

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

EDWIN OSWALDO SALINAS REYES

**Superfícies mínimas de Laguerre e
geometria isotrópica**

Goiânia
2016

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):		Edwin Oswaldo Salinas Reyes			
E-mail:		eosalinasr@correo.udistrital.edu.co			
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não					
Vínculo empregatício do autor					
Agência de fomento:		Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e tecnológico		Sigla:	CNPq
País:	Brasil	UF:		CNPJ:	
Título: Superfícies mínimas de Laguerre e geometria isotrópica					
Palavras-chave: Transformações e superfícies de Legendre, métrica dual.					
Título em outra língua: Surface minimal of Laguerre and geometry isotropic					
Palavras-chave em outra língua:					
Área de concentração: Geometria					
Data defesa: (dd/mm/aaaa)		29/02/2016			
Programa de Pós-Graduação:		Mestrado em matemática			
Orientador (a):		Dr. Armando Mauro Vasquez Corro			
E-mail:		avcorro@gmail.com			
Co-orientador (a):*					
E-mail:					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

EDWIN SALINAS

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 04 / 03 / 2016.

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

EDWIN OSWALDO SALINAS REYES

Superfícies mínimas de Laguerre e geometria isotrópica

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de matemática e estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria diferencial.

Orientador: Prof. Armando Mauro Vasquez Corro

Goiânia
2016

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Salinas Reyes, Edwin Oswaldo
Superfícies mínimas de Laguerre e geometria isotrópica [manuscrito] /
Edwin Oswaldo Salinas Reyes. - 2016.
LXV, 65 f.

Orientador: Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de
Matemática e Estatística (IME) , Programa de Pós-Graduação em
Matemática, Goiânia, 2016.


Inclui gráfico, tabelas.

1. Transformações de Legendre. 2. Espaço isotrópico. 3. Geometria de
Laguerre. I. Vasquez Corro, Armando Mauro, orient. II. Título.

EDWIN OSWALDO SALINAS REYES

**SUPERFÍCIES MÍNIMAS DE LAGUERRE E GEOMETRIA
ISOTRÓPICA**


Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 29 de fevereiro de 2016, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro
Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Levi Rosa Adriano
Instituto de Matemática e Estatística - UFG



Prof. Dr. Carlos Maber Carrion Riveros
Departamento de Matemática - UnB

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Edwin Oswaldo Salinas Reyes

Graduou-se em Matemáticas na UDFJC - Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Durante sua graduação, foi monitor acadêmico no departamento de Matemáticas da UDFJC. Durante o Mestrado, na UFG- Universidade Federal de Goiás, foi bolsista do CNPq.

Aos meus pais Rafael Salinas e Martha Reyes.

Agradecimentos

A meu orientador, professor Dr. Armando Mauro Vasquez Corro, pelo seu apoio incentivo e pelas horas dedicadas para a realização deste trabalho.

Ao Instituto de Matemática e Estatística-(IME) por permitir-me estudar no programa de mestrado e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-(CNPq) pelo apoio financeiro para a realização desta dissertação.

A todos os colegas e professores da pós-graduação em matemática pelo convívio e aprendizado.

À minha família, a qual amo muito, pelo carinho, paciência e incentivo.

Aos amigos que fizeram parte desses momentos sempre me ajudando e incentivando.

A matemática é a única ciência exata em que nunca se sabe do que se está a falar nem se aquilo que se diz é verdadeiro.

Bertrand Russell ,
18 de Maio de 1872 - 2 de Fevereiro de 1970.

Resumo

Salinas Reyes, Edwin Oswaldo. **Superfícies mínimas de Laguerre e geometria isotrópica**. Goiânia, 2016. 65p. Dissertação de Mestrado. Instituto de matemática e estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho nos referimos ao estudo de um novo método de desenvolvimento de superfícies mínimas de Laguerre vista no modelo isotrópico da geometria de Laguerre como o gráfico de funções bi-harmônicas. Desenvolvemos a geometria isotrópica a qual estuda as propriedades geométricas invariantes por certas transformações afines no espaço Euclidiano, os elementos fundamentais da geometria de Laguerre as quais são esferas e planos orientados e as propriedades as quais são invariantes sobre as transformações de Laguerre. Além disso, mostraremos uma relação fechada entre superfícies mínimas de Laguerre do tipo esférico e superfícies mínimas isotrópicas as quais são dadas pelo gráfico de funções harmônicas e superfícies mínimas Euclidianas. Finalmente, a métrica dual no espaço isotrópico é utilizada para desenvolver uma contrapartida isotrópica de superfícies mínimas de Laguerre em certas transformações de Lie de superfícies mínimas de Laguerre no espaço Euclidiano.

Palavras-chave

Geometria isotrópica, geometria de Laguerre, superfícies mínimas de Laguerre e isotrópica, funções bi-harmônicas, Transformações e superfícies de Legendre, métrica dual.

Abstract

Salinas Reyes, Edwin Oswaldo. **Laguerre geometry surfaces and isotropic geometry**. Goiânia, 2016. 65p. MSc. Dissertation. Instituto de matemática e estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work we refer to the study of a new method and simple approach to minimal surface Laguerre in isotropic model of Laguerre geometry as the bi-harmonic function graph. We developed the isotropic geometry which studies the geometric properties invariant under certain affine transformations in Euclidean space, and the fundamental elements of Laguerre geometry which are spheres orienteds and plans orienteds, and properties which are invariant on the transformation of Laguerre. In addition, we will show a close relationship between minimal surfaces Laguerre spherical type and isotropic minimal surfaces which are given by the graph of harmonic functions and minimal Euclidean surfaces. Finally, the duality metric in the isotropic space is used to develop an isotropic exchange for minimal surfaces Laguerre in certain Lie transformation of Laguerre minimal surfaces in Euclidean space.

Keywords

Isotropic geometry, Laguerre geometry, minimal surfaces Laguerre and isotropic, bi-harmonic functions, transformations and surfaces Legendre, dual metric.

Sumário

1	Preliminares.	12
1.1	Superfícies no espaço Euclidiano.	12
1.2	Funções harmônicas e bi-harmônicas.	14
1.3	Geometria isotrópica.	17
1.3.1	Movimentos e métrica.	17
1.3.2	Teoria da curvatura das superfícies.	27
1.3.3	Métrica dual em I^3 .	31
1.3.4	Transformações de esferas isotrópicas.	32
1.4	Geometria de Laguerre.	34
1.4.1	Modelo ciclográfico da geometria de Laguerre.	36
1.4.2	Espaço de Minkowski.	39
1.4.3	O modelo isotrópico da geometria de Laguerre.	42
2	Superfícies L-mínimas no modelo isotrópico.	45
2.1	Superfícies L-mínimas.	45
2.1.1	Transformações e superfícies de Legendre.	47
2.1.2	Representação em coordenadas complexas.	51
2.2	Superfícies L-mínimas no modelo isotrópico da geometria de Laguerre.	53
2.3	Superfícies mínimas de Laguerre do tipo esférico.	57
	Referências Bibliográficas	64

Introdução

É natural questionar pelos minimizadores de energias geométricas, os quais são invariantes sobre certas transformações afines de facilitar os estudos de determinada área relacionada com a geometria. A energia mais simples deste tipo foi introduzida por Blaschke [2]. Usando a curvatura média H , Curvatura Gaussiana K e o elemento de área de superfície dA de uma superfície Φ no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 . Esta energia pode ser escrita como a integral de superfície:

$$\Omega = \int_{\Phi} \frac{(H^2 - K)}{K} dA, \quad (0-1)$$

embora as quantidades H , K não são objetos utilizados na Geometria de Laguerre.

O funcional Ω e seus minimizadores locais, são conhecidos como superfícies mínimas de Laguerre as quais são invariantes sobre as transformações de Laguerre.

Nos últimos anos houve um grande interesse no estudo da geometria das superfícies de Laguerre (representação da superfície por meio de seus planos tangentes), principalmente desde o ponto de vista local, foi apresentada mais de uma forma de representar as superfícies mínimas de Laguerre em \mathbb{R}^3 .

A geometria diferencial nas três geometrias esféricas clássicas (Möbius, Laguerre e Lie) é o objeto de estudo de Blaschke do volume três da geometria diferencial [2].

Muitos resultados das superfícies mínimas de Laguerre são encontrados nos trabalhos de Blaschke [2], [1], [17] e em os artigos de seu aluno Koning [7], [6].

Recentemente, Estes trabalhos encontram interesse na geometria diferencial. Musso e Nicolodi encontram todas as superfícies mínimas de Laguerre as quais são envelopes de uma família de um parâmetro de esferas [8] e estudo geral de superfícies mínimas de Laguerre por meio de marcos móveis [9].

A Geometria de Laguerre é a geometria de planos e esferas orientadas no espaço Euclidiano de dimensão 3 [2].

Futuras aplicações da geometria de Laguerre em geometria computacional e o conjunto de superfícies de desenvolvimento [11] e [14].

A geometria isotrópica sistematicamente tem-se desenvolvido por Strubecker [5] em 1940. Existem inúmeros trabalhos puramente geométricos sobre geometria isotrópica,

a maioria dos quais são cobertos na monografia por Sachs [15]. Recentemente, Pottmann e Liu [13] estudou a geometria discreta isotrópica de superfícies com aplicações em projeto arquitetônico.

O presente trabalho pretende alcançar uma relação entre as superfícies mínimas de Laguerre diferenciáveis com as superfícies dadas pelos gráficos de funções bi-harmônicas.

A chave para obter esta nova relação entre as superfícies mínimas de Laguerre e as funções bi-harmônicas é dada pelo modelo esférico da geometria de Laguerre a qual é formulada com a ajuda da geometria isotrópica.

Descreveremos no capítulo 2 os fundamentos da geometria clássica tais como a relação entre a geometria de Laguerre e a geometria isotrópica.

Nossa principal referência para este trabalho é o artigo Laguerre Minimal Surfaces, Isotropic Geometry and Linear Elasticity de Helmut Pottmann, Philipp Grohs e Niloy J. Mitra [12].

Preliminares.

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e fatos básicos que serão utilizados no decorrer do trabalho. Maiores detalhes poderão ser encontrados nas referências citadas ao longo do capítulo.

1.1 Superfícies no espaço Euclidiano.

Denota-se por \mathbb{R}^3 o espaço Euclidiano e por (x_1, x_2, x_3) suas coordenadas.

Definição 1.1 *Seja S um subconjunto não vazio de \mathbb{R}^3 . Diz-se que S é uma **superfície regular** se, para cada $p \in S$ existem uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^3$ de p , um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e um homeomorfismo diferenciável $X : U \rightarrow V \cap S$ tal que a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora para todo $q \in U$.*

A aplicação X é chamada uma parametrização de S .

Definição 1.2 *Um **vetor tangente** a um ponto $p \in S$ é um vetor tangente a uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto de todos os*

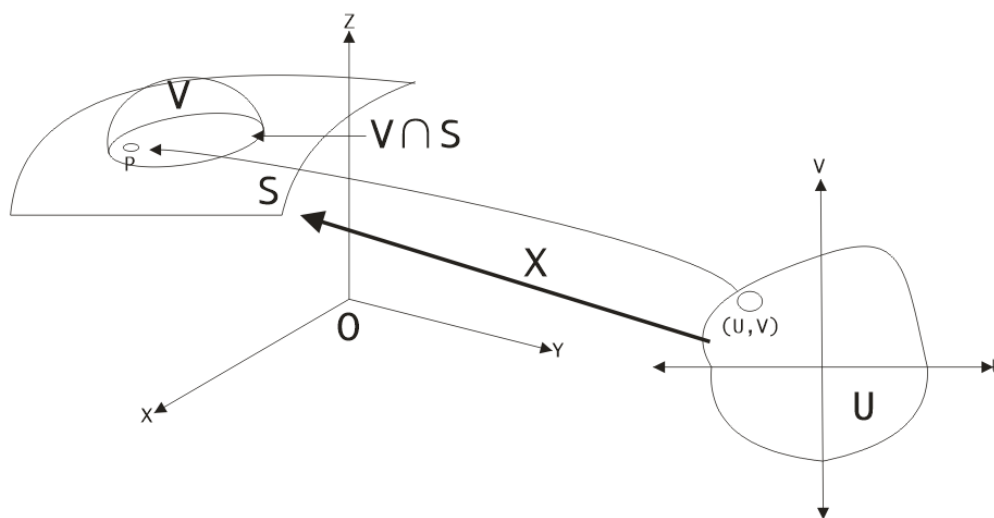


Figura 1.1: Superfície regular.

vetores tangentes a S em p , denotado por T_pS é chamado de **plano tangente** a S em p . Se X é uma parametrização de S em p , então T_pS coincide com o subespaço vetorial gerado por $\left\{\frac{\partial X}{\partial x_i}; i = 1, 2.\right\}$, onde $p = X(q)$. Diz-se que S é **orientável** se for possível determinar um campo vetorial diferenciável unitário N normal a T_pS para cada $p \in S$. Neste caso, diz-se que N é a **aplicação normal de Gauss** de S e que tal campo determina uma orientação em S .

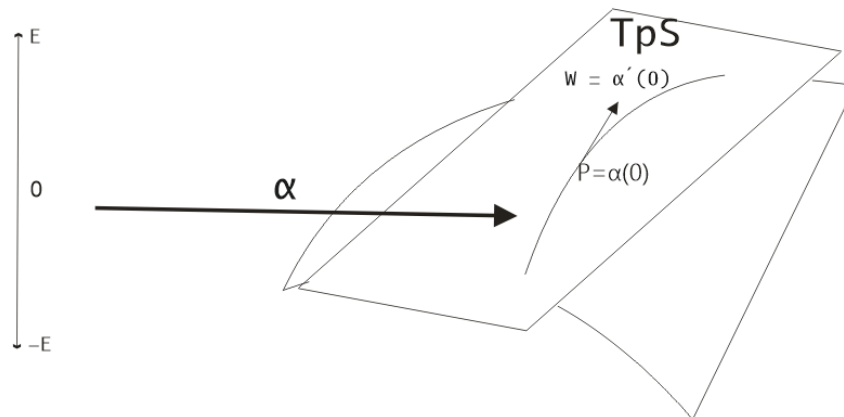


Figura 1.2: vetor tangente.

No que segue, denote-se V um espaço vetorial de dimensão 2 munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definição 1.3 Diz-se que uma aplicação linear $A : V \rightarrow V$ é **auto-adjunta** se $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$ para todo $v, w \in V$. Se $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal de V , e (α_{ij}) , $i, j = 1, 2$, é uma matriz de A relativa a esta base, então diz-se que a matriz (α_{ij}) é **simétrica** se $(\alpha_{ij}) = (\alpha_{ji})$ para todo $i, j = 1, 2$.

Observação 1.1 Dada uma aplicação linear $A : V \rightarrow V$ em um espaço vetorial de dimensão 2, e dada uma base $\{v_1, v_2\}$ de V , tem-se que o determinante de $A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, e o traço de $A = a_{11} + a_{22}$, onde (a_{ij}) é a matriz de A associada na base $\{v_1, v_2\}$. Sabe-se que esses números não dependem da base escolhida, e são, portanto, associados à aplicação linear A .

Teorema 1.4 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Se A é uma aplicação linear simétrica em V então A é auto-adjunta (ver[4]).

Teorema 1.5 Seja $A : V \rightarrow V$ uma aplicação linear auto-adjunta. Então existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V tais que $A(e_1) = \lambda_1 e_1$, $A(e_2) = \lambda_2 e_2$ (isto é, e_1 e e_2 são auto-vetores, e λ_1, λ_2 são auto-valores de A). Na base $\{e_1, e_2\}$, a matriz de A é diagonal e os elementos λ_1 e λ_2 , $\lambda_1 \geq \lambda_2$, da diagonal são o máximo e o mínimo, respectivamente, da forma quadrática $Q(v) = \langle Av, v \rangle$ sobre o círculo unitário de V (Ver[4]).

Definição 1.6 A *primeira forma fundamental* I de S é a restrição do produto interno canônico de \mathbb{R}^3 aos planos tangentes T_pS . Logo, para cada $p \in S$

$$I_p(w_1, w_2) = \langle w_1, w_2 \rangle, \quad (1-1)$$

com $w_1, w_2 \in T_pS$.

A *segunda forma fundamental* II é definida da seguinte forma:

$$II_p(w_1, w_2) = \langle -dN_p(w_1), w_2 \rangle, \quad (1-2)$$

com $w_1, w_2 \in T_pS$, onde $p \in S$ e dN_p é a diferencial da aplicação normal de Gauss em p .

Observação 1.2 Para cada $p \in S$, dN_p é auto-adjunta com respeito a primeira forma fundamental I . Consequentemente, a segunda II forma fundamental é uma forma bilinear simétrica sobre T_pS , para todo $p \in S$.

Definição 1.7 As *curvaturas principais* k_1, k_2 de S em um ponto p , são os autovalores de dN_p . Dessa forma, defina-se a *curvatura média* H e a *curvatura de Gauss* K por:

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{\text{tra}(-dN_p)}{2} \quad (1-3)$$

e

$$K = k_1 k_2 = \det(-dN_p), \quad (1-4)$$

onde tra e \det denotam, respectivamente, o traço e o determinante de dN_p .

1.2 Funções harmônicas e bi-harmônicas.

Seja Ω um aberto de \mathbb{C} . A cada função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ associa-se as funções reais de dois variáveis reais $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \text{Re}(f(z)) \\ v(x, y) &= \text{Im}(f(z)), \end{aligned} \quad (1-5)$$

Para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Aqui, u é a parte real de f e v a parte imaginária de f .

As provas dos teoremas enunciados a continuação podem ser encontradas em [10].

Teorema 1.8 f é diferenciável em Ω se, somente se u e v são funções diferenciáveis em

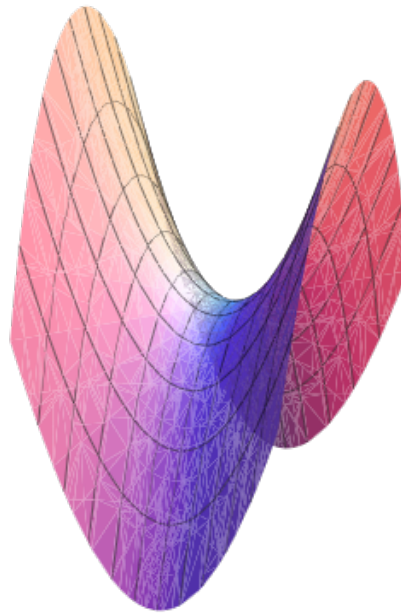


Figura 1.3: Gráfico de $Re(f(z)) = x^2 - y^2$.

Ω . Além disso, u e v verificam as equações de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (1-6)$$

Teorema 1.9 Se Ω é um aberto de \mathbb{C} , f diferenciável e $u = Re(f)$, então $u \in C^\infty(\Omega)$ e verifica, em todo ponto de Ω , a chamada equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1-7)$$

As funções que cumprem a equação (1-7) são chamadas **funções harmônicas**.

Teorema 1.10 Se Ω é um domínio estrelado, então toda função harmônica em Ω é a parte real de uma função diferenciável em Ω .

Observação 1.3 Sejam $f(z) = z^2$, $g(z) = e^z$ e $h(z) = i(z^3 + 2)$ funções diferenciáveis em \mathbb{C} , então pelo teorema (1.9) tem-se $Re(f(z)) = x^2 - y^2$, $Re(g(z)) = e^x \cos(y)$ e $Re(h(z)) = y^3 - 3x^2y$ são funções harmônicas, respectivamente.

Observação 1.4 Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável. O Laplaciano de f é dado por :

$$\Delta(f) = f_{xx} + f_{yy}, \quad (1-8)$$

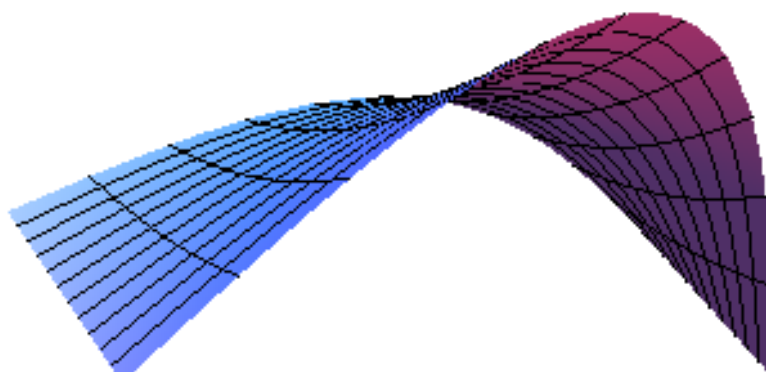


Figura 1.4: Gráfico de $Re(g(z)) = e^x \cos(y)$.

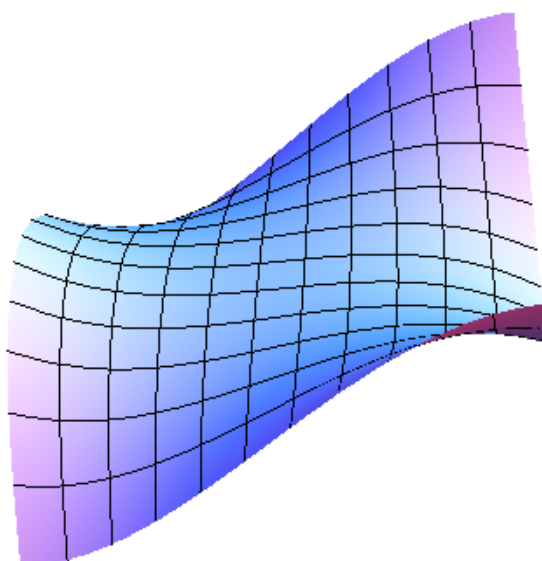


Figura 1.5: Gráfico de $Re(h(z)) = y^3 - 3x^2y$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \Delta(\Delta(f)) &= \Delta(f_{xx} + f_{yy}) \\
 &= \Delta(f_{xx}) + \Delta(f_{yy}) \\
 &= f_{xxxx} + f_{yyxx} + f_{xxyy} + f_{yyyy} \\
 &= f_{xxxx} + 2f_{xxyy} + f_{yyyy}.
 \end{aligned}$$

Definição 1.11 Seja $f(x, y)$ uma função diferenciável. Se $\Delta(\Delta(f)) = 0$, então f é chamada **função bi-harmônica**.

Observação 1.5 Exemplos de funções bi-harmônicas vem dadas pelas seguintes expressões: $f_1(x, y) = x^3 - 3xy^2$ e $f_2(x, y) = e^x(x\cos(y) - y\sin(y))$.

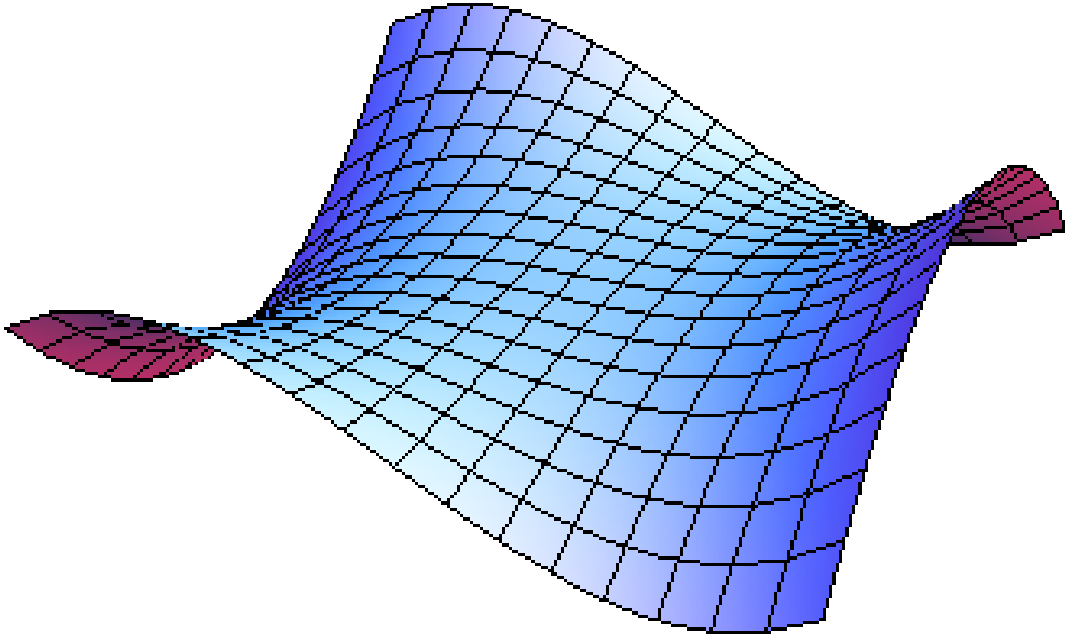


Figura 1.6: Gráfico de $x^3 - 3xy^2$.

1.3 Geometria isotrópica.

1.3.1 Movimentos e métrica.

A geometria isotrópica estuda as propriedades geométricas as quais são preservadas pelas transformações afim $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por; $T : (x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$

$$\begin{aligned} x' &= a + x\cos(\phi) - y\sin(\phi) \\ y' &= b + x\sin(\phi) + y\cos(\phi) \\ z' &= c + c_1x + c_2y + z, \end{aligned} \tag{1-9}$$

com $a, b, c, c_1, c_2, \phi \in \mathbb{R}$.

Definição 1.12 O espaço vetorial afim \mathbb{R}^3 é chamado **espaço isotrópico** e será denotado por I^3 . O grupo formado pelas transformações afim T com a operação composição é chamado o **grupo de movimentos isotrópicos** e será denotado por G_6 . A geometria (I^3, G_6) diz-se **geometria isotrópica de movimentos** (Ver[15]).

Observação 1.6 O espaço vetorial afim \mathbb{R}^3 é equivalente a $P^3(\mathbb{R}) \setminus H$, onde $P^3(\mathbb{R})$ é o espaço projetivo real de dimensão 3, e H é um hiperplano projetivo de $P^3(\mathbb{R})$ (Ver[16]).

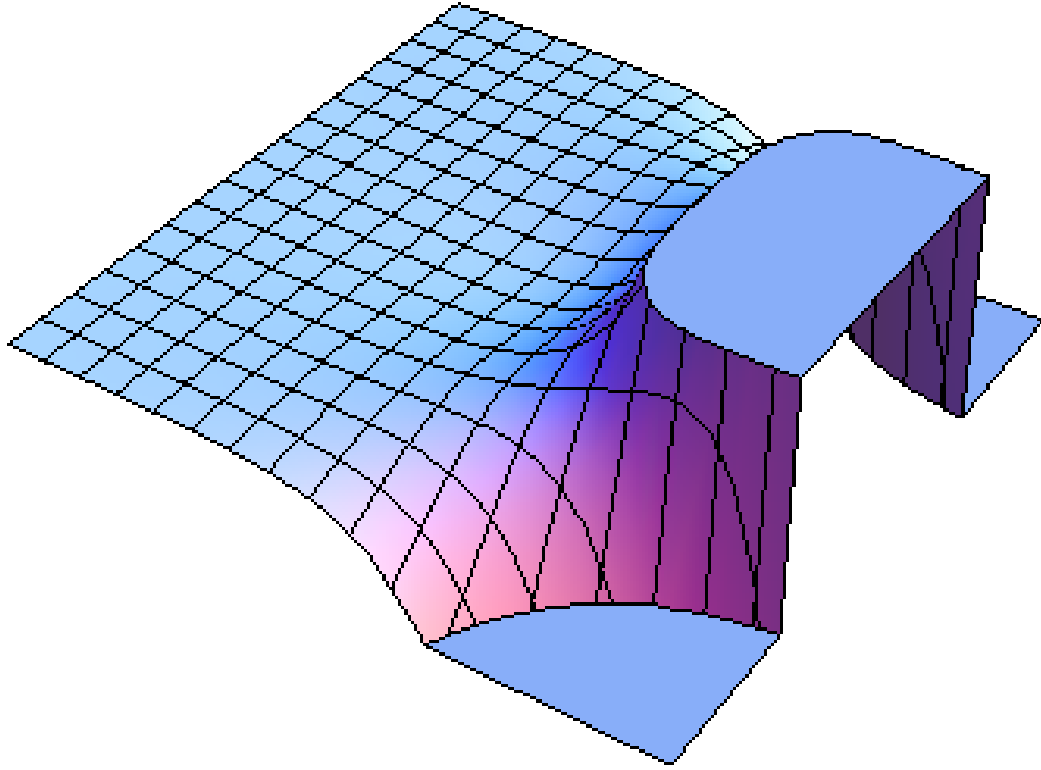


Figura 1.7: Gráfico de $e^x(x\cos(y) - y\text{sen}(y))$.

Teorema 1.13 *Sejam ℓ uma reta contida em I^3 que passa pelo ponto $(a_0, b_0, c_0) \in I^3$ com vetor diretor paralelo ao eixo z , e $T \in G_6$. Então a direção da reta $T(\ell)$ é paralela ao eixo z .*

Prova. ℓ pode ser escrita como:

$$\ell(t) = (a_0, b_0, c_0) + t(0, 0, z_0) = (a_0, b_0, c_0 + tz_0),$$

com $z_0 \neq 0$ constante, e $t \in \mathbb{R}$. Aplicando a transformação afim $T \in G_6$ sobre ℓ , tem-se:

$$\begin{aligned} T(\ell) &= T((a_0, b_0, c_0 + tz_0)) \\ &= (a + a_0\cos(\phi) - b_0\text{sen}(\phi), b + a_0\text{sen}(\phi) + b_0\cos(\phi), c + c_1a_0 + c_2b_0 + tz_0) \\ &= (a + a_0\cos(\phi) - b_0\text{sen}(\phi), b + a_0\text{sen}(\phi) + b_0\cos(\phi), c + c_1a_0 + c_2b_0) \\ &\quad + t(0, 0, z_0). \end{aligned}$$

Logo, $T(\ell)$ é uma reta que passa pelo ponto

$(a + a_0\cos(\phi) - b_0\text{sen}(\phi), b + a_0\text{sen}(\phi) + b_0\cos(\phi), c + c_1a_0 + c_2b_0)$ com vetor diretor $(0, 0, z_0)$. □

Observação 1.7 *As retas paralelas ao eixo z preservam direção sobre $T \in G_6$, esta é uma propriedade geométrica invariante.*

Definição 1.14 *As retas paralelas ao eixo z são chamadas **retas isotrópicas**, planos que contém retas isotrópicas são chamados **planos isotrópicos**.*

Definição 1.15 *Seja $\pi : I^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:*

$$\pi(x, y, z) = (x, y), \quad (1-10)$$

*esta projeção especial π é chamada **vista por cima**.*

Observação 1.8 *Planos e retas isotrópicas são levados a retas e pontos, respectivamente, se são projetados sobre o plano (X, Y) .*

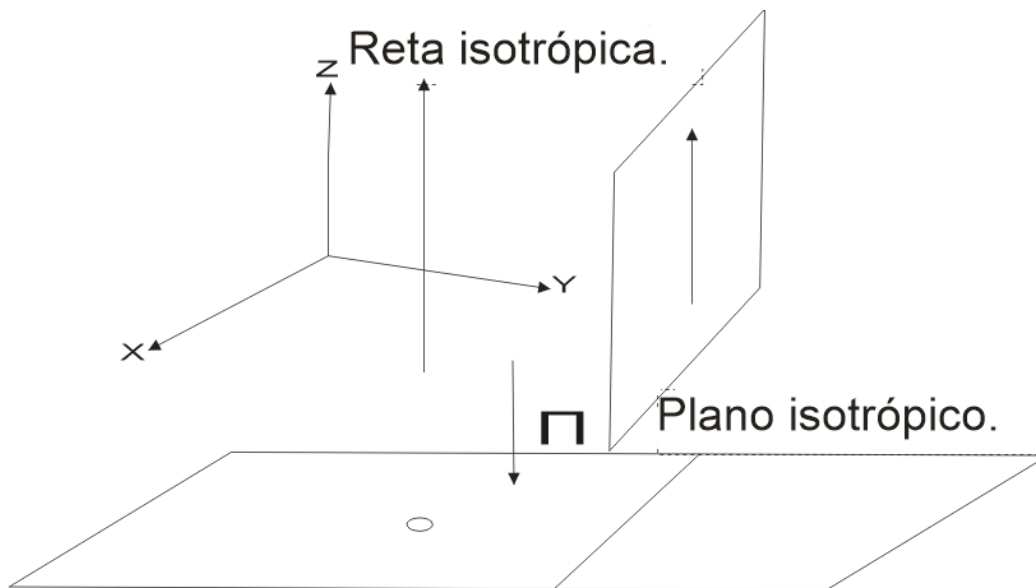


Figura 1.8: Plano e reta isotrópicas.

Observação 1.9 *Nota-se que um movimento isotrópico $T \in G_6$ é um movimento Euclidiano na vista por cima, isto é, T é composta por uma rotação de ângulo ϕ seguida de uma translação do vetor $(a, b)^T$.*

Como um resultado desta observação, muitas propriedades geométricas invariantes são encontradas pela projeção vista por cima tendo uma propriedade geométrica invariante no plano XY .

Definição 1.16 Sejam $A = (x_1, x_2, x_3)$, $B = (y_1, y_2, y_3)$ dois pontos de I^3 . Define-se a **distância isotrópica** D_i em I^3 como:

$$D_i(A, B) = d(\pi(A), \pi(B)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \quad (1-11)$$

onde $\pi(A) = (x_1, x_2)$, $\pi(B) = (y_1, y_2)$, e d denota a distância Euclidiana usual no plano XY .

Teorema 1.17 A distância isotrópica D_i é uma propriedade geométrica invariante sobre $T \in G_6$.

Prova. Sejam $A = (x_1, x_2, x_3)$, $B = (y_1, y_2, y_3) \in I^3$. Pela definição (1.15)

$$\pi(T(A)) = (a + x_1 \cos(\phi) - x_2 \sin(\phi), b + x_1 \sin(\phi) + x_2 \cos(\phi)),$$

e

$$\pi(T(B)) = (a + y_1 \cos(\phi) - y_2 \sin(\phi), b + y_1 \sin(\phi) + y_2 \cos(\phi)).$$

Substituindo em (1-11), tem-se:

$$\begin{aligned} D_i(T(A), T(B))^2 &= [d(\pi(T(A)), \pi(T(B)))]^2 \\ &= [x_1 \cos(\phi) - x_2 \sin(\phi) - (y_1 \cos(\phi) - y_2 \sin(\phi))]^2 \\ &\quad + [x_1 \sin(\phi) + x_2 \cos(\phi) - (y_1 \sin(\phi) + y_2 \cos(\phi))]^2 \\ &= [(x_1 - y_1) \cos(\phi) - (x_2 - y_2) \sin(\phi)]^2 \\ &\quad + [(x_1 - y_1) \sin(\phi) + (x_2 - y_2) \cos(\phi)]^2 \\ &= (x_1 - y_1)^2 \cos^2(\phi) + (x_2 - y_2)^2 \sin^2(\phi) \\ &\quad + (x_1 - y_1)^2 \sin^2(\phi) + (x_2 - y_2)^2 \cos^2(\phi) \\ &= (x_1 - y_1)^2 (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) + (x_2 - y_2)^2 (\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)) \\ &= (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \\ &= D_i(A, B)^2. \end{aligned}$$

□

Definição 1.18 Seja $\ell \subset I^3$ uma reta isotrópica. Dois pontos diferentes sobre ℓ , isto é, $A = (x_1, x_2, x_3)$, $B = (x_1, x_2, z_3) \in \ell$ com $x_3 \neq z_3$ têm distância isotrópica zero, tais pontos são chamados **pontos paralelos**. A diferença

$$d_s(A, B) = |z_3 - x_3| \quad (1-12)$$

é chamada **vazamento da distância isotrópica** ou **s-distância**.

Teorema 1.19 *A s -distância é uma propriedade geométrica invariante sobre $T \in G_6$.*

Prova. Sejam $A = (x_1, x_2, x_3)$, $B = (x_1, x_2, z_3) \in I^3$ dois pontos paralelos. Como

$$T(A) = (a + x_1 \cos(\phi) - x_2 \sin(\phi), b + x_1 \sin(\phi) + x_2 \cos(\phi), c + c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_3)$$

e

$$T(B) = (a + x_1 \cos(\phi) - x_2 \sin(\phi), b + x_1 \sin(\phi) + x_2 \cos(\phi), c + c_1 x_1 + c_2 x_2 + z_3),$$

então

$$T(B) - T(A) = (0, 0, z_3 - x_3),$$

donde

$$d_s(T(A), T(B)) = z_3 - x_3 = d_s(A, B).$$

□

Definição 1.20 *O ângulo entre duas retas não isotrópicas é o ângulo Euclidiano das retas vista por cima. O ângulo entre uma reta não isotrópica ℓ e um plano não isotrópico ε é zero se são paralelos em I^3 , de outra forma, eles têm interseção em um ponto $p \in I^3$. Agora, tomando dois pontos paralelos Q, E tais que $Q \in \ell$, $E \in \varepsilon$, e*

$D_i(p, Q) = D_i(p, E) = 1$, define-se o ângulo entre a reta ℓ e o plano ε como $\alpha := d_s(E, Q)$.

Teorema 1.21 *O ângulo entre uma reta não isotrópica ℓ e um plano não isotrópico ε é uma propriedade geométrica invariante sobre $T \in G_6$.*

Prova. Sejam $A, B \in I^3$. Como $d_s(A, B)$ é uma propriedade geométrica invariante sobre $T \in G_6$, e pela definição de α tem-se o resultado desejado.

□

Definição 1.22 *Sejam $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ dois planos não isotrópicos com imagens*

$z = u_1 x + v_1 y + w_1$, $z = u_2 x + v_2 y + w_2$, respectivamente. Define-se

$$\Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2}. \quad (1-13)$$

Ψ é chamado ângulo dos planos não isotrópicos $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Definição 1.23 *Sejam $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ dois planos paralelos não isotrópicos com imagens $z = u_1 x + v_1 y + w_1$, $z = u_1 x + v_1 y + w_2$, respectivamente. Define-se*

$$a(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = |w_2 - w_1|. \quad (1-14)$$

a é chamada distância paralela de planos paralelos não isotrópicos.

No que segue, é conveniente representar um ponto $p \in I^3$ como o vetor com coordenadas $p = (x_1, x_2, x_3)$ e as coordenadas do ponto vista por cima como $\pi(p) = (x_1, x_2)$.

Observação 1.10 *Uma curva $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow I^3$ de classe C^2 a qual não tem retas tangentes isotrópicas tem uma representação $c(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ com $t \in I$. Portanto, para todo $T \in G_6$ tem-se:*

$$\begin{aligned} T(c(t)) = & (a + x_1(t)\cos(\phi) - x_2(t)\sin(\phi), b + x_1(t)\sin(\phi) + x_2(t)\cos(\phi), \\ & c + c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + x_3(t)). \end{aligned} \quad (1-15)$$

Definição 1.24 *Seja $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow I^3$ uma curva de classe C^2 a qual não tem retas tangentes isotrópicas. Define-se*

$$s(c(t)) = \left\| \pi \left(\frac{dc(t)}{dt} \right) \right\| = \left\| \pi(c'(t)) \right\|, \quad (1-16)$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana usual. s é chamado **comprimento de arco isotrópico**.

Teorema 1.25 *O comprimento de arco isotrópico é uma propriedade geométrica invariante sobre $T \in G_6$.*

Prova. *Seja $c(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \subset I^3$ uma curva de classe C^2 . Como*

$$\frac{dT(c(t))}{dt} = (x'_1(t)\cos(\phi) - x'_2(t)\sin(\phi), x'_1(t)\sin(\phi) + x'_2(t)\cos(\phi), c_1x'_1(t) + c_2x'_2(t) + x'_3(t)),$$

então pela definição (1.24), tem-se:

$$\begin{aligned} s(T(c(t))) &= \left\| \pi \left(\frac{dT(c(t))}{dt} \right) \right\| \\ &= \sqrt{[x'_1(t)\cos(\phi) - x'_2(t)\sin(\phi)]^2 + [x'_1(t)\sin(\phi) + x'_2(t)\cos(\phi)]^2} \\ &= \sqrt{(x'_1(t))^2[\cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2] + (x'_2(t))^2[\sin(\phi)^2 + \cos(\phi)^2]} \\ &= \sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2} \\ &= \left\| \pi(c'(t)) \right\| \\ &= s(c(t)). \end{aligned}$$

□

Definição 1.26 *Seja $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow I^3$ uma curva de classe C^2 a qual não tem retas tangentes isotrópicas, além disso, considere $c(t)$ parametrizada pelo comprimento de*

arco isotrópico ($s(c(t)) = 1$). Defina-se:

$$k(c(t)) = \left\| \pi \left(\frac{d^2 c(t)}{dt^2} \right) \right\| = \|\pi(c''(t))\|. \quad (1-17)$$

Se $k(c(t_0)) = 0$ para algum $t_0 \in I$, se introduz a curvatura da curva c em t_0 como $k(c(t_0)) = x_3''(t_0)$. k é chamada **curvatura isotrópica da curva c** em $t \in I$.

Teorema 1.27 A curvatura k de uma curva c é uma propriedade geométrica invariante sobre $T \in G_6$.

Prova. Seja $c(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \subset I^3$ uma curva de classe C^2 . Como

$$\frac{d^2 T(c(t))}{dt^2} = (x_1''(t)\cos(\phi) - x_2''(t)\sin(\phi), x_1''(t)\sin(\phi) + x_2''(t)\cos(\phi), c_1 x_1''(t) + c_2 x_2''(t) + x_3''(t)),$$

então pela definição (1.26), tem-se:

$$\begin{aligned} k(T(c(t))) &= \left\| \pi \left(\frac{d^2 T(c(t))}{dt^2} \right) \right\| \\ &= \sqrt{[x_1''(t)\cos(\phi) - x_2''(t)\sin(\phi)]^2 + [x_1''(t)\sin(\phi) + x_2''(t)\cos(\phi)]^2} \\ &= \sqrt{(x_1''(t))^2[\cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2] + (x_2''(t))^2[\sin(\phi)^2 + \cos(\phi)^2]} \\ &= \sqrt{(x_1''(t))^2 + (x_2''(t))^2} \\ &= \|\pi(c''(t))\| \\ &= k(c(t)). \end{aligned}$$

□

Definição 1.28 Seja $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow I^3$ uma curva de classe C^2 a qual não tem retas tangentes isotrópicas. Se $k(c(t)) \neq 0$, o **vetor normal principal** é definido por:

$$n(t) = \frac{c''(t)}{\|\pi(c''(t))\|}. \quad (1-18)$$

Teorema 1.29 O vetor normal principal é ortogonal isotrópico a $c'(t)$ e satisfaz $c''(t) = k(c(t))n(t)$.

Prova. Seja $c(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in I^3$ uma curva de classe C^2 , além disso, suponha que $c(t)$ é parametrizada pelo comprimento de arco isotrópico. Então

$$\|\pi(c'(t))\|^2 = \langle (c'_1(t), c'_2(t)), (c'_1(t), c'_2(t)) \rangle = 1. \quad (1-19)$$

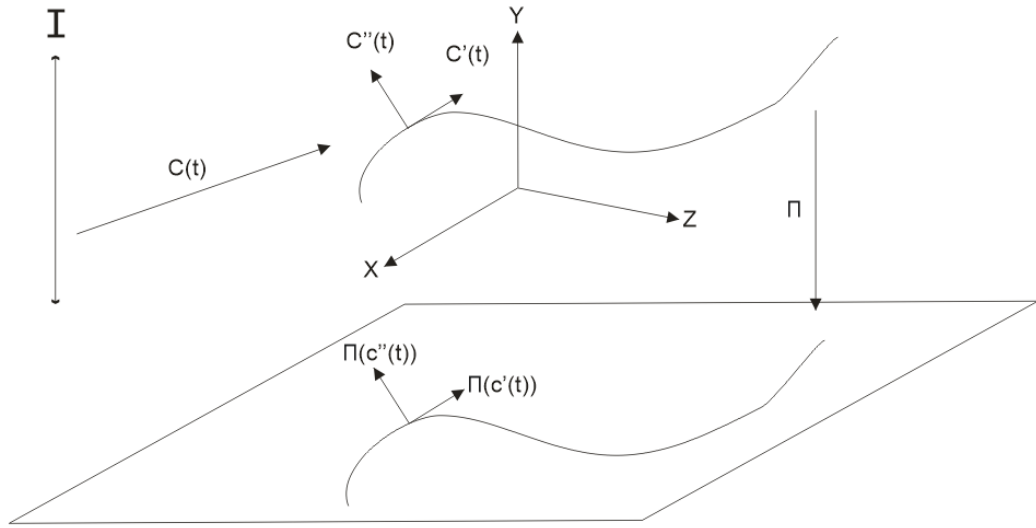


Figura 1.9: Curva em I^3 .

Derivando (1 – 19) com respeito a t , tem-se:

$$2 \langle (c_1''(t), c_2''(t)), (c_1'(t), c_2'(t)) \rangle = 2k(c(t)) \langle \pi(n(t)), \pi(c'(t)) \rangle = 0$$

se, e somente se $\pi(n(t))$ é ortogonal a $\pi(c'(t))$. \square

Definição 1.30 Uma *i-circunferência do tipo elíptica num plano não isotrópico* P é uma elipse em P onde sua vista por cima é uma circunferência Euclidiana. Esta *i-circunferência do tipo elíptica com centro* $m \in P$, e raio ($r > 0$) é o conjunto de todos os pontos $x \in P$ tais que $D_i(m, x) = r$.

Uma *i-circunferência de tipo elíptico* é a curva de intersecção de um cilindro vertical e um plano não isotrópico.

Definição 1.31 Uma *i-circunferência do tipo parabólico* é uma parábola com eixo z paralelo, portanto, ela está num plano isotrópico P_i .

Observação 1.11 Uma *i-circunferência do tipo parabólico* não é o conjunto de pontos de igual distância isotrópica D_i a um ponto fixo de P_i , mas ela pode ser vista como uma curva com curvatura isotrópica constante. Para isto, seja $c(t)$ uma circunferência isotrópica do tipo parabólico no plano isotrópico P_i a qual não possui retas tangentes isotrópicas, além disso, suponha que $y = 0$ em P_i . Então a componente $x_3(t)$ pode ser escrita como $x_3(t) = f(t) = at^2 + bt + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Logo $c(t) = (t, 0, f(t))$, donde $c''(t) = (0, 0, f''(t))$, portanto, a curvatura isotrópica da curva $c(t)$ em $t = t_0$ é dada pela segunda derivada de $f(t)$ em t_0 .

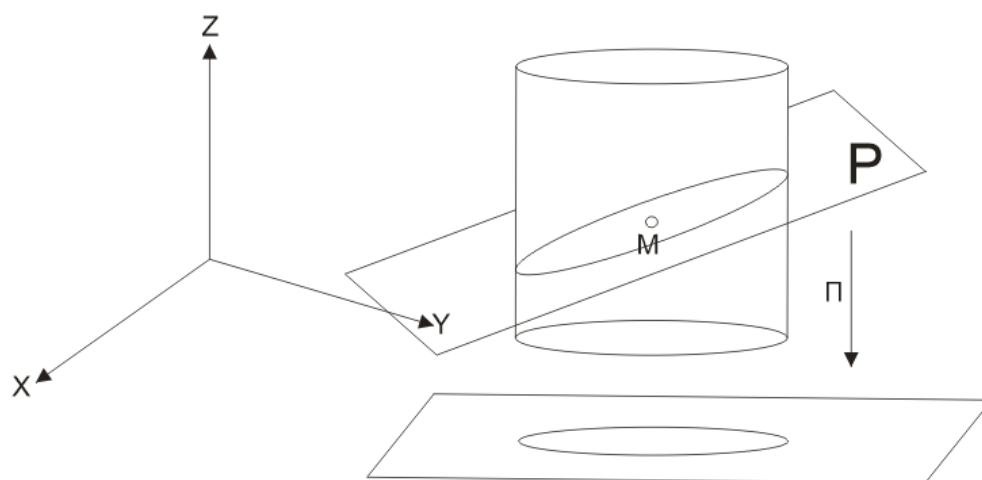


Figura 1.10: *i-circunferência elíptica.*

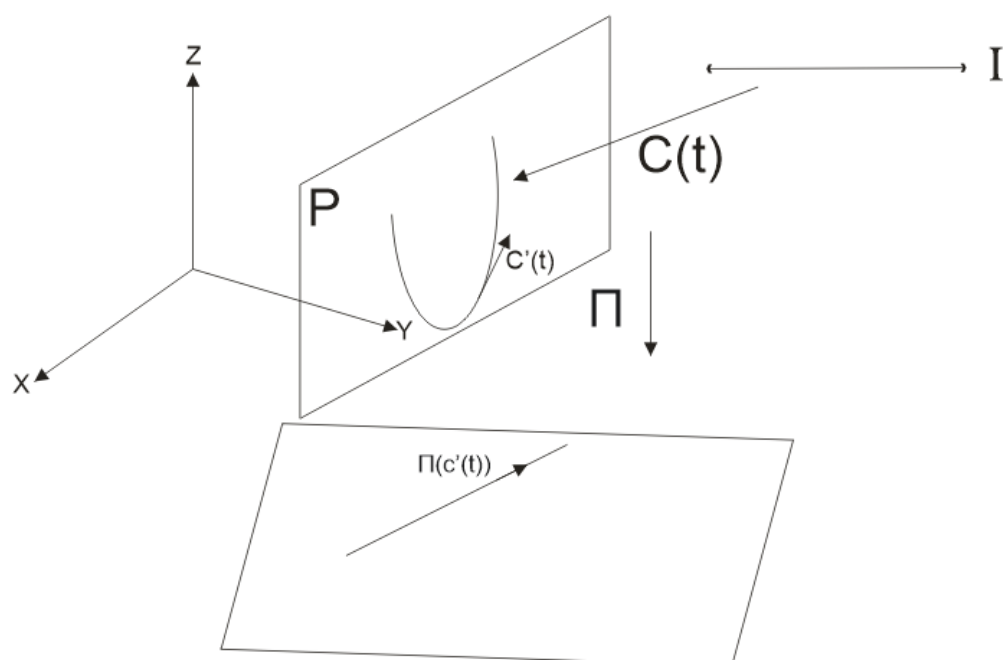


Figura 1.11: *i-circunferência parabólica.*

Existem tipos interessantes e importantes de esferas nos espaços isotrópicos I^3 as quais são dadas pelas seguintes definições:

Definição 1.32 As *i-esferas do tipo parabólico* são dadas por:

$$z = \frac{A}{2}(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}, \quad A \neq 0. \quad (1-20)$$

A *i-esfera parabólica (tipo I)*:

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad (1-21)$$

onde $R = \frac{1}{2}$ é chamado o raio da *i-esfera parabólica de tipo I*.

A *i-esfera parabólica de tipo cilíndrico (tipo II)*:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad r > 0, \quad (1-22)$$

onde r é chamado o raio da *i-esfera de tipo cilíndrico*.

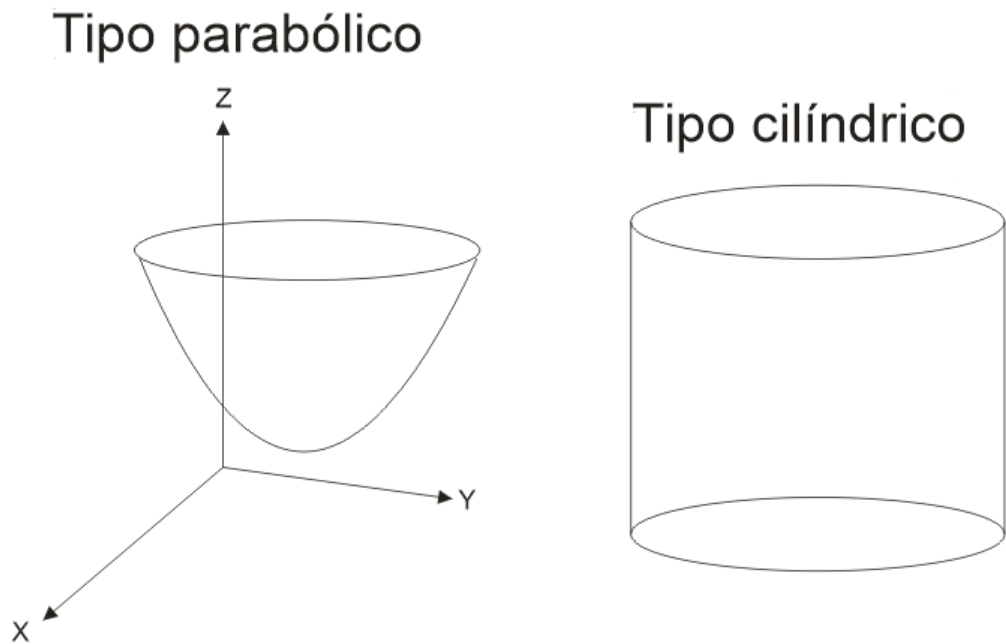


Figura 1.12: *i-esferas*.

Desde uma perspectiva Euclidiana, são paraboloides de revolução com o eixo paralelo ao eixo z paralelo. As interseções destas *i-esferas do tipo parabólico* com planos P são *i-circunferências*. Se P não é um plano isotrópico então a interseção é uma *i-circunferência de tipo elíptico*. Se P é um plano isotrópico então a de interseção é uma *i-circunferência de tipo parabólico*.

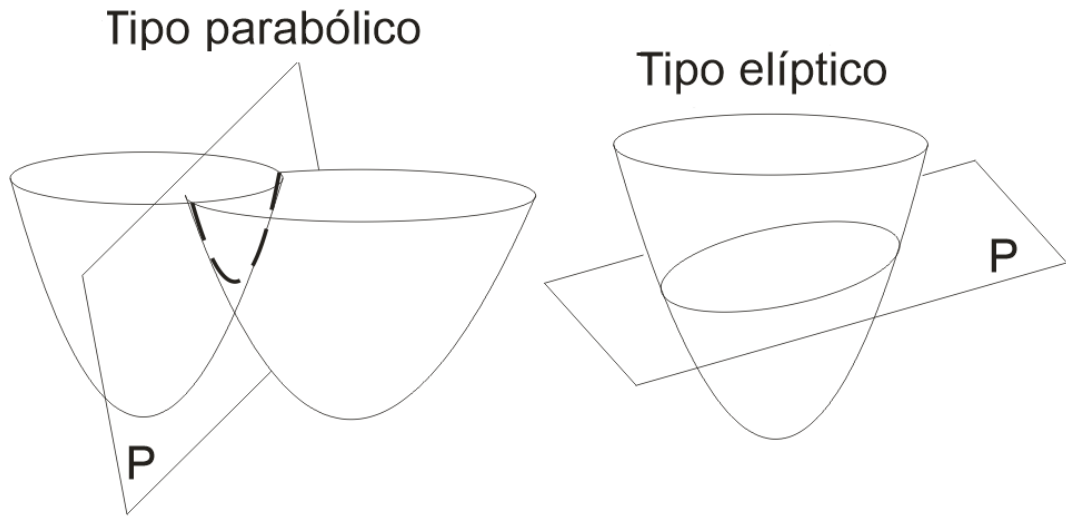


Figura 1.13: *i*-circunferências.

1.3.2 Teoria da curvatura das superfícies.

Limita-se esta discussão às superfícies regulares $S \subset \mathbb{R}^3$ sem planos tangentes isotrópicos (paralelos ao eixo z).

Teorema 1.33 *Seja p um ponto de uma superfície regular S . Então S é localmente o gráfico de uma função diferenciável $z = f(u, v)$ em p se, e somente se S não tem planos tangentes isotrópicos.*

Prova. (\Rightarrow) Seja S uma superfície regular obtida como o gráfico de uma função diferenciável $z = f(u, v)$, isto é, S tem uma parametrização da forma $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$, onde f está definida nos pontos (u, v) de um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Logo $X_u = (1, 0, f_u)$ e $X_v = (0, 1, f_v)$, portanto, o vetor normal unitário do plano tangente da superfície S no ponto (u, v) está dado por:

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}.$$

Como a terceira componente é diferente de zero para todo $(u, v) \in U$, tem-se que S não tem planos tangentes isotrópicos.

(\Leftarrow) Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de S em p , isto é:

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in U.$$

Por hipótese, S não tem planos tangentes isotrópicos, portanto,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$$

em $X^{-1}(p) = q$. Considere a aplicação $\pi \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, então $\pi \circ X(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, e como $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$, aplicando o teorema da função inversa tem-se a existência de vizinhanças V de q , e W de $\pi \circ X(q)$, tais que $(\pi \circ X)$ aplica difeomorficamente V sobre W , como X é um homeomorfismo, $X(V)$ é uma vizinhança de p em S . Considere a composta $X^{-1} \circ \pi^{-1} : (x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$ com a função $(u, v) \rightarrow z(u, v)$, $X(V)$ é o gráfico de uma função diferenciável $z = z(u(x, y), v(x, y))$. \square

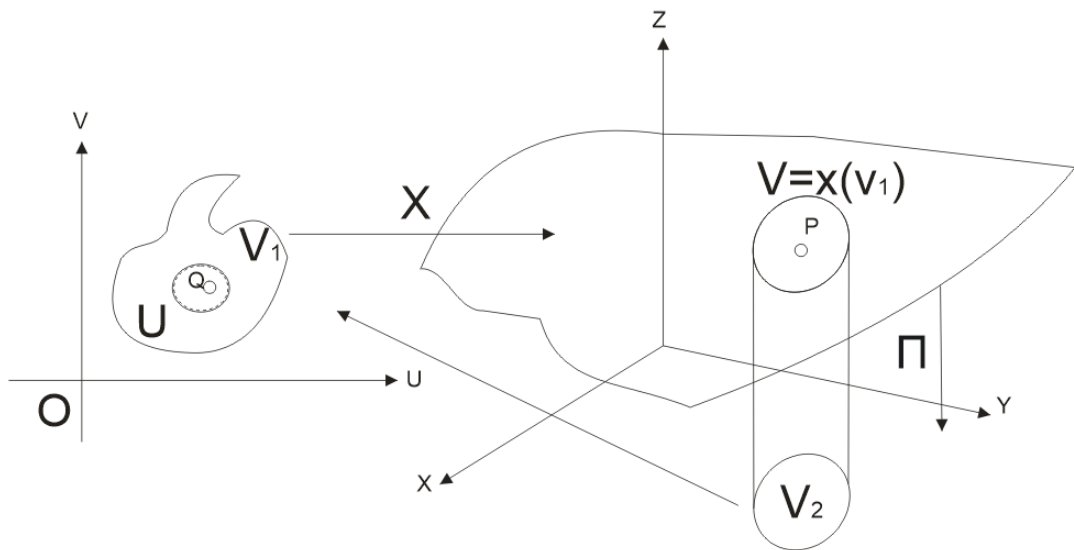


Figura 1.14: Teorema 1.39.

Observação 1.12 A superfície regular S pode ser vista como o gráfico de uma função diferenciável $z = f(u, v)$ simplesmente fazendo a união de cada aberto W gerado pela construção anterior dado $p \in S$.

Definição 1.34 Uma **seção normal** de uma superfície regular S no ponto $p = (u, v, f(u, v)) \in S$ é a interseção de S com um plano isotrópico P_i que contém ao ponto p .

Teorema 1.35 As curvaturas das curvas de uma superfície regular S dada pelo gráfico de uma função $z = f(u, v)$ no ponto $p = (u_0, v_0, f(u_0, v_0)) \in S$ são dadas pelas derivadas direcionais de f em (u_0, v_0) .

Prova. Sejam $X(u, v, f(u, v))$ uma parametrização da superfície S e $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ uma curva dada pela interseção de S com um plano isotrópico P_i o qual contém o ponto $p = (u_0, v_0, f(u_0, v_0)) = c(t_0)$ para algum $t_0 \in I$. Fazendo a projeção

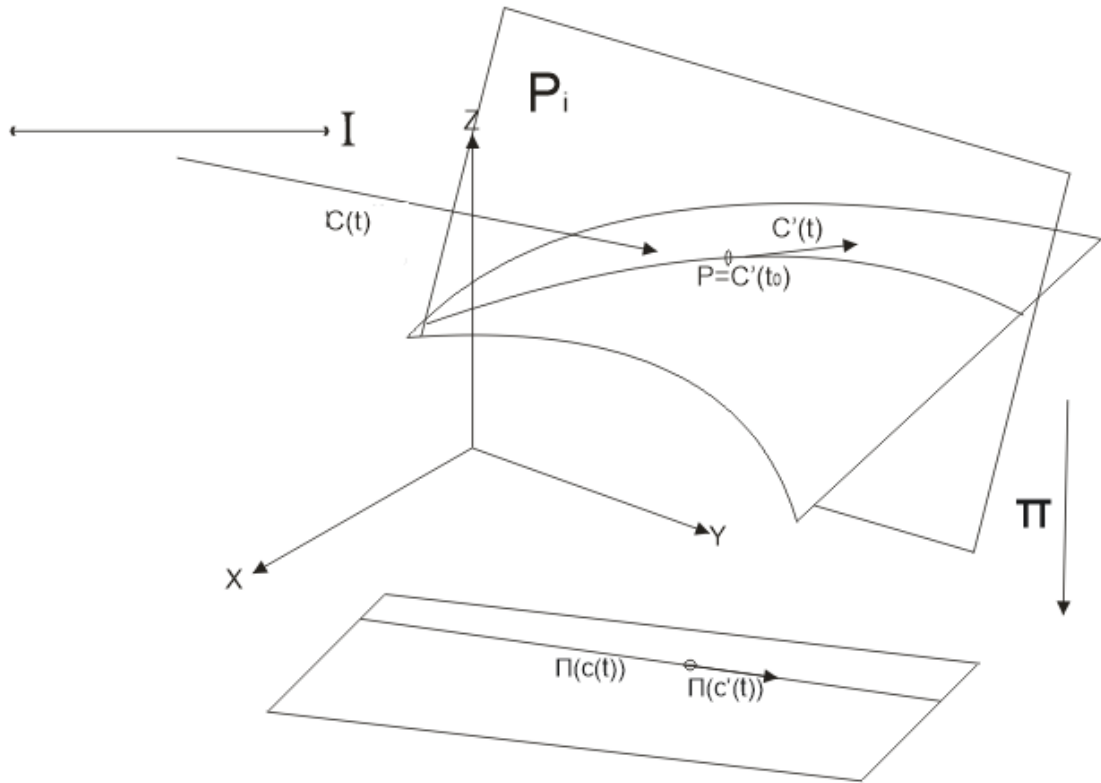


Figura 1.15: *Seção normal.*

$\pi(c(t)) = ((x_1(t), x_2(t)))$, tem-se que $\pi(c(t))$ é uma reta no plano XY com vetor velocidade $\pi(c'(t))$ (já que $c(t)$ esta contida em um plano isotrópico P_i). Portanto,

$$\pi(c(t)) = (x_1(t_0) + tx'_1(t_0), x_2(t_0) + tx'_2(t_0)),$$

onde $x_1(t_0) = u_0$, e $x_2(t_0) = v_0$. Logo $c(t)$ pode ser parametrizada na superfície S como:

$$X(t) = (x_1(t_0) + tx'_1(t_0), x_2(t_0) + tx'_2(t_0), f(x_1(t_0) + tx'_1(t_0), x_2(t_0) + tx'_2(t_0))).$$

Fazendo $u(t) = x_1(t_0) + tx'_1(t_0)$ e $v(t) = x_2(t_0) + tx'_2(t_0)$, tem-se:

$$X'(t) = (u'(t), v'(t), f_u(u(t), v(t))u'(t) + f_v(u(t), v(t))v'(t)),$$

donde

$$X''(t) = (u''(t), v''(t), f_{uu}(u(t), v(t))u'(t)^2 + f_{vu}(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + f_u(u(t), v(t))u''(t) + f_{vv}(u(t), v(t))v'(t)^2 + f_{uv}(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + f_v(u(t), v(t))v''(t)).$$

Como $u''(t) = v''(t) = 0$, para todo $t \in I$, tem-se que a curvatura da curva $c(t)$ no ponto

p com respeito ao plano isotrópico P_i é dada por:

$$k(c(t_0)) = f_{uu}(u(t_0), v(t_0))u'(t_0)^2 + 2f_{vu}(u(t_0), v(t_0))u'(t_0)v'(t_0) + f_{vv}(u(t_0), v(t_0))v'(t_0)^2.$$

A curvatura $k(c(t_0))$ pode ser representada por:

$$k(c(t_0)) = (u'(t_0), v'(t_0))^T \begin{bmatrix} f_{uu}(u(t_0), v(t_0)) & f_{vu}(u(t_0), v(t_0)) \\ f_{uv}(u(t_0), v(t_0)) & f_{vv}(u(t_0), v(t_0)) \end{bmatrix} (u'(t_0), v'(t_0)). \quad (1-23)$$

□

Definição 1.36 Seja S uma superfície regular dada pelo gráfico de uma função diferenciável $z = f(u, v)$. Seja $r \in S^1$ ($S^1 = \{r = (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$). A **curvatura normal isotrópica em** $p = (u_0, v_0, f(u_0, v_0)) \in S$ na direção r esta dada por:

$$k_n(r) = r^T \cdot \nabla^2 f(u_0, v_0) \cdot r, \quad (1-24)$$

onde $\nabla^2 f$ denota a Hessiana de f .

Observação 1.13 A matriz $\nabla^2 f$ é um operador simétrico já que f é uma função diferenciável, portanto, aplicando a observação (1.1), e os teoremas (1.4), (1.5) têm-se as seguintes definições:

Definição 1.37 Os valores extremos k_1, k_2 de $k_n(r)$ são dados pelos auto-valores da aplicação linear $\nabla^2 f$ sobre S^1 , elas são chamadas **curvaturas principais**. As correspondentes direções ortonormais $r_1, r_2 \in S^1$ são os auto-vetores de $\nabla^2 f$, elas são chamadas **direções principais**.

Definição 1.38 Sejam k_1, k_2 as curvaturas principais de S . Definam-se

$$K_i = k_1 k_2 = \det(\nabla^2 f) = f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2 \quad (1-25)$$

e

$$2H_i = k_1 + k_2 = \text{tra}(\nabla^2 f) = f_{uu} + f_{vv}. \quad (1-26)$$

K_i é chamada **curvatura isotrópica** ou **curvatura relativa** e H_i é chamada **curvatura média isotrópica**.

Definição 1.39 Seja S uma superfície regular dada pelo gráfico de uma função diferenciável $z = f(u, v)$. S é uma superfície mínima isotrópica se $H_i = 0$, para todo $p \in S$.

Observe que, se S é o gráfico de uma função diferenciável $z = f(u, v)$, tem-se que S é mínima isotrópica se, e somente se f é uma função harmônica ($\Delta(f) = f_{uu} + f_{vv} = 0$).

A versão isotrópica da teoria de curvaturas Gaussianas toma a *i-esfera parabólica (Tipo I)*

$$s(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2). \quad (1-27)$$

Para isto, Seja S uma superfície regular dada pelo gráfico de uma função diferenciável $z = f(x, y)$. A cada ponto $p = (x, y, f(x, y)) \in S$ associe-se como imagem Gaussiana o ponto $\sigma(p) = (x, y, s(x, y))$ cujo plano tangente é paralelo ao plano tangente de S em p , isto é, os vetores normais orientados N_1, N_2 de p e $\sigma(p)$, respectivamente, são paralelos. Portanto, existe um $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$ tal que $N_1 = \lambda N_2$. Como $N_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (-f_x, -f_y, 1)$, e $N_2 = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}\right) = (-x, -y, 1)$, então, igualando a terceira componente tem-se $\lambda = 1$, donde $x = f_x, y = f_y$, e

$$\sigma(p) = (f_x, f_y, \frac{1}{2}(f_x^2 + f_y^2)). \quad (1-28)$$

A derivada da aplicação σ é dada por:

$$d\sigma = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{yx} & f_{yy} \\ f_x f_{xx} + f_y f_{xy} & f_x f_{yx} + f_y f_{yy} \end{bmatrix}. \quad (1-29)$$

Logo, a vista por cima da derivada da aplicação σ ($\pi(d\sigma)$) coincide com $\nabla^2 f$.

1.3.3 Métrica dual em I^3 .

Para começar a construção de uma métrica dual no espaço isotrópico I^3 , devemos enunciar uns teoremas importantes desenvolvidos pelo princípio de dualidade nos espaços vetoriais (ver [16]).

Teorema 1.40 *Existe uma correspondência bijetora entre as retas vetoriais de um espaço vetorial E e os hiperplanos vetoriais de E^* (espaço dual de E). Analogamente, existe uma correspondência bijetora entre as retas vetoriais de E^* e os hiperplanos vetoriais de E .*

Definição 1.41 *Os pares de (reta, hiperplano) na bijeção do teorema precedente são chamados **duais** entre sim.*

Observação 1.14 *Pode-se aplicar agora o teorema (1.40) e a definição (1.41) para o espaço projetivo $P(E)$ (ver [16]) tendo em conta que; as retas vetoriais de E (ou de E^*) agora por passo ao quociente são pontos de $P(E)$ (ou de $P(E^*)$), e os hiperplanos de E (ou de E^*) agora são hiperplanos de $P(E)$ (ou de $P(E^*)$).*

Aplicando a observação anterior ao espaço projetivo $P^3(\mathbb{R})$ tem-se o seguinte princípio de dualidade dado pelo seguinte teorema.

Teorema 1.42 *Existe uma correspondência bijetora entre os pontos de $P^3(\mathbb{R})$ e os hiperplanos projetivos de $P^3(\mathbb{R}^*) = P^3(\mathbb{R})$. Analogamente, existe uma bijeção entre os pontos de $P^3(\mathbb{R}^*)$ e os hiperplanos projetivos de $P^3(\mathbb{R})$.*

Agora, como resultado principal tem-se o princípio de dualidade.

Teorema 1.43 *A todo teorema em $P(E)$ que relacione pontos e hiperplanos e este baseado só em propriedades de interseção ou soma de subespaços projetivos de $P(E)$, corresponde um teorema no espaço projetivo $P(E^*)$ chamado teorema dual do anterior cuja declaração é obtido simplesmente trocando as palavras (ponto) por (hiperplano) e interseção por (soma), e reciprocamente.*

Observação 1.15 *Aplicando o princípio de dualidade ao espaço projetivo $P^3(\mathbb{R})$, tem-se: Para todo ponto p de $P^3(\mathbb{R})$ se associa um plano π de $P^3(\mathbb{R})$. E reciprocamente, para todo plano π de $P^3(\mathbb{R})$ se associa um ponto p de $P^3(\mathbb{R})$. Mas, não entanto a dualidade não pode ser aplicada às quantidades métricas da geometria Euclidiana.*

Observação 1.16 *A geometria isotrópica desenvolve uma métrica dual a qual pode ser realizada pela seguinte correspondência. Se cada ponto $p = (p_1, p_2, p_3) \in I^3$ é enviado ao plano π com equação $z = p_1x + p_2y - p_3$, então esta correspondência é uma aplicação bijetora entre os pontos e planos não isotrópicos de I^3 . A métrica dual é dada pela seguinte condição; Sejam $p = (p_1, p_2, p_3)$, $q = (q_1, q_2, q_3) \in I^3$ dois pontos não paralelos com distância isotrópica $D_i(p, q)$ (ver definição 1.16), então eles são enviados aos planos não paralelos π_1, π_2 , respectivamente, com ângulo $\Psi(\pi_1, \pi_2)$ (ver definição 1.22), Aqui $D_i(p, q) = \Psi(\pi_1, \pi_2)$.*

Observação 1.17 *Se $m, n \in I^3$ são dois pontos paralelos ($D_i(m, n) = 0$), então no dual correspondem a planos paralelos.*

1.3.4 Transformações de esferas isotrópicas.

O conteúdo da geometria Euclidiana de Möbius é o estudo de aquelas propriedades as quais são invariantes sobre as transformações Euclidianas de Möbius (Ver[3]). No espaço isotrópico I^3 existe uma contrapartida da geometria Euclidiana de Möbius a qual será chamada geometria de Möbius isotrópica.

No que segue, sejam \mathbb{R}^3 o espaço Euclidiano, P seu conjunto de pontos e M o conjunto de esferas e planos de \mathbb{R}^3 .

Definição 1.44 Chame-se **fechamento conforme Euclidiano** \mathbb{R}_M^3 de \mathbb{R}^3 à extensão do conjunto de pontos P a $P_M = P \cup \{\infty\}$, onde ∞ é um elemento arbitrário o qual $\infty \notin P$. Os elementos de M são chamados **esferas Euclidianas de Möbius**.

Observação 1.18 Como uma extensão da relação incidência ∞ pertence a todos os planos de \mathbb{R}^3 , mas ∞ não pertence a nenhuma das esferas de \mathbb{R}^3 .

Definição 1.45 A interseção de duas esferas Euclidianas de Möbius é chamada **circunferências Euclidianas de Möbius**.

Definição 1.46 Uma **transformação Euclidiana de Möbius** é uma aplicação de P_M em P_M a qual é bijetora no conjunto M .

Seja I^3 o espaço isotrópico, P^i seu conjunto de pontos e S o conjunto de i -esferas de tipo parabólico e planos não isotrópicos.

Definição 1.47 Os elementos de S são chamados **i -esferas de Möbius (i - M -esferas)**. Eles podem ser representados pelo gráfico da função dada por:

$$f(x, y) = \frac{A}{2}(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}, \quad (1-30)$$

onde A é a curvatura média isotrópica da i -esfera de Möbius, pois $f_{xx} = A$ e $f_{yy} = A$, donde pela definição (1.38), tem-se $2H = f_{xx} + f_{yy} = 2A$.

Definição 1.48 Chamesse **extensão do espaço isotrópico** $I^3 \cup \mathbb{R}$ de I^3 a extensão do conjunto de pontos P^i a $P^i \cup \mathbb{R}$, onde \mathbb{R} é uma reta ideal. Uma i - M -esfera com curvatura média isotrópica A intersecta a reta ideal em $A \in \mathbb{R}$.

Definição 1.49 A interseção de duas i - M -esferas é chamada **i - M -circunferência**, isto é, uma i - M -circunferência pode ser uma i -circunferência de tipo elíptico ou parabólico ou uma reta não isotrópica.

Definição 1.50 Uma **transformação de Möbius isotrópica (i - M -transformação)** é uma aplicação de $I^3 \cup \mathbb{R}$ em $I^3 \cup \mathbb{R}$ a qual é bijetora no conjunto S . (aqui, i - M -circunferência são enviadas a i - M -circunferências).

1.4 Geometria de Laguerre.

Os elementos fundamentais da geometria de Laguerre em \mathbb{R}^3 são os planos orientados e esferas orientadas (um ponto pode ser visto como uma esfera orientada com raio zero). A orientação é determinada por um campo normal unitário de vetores ou equivalentemente por um raio com sinal no caso da esfera. A relação básica na geometria de Laguerre é o contato orientado de esferas e planos orientados. Uma esfera orientada e um plano orientado estão em contato orientado, se são tangentes e seus vetores normais unitários coincidem no ponto de contato. A geometria de Laguerre estuda as propriedades as quais são invariantes sobre as transformações de Laguerre. Uma transformação de Laguerre consiste de duas funções bijetoras, uma no conjunto das esferas, e a outra no conjunto dos planos, além disso, uma transformação de Laguerre preserva contato orientado e contato não orientado entre esferas e planos. A métrica utilizada neste estudo é a métrica usual no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 .

Para começar o estudo da geometria de Laguerre define-se os planos e esferas orientadas da seguinte forma.

Definição 1.51 *Sejam $n = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$ um vetor normal unitário, e $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ um ponto arbitrário. O conjunto*

$$P(n, p) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; \langle n, x - p \rangle = 0\} \quad (1-31)$$

*chama-se **plano orientado** $P(n, p)$ que passa por p com vetor normal unitário n .*

Definição 1.52 *Sejam $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{R}^3$ um ponto arbitrário, e $R \in \mathbb{R}$. O conjunto*

$$C(m, R) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; \langle x - m, x - m \rangle = R^2\} \quad (1-32)$$

*chame-se **esfera orientada** $C(m, R)$ com centro em m e raio com sinal R .*

Observação 1.19 *Pode-se representar um plano orientado $P(n, p)$ como*

$P(n, h) := n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + h = 0$, onde o vetor normal unitário $n = (n_1, n_2, n_3)$ define a orientação de P , e $h = -\langle p, n \rangle$.

Um critério de tangência entre um plano orientado $P(n, h)$ e a uma esfera orientada $C(m, R)$ é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 1.53 *A distância com sinal de um ponto $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{R}^3$ a um plano orientado $P(n, h)$ é dada por $n_1m_1 + n_2m_2 + n_3m_3 + h$.*

Prova. A distância de um ponto $m \in \mathbb{R}^3$ a um plano $P(n, h)$ é dada pela projeção ortogonal do vetor $(m - p)$ (com $p \in P$) sobre o vetor normal unitário $n = (n_1, n_2, n_3)$, isto é,

$$\text{proy}_n(m - p) = \cos(\phi) \|m - p\|, \quad (1-33)$$

onde ϕ é o ângulo formado pelos vetores n e $(m - p)$. Como $\|n\| = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} \text{proy}_n(m - p) &= \cos(\phi) \|m - p\| \\ &= \frac{\langle n, m - p \rangle}{\|n\| \|m - p\|} \|m - p\| \\ &= \langle n, m - p \rangle \\ &= n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 + h. \end{aligned}$$

□

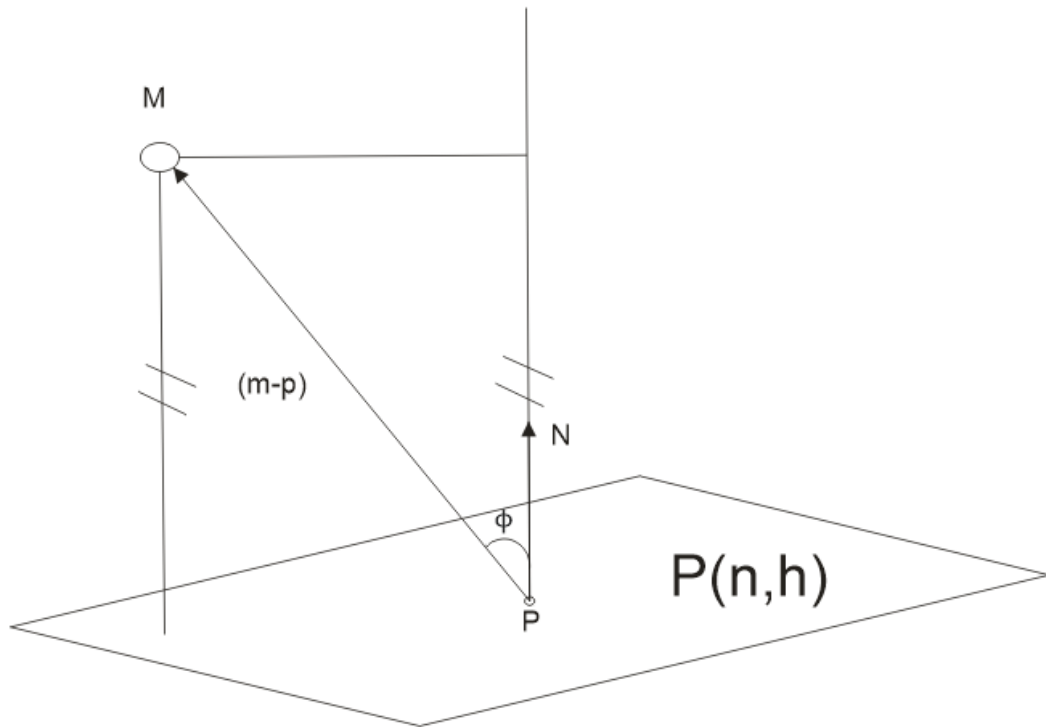


Figura 1.16: Distância com sinal.

Observação 1.20 Uma esfera orientada $C(m, R)$ com centro m e raio com sinal R é tangente a um plano orientado $P(n, h)$ se a distância com sinal de m a $P(n, h)$ é igual a R , isto é, $\langle n, m \rangle + h = R$, ou equivalentemente $h = R - \langle n, m \rangle$.

A relação básica na geometria de Laguerre é tangência de planos orientados e esferas orientadas.

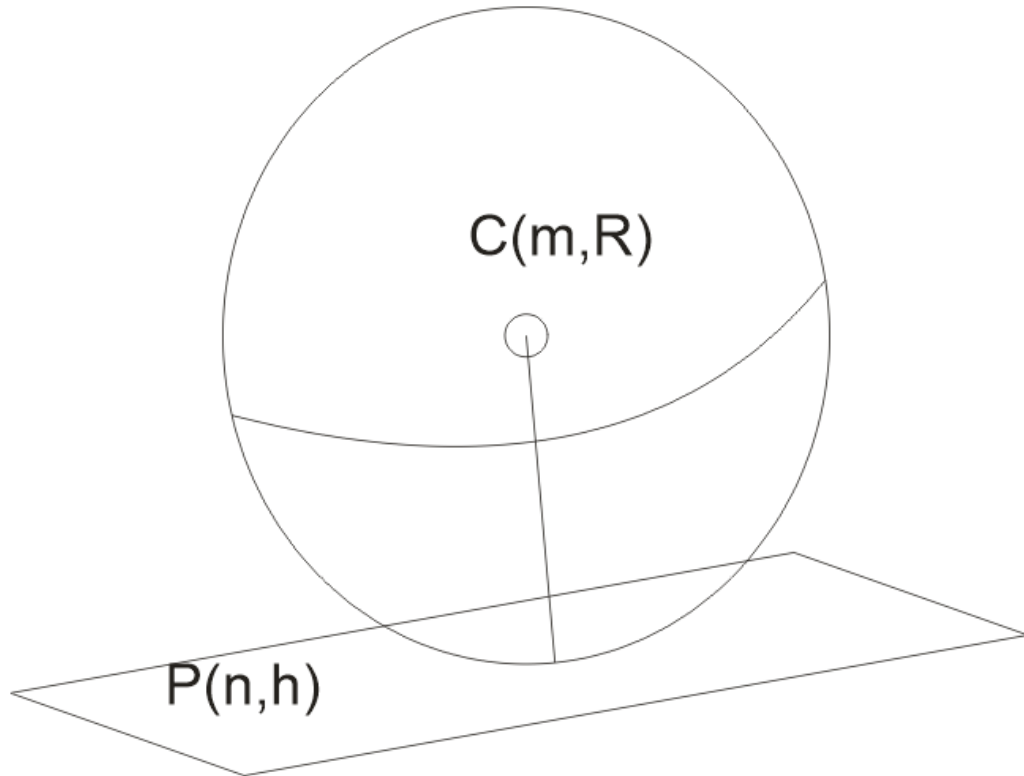


Figura 1.17: Esfera tangente a um plano.

Definição 1.54 Uma *transformação de Laguerre (L-transformação)* é uma função a qual é bijetora sobre os conjuntos de planos orientados e esferas orientadas, respectivamente, além disso, ela preserva tangência entre esferas orientadas e planos orientados.

A geometria de Laguerre estuda as propriedades as quais são invariantes sobre as transformações de Laguerre.

1.4.1 Modelo ciclográfico da geometria de Laguerre.

A ideia de trabalhar com este modelo ciclográfico é entender mais facilmente uma transformação de Laguerre.

Definição 1.55 Sejam $n = (n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{R}^4$ um vetor normal unitário, e $h \in \mathbb{R}$. O conjunto

$$H(n, h) = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4x_4 + h = 0\} \quad (1-34)$$

chama-se **hiperplano afim** $H(n, h) \subset \mathbb{R}^4$ com vetor normal unitário n .

Observação 1.21 *Pode-se representar o espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 como um hiperplano orientado de \mathbb{R}^4 . Para isto, sejam $n_1 = (0, 0, 0, 1)$ o vetor normal unitário, e $h = 0$. Logo*

$$\mathbb{R}^3(n_1, 0) = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_4 = 0\}.$$

Observação 1.22 *Seja $C(m, R)$ uma esfera orientada com centro em m e raio com sinal R . A esfera $C(m, R)$ vai ser representada como o ponto $\xi(C) := (m, R) \in \mathbb{R}^4$.*

Observação 1.23 *Um plano orientado $P(n, h)$ no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 pode-se representar como o conjunto de todas as esferas as quais são tangentes a $P(n, h)$.*

Utilizando as observações anteriores tem-se o seguinte resultado.

Teorema 1.56 *Seja $P(n, h)$ um plano orientado com vetor normal unitário $n = (n_1, n_2, n_3)$ e $p = (p_1, p_2, p_3) \in P$. Seja C_p o conjunto de todas as esferas orientadas em \mathbb{R}^3 as quais são tangentes a P em p , isto é:*

$$C_p = \{\xi(C) := (m, R) \in \mathbb{R}^4; m = p + \lambda n, R = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}. \quad (1-35)$$

Então o conjunto C_p esta contido em uma reta $\ell \subset \mathbb{R}^4$ a qual forma um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ com respeito ao hiperplano $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$.

Prova. *Seja $\xi(C) \in C_p$, isto é, $\xi(C) := (p + \lambda n, \lambda)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. $\xi(C)$ pode-se escrever como:*

$$\begin{aligned} \xi(C) &:= (p + \lambda n, \lambda) \\ &:= (p_1 + \lambda n_1, p_2 + \lambda n_2, p_3 + \lambda n_3, \lambda) \\ &:= (p_1, p_2, p_3, 0) + \lambda(n_1, n_2, n_3, 1). \end{aligned}$$

Logo $\xi(C)$ pertence a uma reta $\ell \subset \mathbb{R}^4$ a qual passa pelo ponto $(p_1, p_2, p_3, 0)$, e tem como vetor diretor $(n_1, n_2, n_3, 1)$. Agora, seja ϕ o ângulo formado pela reta ℓ e o hiperplano \mathbb{R}^3 , isto é, o ângulo formado pelo vetor diretor $(n_1, n_2, n_3, 1)$ de ℓ , e o vetor normal unitário $(0, 0, 0, 1)$ do hiperplano \mathbb{R}^3 , portanto,

$$\begin{aligned} \phi &= \cos^{-1} \left(\frac{\langle (n_1, n_2, n_3, 1), (0, 0, 0, 1) \rangle}{\|(n_1, n_2, n_3, 1)\| \|(0, 0, 0, 1)\|} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + 1^2}} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned}$$

donde $\phi = \frac{\pi}{4}$. □

Corolário 1.57 Para cada $p = (p_1, p_2, p_3) \in P(n, h)$ o conjunto C_p esta contido no hiperplano orientado dado por:

$$\xi^*(P) := h + x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 - x_4 = 0, \quad (1-36)$$

onde $n = (n_1, n_2, n_3)$ é o vetor normal unitário do plano P e $-h = n_1 p_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3$.

Prova. Como

$$C_p = \{(p_1, p_2, p_3, 0) + \lambda(n_1, n_2, n_3, 1) = (p_1 + \lambda n_1, p_2 + \lambda n_2, p_3 + \lambda n_3, \lambda); \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad (1-37)$$

substituindo (1-37) para um λ fixo em (1-36), tem-se:

$$\begin{aligned} h + (p_1 + \lambda n_1)n_1 + (p_2 + \lambda n_2)n_2 + (p_3 + \lambda n_3)n_3 - \lambda &= h + p_1 n_1 + \lambda n_1^2 + p_2 n_2 + \lambda n_2^2 + p_3 n_3 \\ &\quad + \lambda n_3^2 - \lambda \\ &= h + p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3 + \lambda(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \\ &\quad - \lambda \\ &= h - h + \lambda - \lambda \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, C_p esta contido no hiperplano orientado $\xi^*(P)$. □

Observação 1.24 A imagem do plano orientado $P(n, h)$ via o conjunto de esferas C_p é o hiperplano orientado $\xi^*(P)$.

Corolário 1.58 Seja $P(n, h)$ um plano orientado. O hiperplano orientado $\xi^*(P) \subset \mathbb{R}^4$ é paralelo a um hiperplano tangente do cone $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$.

Prova. Seja $\xi^*(P) := h + x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 - x_4 = 0$, onde $n = (n_1, n_2, n_3)$ é o vetor normal unitário do plano P . O vetor normal $(n_1, n_2, n_3, -1)$ de $\xi^*(P)$ pertence ao cone $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$, pois:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - (-1)^2 = 0.$$

Logo $\xi^*(P)$ é paralelo ao hiperplano orientado

$$H((n_1, n_2, n_3, -1), 0) := x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 - x_4 = 0, \quad (1-38)$$

onde $H((n_1, n_2, n_3, -1), 0)$ é o hiperplano tangente do cone $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$ no ponto $(0, 0, 0, 0)$. □

Observação 1.25 se $C(m,R)$ é uma esfera orientada determinada como seu conjunto de planos tangentes orientados então $\xi(C)$ é determinado por $\xi^*(P)$, onde P é um plano tangente orientado a C . Para isto, seja $C(m,R)$ uma esfera orientada com centro em $m = (m_1, m_2, m_3)$ e raio com sinal $R \in \mathbb{R}$. Pela observação (1.20), um plano orientado $P(n,h)$ é tangente a C se $h = R - \langle n, m \rangle$, onde $n = (n_1, n_2, n_3)$ é o vetor normal unitário de P e h é a distancia do plano P ao origem. Portanto,

$$h + m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 - R = R - R = 0,$$

logo, $\xi(C) \in \xi^*(P)$. Agora, pelo corolário (1.58) tem-se que $\xi^*(P)$ é paralelo ao hiperplano tangente do cone $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$ no ponto $(0, 0, 0, 0)$, e como a distancia de $\xi^*(P)$ ao origem é h então todos estes hiperplanos $\xi^*(P)$ formam o hiperplano tangente de um cone quadrático $\Gamma(x)$ com vértice em $x = \xi(C)$.

1.4.2 Espaço de Minkowski.

A utilização do modelo de Minkowski no estudo da geometria de Laguerre apresenta uma vantagem: torna evidente que o espaço dos planos orientados e esferas orientadas na geometria de Laguerre são um espaço homogêneo ao espaço de Minkowski. Aqui, considere-se o espaço vetorial \mathbb{R}^4 com a base canônica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Definição 1.59 Sejam $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ dois pontos arbitrários em \mathbb{R}^4 . Define-se a **métrica de Minkowski** como:

$$\langle x, y \rangle_M = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4. \quad (1-39)$$

O par $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot \rangle_M)$ formado pelo espaço vetorial \mathbb{R}^4 e a métrica de Minkowski, é chamado **espaço de Minkowski** e será denotado por \mathbb{R}_1^4 .

Teorema 1.60 A métrica de Minkowski cumpre as seguintes propriedades. Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^4$, e $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se:

1. $\langle x, y \rangle_M = \langle y, x \rangle_M$ (Simetria.)
2. $\langle ax + by, z \rangle_M = a \langle x, z \rangle_M + b \langle y, z \rangle_M$, e $\langle x, ay + bz \rangle_M = a \langle x, y \rangle_M + b \langle x, z \rangle_M$ (Bilinear.)
3. Se $\langle x, y \rangle_M = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^4$, então $y = 0$. (Não degenerada.)

Prova.

1. Simetria.

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle_M &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4 \\ &= y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 - y_4x_4 \\ &= \langle y, x \rangle_M.\end{aligned}$$

2. Bilinear.

$$\begin{aligned}\langle ax + by, z \rangle_M &= (ax_1 + by_1)z_1 + (ax_2 + by_2)z_2 + (ax_3 + by_3)z_3 - (ax_4 + by_4)z_4 \\ &= ax_1z_1 + by_1z_1 + ax_2z_2 + by_2z_2 + ax_3z_3 + by_3z_3 - ax_4z_4 - by_4z_4 \\ &= a \langle x, z \rangle_M + b \langle y, z \rangle_M.\end{aligned}$$

$\langle x, ay + bz \rangle_M = a \langle x, y \rangle_M + b \langle x, z \rangle_M$ é análogo ao caso anterior.

3. Não degenerada.

Seja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canônica de \mathbb{R}^4 . Então, se $\langle x, y \rangle_M = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^4$ tem-se:

$$0 = \langle e_1, y \rangle_M = y_1 \text{ se, somente se } y_1 = 0.$$

Fazendo o mesmo processo para e_2, e_3, e_4 , têm-se $y_2 = y_3 = y_4 = 0$, logo

$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = 0.$$

□

Observação 1.26 Seja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canônica de \mathbb{R}^4 . Os elementos $\langle e_i, e_j \rangle_M$ com $i, j = 1, 2, 3, 4$, formam a matriz diagonal que representa a métrica de Minkowski na base canônica

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1-40)$$

A métrica de Minkowski pode ser escrita matricialmente como $\langle x, y \rangle_M = x^T \cdot D \cdot y$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^4$.

Definição 1.61 Sejam $x, y \in \mathbb{R}^4$. chama-se x um **vetor unitário** se $\langle x, x \rangle_M = \pm 1$. x é ortogonal a y se $\langle x, y \rangle_M = 0$. Uma base para \mathbb{R}_1^4 Diz-se ortogonal quando seus vetores são ortogonais, além disso, se os vetores são unitários, chama-se base ortonormal.

Definição 1.62 Seja $x \in \mathbb{R}^4$. chama-se x um **tipo tempo** se $\langle x, x \rangle_M < 0$, **tipo luz** se $x \neq 0$ e $\langle x, x \rangle_M = 0$, ou **tipo espaço** quando $\langle x, x \rangle_M > 0$. Se x é temporal ou de luz chama-se **vetor casual**.

Definição 1.63 Dado um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^4$, define-se o **subconjunto ortogonal** como o subconjunto

$$S^\perp = \{v \in \mathbb{R}^4; \langle v, x \rangle_M = 0 \text{ para todo } x \in S\}. \quad (1-41)$$

Teorema 1.64 O subconjunto ortogonal de S é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^4 .

Prova. Sejam $v, w \in S^\perp$, isto é, $\langle v, x \rangle_M = \langle w, x \rangle_M = 0$ para todo $x \in S$. Então

$$\langle av + bw, x \rangle_M = a \langle v, x \rangle_M + b \langle w, x \rangle_M = 0 + 0 = 0$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$, e $x \in S$. Logo $av + bw \in S^\perp$, donde S^\perp é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^4 .
□

Definição 1.65 Um **cone de luz** com vértice em $v \in \mathbb{R}^4$ é o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^4; \langle x - v, x - v \rangle_M = 0\}. \quad (1-42)$$

Observação 1.27 A equação do cone luz com vértice em $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$ é dada por:

$$\langle x - v, x - v \rangle_M = (x_1 - v_1)^2 + (x_2 - v_2)^2 + (x_3 - v_3)^2 - (x_4 - v_4)^2 = 0. \quad (1-43)$$

Definição 1.66 Um hiperplano diz ser: **Euclidiano** se for ortogonal a um vetor do tipo tempo, **de Lorentz** se for ortogonal a um vetor do tipo espaço e **singular** se for ortogonal a um vetor do tipo luz.

Observação 1.28 No modelo de Minkowski para a geometria de Laguerre as esferas orientadas são representadas por pontos e os planos orientados por hiperplanos singulares. No modelo da geometria ciclográfica de Laguerre, as transformações que deixam invariante o produto interno de dois vetores no espaço de Minkowski associam cones de luz e seus hiperplanos tangentes a outros cones de luz com seus hiperplanos tangentes pares, portanto, no modelo ciclográfico as transformações de Laguerre L são funções especiais afim da forma:

$$L(x) = a + Ax, \quad (1-44)$$

com $a \in \mathbb{R}^4$ constante, e A uma matriz de uma aplicação linear de $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ a qual preserva o produto interno (1-39) para todo $x, y \in \mathbb{R}^4$. Em outras palavras, A é uma matriz ortogonal ($A^T D A = D$, onde D é a matriz diagonal $D = (1, 1, 1, -1)$).

Observação 1.29 Uma transformação de Laguerre interessante é a dilatação a qual adiciona uma constante $d \neq 0$ ao raio com sinal de cada esfera e deixa seu centro

invariante, isto é, $a = (0, 0, 0, d)$ e A a matriz identidade. Esta transformação não preserva pontos (esferas com raio zero). Consideraram-se uma superfície como envelope de seus planos tangentes a dilatação faz um deslocamento da superfície uma distância d .

1.4.3 O modelo isotrópico da geometria de Laguerre.

O seguinte relacionamento entre a geometria de Laguerre e a geometria isotrópica de Möbius dada pela definição (1.67) é importante para o estudo das superfícies mínimas de Laguerre na geometria isotrópica.

Observação 1.30 Seja $P(n, h)$ um plano orientado com vetor normal unitário $n = (n_1, n_2, n_3)$, P vai ser representado como o ponto $P := (n_1, n_2, n_3, h) \in \mathbb{R}^4$. Estas coordenadas não são independentes devido à condição $\|n\| = 1$. Assim, utilizando a projeção estereográfica de S^2 desde o ponto $(0, 0, 1)$ sobre o plano $z = 0$, pode-se substituir $n = (n_1, n_2, n_3) \in S^2$ por seu ponto imagem $\frac{1}{n_3+1}(n_1, n_2, 0)$.

Definição 1.67 Seja $P(n, h)$ um plano orientado com vetor normal unitário $n = (n_1, n_2, n_3)$. Define-se

$$P^i := \frac{1}{n_3 + 1} (n_1, n_2, h). \quad (1-45)$$

P^i é a imagem do plano orientado P na geometria isotrópica de Möbius. Para os planos orientados com vetor normal $n = (0, 0, -1)$, P^i não está definido, neste caso define-se o número real $h \in I^3 \cup \mathbb{R}$ como imagem.

Deste modo o conjunto de planos orientados em \mathbb{R}^3 é associado ao conjunto de pontos $I^3 \cup \mathbb{R}$ da geometria isotrópica de Möbius.

Teorema 1.68 Seja (x, y, z) um ponto do espaço isotrópico I^3 . A função

$$(P^i)^{-1}(x, y, z) = \frac{2}{1 + x^2 + y^2} \left(x, y, \frac{1 - x^2 - y^2}{2}, z \right)$$

associa cada ponto $(x, y, z) \in I^3$ a um plano orientado no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 com coordenadas $P(n, h) = \frac{2}{1 + x^2 + y^2} \left(x, y, \frac{1 - x^2 - y^2}{2}, z \right)$. Isto é, $(P^i)^{-1}$ é a função inversa de P^i .

Prova. Observe-se que as três primeiras Coordenadas de $(P^i)^{-1}(x, y, z)$ cumprem:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2} \right)^2 + \left(\frac{2y}{1 + x^2 + y^2} \right)^2 + \left(\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} \right)^2 &= \frac{4x^2 + 4y^2 + (1 - x^2 - y^2)^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2) + 1}{(1 + x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{(1 + x^2 + y^2)^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Além disso, seja $P(n, h)$ um plano orientado com vetor normal unitário $n = (n_1, n_2, n_3)$, então

$$\begin{aligned}
(P^i)^{-1}(P^i) &= (P^i)^{-1} \left(\frac{n_1}{n_3+1}, \frac{n_2}{n_3+1}, \frac{h}{n_3+1} \right) \\
&= \frac{2}{\left(1 + \left(\frac{n_1}{n_3+1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{n_3+1}\right)^2\right)} \left(\frac{n_1}{n_3+1}, \frac{n_2}{n_3+1}, \frac{1 - \left(\frac{n_1}{n_3+1}\right)^2 - \left(\frac{n_2}{n_3+1}\right)^2}{2}, \frac{h}{n_3+1} \right) \\
&= \frac{2}{\frac{(n_3+1)^2 + n_1^2 + n_2^2}{(n_3+1)^2}} \left(\frac{n_1}{n_3+1}, \frac{n_2}{n_3+1}, \frac{\frac{n_3^2 + 2n_3 + 1 - n_1^2 - n_2^2}{(n_3+1)^2}}{2}, \frac{h}{n_3+1} \right) \\
&= \frac{2}{\frac{2n_3+2}{(n_3+1)^2}} \left(\frac{n_1}{n_3+1}, \frac{n_2}{n_3+1}, \frac{\frac{2n_3^2 + 2n_3}{(n_3+1)^2}}{2}, \frac{h}{n_3+1} \right) \\
&= (n_3+1) \left(\frac{n_1}{n_3+1}, \frac{n_2}{n_3+1}, \frac{n_3}{n_3+1}, \frac{h}{n_3+1} \right) \\
&= (n_1, n_2, n_3, h).
\end{aligned}$$

□

Observação 1.31 Planos paralelos orientados P e Q têm o mesmo vetor normal unitário n são associados no modelo isotrópico como pontos paralelos P^i e Q^i , respectivamente.

Teorema 1.69 Seja $P := (n, h)$ um plano orientado com vetor normal unitário $n = (n_1, n_2, n_3)$. Suponha que P é tangente a uma esfera $C(m, R)$ com centro $m = (m_1, m_2, m_3)$ e raio com sinal R , então P é associado no modelo isotrópico como um ponto da esfera isotrópica de Möbius S^i dada por:

$$S^i := z = \frac{R + m_3}{2} (x^2 + y^2) - m_1 x - m_2 y + \frac{R - m_3}{2}. \quad (1-46)$$

Prova. Pela observação (1.20), o plano orientado $P(n, h)$ é tangente à esfera $C(m, R)$ se $h = R - \langle n, m \rangle$. Por outra parte

$$P^i := \frac{1}{n_3+1} (n_2, n_3, h) = (x, y, z),$$

é a imagem do plano orientado P no modelo isotrópico, portanto, basta mostrar que

$P^i \in S^i$. Substituindo x, y em (1-46) tem-se:

$$\begin{aligned}
z &= \frac{R+m_3}{2} \left[\left(\frac{n_1}{n_3+1} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{n_3+1} \right)^2 \right] - m_1 \left(\frac{n_1}{n_3+1} \right) - m_2 \left(\frac{n_2}{n_3+1} \right) + \frac{R-m_3}{2} \\
&= \frac{R+m_3}{2} \left(\frac{n_1^2+n_2^2}{(n_3+1)^2} \right) - \left(\frac{m_1 n_1 + m_2 n_2}{n_3+1} \right) + \frac{R-m_3}{2} \\
&= \frac{R+m_3}{2} \left(\frac{n_1^2+n_2^2+n_3^2}{(n_3+1)^2} \right) - \left(\frac{m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3}{n_3+1} \right) + \frac{R-m_3}{2} - \frac{(R+m_3)n_3^2}{2(1+n_3)^2} + \frac{m_3 n_3}{n_3+1} \\
&= \frac{R+m_3}{2(n_3+1)^2} - \frac{\langle m, n \rangle}{n_3+1} + \frac{R-m_3}{2} - \frac{(R+m_3)n_3^2}{2(1+n_3)^2} + \frac{m_3 n_3}{n_3+1} \\
&= \frac{(R+m_3)(1-n_3^2)}{2(n_3+1)^2} - \frac{\langle m, n \rangle - m_3 n_3}{n_3+1} + \frac{R-m_3}{2} \\
&= \frac{(R+m_3)(1-n_3) - 2(\langle m, n \rangle - m_3 n_3) + (n_3+1)(R-m_3)}{2(n_3+1)} \\
&= \frac{R+m_3 - n_3 R - m_3 n_3 - 2\langle m, n \rangle + 2m_3 n_3 + R - m_3 + n_3 R - m_3 n_3}{2(n_3+1)} \\
&= \frac{2(R - \langle m, n \rangle)}{2(n_3+1)} \\
&= \frac{h}{n_3+1}.
\end{aligned}$$

□

Observação 1.32 Uma esfera orientada $C(m, R)$ vista como o conjunto de seus planos tangentes P é associada no modelo isotrópico da geometria de Laguerre a uma i -esfera de Möbius. Os planos tangentes comuns a duas esferas orientadas correspondem aos pontos comuns de duas i - M -esferas.

Superfícies L-mínimas no modelo isotrópico.

Uma superfície regular orientável Φ em \mathbb{R}^3 pode ser representada em forma de Laguerre invariante como envelope dos chamados elementos de contato (p, T) , onde $p \in \Phi$ e T é o plano tangente orientado de Φ em p . O elemento de contato (p, T) representa todas as esferas orientadas que tocam a superfície Φ em p . Como tal, estas são invariantes sobre transformações de Laguerre, já que as esferas de um elemento contato formam uma reta no espaço de Minkowski. Uma maneira de estudar a geometria diferencial de Laguerre de Φ é escolher uma esfera orientada específica M em cada elemento contato de Φ em uma forma invariante, e estudar a geometria diferencial da família de esferas a dois parâmetros incorporado no espaço de Minkowski. A escolha usual de M é o ponto médio das esferas principais Π_1 e Π_2 em p . A geometria diferencial de Laguerre de Φ é a geometria diferencial da 2 – *superfície* $\Phi_M \subset \mathbb{R}_1^4$ a qual é formada por todos os pontos M correspondentes às esferas meias de Φ . Φ_M é chamada L-imagem de Gauss. Uma superfície mínima Laguerre é definida como uma superfície cuja imagem $\Phi_M \subset \mathbb{R}_1^4$ é um minimizador local do funcional de área $\Omega \subset \mathbb{R}_1^4$.

2.1 Superfícies L-mínimas.

Sejam p um ponto de uma superfície regular $\Phi \subset \mathbb{R}^3$, e T o plano tangente orientado de Φ em p . Considere uma transformação de Laguerre L . Pela observação (1.29), tem-se que $T(p)$ não é necessariamente um ponto, mas $L(T)$ é um plano orientado. Assim, na geometria de Laguerre uma superfície regular Φ será representada como o conjunto de seus planos tangentes orientados.

Definição 2.1 *Sejam p um ponto de uma superfície regular Φ , e T o plano tangente orientado de Φ em p . O par ordenado (p, T) é chamado **elemento contato** da superfície regular Φ em p . A reta ℓ que passa por p e é perpendicular a T é chamada **reta normal**.*

Observação 2.1 *O conjunto de todas as esferas orientadas as quais são tangentes a T em p são centradas na superfície normal. Uma L-transformação envia cada família de esferas parabólicas novamente a uma família de esferas parabólicas.*

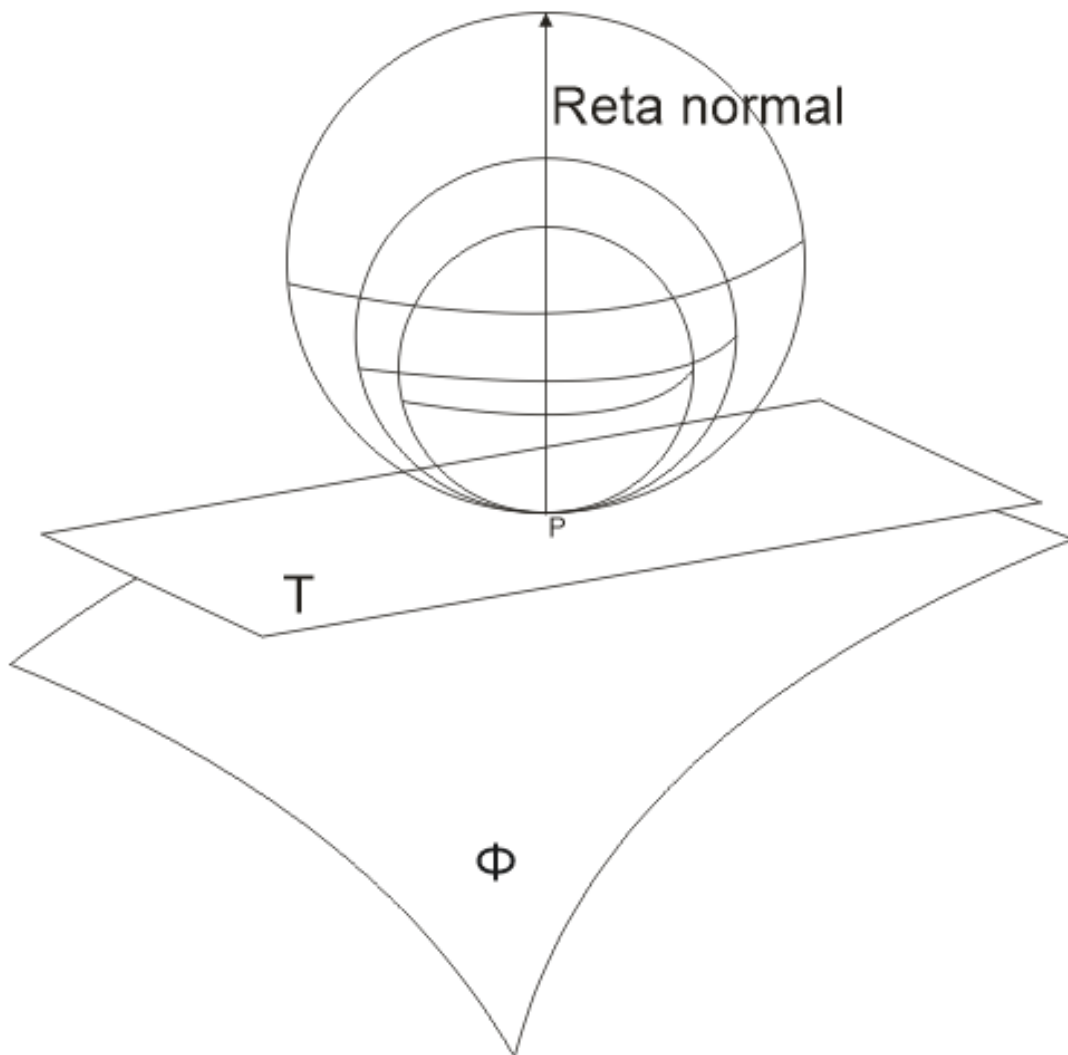


Figura 2.1: Superfície normal.

Observação 2.2 Uma superfície desenvolvível vista como família de um parâmetro de seu conjunto de planos tangentes orientados, é enviada a uma curva especial na geometria isotrópica via (1–45). Isto é, uma superfície desenvolvível é obtida pelo movimento de uma linha, sendo assim o seu elemento gerador. O plano tangente de toda a superfície desenvolvível, que é ao longo de toda a geratriz. Qualquer plano tangente pode ser considerado como o desenvolvimento sobre ele, combinando a totalidade da superfície. Portanto, tem-se o seguinte teorema.

Teorema 2.2 Seja Φ uma superfície regular não desenvolvível ($K \neq 0$). Se Φ é parametrizada pelos planos tangentes orientados então Φ é enviada a uma superfície Φ^i no modelo isotrópico via (1–45).

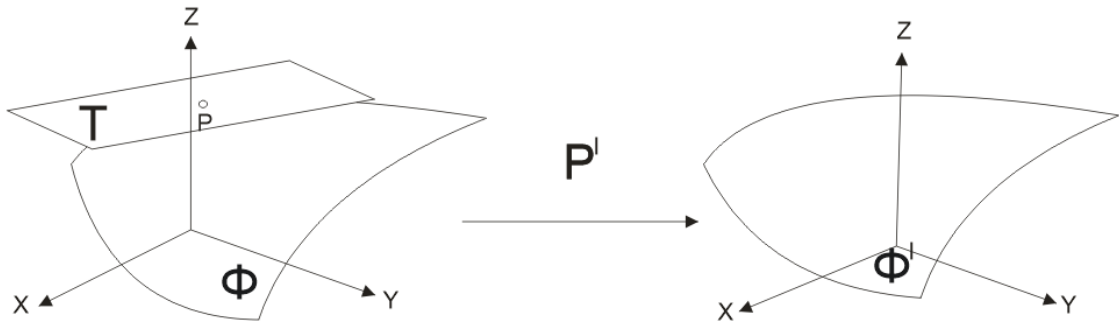


Figura 2.2: Modelo isotrópico da geometria de Laguerre.

2.1.1 Transformações e superfícies de Legendre.

Na geometria de Laguerre, um ponto p sobre uma superfície regular Φ em \mathbb{R}^3 é representado por seu plano tangente orientado. Agora, seja Φ uma superfície regular dada pelo gráfico de uma função diferenciável $z = f(u, v)$. O método a seguir é parametrizar um ponto $p \in \Phi$ utilizando o plano tangente T da superfície Φ no ponto p .

Suponha $X(u, v, f(u, v))$ a parametrização em torno de $p \in \Phi$. Seja T o plano tangente da superfície Φ no ponto p , então T pode ser escrito como o conjunto de pontos $x \in \mathbb{R}^3$ tais que $\langle N, x - p \rangle = 0$, onde N é o vetor normal na superfície Φ em p . Se $h = -\langle N, p \rangle$, então T pode ser representado como o elemento $(N, h) = (f_u, f_v, -1, uf_u + vf_v - f) \in \mathbb{R}^4$. Como a terceira componente de N é -1 para todo $p \in \Phi$, então T pode ser visto como $(f_u, f_v, uf_u + vf_v - f) \in \mathbb{R}^3$.

Definição 2.3 Seja Φ uma superfície regular dada pelo gráfico de uma função diferenciável $z = f(u, v)$. Defina-se:

$$\zeta(\Phi) = \Phi^* := (f_u, f_v, uf_u + vf_v - f). \quad (2-1)$$

ζ e Φ^* são chamadas **transformação e superfície de Legendre**, respectivamente, associadas a Φ .

Definição 2.4 Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Diz-se que uma função $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma mudança de coordenadas em U se verifica as seguintes condições:

1. g é de classe C^∞ .
2. g é injetora.
3. A derivada de g é injetora ($DET(g'(t)) \neq 0$ para todo $t \in U$).

Teorema 2.5 Seja Φ uma superfície regular dada pelo gráfico de uma função diferenciável $z = f(u, v)$ definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, além-disso, suponha que Φ tem curvatura

isotrópica diferente de zero ($K_i = f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2 \neq 0$). Seja $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como:

$$g(u, v) = (f_u(u, v), f_v(u, v)), \quad (2-2)$$

onde $(u, v) \in U$, então g é uma mudança de coordenadas em U , e

$$\zeta(\Phi) = \Phi^* := (p, q, up + vq - f), \quad (2-3)$$

onde $f_u(u, v) = p$ e $f_v(u, v) = q$.

Prova.

1. g é de classe C^∞ , já que $z = f(u, v)$ é uma função diferenciável, portanto, $f_u(u, v)$ e $f_v(u, v)$ são diferenciáveis.
2. $(DET(g'(u, v))) = f_{uu}(u, v)f_{vv}(u, v) - f_{uv}^2(u, v) = K \neq 0$, logo a derivada de g é injetora para todo $(u, v) \in U$.
3. Pelo teorema da função inversa, g é um difeomorfismo local para cada ponto $(u, v) \in U$, portanto, a função g é injetora em U .

□

Corolário 2.6 A transformada inversa de Legendre de uma superfície Φ^* é dada por:

$$\zeta^{-1}(\Phi^*) = \zeta^{-1}(f_u, f_v, uf_u + vf_v - f) := (\Omega_p, \Omega_q, p\Omega_p + q\Omega_q - \Omega), \quad (2-4)$$

onde $p = f_u$, $q = f_v$, e $\Omega = up + vq - f$.

Prova. Basta provar que $\zeta^{-1}(\zeta(\Phi)) = \Phi$.

$$\begin{aligned} \zeta^{-1}(\zeta(\Phi)) &:= \zeta^{-1}(\zeta(u, v, f(u, v))) \\ &:= \zeta^{-1}(f_u, f_v, uf_u + vf_v - f), \end{aligned}$$

aplicando a mudança de variáveis dada pelo teorema (2.5), tem-se:

$$\begin{aligned} \zeta^{-1}(\zeta(\Phi)) &:= \zeta^{-1}(p, q, \Omega(p, q)) \\ &:= (u, v, up + vq - (up + vq - f)) \\ &:= (u, v, f(u, v)) \\ &:= \Phi. \end{aligned}$$

□

Definição 2.7 *Seja Φ uma superfície regular. Para cada ponto $p \in \Phi$ existem duas curvaturas principais k_1, k_2 , e um vetor normal de Gauss N . Defina-se as **esferas principais** $\Pi_1(m_1, R_1), \Pi_2(m_2, R_2) \in \mathbb{R}^4$ com raio $R_i = \frac{1}{k_i}$, e centro $m_i = p + R_i N$, $i = 1, 2$. Além disso, define-se a **esfera meia** como a esfera orientada com centro $m = \frac{m_1 + m_2}{2}$, e raio $R = \frac{R_1 + R_2}{2}$. Estas esferas médias orientadas são denotadas como $M := (m, R) \in \mathbb{R}^4$.*

Teorema 2.8 *As esferas médias são invariantes sobre as transformações de Laguerre.*

Prova. As esferas médias são vistas no modelo ciclográfico como pontos medios das esferas principais, então, basta provar que as transformações de Laguerre no modelo ciclográfico preservam pontos medios. Para isto, sejam $x, y \in \mathbb{R}^4$, e L uma transformação de Laguerre. Pela observação (1.28), as transformações de Laguerre são funções especiais afim da forma $L(x) = a + Ax$, com $a \in \mathbb{R}^4$ constante, e A uma matriz de uma aplicação linear de $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Logo

$$\begin{aligned} L\left(\frac{x+y}{2}\right) &= A\left(\frac{x+y}{2}\right) + a \\ &= \frac{A(x) + A(y)}{2} + a \\ &= \frac{A(x) + A(y) + 2a}{2} \\ &= \frac{L(x) + L(y)}{2}. \end{aligned}$$

□

Definição 2.9 *Seja Φ uma superfície regular em \mathbb{R}^3 . Defina-se a integral de superfície (conhecida como a energia geométrica)*

$$\Omega = \int_{\Phi} \frac{H^2 - K}{K} dA, \quad (2-5)$$

onde H, K , e dA são a curvatura meia, curvatura Gaussiana e elemento de superfície de área, respectivamente, no espaço Euclidiano. Os minimizadores locais de Ω são chamados **superfícies mínimas de Laguerre (L-mínimas)**.

Definição 2.10 *Seja Φ uma superfície regular em \mathbb{R}^3 . Defina-se a **L-imagem de Gauss de Φ** como o conjunto de todos os pontos das esferas médias orientadas M correspondentes às esferas médias de Φ . A L-imagem de Gauss de Φ é denotada como $\Phi_M \subset \mathbb{R}^4$.*

Observação 2.3 *A geometria diferencial de Laguerre de Φ é a geometria diferencial da L-imagem de Gauss Φ_M no espaço de Minkowski 4-dimensional \mathbb{R}_1^4 o qual é baseado no produto interno (1-39).*

Definição 2.11 *Seja Φ uma superfície regular em \mathbb{R}^3 . Diz-se que Φ é uma superfície mínima de Laguerre se sua L-imagem de Gauss Φ_M é um minimizador local do funcional de área Ω em \mathbb{R}_1^4 .*

Teorema 2.12 *Seja Φ superfície regular. Φ é uma superfície mínima de Laguerre se, somente se Φ_M é um minimizador local de*

$$\Omega = \frac{1}{4} \int_{\Phi} (R_1 - R_2)^2 K dA, \quad (2-6)$$

aqui, o funcional Ω mede a derivação a partir de uma esfera.

Prova.

$$\begin{aligned} \frac{H^2 - K}{K} &= \frac{\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)^2 - k_1k_2}{k_1k_2} \\ &= \frac{\frac{k_1^2+2k_1k_2+k_2^2}{4} - k_1k_2}{k_1k_2} \\ &= \frac{k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2}{4k_1k_2} \\ &= \frac{1}{4} \left(\left(\frac{1}{k_2}\right)^2 - \frac{2}{k_1k_2} + \left(\frac{1}{k_1}\right)^2 \right) k_1k_2 \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)^2 k_1k_2 \\ &= \frac{1}{4} (R_2 - R_1)^2 K. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.13 *Se Φ é uma superfície mínima regular no espaço Euclidiano, então Φ é uma superfície mínima de Laguerre.*

Prova. *Seja Φ uma superfície mínima regular, isto é, para todo p em Φ as curvaturas principais k_1, k_2 cumprem $k_1 + k_2 = 0$. Segue-se*

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 &= \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \\ &= \frac{k_1 + k_2}{k_1k_2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
m &= \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{2p + \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)N}{2} \\
&= \frac{2p + \left(\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}\right)N}{2} \\
&= p.
\end{aligned}$$

Logo, as esferas médias são os pontos p da superfície Φ , e assim, Φ_M coincide com $\Phi \subset \mathbb{R}^3$. Em \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}_1^4 induz a métrica canônica Euclidiana, portanto, o funcional Ω em \mathbb{R}_1^4 coincide com o funcional Ω no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 . Segue-se

$$\begin{aligned}
\Omega &= \int_{\Phi_M} (R_1 - R_2)^2 K dA \\
&= \int_{\Phi} \frac{H^2 - K}{K} dA \\
&= \int_{\Phi} -1 dA \\
&= - \int_{\Phi} 1 dA,
\end{aligned}$$

a área do funcional Ω é um, o qual prova que Φ é uma superfície mínima de Laguerre. \square

Observação 2.4 As superfícies mínimas regulares no espaço Euclidiano são invariantes sobre as transformações de Laguerre, em particular qualquer deslocamento de uma superfície mínima Euclidiana é também uma superfície mínima de Laguerre.

2.1.2 Representação em coordenadas complexas.

Outra representação de um plano orientado $P := (n, h)$ com vetor normal unitário $n = (n_1, n_2, n_3)$, é dada pelas coordenadas complexas (u, v, w) onde $u, v, w \in \mathbb{C}$. Para isto, sejam $u = x + iy$ e $v = x - iy$ dois números complexos conjugados, as duas primeiras coordenadas (u, v) define o vetor normal unitário n do plano orientado P via

$$(n_1, n_2, n_3) = \frac{1}{1 + uv} (u + v, i(v - u), 1 - uv), \quad (2-7)$$

portanto,

$$\begin{cases} \frac{1}{n_3 + 1} = \frac{1 + x^2 + y^2}{2} \\ \frac{n_1}{n_3 + 1} = x \\ \frac{n_2}{n_3 + 1} = y. \end{cases}$$

Neste caso, substituindo (2-7) em (1-45) torna-se:

$$P := (u, v, h) \rightarrow P^i := \left(x, y, \frac{(1 + uv)h}{2}\right), \quad (2-8)$$

Além disso, h pode-se representar pelas duas primeiras coordenadas complexas via a função w , isto é, $w(u, v) = h$. Esta parametrização é conhecida como coordenadas de Bonnet. (ver [2]).

Estas coordenadas complexas (u, v, w) de um plano tangente P estão relacionadas à representação de $P^i := (x, y, z)$ no modelo isotrópico.

$$\begin{cases} (x, y, z) = \frac{1}{2}(u + v, i(v - u), w) \\ (u, v, w) = (x + iy, x - iy, 2z). \end{cases} \quad (2-9)$$

Teorema 2.14 *Seja Φ uma superfície regular. Se Φ é parametrizada pelos planos tangentes por meio das coordenadas complexas (u, v, w) via a função $w(u, v)$, então*

$$\Omega = \frac{i}{2} \int \int w_{uu} w_{vv} du dv. \quad (2-10)$$

Prova. Ver [2]. □

Observação 2.5 *Agora tem-se um problema variacional para a única função $w(u, v)$, que não está vinculado a qualquer restrição. Para a função*

$$F = \frac{i}{2} w_{uu} w_{vv},$$

tem-se a equação de Euler-Lagrange (Ver[2])

$$\frac{\partial}{\partial u^2} \frac{\partial F}{\partial w_{uu}} + \frac{\partial}{\partial v^2} \frac{\partial F}{\partial w_{vv}} = 0.$$

Isto conduz à equação diferencial

$$w_{uuvv} = 0. \quad (2-11)$$

2.2 Superfícies L-mínimas no modelo isotrópico da geometria de Laguerre.

Com os conteúdos mostrados até agora, tem-se uma relação importante das superfícies no modelo isotrópico Φ^i as quais representam superfícies mínimas de Laguerre Φ no modelo isotrópico da geometria de Laguerre.

Teorema 2.15 *Uma superfície mínima de Laguerre Φ , definida como minimizador de energia (2–5) aparece no modelo isotrópico da geometria de Laguerre como minimizador Φ^i da energia isotrópica de Willmore [2], dada por:*

$$\Omega = \int (H_i^2 - K_i) dA_i = \frac{1}{4} \int \int [(f_{xx} - f_{yy})^2 + 4f_{xy}^2] dx dy. \quad (2-12)$$

A superfície Φ^i é dada pelo gráfico de uma função bi-harmônica f ($\Delta(\Delta(f)) = 0$).

Prova.

Seja Φ uma superfície regular. Usando a correspondência em (2–9) entre as coordenadas de Bonnet de um plano e seu ponto imagem $P^i := (x, y, z)$ no modelo isotrópico, tem-se

$$2z = w(u, v) = w(x + iy, x - iy) = 2f(x, y). \quad (2-13)$$

Como

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{-i}{2}, \end{cases}$$

segue-se

$$w_u = 2(f_x x_u + f_y y_u) = 2 \left(\frac{1}{2} f_x - \frac{1}{2} i f_y \right) = f_x - i f_y,$$

e

$$w_v = 2(f_x x_v + f_y y_v) = 2 \left(\frac{1}{2} f_x + \frac{1}{2} i f_y \right) = f_x + i f_y.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} w_{uu} &= f_{xx} x_u + f_{yx} y_u - i f_{xy} x_u - i f_{yy} y_u \\ &= \frac{1}{2} f_{xx} - \frac{1}{2} i f_{yx} - \frac{1}{2} i f_{xy} - \frac{1}{2} f_{yy} \\ &= \frac{1}{2} (f_{xx} - f_{yy} - 2i f_{xy}), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 w_{vv} &= f_{xx}x_v + f_{yx}y_v + if_{xy}x_v + if_{yy}y_v \\
 &= \frac{1}{2}f_{xx} + \frac{1}{2}if_{yx} + \frac{1}{2}if_{xy} - \frac{1}{2}f_{yy} \\
 &= \frac{1}{2}(f_{xx} - f_{yy} + 2if_{xy}).
 \end{aligned}$$

O integrando em (2-10) fica

$$\begin{aligned}
 w_{uu}w_{vv} &= \left[\frac{1}{2}(f_{xx} - f_{yy} - 2if_{xy}) \right] \left[\frac{1}{2}(f_{xx} - f_{yy} + 2if_{xy}) \right] \\
 &= \frac{1}{4} [((f_{xx} - f_{yy}) - 2if_{xy})((f_{xx} - f_{yy}) + 2if_{xy})] \\
 &= \frac{1}{4} [(f_{xx} - f_{yy})^2 + 4f_{xy}^2] \\
 &= \frac{1}{4} [f_{xx}^2 - 2f_{xx}f_{yy} + f_{yy}^2 + 4f_{xy}^2] \tag{2-14} \\
 &= \left(\frac{f_{xx}^2 + 2f_{xx}f_{yy} + f_{yy}^2}{4} \right) - \left(\frac{4f_{xx}f_{yy} - 4f_{xy}^2}{4} \right) \\
 &= \left(\frac{f_{xx} + f_{yy}}{2} \right)^2 - (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2) \\
 &= H_i^2 - K_i.
 \end{aligned}$$

Aqui, $2H_i = \Delta f$ e $K_i = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ denota as curvaturas isotrópicas da superfície $\Phi^i : z = f(x, y)$ a qual representa Φ no modelo isotrópico.

A mudança de variável $(u, v) \rightarrow (x + iy, x - iy)$ tem como Jacobiano associado

$$\begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{vmatrix} = -i - i = -2i.$$

Portanto, $dudv = -2idxdy = -2idA_i$ com dA_i como elemento de área isotrópico.

O funcional Ω expressado em termos da geometria isotrópica de Φ^i ,

$$\Omega = \int (H_i^2 - K_i) dA_i = \frac{1}{4} \int \int [(f_{xx} - f_{yy})^2 + 4f_{xy}^2] dxdy, \tag{2-15}$$

esta é a contrapartida isotrópica da energia de Willmore $E = \int (H^2 - K) dA$ da geometria de Möbius Euclidiana.

No modelo isotrópico, a equação de Euler-Lagrange (2-11) de superfícies L-mínimas é a equação

$$\begin{aligned}
w_{vvuu} &= \frac{1}{2} (f_{xx} - f_{yy} - 2if_{xy})_{vv} \\
&= \frac{1}{2} (f_{xxx}x_v + f_{yxx}y_v - f_{xyy}x_v - f_{yyy}y_v - 2if_{xxy}x_v - 2if_{yxy}y_v)_v \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}f_{xxx} + \frac{1}{2}if_{yxx} - \frac{1}{2}f_{xyy} - \frac{1}{2}if_{yyy} - 2i\frac{1}{2}f_{xxy} - 2i\frac{1}{2}if_{yxy} \right)_v \\
&= \frac{1}{4} (f_{xxx} - if_{yxx} + f_{xyy} - if_{yyy})_v \\
&= \frac{1}{4} (f_{xxx}x_v + f_{yxx}y_v - if_{xyxx}x_v - if_{yyxx}y_v + f_{xxy}x_v + f_{yxy}y_v - if_{xyyy}x_v - if_{yyyy}y_v) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}f_{xxx} + \frac{1}{2}if_{yxx} - i\frac{1}{2}f_{xyxx} - i\frac{1}{2}if_{yyxx} + \frac{1}{2}f_{xxy} + \frac{1}{2}if_{yxy} - i\frac{1}{2}f_{xyyy} - i\frac{1}{2}if_{yyyy} \right) \\
&= \frac{1}{8} (f_{xxx} + 2f_{xxy} + f_{yyy}) \\
&= \frac{1}{8} \Delta(\Delta(f)).
\end{aligned}$$

$$\Delta^2 f = \Delta(\Delta(f)) = 0, \quad (2-16)$$

portanto, a superfície $\Phi^i : z = f(x, y)$ é dada pelo gráfico de uma função biarmônica f . \square

Corolário 2.16 *Seja Φ^i a superfície dada pelo gráfico de uma função bi-harmônica f . Então a correspondente superfície mínima de Laguerre Φ é dada por:*

$$\frac{1}{1+x^2+y^2} \begin{pmatrix} (x^2 - y^2 - 1)f_x + 2xyf_y - 2xf \\ (y^2 - x^2 - 1)f_y + 2xyf_x - 2yf \\ 2xf_x + 2yf_y - 2f \end{pmatrix}. \quad (2-17)$$

Prova.

Seja $(x, y, f(x, y))$ um ponto no espaço isotrópico I^3 . Este ponto corresponde no espaço Euclidiano a um plano, Pelo teorema (1.68) estas coordenadas planas vem dadas por $P := (n_1, n_2, n_3, h) = \frac{2}{1+x^2+y^2} \left(x, y, \frac{1-x^2-y^2}{2}, f(x, y) \right)$. P pode ser escrito em seus coordenadas planas homogêneas $P := \left(x, y, \frac{1-x^2-y^2}{2}, f(x, y) \right)$ (Ver [16]). Agora, tem-se a superfície em coordenadas planas. Para converter isto na parametrização das coordenadas pontais da superfície regular, tem-se que diferenciar o vetor do plano coordenado P com respeito a x e y , isto vem dada por:

$$P_x = (1, 0, -x, f_x), \quad (2-18)$$

e

$$P_y = (0, 1, -y, f_y), \quad (2-19)$$

e formar o produto vetorial $P \times P_x \times P_y$ para obter o ponto da superfície regular em coordenadas homogêneas. Isto é:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{l} \\ x & y & \frac{1-x^2-y^2}{2} & f(x,y) \\ 1 & 0 & -x & f_x \\ 0 & 1 & -y & f_y \end{vmatrix} = p_1\hat{i} - p_2\hat{j} + p_3\hat{k} - p_4\hat{l},$$

onde

$$p_1 = \begin{vmatrix} y & \frac{1-x^2-y^2}{2} & f(x,y) \\ 0 & -x & f_x \\ 1 & -y & f_y \end{vmatrix} = \frac{2xf(x,y) - (x^2 - y^2 - 1)f_x - 2xyf_y}{2},$$

$$p_2 = \begin{vmatrix} x & \frac{1-x^2-y^2}{2} & f(x,y) \\ 1 & -x & f_x \\ 0 & -y & f_y \end{vmatrix} = \frac{-2yf(x,y) - (x^2 - y^2 + 1)f_y + 2xyf_x}{2},$$

$$p_3 = \begin{vmatrix} x & y & f(x,y) \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -xf_x - yf_y + f(x,y),$$

$$p_4 = \begin{vmatrix} x & y & \frac{1-x^2-y^2}{2} \\ 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \end{vmatrix} = \frac{1 + x^2 + y^2}{2}.$$

A representação não homogênea (ver [16]) é dada por $(\frac{p_1}{p_4}, \frac{p_2}{p_4}, \frac{p_3}{p_4})$. Logo,

$$\frac{1}{1 + x^2 + y^2} \begin{pmatrix} (x^2 - y^2 - 1)f_x + 2xyf_y - 2xf \\ (y^2 - x^2 - 1)f_y + 2xyf_x - 2yf \\ 2xf_x + 2yf_y - 2f \end{pmatrix}.$$

Para ver se o corolário (2.16) é verdade, tem-se que mostrar que (p_1, p_2, p_3, p_4) produto escalar com P , P_x e P_y é zero.

□

Objetos da geometria isotrópica	Definição no espaço Euclidiano	Superfície correspondente na geometria de Laguerre
Ponto	Ponto no espaço isotrópico	Plano orientado
Plano não isotrópico	Plano não paralelo ao eixo z	Esfera orientada
i -esfera de tipo parabólico	Paraboloide de revolução com o eixo z paralelo	Esfera orientada
Superfície i -Willmore	Gráfico de uma função biarmônica $z = f(x, y)$	Superfície mínima de Laguerre

Tabela 2.1: *Relação entre a geometria isotrópica e a geometria de Laguerre.*

A tabela mostrada acima mostra um resumo específico do trabalho feito até agora.

Aplicando o corolário (2.16) às funções bi-harmônicas dadas na observação (1.5), tem-se que as superfícies parametrizadas por:

$$\frac{1}{1+x^2+y^2} \begin{pmatrix} (x^2 - y^2 - 1)(3x^2 - 3y^2) + 2xy(-6xy) - 2x(x^3 - 3xy^2) \\ (y^2 - x^2 - 1)(-6xy) + 2xy(3x^2 - 3y^2) - 2y(x^3 - 3xy^2) \\ 2x(3x^2 - 3y^2) + 2y(-6xy) - 2(x^3 - 3xy^2) \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{1+x^2+y^2} \begin{pmatrix} (x^2 - y^2 - 1)(e^x(x\cos(y) + (1-y)\sen(y))) + \\ 2xy(-e^x((1+x)\sen(y) + y\cos(y))) - 2x(e^x(x\cos(y) - y\sen(y))) \\ (y^2 - x^2 - 1)(-e^x((1+x)\sen(y) + y\cos(y))) + \\ 2xy(e^x(x\cos(y) + (1-y)\sen(y))) - 2y(e^x(x\cos(y) - y\sen(y))) \\ 2x(e^x(x\cos(y) + (1-y)\sen(y))) + 2y(-e^x((1+x)\sen(y) + y\cos(y))) \\ -2(e^x(x\cos(y) - y\sen(y))) \end{pmatrix}$$

são superfícies mínimas de Laguerre no espaço Euclidiano.

2.3 Superfícies mínimas de Laguerre do tipo esférico.

A seguir, considere-se $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima de Laguerre a qual tem como imagem $\Phi^i \subset I^3$ no espaço isotrópico o gráfico de uma função harmônica f , isto é, uma superfície mínima isotrópica ($\Delta(f) = 0$).

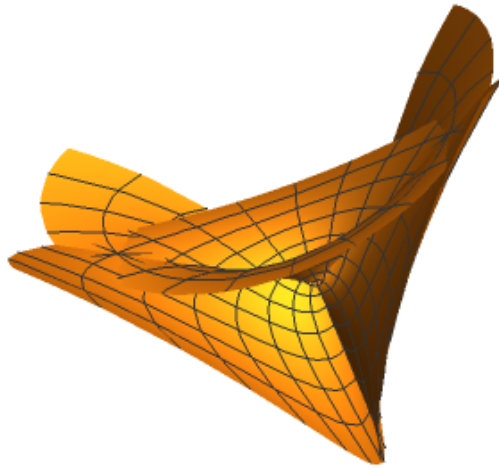


Figura 2.3: Gráfico da superfície mínima de Laguerre dada por $f_1(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

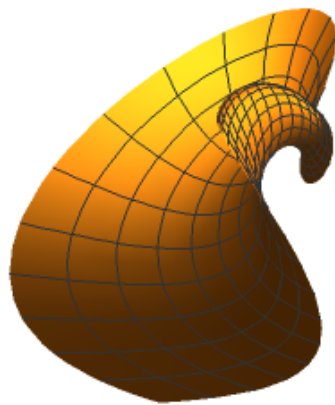


Figura 2.4: Gráfico da superfície mínima de Laguerre dada por $f_2(x,y) = e^x(x\cos(y) - y\sin(y))$.

Observação 2.6 Toda função harmônica $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é bi-harmônica mas a recíproca não necessariamente é verdadeira.

Teorema 2.17 Se $\Phi^i : z = f(x, y)$ é a imagem de Φ , então o conjunto de esferas médias $M = (m_1, m_2, m_3, R) \subset \mathbb{R}^4$ de Φ pode ser parametrizado como:

$$\begin{cases} m_1 = \frac{x}{2}\Delta(f) - f_x \\ m_2 = \frac{y}{2}\Delta(f) - f_y \\ m_3 = \frac{1-x^2-y^2}{4}\Delta(f) + xf_x + yf_y - f \\ R = \frac{1+x^2+y^2}{4}\Delta(f) - xf_x - yf_y + f. \end{cases} \quad (2-20)$$

Prova. Ver [2]. □

Corolário 2.18 No modelo isotrópico I^3 , a esfera meia M com parâmetros (x_0, y_0) é a $i - M -$ esfera

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0) + \frac{1}{4} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \Delta(f(x_0, y_0)). \quad (2-21)$$

Prova. Substituindo (2-20) em (1-46), tem-se:

$$\begin{aligned} S^i := z &= \frac{\left(\frac{1+x_0^2+y_0^2}{4}\Delta(f) - x_0f_x - y_0f_y + f\right) + \left(\frac{1-x_0^2-y_0^2}{4}\Delta(f) + x_0f_x + y_0f_y - f\right)}{2} (x^2 + y^2) \\ &\quad - \left(\frac{x_0}{2}\Delta(f) - f_x\right)x - \left(\frac{y_0}{2}\Delta(f) - f_y\right)y \\ &\quad + \frac{\left(\frac{1+x_0^2+y_0^2}{4}\Delta(f) - x_0f_x - y_0f_y + f\right) - \left(\frac{1-x_0^2-y_0^2}{4}\Delta(f) + x_0f_x + y_0f_y - f\right)}{2} \\ &= \frac{\frac{2}{4}\Delta(f)}{2} (x^2 + y^2) - \frac{x_0}{2}\Delta(f)x + f_x x - \frac{y_0}{2}\Delta(f)y + f_y y + \frac{\frac{2}{4} [(x_0^2 + y_0^2) \Delta(f)]}{2} \\ &\quad - x_0f_x - y_0f_y + f \\ &= \frac{1}{4}\Delta(f) (x^2 + y^2) - \frac{x_0}{2}\Delta(f)x + f_x x - \frac{y_0}{2}\Delta(f)y + f_y y + \frac{1}{4} (x_0^2 + y_0^2) \Delta(f) \\ &\quad - x_0f_x - y_0f_y + f \\ &= \frac{1}{4} [(x^2 + y^2) - 2x_0x + -2y_0y + (x_0^2 + y_0^2)] \Delta(f) + (x - x_0) f_x + (y - y_0) f_y + f \\ &= \frac{1}{4} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \Delta(f) + (x - x_0) f_x + (y - y_0) f_y + f. \end{aligned} \quad (2-22)$$

□

Definição 2.19 Uma superfície $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ a qual todas as esferas médias M são tangentes a um plano orientado fixo, é chamada uma **superfície mínima de Laguerre do tipo esférico**.

Teorema 2.20 Seja $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície cujas esferas médias são tangentes a um plano orientado Π , isto é, uma superfície mínima de Laguerre do tipo esférico. Esta superfície aparece no modelo isotrópico como uma superfície mínima $\Phi^i \subset I^3$ (gráfico de uma função harmônica), se é possível configurar uma transferência sobre I^3 tal que Π é enviado ao ponto ideal 0. Consequentemente, uma superfície mínima isotrópica $\Phi^i \subset I^3$ determina uma superfície mínima de Laguerre $\Phi \subset \mathbb{R}^3$.

Prova. (\Rightarrow) Suponha que é possível introduzir uma mudança de coordenadas tal que o plano orientado $\Pi(n_1, n_2, n_3, h)$ é enviado ao plano orientado $P(0, 0, -1, 0)$ (o plano XY com orientação $(0, 0, -1)$) pela definição (1.67) este é enviado ao ponto ideal 0 no modelo isotrópico. Seja M uma esfera a qual é tangente a Π , então $M := (x, y, 0) + \lambda(0, 0, -1) = (x, y, -\lambda, \lambda) \in \mathbb{R}^4$, portanto, satisfaz $m_3 + R = 0$. Pela equação (1-46) a correspondente $i - M -$ esfera em I^3 são planos. Pela equação (2-21) estas aparecem quando $\Delta(f) = 0$, e assim Φ^i é uma superfície mínima isotrópica.

(\Leftarrow) Uma superfície mínima isotrópica Φ^i ($\Delta(f) = 0$) determina planos tangentes M^i de Φ^i como a imagem de esferas médias M , consequentemente as esferas M são tangentes a Π e Φ é uma superfície mínima de Laguerre do tipo esférico.

□

Pela observação (1.3), o teorema (2.20) e o corolário (2.16), as superfícies dadas por:

$$\frac{1}{1+x^2+y^2} \begin{pmatrix} (x^2 - y^2 - 1)(2x) + 2xy(-2y) - 2x(x^2 - y^2) \\ (y^2 - x^2 - 1)(-2y) + 2xy(2x) - 2y(x^2 - y^2) \\ 2x(2x) + 2y(-2y) - 2(x^2 - y^2) \end{pmatrix}, \quad (2-23)$$

$$\frac{1}{1+x^2+y^2} \begin{pmatrix} (x^2 - y^2 - 1)(e^x \cos(y)) + 2xy(-e^x \sin(y)) - 2x(e^x \cos(y)) \\ (y^2 - x^2 - 1)(-e^x \sin(y)) + 2xy(e^x \cos(y)) - 2y(e^x \cos(y)) \\ 2x(e^x \cos(y)) + 2y(-e^x \sin(y)) - 2(e^x \cos(y)) \end{pmatrix}, \quad (2-24)$$

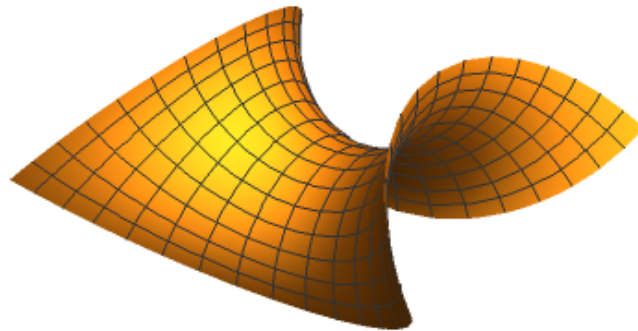


Figura 2.5: Gráfico da superfície mínima de Laguerre do tipo esférico dada por $Re(f(z)) = x^2 - y^2$.

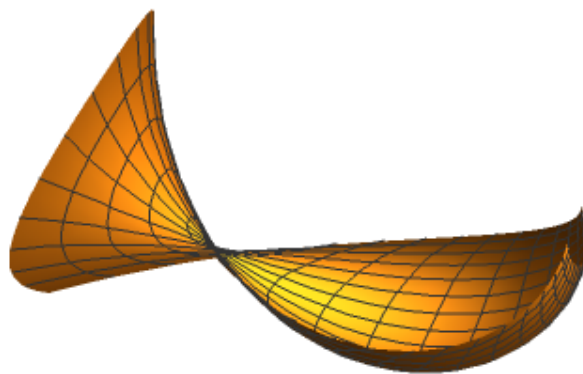


Figura 2.6: Gráfico da superfície mínima de Laguerre do tipo esférico dada por $Re(g(z)) = e^x \cos(y)$.

$$\frac{1}{1+x^2+y^2} \begin{pmatrix} (x^2-y^2-1)(-6xy) + 2xy(3y^2-3x^2) - 2x(y^3-3x^2y) \\ (y^2-x^2-1)(3y^2-3x^2) + 2xy(-6xy) - 2y(y^3-3x^2y) \\ 2x(-6xy) + 2y(3y^2-3x^2) - 2(y^3-3x^2y) \end{pmatrix}, \quad (2-25)$$

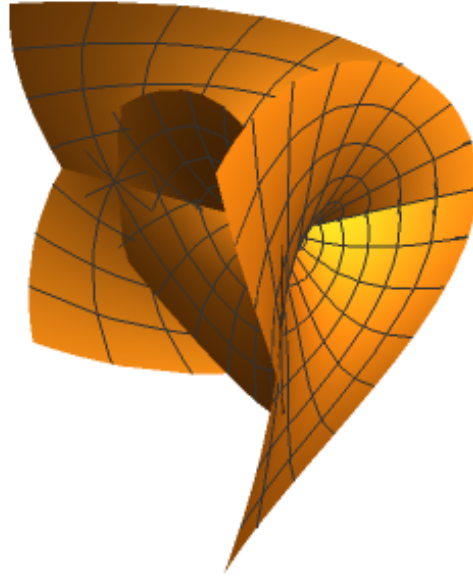


Figura 2.7: Gráfico da superfície mínima de Laguerre do tipo esférico dada por $Re(h(z)) = y^3 - 3x^2y$.

são superfícies mínimas de Laguerre do tipo esférico.

Observação 2.7 Uma vista geométrica usa o fato de que as esferas principais de $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ correspondem às esferas principais isotrópicas de $\Phi^i \subset \mathbb{P}^3$. Se estes forem $z = f_1(x,y)$ e $z = f_2(x,y)$, a i -imagem da esfera média M é $z = \frac{f_1+f_2}{2}$. As duas esferas isotrópicas principais de uma superfície mínima isotrópica $\Phi^i : z = f(x,y)$ em um ponto $p_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ são simétricas em relação ao plano tangente em p_0 (isto é uma contrapartida isotrópica de uma propriedade equivalente das esferas principais de uma superfície mínima euclidiana). Portanto, o plano tangente de Φ^i corresponde à esfera média M de Φ . Isto mostra que todas as esferas médias M são tangentes a Π .

Qualquer imagem Φ^i de uma superfície mínima de Laguerre sobre uma i - M -transformação também determina uma superfície mínima de Laguerre do tipo esférico. Além disso, existe uma conexão estritamente relacionada entre superfícies mínimas de Laguerre do tipo esférico e superfícies mínimas isotrópicas.

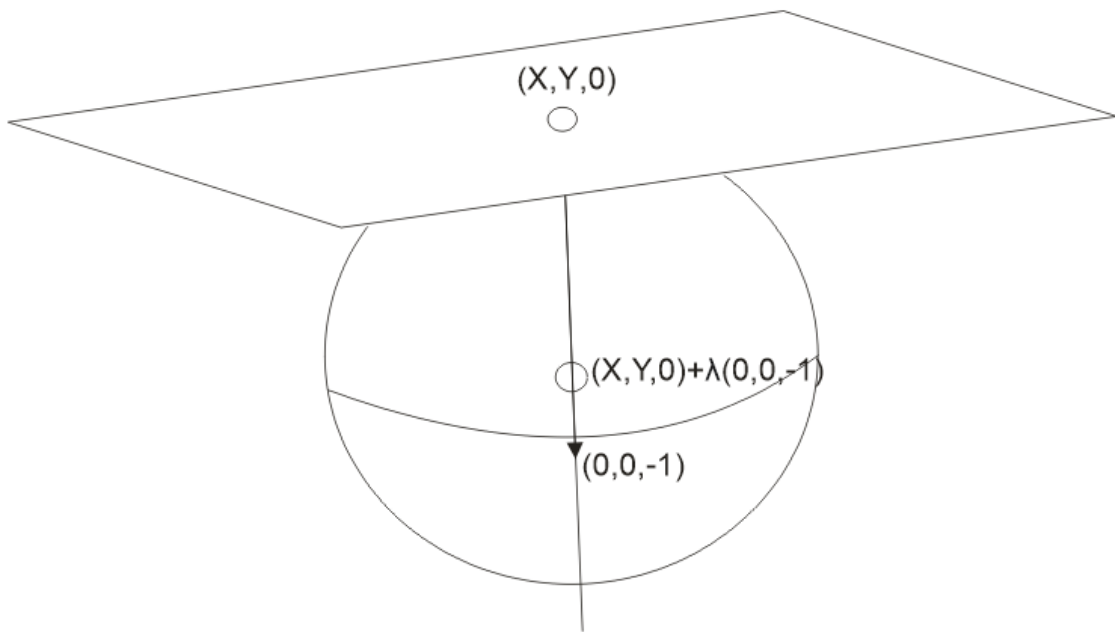


Figura 2.8: Plano orientado XY

Teorema 2.21 *Os centros das esferas médias M de uma superfície mínima de Laguerre do tipo esférico Φ forma uma superfície mínima isotrópica Φ^* , as retas isotrópicas do espaço isotrópico são ortogonais ao plano Π o qual é tangente a todas as esferas médias M .*

Prova. Usando o mesmo sistema de coordenadas como na prova do Teorema (2.20), a superfície Φ^i é o gráfico de uma função harmônica f . Usando $\Delta(f) = 0$, a equação (2-20) produz a seguinte parametrização do conjunto de pontos médios $m(x, y)$ das esferas médias de Φ

$$m(x, y) = (-f_x, -f_y, xf_x + yf_y - f). \quad (2-26)$$

A equação (2-1) mostra que a superfície Φ^* resulta da superfície dual da superfície mínima isotrópica $\Phi^i : z = f(x, y)$ por uma reflexão sobre o eixo z . \square

Já que Φ é o segundo envelope de todas as esferas médias M as quais são centradas em Φ^* e tangentes a Π , suas superfícies normais são obtidas pela reflexão de retas ortogonais a Π (no sistema de coordenadas z -paralelo) na superfície Φ^* .

Referências Bibliográficas

- [1] BLASCHKE, W. **Ii. flächentheorie in ebenenkoordinaten.** In: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, volume 3, p. 195–212. Springer, 1924.
- [2] BLASCHKE, W.; SPRINGER, J. **Vorlesungen über differential-geometrie.** Verlag, von Julius Springer, 1929.
- [3] CECIL, T. **Lie sphere geometry, with applications to submanifolds, universitext,** 2008.
- [4] DO CARMO VALERO, M. P. **Geometría diferencial de curvas y superficies.** Alianza Editorial, 1990.
- [5] HAACK, W. **Differential-geometrie,** volume 1. Wolfenbütteler Verlagsanstalt, 1948.
- [6] KÖNIG, K. **L-minimalflächen ii.** *Mitt. Math. Ges. Hamburg*, p. 378–382, 1928.
- [7] KÖNIG, K. **L-Minimalflächen.** PhD thesis, 1926.
- [8] MUSSO, E.; NICOLODI, L. **L-minimal canal surfaces.** *Rend. Mat. Appl. (7)*, 15(3):421–445, 1995.
- [9] MUSSO, E.; NICOLODI, L. **A variational problem for surfaces in Laguerre geometry.** *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(11):4321–4337, 1996.
- [10] NETO, A. L. **Funções de uma variável complexa.** Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1993.
- [11] PETERNELL, M.; POTTMANN, H. **A Laguerre geometric approach to rational offsets.** *Comput. Aided Geom. Design*, 15(3):223–249, 1998.
- [12] POTTMANN, H.; GROHS, P.; MITRA, N. J. **Laguerre minimal surfaces, isotropic geometry and linear elasticity.** *Adv. Comput. Math.*, 31(4):391–419, 2009.
- [13] POTTMANN, H.; LIU, Y. **Discrete surfaces in isotropic geometry.** In: *Mathematics of Surfaces XII*, p. 341–363. Springer, 2007.

-
- [14] POTTMANN, H.; PETERNELL, M. **Applications of Laguerre geometry in CAGD.** *Comput. Aided Geom. Design*, 15(2):165–186, 1998.
- [15] SACHS, H. **Isotrope Geometrie des Raumes.** Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1990.
- [16] SANTALÓ, L. A. **Geometría proyectiva.** Eudeba Buenos Aires, 1966.
- [17] SCHATZ, H. **Über die geometrie von laguerre.** *Monatshefte für Mathematik*, 36(1):357–386, 1929.