólida (azul), $S = 1$ que está em linha ponto-traço (preta), $S = 2$ que está em linha tracejada (laranja) e $S = 3$ que está em linha pontilhada (cinza), para $g = 50$. (b) As mesmas curvas contidas em (a), com densidade axial $\rho(z)$	33

Figura 3.1:	Representação gráfica do potencial transversal externo (3.1). A linha sólida (azul) representa o potencial transversal $V(r)$ com $\omega_{\perp} = \omega_0$, a linha tracejada (preta) representa $V(r)$ com $\omega_{\perp} = 1.5\omega_0$ e a linha tracejada pontilhada (laranja) representa $V(r)$ com $\omega_{\perp} = 2\omega_0$, onde $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ é uma frequência de oscilação genérica, com $m = 1 \text{ Kg}$ e $\kappa = 1 \text{ m}$	36
Figura 3.2:	Densidade axial $\rho(z)$ do estado fundamental para BECs repulsivos ($g > 0$) com pontencial axial $V(z) = \frac{z^2}{2}$, para quatro procedimentos diferentes: a solução numérica da EGP-3D (3.4) em linha sólida (vermelha), a solução numérica da Equação efetiva (3.11) em linha tracejada (preta), a solução numérica da Equação de acoplamento fraco (3.12) em linha pontilhada (cinza) e a solução numérica da Equação de acoplamento forte (3.13) em linha ponto-traço (verde escuro).	38
Figura 3.3:	Densidade axial $\rho(z)$ do estado fundamental para BECs atrativos ($g < 0$) com pontencial axial $V(z) = 0$, para três procedimentos diferentes: a solução numérica da EGP-3D (3.4) em linha sólida vermelha, a solução numérica da Equação efetiva (3.11) em linha tracejada preta, a solução numérica da Equação de acoplamento fraco (3.12) em linha pontilhada cinza.	39
Figura 3.4:	Potencial químico de sistemas repulsivos para quatro procedimentos diferentes: μ_{EGP} em linha sólida (vermelha), μ_{EF} em linha tracejada (preta), μ_{FC} em linha pontilhada (cinza) e μ_{FT} em linha ponto-traço (verde escuro).	39
Figura 3.5:	Média do comprimento axial quadrático $\langle z^2 \rangle$ para a EGP-3D e suas aproximações. Os valores de $\langle z^2 \rangle$ das Equações (3.4), (3.11), (3.12) e (3.13) estão dispostas nas curvas sólida (vermelha), tracejada (preta), pontilhada (cinza) e ponto-traço (verde escuro), respectivamente.	40
Figura 3.6:	Oscilações de $\langle z^2 \rangle$ para quatro procedimentos diferentes: EGP-3D (3.4) em linha sólida (vermelha), a Equação efetiva (3.11) em linha tracejada (preta), a Equação de acoplamento fraco (3.12) em linha pontilhada (cinza) e a Equação de acoplamento forte (3.13) em linha ponto-traço (verde escuro). Em (a) $g = 10$ e (b), $g = 100$. . .	41

Figura 4.1:	Densidade transversal $\rho(x)$ do estado fundamental para BECs repulsivos ($g > 0$), para quatro procedimentos diferentes: a solução numérica da EGP-3D (4.4) em linha sólida (vermelha), a solução numérica da Equação efetiva (4.9) em linha tracejada (preta), a solução numérica da Equação de acoplamento fraco (4.12) em linha pontilhada (cinza) e a solução numérica da Equação de acoplamento forte (4.13) em linha ponto-traço (verde escuro). Em (a), $g = 1$, em (b), $g = 40$ e em (c), $g = 400$, com $\lambda = 0.1$	44
Figura 4.2:	Densidade transversal $\rho(x)$ do estado fundamental para BECs atrativos ($g < 0$), para três procedimentos diferentes: a solução numérica da EGP-3D (4.4) em linha sólida (vermelha), a solução numérica da Equação efetiva (4.9) em linha tracejada (preta) e a solução numérica da Equação de acoplamento fraco (4.12) em linha pontilhada (cinza). Em (a), $g = -0.5$, em (b), $g = -1$ e em (c), $g = -1.4$, com $\lambda = 0.1$	45
Figura 4.3:	Potencial químico adimensional calculado com os estados fundamentais das Equações: EGP-3D (4.4) em linha sólida (vermelha), Equação efetiva (4.9) em linha tracejada (preta), Equação de acoplamento fraco (4.12) em linha pontilhada (cinza) e da Equação de acoplamento forte (4.13) em linha ponto-traço (verde escuro), com $\lambda = 0.1$	46
Figura 4.4:	(a) Densidade transversal $\rho(r)$ do estado fundamental da Equação efetiva (4.21) para quatro valores de vorticidade: $S = 0$ em linha sólida (azul), $S = 1$ em linha tracejada (preta), $S = 2$ em linha pontilhada (laranja) e a $S = 3$ em linha ponto-traço (verde), com $g = 50$ e $\lambda = 0.1$. (b) Os mesmo procedimento de (a) com a densidade axial $\rho(z)$. (c) Densidade axial $\rho(z)$ dos estados fundamentais das Equações: EGP-3D (4.23) em linha sólida (vermelha) e (4.21) em linha pontilhada (preta), com $g = 1$, $S = 2$ e $\lambda = 0.1$	47
Figura 4.5:	Densidade transversal $\rho(r)$ dos estados fundamentais das Equações: EGP-3D (4.23) que está em linha sólida (vermelha) e da Equação efetiva (4.21) que está em linha pontilhada (preta), com $\lambda = 0.1$. Em (a), $g = -1$ e $S = 1$, em (b), $g = 1$ e $S = 2$, em (c), $g = 100$ e $S = 3$	48

SUMÁRIO

Capítulo 1: Introdução	12
Capítulo 2: Método de redução dimensional	18
2.1 Redução dimensional para condensados em forma de “charuto”	19
2.2 Redução dimensional para condensados em forma de “panqueca”	27
Capítulo 3: Método de redução dimensional para condensados em forma de “tubo”	35
Capítulo 4: Método de redução dimensional para condensados em forma de “anilha plana”	43
Capítulo 5: Conclusões	50

INTRODUÇÃO

Em 1834 o engenheiro naval britânico John Scott Russell (1808-1882) descreveu pela primeira vez na literatura científica o fenômeno das ondas solitárias [1]. Russell caminhava a cavalo nas margens do canal da União, na Escócia, onde conduzia experimentos para determinar o design mais eficiente dos canais, quando observou uma onda incomum que se propagava com velocidade constante e sem deformação por longas distâncias. Essas ondas peculiares eram formadas quando uma embarcação frenava abruptamente, acumulando uma única lacuna de água que se propagava solitariamente [2].

Para modelar matematicamente o fenômeno descrito por Russell, isto é, construir uma equação diferencial cuja solução tivesse as características de uma onda solitária, foram feitas várias aproximações, surgindo então algumas equações que cumpriam este propósito. Uma das equações mais conhecidas foi a equação de Kortewg e de Vries (KdV), apresentada em 1855 [3], que foi escrita primeiramente como:

$$\frac{\partial}{\partial t}u + u\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial^3}{\partial x^3}u = 0,$$

em que $u(x, t)$ é a amplitude da onda, x é o parâmetro de posição e t o parâmetro de tempo. Ela pode descrever a propagação de uma onda permanente com velocidade constante em superfícies de águas rasas, dentre outros fenômenos, e tem como uma das possíveis soluções

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2[\sqrt{c}(x - ct)/2],$$

sendo c a velocidade da onda. A Figura 1.1 mostra o perfil da solução da equação KdV citada acima.

Em 1965, o termo “sóliton” foi introduzido por Zabusky e Kruskal ao se referir aos pulsos de ondas solitárias que mantinham sua identidade após colisões mútuas, fazendo referência às partículas devido a natureza de sua interação [4]. A Figura 1.2 exemplifica de maneira geral a forma em que esta interação ocorre. Portanto os sólitons ficaram conhecidos, de maneira pouco rigorosa, como sendo uma solução de uma equação

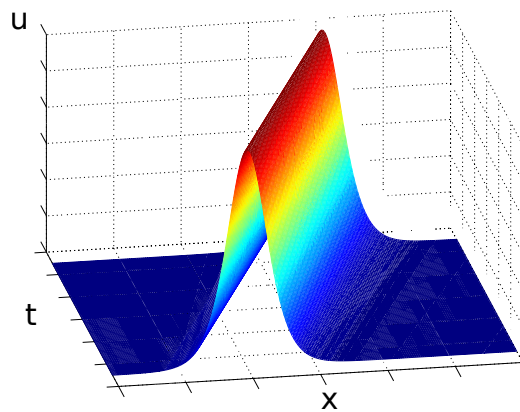


Figura 1.1: Representação gráfica da solução da equação KdV.

diferencial parcial não linear que admite soluções estáveis perante colisões, propagando-se sem deformação e com velocidade constante. Vale salientar que a estabilidade destas soluções ocorrem pelo balanço entre o termo dispersivo da equação diferencial, que tende a alargar o perfil da solução fazendo-o esvanecer, e o termo não linear, que deixa o perfil da solução cada vez mais singular. O estudo dos sólitons tem grande importância para

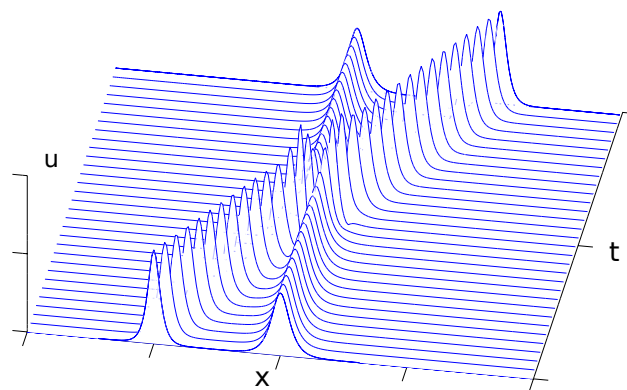


Figura 1.2: Representação gráfica da interação entre dois sólitons.

a ciência, onde eles descrevem o comportamento de uma grande variedade de sistemas físicos em diversas áreas, tais como, na dinâmica dos fluidos com a equação KdV [5], na Ótica com a equação de Schrödinger não linear [6], no eletromagnetismo com a equação de Ginz-burg-Landau [7], na física de partículas com a equação de campo de Yang-Mills [8], nos condensados de Bose-Einstein através de equações efetivas unidimensionais para confinamento transversal [9], etc.

Os condensados de Bose-Einstein (BECs) foram realizados experimentalmente em 1995 em gases diluídos de átomos alcalinos de sódio (Na) [10], lítio (Li) [11] e rubídio (Rb) [12], utilizando aprisionamentos ópticos e magnéticos. A ideia de produzir estes

sistemas iniciou-se em 1924 com o trabalho de S. N. Bose a respeito da estatística do gás de fótons [13]. Em 1925 A. Einstein complementou o trabalho de Bose, descrevendo a estatística de um gás de partículas massivas e não interagentes de spin inteiro, que ficou conhecido como gás de bosons [14]. Esta descrição previa um fenômeno ainda não relatado, mostrando que abaixo de certa temperatura, uma quantidade finita de partículas constituintes do gás ocupariam o estado de partícula de mais baixa energia do sistema, produzindo um estado coletivo degenerado, chamado de estado condensado.

Até 1938, a teoria dos BECs contemplavam apenas sistemas não interagentes, quando F. London relacionou o fenômeno de superfluidez de hélio líquido em baixas temperaturas aos BECs [15], o que até então eram vistos como dois fenômenos completamente distintos. Assim, como o sistema físico de Hélio em estado líquido possui forte correlação entre seus constituintes, os BECs passaram a abranger também sistemas com interação. Contudo, somente em 1947, N. Bogoliubov embasado nos conceitos dos BECs, apresentou a primeira teoria microscópica consistente a respeito de gases interagentes [16].

A realização dos BECs foi um grande desafio experimental, com a dificuldade de aprisionar estes gases diluídos a densidades próximas de 10^{15} cm^{-3} e resfriá-los a temperaturas abaixo de 10^{-5} K . Isto foi possível devido ao desenvolvimento de técnicas experimentais avançadas de resfriamento, utilizando lasers frios e armadilhas magneto-ópticas [17]. Ainda que o fenômeno de condensação para átomos alcalinos fosse realizado por vários grupos de pesquisa em todo o mundo, apenas em 2001, foram produzidos BECs com outras espécies de átomos [18] e [19].

Os sistemas físicos constituídos de muitos corpos representam um desafio para Física, sendo que em muitos casos soluções analíticas são escassas e as soluções numéricas são laboriosas de serem obtidas. A complexidade apresentada por estes sistemas na mecânica quântica induzem a necessidade de realizar aproximações para que estes sejam resolvidos em concordância com os experimentos. Com isso, a evolução do estado de condensação de um gás diluído de bosons próximo da temperatura limite de zero Kelvin pode ser dado aproximadamente pela equação de Gross-Pitaevskii (EGP-3D)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(\mathbf{r})\psi + \mathcal{N}g|\psi|^2\psi, \quad (1.1)$$

onde $\psi(\mathbf{r}, t)$ é a função de onda do estado condensado, \mathbf{r} é a coordenada esférica radial, t é a coordenada temporal, \hbar é a constante de Planck dividida por 2π , \mathcal{N} é o número total de partículas no estado condensado, $V(\mathbf{r})$ é o potencial de confinamento que atua sobre o gás, $g = \frac{2\pi\hbar^2 a_s}{m}$ é a amplitude de espalhamento e a_s é o comprimento de espalhamento. Os valores de a_s podem ser alterados para uma mesma espécie atômica através de uma técnica chamada de ressonância de Feshbach [20], que tem a função de controlar a interação dos átomos condensados, podendo tornar o sistema atrativo ($a_s < 0$), ou repulso ($a_s > 0$). A solução exata da equação EGP-3D para partículas livres, isto é, $V(\mathbf{r}) = 0$ é dada pela

solução

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \alpha \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \mu t)),$$

onde α é a amplitude da onda, μ é a constante de propagação e \vec{k} é o vetor de onda, cuja relação de dispersão é $k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar}(\mu\hbar - \mathcal{N}g|\alpha|^2)}$. Para determinadas configurações de aprisionamento é possível encontrar soluções do tipo sóliton para sistemas em que a interação entre os átomos, carregada pelo termo não linear da equação diferencial, compensa a dispersão do pacote de onda [21–23].

A EGP-3D é uma equação diferencial parcial não linear com três dimensões espaciais (3D)¹, que não possui uma solução analítica geral. Com isso, ela é tratada normalmente de forma numérica. Na perspectiva matemática essa equação representa um desafio, necessitando na maioria das vezes de um grande esforço computacional para ser resolvida numericamente [24]. Com isso, vários estudos teóricos a respeito de equações efetivas, que descrevem a dinâmica principal dos BECs com a facilidade de possuírem um número menor de dimensões surgiram recentemente [24–30]. Dentre essas aproximações, o método de redução dimensional (MRD) apresentado por Mateo Delgado [24], também chamado de aproximação adiabática, se mostrou eficiente na descrição dos BECs com interação repulsiva. Ele consiste de maneira geral em escrever a EGP-3D em termos de uma função de onda fatorizada em parte radial (ρ) e axial (z) na forma

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\rho, t)\phi(z, t)$$

e negligenciar os termos de derivadas espaciais e temporal da parte radial $\varphi(\rho, t)$, dando origem a uma equação diferencial parcial não linear em 1D. Contudo, L. Salasnish *et al.* [25] propuseram outro MRD utilizando uma abordagem variacional, que possui eficiência em descrever a dinâmica axial ou transversal dos BECs por meio de equações efetivas com 1D ou 2D que são válidas tanto para os sistemas atrativos quanto para os repulsivos. Este método sugere escrever a EGP-3D em termos de uma função de onda fatorizada em parte transversal (ρ) e axial (z) na forma de

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\rho, t)f(z, t, \sigma(z, t)),$$

onde $\varphi(\rho, t)$ é a solução normalizada da parte transversal da EGP-3D com $g \simeq 0$, que através do princípio de Hamilton da lagrangeana efetiva, isto é, uma lagrangeana com uma dimensão espacial gerada pela integração transversal da lagrangeana usual, produz uma

1. Todas as equações diferenciais apresentadas neste trabalho possuem uma dimensão temporal e pelo menos uma dimensão espacial. Com isso, omitiremos a dimensão temporal no texto, indicando apenas o número de dimensões espaciais.

equação de Schrödinger não polinomial em 1D. Essa equação efetiva derivada do MRD se mostrou eficaz em descrever o comportamento axial dos BECs em forma de “charuto”, tendo sua solução de estado fundamental comparada com as soluções da equação de Schrödinger não linear com não linearidade cúbica e da aproximação de Thomas Fermi da EGP-3D, onde apresentou a melhor descrição do modelo para todos os valores de \mathcal{N} e g em que a EGP-3D admita solução. Testou-se também o espalhamento e tunelamento sobre uma barreira gaussiana, em que a equação efetiva expressou novamente uma melhor precisão na predição do fenômeno [25].

A partir do sucesso do MRD em descrever o estado fundamental dos BECs em forma de “charuto”, este também foi aplicado a outros modelos, como por exemplo, aos BECs com confinamento transversal harmônico anisotrópico [31]. O método derivou do mesmo modo, uma equação de Schrödinger não polinomial com 1D que apresentava características da anisotropia, a qual denotava a melhor aproximação para a descrição do modelo proposto, extendendo a validade da equação efetiva para a descrição de sistemas com anisotropia no confinamento transversal harmônico. Na Ref. [32], L. Salasnich e S.K. Adhikari, mostraram a existencia de estados localizados nos BECs em uma rede óptica bicromática quase-1D, por meio da EGP-1D que foi derivada através da teoria quântica de muitos corpos em conjunto com o MRD. Verificou-se também que o fenômeno de localização desaparecia para sistemas suficientemente repulsivos. Os BECs em uma rede óptica bicromática quase-1D também podem derivar uma equação efetiva discreta que permite a análise de soluções do tipo sólitons claros discretos a partir da utilização do MRD [33].

Um procedimento semelhante ao adotado na referência [25], pode ser aplicado para derivar equações bidimensionais com a finalidade de descrever a dinâmica dos BECs, como foi realizado para o modelo dos BECs em forma de “panqueca”[34]. De maneira geral, a principal diferença entre as técnicas de derivação das equações efetivas 1D e 2D é a substituição da função de onda pelo *ansatz* fatorizado em termos da parte transversal (ρ) e axial (z)

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(z, t)f(\rho, t, \eta(\rho, t)),$$

onde a $\varphi(z, t)$ é a solução normalizada da parte axial da EGP-3D com $g \simeq 0$ na lagrangeana do modelo. Conseqüentemente, a integração com respeito a coordenada axial z da lagrangeana em 3D leva à uma lagrangeana efetiva a qual deriva equações de Euler-Lagrange bidimensionais. Neste contexto, foram estudadas soluções de estado fundamental e soluções com vorticidade, onde a equação efetiva 2D derivada a partir do MRD se mostrou a melhor aproximação para descrever a dinâmica dos BECs em forma de “panqueca”[34]. As equações efetivas 1D e 2D, derivadas pelo MRD, se mostraram eficientes em descrever os modelos propostos tanto no contexto dos BECs com acoplamentos do tipo spin-orbita (SO) e Rabi [35, 36], quanto nos BECs com interação de dois e três corpos [37]. Vale sa-

liantar que apesar deste método possuir boa precisão para descrever sistemas repulsivos, a aproximação proposta por Mateo Delgado citado acima, apresenta uma precisão ainda melhor [24]. Contudo, o MRD com a abordagem variacional possui a vantagem de ser utilizado tanto para modelos repulsivos quanto atrativos, o que estende as informações obtidas a respeito dos modelos estudados.

Neste trabalho, utilizamos o MRD proposto por L. Salasnish [25], para derivar uma equação efetiva axial para os BECs do em forma de “tubo” e uma equação efetiva transversal para os BECs do em forma de anilha plana, as quais se mostram ser as melhores aproximações para descrever a dinâmica axial e transversal respectivamente destes modelos. Este conteúdo estará disposto nos Capítulos 3 e 4. Até o momento, esta técnica havia sido utilizada para potenciais externos harmônicos ou quase-periódicos unidimensionais (correspondente às redes óticas com 1D) [25, 31–34]. Assim, este trabalho apresenta resultados novos para a literatura.

No Capítulo 2, ilustraremos o método de forma detalhada, reproduzindo os cálculos apresentados nos trabalhos das referências [25, 31, 34] para os BECs em forma de “charuto” e “panqueca”. Esse Capítulo é dividido em duas seções, onde primeiramente aplicamos o MRD para modelo em forma de “charuto”, produzindo uma equação efetiva 1D, e logo após, utilizando as mesmas técnicas para o modelo em forma de “panqueca”, reproduzimos uma equação efetiva transversal 2D. Ambas as equações efetivas (1D e 2D), se mostraram as melhores aproximações para descrever a dinâmica axial e transversal de seus respectivos modelos. Por fim, no Capítulo 5 apresentaremos as conclusões a respeito do trabalho.

MÉTODO DE REDUÇÃO DIMENSIONAL

Neste Capítulo, apresentaremos o MRD proposto por L. Salasnish [25], utilizando os modelos de BECs em forma de “charuto” e “panqueca”, para derivar equações efetivas 1D e 2D, que descrevem aproximadamente a parte axial e transversal respectivamente da EGP-3D. Os resultados que mostraremos nas duas seções deste capítulo foram apresentados primeiramente nas referências [25] e [34].

A EGP-3D (1.1) é uma equação de Euler-Lagrange (equação de movimento) para o campo ψ^* , isto é, ela satisfaz a expressão

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\psi^*/\partial t)} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi^*)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\psi^*} = 0, \quad (2.1)$$

obtida através do princípio de Hamilton

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \delta \mathcal{L} d\mathbf{x}^3 dt = 0, \quad (2.2)$$

onde $d\mathbf{x}^3 = dxdydz$, $S[\psi, \psi^*]$ é o funcional ação com a densidade lagrangiana¹

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi \cdot \nabla \psi^* - V(r) |\psi|^2 - \frac{\mathcal{N}g}{2} |\psi|^4. \quad (2.3)$$

As características da EGP-3D dificultam a obtenção de soluções analíticas exatas através dos métodos conhecidos, porém, boas aproximações podem surgir introduzindo um *ansatz* do tipo

$$\psi = F(\chi_1, \chi_1^*, \chi_2, \chi_2^*, \dots, \chi_N, \chi_N^*),$$

onde χ_1, \dots, χ_N , são campos independentes entre si, que por meio da equação de Euler-

1. É importante salientar que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}, \nabla\psi, \psi^*, \dot{\psi}^*, \nabla\psi^*, x, y, z, t)$

Lagrange para os campos $\{\chi_k^*\}$,

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \chi_k^* / \partial t)} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla \chi_k^*)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi_k^*} = 0,$$

pode-se obter um conjunto de N equações diferenciais parciais acopladas. A forma de F determina como serão estas equações, de tal modo que elas possam ser resolvidas utilizando métodos convencionais, culminando na solução exata de ψ , o que seria impraticável sem a abordagem variacional. Em geral, a introdução do *ansatz* ainda gera um conjunto de equações diferenciais parciais não lineares acopladas que não possuem soluções analíticas. Nestes casos, pode-se adotar aproximações, como por exemplo, admitir que o(s) campo(s) variam lentamente com a direção axial $\frac{\partial \chi_j}{\partial z} \simeq 0$ e/ou transversal $\frac{\partial \chi_j}{\partial \rho} \simeq 0$, podendo gerar equações diferenciais mais simples.

O MRD para os BECs em forma de “charuto” também consiste em uma aproximação, que é realizada introduzindo a solução analítica da parte transversal da EGP-3D com $g = 0$ como o *ansatz* na densidade lagrangiana (2.3) a qual integrada em relação a coordenada transversal, produz uma lagrangiana efetiva em 1D. A partir dessa, pode-se utilizar o princípio de Hamilton para gerar uma equação efetiva em 1D que descreve aproximadamente a dinâmica axial do modelo, reduzindo assim o problema 3D para 1D, como será mostrado detalhadamente na próxima seção.

Redução dimensional para condensados em forma de “charuto”

Nesta seção, consideraremos um gás diluído de bósons de massa m , com temperatura próxima o suficiente do limite de zero Kelvin, sob a ação de um potencial externo harmônico fortemente confinante na direção axial (z), dado por

$$V(\mathbf{r}) = \frac{m\omega_{\perp}^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{m\omega_z^2}{2}z^2, \quad (2.4)$$

onde ω_{\perp} é a frequência angular transversal e ω_z é a frequência angular axial, com

$$\frac{\omega_{\perp}}{\omega_z} = 10.$$

O confinamento apresentado na Equação (2.4) faz com que as partículas do modelo se disponham geometricamente em forma de um “charuto”, isto é, a densidade de partículas no centro do plano transversal (x, y) do gás é grande, a qual diminui ao longo das bordas e se mantém praticamente constante na direção axial z . Neste trabalho, os modelos de condensados com esta geometria serão chamados de BECs em forma de “charuto”.

Para facilitar os cálculos, pode-se realizar as seguintes mudanças de variáveis:

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow \frac{x}{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_z}}}, \quad y \longrightarrow \frac{y}{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_z}}}, \quad z \longrightarrow \frac{z}{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_z}}}, \\ t &\longrightarrow \omega_z t, \quad \psi \longrightarrow \left(\frac{\hbar}{m\omega_z}\right)^{3/4} \psi, \end{aligned} \quad (2.5)$$

resumindo a EGP-3D (1.1) na forma

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{1}{2}\nabla^2\psi + \gamma^2\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)\psi + \frac{z^2}{2}\psi + 2\pi g|\psi|^2\psi, \quad (2.6)$$

com $g \longrightarrow 2\mathcal{N}/(\frac{\hbar}{m\omega})^{\frac{1}{2}}g$ e $\gamma = \frac{\omega_{\perp}}{\omega_z}$. A densidade lagrangiana reescalada é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}\nabla\psi \cdot \nabla\psi^* - \gamma^2\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)|\psi|^2 + \frac{z^2}{2}|\psi|^2 - \pi g|\psi|^4. \quad (2.7)$$

Essa reescala torna as coordenadas espaciais e temporal adimensionais, além de reduzir a quantidade de constantes presentes na equação. Neste caso, utilizamos como fator de reescala temporal ω_z , com o efeito de “acelerar” a dinâmica da solução reescalada. Esse efeito é benéfico na abordagem numérica, pois reduz o número de pontos a serem utilizados para a visualização da solução e acontece sempre que $\omega_z < \omega_{\perp}$.

Apartir da densidade lagrangiana (2.7), podemos introduzir o *ansatz* fatorizado. Vale salientar que a escolha do *ansatz* é um passo significativo para o sucesso do método, que para isso, consideramos a parte transversal da EGP-3D (2.6) no limite em que $g \simeq 0$,

$$i\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\psi} = -\frac{1}{2}\nabla_{\perp}^2\tilde{\psi} + \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)\tilde{\psi}, \quad (2.8)$$

onde $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(\rho, t)$ ² é a parte transversal de $\psi(r, t)$ e $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, cuja solução pode ser escrita como

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2} - it\right]. \quad (2.9)$$

Essa expressão nos indica que a solução estacionária da Equação (2.8), é um *ansatz* apropriado, já que ele é a solução exata da parte transversal independente do tempo e linearizada da EGP-3D (2.6). Contudo espera-se que a aproximação feita na linearização torne a Equação efetiva resultante menos precisa com o incremento de g . Portanto, a

2. $\psi(r, t) = \tilde{\psi}(\rho, t)\bar{\psi}(z, t)$

partir das considerações anteriores, pode-se reescrever a função de onda 3D na forma

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2\eta^2}\right] f}{\sqrt{\pi}\eta}, \quad (2.10)$$

com $\eta = \eta(z, t)$ e $f = f(z, t)$. Logo, substituindo-a na densidade lagrangiana (2.7) e integrando em relação às coordenadas transversais x e y , obtem-se a densidade lagrangiana efetiva

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef}(f, f^*, \eta) &= \frac{i}{2} \left(f^* \frac{\partial f}{\partial t} - f \frac{\partial f^*}{\partial t} \right) - \frac{|f|^2}{2\eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 \\ &- \frac{|f|^2}{2\eta^2} - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|^2 - \gamma^2 \frac{|f|^2 \eta^2}{2} - \frac{z^2}{2} |f|^2 - \frac{g|f|^4}{2\eta^2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Neste ponto, pode-se admitir como aproximação, que η varia lentamente com a direção axial z , desprezando os termos de derivadas com relação a esta direção.

Portanto, utilizando do princípio de Hamilton com a lagrangiana efetiva (2.11), encontra-se as seguintes Equações de Euler-Lagrange³:

$$i \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{z^2}{2} f + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\eta^2} + \gamma^2 \eta^2 \right) f + g \frac{|f|^2}{\eta^2} f, \quad (2.12)$$

$$\gamma^2 \eta^4 = 1 + g|f|^2. \quad (2.13)$$

Substituindo a Equação (2.13) em (2.12), obtem-se a Equação efetiva axial

$$i \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{z^2}{2} f + \gamma \frac{1 + (3/2)g|f|^2}{\sqrt{1 + g|f|^2}} f. \quad (2.14)$$

Essa é uma equação diferencial parcial, não linear, que assim como a equação EGP-3D (2.6), não pode ser resolvida através dos métodos de resolução de EDP's conhecidos, sendo tratada de forma numérica. Para resolver numericamente esse tipo de equação, pode-se utilizar o algoritmo de Crack-Nilcholson em conjunto com o método de propagação em tempo imaginário, encontrando seus respectivos “estados fundamentais”⁴.

Afim de comparar a eficácia do MRD apresentado, pode-se introduzir outros tipos de aproximações, como por exemplo, a aproximação de acoplamento fraco, que é feita a

3. Devido a igualdade entre as Equações de movimento para os campos $f(z, t)$ e $f(z, t)^*$, não apresentamos a equação de Euler-Lagrange do campo $f(z, t)$.

4. Neste trabalho, adotamos o termo “solução de estado fundamental” para nos referir às soluções que possuem as mais baixas energias. Nenhuma das soluções das equações diferenciais deste trabalho possuem obrigatoriamente as propriedades relacionadas a ortogonalidade ou ortonormalidade, devido a presença dos termos não lineares

partir da Equação efetiva (2.14) assumindo $g|f|^2 \ll 1$. A equação resultante é escrita como

$$i\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{z^2}{2}f + \gamma(1 + g|f|^2)f, \quad (2.15)$$

que devido a natureza da aproximação utilizada, produz a descrição aproximada da parte axial da EGP-3D (2.6), para pequenos valores de g . Outro tipo de aproximação válida, é a aproximação de acoplamento forte, realizada a partir da Equação efetiva (2.14), admitindo que $g|f|^2 \gg 1$. O resultado desta aproximação é a Equação

$$i\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{z^2}{2}f + \gamma\frac{3}{2}\sqrt{g}|f|f, \quad (2.16)$$

que descreve a parte axial da EGP-3D (2.6), para grandes valores de g .

Para testar a acurácia da Equação efetiva (2.14), pode-se introduzir quantidades auxiliares como:

1 - Densidade axial da EGP-3D (2.6)

$$\rho(z) = \iint |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dx dy, \quad (2.17)$$

a fim de compará-la com o perfil axial $\rho(z) = |f(z, t)|^2$ das Equações (2.14), (2.15) e (2.16). O resultado destas comparações está mostrado na Figura 2.1.

2 - O potencial químico da Equação EGP-3D (2.6) calculado a partir da substituição de $\psi(\mathbf{r}, t) = \exp[-i\mu_{EGP} t]\psi(\mathbf{r})$ na Equação (2.6), o que resulta em

$$\mu_{EGP} = \int \left[\frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + \frac{\gamma^2}{2}(x^2 + y^2)|\psi|^2 + \frac{z^2}{2}|\psi|^2 + 2\pi g|\psi|^4 \right] d\mathbf{r}, \quad (2.18)$$

com $d\mathbf{r} = dx dy dz$, que pode ser comparado com os potenciais químicos das Equações (2.14), (2.15) μ_{FC} , e (2.16) μ_{FT} , dados respectivamente por

$$\mu_{EF} = \int \left[\frac{1}{2}\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 + \frac{z^2}{2}|f|^2 + \gamma\frac{1 + (3/2)g|f|^2}{\sqrt{1 + g|f|^2}}|f|^2 \right] dz, \quad (2.19)$$

$$\mu_{FC} = \int \left[\frac{1}{2}\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 + \frac{z^2}{2}|f|^2 + \gamma(1 + g|f|^2)|f|^2 \right] dz, \quad (2.20)$$

$$\mu_{FT} = \int \left[\frac{1}{2}\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 + \frac{z^2}{2}|f|^2 + \gamma\frac{3}{2}\sqrt{g}|f|^3 \right] dz, \quad (2.21)$$

com $f = f(z)$. Os resultados estão dispostos na Figura 2.2.

3 - A média do comprimento axial quadrático da EGP-3D (2.6),

$$\langle z^2 \rangle = \int z^2 |\psi|^2 d\mathbf{r}, \quad (2.22)$$

com $\psi = \psi(\mathbf{r})$, que pode ser comparado com as médias dos comprimentos axiais

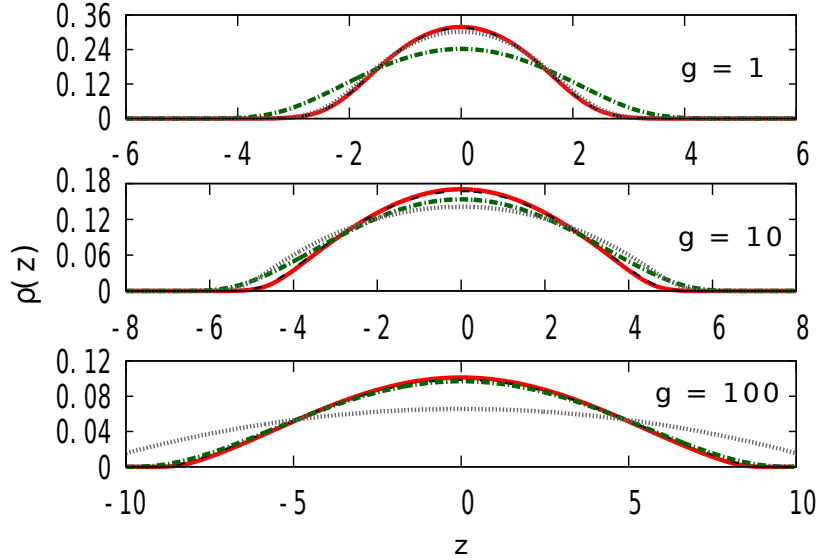


Figura 2.1: Densidade axial $\rho(z)$ do estado fundamental para BECs repulsivos ($g > 0$) com potencial axial $V(z) = \frac{z^2}{2}$, para quatro procedimentos diferentes: a solução numérica da EGP-3D (2.6) que está em linha sólida (vermelha), a solução numérica da Equação efetiva (2.14) que está em linha tracejada (preta), a solução numérica da Equação de acoplamento fraco (2.15) que está em linha pontilhada (cinza) e a solução numérica da Equação de acoplamento forte (2.16) que está em linha ponto-traço (verde escuro).

quadráticos

$$\langle z^2 \rangle = \int z^2 |f|^2 dz \quad (2.23)$$

com $f = f(z)$, das Equações (2.14), (2.15) e (2.16). Os resultados podem ser observados na Figura 2.3.

Nota-se a partir da Figura 2.1, que a densidade axial mais próxima da EGP-3D (2.6), é de fato, a densidade axial da Equação efetiva (2.14) proposta pelo MRD. Observa-se também que, com base na Figura 2.3, o parâmetro $\langle z^2 \rangle$ da Equação efetiva (2.14), é a curva que está mais próxima da EGP-3D, evidenciando que a solução de estado fundamental da Equação efetiva é a melhor aproximação para a parte axial da EGP-3D, se comparada com as soluções de estado fundamental das Equações (2.15) e (2.16).

A eficácia do MRD para BECs do tipo “charuto” se estende também para sistemas atrativos ($g < 0$). Para demonstrar os resultados, consideramos o mesmo modelo apresentado anteriormente, com

$$V(r) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2), \quad (2.24)$$

onde ω é a frequência angular transversal. Assim como fez-se anteriormente, deve-se

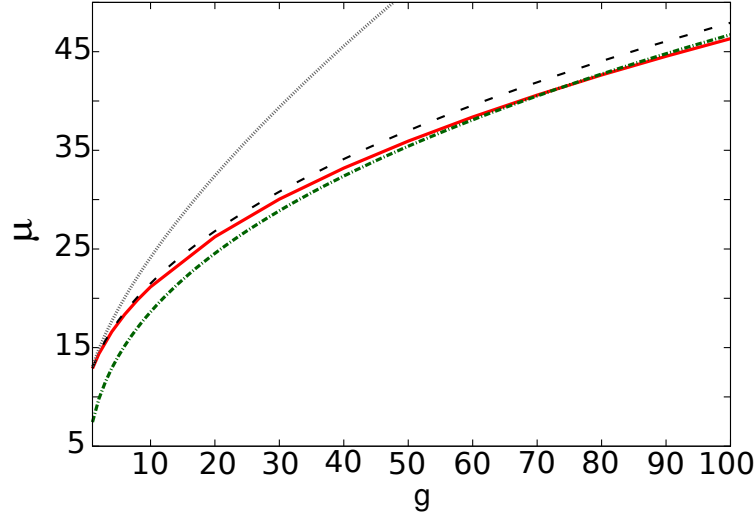


Figura 2.2: Potencial químico para quatro procedimentos diferentes: μ_{EGP} em linha sólida (vermelha), μ_{EF} em linha tracejada (preta), μ_{FC} em linha pontilhada (cinza) e μ_{FT} em linha ponto-traço (verde escuro).

reescalar as coordenadas usando

$$x \longrightarrow \frac{x}{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}}, \quad y \longrightarrow \frac{y}{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}}, \quad z \longrightarrow \frac{z}{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}},$$

$$t \longrightarrow \omega t, \quad \psi \longrightarrow \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{3/4} \psi, \quad (2.25)$$

tornando-as adimensionais e reduzindo a EGP-3D a forma

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{1}{2}\nabla^2\psi + \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)\psi + 2\pi g|\psi|^2\psi, \quad (2.26)$$

com $g = 2a_s\mathcal{N}/\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Realizando os procedimentos variacionais anteriores, pode-se encontrar a Equação efetiva

$$i\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1 + (3/2)g|f|^2}{\sqrt{1 + g|f|^2}}f, \quad (2.27)$$

e a Equação de acoplamento fraco

$$i\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + (1 + g|f|^2)f. \quad (2.28)$$

Vale salientar que as Equações para o modelo atrativos (2.27) e (2.28), diferem das Equações para o modelo atrativo (2.14) e (2.15) apenas pela ausência da constante γ e pelo valor g . A comparação entre as densidades axiais do modelo atrativo estão dispostas na Figura 2.9. As quantidades estáticas μ_{EGP} , μ_{EF} e μ_{FC} para este modelo podem ser

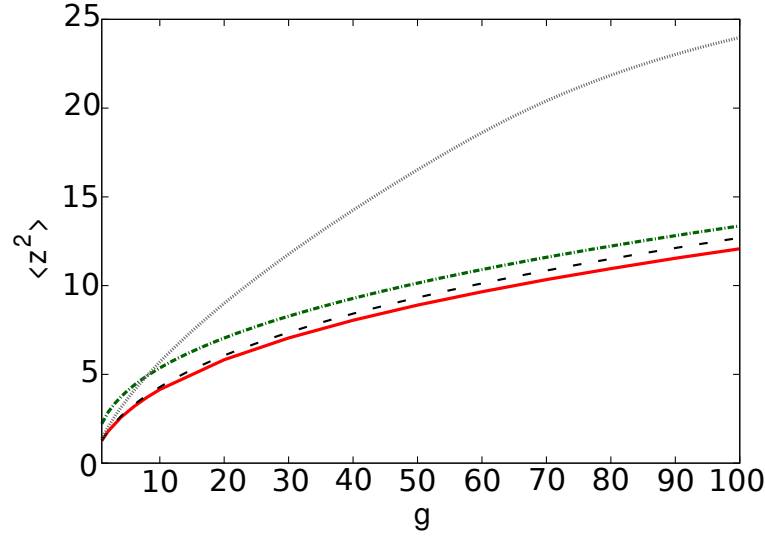


Figura 2.3: Média do comprimento axial quadrático $\langle z^2 \rangle$ para a EGP-3D e suas aproximações. O $\langle z^2 \rangle$ da EGP-3D (2.6) está em linha sólida (vermelha), $\langle z^2 \rangle$ da Equação efetiva (2.14) está em linha tracejada (preta), $\langle z^2 \rangle$ da Equação de acoplamento fraco (2.15) está em linha pontilhada (cinza) e $\langle z^2 \rangle$ da Equação de acoplamento forte (2.16) está em linha ponto-traço (verde escuro).

escritas como

$$\mu_{EGP} = \int \left[\frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) |\psi|^2 + 2\pi g |\psi|^4 \right] d\mathbf{x}^3, \quad (2.29)$$

$$\mu_{EF} = \int \left[\frac{1}{2} \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 + \frac{1 + (3/2)g|f|^2}{\sqrt{1 + g|f|^2}} |f|^2 \right] dz, \quad (2.30)$$

$$\mu_{FC} = \int \left[\frac{1}{2} \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 + (1 + g|f|^2) |f|^2 \right] dz. \quad (2.31)$$

Para sistemas repulsivos, não há restrições quanto ao módulo de g para que exista solução de estado fundamental. Isto não acontece nos sistemas atrativos, onde há um valor crítico, dito g_c , a partir do qual não existem mais soluções estáveis para o modelo. A análise do ponto crítico g_c pode ser realizada de várias maneiras, como por exemplo, observando a variação do potencial químico ou do $\langle z^2 \rangle$, com a variação de g . Normalmente, o ponto g_c é o valor limite da curva de μ por g ou $\langle z^2 \rangle$ por g , antes da descontinuidade. Outro método para determinar g_c numericamente, é aumentando o número de iterações do algoritmo de propagação em tempo imaginário e comparando os valores destas quantidades em um intervalo de passos predefinido. Caso os valores de μ e $\langle z^2 \rangle$ não convirjam, este pode indicar a existência de instabilidade na solução de estado fundamental. Há contudo, um critério formal chamado de critério de Vakhitov-Kolokolov (VK) [38], o qual escrito em termo de g , afirma que a condição necessária para que haja estabilidade das soluções é

$$\frac{\partial \mu}{\partial g} > 0. \quad (2.32)$$

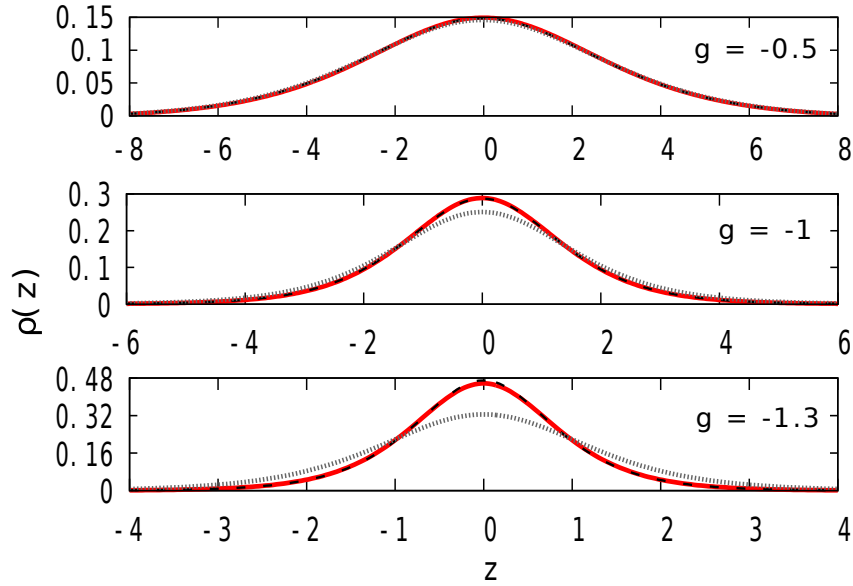


Figura 2.4: Densidade axial $\rho(z)$ do estado fundamental para BECs atrativos ($g < 0$) com potencial axial $V(z) = 0$, para três procedimentos diferentes: a solução numérica da EGP-3D (2.26) que está em linha sólida (vermelha), a solução numérica da Equação efetiva (2.27) que está em linha tracejada (preta) e a solução numérica da Equação de acoplamento fraco (2.28) que está em linha pontilhada (cinza).

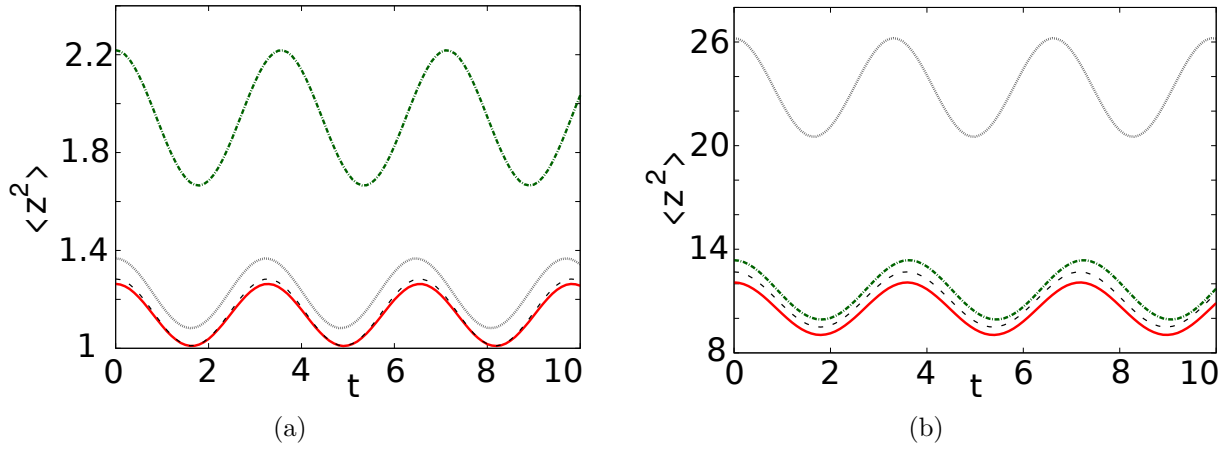


Figura 2.5: Oscilações de $\langle z^2 \rangle$ para quatro procedimentos diferentes: EGP-3D (2.6) em linha sólida (vermelha), a Equação efetiva (2.14) em linha tracejada (preta), a Equação de acoplamento fraco (2.15) em linha pontilhada (cinza) e a Equação de acoplamento forte (2.16) em linha ponto-traço verde (escuro). Em (a) $g = 1$ e (b), $g = 100$.

Geralmente os valores de g_c obtidos através das três maneiras citadas acima, são iguais, ou estão muito próximos entre si. Neste trabalho utilizamos o critério VK para determinar g_c . Para os BECs atrativos em forma de “charuto”, foi encontrado os valores críticos de $g_c = 1.32$ para a Equação efetiva (2.27) e $g_c = 1.36$ para a EGP-3D (2.26).

Com a análise estática concluída, pode-se então verificar o comportamento do condensado repulsivo de forma dinâmica, isto é, propagando a solução de estado fundamental das Equações (2.6), (2.14), (2.15) e (2.16) calculadas anteriormente, mudando

o potencial axial adimensional para $V(z) = 1.20\frac{z^2}{2}$. Esta alteração no confinamento axial, produz oscilações no perfil da solução, o que pode ser utilizado para comparar as oscilações dos valores de $\langle z^2 \rangle$ das Equações (2.6), (2.14), (2.15) e (2.16). Esta propagação pode ser feita numericamente, utilizando um algoritmo com o FFT (fast fourier transform) em conjunto com o método de propagação em tempo real. Este resultado está disposto na Figura 2.5.

Portanto, com base na análise acima, pode-se concluir que o MRD possui a melhor eficácia, se comparado com as equações aproximadas, em descrever a dinâmica axial dos BECs atrativos e repulsivos do tipo “charuto”.

Na próxima seção, mostraremos que o MRD também pode ser utilizado para derivar equações efetivas em 2D espaciais, que descrevem a dinâmica transversal dos BECs do tipo “panqueca”.

Redução dimensional para condensados em forma de “panqueca”

Nesta seção mostraremos em detalhes a aplicação do MRD para BECs em forma de “panqueca”, produzido uma equação efetiva 2D que representa aproximadamente o comportamento transversal do modelo. Assim, deve-se considerar novamente um gás de bósons diluído de massa m , com temperatura próxima o suficiente do limite de zero Kelvin e sob um forte aprisionamento axial, cujo potencial possa ser escrito como

$$V(\mathbf{r}) = \frac{m\omega_T^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{m\omega_A^2}{2}z^2, \quad (2.33)$$

onde ω_T é a frequência angular transversal e ω_A é a frequência angular axial, com

$$\frac{\omega_A}{\omega_T} = 10.$$

Devido ao confinamento (2.33) a disposição geométrica das partículas constituintes do condensado se assemelha à forma de uma panqueca, isto é, a densidade de partículas se concentra quase totalmente no plano transversal (x, y) do gás em um formato arredondado, enquanto a dinâmica no eixo axial z é extremamente rasa. Neste trabalho, os modelos de condensados que apresentam esta geometria serão chamados de BECs em forma de “panqueca”.

Neste modelo, pode-se realizar a reescala em termos da frequência angular transversal ω_A , dada pelas mudanças de coordenadas

$$x \longrightarrow \frac{x}{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_A}}}, \quad y \longrightarrow \frac{y}{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_A}}}, \quad z \longrightarrow \frac{z}{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_A}}},$$

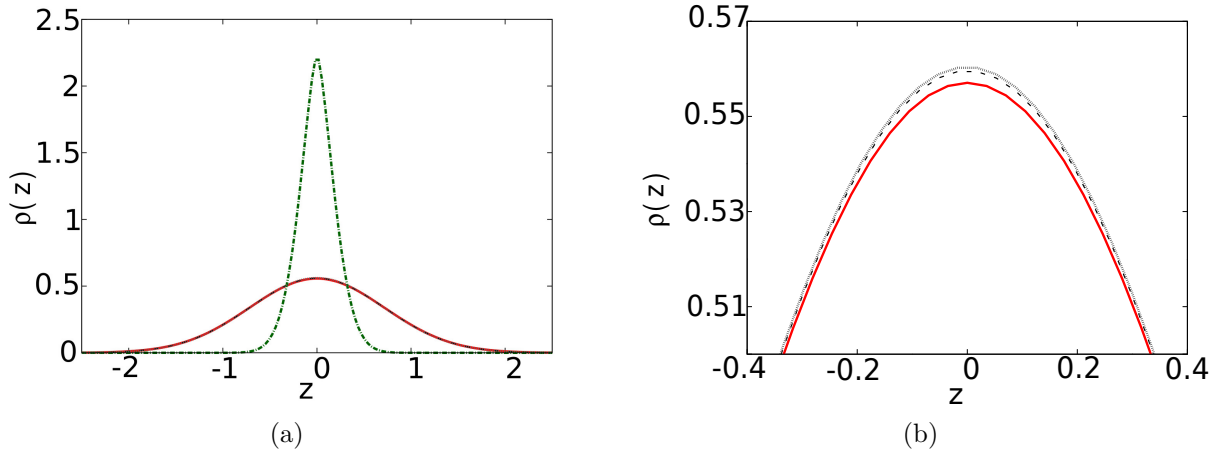


Figura 2.6: (a) Densidade axial $\rho(z)$ do estado fundamental dos BECs repulsivos, para quatro procedimentos diferentes: a solução numérica da EGP-3D (2.35) em linha sólida (vermelha), a solução numérica da Equação efetiva (2.39) em linha tracejada (preta), a solução numérica da Equação de acoplamento fraco com não linearidade cúbica em linha pontilhada (cinza) e a solução numérica da Equação de acoplamento forte (2.44) em linha ponto-traço (verde escuro), para $g = 1$. (b) As mesmas soluções apresentadas em (a).

$$t \longrightarrow \omega_A t, \quad \psi \longrightarrow \left(\frac{\hbar}{m\omega_A}\right)^{3/4} \psi, \quad (2.34)$$

o que resume a EGP-3D (1.1) a forma de

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{1}{2}\nabla^2\psi + \gamma^2\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)\psi + \frac{z^2}{2}\psi + 2\pi g|\psi|^2\psi, \quad (2.35)$$

com $g \longrightarrow 2\mathcal{N}/\left(\frac{\hbar}{m\omega_A}\right)^{1/2}g$ e $\gamma = \frac{\omega_T}{\omega_A}$. A densidade lagrangiana da Equação acima pode ser escrita na forma

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}\nabla\psi \cdot \nabla\psi^* - \gamma^2\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)|\psi|^2 + \frac{z^2}{2}|\psi|^2 - \pi g|\psi|^4. \quad (2.36)$$

Assim, de posse da solução da parte axial da EGP-3D (2.35) com $g \simeq 0$, escrita como

$$\tilde{\psi}(z, t) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp\left[-\frac{z^2}{2} - it\right],$$

pode-se obter o *ansatz* fatorizado na forma

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right]}{(\pi\sigma^2)^{1/4}}\Phi, \quad (2.37)$$

com $\sigma = \sigma(x, y, t)$ e $\Phi = \Phi(x, y, t)$, o qual substituído na densidade lagrangiana (2.36) e

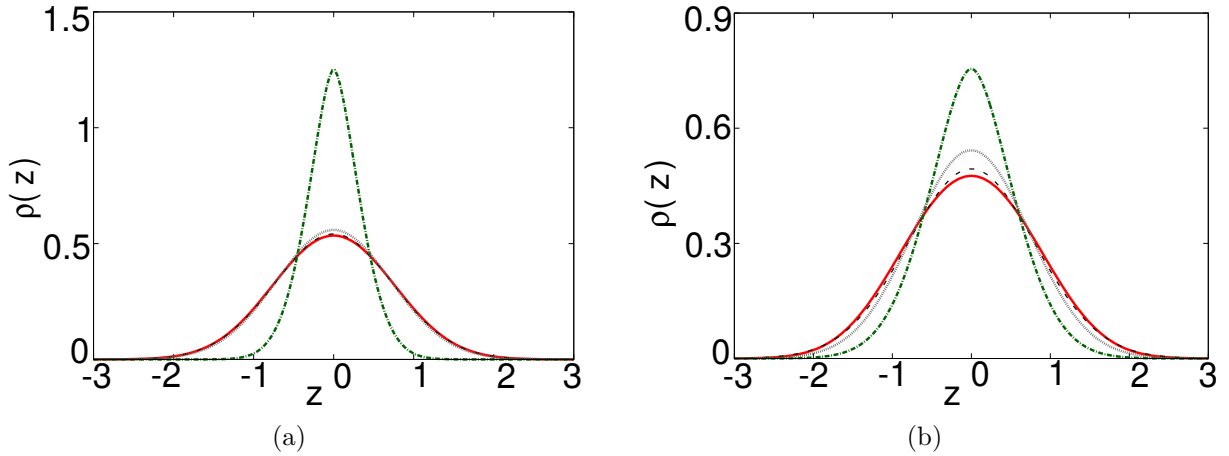


Figura 2.7: Densidade axial $\rho(z)$ do estado fundamental para BECs repulsivos, para quatro procedimentos diferentes: a solução numérica da EGP-3D (2.35) em linha sólida esta em (vermelha), a solução numérica da Equação efetiva não polinomial (2.39) em linha tracejada (preta), a solução numérica da Equação de acoplamento fraco com não linearidade cúbica está em linha pontilhada (cinza) e a solução numérica da Equação de acoplamento forte (2.44) em linha ponto-traço (verde escuro). Em (a) $g = 10$ e (b), $g = 100$.

integrado com respeito a coordenada axial z , gera a densidade lagrangiana efetiva

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef}(\Phi, \Phi^*, \sigma) = & \frac{i}{2} \left(\Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} \right) - \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{|\Phi|^2}{4\sigma^2} - \frac{|\Phi|^2}{4\sigma^2} \\ & - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|^2 - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|^2 - \gamma^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) |\Phi|^2 - \frac{\sqrt{2\pi}g|\Phi|^4}{2\sigma}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Deste modo, utilizando a aproximação em que σ varia lentamente na direção transversal, as Equações de Euler-Lagrange derivadas do princípio de Hamilton com a lagrangiana efetiva (2.38) são

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \gamma^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) \Phi + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma^2} + \sigma^2 \right) \Phi + \frac{\sqrt{2\pi}g}{\sigma} |\Phi|^2 \quad (2.39)$$

e

$$\sigma^4 = 1 + \sqrt{2\pi}g|\Phi|^2\sigma. \quad (2.40)$$

A expressão (2.39) é chamada de Equação efetiva transversal. A equação algébrica acima pode ser resolvida de forma exata através da fórmula de Cardano, resultando em

$$\begin{aligned} \sigma = & \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta^2 - 12}{3\Delta}} \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{\Delta^2 - 12}{3\Delta} \pm \sqrt{4\pi}g|\Phi|^2 \left(\frac{\Delta^2 - 12}{3\Delta} \right)^{-1/2}}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

com

$$\Delta = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} (18\pi g^2 |\Phi|^4 + \sqrt{3} \sqrt{256 + 108\pi^2 g^4 |\Phi|^8})^{1/3}.$$

O sinal da Equação (2.41) corresponde respectivamente a $g > 0$ e $g < 0$. A partir da Equação (2.40) e (2.39), pode-se utilizar a aproximação de baixas densidades, isto é, $|\sqrt{2\pi g}|\Phi|^2 \ll 1$, para produzir a equação limite para este caso, dada por

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \gamma^2 \frac{x^2 + y^2}{2} \Phi + \sqrt{2\pi g} |\Phi|^2 \Phi - \frac{3\pi g^2}{8} |\Phi|^4 \Phi. \quad (2.42)$$

Essa é uma Equação de Schrödinger não linear (ESNL-2D), com não linearidade cúbica e quártica que apresenta colapso em sua solução para sistemas repulsivos. Assim, sabendo que a EGP-3D não apresenta este comportamento, pode-se reescrever esta equação desprezando a não linearidade quártica, o que produz uma ESNL-2D com não linearidade cúbica, escrita na forma

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \gamma^2 \frac{x^2 + y^2}{2} \Phi + \sqrt{2\pi g} |\Phi|^2 \Phi. \quad (2.43)$$

Essa Equação, que aqui chamaremos de aproximação de acoplamento fraco, só possui colapso em sua solução para sistemas atrativos, se assemelhando ao comportamento da EGP-3D. Do mesmo modo, pode-se utilizar a aproximação para altas densidades, $|\sqrt{2\pi g}|\Phi|^2 \gg 1$, produzindo a equação limite para este caso, dada por

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \gamma^2 \frac{x^2 + y^2}{2} \Phi + \frac{5}{4} (2\pi)^{1/3} g^{2/3} |\Phi|^{4/3} \Phi, \quad (2.44)$$

para sistemas repulsivos e

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \gamma^2 \frac{x^2 + y^2}{2} \Phi + \frac{3\pi}{2} g^2 |\Phi|^4 \Phi, \quad (2.45)$$

para sistemas atrativos. A ESNL-2D (2.44) se difere das equações diferenciais apresentadas até aqui devido ao termo não linear $|\Phi|^{4/3}$. Este tipo de equação pode ser encontrada no âmbito das equações efetivas que descrevem o comportamento de um gás quântico rarefeito composto de uma mistura de bósons condensados e férmions, com dois estados de spin igualmente populados, dito como mistura superfluida de Bose-Fermi [39, 40]. Assim como na seção anterior, tanto as equações aproximadas quando a EGP-3D (2.35) são equações diferenciais parciais não lineares, que devido suas formas, apresentam dificuldades para se obter soluções analíticas gerais. Por isso, pode-se utilizar um algoritmo de Crack-Nilcholson em conjunto com o método de propagação em tempo imaginário para encontrar seus respectivos estados fundamentais. Para realizar a comparação entre os perfis destas equações, pode-se introduzir a densidade de probabilidade axial e transversal, definidas a

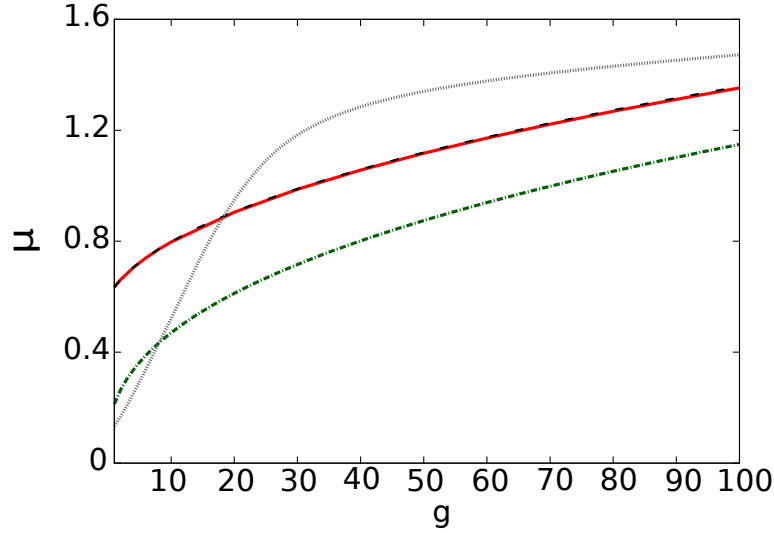


Figura 2.8: Potencial químico para quatro procedimentos diferentes: μ_{EGP} em linha sólida (vermelha), μ_{EF} em linha tracejada (preta), μ_{FC} em linha pontilhada (cinza) e μ_{FT} em linha ponto-traço (verde escuro).

partir do estado fundamental da EGP-3D (2.35),

$$\rho(r) = \int |\psi(\mathbf{r})|^2 dz, \quad (2.46)$$

$$\rho(z) = 2\pi \int |\psi(\mathbf{r})|^2 r dr, \quad (2.47)$$

com $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. No âmbito das equações 2D, pode-se definir as densidades transversais e axiais, utilizando as equações aproximadas, definidas por

$$\rho(r) = |\Phi(r)|^2, \quad (2.48)$$

$$\rho(z) = 2\sqrt{\pi} \int \frac{\exp\left[-\frac{z^2}{\sigma^2}\right]}{\sigma} |\Phi(r)|^2 r dr. \quad (2.49)$$

O resultado destas comparações estão dispostos nas Figuras 2.6 e 2.7.

Para reafirmar a acurácia da Equação efetiva não polinomial (2.39), pode-se utilizar do potencial químico da EGP-3D (2.35),

$$\mu_{EGP} = \int \left[\frac{1}{2} |\nabla\psi|^2 + \frac{\gamma^2}{2} (x^2 + y^2) |\psi|^2 + \frac{z^2}{2} |\psi|^2 + 2\pi g |\psi|^4 \right] d\mathbf{r}, \quad (2.50)$$

com $d\mathbf{r} = dx dy dz$, para comparar com o potencial químico das Equação efetiva (2.39),

$$\mu_{EF} = \iint \left[\frac{1}{2} \left| \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right|^2 + \gamma^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) |\Phi|^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma^2} + \sigma^2 \right) |\Phi|^2 + \frac{\sqrt{2\pi}g}{\sigma} |\Phi|^4 \right] dx dy, \quad (2.51)$$

com o potencial químico das Equação de coplamento fraco com não linearidade cúbica

(2.43)

$$\mu_{FC} = \int \int \left[\frac{1}{2} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|^2 + \gamma^2 \frac{x^2 + y^2}{2} |\Phi|^2 + \sqrt{2\pi} g |\Phi|^4 \right] dx dy \quad (2.52)$$

e com o potencial químico da Equação de acoplamento forte (2.44)

$$\mu_{FT} = \int \int \left[\frac{1}{2} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|^2 + \gamma^2 \frac{x^2 + y^2}{2} |\Phi|^2 + \frac{5}{4} (2\pi)^{1/3} g^{2/3} |\Phi|^{4/3} |\Phi|^2 \right] dx dy. \quad (2.53)$$

O resultado destas comparações estão dispostos na Figura 2.8. Os BECs do tipo “panqueca”, que devido ao forte confinamento axial tem sua dinâmica restringida a praticamente 2D, possuem uma propriedade chamada vorticidade que está relacionada com a capacidade de rotacionar das partículas que o constituem. Esta propriedade pode ser estudada nas coordenadas cilíndricas adimensionais substituindo o *ansatz* secundário

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(r, z, t) \exp[iS\theta], \quad (2.54)$$

na EGP-3D (2.35) em coordenadas cilíndricas, onde obtém-se

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right] + \frac{S^2}{2r^2} \Psi + \frac{\gamma^2 r^2 + z^2}{2} \Psi + 2\pi g |\Psi|^2 \Psi, \quad (2.55)$$

onde S é um número inteiro, chamado de vorticidade. No âmbito das equações 2D, para

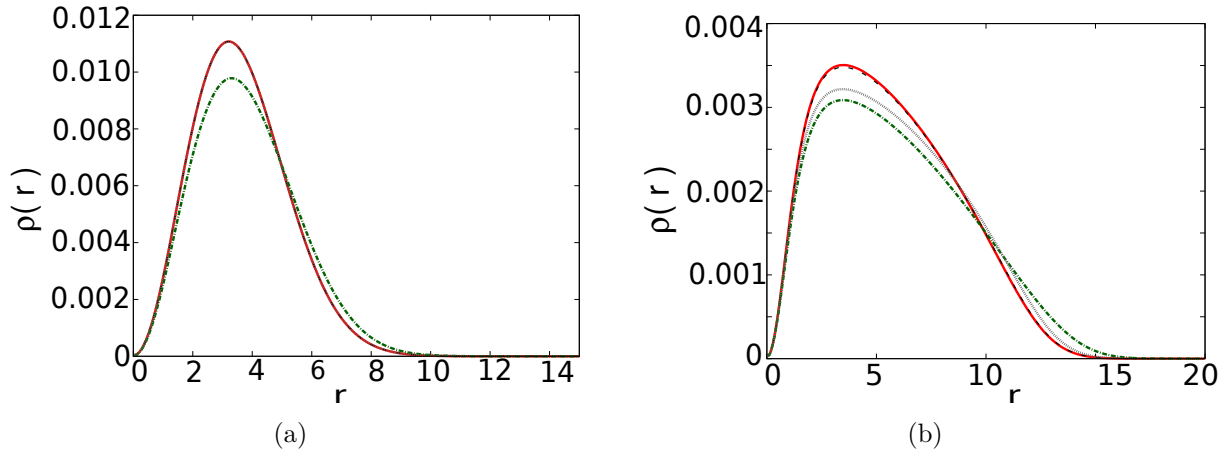


Figura 2.9: (a) Densidade transversal $\rho(r)$ dos estados com vorticidade $S = 1$, para quatro procedimentos diferentes: a solução numérica da EGP-3D (2.55) em linha sólida (vermelha), a solução numérica da Equação efetiva (2.57) em linha tracejada (preta), a solução numérica da Equação de acoplamento fraco com não linearidade cúbica (2.58) em linha pontilhada (cinza) e a solução numérica da Equação de acoplamento forte (2.59) em linha ponto-traço (verde escuro), com $g = 1$. (b) As mesmas soluções apresentadas em (a), com $g = 100$.

estudar o efeito da vorticidade, pode-se substituir

$$\Phi(r, t) = \phi(r, t) \exp[iS\theta], \quad (2.56)$$

nas Equações (2.39), (2.43) e (2.44) em coordenadas cilíndricas adimensionais, resultanto em

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] + \frac{S^2}{2r^2} \phi + \frac{\gamma^2 r^2}{2} \phi + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma^2} + \sigma^2 \right) \phi + \frac{\sqrt{2\pi}g}{\sigma} |\phi|^2, \quad (2.57)$$

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] + \frac{S^2}{2r^2} \phi + \frac{\gamma^2 r^2}{2} \phi + \sqrt{2\pi}g |\phi|^2 \phi. \quad (2.58)$$

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] + \frac{S^2}{2r^2} \phi + \frac{\gamma^2 r^2}{2} \phi + \frac{5}{4} (2\pi)^{1/3} g^{2/3} |\phi|^{4/3} \phi. \quad (2.59)$$

Os resultados das comparações entre as soluções com vorticidade estão dispostos nas Figuras 2.9. Nota-se que a densidade proveniente da Equação efetiva (2.57) concorda o resultado da EGP-3D (2.55), uma vez que esta se mostra a melhor aproximação para descrever o modelo.

A partir da Figura 2.10 (a), pode-se observar que há uma grande variação da solução transversal da Equação efetiva (2.57) com o aumento de S , diferente dos perfis axiais que não apresentam variações significativas, mostrados na Figura 2.10 (b).

Neste Capítulo reproduzimos resultados já apresentados anteriormente nas Refs. [25], [31], e [34], onde mostramos detalhadamente o funcionamento do MRD, evidenciando

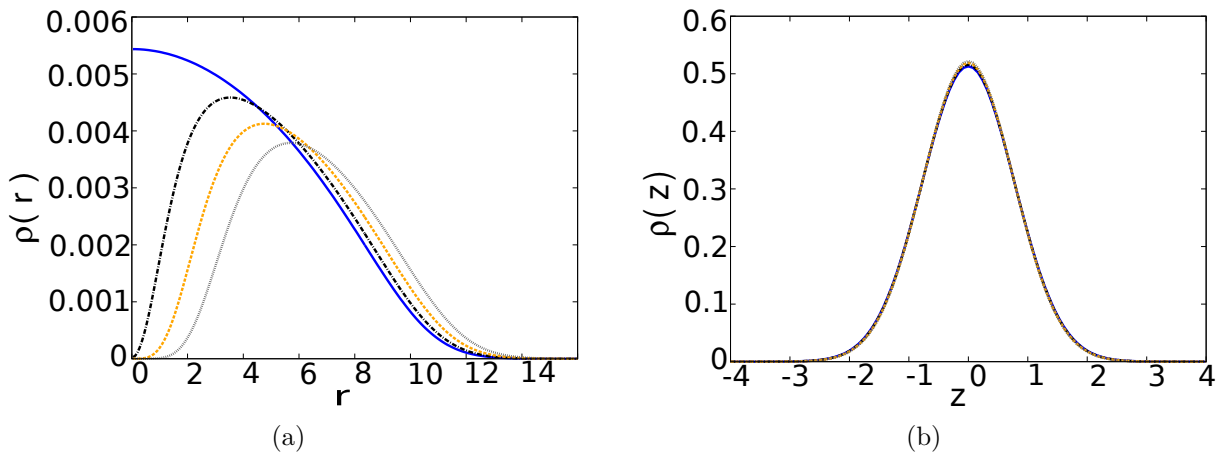


Figura 2.10: (a) Densidade transversal $\rho(r)$ dos estados com vorticidade da Equação efetiva (2.57), para quatro procedimentos diferentes: $S = 0$ que está em linha sólida (azul), $S = 1$ que está em linha ponto-traço (preta), $S = 2$ que está em linha tracejada (laranja) e $S = 3$ que está em linha pontilhada (cinza), para $g = 50$. (b) As mesmas curvas contidas em (a), com densidade axial $\rho(z)$.

sua eficácia em descrever a dinâmica axial para os BECs em forma de “charuto” e a dinâmica transversal para os BECs em forma de “panqueca”. No próximo capítulo apresentaremos novos resultados, onde mostraremos em detalhes que o MRD também pode ser utilizado, com algumas restrições, para prever a dinâmica axial e transversal dos BECs em forma de “tubo”.

MÉTODO DE REDUÇÃO DIMENSIONAL PARA CONDENSADOS EM FORMA DE “TUBO”

Neste Capítulo, utilizaremos o MRD para derivar uma equação efetiva unidimensional para os BECs em forma “tubo” e mostraremos que ela descreve com acurácia a dinâmica axial do modelo. Assim como foi feito no Capítulo anterior, efetuaremos testes utilizando quantidades estáticas e dinâmicas, para evidenciar a precisão da equação efetiva.

Os BECs em forma de “tubo” tem como principais características, o forte aprisionamento no centro e nas bordas do gás no plano (x, y) , enquanto na região entre estas áreas as partículas ficam menos restritas. Além disso, na direção do eixo axial z elas estão quase livres. Conseqüentemente as partículas que constituem este modelo se distribuem geometricamente entre as regiões de confinamento forte, formando aproximadamente um o “anel” no plano (x, y) e se distribuindo quase que uniformemente na direção z , o que produz uma densidade de partículas em forma de “tubo”. O potencial externo que produz esse tipo de comportamento pode ser escrito como

$$V(\mathbf{r}) = \frac{m\omega_{\perp}^2}{2} \frac{\kappa^4 + 4r^4}{r^2} + V(z) \quad (3.1)$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $V(z)$ é o potencial genérico axial fracamente confinante, ω_{\perp} é a frequência angular transversal e κ é uma contante com a mesma dimensão de r . A Figura 3.1 mostra a forma do potencial transversal externo (3.1). O potencial externo, diferentemente daqueles apresentados anteriormente, possui descontinuidade, fato este que dificulta os cálculos numéricos.

Neste âmbito, consideraremos um gás diluído de bósons de massa m , com temperatura próxima o suficiente do limite de zero Kelvin, sob a ação de um potencial

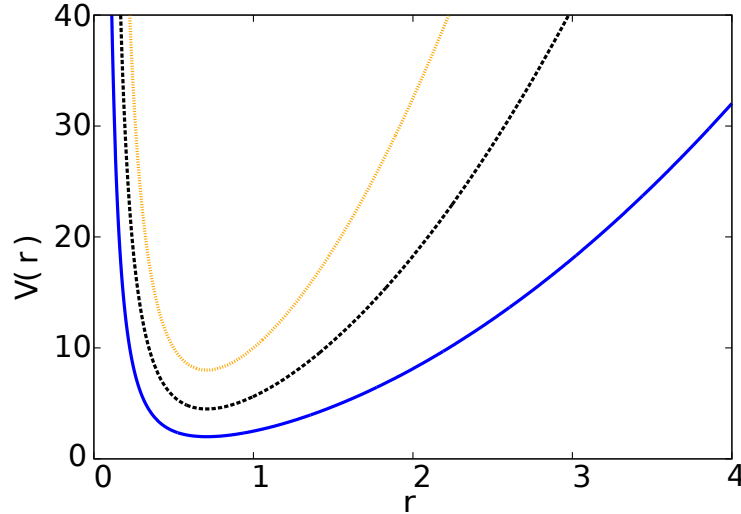


Figura 3.1: Representação gráfica do potencial transversal externo (3.1). A linha sólida (azul) representa o potencial transversal $V(r)$ com $\omega_{\perp} = \omega_0$, a linha tracejada (preta) representa $V(r)$ com $\omega_{\perp} = 1.5\omega_0$ e a linha tracejada pontilhada (laranja) representa $V(r)$ com $\omega_{\perp} = 2\omega_0$, onde $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ é uma frequência de oscilação genérica, com $m = 1 \text{ Kg}$ e $\kappa = 1 \text{ m}$.

externo (3.1), cujo estado de condensação é descrito pela EGP-3D

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + \left(\frac{m\omega_{\perp}^2 (\kappa^4 + 4r^4)}{2} + V(z) \right) \psi(\mathbf{r}, t) + \mathcal{N}g |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.2)$$

Realizando a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow \frac{x}{a_{\perp}}, \quad y \longrightarrow \frac{y}{a_{\perp}}, \quad z \longrightarrow \frac{z}{a_{\perp}}, \\ t &\longrightarrow \omega_{\perp} t, \quad \psi \longrightarrow a_{\perp}^{3/4} \psi, \quad g \longrightarrow 2\mathcal{N} \frac{a_s}{a_{\perp}}, \quad \kappa = \frac{\kappa}{a_{\perp}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

com $a_{\perp} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_{\perp}}}$, podemos reescrever a EGP-3D na forma

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{1}{2} \nabla^2 \psi + \left(\frac{\kappa^4 + 4r^4}{2r^2} + \gamma^2 V(z) \right) \psi + 2\pi g |\psi|^2 \psi, \quad (3.4)$$

com $\gamma = \frac{\omega_z}{\omega_{\perp}}$, onde ω_z é a frequência angular do potencial axial. Para simplificar os cálculos faremos $\kappa = 1$, uma vez que este não modifica a dinâmica do modelo. Neste Capítulo, faremos a constante de anisotropia do potencial externo $\gamma = 0.1$, para alcançarmos a geometria do BEC em forma de “tubo”. Vale notar que a reescala foi feita em termos de ω_{\perp} , o que não representa a escala acelerada. Contudo, esta é válida tanto para sistemas atrativos quando repulsivos, reduzindo o número de equações necessárias para mostrar a validade e precisão das soluções destas equações para ambos os tipos de interação dos BECs.

A parte transversal ¹ da EGP-3D (3.4), tem como solução

$$\psi_{\perp}(r, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x^2 + y^2} \exp \left[-x^2 + y^2 - i\mu_{\perp} t \right], \quad (3.5)$$

com $\mu_{\perp} = 4$ e $g \simeq 0$. A partir deste resultado, podemos adotar o *ansatz* fatorizado e normalizado

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x^2 + y^2} \exp \left[-\beta(x^2 + y^2) \right] f, \quad (3.6)$$

com $\beta = \beta(z, t)$ e $f = f(z, t)$, que substituído na densidade lagrangiana da EGP-3D (3.4)

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \nabla \psi \cdot \nabla \psi^* - \left(\frac{1 + 4r^4}{2r^2} \right) |\psi|^2 - \gamma^2 V(z) |\psi|^2 - \pi g |\psi|^4, \quad (3.7)$$

e integrando em relação a coordenada transversal (x, y) , produz a densidade lagrangiana efetiva

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef}(f, f^*, \beta) &= \frac{i}{2} \left(f^* \frac{\partial f}{\partial t} - f \frac{\partial f^*}{\partial t} \right) - \frac{|f|^2}{4\beta^2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 \\ &- 2\beta |f|^2 - \gamma^2 V(z) |f|^2 - \frac{2}{\beta} |f|^2 - \frac{\pi g \beta}{2} |f|^4. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Deste modo, utilizando a aproximação de variação axial lenta para β , $\frac{\partial \beta}{\partial z} \simeq 0$, e aplicando o princípio de Hamilton ao modelo com a lagrangiana efetiva acima, encontra-se as seguintes Equações de Euler-Lagrange com respeito a f^* e β

$$i \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \gamma^2 V(z) f + 2 \left(\frac{1}{\beta} + \beta \right) f + g\beta |f|^2 f, \quad (3.9)$$

e

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{4 + g|f|^2}}. \quad (3.10)$$

Substituindo a Equação (3.10) em (3.9), obtemos a Equação efetiva axial

$$i \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \gamma^2 V(z) f + \frac{8 + 3g|f|^2}{\sqrt{4 + g|f|^2}} f. \quad (3.11)$$

Essa Equação é um dos principais produtos deste trabalho, cuja função é descrever a parte axial dos BECs em forma de “tubo”. O largo espectro de validade da solução da equação efetiva é uma de suas importantes características, tendo validade tanto para sistemas atrativos, quando repulsivos, com eficácia na descrição destes modelos.

1. $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_{\perp}(r) \psi_z(z, t)$.

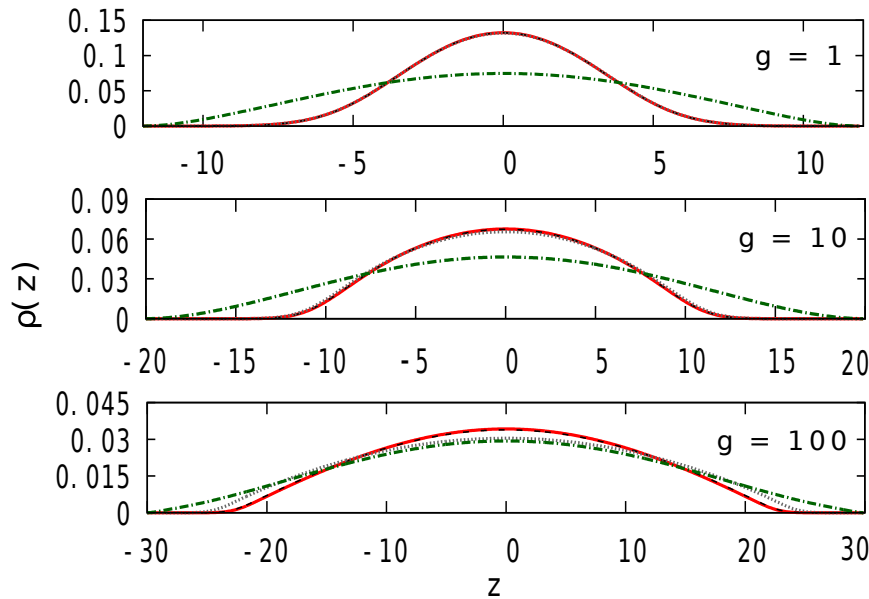


Figura 3.2: Densidade axial $\rho(z)$ do estado fundamental para BECs repulsivos ($g > 0$) com potencial axial $V(z) = \frac{z^2}{2}$, para quatro procedimentos diferentes: a solução numérica da EGP-3D (3.4) em linha sólida (vermelha), a solução numérica da Equação efetiva (3.11) em linha tracejada (preta), a solução numérica da Equação de acoplamento fraco (3.12) em linha pontilhada (cinza) e a solução numérica da Equação de acoplamento forte (3.13) em linha ponto-traço (verde escuro).

Para testar a acurácia da solução da Equação efetiva (3.11), podemos utilizar aproximações conhecidas, como aquelas usadas no Capítulo anterior, gerando equações restritas aos limites de acoplamento fraco e forte, comparando suas soluções com a EGP-3D (3.4). Portanto, utilizando a aproximação de acoplamento fraco $g|f|^2 \ll 1$, na Equação efetiva (3.11), obtemos

$$i\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \gamma^2 V(z)f + (4 + g|f|^2)f. \quad (3.12)$$

A aproximação de acoplamento forte $g|f|^2 \gg 1$, quando substituída na Equação efetiva (3.11), produz

$$i\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \gamma^2 V(z)f + 3\sqrt{g}|f|f. \quad (3.13)$$

A partir das Equações (3.11), (3.12) e (3.13), podemos perceber que ambas são equações diferenciais parciais e não lineares, que devido a suas formas, soluções exatas são difíceis de serem obtidas. Portanto, faremos um tratamento numérico nestas, utilizando um algoritmo de Crank-Nilcholson em conjunto com o método de propagação em tempo imaginário para encontrar suas respectivas soluções de estado fundamental. A densidade de probabilidade axial $\rho(z)$, pode ser calculada como

$$\rho(z) = \int \int |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dx dy, \quad (3.14)$$

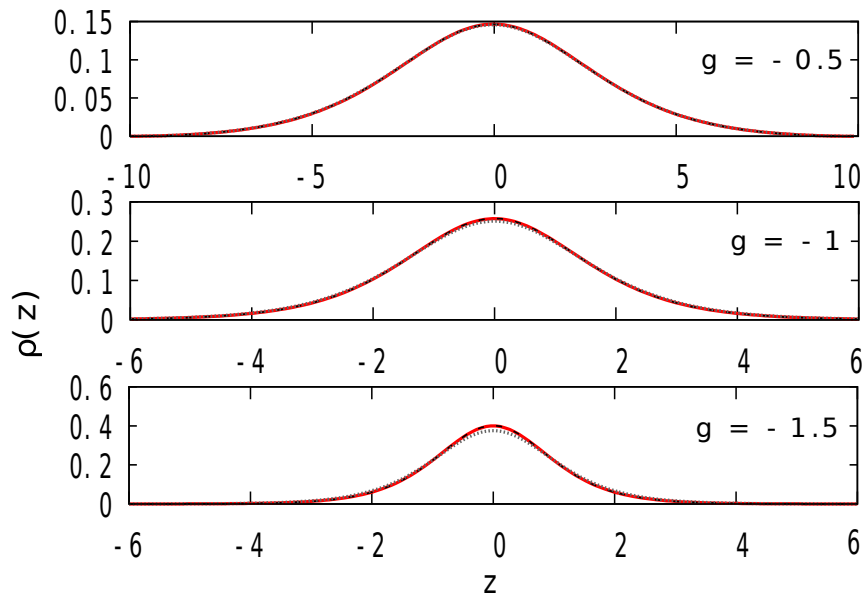


Figura 3.3: Densidade axial $\rho(z)$ do estado fundamental para BECs atrativos ($g < 0$) com potencial axial $V(z) = 0$, para três procedimentos diferentes: a solução numérica da EGP-3D (3.4) em linha sólida vermelha, a solução numérica da Equação efetiva (3.11) em linha tracejada preta, a solução numérica da Equação de acoplamento fraco (3.12) em linha pontilhada cinza.

utilizando a solução de estado fundamental da EGP-3D (3.4) e

$$\rho(z) = |f(z, t)|^2, \quad (3.15)$$

para as soluções de estado fundamental das Equações (3.11), (3.12) e (3.13). O resultado desta comparação está disposto na Figura 3.2. A eficácia de solução de estado fundamental

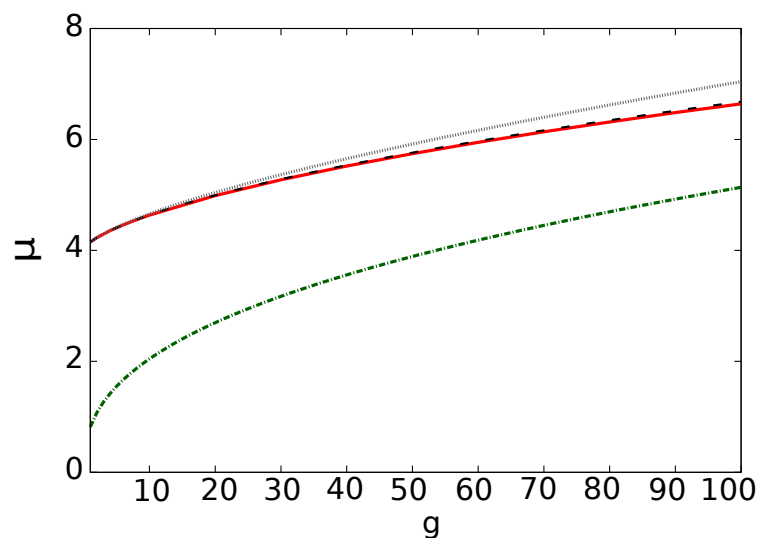


Figura 3.4: Potencial químico de sistemas repulsivos para quatro procedimentos diferentes: μ_{EGP} em linha sólida (vermelha), μ_{EF} em linha tracejada (preta), μ_{FC} em linha pontilhada (cinza) e μ_{FT} em linha ponto-traço (verde escuro).

da Equação efetiva (3.11) também pode ser testada através das quantidades estáticas: μ e $\langle z^2 \rangle$. O potencial químico pode ser calculado utilizando $\psi(\mathbf{r}, t) = \exp[-i\mu_{EGP}t]\psi(\mathbf{r})$ e $f(z, t) = \exp[-i\mu t]f(z)$, resultando em:

$$\mu_{EGP} = \int \left[\frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + \left(\frac{1 + 4r^4}{2r^2} \right) |\psi|^2 + \gamma^2 V(z) |\psi|^2 + 2\pi g |\psi|^4 \right] d\mathbf{r}, \quad (3.16)$$

com $d\mathbf{r} = dx dy dz$, para a solução de estado fundamental da Equação EGP-3D (3.4), a fim de compará-lo com

$$\mu_{EF} = \int \left[\frac{1}{2} \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 + \gamma^2 V(z) |f|^2 + \frac{8 + 3g|f|^2}{\sqrt{4 + g|f|^2}} |f|^2 \right] dz, \quad (3.17)$$

calculado para a solução de estado fundamental da Equação efetiva (3.11),

$$\mu_{FC} = \int \left[\frac{1}{2} \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 + \gamma^2 V(z) |f|^2 + (4 + g|f|^2) |f|^2 \right] dz, \quad (3.18)$$

calculado para a solução de estado fundamental da Equação de acoplamento fraco (3.12) e

$$\mu_{FT} = \int \left[\frac{1}{2} \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 + \gamma^2 V(z) |f|^2 + 3\sqrt{g} |f| |f|^2 \right] dz, \quad (3.19)$$

calculado para a solução de estado fundamental da Equação de acoplamento forte (3.13). O resultado dos valores destas quantidades com o incremento de g está apresentado na Figura 3.4.

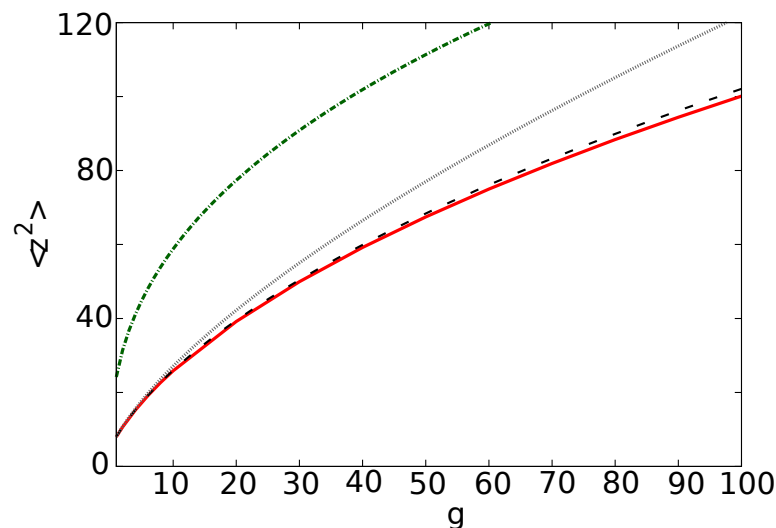


Figura 3.5: Média do comprimento axial quadrático $\langle z^2 \rangle$ para a EGP-3D e suas aproximações. Os valores de $\langle z^2 \rangle$ das Equações (3.4), (3.11), (3.12) e (3.13) estão dispostas nas curvas sólida (vermelha), tracejada (preta), pontilhada (cinza) e ponto-traço (verde escuro), respectivamente.

O comprimento axial quadrático médio $\langle z^2 \rangle$, pode ser calculado por

$$\langle z^2 \rangle = \int z^2 |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{x}^3, \quad (3.20)$$

utilizando a solução do estado fundamental da Equação EGP-3D (3.4), que pode ser comparada com

$$\langle z^2 \rangle = \int z^2 |f(z, t)|^2 dz, \quad (3.21)$$

utilizando a solução do estado fundamental das Equações (3.11), (3.12) e (3.13). Estes resultados estão dispostos na Figura 3.5.

A Equação efetiva (3.11) também se mostra a melhor aproximação para descrever a dinâmica axial da EGP-3D (3.4) a partir do âmbito dinâmico. Podemos mostrar que a solução do estado fundamental da Equação efetiva oscila com um perfil próximo da oscilação da EGP-3D, caso propagamos estas, realizando uma mudança no potencial axial adimensional de $V(z) = \frac{z^2}{2}$ para $V(z) = \frac{1.20z^2}{2}$. Com o intuito de comparar com resultado acima, propagamos da mesma forma as Equações (3.12) e (3.13). O resultados estão mostrados na Figura 3.6.

Os BECs atrativos, assim como mostrado na Figura 3.3, tem sua dinâmica axial descritos de maneira aproximada pela Equação efetiva (3.11). Utilizando do critério VK (2.32) podemos motrar que a EGP-3D (3.4) não possui solução de estado fundamental estável para valores menores que $g_c = -1.53$, enquanto para a Equação efetiva, as soluções de estado fundamental se tornam instáveis para valores menores que $g_c = -2.65$. Esta discrepância entre os valores de g_c é intrínseca ao modelo, isto é, ela é gerada pela natureza da aproximação utilizada e não por erros numéricos. Esta afirmação foi proposta após os algoritmos serem testados em diferentes esquemas, diferentes precisões numéricas,

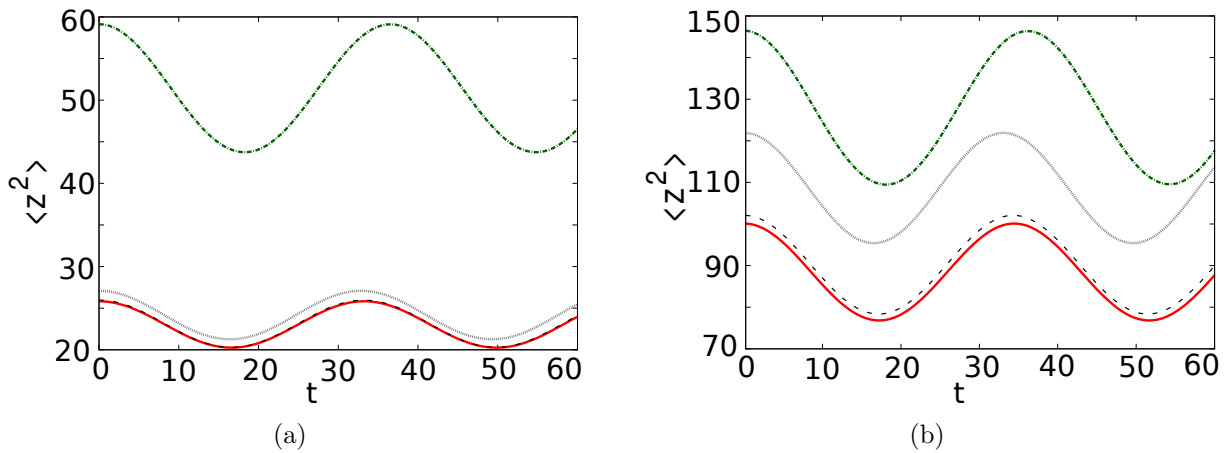


Figura 3.6: Oscilações de $\langle z^2 \rangle$ para quatro procedimentos diferentes: EGP-3D (3.4) em linha sólida (vermelha), a Equação efetiva (3.11) em linha tracejada (preta), a Equação de acoplamento fraco (3.12) em linha pontilhada (cinza) e a Equação de acoplamento forte (3.13) em linha ponto-traço (verde escuro). Em (a) $g = 10$ e (b), $g = 100$.

diferentes linguagens, e resultarem nos mesmos valores.

Podemos notar que, a partir das Figuras 3.2 e 3.3, a densidade de probabilidade que descreve melhor o comportamento da densidade axial da EGP-3D (3.4), é de fato, a densidade da Equação efetiva (3.11) derivada neste Capítulo. Com a análise estática e dinâmica dos parâmetros μ_{ef} e $\langle z^2 \rangle$ da Equação efetiva (3.11), apresentados nas Figuras 3.4, 3.5 e 3.6, observa-se que estes são os parâmetros que estão mais próximos da EGP-3D, mostrando que a solução de estado fundamental da Equação efetiva é a melhor aproximação para a descrição axial da EGP-3D para os BECs em forma de “tubo”, se comparada com as soluções de estado fundamental das Equações (3.12) e (3.13).

MÉTODO DE REDUÇÃO DIMENSIONAL PARA CONDENSADOS EM FORMA DE “ANILHA PLANA”

Neste Capítulo, aplicaremos o MRD proposto anteriormente para os BECs em forma de anilha plana, produzindo uma equação efetiva bidimensional que descreve tanto a dinâmica transversal quanto a dinâmica axial deste modelo. Por fim, apresentaremos e discutiremos as propriedades relacionadas às soluções com vorticidade.

Assim, consideraremos um gás bosônico rarefeito de massa m , a uma temperatura próxima o suficiente do limite de zero Kelvin, no qual o estado de condensação seja descrito aproximadamente pela EGP-3D (1.1), sob a ação de um potencial externo

$$V(\mathbf{r}) = m\omega_z^2 \left(\frac{\alpha^4 + 2z^4}{z^2} \right) + V(r), \quad (4.1)$$

onde α é um parâmetro relacionado a largura axial do aprisionamento e que possui unidade de comprimento, ω_z é a frequência axial e $V(r)$ é um potencial transversal arbitrário. Neste trabalho utilizaremos o confinamento harmônico

$$V(r) = \frac{m\omega_r^2}{2} (x^2 + y^2), \quad (4.2)$$

com $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, como aprisionamento na direção transversal (r), onde o ω_r é a frequência transversal de confinamento. Para realizar a geometria deste modelo, devemos fazer $\omega_z \gg \omega_r$, o que restringe a dinâmica do condensado a um modelo quase bidimensional. Assim, devido a natureza do potencial (4.1) com (4.2), este BEC tem suas partículas distribuídas aproximadamente em forma de uma “anilha plana”. Neste modelo, pode-se realizar a reescala em termos da frequência angular axial ω_z , dada pelas mudanças de coordenadas

$$x \longrightarrow \frac{x}{a_z}, \quad y \longrightarrow \frac{y}{a_z}, \quad z \longrightarrow \frac{z}{a_z},$$

$$t \longrightarrow \omega_z t, \quad \psi \longrightarrow a_z^{3/4} \psi, \quad g \longrightarrow 2\mathcal{N} \frac{a_s}{a_z}, \quad \alpha \longrightarrow \frac{\alpha}{a_z}, \quad (4.3)$$

com $a_z = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_z}}$, o que reescreve a EGP-3D (1.1) na forma de

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{1}{2} \nabla^2 \psi + \lambda^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) \psi + \left(\frac{\alpha^4 + 2z^4}{z^2} \right) \psi + 2\pi g |\psi|^2 \psi, \quad (4.4)$$

onde $\lambda = \frac{\omega_z}{\omega_r}$ é um parâmetro de anisotropia do potencial externo. Por simplicidade faremos $\alpha = 1$, uma vez que este parâmetro não modifica a dinâmica do modelo.

A densidade lagrangiana reescalada da Equação (4.4) pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \nabla \psi \cdot \nabla \psi^* - \lambda^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) |\psi|^2 - \left(\frac{1 + 2z^4}{z^2} \right) |\psi|^2 - \pi g |\psi|^4. \quad (4.5)$$

Portanto, podemos encontrar o *ansatz* apropriado, como foi feito anteriormente, resolvendo a equação diferencial da parte axial (z) com $g \simeq 0$, o que resulta em

$$\psi_z(z, t) = z^2 \exp \left[-z^2 - i\mu_z t \right], \quad (4.6)$$

com $\mu_z = 5$. Assim, seguindo o MRD podemos inferir, a partir da Equação (4.6), que um *ansatz* apropriado pode ser escrito na forma de

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{4(2/\pi)^{1/4}}{\sqrt{3}} \frac{z^2 \exp \left[-\frac{z^2}{\nu^2} \right]}{\nu^{5/2}} \Phi, \quad (4.7)$$

onde $\nu = \nu(x, y, t)$ é a largura axial da função de onda e $\Phi = \Phi(x, y, t)$ é uma função complexa que descreve o comportamento transversal da função de onda da EGP-3D (4.4). Vale salientar que a Equação (4.7) está normalizada a unidade na direção axial, isto é, $\int |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dz = |\Phi|^2$. Logo, substituindo o *ansatz* fatorizado e normalizado (4.7) na

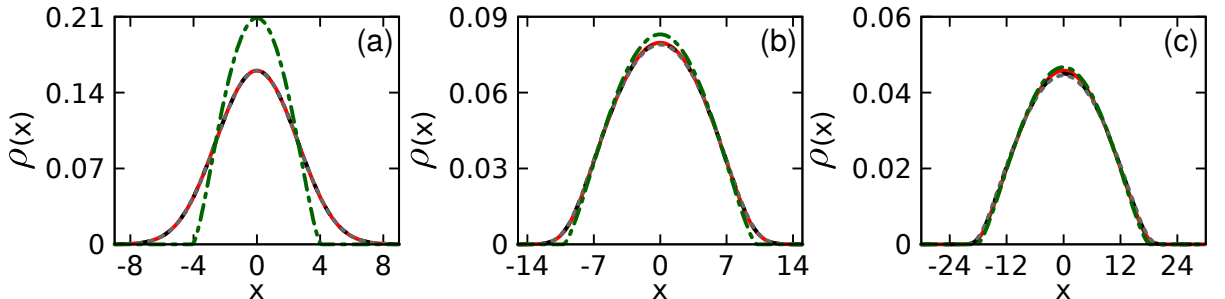


Figura 4.1: Densidade transversal $\rho(x)$ do estado fundamental para BECs repulsivos ($g > 0$), para quatro procedimentos diferentes: a solução numérica da EGP-3D (4.4) em linha sólida (vermelha), a solução numérica da Equação efetiva (4.9) em linha tracejada (preta), a solução numérica da Equação de acoplamento fraco (4.12) em linha pontilhada (cinza) e a solução numérica da Equação de acoplamento forte (4.13) em linha ponto-traço (verde escuro). Em (a), $g = 1$, em (b), $g = 40$ e em (c), $g = 400$, com $\lambda = 0.1$.

densidade lagrangiana (4.5), integrado com respeito a coordenada axial z e utilizando a aproximação adiabática $\left(\frac{\partial\nu}{\partial x} = \frac{\partial\nu}{\partial y} = 0\right)$, obtém-se a densidade lagrangiana efetiva

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef}(\Phi, \Phi^*, \sigma) = & \frac{i}{2} \left(\Phi^* \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \Phi \frac{\partial\Phi^*}{\partial t} \right) - \frac{5}{2} \left[\nu^2 + \frac{1}{\nu^2} \right] |\Phi|^2 - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right|^2 \\ & - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right|^2 - \lambda^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) |\Phi|^2 - \frac{35\sqrt{\pi}g|\Phi|^4}{48\nu}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

que a partir do princípio de Hamilton produz as seguintes Equações de Euler-Lagrange:

$$i \frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \right) + \lambda^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) \Phi + \frac{5}{2} \left(\nu^2 + \frac{1}{\nu^2} \right) \Phi + \frac{35g\sqrt{\pi}|\Phi|^2\Phi}{24\nu}, \quad (4.9)$$

e

$$\nu^4 - \frac{7\sqrt{\pi}}{48} g |\Phi|^2 \nu - 1 = 0. \quad (4.10)$$

A Equação algébrica (4.10) pode ser resolvida exatamente por meio da formula de Cardano, apresentando

$$\nu = \pm \frac{\sqrt{6}}{24} P + \frac{\sqrt{6}}{24} \sqrt{\frac{-PK^{2/3} + 768P \pm 14g|\Phi|^2\sqrt{\pi}\sqrt{6}K^{1/3}}{PK^{1/3}}}, \quad (4.11)$$

com

$$K = 147\pi g^2 |\Phi|^4 + 3\sqrt{50331648 + 2401\pi^2 g^4 |\Phi|^8}$$

e

$$P = \sqrt{\frac{K^{2/3} - 768}{K^{1/3}}}.$$

O sinal superior e inferior da Equação (4.11) se referem respectivamente a $g > 0$ e $g < 0$.

A ESNP-2D (4.9) é o principal resultado deste Capítulo, em que mostraremos

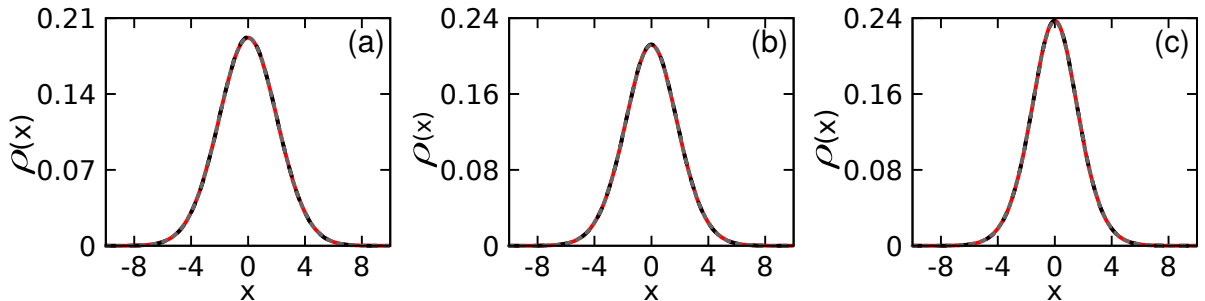


Figura 4.2: Densidade transversal $\rho(x)$ do estado fundamental para BECs atrativos ($g < 0$), para três procedimentos diferentes: a solução numérica da EGP-3D (4.4) em linha sólida (vermelha), a solução numérica da Equação efetiva (4.9) em linha tracejada (preta) e a solução numérica da Equação de acoplamento fraco (4.12) em linha pontilhada (cinza). Em (a), $g = -0.5$, em (b), $g = -1$ e em (c), $g = -1.4$, com $\lambda = 0.1$.

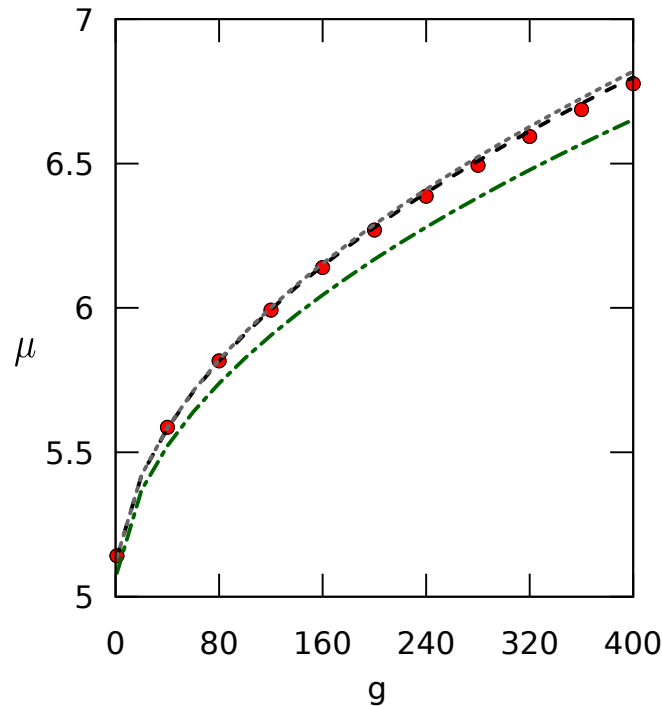


Figura 4.3: Potencial químico adimensional calculado com os estados fundamentais das Equações: EGP-3D (4.4) em linha sólida (vermelha), Equação efetiva (4.9) em linha tracejada (preta), Equação de acoplamento fraco (4.12) em linha pontilhada (cinza) e da Equação de acoplamento forte (4.13) em linha ponto-traço (verde escuro), com $\lambda = 0.1$.

sua eficácia em descrever a dinâmica dos BECs em forma de “anilha plana”. Portanto, afim de evidenciar a validade da desta Equação efetiva, podemos realizar a aproximação de baixas densidades, admitindo $g|\Phi|^2 \ll 1$ em (4.9), o que resulta em uma ESNL-2D com não linearidade cúbica :

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) + \lambda^2\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)\Phi + \left(5 + \frac{35g\sqrt{\pi}}{24}|\Phi|^2\right)\Phi. \quad (4.12)$$

Por outro lado, para sistemas com altas densidades e fortemente interagentes, podemos utilizar a aproximação de Thomas-Fermi bidimensional (TF-2D) para a sua descrição. Assim, substituindo o *ansatz* (4.7) com $\nu = 1$ na EGP-3D, desconsiderando a parte cinética, devido à forte interação de seus constituintes, e integrando em relação a coordenada axial, obtemos:

$$|\Phi|^2 = \frac{27}{160} \frac{\sqrt{6}(2\mu - 10 - \lambda^2(x^2 + y^2))}{g\sqrt{\pi}}, \quad (4.13)$$

onde μ é o potencial químico adimensional que pode ser determinado a partir da condição de normalização. A expressão (4.13) só tem validade Física quando $|\Phi|^2 > 0$, podendo ser chamada de solução compacta. As Equações diferenciais (4.9) e (4.12), devido aos

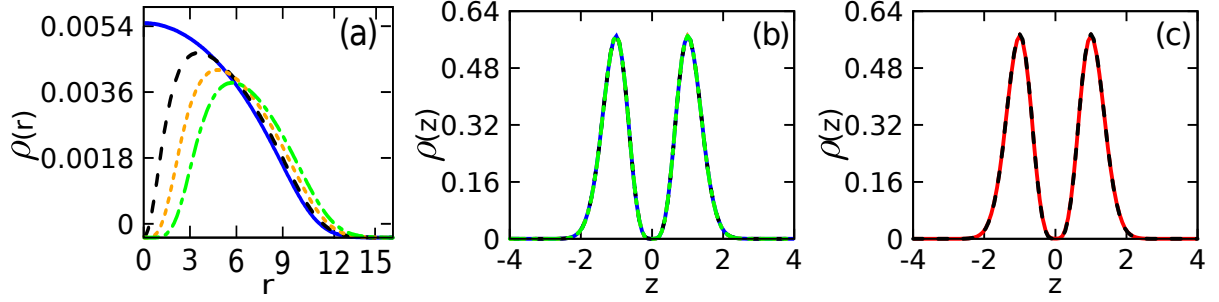


Figura 4.4: (a) Densidade transversal $\rho(r)$ do estado fundamental da Equação efetiva (4.21) para quatro valores de vorticidade: $S = 0$ em linha sólida (azul), $S = 1$ em linha tracejada (preta), $S = 2$ em linha pontilhada (laranja) e a $S = 3$ em linha ponto-traço (verde), com $g = 50$ e $\lambda = 0.1$. (b) Os mesmo procedimento de (a) com a densidade axial $\rho(z)$. (c) Densidade axial $\rho(z)$ dos estados fundamentais das Equações: EGP-3D (4.23) em linha sólida (vermelha) e (4.21) em linha pontilhada (preta), com $g = 1$, $S = 2$ e $\lambda = 0.1$.

termos não lineares, são expressões difíceis de serem resolvidas exatamente, sendo tratadas na maioria das vezes de forma numérica. Assim, podemos utilizar um algoritmo de Crack-Nilcholson em conjunto com o método de propagação em tempo imaginário para encontrar suas respectivas soluções de estado fundamental. Para realizar a comparação entre os perfis das equações bidimensionais e tridimensionais utilizaremos a densidade de probabilidade transversal, definidas a partir do estado fundamental da EGP-3D (4.4),

$$\rho(r) = \int |\psi(\mathbf{r})|^2 dz, \quad (4.14)$$

$$\rho(x) = \int |\psi(\mathbf{r})|^2 dz dy, \quad (4.15)$$

a qual podem ser comparadas com as densidades transversais das equações 2D na forma de

$$\rho(r) = |\Phi(r)|^2, \quad (4.16)$$

$$\rho(x) = \int |\Phi(r)|^2 dy, \quad (4.17)$$

Os resultados destas comparações estão expressos nas Figuras 4.1 e 4.2, onde percebe-se que a melhor aproximação para descrever a dinâmica transversal do condensado em forma de “anilha plana”, é de fato, a Equação efetiva (4.9). Nota-se também que a acurácia da Equação efetiva diminui com o incremento positivo de g , o que já era esperado devido a natureza do *ansatz* inicial (4.7).

Uma alternativa para medir a eficácia da Equação efetiva (4.9), é calcular o potencial químico (μ) utilizando os estados fundamentais da Equações bidimensionais, substituindo $\Phi(r, t) = \exp[-i\mu t]\Phi(r)$ em (4.9), (4.12) e comparar com o potencial químico do estado fundamental da EGP-3D (4.4), calculado a partir de $\psi(\mathbf{r}, t) = \exp[-i\mu t]\psi(\mathbf{r})$. Na Figura 4.3 estão dispostos os resultados desta comparação, onde pode-se observar que o potencial químico calculado a partir do estado fundamental da Equação efetiva (4.9)

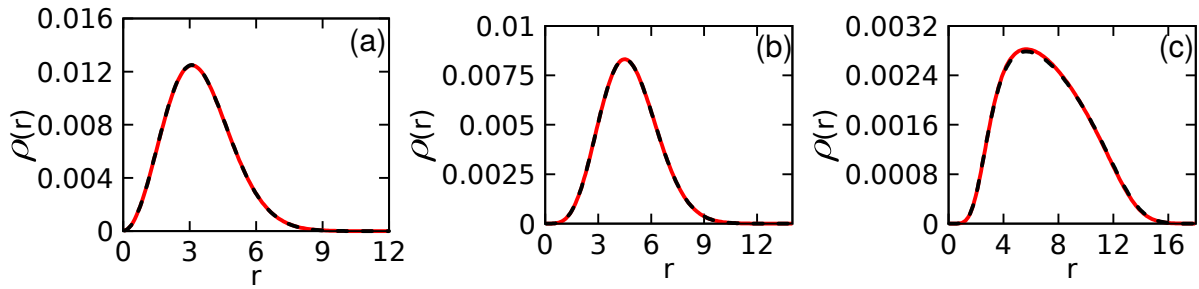


Figura 4.5: Densidade transversal $\rho(r)$ dos estados fundamentais das Equações: EGP-3D (4.23) que está em linha sólida (vermelha) e da Equação efetiva (4.21) que está em linha pontilhada (preta), com $\lambda = 0.1$. Em (a), $g = -1$ e $S = 1$, em (b), $g = 1$ e $S = 2$, em (c), $g = 100$ e $S = 3$.

é a quantidade que melhor descreve o comportamento do potencial químico da EGP-3D (4.4), evidenciando a precisão da Equação efetiva bidimensional em descrever o modelo tridimensional proposto.

Ainda que a Equação efetiva não possua dependências na direção axial z , esta carrega consigo informações do perfil axial, devido ao método variacional de redução dimensional, que podem prever a dinâmica da axial da EGP-3D dada por

$$\rho(z) = 2\pi \int |\psi(\mathbf{r})|^2 r dr, \quad (4.18)$$

fazendo

$$\rho(z) = \frac{32\sqrt{2\pi}}{3} \int \frac{z^4 \exp\left(-2z^2/\nu^2\right)}{\nu^5} |\Phi(r)|^2 r dr. \quad (4.19)$$

onde $\Phi(r)$ é a solução do estado fundamental da Equação (4.9). Os resultados estão dispostos na Figura 4.4 (c), onde nota-se que a densidade axial da Equação efetiva (4.9) está em acordo com a densidade axial da EGP-3D (4.4). Este resultado mostra que a partir da Equação efetiva bidimensional derivada pelo MRD, podemos descrever satisfatoriamente toda a dinâmica do condensado em forma de “anilha plana”.

As equações bidimensionais nos permitem estudar as propriedades das soluções que possuem vorticidade. Portanto, a fim de testar a capacidade desta Equação efetiva em descrever a dinâmica dos BECs em forma de “anilha plana” sob a variação de momento angular do sistema, podemos introduzir

$$\Phi(r, \theta, t) = \phi(r, t) \exp[iS\theta], \quad (4.20)$$

na Equação efetiva (4.9) em coordenadas cilíndricas adimensionais, resultando em

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] + \frac{S^2}{2r^2} \phi + \frac{\lambda^2 r^2}{2} \phi + \frac{5}{2} \left(\frac{1}{\nu^2} + \nu^2 \right) \phi + \frac{35g\sqrt{\pi}}{24\nu} |\phi|^2 \phi, \quad (4.21)$$

e

$$\psi(r, \theta, z, t) = \Psi(r, z, t) \exp[iS\theta], \quad (4.22)$$

na EGP-3D (4.4) em coordenadas cilíndricas, o que produz

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right] + \frac{S^2}{2r^2} \Psi + \left(\frac{\lambda^2 r^2}{2} + \frac{1 + 2z^4}{z^2} \right) \Psi + 2\pi g |\Psi|^2 \Psi, \quad (4.23)$$

onde S é um número inteiro chamado de vorticidade. Os resultados das comparações entre as soluções com vorticidade estão apresentados na Figuras 4.5. Nota-se que a densidade transversal proveniente Equação efetiva (4.9) concorda com o resultado da EGP-3D (4.4) para diferentes valores de S , mostrando que a Equação efetiva descreve satisfatoriamente a dinâmica transversal dos estados com vorticidade do condensado em forma de anilha plana tanto para modelos atrativos quanto para modelos repulsivos. Vale notar que na Figura 4.4 (a), pode-se observar que há uma grande variação da densidade transversal da Equação efetiva (2.57) com o aumento de S , diferente dos perfis axiais que não apresentam variações relevantes, mostrados na Figura 4.4 (b).

Nos modelos atrativos, isto é, $g < 0$, encontramos pontos de colapso da função de onda tanto na EGP-3D (4.4) quanto na Equação efetiva (4.9). Estes pontos são caracterizados por valores de g_c , que a partir deles, não há soluções de estado fundamental estáveis para os modelos. Para realizar esta análise foi utilizado o critério de VK, assim como foi feito nos capítulos anteriores. Neste contexto, encontramos $g_c = -2.14$ para a Equação efetiva e $g_c = -1.42$ para a EGP-3D.

A partir da análise dos resultados apresentados nas Figuras 4.1, 4.2 e 4.5, onde pode-se observar os perfil transversais e axiais das Equações (4.4), (4.9), (4.12) e (4.13), podemos constatar que a Equação efetiva bidimensional descreve toda a dinâmica dos BECs em forma de “anilha plana” de maneira satisfatória. Esta afirmação fica ainda mais concreta a partir das Figuras 4.3 que apresenta o potencial químico calculado com o estado fundamental da EGP-3D e suas aproximações, que reafirma a capacidade da Equação efetiva em descrever o modelo proposto.

CONCLUSÕES

Apesar dos BECs serem descritos por uma equação diferencial parcial e não linear com três dimensões espaciais (EGP-3D), que exige um grande esforço computacional para ser resolvida numericamente, podemos utilizar métodos que derivam equações diferenciais que reproduzem de forma aproximada a dinâmica destes sistemas com um número de dimensões espaciais menores, facilitando assim os cálculos numéricos.

Neste trabalho, mostramos que o MRD aplicado aos BECs em forma de “charuto” e “panqueca”, produz Equações efetivas 1D e 2D respectivamente, que descrevem de maneira precisa o comportamento axial e transversal destes modelos. Vimos que tanto a Equação efetiva 1D, quanto a Equação efetiva 2D, não possuem soluções de estado fundamental estáveis para todo o espectro de $g < 0$. Nestes casos, o valor em que este fenômeno ocorre (g_c) para a Equação efetiva, encontra-se próximo do g_c da EGP-3D, mostrando a acurácia da mesma para todos os valores de estabilidade g . Aplicamos o MRD para os BECs em forma de tubo, produzindo uma equação diferencial não linear efetiva que descreve o comportamento axial do modelo com precisão. Através da análise das densidades de probabilidades axiais, potencial químico e do comprimento axial médio quadrático, percebemos que a Equação efetiva é a melhor aproximação, tanto no âmbito estático, quanto dinâmico. Ainda que todos os resultados obtidos a respeito da Equação efetiva (3.11) estavam de acordo com a dinâmica axial da EGP-3D (3.4), os seus respectivos valores de g_c 's apresentaram certa discordância, onde obtemos $g_c = -2.65$ e $g = -1.53$ respectivamente. Este fato, nos leva a concluir que a Equação efetiva reproduz o comportamento axial do modelo para todos os valores em que g é estável para a EGP-3D, que deve ser limitado aos casos com $g > -1.53$.

Por último, aplicamos o MRD com abordagem variacional aos BECs em forma de “anilha plana”, onde foi possível derivar uma Equação efetiva 2D (4.9), que por meio da análise das densidades de probabilidades axiais, transversais e do potencial químico, constatamos que ela é a melhor aproximação para descrever a dinâmica tridimensional do modelo. Assim como nos BECs em forma de “tubo”, encontramos pontos de colapso da função de onda discordantes, com valores de $g_c = -2.14$ para a Equação efetiva

bidimensional e $g = -1.42$ para a EGP-3D (4.4). Além disso, devido a dinâmica bidimensional da Equação efetiva, pudemos estudar o efeito da introdução de vorticidade nas EGP-3D e na Equação efetiva 2D, onde mais uma vez, a dinâmica do BECs em forma de “anilha plana”, foi descrita completamente pela Equação efetiva 2D.

A partir dos resultados dos modelos anteriores, podemos inferir que o desacordo entre os valores dos g'_s das Equações efetivas 1D (3.11) e 2D (4.9) com suas respectivas EGP's (3.4) e (4.4), estão relacionados a natureza divergentes dos potenciais externos referêntes aos BECs em forma de “tubo” e “anilha plana”. É importante salientar que até o momento não há estudos teóricos a respeito de Equações efetivas para estes modelos na literatura. Visto o sucesso do método aplicado aos modelos estudados, espera-se que este possa produzir um vasto número de Equações efetivas 1D e 2D, descrevendo a dinâmica de várias geometrias diferentes de BECs.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] J. S. RUSSEL, *Report on Waves, Report of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science* (John Murray, London, 1844).
- [2] F. Chalub and J. Zubelli, *Sólitos: na crista da onda por mais de 100 anos*, Informes de matemática (Inst. de Matemática Pura e Aplicada, 2001).
- [3] D. D. J. Korteweg and D. G. de Vries, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **39**, 422 (1895).
- [4] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 240 (1965).
- [5] B. Tian and Y.-T. Gao, *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* **22**, 351 (2001).
- [6] M. Remoissenet, *Waves called solitons: concepts and experiments* (Springer Science & Business Media, 2013).
- [7] R. K. Dodd, H. C. Morris, J. Eilbeck, and J. Gibbon, London and New York, Academic Press, 1982, 640 p. (1982).
- [8] R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev. D* **13**, 3398 (1976).
- [9] L. Khaykovich, *Science* **296**, 1290 (2002).
- [10] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. Van Druten, D. Durfee, D. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [11] C. C. Bradley, C. Sackett, J. Tollett, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
- [12] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).
- [13] S. Bose, *Z. Phys* **26**, 178 (1924).
- [14] A. Einstein, *Physikalisch-Mathematische Klasse* **261** (1924).
- [15] F. London, *Nature* **141**, 643 (1938).

- [16] N. Bogoliubov, *J. Phys* **11**, 23 (1947).
- [17] L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein condensation and superfluidity*, Vol. 164 (Oxford University Press, 2016).
- [18] A. Robert, O. Sirjean, A. Browaeys, J. Poupard, S. Nowak, D. Boiron, C. I. Westbrook, and A. Aspect, *Science* **292**, 461 (2001).
- [19] F. P. Dos Santos, J. Léonard, J. Wang, C. Barrelet, F. Perales, E. Rasel, C. Unnikrishnan, M. Leduc, and C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3459 (2001).
- [20] H. Feshbach, *Annals of Physics* **19**, 287 (1962).
- [21] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. Carr, Y. Castin, and C. Salomon, *Science* **296**, 1290 (2002).
- [22] M. Ma and Z. Huang, *Applied Mathematics Letters* **26**, 718 (2013).
- [23] R. Fedele, B. Eliasson, F. Haas, P. K. Shukla, D. Jovanović, and S. De Nicola, in *AIP Conference Proceedings*, Vol. 1306 (AIP, 2010) pp. 61–74.
- [24] A. M. Mateo and V. Delgado, *Phys. Rev. A* **77**, 013617 (2008).
- [25] L. Salasnich, A. Parola, and L. Reatto, *Phys. Rev. A* **65**, 043614 (2002).
- [26] A. Jackson, *Phys. Rev. A* **58**, 2417 (1998).
- [27] P. Massignan, *Phys. Rev. A* **67**, 023614 (2003).
- [28] A. Kamchatnov and V. Shchesnovich, *Phys. Rev. A* **70**, 023604 (2004).
- [29] H. L. Couto, A. T. Avelar, and W. B. Cardoso, *Annalen der Physik* **530**, 1700352 (2018).
- [30] W. Zhang and L. You, *Phys. Rev. A* **71**, 025603 (2005).
- [31] L. Salasnich, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **42**, 335205 (2009).
- [32] L. Salasnich and S. Adhikari, *Acta Physica Polonica, A.* **128** (2015).
- [33] L. Salasnich, in *Quodons in Mica* (Springer, 2015) pp. 455–472.
- [34] L. Salasnich and B. A. Malomed, *Phys. Rev. A* **79**, 053620 (2009).
- [35] L. Salasnich and B. A. Malomed, *Phys. Rev. A* **87**, 063625 (2013).
- [36] L. Salasnich, W. B. Cardoso, and B. A. Malomed, *Phys. Rev. A* **90**, 033629 (2014).
- [37] W. B. Cardoso, A. Avelar, and D. Bazeia, *Phys. Rev. E* **83**, 036604 (2011).

-
- [38] N. Vakhitov, Radiophys. Quantum Electron. **16**, 783 (1973).
- [39] S. K. Adhikari, B. Malomed, L. Salasnich, and F. Toigo, Phys. Rev. A **81**, 053630 (2010).
- [40] C. A. Buitrago and S. K. Adhikari, Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics **42**, 215306 (2009).