

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS (UFG)  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA (IME)  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

THAYLLINE ROCHA MADUREIRA

# **Bifurcação de Hopf e Aplicações**

Goiânia  
2025

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR  
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES****E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

**1. Identificação do material bibliográfico**

Dissertação     Tese     Outro\*: \_\_\_\_\_

\*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

**2. Nome completo do autor**

Thaylline Rocha Madureira

**3. Título do trabalho**

Bifurcação de Hopf e Aplicações

**4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)**

Concorda com a liberação total do documento  SIM     NÃO<sup>1</sup>

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

**a)** consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

**b)** novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

**Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.**



Documento assinado eletronicamente por **Luiz Fernando Goncalves, Professor do Magistério Superior**, em 05/12/2025, às 08:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Thaylline Rocha Madureira, Discente**, em 05/12/2025, às 12:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **5837856** e o código CRC **A4C0ACB6**.

---

THAYLLINE ROCHA MADUREIRA

# **Bifurcação de Hopf e Aplicações**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade Federal de Goiás (UFG), como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos

Orientador: Professor Doutor Luiz Fernando Gonçalves

Co-Orientador: Professor Doutor Rony Cristiano

Goiânia  
2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do  
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Madureira, Thaylline Rocha  
Bifurcação de Hopf e Aplicações [manuscrito] / Thaylline Rocha  
Madureira. - 2025.  
114 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Fernando Gonçalves; co-orientador Dr.  
Rony Cristiano .

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto  
de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em  
Matemática, Goiânia, 2025.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras.

1. Sistemas dinâmicos. 2. bifurcação. 3. Hopf. I. Gonçalves, Luiz  
Fernando, orient. II. Título.

CDU 517.938

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
**ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO**

Ata nº 14 da sessão de Defesa de Dissertação de **Thaylline Rocha Madureira**, que confere o título de Mestre em **Matemática**, na área de concentração em **Sistemas Dinâmicos**.

Ao **segundo dia do mês de dezembro do ano de dois mil e vinte e cinco**, a partir das **14h00**, via Web videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **“Bifurcação de Hopf e Aplicações”**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor **Luiz Fernando Gonçalves - IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Bruno Rodrigues de Freitas - IME/UFG**, membro titular interno; Professor Doutor **Tiago de Carvalho IBILCE/UNESP**, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Luiz Fernando Gonçalves**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao **segundo dia do mês de dezembro do ano de dois mil e vinte e cinco**.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Luiz Fernando Goncalves, Professor do Magistério Superior**, em 02/12/2025, às 15:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Bruno Rodrigues De Freitas, Professor do Magistério Superior**, em 02/12/2025, às 15:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tiago de Carvalho, Usuário Externo**, em 02/12/2025, às 15:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **5733560** e o código CRC **B6522431**.

Referência: Processo nº 23070.055005/2025-16

SEI nº 5733560

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

**Thaylline Rocha Madureira**

Graduou-se em licenciatura em matemática na Universidade Federal de Goiás. Durante sua graduação, participou dos programas PIBID (Programa de Bolsas Para Iniciação à Docência) e Residência Pedagógica no Instituto de Matemática e Estatística da UFG.

---

## Resumo

---

Madureira, T.R.. **Bifurcação de Hopf e Aplicações**. Goiânia, 2025. 114p. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Universidade Federal de Goiás (UFG).

O objetivo dessa dissertação é abordar os aspectos qualitativos da bifurcação de Hopf em sistemas de equações diferenciais ordinárias. Inicialmente, são apresentados os objetos fundamentais e resultados dessa teoria, incluindo conceitos como estabilidade estrutural e distância entre sistemas dinâmicos. Em seguida, discutem-se exemplos clássicos de bifurcações, como as do tipo sela-nó, pitchfork e transcritical. O foco principal recai sobre a bifurcação de Hopf, com ênfase em sua forma normal topológica e nos principais aspectos associados ao seu comportamento.

### Palavras-chave

Sistemas dinâmicos, bifurcação, Hopf

---

## Abstract

---

Madureira, T.R.. <**Hopf Bifurcations and their Applications**>. Goiânia, 2025. 114p. MSc. Dissertation. Programa de Pós Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Universidade Federal de Goiás (UFG).

The aim of this dissertation is to address the qualitative aspects of the Hopf bifurcation in systems of ordinary differential equations. We begin by presenting the fundamental objects and results of the theory, including concepts such as structural stability and the notion of distance between dynamical systems. Then, we discuss classical examples of bifurcations, such as saddle-node, pitchfork, and transcritical types. The main focus is placed on the Hopf bifurcation, with emphasis on its topological normal form and the main aspects related to its behavior.

### Keywords

Dynamical Systems, bifurcations, Hopf

---

# Conteúdo

---

Lista de Figuras	<b>11</b>
<b>1</b> Fundamentos da Teoria Qualitativa	<b>14</b>
1.1 Resultados Clássicos	14
<b>2</b> Bifurcações em Sistemas Dinâmicos	<b>37</b>
2.1 Bifurcações	37
2.2 Bifurcação do tipo fold	50
<b>3</b> Bifurcação de Hopf	<b>59</b>
3.1 Aspectos preliminares da bifurcação de Hopf	59
3.2 Forma normal topológica da bifurcação de Hopf	63
<b>4</b> Aplicações da Bifurcação de Hopf	<b>89</b>
4.1 Bifurcação de Hopf em modelos predador-presa	89
4.2 Bifurcação de Hopf no modelo Brusselator	106
Bibliografia	<b>113</b>

---

## Lista de Figuras

---

2.1	Comportamento qualitativo do sistema (2-4) para $\alpha = 0$ .	41
2.2	Comportamento qualitativo do sistema (2-4) para $\alpha$ não nulo.	42
2.3	Comportamento qualitativo do sistema do (2-5) para $\alpha > 0$ . O ciclo limite aparece em vermelho.	43
2.4	Comportamento qualitativo do sistema (2-5) para $\alpha$ nulo.	44
2.5	Comportamento qualitativo do sistema (2-5) para $\alpha$ negativo.	45
2.6	Comportamento qualitativo do sistema (2-6) para $\alpha$ negativo.	46
2.7	Comportamento qualitativo do sistema (2-6) para $\alpha$ positivo.	46
2.8	Diagrama da bifurcação de Pitchfork.	46
2.9	Comportamento do sistema (2-7) para $\alpha < 0$ .	47
2.10	Comportamento do sistema (2-7) para $\alpha > 0$ .	47
2.11	Diagrama da bifurcação transcritical.	48
2.12	Retrato de fase do sistema (2-12) para $\alpha < 0$ .	51
2.13	Diagrama da bifurcação do tipo fold com termo quadrático positivo.	51
2.14	Diagrama da bifurcação do tipo fold com termo quadrático negativo.	52
2.15	Curvas de equilíbrios.	53
3.1	Retratos de fase do sistema (3-1) para os diferentes valores de $\alpha$ . o ciclo limite estável (em vermelho) ocorre para $\alpha > 0$ .	61
3.2	Espaço fase-parâmetro da bifurcação de Hopf supercrítica.	62
3.3	Retratos de fase do sistema (3-1) para diferentes valores de $\alpha$ .	63
3.4	Construção do homeomorfismo entre os sistemas (3-7) e (3-8).	69
4.1	Curvas dos equilíbrios do sistema (4-2).	93
4.2	Retratos de fase do sistema (4-2) para diferentes valores de $\alpha$ .	98
4.3	Retratos de fase do sistema (4-9) para diferentes valores de $p$ .	105
4.4	Retratos de fase do sistema (4-15) para diferentes valores de $b$ .	112

---

## Introdução

---

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) são ferramentas matemáticas importantes no que diz respeito à compreensão de fenômenos em diversas áreas do conhecimento, como física e biologia. Muitos dos fenômenos estudados nessas áreas podem ser modelados e descritos por sistemas de EDO's, cujas soluções revelam propriedades essenciais, como estabilidade, instabilidade e periodicidade. No entanto, nem sempre é possível conhecer e estudar as soluções explícitas para tais equações e isso dá luz à teoria qualitativa das EDO's, que tem o objetivo de estudar equações diferenciais e seus sistemas através da análise do comportamento das soluções, mesmo sem as conhecer explicitamente. Dessa forma, tal teoria fornece resultados e ferramentas importantes no que se refere ao estudo das órbitas de equações diferenciais e análise do retrato de fase por meio de aspectos geométricos e topológicos, dentre outros.

Nesse sentido, considera-se o problema de tomar sistemas dinâmicos que são próximos, em certo sentido, e analisar se o comportamento qualitativo permanece o mesmo ou não. Sistemas que mantêm a mesma estrutura são ditos estruturalmente estáveis, conceito importante no presente trabalho. Tais sistemas podem mudar de acordo com a variação de um dado parâmetro e, assim, podem surgir retratos de fase topologicamente equivalentes, ou não. A seguir, são apresentados os capítulos desenvolvidos no decorrer do trabalho.

O primeiro capítulo trata de conceitos e resultados preliminares importantes para toda a teoria qualitativa. São apresentados o Teorema de existência e unicidade de Picard e o Teorema de Existência de Peano, resultados base da teoria. Além disso, tal capítulo aborda as soluções para EDO's lineares que são de extrema importância para o estudo das EDO's não lineares, uma vez que resultados como o Teorema de Hartman Grobman (também apresentado nesse capítulo) relacionam o comportamento da parte linear com a dinâmica do sistema não linear. Outros pontos importantes como a aplicação de retorno de Poincaré e o Teorema de Poincaré Bendixson também são comentados nesse capítulo preliminar.

O segundo capítulo apresenta os principais aspectos relacionados ao conceito de bifurcação. Para isso, considera-se o espaço de todos os sistemas dinâmicos com o objetivo de estudar o subconjunto dos sistemas que não preservam o comportamento qualita-

tivo diante de pequenas perturbações. Assim, inicialmente são introduzidos os conceitos de sistemas estruturalmente estáveis e distância entre sistemas dinâmicos, que são importantes na definição de bifurcação, entendida como a ocorrência do surgimento de retratos de fase não topologicamente equivalentes sob a variação de um ou mais parâmetros em um dado sistema. Por fim, são apresentados exemplos clássicos de sistemas nos quais ocorre uma bifurcação.

Os capítulos três e quatro abordam a bifurcação de Hopf, tema principal deste trabalho. No terceiro capítulo, são discutidos os principais aspectos teóricos dessa bifurcação, incluindo sua classificação em supercrítica e subcrítica, os retratos de fase característicos e outras propriedades relevantes. O principal objetivo é obter a forma normal topológica para sistemas genéricos submetidos a uma bifurcação desse tipo. No quarto capítulo, são apresentadas aplicações desse tipo de bifurcação.

---

# Fundamentos da Teoria Qualitativa

---

Neste capítulo, serão apresentados conceitos e resultados básicos da Teoria Qualitativa que serão importantes ao longo deste trabalho. Essa teoria desempenha papel fundamental nos estudos dos sistemas dinâmicos, uma vez que resolver explicitamente equações diferenciais nem sempre é viável. Assim, essa teoria surge com o propósito de estudar e compreender equações diferenciais sem a necessidade de resolvê-las diretamente. Neste capítulo, são apresentados alguns resultados que asseguram a existência e/ou unicidade de soluções, bem como teoremas que demonstram que, mesmo sem conhecer as soluções explicitamente, é possível entender o comportamento do sistema.

## 1.1 Resultados Clássicos

Inicialmente, serão apresentadas as definições de funções lipschitzianas e contrações, conceitos amplamente utilizados na análise matemática. Esses conceitos desempenham um papel fundamental na questão da existência e unicidade das soluções das EDO's, como será demonstrado no Teorema de Picard, enunciado posteriormente nessa seção.

**Definição 1.1** *Uma aplicação  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  chama-se Lipschitziana em  $\Omega$  relativamente a segunda variável ou, simplesmente Lipschitziana, se existe uma constante  $K$  tal que*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|,$$

para todos  $(t, x), (t, y) \in \Omega$ . Uma constante  $K$  nessas condições é chamada constante de Lipschitz de  $f$ .

**Definição 1.2** *Uma função  $F : X \rightarrow X$  definida em um espaço métrico  $(X, d)$  é chamada de contração em  $X$  se existir um número real  $K$ , com  $0 \leq K < 1$  tal que*

$$d(F(t, x), F(t, y)) \leq Kd(x, y),$$

para todos  $(t, x), (t, y) \in X$ .

Para demonstrar o Teorema de Existência e Unicidade das Soluções das EDO's, é necessário, primeiramente, enunciar e provar o Teorema do Ponto Fixo para Contrações, também conhecido como Teorema do Ponto Fixo de Banach (ou apenas Teorema de Banach). Esse teorema é fundamental na análise funcional, pois não apenas garante a existência e unicidade de um ponto fixo em uma contração, mas também oferece um método iterativo para encontrá-lo, por meio de iterações sucessivas da função (veja em [16]). O teorema foi formulado pelo matemático polonês Stefan Banach em 1922.

**Teorema 1.3** (*Teorema do Ponto Fixo para Contrações*) *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo (espaço de Banach). Se  $F : X \rightarrow X$  é uma contração em  $X$ , então  $F$  possui um único ponto fixo em  $X$ , isto é, existe um único ponto  $p$  tal que  $F(p) = p$ . Além disso,  $p$  é um atrator para a função  $F$ , isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = p, \forall x \in X$ .*

*Prova.* Primeiramente, note que, como  $F$  é uma contração em  $X$ , existe  $K \in \mathbb{R}, 0 \leq K < 1$  tal que  $d(F(t, x), F(t, y)) \leq Kd(x, y), \forall x, y \in X$  e tome  $x \in X$  arbitrário e fixado. Defina  $x_n = F^n(x)$  e considere a sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $X$ . Provaremos que  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy. Com efeito, sejam  $m, n \in \mathbb{N}$  com  $n > m$ . Logo, existe  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $m = n + r$ . Como  $F$  é uma contração em  $X$ , temos

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(F^n(x), F^m(x)) = d(F^n(x), F^{n+r}(x)) \\ &= d(F^n(x), F^n(F^r(x))) \\ &= d(F(F^{n-1}(x)), F(F^{n-1}(F^r(x)))) \end{aligned}$$

Assim, a distância  $d(x_n, x_m)$  pode ser limitada da seguinte forma

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(F(F^{n-1}(x)), F(F^{n-1}(F^r(x)))) \\ &\leq Kd(F^{n-1}(x), F^{n-1}(F^r(x))) \\ &= Kd(F(F^{n-2}(x)), F^{n-2}(F^r(x))) \\ &\leq K^2d(F^{n-2}(x), F^{n-2}(F^r(x))). \end{aligned}$$

Repetindo esse processo  $n$  vezes, obtemos

$$d(x_n, x_m) \leq K^n d(F^0(x), F^0(F^r(x))) = K^n d(x, F^r(x)).$$

Pela desigualdade triangular, temos que

$$\begin{aligned} d(x, F^r(x)) &\leq d(x, F(x)) + d(F(x), F^2(x)) + \dots + d(F^{r-1}(x), F^r(x)) \\ &\leq d(x, F(x)) + Kd(x, F(x)) + K^2d(x, F(x)) + \dots + K^{r-1}d(x, F(x)) \\ &= (1 + K + K^2 + \dots + K^{r-1})d(x, F(x)) \\ &\leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} K^j\right) d(x, F(x)). \end{aligned}$$

Como  $0 \leq K < 1$ , a série  $\sum_{j=0}^{\infty} K^j$  é convergente e converge para  $\frac{1}{1-K}$ . Assim, segue que

$$d(x, F^r(x)) \leq \frac{1}{1-K} d(x, F(x)).$$

Portanto,

$$d(x_n, x_m) \leq K^n d(x, F^r(x)) \leq \frac{K^n}{1-K} d(x, F(x)),$$

$\forall m, n$  com  $m > n$ . Como  $0 \leq K < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} K^n = 0$ . Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K^n}{1-K} d(x, F(x)) = 0.$$

Logo, dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $n > n_0$ , então

$$\left| \frac{K^n}{1-K} d(x, F(x)) \right| \leq \frac{K^n}{1-K} d(x, F(x)) < \varepsilon.$$

Assim,  $d(x_n, x_m) < \varepsilon, \forall m, n > n_0$ . Conclui-se, portanto, que  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy. Como  $(x_n)$  é Cauchy e  $(X, d)$  é completo, segue que  $(x_n)$  é convergente em  $X$ . Logo, existe  $p \in X$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = p$ . Observe que, como  $F : X \rightarrow X$  é uma contração, temos que  $F$  é contínua. Portanto,

$$\begin{aligned} F(p) &= F(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} F(F^n(x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} F^{n+1}(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} \\ &= p. \end{aligned}$$

Dessa forma, está provado que existe um ponto fixo  $p$  de  $F$ . Resta provar que tal ponto é único. Para isso, suponha que existam  $p$  e  $s$  pontos fixos de  $F$  em  $X$ . Logo,  $F(p) = p$  e  $F(s) = s$ . Assim,  $d(p, s) = d(F(p), F(s)) \leq Kd(p, s)$ . Segue que  $(1-K)d(p, s) \leq 0$ . Como  $0 \leq K < 1$  e  $d$  é uma métrica, vale que  $0 \leq d(p, s) \leq 0$  e, logo,  $p = s$ . Portanto, o ponto fixo é único. Da unicidade do ponto fixo  $p \in X$  de  $F$ , segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = p, \forall x \in X.$$

Portanto,  $p$  é atrator para a função  $F$ , concluindo o que queríamos demonstrar.  $\square$

**Corolário 1.4** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo e  $F : X \rightarrow X$  uma função contínua em  $X$ . Se existir  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $F^m : X \rightarrow X$  é uma contração, então  $F$  possui um único ponto fixo  $p \in X$ . Mais ainda,  $p$  é um atrator de  $F$ .*

*Prova.* Seja  $p$  o ponto fixo atrator de  $F^m$  dado pelo Teorema do Ponto Fixo para Contrações e tome  $n = mk + l$  com  $0 \leq l < m$ . Dado  $x \in X$ , como  $p$  é atrator de  $F^m$ , temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} [F^m]^k(F^l(x)) = p$ . Mas,  $F^n(x) = [F^m]^k(F^l(x))$  e quando  $n \rightarrow \infty$ , tem-se  $k \rightarrow \infty$ , segue-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = p$ , isto é,  $p$  é um atrator de  $F$ . Ainda, temos que

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(F(p)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{n+1}(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(F^n(p)) = F(\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(p)) = F(p).$$

Isso mostra que  $p$  é um ponto fixo de  $F$ .  $\square$

Charles Émile Picard (1856-1941) foi um matemático francês de renome, cujos escritos abrangem uma vasta gama de tópicos, como análise matemática, teoria da relatividade e teoria das equações diferenciais. Ele fez contribuições significativas para áreas como a teoria das séries de funções, a teoria das integrais e a geometria das superfícies, entre outras. Ao longo de sua carreira, Picard se destacou por sua capacidade de integrar conceitos de diversas áreas da matemática, deixando um legado duradouro no desenvolvimento desses campos. Entre seus trabalhos mais conhecidos estão [9], [10] e [11].

Em seu livro sobre análise, destaca-se o famoso Teorema de Existência e Unicidade das Soluções das EDO's, também conhecido como Teorema de Picard-Lindelöf ou simplesmente Teorema de Picard. O nome "Picard-Lindelöf" é atribuído a esse teorema devido à contribuição do matemático finlandês Hugo Valentin Lindelöf (1880–1952), que influenciou a demonstração do resultado, refinando e generalizando algumas das técnicas usadas por Picard. Este teorema desempenha um papel fundamental no estudo das EDO's, pois garante que, se uma função for Lipschitziana, a equação diferencial  $x' = f(t, x)$  possui uma única solução para cada condição inicial. O enunciado e a demonstração desse teorema serão apresentados a seguir.

**Teorema 1.5** (*Teorema de existência e unicidade de Picard*) Seja  $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua e Lipschitziana com relação à segunda variável em  $\Omega$ . Dado  $(t_0, x_0) \in \Omega$ , considere o conjunto  $I_a \times \beta_b \in \Omega$ , onde

$$I_a = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq a\}, a \in \mathbb{R},$$

$$\beta_b = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq b\}, b \in \mathbb{R}.$$

Se  $|f| \leq M$  em  $\Omega$ , então existe uma única solução para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x); \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1-1)$$

definida em  $I_\alpha$ , com  $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ .

*Prova.* Dado  $(t_0, x_0) \in \Omega$ , como  $\Omega$  é um aberto em  $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ , existem números reais positivos tais que  $I_a \times \beta_b \in \Omega$ , com

$$I_a = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq a\},$$

$$\beta_b = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq b\}.$$

Como  $f(t, x)$  é contínua em  $\Omega$ , então  $f(t, x)$  é contínua no compacto  $I_a \times \beta_b \in \Omega$ . Assim,  $f(t, x)$  é limitada em tal intervalo, isto é, existe  $M > 0$  tal que

$$|f(t, x)| \leq M, \forall (t, x) \in I_a \times \beta_b.$$

Defina  $I_\alpha := \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq \alpha\}$ , com  $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ . Vamos mostrar que a equação integral possui solução única  $\varphi : I_\alpha \rightarrow \mathbb{E}$ , isto é, procuramos uma função satisfazendo

- (i)  $\varphi : I_\alpha \rightarrow \mathbb{E}$  contínua em  $I$ ;
- (ii)  $\{t, \varphi(t)\} \in \Omega, \forall t \in I_\alpha$ ;
- (iii)  $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \forall t \in I_\alpha$ .

Para isso, tome  $C(I_\alpha, \mathbb{E})$  o conjunto das funções contínuas cujo domínio é o conjunto  $I_\alpha$  e o contradomínio é  $\mathbb{E}$ . Em tal conjunto, considere a métrica

$$\begin{aligned} d : C(I_\alpha, \mathbb{E}) \times C(I_\alpha, \mathbb{E}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\psi_1, \psi_2) &\mapsto d(\psi_1, \psi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} |\psi_1(t) - \psi_2(t)|. \end{aligned}$$

Note que  $(C(I_\alpha, \mathbb{E}), d)$  é um espaço métrico completo. Seja  $C(I_\alpha, \beta_b) \subset C(I_\alpha, \mathbb{E})$  o conjunto das funções contínuas de  $I_\alpha$  em  $\beta_b$ . Provemos que, com a métrica  $d$ ,  $X = (C(I_\alpha, \beta_b), d)$  é um espaço métrico completo. De fato, se  $(\psi_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy em  $C(I_\alpha, \beta_b)$ , então existe  $\psi \in C(I_\alpha, \beta_b)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t) = \psi(t)$ , já que  $C(I_\alpha, \mathbb{E})$  é completo. Note que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\psi_n : I_\alpha \rightarrow \beta_b$  satisfaz

$$|\psi_n(t) - x_0| \leq b, \forall t \in I_\alpha.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\psi(t) - x_0| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t) - x_0 \right|, \forall t \in I_\alpha \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\psi_n(t) - x_0|, \forall t \in I_\alpha \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} b, \forall t \in I_\alpha \\ &= b, \forall t \in I_\alpha. \end{aligned}$$

Portanto,  $\psi \in X$ . Logo,  $X$  é um espaço métrico completo. Defina, agora

$$\begin{aligned} F : X &\rightarrow X \\ \psi &\mapsto F(\psi) : I_\alpha \rightarrow \beta_b \\ t &\mapsto F(\psi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds. \end{aligned}$$

Temos que:

a)  $F$  está bem definida, isto é,  $F(X) \subset X$ . De fato, se  $\psi \in X$ , então

$$\begin{aligned} |F(\psi)(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \psi(s))| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t M ds \right| = M|t - t_0| \leq M\alpha, \forall t \in I_\alpha. \end{aligned}$$

Como  $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ , segue que

- Se  $a \leq \frac{b}{M} \implies M\alpha = Ma \leq \frac{Mb}{M} = b$ ;
- Se  $a > \frac{b}{M} \implies M\alpha = \frac{Mb}{M} = b$ .

Portanto,

$$|F(\psi)(t) - x_0| \leq M\alpha \leq b, \forall t \in I_\alpha.$$

Logo,  $F(\psi)(t) \in \beta_b, \forall t \in I_\alpha$ . Além disso,  $F(\psi)$  é lipschitziana em  $I_\alpha$  pois, dados  $t_1, t_2 \in I_\alpha$ , vale que

$$\begin{aligned} |F(\psi)(t_2) - F(\psi)(t_1)| &= \left| \int_{t_0}^{t_2} f(s, \psi(s)) ds - \int_{t_0}^{t_1} f(s, \psi(s)) ds \right| \\ &= \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, \psi(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} |f(s, \psi(s))| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} M ds \right| = M|t_2 - t_1|. \end{aligned}$$

Assim,

$$|F(\psi)(t_2) - F(\psi)(t_1)| \leq M|t_2 - t_1|, \forall t_1, t_2 \in I_\alpha,$$

o que implica que  $F(\psi)$  é lipschitziana em  $I_\alpha$  e, por conseguinte,  $F(\psi)$  é contínua em  $I_\alpha$ . logo,  $F(X) \subset X$ .

b)  $F$  é contínua em  $X$ . Como  $f(t, x)$  é Lipschitziana em  $I_\alpha \times \beta_b$  com respeito à variável  $x$ , existe uma constante real  $k > 0$  tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y|, \forall (t, x), (t, y) \in I_\alpha \times \beta_b.$$

Dado  $\varepsilon > 0$  em  $\mathbb{R}$ , tome  $\delta = \frac{\varepsilon}{k\alpha}$ . Assim, se

$$\psi_1, \psi_2 \in X \text{ e } d(\psi_1, \psi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} |\psi_1(t) - \psi_2(t)| < \delta.$$

Então,

$$\begin{aligned} |F(\psi_1(t)) - F(\psi_2(t))| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \psi_1(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, \psi_2(s)) ds \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, \psi_1(s)) - f(s, \psi_2(s))) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |(f(s, \psi_1(s)) - f(s, \psi_2(s)))| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t k |\psi_1(s) - \psi_2(s)| ds \right| \\ &< \left| \int_{t_0}^t k\alpha ds \right| = k\alpha |t - t_0| \\ &\leq k\delta\alpha = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,  $|F(\psi_1(t)) - F(\psi_2(t))| < \varepsilon, \forall t \in I_\alpha$  e, conseqüentemente

$$d(F(\psi_1), F(\psi_2)) = \sup_{t \in I_\alpha} |F(\psi_1)(t) - F(\psi_2)(t)|.$$

Logo,  $F$  é uniformemente contínua em  $X$ .

c) Existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $F^m : X \rightarrow X$  é uma contração em  $X$ . Considere  $\psi_1, \psi_2 \in X$ .

Afirmção:

$$|F^n(\psi_1)(t) - F^n(\psi_2)(t)| \leq \frac{k^n |t - t_0|^n d(\psi_1, \psi_2)}{n!}, \forall t \in I_\alpha.$$

Provemos por indução em  $n$ . Note que, se  $n = 0$ ,  $F^0 = I$  então,

$$|\psi_1(t) - \psi_2(t)| \leq \frac{k^0 |t - t_0|^0 d(\psi_1, \psi_2)}{1} = d(\psi_1, \psi_2),$$

o que é verdadeiro da definição de distância em  $X$ , para toda  $\psi_1, \psi_2 \in X$  e  $\forall t \in I_\alpha$ .

Suponha então que a afirmação seja válida para  $n = j$ , isto é,

$$|F^j(\psi_1)(t) - F^j(\psi_2)(t)| \leq \frac{k^j |t - t_0|^j d(\psi_1, \psi_2)}{j!}, \forall t \in I_\alpha.$$

Então, segue que

$$\begin{aligned}
|F^{j+1}(\psi_1)(t) - F^{j+1}(\psi_2)(t)| &= |F(F^j(\psi_1)(t)) - F(F^j(\psi_2)(t))| \\
&= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, F^j(\psi_1)(s)) ds - x_0 + \int_{t_0}^t f(s, F^j(\psi_2)(s)) ds \right| \\
&= \left| \int_{t_0}^t f(s, F^j(\psi_1)(s)) - f(s, F^j(\psi_2)(s)) ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, F^j(\psi_1)(s)) - f(s, F^j(\psi_2)(s))| ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^t k |F^j(\psi_1)(s) - F^j(\psi_2)(s)| ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^t k \frac{k^j |s - t_0|^j d(\psi_1, \psi_2)}{j!} ds \right| \\
&= \frac{k^{j+1} d(\psi_1, \psi_2)}{j!} \left| \int_{t_0}^t (s - t_0)^j ds \right| \\
&= \frac{k^{j+1} d(\psi_1, \psi_2) |t - t_0|}{(j+1)!}, \forall t \in I_\alpha.
\end{aligned}$$

Por indução, segue que a afirmação é válida para todo  $n \geq 0$ . Assim, da afirmação, temos que

$$|F^n(\psi_1)(t) - F^n(\psi_2)(t)| \leq \frac{k^n |t - t_0|^n d(\psi_1, \psi_2)}{n!} \leq \frac{k^n \alpha^n d(\psi_1, \psi_2)}{n!}, \forall t \in I_\alpha.$$

Portanto, para todo  $n \geq 0$ , vale que

$$d(F^n(\psi_1), F^n(\psi_2)) = \sup_{t \in I_\alpha} |F^n(\psi_1)(t) - F^n(\psi_2)(t)| \leq \frac{k^n \alpha^n d(\psi_1, \psi_2)}{n!}, \forall \psi_1, \psi_2 \in X.$$

Note que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n \alpha^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k\alpha)^n}{n!} = e^{k\alpha}$$

é convergente. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n \alpha^n}{n!} = 0.$$

Assim, dado  $\varepsilon = 1$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  suficientemente grande tal que

$$0 \leq L = \frac{k^m \alpha^m}{m!} < 1.$$

Logo,  $d(F^m(\psi_1), F^m(\psi_2)) \leq L d(\psi_1, \psi_2), \forall \psi_1, \psi_2 \in X$ .

Daí,  $F^m : X \rightarrow X$  é uma contração em  $X$ . Dos itens provados anteriormente e do corolário do Teorema do Ponto Fixo para Contrações, segue que a função  $F : X \rightarrow X$  possui um único ponto fixo em  $X$ , ou seja, existe uma única função  $\varphi \in X$  tal que

- (i)  $\varphi : I_\alpha \rightarrow \beta_b$  contínua em  $I_\alpha$ ;

- (ii)  $\{t, \varphi(t)\} \in I_\alpha \times \beta_b, \forall t \in I_\alpha$  pois  $\varphi(t) \in \beta_b, \forall t \in I_\alpha$ ;  
 (iii)  $F(\varphi) = \varphi$ , isto é,  $\varphi(t) = F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \forall t \in I_\alpha$ .

Além disso,  $\varphi \in X$  é atrator para a função  $F$ , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(\psi) = \varphi, \forall \psi \in X \text{ e } (F^n(\psi))_{n \in \mathbb{N}}$$

converge uniformemente para  $\varphi$  em  $I_\alpha$ . □

Outro importante teorema para a teoria qualitativa das equações diferenciais é o Teorema de Peano, que foi proposto pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932), cujo nome é conhecido pelos “axiomas de Peano”. Tal teorema desempenhou um papel importante na teoria qualitativa das EDO’s.

Enquanto o Teorema de Picard fornece condições para a existência e unicidade da solução de uma equação diferencial, o Teorema de Peano garante que, mesmo quando a função  $f$  é apenas contínua, existe pelo menos uma solução do problema de valor inicial no intervalo considerado. Ou seja, o teorema assegura a existência de uma solução, sem exigir condições tão fortes quanto as do Teorema de Picard.

**Teorema 1.6** (*Teorema de Peano*) *Seja  $f$  contínua em  $\Omega = I_a \times \beta_b$  como no Teorema 1.5. Se  $|f| \leq M$  em  $\Omega$ , então, a equação (1-1) tem pelo menos uma solução em  $I_\alpha$ , com  $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ .*

*Prova.* Veja em [16]. □

Com isso, podemos apresentar o “Teorema de Unicidade e Existência das Soluções das EDO’s lineares” como um corolário do teorema previamente apresentado e demonstrado, o qual desempenha um papel crucial no estudo das equações diferenciais, uma vez que as equações lineares são importantes ferramentas para a análise de equações não lineares.

**Corolário 1.7** (*Teorema de Existência e Unicidade das EDO’s Lineares*) *Sejam  $A(t)$  e  $b(t)$  respectivamente matrizes  $n \times n$  e  $n \times 1$  de funções contínuas num intervalo  $I$ . Para todo  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$  existe uma única solução de  $x' = A(t)x + b(t), x(t_0) = x_0$ , definida em  $I$ .*

*Prova.* Considere  $I = \bigcup_n I_n$ , onde  $I_n \subset I_{n+1}$  são intervalos compactos que contêm  $t_0$ . Note que  $f(t, x) = A(t)x + b(t)$  é Lipschitziana em cada intervalo  $I_n$ . Seja  $\varphi_n$  a única solução neste intervalo passando por  $(t_0, x_0)$ . É claro que a restrição de  $\varphi_{n+1}$  ao intervalo  $I_n$  é  $\varphi_n$ ; caso contrário, a solução não seria única em cada intervalo. Logo,  $\varphi(t) = \varphi_n(t)$ , para  $t \in I_n$ , está bem definida em  $I$  e é a única passando por  $(t_0, x_0)$ . □

Uma equação diferencial do tipo mencionado no Corolário 1.7 é chamada de equação diferencial linear. Tais equações são importantes na teoria das equações diferenciais, tendo em vista que é possível conhecer e estudar explicitamente suas soluções. Vale ressaltar que essa equação pode ser expressa como um sistema de  $n$  equações na forma:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t). \end{cases}$$

Além disso, uma família de soluções  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ , reais ou complexas, de classe  $C^1$ , é solução do sistema num intervalo  $I$  se, e somente se, a aplicação  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  é solução da equação  $x' = A(t)x + b(t)$ , com a condição inicial  $x(t_0) = x_0$ , no intervalo  $I$ . Quando  $b_i(t) = 0$ , o sistema chama-se linear homogêneo ou, equivalentemente, a equação vetorial chama-se equação linear homogênea. Da proposição a seguir, é possível concluir que o conjunto das soluções de uma equação homogênea é um subespaço vetorial de  $C$ , onde  $C = C(I, \mathbb{E})$  é o espaço das funções contínuas, munido das operações de soma de funções e produto de uma constante (real ou complexa) por uma função.

**Proposição 1.8** *Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  soluções da equação homogênea  $x' = A(t)x$ .*

1. *Se  $a, b$  são constantes arbitrárias, reais ou complexas, então  $\gamma = a\varphi + b\psi$  é solução de  $x' = A(t)x$ ;*
2. *Se  $\varphi(s) = 0$ , para algum  $s \in I$ , então  $\psi(t) = 0, \forall t \in I$ .*

*Prova.* Para demonstrar o primeiro item, note que

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{a d\varphi(t)}{dt} + \frac{b d\psi(t)}{dt} \\ &= aA(t)\varphi(t) + bA(t)\psi(t) \\ &= A(t)(a\varphi(t) + b\psi(t)) \\ &= A(t)\gamma(t). \end{aligned}$$

Já no segundo item, como a função nula é solução de  $x' = A(t)x$  e a solução é única em cada intervalo, segue imediatamente que  $\varphi(t) = 0, \forall t \in I$ .  $\square$

Sabemos que o conjunto das soluções de uma equação diferencial linear homogênea forma um espaço vetorial, o que nos permite falar em base para esse espaço. Nesse contexto, apresenta-se a seguir a definição de matriz fundamental de uma equação linear homogênea. Essa matriz é de extrema importância para o estudo das soluções, pois qualquer solução da equação pode ser expressa como uma combinação linear de suas colunas.

**Definição 1.9** Uma matriz  $\phi(t)$  de ordem  $n \times n$  cujas colunas formam uma base para o espaço de soluções de  $x' = A(t)x$  chama-se matriz fundamental de  $x' = A(t)x$ .

Com base nessa definição, podemos agora analisar a relação entre as soluções de uma equação diferencial linear homogênea e as soluções da equação linear não homogênea. O resultado a seguir demonstra que, para encontrar a solução de qualquer equação diferencial linear, é suficiente conhecer a matriz fundamental da equação homogênea associada ao problema em questão, ou seja, basta estudar a parte homogênea.

**Teorema 1.10** Se  $\phi(t)$  é matriz fundamental de  $x' = A(t)x$ , então a solução  $\varphi(t, t_0, x_0)$  de  $x' = A(t)x + b(t)$  tal que  $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$  é dada por

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \phi(t) \left[ \phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)b(s)ds \right].$$

Em particular,  $\varphi(t, t_0, x_0) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0$ , no caso homogêneo.

*Prova.* Note que  $\varphi$  é diferenciável pois é produto e soma de funções diferenciáveis. Assim, pela regra do produto, temos

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \phi'(t) \left[ \phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)b(s)ds \right] + \phi(t)\phi^{-1}(t)b(t) \\ &= A(t)\phi(t) \left[ \phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)b(s)ds \right] + b(t) \\ &= A(t)\varphi(t) + b(t). \end{aligned}$$

Ainda,  $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$ . Portanto,  $\varphi(t, t_0, x_0)$  é solução do problema de Cauchy dado.  $\square$

A fórmula de Liouville, que recebe o nome em homenagem ao matemático francês Joseph Liouville (1809-1882), fornece uma expressão explícita para o cálculo do determinante de uma matriz fundamental. A demonstração pode ser encontrada em [16]. A fórmula, apresentada abaixo, tem diversas aplicações na teoria das equações diferenciais ordinárias.

**Proposição 1.11** (Fórmula de Liouville) Seja  $\phi(t)$  uma matriz cujas colunas são soluções de  $x' = A(t)x$ . Então, para todo  $t \in I$  e  $t_0 \in I$  fixo, temos que:

$$\det \phi(t) = \det[\phi(t_0)] \exp \left( \int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds \right),$$

onde  $\text{tr}(A(s))$  é o traço da matriz  $A$ .

Considere agora a equação linear homogênea  $x' = Ax$ , onde  $A$  é uma matriz real ou complexa de ordem  $n \times n$  e seja  $\phi(t)$  a matriz fundamental associada ao problema de valor inicial com  $\phi(0) = I$ . No caso  $n = 1$ ,  $A = a \in \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) e, claramente,  $\phi(t) = e^{at}$ .

Assim, é possível verificar que a aplicação  $t \rightarrow \phi(t)$  tem propriedades análogas à função exponencial, como segue.

**Proposição 1.12** *Seja  $\phi$  uma matriz fundamental do sistema  $x' = A(t)x$ , então valem as seguintes propriedades:*

- a)  $\phi'(t) = A\phi(t)$   $\phi(0) = I$ ;
- b) para todo  $t, s \in \mathbb{R}$   $\phi(t+s) = \phi(t)\phi(s)$ ;
- c)  $[\phi(t)]^{-1} = \phi(-t)$ ;
- d) a série  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ , converge para  $\phi(t)$  em  $\mathbb{R}$ , uniformemente em cada compacto.

**Definição 1.13** *A matriz  $e^A$  definida por  $\phi(1)$  chama-se exponencial da matriz  $A$ . Reescrevendo a proposição anterior, temos que*

- a)  $\frac{de^{tA}}{dt} = Ae^{tA}$ ,  $e^{0A} = I$ ;
- b)  $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$ ;
- c)  $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$ ;
- d)  $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ , sendo a convergência da série em cada compacto.

Assim, considerando o PVI:

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Temos que a solução única é dada por  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$  com

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t) \left( \phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)b(s)ds \right) \\ &= \varphi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0 \\ &= e^{tA}e^{-t_0A}x_0 \\ &= e^{(t-t_0)A}x_0. \end{aligned}$$

Isso demonstra que, para obter a solução do problema proposto, é suficiente conhecer a exponencial da matriz associada. Uma outra definição importante para o estudo das equações diferenciais é a definição de fluxo.

**Definição 1.14** *Uma aplicação  $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  de classe  $C^1$  é dita um fluxo se:*

- a)  $\varphi(0, x) = x$ ;
- b)  $\varphi(t+s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$ ,  $t, s \in \mathbb{R}$ .

Um fluxo se chama linear se para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$  é uma aplicação linear em  $\mathbb{E}$ .

É possível demonstrar que, para cada fluxo linear, existe uma única matriz  $A$  tal que a solução do sistema pode ser expressa como  $\varphi_t(x) = e^{tA}x$ . Agora, dada uma matriz  $A$  (seja ela complexa ou real), sabemos que seus autovalores e autovetores desempenham um papel fundamental na compreensão das propriedades dessa matriz. No contexto das equações diferenciais ordinárias (EDO's), esses autovalores e autovetores são particularmente importantes, pois fornecem uma expressão explícita para as soluções das equações, como veremos a seguir.

**Lema 1.15** *Seja  $A$  matriz complexa (respectivamente, real). Se  $\lambda$  é um autovalor complexo (respectivamente, autovalor real) de  $A$  e  $v$  é um autovetor correspondente, então  $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$  é uma solução da equação complexa (respectivamente, real).*

*Prova.* Como  $v$  é autovetor associado ao autovalor  $\lambda$ , temos que  $Av = \lambda v$ . Logo,

$$\varphi'(t) = \lambda e^{\lambda t}v = A(e^{\lambda t}v) = A\varphi(t).$$

□

**Proposição 1.16** *Se a matriz complexa (respectivamente, real)  $A$  de ordem  $n \times n$  tem autovalores complexos (respectivamente, autovalores reais)  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  e  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são autovetores linearmente independentes, com  $Av_i = \lambda_i v_i$ , então a matriz  $V(t)$ , cuja  $i$ -ésima coluna é  $\varphi_i = e^{\lambda_i t}v_i$ , é uma matriz fundamental de  $x' = Ax$ . Em particular,  $e^{tA} = V(t)V^{-1}(0)$ .*

*Prova.* Veja [16].

□

Esses resultados fornecem ferramentas adequadas para o estudo das soluções de equações diferenciais lineares. Como mencionado anteriormente, essas ferramentas também podem ser aplicadas ao estudo de equações diferenciais não lineares, que na maioria das vezes, apresentam dificuldades no que diz respeito ao cálculo de soluções explícitas. Nesse contexto, as definições de conjugação e equivalência que serão apresentadas posteriormente oferecem maneiras de comparar diferentes sistemas, tornando-se particularmente úteis na análise de sistemas não lineares em relação aos lineares.

A partir de agora, serão tratadas as equações da forma  $x' = F(x)$ , onde  $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um campo vetorial de classe  $C^k$ , e  $\Delta$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$ . As soluções desta equação são chamadas de trajetórias ou curvas integrais de  $F$  ou da equação  $x' = F(x)$ . Uma das definições mais importantes para o estudo de tais equações é a definição de ponto singular.

**Definição 1.17** *Um ponto  $x_0$  de  $\Delta$  é chamado ponto singular ou ponto de equilíbrio do campo vetorial  $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  (ou da equação diferencial  $x' = F(x)$ ) se  $F(x_0) = 0$ . Em contrapartida,  $x_0$  é chamado regular se não é singular, isto é,  $F(x_0) \neq 0$ .*

**Observação 1.18** O ponto  $x_0 \in \Delta$  é ponto singular do campo vetorial  $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  se, e somente se, a função

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \Delta \\ t &\mapsto \varphi(t) = x_0\end{aligned}$$

é solução em  $\mathbb{R}$  de  $x' = F(x)$ . Tal solução é chamada solução singular da equação.

**Definição 1.19** Uma solução

$$\begin{aligned}\varphi : I &\rightarrow \Delta \\ t &\mapsto \varphi(t)\end{aligned}$$

da equação diferencial  $x' = F(x)$  é chamada solução maximal (ou máxima) em  $I$  se, para toda solução  $\psi : J \rightarrow \Delta$  tal que  $I \subset J$  e  $\varphi = \psi|_I$  então  $I = J$  e, conseqüentemente,  $\varphi = \psi$ . O intervalo  $I$  é chamado máximo ou maximal.

O Teorema Global de Diferenciabilidade apresentado a seguir traz importantes propriedades das curvas integrais de um dado campo  $F$ . Uma demonstração independente de tal resultado pode ser visto em [16]. Uma demonstração mais direta e que é consequência da dependência contínua pode ser encontrada em [14].

**Teorema 1.20** (Teorema Global de Diferenciabilidade) Seja  $F$  um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , num aberto  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ .

- a) (Existência e unicidade de soluções máximas) Para cada ponto  $x \in \Delta$ , existe um intervalo aberto  $I_x$ , no qual está definida uma única curva integral máxima  $\varphi_x : I_x \rightarrow \Delta$ , do campo passando por  $x$ . Ou seja,  $\varphi_x$  satisfaz, em  $I_x$ , a equação  $\frac{dy}{dt} = F(y)$ ,  $y(0) = x$ ;
- b) (Propriedade de grupos) Se  $y = \varphi_x(s)$ ,  $s \in I_x$ , então

$$I_y = I_x - s = \{\tau - s \mid \tau \in I_x\}$$

$$\text{e } \varphi_y(t) = \varphi_x(t + s), \forall t \in I_y;$$

- c) (Diferenciabilidade com respeito à condição inicial) O conjunto  $D = \{(t, x); x \in \Delta, t \in I_x\}$  é aberto em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e a aplicação  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida por  $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$  é de classe  $C^k$ . Além disso, satisfaz

$$D_1 D_2 \varphi(t, x) = DF(\varphi(t, x)) D_2 \varphi(t, x), \forall (t, x) \in D.$$

**Definição 1.21** A função  $\varphi : D \rightarrow \Delta$  tal que  $(t, x) \mapsto \varphi(t, x) = \varphi_x(t)$  é chamada de fluxo gerado pelo campo vetorial  $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  ou, simplesmente, fluxo gerado.

É importante notar que todo fluxo gerado é um fluxo, mas nem todo fluxo é um fluxo gerado. Assim, as propriedades de fluxo também são válidas para fluxos gerados.

Além disso, como consequência do teorema acima, existe a matriz  $DF(x)$ . Tal matriz é a chamada jacobiana (bastante conhecida dos livros de cálculo) ou parte linear do campo  $F$  em  $x \in \Delta$ . Outro conceito de grande importância no estudo das equações diferenciais é o conceito de retrato de fase. Para enunciá-lo, precisamos inicialmente introduzir o conceito de órbita de  $F$  por um ponto  $p$ .

**Definição 1.22** *O conjunto  $\gamma_p = \{\varphi(t, p) \mid t \in I_p\}$ , isto é, a imagem da curva integral de  $F$  passando pelo ponto  $p$ , chama-se órbita de  $F$  pelo ponto  $p$ .*

Observe que, se  $q \in \gamma_p$ , então existe  $s \in I_p$  tal que  $q = \varphi(s, p)$ . Logo, pelo item b) do Teorema Global de Diferenciabilidade,  $\varphi(t, q) = \varphi(t, \varphi(s, p)) = \varphi(t + s, p)$ ,  $\forall t \in I_q = I_p - s$ . Portanto,  $\gamma_q = \{\varphi(t, q) \mid t \in I_q\} = \gamma_p$ . Reciprocamente, se  $\gamma_p = \gamma_q$ , então  $q = \varphi(0, q) \in \gamma_q = \gamma_p$ , ou seja,  $q \in \gamma_p$ . Tal fato define uma relação de equivalência entre órbitas de um campo vetorial  $F$ . Logo, duas órbitas ou coincidem ou são disjuntas. Portanto, o aberto  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  pode ser decomposto pelas órbitas de  $F$ , isto é, é uma união disjunta de curvas orientadas e diferenciáveis. O conjunto  $\Delta$  munido de tal decomposição é chamado de retrato de fase.

Com tais conceitos e resultados, podemos introduzir noções de equivalências entre dois campos vetoriais, que, como mencionado anteriormente, serão de grande importância nos estudos relacionados aos sistemas não lineares. Abaixo, seguem as definições de equivalência topológica,  $C^r$ -equivalência, conjugação topológica e  $C^r$ -conjugação, com base em [16].

**Definição 1.23** *Sejam  $F_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $F_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  campos vetoriais de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  e seus respectivos sistemas  $x' = F_1(x)$  e  $x' = F_2(x)$ . Dizemos que  $F_1$  é topologicamente equivalente a  $F_2$  quando existe homeomorfismo  $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  que leva órbita de  $F_1$  em órbita de  $F_2$ , preservando orientação. Mais precisamente, se  $\gamma_p^1$  é órbita orientada de  $F_1$  passando por  $p$ , então  $h(\gamma_p^1) = \gamma_{h(p)}^2$ , onde  $\gamma_{h(p)}^2$  é a órbita orientada de  $F_2$  passando por  $h(p) \in \Delta_2$ . A função  $h$  é chamada equivalência topológica.*

**Definição 1.24** *Sejam  $F_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $F_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  campos vetoriais de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  e seus respectivos sistemas  $x' = F_1(x)$  e  $x' = F_2(x)$ . Dizemos que  $F_1$  é  $C^r$ -equivalente a  $F_2$  quando existe um difeomorfismo  $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  que leva órbita de  $F_1$  em órbita de  $F_2$ , preservando orientação. A função  $h$  é dita uma  $C^r$ -equivalência entre  $F_1$  e  $F_2$ .*

**Definição 1.25** *Sejam  $F_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $F_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  campos vetoriais de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  e seus respectivos sistemas  $x' = F_1(x)$  e  $x' = F_2(x)$ . Considere ainda os fluxos gerados por  $F_1$  e  $F_2$ , respectivamente,*

$$\begin{aligned} \varphi_1 : D_1 &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto \varphi_1(t, x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 : D_2 &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto \varphi_2(t, x) \end{aligned}$$

Dizemos que o campo vetorial  $F_1$  é topologicamente conjugado a  $F_2$  quando existe homeomorfismo  $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  tal que

$$h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x)),$$

para todo  $(t, x) \in D_1 = \{(t, x) : t \in I_x \text{ e } x \in D_1\}$ . Neste caso,  $I_x^1 = I_{h(x)}^2$  e a função  $h$  é chamada de conjugação topológica entre  $F_1$  e  $F_2$ . Se  $h$  for um difeomorfismo de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , dizemos que  $h$  é uma  $C^r$ -conjugação entre  $F_1$  e  $F_2$  e os campos são  $C^r$ -conjugados.

Nesse sentido, há algumas considerações importantes. A primeira é que se a função  $h$  é uma conjugação entre os campos  $F_1$  e  $F_2$ , então  $h$  leva pontos singulares em pontos singulares, isto é, se  $h$  é conjugação e  $p$  é ponto singular de  $F_1$ , então  $h(p)$  é ponto singular de  $F_2$ . Uma segunda observação é que uma conjugação também leva órbitas periódicas em órbitas periódicas, preservando o período, ou seja, se  $h$  é conjugação e  $\gamma_p^1$  é órbita periódica de  $F_1$  de período  $\tau$ , então  $\gamma_{h(p)}^2$  é órbita periódica de período  $\tau$  de  $F_2$ .

Além do que foi mencionado no parágrafo anterior, é importante destacar que toda conjugação é uma equivalência, mas nem toda equivalência é uma conjugação, pois uma equivalência não preserva, necessariamente, o tempo. Como as conjugações desempenham um papel fundamental no conteúdo dessa teoria, é essencial compreender formas de caracterizar uma conjugação. A proposição a seguir apresenta uma caracterização de uma  $C^r$ -conjugação.

**Proposição 1.26** *Sejam  $F_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  campos vetoriais de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  e  $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  um difeomorfismo de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Então,  $h$  é uma conjugação entre  $F_1$  e  $F_2$  se, e somente se,*

$$Dh(p)F_1(p) = F_2(h(p)), \forall p \in \Delta_1.$$

*Prova.* Considere  $F_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  campos vetoriais de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ ,  $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  um difeomorfismo de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$  e os respectivos fluxos gerados por  $F_1$  e  $F_2$

$$\begin{array}{ll} \varphi_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n & \varphi_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) \mapsto \varphi_1(t, x) & (t, x) \mapsto \varphi_2(t, x). \end{array}$$

Suponha, inicialmente, que  $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  é uma  $C^r$ -conjugação entre  $F_1$  e  $F_2$ . Logo vale que

$$h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p)), \forall t \in I_p^1, \quad (*)$$

onde  $I_p^1$  é o intervalo máximo associado à solução máxima única do PVI cuja equação é  $x' = F_1(x)$  e a condição inicial é  $x(0) = p$ . Assim,  $0 \in I_p^1$ . Portanto, derivando (\*) e

aplicando em  $t = 0$ , temos que

$$Dh(p)F_1(p) = F_2(h(p)), \forall p \in \Delta_1.$$

Como  $p$  é um ponto arbitrário, segue o resultado. Em contrapartida, suponha agora que

$$Dh(p)F_1(p) = F_2(h(p)), \forall p \in \Delta_1.$$

Queremos mostrar que  $h$  é uma  $C^r$ -conjugação entre  $F_1$  e  $F_2$ . Para isso, tome  $p$  um ponto arbitrário mas fixado em  $\Delta_1$  e consideremos os problemas de valor inicial abaixo:

$$\begin{cases} x' = F_1(x); \\ x(0) = p, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = F_2(x); \\ x(0) = h(p), \end{cases}$$

cujas soluções máximas únicas são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \varphi_1 : I_p^1 &\rightarrow \Delta_1 & \varphi_2 : I_{h(p)}^2 &\rightarrow \Delta_2 \\ t &\mapsto \varphi_1(t, p), & t &\mapsto \varphi_2(t, p). \end{aligned}$$

Defina a função

$$\begin{aligned} \psi : I_p^1 &\rightarrow \Delta_2 \\ t &\mapsto \psi(t) = h(\varphi_1(t, p)). \end{aligned}$$

Temos que

- $\psi$  é diferenciável em  $I_p^1$  pois é a composta de duas funções diferenciáveis nesse intervalo.
- $\psi'(t) = Dh(\varphi_1(t, p))\varphi_1'(t, p) = Dh(\varphi_1(t, p))F_1(\varphi_1(t, p)) = F_2(h(\varphi_1(t, p))) = F_2(\psi(t)), \forall t \in I_p^1.$
- $\psi(0) = h(\varphi_1(0, p)) = h(p).$

Portanto,  $\psi : I_p^1 \rightarrow \Delta_2$  é solução em  $I_p^1$  do PVI

$$\begin{cases} x' = F_2(x), \\ x(0) = h(p). \end{cases}$$

Logo, pela unicidade das soluções máximas, temos que  $I_p^1 = I_{h(p)}^2$  e

$$h(\varphi_1(p)) = \psi(t) = \varphi_2(t, h(p)), \forall t \in I_p^1 = I_{h(p)}^2.$$

Como  $p$  é arbitrário, segue que

$$h(\varphi_1(p)) = \varphi_2(t, h(p)), \forall t \in I_p^1 = I_{h(p)}^2, \forall p \in \Delta_1,$$

provando assim o resultado.  $\square$

Agora, podemos discutir a estrutura local de pontos regulares e singulares. Em outras palavras, buscaremos ferramentas para analisar o comportamento das soluções de equações diferenciais nas vizinhanças de pontos regulares e singulares. O primeiro resultado importante a ser apresentado é o Teorema do Fluxo Tubular (TFT). Este teorema garante que, na vizinhança de um ponto regular, as soluções exibem um comportamento similar ao de um campo constante, de acordo com [16].

**Definição 1.27** *Seja  $\Delta$  um aberto em  $\mathbb{R}^n$ ,  $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , e  $A$  um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Uma função*

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow \Delta \\ a &\rightarrow f(a), \end{aligned}$$

*de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , em  $A$  é chamada seção transversal local de  $F$  se, para todo  $a \in A$ ,  $Df(a)$  e  $F(f(a))$  geram o espaço  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $\Sigma = f(A)$  munido da topologia induzida de  $A$ . Se  $f : A \rightarrow \Sigma$  é um homeomorfismo, então  $\Sigma$  é dita seção transversal de  $F$ .*

A definição de seção transversal é fundamental, pois, além de ser crucial para o Teorema do Fluxo Tubular, também desempenha um papel essencial na aplicação de Poincaré, que será abordada mais adiante nesta seção. Além disso, decorre da definição anterior que uma seção transversal de um campo vetorial de  $F$  é constituída apenas de pontos regulares de  $F$ .

**Teorema 1.28** *(Teorema do Fluxo Tubular) Sejam  $\Delta$  aberto em  $\mathbb{R}^n$ ,  $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , e  $p \in \Delta$  um ponto regular de  $F$ . Considere  $A$  um aberto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $f : A \rightarrow \Sigma$  uma seção transversal local de  $F$ , de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  em  $A$ , tal que  $f^{-1}(p) = 0 \in A$ . Então, existe uma vizinhança  $V \subset \Delta$  de  $p$  e um difeomorfismo*

$$h : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B,$$

*de classe  $C^k$  em  $V$ , em que  $\varepsilon > 0$  e  $B$  uma bola aberta em  $\mathbb{R}^{n-1}$  cujo centro é  $0 = f^{-1}(p) \in A$ , tais que*

- a)  $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$ ;
- b)  $h : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$  é uma  $C^k$ -conjugação entre os campos vetoriais  $F|_V : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $Y = (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$  em que  $x \mapsto Y(x) = (1, 0, 0, \dots)$ .

**Corolário 1.29** *Seja  $\Sigma$  uma seção transversal de  $F$ . Para todo ponto  $p \in \Sigma$ , existem  $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$ , uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^n$  e uma função  $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  tais que  $\tau(V \cap \Sigma) = 0$  e*

- a) Para todo  $q \in V$ , a curva integral  $\varphi(t, q)$  de  $F|_V$  é definida e biunívoca em  $J_q = (-\varepsilon + \tau(q), \varepsilon + \tau(q))$ ;
- b)  $\xi(q) = \varphi(\tau(q), q) \in \Sigma$  é o único ponto no qual  $\varphi(t, q)|_{J_q}$  intercepta a seção  $\Sigma$ . Em particular,  $q \in \Sigma \cap V$  se, e somente se,  $\tau(q) = 0$ ;
- c)  $\xi : V \rightarrow \Sigma$  é de classe  $C^k$  e  $D\xi(q)$  é sobrejetiva para todo  $q \in V$ . Mais ainda,  $D\xi(q)v = 0$  se, e somente se,  $v$  é colinear com  $X(q)$ , isto é,  $v = \alpha X(q)$  para algum  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

É importante destacar que os resultados apresentados possuem um caráter local. Ou seja, nem todo campo vetorial livre de singularidades no plano admite um homeomorfismo que trivialize suas órbitas. O Teorema do Fluxo Tubular (TFT) garante que, se  $p$  é um ponto regular do campo vetorial  $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ , então o campo  $F$  é localmente conjugado ao campo constante  $Y = (1, 0, 0, \dots)$ . Assim, o comportamento qualitativo das órbitas de  $F$  em uma vizinhança de um ponto regular é bem compreendido. A seguir, será apresentado o Teorema de Hartman-Grobman, o qual descreve explicitamente o comportamento qualitativo das soluções em uma vizinhança de um ponto singular hiperbólico, conforme [16].

**Definição 1.30** *Seja  $A$  um aberto em  $\mathbb{R}^n$  e  $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^k$ , com  $k \geq 1$ . Um ponto singular de  $F$  é dito hiperbólico se todos os autovalores de  $DF(p)$  possuem parte real não nula. O índice de estabilidade do ponto singular é definido como o número de autovalores da matriz  $DF(p)$  que têm parte real negativa, contando com as multiplicidades.*

**Teorema 1.31** *(Teorema de Hartman-Grobman) Sejam  $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  e  $p \in \Delta$  um ponto singular hiperbólico de  $F$ . Então, existem vizinhanças  $W \subset \Delta$  de  $p$  e  $V \subset \mathbb{R}^n$  de  $0 \in \mathbb{R}^n$  tais que  $F|_W$  é topologicamente conjugado a  $DF(p)|_V$ .*

Um ponto de grande interesse no estudo das EDO's é o estudo das órbitas periódicas e suas vizinhanças. Nesse sentido, de acordo com [16], a transformação de Poincaré (ou transformação de primeiro retorno) é utilizada para descrever o comportamento de um campo na vizinhança de uma dada órbita periódica.

Seja então  $\gamma = \{\varphi(t, p) : 0 \leq t \leq \tau_0\}$  uma órbita periódica de período  $\tau_0$  de um campo  $F$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , definido em  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ . Seja  $\Sigma$  uma seção transversal a  $F$  em  $p$ . Como o fluxo  $\varphi$  de  $F$  é contínuo, para todo ponto  $q \in \Sigma$  próximo de  $p$ , a trajetória  $\varphi(t, q)$  permanece próxima a  $\gamma$ , com  $t$  em um intervalo compacto contendo  $[0, \tau_0]$ . Assim, a transformação de Poincaré  $\pi$  associada a  $\gamma$  é o primeiro ponto  $\pi(q)$  retorna a seção transversal  $\Sigma$ .

**Proposição 1.32** *A transformação de Poincaré*

$$\begin{aligned}\pi : \Sigma_0 &\rightarrow \Sigma_0 \\ q &\mapsto \pi(q),\end{aligned}$$

em que  $\Sigma_0 \subset \Sigma$  é o domínio da transformação de Poincaré  $\pi$  associada a  $\gamma$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$  em  $\Sigma_0$ .

Observe que  $p$  é ponto fixo da transformação de Poincaré pois  $p \in \Sigma_0$  e  $\pi(p) = p$  (já que a  $\gamma_p$  é periódica). Ainda, como  $p$  é ponto regular de  $F$ , pelo corolário do TFT, existem uma vizinhança  $V \subset \Delta$  de  $p$ ,  $\varepsilon > 0$  e uma função

$$\begin{aligned}\tau : V &\rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \\ x &\mapsto \tau(x)\end{aligned}$$

de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , tal que  $\tau(\Sigma \cap V) = \{0\}$ . Além disso, existe uma função de classe  $C^k$  em  $V$

$$\begin{aligned}\xi : V &\rightarrow \Sigma \\ x &\mapsto \xi(x) = (\varphi(\tau(x), x)),\end{aligned}$$

sendo  $\varphi : Dv \rightarrow V$  o fluxo gerado por  $F|_V$ . Pela continuidade de tal fluxo, se  $q \in \Sigma \cap V$ , então  $\varphi(\tau_0, q) \in V$ , isto é, existe  $\Sigma_0 \subset \Sigma \cap V$  tal que  $\varphi(\tau_0, q) \in V$ ,  $\forall q \in \Sigma_0$ . Assim, podemos utilizar a função  $\xi$  para que a solução seja continuada até  $\Sigma_0$ . Portanto, a transformação de Poincaré

$$\begin{aligned}\pi : \Sigma_0 &\rightarrow \Sigma_0 \\ q &\mapsto \pi(q)\end{aligned}$$

é dada por

$$\begin{aligned}\pi(q) &= \xi(\varphi(\tau_0, q)) = \varphi(\tau(\varphi(\tau_0, q)), \varphi(\tau_0, q)) \\ &= \varphi(\tau_0 + \tau(\varphi(\tau_0, q)), q) \\ &= \varphi(\tau(q), q), \forall q \in \Sigma_0\end{aligned}$$

sendo  $\tau(q)$  o primeiro tempo de retorno da solução, com condição inicial  $q \in \Sigma_0$  em  $t = 0$ , á seção transversal  $\Sigma$ .

Uma das aplicabilidades da transformação de Poincaré é descrever o comportamento assintótico das órbitas do campo vetorial  $F$  em uma vizinhança  $V \subset \Delta$  de uma órbita periódica  $\gamma$ , como segue.

**Definição 1.33** *Seja  $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  e  $\gamma = \{\varphi(t, p) \mid t \in \mathbb{R}\}$  uma órbita periódica de  $F$ . A órbita  $\gamma$  é dita um atrator periódico (ou orbitalmente estável) quando*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0, \forall q \in V,$$

com  $V$  vizinhança de  $\gamma$  em  $\Delta$ , onde  $d(\varphi(t, q)) = \inf\{|\varphi(t, q) - r| : r \in \gamma\}$ .

Agora, abordaremos com mais detalhes as definições e os resultados relacionados às órbitas periódicas dos campos vetoriais no plano, explorando as propriedades dinâmicas e o comportamento dessas órbitas em diferentes contextos. Este tópico é fundamental para a compreensão da estrutura qualitativa dos sistemas dinâmicos, pois as órbitas periódicas desempenham um papel crucial na descrição do comportamento dos campos.

**Definição 1.34** *Seja  $F : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  e  $\varphi : D \rightarrow \Delta$  o fluxo gerado por  $F$ . Uma órbita periódica  $\gamma = \{\varphi(t, p) \mid t \in \mathbb{R}\}$  de  $F$  é um ciclo limite de  $F$  se existir uma vizinhança  $V \subset \Delta$  de  $\gamma$  tal que  $\gamma$  é a única órbita periódica de  $F$  em  $V$ .*

O teorema a seguir nos dá uma caracterização para órbitas periódicas isoladas.

**Teorema 1.35** *Seja  $F : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  e  $\varphi : D \rightarrow \Delta$  o fluxo gerado por  $F$ . Uma órbita periódica  $\gamma = \{\varphi(t, p) \mid t \in \mathbb{R}\}$  de  $F$  é um ciclo limite se, e somente se,  $p \in \Sigma$  é o único ponto fixo isolado da transformação de Poincaré  $\pi$ .*

**Proposição 1.36** *Seja  $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Se  $\gamma$  é um ciclo limite de  $F$ , então existe apenas 3 possibilidades.*

- a) *Ciclo limite estável, quando  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0, \forall q \in V$ ;*
- b) *Ciclo limite instável, quando  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0, \forall q \in V$ ;*
- c) *Ciclo limite semiestável, quando*
  - $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0, \forall q \in V \cap \text{Ext}(\gamma)$ ;
  - $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0, \forall q \in V \cap \text{Int}(\gamma)$ .

*ou o contrário.*

O próximo teorema estabelece uma expressão explícita para a primeira derivada da aplicação de Poincaré. Tal teorema também estabelece uma condição suficiente para que um ciclo limite seja estável ou instável e pode ser visto em [16].

**Teorema 1.37** *Sejam  $\Delta$  um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^2$  e*

$$F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \mapsto F(x) = (F_1(x), F_2(x))$$

*um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  em  $\Delta$ . Seja  $\gamma$  uma órbita periódica de  $F$  com período  $T > 0$  e  $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  a transformação de Poincaré associada a  $\gamma$  numa seção transversal  $\Sigma$  em  $p \in \gamma$ . Então,*

$$\pi'(x) = \exp\left(\int_0^T \text{div}(F(\gamma(t)))dt\right),$$

*onde  $\text{div}(F(x)) = \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(x)}{\partial y}$ . Em particular,*

- Se  $\int_0^T \operatorname{div}(F(\gamma(t))) dt < 0$ , então  $\gamma$  é estável;
- Se  $\int_0^T \operatorname{div}(F(\gamma(t))) dt > 0$ , então  $\gamma$  é instável.

O Teorema de Poincaré-Bendixson é um resultado fundamental na teoria dos sistemas dinâmicos, especialmente no estudo de sistemas dinâmicos planares, [16]. Este teorema fornece condições para a classificação qualitativa das órbitas de sistemas dinâmicos autônomos em planos, em particular, tratando do comportamento assintótico das soluções. O teorema é especialmente relevante quando se estuda o comportamento das trajetórias em torno de pontos de equilíbrio e a formação de órbitas periódicas. Para apresentar o Teorema, precisamos primeiro definir o que são conjuntos limites.

**Definição 1.38** *Seja  $\Delta$  um aberto em  $\mathbb{R}^n$  e  $F : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Considere*

$$\begin{aligned} \varphi_p : I_p &\rightarrow \Delta \\ t &\mapsto \varphi_p(t) = \varphi(t, p) \end{aligned}$$

a trajetória de  $F$ , passando pelo ponto  $p \in \Delta$ , definida no intervalo  $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$

a) Se  $\omega_+(p) = +\infty$ , definimos o conjunto  $\omega$  – limite de  $p$  como

$$\omega(p) = \{q \in \Delta \mid \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, n \rightarrow \infty\};$$

b) Se  $\omega_-(p) = -\infty$ , definimos o conjunto  $\alpha$  – limite de  $p$  como

$$\alpha(p) = \{q \in \Delta \mid \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, n \rightarrow \infty\}.$$

Podemos estender tal definição para uma órbita. Dessa forma, define-se o conjunto  $\omega$  – limite de uma órbita  $\gamma$ , denotado por  $\omega(\gamma)$ , como sendo o conjunto  $\omega(p)$  para qualquer  $p$  em  $\gamma$ . De modo análogo, define-se o conjunto  $\alpha$  – limite de  $\gamma$ , denotado por  $\alpha(\gamma)$ , como o conjunto  $\alpha(p)$  de  $p$  para qualquer  $p \in \gamma$ .

**Teorema 1.39** *Seja  $F : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  e  $\gamma^+(p) = \{\varphi(t, p) \mid t \geq 0\}$  a semiórbita positiva de  $F$  por  $p$  (respectivamente,  $\gamma^-(p)$ ). Se  $\gamma^+(p)$  está contida em um compacto  $K \subset \Delta$  (respectivamente,  $\gamma^-(p)$ ), então:*

- $\omega(p) \neq \emptyset$  (respectivamente,  $\alpha(p) \neq \emptyset$ );
- $\omega(p)$  é compacto (respectivamente,  $\alpha(p)$ );
- $\omega(p)$  é invariante por  $F$  (respectivamente,  $\alpha(p)$ );
- $\omega(p)$  é conexo (respectivamente,  $\alpha(p)$ ).

Uma noção importante para compreensão e aplicação do Teorema é a noção de conjunto positivamente e negativamente invariante, indicada na definição abaixo.

**Definição 1.40** *Seja  $F : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  e considere  $\varphi : D \rightarrow \Delta$  o fluxo gerado por  $F$ . Um conjunto  $P \subset \Delta$  é dito positivamente invariante se, para qualquer  $q \in P$ ,  $\varphi(t, q) \in P$ ,  $\forall t \geq 0$ . Se isso vale para todo  $t \leq 0$ , tal conjunto é dito negativamente invariante.*

Jules Henri Poincaré foi um matemático, físico e filósofo francês amplamente conhecido por seus estudos sobre a teoria da relatividade, mecânica celeste, termodinâmica, cosmologia, dentre outros. A tese de doutorado de Poincaré foi realizada em equações diferenciais (não em métodos de solução, mas nos teorema de existência), o que levou a uma de suas contribuições mais importantes para a matemática: as propriedades das funções automórficas. Poincaré também introduziu a noção de trajetórias fechadas e atratores. Utilizando essas ideias, o matemático sueco Ivan Bendixson formulou o teorema conhecido como Teorema de Poincaré-Bendixson, enunciado abaixo.

**Teorema 1.41** *(Teorema de Poincaré-Bendixson) Considere  $p \in \Delta$  tal que  $\gamma_p^+$  esteja contida num compacto  $K \subset A$ . Suponha que o campo  $F$  possui um número finito de singularidades em  $\omega(p)$ . Então, valem as seguintes afirmações:*

- a) *Se  $\omega(p)$  contém apenas pontos regulares, então  $\omega(p)$  é uma órbita periódica;*
- b) *Se  $\omega(p)$  contém pontos singulares e regulares, então  $\omega(p)$  é um gráfico, isto é, um conjunto de órbitas regulares tendo as singularidades como  $\alpha$ -limite e  $\omega$ -limite;*
- c) *Se  $\omega(p)$  não contém pontos regulares, então  $\omega(p)$  é um ponto singular.*

Como já comentado, o teorema pode ser utilizado como ferramenta para garantir a existência de órbitas periódicas no plano, através da obtenção de uma região no espaço de fase que não possua pontos singulares e seja invariante. Além disso, o teorema possui dois corolários que tratam da existência de órbitas periódicas e pontos singulares, quando  $\Delta$  é simplesmente conexo, [16].

**Corolário 1.42** *Seja  $\Delta$  um aberto simplesmente conexo de  $\mathbb{R}^2$  e  $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , exibindo uma órbita periódica  $\gamma \subset \Delta$ . Então,  $\text{Int}(\gamma)$  contém uma órbita periódica ou um ponto singular.*

*Prova.* Suponha, por absurdo, que  $\text{Int}(\gamma)$  não tenha órbita periódica nem ponto singular. Então, pelo TPB,  $\omega(\gamma) = \alpha(\gamma) = \gamma$ , para todo  $x \in \text{Int}(\gamma)$ . Logo, a sequência de Poincaré é crescente e decrescente ao mesmo tempo, o que é um absurdo.  $\square$

**Corolário 1.43** *Seja  $\Delta$  um aberto simplesmente conexo de  $\mathbb{R}^2$  e  $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo  $C^k$ ,  $k \geq 1$  exibindo uma órbita periódica  $\gamma \subset \Delta$ . Então,  $\text{Int}(\gamma)$  possui um ponto singular de  $F$ .*

---

## Bifurcações em Sistemas Dinâmicos

---

Considere o espaço de dimensão infinita formado por todos os sistemas dinâmicos. Dentro desse espaço, tome o subconjunto dos sistemas dinâmicos que mantêm seu comportamento qualitativo mesmo sob pequenas perturbações. Na Teoria das Bifurcações, o foco está no complementar desse subconjunto, ou seja, no conjunto dos sistemas que apresentam mudanças no comportamento diante dessas perturbações. Dessa forma, para compreender o conceito de bifurcação e classificar os sistemas, é fundamental entender a estrutura desse conjunto.

### 2.1 Bifurcações

Inicialmente, é fundamental introduzir a noção de sistema estruturalmente estável, conceito desenvolvido por Aleksandr Aleksandrovich Andronov (1901-1952) e Lev Semyonovich Pontryagin (1908-1988). A ideia central por trás desse conceito é que o comportamento qualitativo das soluções de um sistema permaneça inalterado diante de pequenas perturbações. Neste trabalho, dizer que uma função é “suave” significa que a função é de classe  $C^k$ , com  $k \geq 1$  suficientemente grande para nossos propósitos.

Seja  $x_0$  um ponto de equilíbrio hiperbólico do sistema dinâmico

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2-1)$$

onde  $f$  é suave. Considere a perturbação a um parâmetro

$$x' = f(x) + \varepsilon g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2-2)$$

onde  $g$  também é suave e  $\varepsilon$  é pequeno.

Observe que, quando  $\varepsilon = 0$ , o sistema (2-2) retorna a (2-1). Além disso, o sistema (2-2) tem um equilíbrio  $x(\varepsilon)$ , para todo  $|\varepsilon|$  suficientemente pequeno tal que  $x(0) = x_0$  pois,

a equação que define os equilíbrios de (2-2) pode ser escrita como

$$F(x, \varepsilon) = f(x) + \varepsilon g(x) = 0,$$

em que  $F(x_0, 0) = 0$ . Temos ainda que

$$F_x(x, \varepsilon) = Df(x) + \varepsilon Dg(x) \Rightarrow F_x(x_0, 0) = Df(x_0) = A_0,$$

onde  $A_0$  é a jacobiana de  $f$  no equilíbrio  $x_0$ . Como  $x_0$  é hiperbólico, segue que  $\det(A_0) \neq 0$  e, ainda,  $F(x_0, 0) = 0$ . Nessas condições, o Teorema da função implícita ([3]) garante que existem vizinhanças  $U$  e  $V$  da origem e uma função suave  $x : U \rightarrow V$  de modo que  $x(0) = x_0$  e  $F(x(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ , para  $|\varepsilon|$  pequeno. A jacobiana de  $x(\varepsilon)$  em (2-2) é dada por

$$A_\varepsilon = \left( \frac{df(x)}{dx} + \varepsilon \frac{dg(x)}{dx} \right)_{x=x(\varepsilon)}$$

e depende suavemente de  $\varepsilon$  e coincide com  $A_0$  quando  $\varepsilon = 0$ . Como os autovalores de uma matriz que depende suavemente de um parâmetro mudam continuamente com a variação desse parâmetro, segue que, como  $x_0$  é hiperbólico,  $x(\varepsilon)$  também é ponto de equilíbrio hiperbólico de (2-2), para  $|\varepsilon|$  suficientemente pequeno. Além disso, o número de autovalores estáveis e instáveis, respectivamente, se mantém para  $|\varepsilon|$  suficientemente pequeno. Assim, segue que os retratos de fase quando  $\varepsilon = 0$  e  $|\varepsilon|$  são topologicamente equivalentes. Todos esses fatos indicam que um equilíbrio hiperbólico permanece hiperbólico sob perturbações suaves.

Um ponto relevante a ser destacado é que o parâmetro  $\varepsilon$  oferece uma noção de distância entre o sistema (2-1) e sua perturbação (2-2). Essa ideia leva à definição de distância entre dois sistemas dinâmicos, [5]. Nesse contexto, dois sistemas são considerados próximos se seus campos vetoriais associados estiverem próximos, juntamente com suas primeiras derivadas parciais. Quando isso ocorre, dizemos que os sistemas são  $C^1$ -próximos. De forma análoga, dois sistemas serão classificados como  $C^k$ -próximos se os campos vetoriais associados, juntamente com suas derivadas de ordem menor ou igual a  $k$ , estiverem próximos. Vale ressaltar que a inclusão das derivadas na noção de distância é natural, uma vez que é de interesse que sistemas próximos possuam equilíbrios do mesmo tipo topológico.

Dessa forma, considerando uma região  $U \subset \mathbb{R}^n$  fechada, define-se a distância entre dois sistemas dinâmicos como o número positivo  $d_1$ , dado por

$$d_1(f, g) = \sup_{x \in U} \{ \|f(x) - g(x)\| + \|Df(x) - Dg(x)\| \}.$$

Os sistemas são ditos  $\varepsilon$ -próximos em  $U$  se  $d_1 \leq \varepsilon$ . Aqui,  $\|*\|$  significa uma norma de vetor

ou matriz em  $\mathbb{R}^n$ . Com a definição de distância estabelecida, podemos definir estabilidade estrutural.

**Definição 2.1** *Seja  $E$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ . Um campo de vetores  $f$ , de classe  $C^1$ , é dito estruturalmente estável se existe um  $\varepsilon > 0$  tal que para todo campo  $g$  também  $C^1$ , com  $\|d_1(f, g)\| < \varepsilon$ ,  $f$  e  $g$  são topologicamente equivalentes em  $E$ . Neste caso, dizemos que o sistema  $x' = f(x)$  é estruturalmente estável. Caso contrário, o sistema é dito estruturalmente instável.*

Se  $f$  estiver em uma variedade diferenciável, compacta e  $n$ -dimensional  $M$ , podemos substituir o conjunto  $E$  por  $M$  na definição anterior. Andronov e Pontryagin formularam um teorema que fornece as condições necessárias e suficientes para que um sistema no plano seja estruturalmente estável. Esse trabalho culminou no famoso Teorema de Peixoto, demonstrado pelo matemático brasileiro Maurício Peixoto (1921-2019), que visa caracterizar completamente os campos vetoriais estruturalmente estáveis em variedades compactas do plano (veja em [15]).

Considere um sistema dinâmico que depende de um parâmetro e escrevendo-o como

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \alpha), \quad (2-3)$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha \in \mathbb{R}^m$  representam uma variável e um parâmetro, respectivamente. Observe que, quando o parâmetro varia, o retrato de fase também varia. Com isso, segue-se que existem apenas duas possibilidades: ou os sistemas permanecem topologicamente equivalentes, ou não. Assim, surge a definição de bifurcação, [5].

**Definição 2.2** *Em um sistema dinâmico  $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \alpha)$ , dizemos que ocorre uma bifurcação quando a variação do parâmetro  $\alpha$  provoca uma mudança qualitativa no comportamento do sistema, ou seja, com a variação do parâmetro aparecem sistemas que não são topologicamente equivalentes.*

De acordo com essa definição, uma bifurcação ocorre quando o comportamento qualitativo ou o “tipo” do retrato de fase do sistema (2-3) muda à medida que o parâmetro  $\alpha$  é alterado. Em outras palavras, uma bifurcação acontece quando pequenas variações no parâmetro  $\alpha$  provocam uma mudança significativa na estrutura do sistema. Isso implica que uma bifurcação não pode ocorrer em sistema estruturalmente estável.

Um valor de  $\alpha$  em que o sistema muda de tipo topológico é dito valor de bifurcação ou valor crítico. Algumas bibliografias que tratam do tema utilizam a terminologia ponto crítico ao invés de ponto singular. Por conta disso, a nomenclatura “valor de bifurcação” será preferida neste trabalho, pois evita ambiguidades. A seguir, são apresentados alguns exemplos clássicos de bifurcações.

**Exemplo 2.3** (*Bifurcação Heteroclínica, [5]*) Considere o seguinte sistema plano que depende de um parâmetro  $\alpha$  real

$$\begin{cases} x' = 1 - x^2 - \alpha xy, \\ y' = xy + \alpha(1 - x^2). \end{cases} \quad (2-4)$$

Então,  $\alpha = 0$  é um valor de bifurcação.

De fato, note que os equilíbrios do sistema dado são os pontos  $\mathbf{x}_1 = (x, y) = (-1, 0)$  e  $\mathbf{x}_2 = (x, y) = (1, 0)$ . Além disso, a jacobiana associada ao sistema é a matriz

$$A(x, y, \alpha) = \begin{pmatrix} -2x - \alpha y & -\alpha y \\ y - 2\alpha x & x \end{pmatrix}.$$

Avaliando tal matriz no ponto  $\mathbf{x}_1$ , temos

$$A(-1, 0, \alpha) = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 2\alpha & -1 \end{pmatrix},$$

cujos polinômio característico é  $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2(1 + \alpha^2)$ , o que implica que os autovalores são

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8(1 + \alpha^2)}}{2}.$$

Observe que  $\sqrt{1 + 8(1 + \alpha^2)} > 1$ , donde segue que um autovalor é positivo e o outro é negativo. Logo, tal equilíbrio é hiperbólico e o sistema representa topologicamente uma sela na vizinhança do equilíbrio  $\mathbf{x}_1$ . Para analisar a natureza do ponto singular  $\mathbf{x}_2$ , note que a jacobiana em tal ponto é

$$A(1, 0, \alpha) = \begin{pmatrix} -2 & -\alpha \\ -2\alpha & 1 \end{pmatrix},$$

cujos polinômio característico é  $q(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2(1 + \alpha^2)$ . Assim, os autovalores são

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8(1 + \alpha^2)}}{2}.$$

Daí, um autovalor é negativo e o outro é positivo, donde segue que o equilíbrio é hiperbólico e, por Hartman Grobman, o sistema é topologicamente conjugado a uma sela na vizinhança de  $\mathbf{x}_2$ . Portanto, o sistema representa uma sela em cada um dos equilíbrios. Agora, observemos o comportamento do sistema para os diferentes valores de  $\alpha$ . Tomando

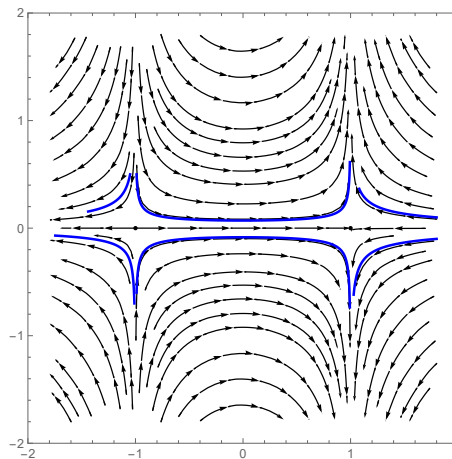
primeiramente  $\alpha = 0$ , o sistema é dado por

$$\begin{cases} x' = 1 - x^2, \\ y' = xy. \end{cases}$$

Tomemos, nesse sistema, uma solução que começa no eixo  $x$ , isto é, cuja ordenada é  $y = 0$ . Então,  $y' = 0$  o que implica que  $y$  permanece nula com a variação do tempo. Portanto, uma solução que começa no eixo das abscissas, permanece nesse eixo, indicando que o eixo das abscissas é invariante. Assim, pela continuidade do fluxo, precisa existir uma órbita que conecta os dois equilíbrios, tendo em vista que ambos estão no eixo  $x$ . Observe ainda que se  $x \in (-1, 1)$ , temos que  $x' > 0$ , donde segue que  $x$  cresce. Em contrapartida, se  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ,  $x' < 0$  e logo  $x$  decresce. Portanto, existe uma órbita  $\varphi(t)$  tal que

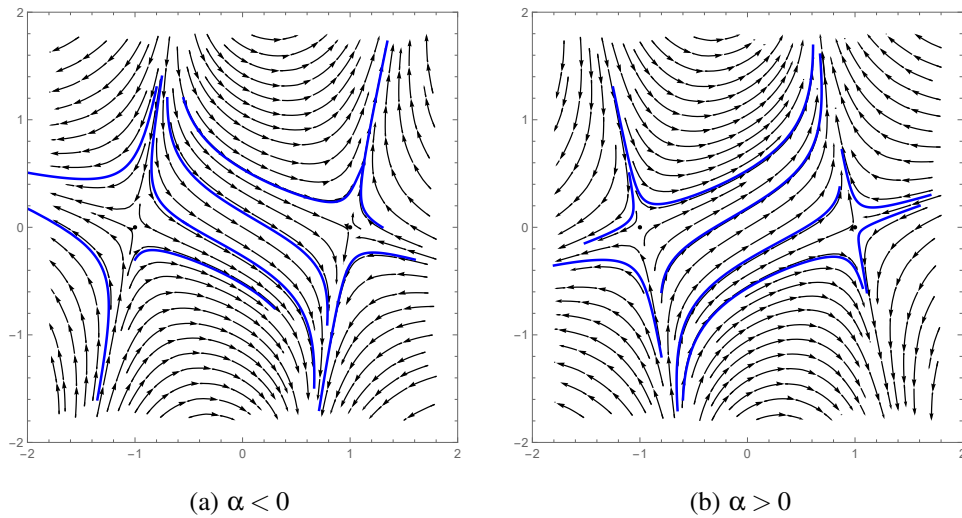
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = x_1 \quad e \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = x_2.$$

Órbitas desse tipo são ditas heteroclínicas.



**Figura 2.1:** Comportamento qualitativo do sistema (2-4) para  $\alpha = 0$ .

Observe que para  $\alpha > 0$ , o retrato de fase continua representando duas selas. No entanto, tomando uma órbita que se inicia no eixo horizontal, segue que  $y' = \alpha(1 - x^2)$ , indicando que tal eixo não é mais invariante e a conexão entre os dois equilíbrios é perdida. Para  $\alpha < 0$ , o eixo horizontal também não é invariante. Portanto, o sistema muda qualitativamente sua estrutura ao passar pelo parâmetro  $\alpha = 0$ . Assim,  $\alpha = 0$  é valor de bifurcação para o sistema dado no exemplo.



**Figura 2.2:** Comportamento qualitativo do sistema (2-4) para  $\alpha$  não nulo.

**Exemplo 2.4** (Bifurcação homoclínica sela-nó no círculo, [5]) O sistema planar que depende do parâmetro  $\alpha$

$$\begin{cases} x' = x(1 - x^2 - y^2) - y(1 + \alpha + x), \\ y' = x(1 + \alpha + x) + y(1 - x^2 - y^2), \end{cases} \quad (2-5)$$

tem um valor de bifurcação  $\alpha = 0$ .

Primeiro, podemos escrever o sistema em coordenadas polares afim de facilitar as análises realizadas. Tomando  $x = r \cos(\theta)$  e  $y = r \sin(\theta)$ , temos que

$$\begin{cases} r' = \frac{xx' + yy'}{r}, \\ \theta' = \frac{xy' - yx'}{r^2}, \end{cases}$$

Então, o sistema em coordenadas polares é dado por

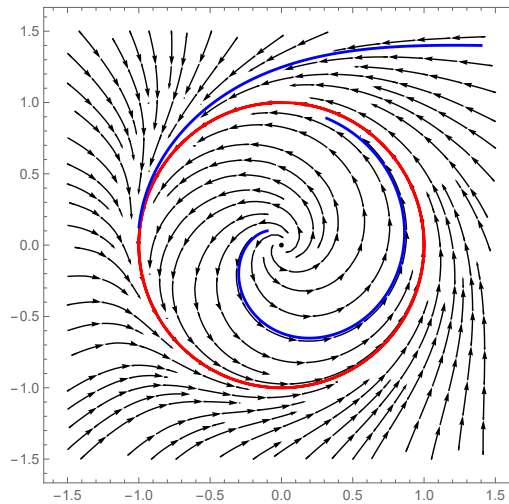
$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2), \\ \theta' = 1 + \alpha + r \cos(\theta), \end{cases}$$

que possui um equilíbrio em  $(r, \theta) = (0, \theta)$  para qualquer  $\alpha$ . Observe ainda que considerando  $|\alpha|$  pequeno,  $\theta' > 0$  e, portanto,  $\theta$  é crescente. Assim, o sistema representa um foco repulsor numa vizinhança da origem. Fixemos o círculo unitário  $C_1 = \{(r, \theta) : r = 1\}$ . Note que  $C_1$  é invariante pois dado um ponto da forma  $(1, \theta)$ , segue que  $r' = 0$  e o raio permanece constante com raio 1 sob a variação do tempo, para qualquer  $|\alpha|$  pequeno. Com tais informações, podemos agora analisar o sistema para os diferentes valores de  $\alpha$ . Tomando primeiramente  $\alpha > 0$  pequeno, observe que o único equilíbrio é a origem. Caso

contrário, teríamos

$$\begin{cases} r(1-r^2) = 0, \\ 1 + \alpha + r \cos(\theta) = 0, \end{cases}$$

com  $r \neq 0$ . Como  $r$  representa o raio, podemos considerar  $r$  não negativo, donde segue que o único valor que satisfaz a primeira equação é  $r = 1$ . Substituindo na segunda equação, temos que  $1 + \alpha + \cos(\theta) = 0$ , donde  $\cos(\theta) = -(1 + \alpha) < -1$ , o que é absurdo pois  $|\cos(\theta)| \leq 1$ . Como o círculo unitário é invariante, precisamos analisar o comportamento das soluções fora dele, uma vez que numa vizinhança da origem o sistema sempre é um foco repulsor. Assim, considerando  $r > 1$ ,  $r' < 0$  e a função  $r$  decresce, mostrando que fora de  $C_1$  o sistema é um foco atrator que tende ao círculo de raio 1. Ainda,  $C_1$  é ciclo limite estável pois, para  $r < 1$  o sistema é repulsor e o fluxo é contínuo.



**Figura 2.3:** Comportamento qualitativo do sistema do (2-5) para  $\alpha > 0$ . O ciclo limite aparece em vermelho.

Tomando agora  $\alpha = 0$ , o sistema estudado se torna

$$\begin{cases} r' = r(1-r^2), \\ \theta' = 1 + r \cos(\theta). \end{cases}$$

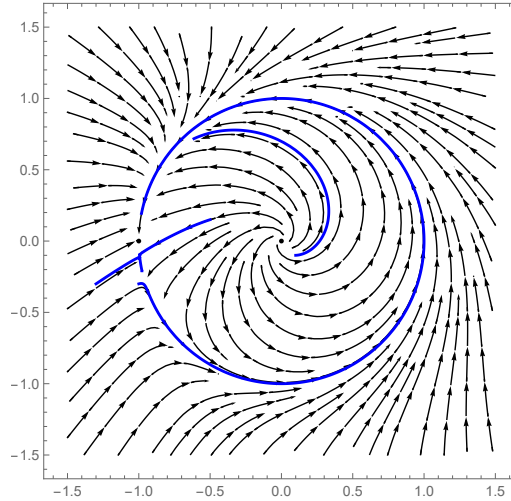
Procurando outros equilíbrios além da origem, temos que  $r = 1$  e, logo,  $1 + \cos(\theta) = 0$ , donde  $\cos(\theta) = -1$  e  $\theta = \pi$ . Assim, o sistema possui um ponto singular em  $(1, \pi)$ , que está sob o círculo unitário. Analisando a estrutura qualitativa de tal ponto, temos que para  $r > 1$ ,  $r' < 0$ . Note ainda que a jacobiana do sistema é dada por

$$A(r, \theta) = \begin{pmatrix} 1 - 3r^2 & 0 \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \end{pmatrix},$$

que avaliada no ponto  $(1, \pi)$  é

$$A(1, \pi) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

cujos autovalores são  $\lambda_1 = -2$  e  $\lambda_2 = 0$ . Veremos adiante que  $\lambda_2 = 0$  caracteriza uma bifurcação do tipo sela nó.



**Figura 2.4:** Comportamento qualitativo do sistema (2-5) para  $\alpha$  nulo.

Finalmente, considerando  $\alpha < 0$  e buscando os pontos singulares além da origem, temos que  $r = 1$  e  $1 + \alpha + \cos(\theta) = 0$ . Logo,  $\cos(\theta) = -(1 + \alpha)$ . Como  $\alpha < 0$  pequeno, tal equação está bem definida e possui zeros. Além disso, lembremos que

$$\cos(2\pi - \theta) = \cos(2\pi)\cos(\theta) + \sin(2\pi)\sin(\theta) = \cos(\theta).$$

Portanto, como  $\theta = \arccos(-(1 + \alpha))$  satisfaz a equação, então  $2\pi - \arccos(-(1 + \alpha))$  também a satisfaz. Utilizando a igualdade  $\arccos(x) = \pi - \arccos(x)$ , podemos escrever os equilíbrios como  $(1, \pi \pm \arccos(1 + \alpha))$ . Ambos os equilíbrios estão em  $C_1$ , resta analisar a estrutura de cada um dos pontos. Para isso, lembremos que a jacobiana do sistema polar é dada por

$$A(r, \theta) = \begin{pmatrix} 1 - 3r^2 & 0 \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Avaliando-a no equilíbrio  $(1, \pi + \arccos(1 + \alpha))$ , obtemos a matriz

$$A(1, \pi + \arccos(1 + \alpha)) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -(1 + \alpha) & r\sqrt{\alpha(\alpha - 2)} \end{pmatrix},$$

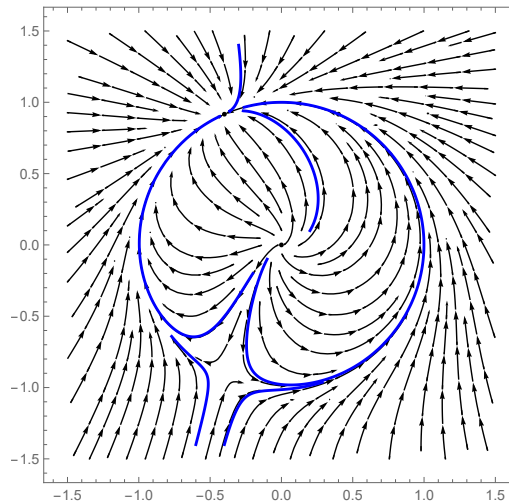
que possui autovalores  $\lambda_1 = -2$  e  $\lambda_2 = r\sqrt{\alpha(\alpha - 2)}$ , os quais são números reais com  $\lambda_1 < 0$  e  $\lambda_2 > 0$ . Assim, tal ponto é singular hiperbólico e o sistema é topologicamente

conjugado a uma sela na vizinhança de tal ponto.

Por outro lado, avaliando a matriz no equilíbrio  $(1, \pi - \arccos(1 + \alpha))$ , obtemos

$$A(1, \pi - \arccos(1 + \alpha)) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -(1 + \alpha) & -r\sqrt{\alpha(\alpha - 2)} \end{pmatrix},$$

donde os autovalores são ambos negativos, indicando que o ponto é hiperbólico e o sistema é topologicamente conjugado a um nó atrator.



**Figura 2.5:** Comportamento qualitativo do sistema (2-5) para  $\alpha$  negativo.

Considere agora um valor  $\alpha = \alpha_0$  e o conjunto dos parâmetros que contém o valor de bifurcação  $\alpha_0$ , composto por pontos em que o sistema é topologicamente equivalente ao sistema em  $\alpha_0$  (denominado estrato). Tomando todos os estratos no espaço de parâmetros, obtém-se o retrato paramétrico do sistema. Assim, no exemplo 2.3, temos que o retrato paramétrico da bifurcação homoclínica sela-nó tem três estratos:  $\{\alpha < 0\}$ ,  $\{\alpha = 0\}$  e  $\{\alpha > 0\}$ . O retrato paramétrico junto com o retrato de fase constituem o diagrama de bifurcação, [5].

**Definição 2.5** *O diagrama de bifurcação de um sistema dinâmico é uma forma de dividir o espaço de parâmetros em regiões (ou estratos) onde o comportamento qualitativo do sistema permanece o mesmo. Cada uma dessas regiões é representada por um retrato de fase típico, que mostra como o sistema evolui ao longo do tempo dentro daquela região.*

Em outras palavras, um diagrama de bifurcação é uma separação dos retratos de fase com base nos parâmetros para os quais os sistemas são topologicamente equivalentes. Assim, é desejável obtermos o diagrama de bifurcação como resultado de uma análise qualitativa de um determinado sistema dinâmico. É importante observar que o diagrama de bifurcação depende, em geral, da região do espaço de fase considerado. Outro ponto relevante é que se o sistema dinâmico tem um espaço de fase cuja dimensão é 1 (ou 2),

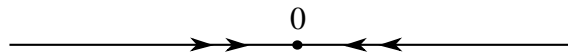
seu diagrama de bifurcação pode ser visto como o produto direto do retrato de fase com o espaço de parâmetros.

**Exemplo 2.6** (*Bifurcação de Pitchfork, [8]*) *O sistema escalar*

$$x' = \alpha x - x^3, \quad x \in \mathbb{R} \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2-6)$$

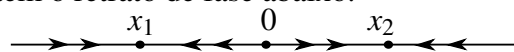
tem  $\alpha = 0$  como valor de bifurcação.

De fato, note que o sistema tem um equilíbrio em  $x_0 = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ . Ainda, a parte linear do campo vetorial  $F(x, \alpha) = \alpha x - x^3$  é dada por  $A(x, \alpha) = \alpha - 3x^2$  e  $A(0, \alpha) = \alpha$ . Logo, para  $\alpha < 0$ , o sistema é atrator em uma vizinhança da origem e seu retrato de fase é dado na figura 2.6.



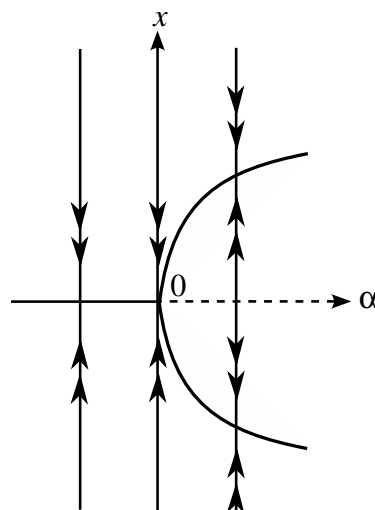
**Figura 2.6:** *Comportamento qualitativo do sistema (2-6) para  $\alpha$  negativo.*

Quando  $\alpha > 0$ , a vizinhança da origem tem um comportamento repulsor. No entanto, neste caso, o sistema possui outros dois equilíbrios em  $x_1 = -\sqrt{\alpha}$  e  $x_2 = \sqrt{\alpha}$ . Temos ainda que  $A(\pm\sqrt{\alpha}) = \alpha - 3(-\sqrt{\alpha})^2 = -2\alpha < 0$ , pois  $\alpha > 0$ . Logo,  $\alpha = 0$  é valor de bifurcação do sistema, que em  $\alpha > 0$  tem o retrato de fase abaixo.



**Figura 2.7:** *Comportamento qualitativo do sistema (2-6) para  $\alpha$  positivo.*

Além disso, quando  $\alpha = 0$ ,  $x$  cresce para  $x < 0$  e decresce para  $x > 0$ . Tal bifurcação é chamada de bifurcação de Pitchfork. Ela tem esse nome por causa de seu diagrama de bifurcação, que se assemelha visualmente a um garfo de três pontas, conhecido em inglês como Pitchfork. A parábola no diagrama de bifurcação é a curva dos equilíbrios para  $\alpha > 0$ . O pontilhado no desenho são os pontos para os quais o sistema é instável.



**Figura 2.8:** *Diagrama da bifurcação de Pitchfork.*

Um outro conceito importante no que diz respeito à teoria das bifurcações é o conceito de codimensão de uma bifurcação. Para compreendê-lo, tratemos inicialmente do conceito de codimensão de uma subvariedade. Dada uma variedade  $m$ -dimensional  $M$  e uma subvariedade  $N$  de dimensão  $n$  contida em  $M$ . A codimensão de  $N$  é definida como  $m - n$ . De modo equivalente, em um sistema de coordenadas, a codimensão é o número de equações independentes que são necessárias para definir  $N$  (veja [18]).

**Definição 2.7** *A codimensão de uma bifurcação é a menor dimensão do espaço de parâmetros que contém a bifurcação.*

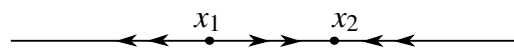
De modo mais simples, a codimensão é o número de condições independentes que determinam a bifurcação.

**Exemplo 2.8** *(Bifurcação Transcrítica, [8]) O sistema unidimensional*

$$x' = \alpha x - x^2 \equiv f(x, \alpha) \quad (2-7)$$

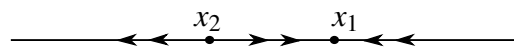
*tem uma bifurcação de codimensão um.*

De fato, observe que  $\alpha x - x^2 = 0$  se, e somente se,  $x(\alpha - x) = 0$ . Logo, os pontos singulares são  $x = 0$  e  $x = \alpha$ . Para  $\alpha = 0$ , existe um único ponto singular em  $x = 0$ , que é não hiperbólico pois a derivada  $f_x(x, \alpha) = \alpha - 2x$  é nula quando avaliada em  $(\alpha, x) = (0, 0)$ . Agora, para  $\alpha < 0$ , existem dois pontos singulares em  $x_1 = \alpha$  e  $x_2 = 0$ . Assim,  $f_x(0, \alpha) = \alpha < 0$  e  $f_x(\alpha) = -\alpha > 0$ , donde segue que o ponto  $x_1$  é repulsor, enquanto  $x_2$  é atrator.



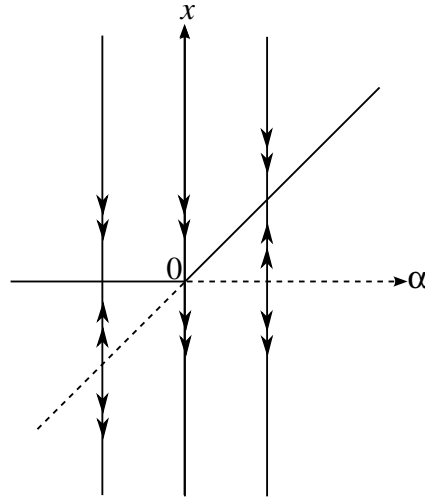
**Figura 2.9:** *Comportamento do sistema (2-7) para  $\alpha < 0$ .*

Para  $\alpha > 0$ , os pontos  $x_1$  e  $x_2$  continuam sendo singulares. No entanto, como  $\alpha > 0$ ,  $x_1$  é atrator e  $x_2$  é repulsor, como segue na figura 2.10.



**Figura 2.10:** *Comportamento do sistema (2-7) para  $\alpha > 0$ .*

Assim, o diagrama de bifurcação é dado pela figura 2.11. Observe que a reta  $x = \alpha$  é atratora para  $\alpha > 0$  e repulsora para  $\alpha < 0$ , conforme análise feita anteriormente. Além disso, observe que o diagrama resume todas as informações obtidas através da análise do retrato de fase de cada um dos casos.



**Figura 2.11:** Diagrama da bifurcação transcritical.

Diferentes estratos de bifurcação em sistemas genéricos interagem uns com os outros sob certas condições. Deste modo, diagramas de bifurcação de sistemas que aparecem em diferentes aplicações podem parecer semelhantes. Portanto, é interessante classificar sistemas que possuem comportamento qualitativo semelhante ou diagramas de bifurcação topologicamente equivalentes. Assim, torna-se importante compreender as formas normais topológicas para bifurcações. Deste modo, agora será considerado o problema de classificar todos os possíveis diagramas de bifurcação de sistemas genéricos. Para isso, é importante compreender a definição de forma normal topológica para bifurcações. Neste sentido, apresentamos a definição de equivalência topológica no contexto de bifurcações, como segue na definição 2.9, [5].

**Definição 2.9** *O sistema dinâmico*

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \alpha), \quad (2-8)$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha \in \mathbb{R}^m$ , é dito topologicamente equivalente ao sistema

$$\mathbf{y}' = g(\mathbf{y}, \beta), \quad (2-9)$$

onde  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  e  $\beta \in \mathbb{R}^m$ , se valem as seguintes propriedades:

- Existe um homeomorfismo  $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  entre os espaços de parâmetros, com  $\beta = p(\alpha)$ ;
- Existe um homeomorfismo dependente de parâmetro  $h_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , entre os espaços de fase, tal que  $y = h_\alpha(x)$ , mapeando órbitas do sistema (2-8) no parâmetro  $\alpha$  para órbitas do sistema (2-9) no parâmetro  $\beta = p(\alpha)$ , preservando a direção do tempo.

O homeomorfismo  $p$  transforma o retrato paramétrico do sistema (2-8) no retrato paramétrico do sistema (2-9), enquanto o homeomorfismo  $h_\alpha$  mapeia seus retratos

de fase. Por definição, sistemas dependentes de parâmetros topologicamente equivalentes têm diagramas de bifurcação topologicamente equivalentes. Tal definição de equivalência topológica é paralela à definição 1.23, diferindo apenas no fato de que agora os sistemas estão no contexto das bifurcações e, portanto, dependem de parâmetros. Ainda, é importante definir tal conceito localmente.

**Definição 2.10** *O sistema dinâmico (2-8) é dito localmente topologicamente equivalente, em uma vizinhança da origem, ao sistema (2-9) se existe uma função  $(x, \alpha) \mapsto (h_\alpha(x), p(\alpha))$ , definida em uma vizinhança de  $(x, \alpha) = (0, 0)$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , tal que*

- a)  $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é homeomorfismo definido em uma vizinhança de  $\alpha = 0$ , com  $p(0) = 0$ ;
- b)  $h_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um homeomorfismo dependente de um parâmetro definido em uma vizinhança da origem  $U_\alpha$  de  $x = 0$ , com  $h_0(0) = 0$  mapeando órbitas do sistema (2-8) em  $U_\alpha$  para órbitas do sistema (2-9) em  $V_\beta = h_\alpha(U_\alpha)$ , preservando a direção do tempo.

Uma das noções centrais da teoria das bifurcações é a noção de forma normal topológica, que é uma ferramenta para simplificar sistemas de equações diferenciais em uma vizinhança de seus equilíbrios. Para isso, consideramos um sistema genérico satisfazendo as condições de um determinado tipo de bifurcação e realizamos mudanças de coordenadas e parâmetros de modo que o sistema estudado se torne mais simples e seja topologicamente equivalente ao original. Desta forma, se torna possível analisar o comportamento qualitativo do sistema através de sua forma normal.

Dado um sistema

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \alpha), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^k, \quad (2-10)$$

possuindo um equilíbrio  $\mathbf{x} = 0$  para  $\alpha = 0$  com  $f$  suave, é possível construir, localmente, por meio de uma mudança de coordenadas e de parâmetros, um sistema mais simples, que pode ser polinomial em  $\xi$ ,

$$\xi' = g(\xi, \beta), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}^k, \quad (2-11)$$

tal que o equilíbrio  $\xi = 0$  corresponde a  $\beta = 0$ . Em particular, as condições de bifurcação que consideramos podem ser expressas como um número finito de condições independentes. Sob tais hipóteses, o espaço de parâmetros  $\beta$  divide-se em um número finito de regiões que correspondem a diagramas de bifurcação qualitativamente distintos.

**Definição 2.11** *O sistema (2-11) é dito forma normal topológica para uma bifurcação se qualquer sistema genérico da forma (2-10) que tem  $\mathbf{x} = 0$  como equilíbrio para  $\alpha = 0$  é topologicamente equivalente, próximo da origem, ao sistema (2-11).*

Um sistema genérico significa um sistema que satisfaz um finito número de condições de genericidade. Tais condições podem ser expressas em termos das derivadas parciais de  $f(x, 0)$  com respeito a  $x$  ou  $\alpha$ . As condições expressas em termos das derivadas parciais de  $f(x, 0)$  com respeito a  $x$  e avaliadas em  $x = 0$  são chamadas condições de não-degenerescência. Todas as outras condições relacionadas as derivadas de  $f(x, \alpha)$  com respeito ao parâmetro  $\alpha$  são chamadas condições de transversalidade. O papel desses dois tipos de condições é diferente. As condições de não-degenerescência garantem que o equilíbrio não é muito degenerado, isto é, o sistema tem estrutura local “bem definida” ao passo que as condições de transversalidade asseguram que os parâmetros realizem um desdobramento genérico dessa singularidade, isto é, que tal família dependente deste parâmetro revela todas as possíveis dinâmicas que podem surgir a partir desta singularidade.

## 2.2 Bifurcação do tipo fold

Consideremos agora o sistema que depende de um parâmetro  $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \alpha)$ , com  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , onde  $f$  é uma função suave com respeito a  $\mathbf{x}$  e  $\alpha$ , e seja  $x_0$  um equilíbrio hiperbólico desse sistema para um dado  $\alpha_0$ . Como visto no exemplo 2.1, sob uma pequena variação do parâmetro  $\alpha$ , tal equilíbrio se move mas continua sendo hiperbólico. Assim, podemos variar o parâmetro e monitorar o equilíbrio.

Genericamente, existem duas maneiras dessa hiperbolicidade ser violada: o surgimento de um autovalor real nulo ou os autovalores serem um par de complexos puros para algum valor de  $\alpha$ . Uma bifurcação associada com o surgimento de um autovalor  $\lambda_1 = 0$  é dita uma bifurcação do tipo fold, também chamada de tangente, dentre outros nomes, veja [5]. Agora, o objetivo é encontrar a forma normal de uma bifurcação do tipo Fold unidimensional. No próximo capítulo, tentaremos repetir o processo realizado aqui para a bifurcação de Hopf, ponto central do presente trabalho.

Consideremos o seguinte sistema dinâmico unidimensional dependendo de um parâmetro  $\alpha$

$$x' = \alpha + x^2 \equiv f(x, \alpha), \quad (2-12)$$

onde  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}$ . Note que, para  $\alpha = 0$ , o sistema possui um equilíbrio não hiperbólico em  $x_0 = 0$ , pois

$$f_x(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 2 \cdot 0 = 0.$$

Além disso, para  $\alpha = 0$  a função  $x$  é sempre crescente pois  $x' = x^2 > 0$ . Para  $\alpha > 0$ , o sistema não possui outros equilíbrios reais, uma vez que  $\sqrt{-\alpha} \notin \mathbb{R}$ . Por outro lado, para

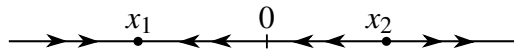
$\alpha < 0$ , o sistema admite dois equilíbrios reais dados por

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\alpha}.$$

Como  $f_x(x) = 2x$ , temos:

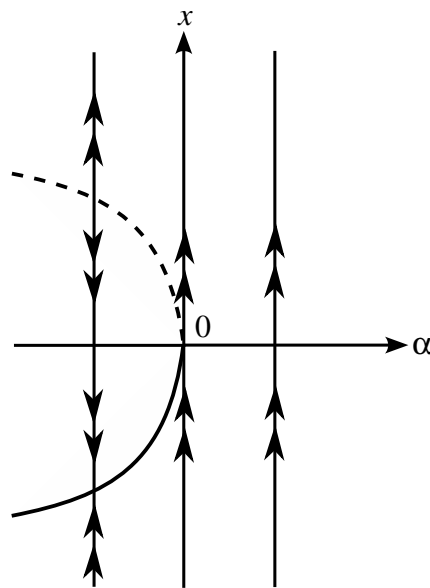
$$f_x(x_1) = -2\sqrt{-\alpha} < 0 \quad \text{e} \quad f_x(x_2) = 2\sqrt{-\alpha} > 0,$$

de modo que o ponto  $x_1 = -\sqrt{-\alpha}$  é estável, enquanto  $x_2 = \sqrt{-\alpha}$  é instável.



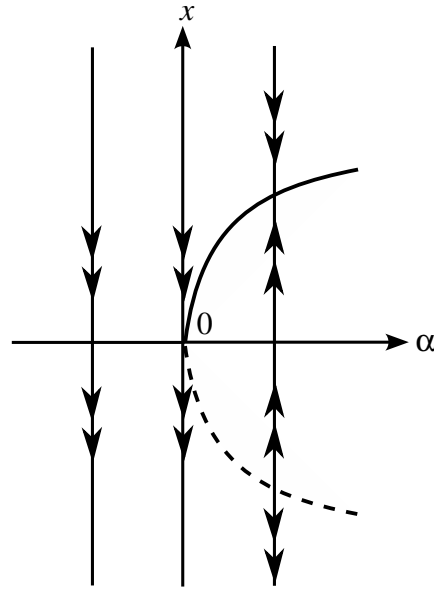
**Figura 2.12:** Retrato de fase do sistema (2-12) para  $\alpha < 0$ .

Observe que quando o parâmetro  $\alpha$  passa pela origem, os dois equilíbrios que existem em  $\alpha > 0$  colidem, formando em  $\alpha = 0$  um equilíbrio com  $\lambda = 0$ . Como vimos, outra maneira de representar tal bifurcação é seu diagrama, que pode ser visto como produto direto do espaço de parâmetros pelo seu espaço de fase, que neste caso é simplesmente o plano  $x\alpha$ . A equação  $\alpha + x^2 = 0$  define uma variedade de equilíbrio.



**Figura 2.13:** Diagrama da bifurcação do tipo fold com termo quadrático positivo.

Uma análise análoga pode ser feita para o sistema  $x' = \alpha - x^2$ . No entanto, agora os equilíbrios surgirão para  $\alpha > 0$ , com  $\sqrt{\alpha}$  atrator, pois  $f_x(\sqrt{\alpha}) = -2\sqrt{\alpha}$  e  $-\sqrt{\alpha}$  repulsor. Quando  $\alpha = 0$ , a função  $x$  decresce pois  $x' = -x^2 < 0$ . Finalmente, para  $\alpha < 0$ , a origem é o único equilíbrio e  $x' = \alpha - x^2 < 0$ , implicando que a função  $x$  decresce. O diagrama de bifurcação neste caso é a figura 2.14.



**Figura 2.14:** Diagrama da bifurcação do tipo fold com termo quadrático negativo.

Adicionemos agora termos de ordem superior a 2 no sistema (2-12). Veremos no lema a seguir que tais termos não alteram o comportamento qualitativo do sistema em uma vizinhança da origem  $x = 0$ .

**Lema 2.12** *O sistema  $x' = \alpha + x^2 + o(x^3)$  é localmente topologicamente equivalente a  $x' = \alpha + x^2$ , próximo da origem  $x = 0$ .*

*Prova.* O primeiro passo é considerar uma nova variável escalar  $y$  e escrever o sistema

$$x' = \alpha + x^2 + o(x^3),$$

como

$$y = F(y, \alpha) = \alpha + y^2 + \psi(y, \alpha), \quad (2-13)$$

onde  $\psi(y, \alpha) = o(y^3)$  é uma função suave de  $(y, \alpha)$  perto de  $(0, 0)$ . Considere a variedade de equilíbrio de (2-13) próxima da origem  $(0, 0)$  no plano  $(y, \alpha)$

$$M = \{(y, \alpha) \mid F(y, \alpha) = \alpha + y^2 + \psi(y, \alpha) = 0\}.$$

A curva  $M$  passa pela origem, isto é,  $F(0, 0) = 0$ . Ainda,  $F_\alpha(0, 0) = 1$ . Logo, pelo Teorema da Função Implícita, existem intervalos  $I$  e  $J$  contendo zero e uma função  $g : I \rightarrow J$  tal que  $g(0) = 0$  e  $F(y, g(y)) = 0$ . Além disso,

$$g'(y) = -\frac{\frac{\partial F(y, g(y))}{\partial y}}{\frac{\partial F(y, g(y))}{\partial \alpha}} = g'(y) = \frac{-2y - \frac{\partial \psi}{\partial y}}{1 + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}} \equiv f(y).$$

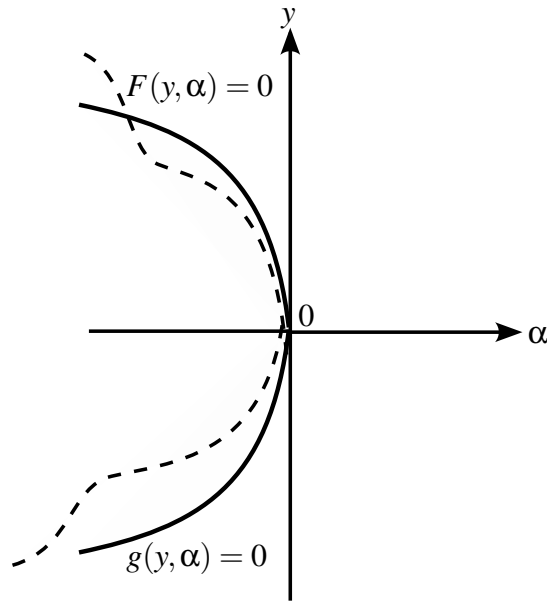
Assim, o conjunto  $M$  pode ser escrito como  $M = \{(y, \alpha) : \alpha = g(y)\}$  onde  $g$  é suave e definida para  $|y|$  pequeno. Podemos então expandir  $f(y)$  em séries de Taylor em torno de 0, temos

$$f(y) = f(0) + f'(0)y + \frac{f''(0)y^2}{2!} + \dots = -2y + o(y^2).$$

Integrando com relação a  $y$  em ambos os lados e como  $g(0) = 0$ , segue que

$$g(y) = -y^2 + o(y^3).$$

Assim, para  $\alpha < 0$ , os equilíbrios do sistema (2-15) próximos da origem  $y_1(\alpha)$  e  $y_2(\alpha)$  estão próximos de  $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\alpha}$ .



**Figura 2.15:** Curvas de equilíbrios.

O segundo passo é a construção do homeomorfismo. Para  $|\alpha|$  pequeno, construa uma função a depender de um parâmetro  $y = h_\alpha(x)$ , como segue: Para  $\alpha \geq 0$ , tome a função identidade  $h_\alpha(x) = x$  e para  $\alpha < 0$ , tome a transformação afim

$$h_\alpha(x) = a(\alpha) + b(\alpha)x,$$

onde os coeficientes  $a$  e  $b$  são determinados pelas condições  $h_\alpha(x_j(\alpha)) = y_j(\alpha)$ , com  $j = 1, 2$ . Isto é, leva pontos singulares de (2-12) em pontos singulares de (2-13). Tal condição implica que

$$\begin{cases} h_\alpha(\sqrt{-\alpha}) = y_1(\alpha); \\ h_\alpha(-\sqrt{-\alpha}) = y_2(\alpha), \end{cases}$$

donde segue

$$\begin{cases} y_1(\alpha) = a + b\sqrt{-\alpha}; \\ y_2(\alpha) = a - b\sqrt{-\alpha}. \end{cases}$$

Somando as equações e subtraindo-as obtemos,

$$a = \frac{y_1(\alpha) + y_2(\alpha)}{2} \quad \text{e} \quad b = \frac{y_1(\alpha) - y_2(\alpha)}{2\sqrt{-\alpha}}.$$

Portanto, a função  $h$  para  $\alpha < 0$  é dada por

$$h_\alpha = \frac{y_1(\alpha) + y_2(\alpha)}{2} + \frac{y_1(\alpha) - y_2(\alpha)}{2\sqrt{-\alpha}}x.$$

Observe que, de fato,  $h_\alpha(\pm\sqrt{-\alpha})$  coincide com  $y_1(\alpha)$  ou  $y_2(\alpha)$ , satisfazendo a condição imposta. Resta mostrar que a função  $h_\alpha$  é um homeomorfismo que leva órbitas em órbitas, preservando a direção do tempo, em uma vizinhança da origem. Primeiramente, observe que  $h_\alpha$  é contínua tanto para  $\alpha \geq 0$  quanto para  $\alpha < 0$ , pois é a função identidade e uma função linear, respectivamente. Além disso, em sistemas escalares, um homeomorfismo que leva pontos de equilíbrio em pontos de equilíbrio também mapeará suas órbitas. Observe que dado  $\alpha \geq 0$  a função inversa é dada por  $h_\alpha^{-1}(x) = x$  e para  $\alpha < 0$ , a inversa é  $h_\alpha^{-1}(x) = \frac{x-a}{b}$  e logo, existe inversa que também é contínua. Portanto  $h_\alpha$  é homeomorfismo. Consideremos agora uma órbita  $\varphi(t)$  que conecta  $x_1$  e  $x_2$  no sistema (2-13), isto é

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = x_1 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = x_2.$$

Tome agora  $\psi(t) = h(\varphi(t))$  e observe que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} h(\varphi(t)) = h\left(\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t)\right) = h(x_1) = y_1$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(\varphi(t)) = h\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)\right) = h(x_2) = y_2.$$

Logo,  $\varphi$  conecta  $y_1$  e  $y_2$ . Como o sistema é unidimensional,  $\psi(t)$  é órbita que conecta os dois equilíbrios. Então  $h$  mapeia as órbitas de conexão dos dois sistemas. Além disso, sabemos que  $\varphi(t)$  vai de  $x_1$  em direção a  $x_2$  conforme o tempo aumenta, assim como  $\psi$  vai de  $y_1$  para  $y_2$ . Disso segue que  $h$  preserva orientação. Sendo o sistema unidimensional, como a orientação da órbita entre  $x_1$  e  $x_2$ , preserva-se também a estrutura atratora ou repulsora de  $y_{1,2}$ . Assim, os sistemas são topologicamente equivalentes.  $\square$

Mostremos agora que o sistema (2-12), a menos da possibilidade de mudança de sinal no termo quadrático, é forma normal topológica para um sistema unidimensional genérico que tenha uma bifurcação do tipo fold. Para isso, suponha que o sistema

$$x' = f(x, \alpha), \tag{2-14}$$

com  $x, \alpha \in \mathbb{R}$  onde  $f$  é suave e tem o equilíbrio  $x = 0$  em  $\alpha = 0$  de modo que  $\lambda = f_x(0, 0) = 0$ . Expandindo  $f(x, \alpha)$  em série de Taylor com respeito a  $x$  e em torno de  $x = 0$ , temos uma expressão da forma

$$f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + o(x^3),$$

onde  $f_0(\alpha) = f(0, \alpha)$ ,  $f_1(\alpha) = f_x(0, \alpha)$  e  $f_2(\alpha) = \frac{1}{2}f_{xx}(0, \alpha)$ . Assim, para que tal sistema possua uma bifurcação do tipo fold na origem, iremos supor que  $f_0(0) = f(0, 0) = 0$  e  $f_1(0) = f_x(0, 0) = 0$ .

A ideia central é utilizar mudanças de coordenadas suaves, inversíveis e dependentes do parâmetro para transformar o sistema (2-14) no sistema (2-12). Enquanto tais mudanças são feitas, veremos que as condições de não-degenerescência e transversalidade devem ser impostas para que essas transformações sejam possíveis. O mesmo processo será feito para a bifurcação de Hopf no próximo capítulo.

**Teorema 2.13** *Suponha que o sistema unidimensional (2-14) com  $x, \alpha \in \mathbb{R}$  e  $f$  suave tenha o equilíbrio  $x = 0$  em  $\alpha = 0$  e seja  $\lambda = f_x(0, 0) = 0$ . Assuma que as seguintes condições são satisfeitas:*

1.  $f_{xx}(0, 0) \neq 0$ ,
2.  $f_\alpha(0, 0) \neq 0$ .

*Então, existem mudanças de parâmetros e coordenadas inversíveis que transformam o sistema (2-14) em  $\eta' = \beta \pm \eta^2 + o(\eta^3)$ .*

*Prova.* Primeiramente, considere a mudança de coordenadas  $\xi = x + \delta$ , onde  $\delta = \delta(\alpha)$  é, a princípio, uma função desconhecida. A inversa dessa transformação é  $x = \xi - \delta$ . Substituindo tal expressão para  $x$  na equação

$$x' = f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + o(x^3),$$

obtemos

$$\begin{aligned} \xi' &= f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + o(x^3) \\ &= f_0(\alpha) + f_1(\alpha)(\xi - \delta) + f_2(\alpha)(\xi - \delta)^2 + o(\xi^3) \\ &= f_0(\alpha) + f_1(\alpha)\xi - f_1(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\xi^2 - 2\delta\xi f_2(\alpha) + f_2(\alpha)\delta^2 + o(\xi^3) \\ &= (f_0(\alpha) - f_1(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\delta^2 + o(\delta^3)) + (f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + o(\delta^2))\xi + \\ &\quad + (f_2(\alpha) + o(\delta))\xi^2 + o(\xi^3) \end{aligned} \tag{2-15}$$

Como, por hipótese,  $f_2(0) = \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0) \neq 0$ , existe uma função suave  $\delta(\alpha)$  que “apaga” o termo linear na equação acima para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeno. De fato, observe

que para que o termo linear desapareça, devemos ter que

$$F(\alpha, \delta) = f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + \delta^2\psi(\alpha, \delta) = 0,$$

com  $\psi$  suave. Como

- $F(0, 0) = 0$ ;
- $\left. \frac{\partial F}{\partial \delta}(\alpha, \delta) \right|_{(0,0)} = -2f_2(\alpha) \neq 0$ ;
- $\left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{(0,0)} = f_1'(\alpha)$ ,

o Teorema da Função Implícita garante que existem intervalos  $I$  e  $J$  na vizinhança da origem e uma função suave  $\delta : I \rightarrow J$  tal que  $\delta(0) = 0$ ,  $F(\alpha, \delta(\alpha)) \equiv 0$  e

$$h(\alpha) = \delta'(\alpha) = \frac{-\frac{\partial F(\alpha, \delta(\alpha))}{\partial \alpha}}{\frac{\partial F(\alpha, \delta(\alpha))}{\partial \delta}} = \frac{-f_1'(\alpha) + 2f_2'(\alpha)\delta(\alpha) - \delta(\alpha)^2 \frac{\partial \psi(\alpha, \delta(\alpha))}{\partial \alpha}}{-2f_2(\alpha) + 2\delta(\alpha)\psi(\alpha, \delta(\alpha)) + \delta(\alpha)^2 \frac{\partial \psi(\alpha, \delta(\alpha))}{\partial \delta}},$$

que podemos expandir em série ao redor de  $\alpha = 0$ , obtendo

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= h(0) + h'(0)\alpha + \frac{h''(0)\alpha^2}{2!} + \dots \\ &= \frac{-f_1'(0) + 2f_2'(0)\delta(0) - \delta(0)^2 \frac{\partial \psi(0, \delta(0))}{\partial \alpha}}{-2f_2(0) + 2\delta(0)\psi(0, \delta(0)) + \delta(0)^2 \frac{\partial \psi(0, \delta(0))}{\partial \delta}} + o(\alpha) \\ &= \frac{f_1'(0)}{2f_2(0)} + o(\alpha). \end{aligned}$$

Com isso, segue que

$$\delta'(\alpha) = \frac{f_1'(0)}{2f_2(0)} + o(\alpha).$$

Integrando com relação a  $\alpha$  em ambos os lados, como  $\delta(0) = 0$  segue que

$$\delta(\alpha) = \frac{f_1'(0)}{2f_2(0)}\alpha + o(\alpha^2). \quad (2-16)$$

Portanto, a equação (2-15) pode ser escrita como

$$\xi' = (f_0(\alpha) - f_1(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\delta^2 + o(\delta^3)) + (f_2(\alpha) + o(\delta))\xi^2 + o(\xi^3). \quad (2-17)$$

Agora, o objetivo é simplificar o termo independente na equação (2-17). Para isso, observe que é possível expandir as funções  $f_0$ ,  $f_1$ , e  $f_2$  em séries de Taylor em torno de  $\alpha = 0$ , de modo que

- $f_0(\alpha) = f_0(0) + f_0'(0)\alpha + o(\alpha^2) = f_0'(0)\alpha + o(\alpha^2)$ ;

- $f_1(\alpha) = f_1(0) + f_1'(0)\alpha + o(\alpha^2) = f_1'(0)\alpha + o(\alpha^2)$ ;
- $f_2(\alpha) = f_2(0) + f_2'(0)\alpha + o(\alpha^2)$ .

Assim, podemos utilizar a expressão dada pela equação (2-16) e as expansões acima para reescrever o termo independente na equação (2-17) da seguinte forma

$$\begin{aligned} f_0(\alpha) - f_1(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\delta^2 + o(\delta^3) &= f_0'(0)\alpha - (f_1'(0)\alpha + o(\alpha^2) + o(\alpha^2))2f_2(0) + o(\alpha^2) \\ &= f_0'(0)\alpha + o(\alpha^2). \end{aligned}$$

Do mesmo modo, utilizando as informações obtidas para simplificar o termo quadrático de da equação (2-15), temos

$$f_2(\alpha) + o(\delta) = f_2(0) + f_2'(0)\alpha + o(\alpha) = f_2(0) + o(\alpha). \quad (2-18)$$

Portanto, para  $|\alpha|$  pequeno, a equação diferencial (2-15) pode ser reescrita, sem o termo linear, a saber

$$\xi' = (f_0'(0)\alpha + o(\alpha^2)) + (f_2(0) + o(\alpha))\xi^2 + o(\xi^3).$$

Agora, consideremos o termo independente como um novo parâmetro  $\mu = \mu(\alpha)$ , da forma

$$\mu = f_0'(0)\alpha + \varphi(\alpha)\alpha^2,$$

onde  $\varphi$  é uma função suave. Temos então que

- $\mu(0) = 0$ ;
- $\mu'(\alpha) = f_0'(0) + 2\alpha\varphi(\alpha)$ , implicando que  $\mu'(0) = f_0'(0) = f_{\alpha}(0,0)$ .

Como  $\mu(0) = 0$  e  $f_{\alpha}(0,0) \neq 0$ , o Teorema da Função Inversa garante que existem vizinhanças  $I$  e  $J$  da origem e uma função  $\alpha : I \rightarrow J$  de modo que  $\alpha(0) = 0$ . Assim, podemos reescrever a equação (2-15) como

$$\xi' = \mu + (f_2(0) + o(\mu))\xi^2 + o(\xi^3) = \mu + a(\mu)\xi^2 + o(\xi^3),$$

onde  $a(\mu)$  é uma função suave e  $a(0) = f_2(0) \neq 0$ . Tomando  $\eta = |a(\mu)|\xi$  e  $\beta = |a(\mu)|\mu$ , temos que

$$\eta' = |a(\mu)|\xi' = |a(\mu)|\mu \pm |a(\mu)|\xi^2 + o(\eta^3) = \beta \pm \eta^2 + o(\eta^3),$$

provando o Teorema. □

Deste modo, dado um sistema unidimensional genérico que apresenta uma bifurcação do tipo fold, é possível transformá-lo na forma canônica  $\eta' = \beta \pm \eta^2 + o(\eta^3)$ .

Utilizando o Lema 2-15, podemos eliminar o termo de ordem cúbica, obtendo assim a forma normal topológica da bifurcação fold, como enunciado no teorema a seguir.

**Teorema 2.14** *Qualquer sistema escalar genérico a um parâmetro  $x' = f(x, \alpha)$  tendo um equilíbrio em  $x = 0$  para  $\alpha = 0$  com  $\lambda = f_x(0, 0) = 0$  é localmente topologicamente equivalente próximo da origem a uma das seguintes formas normais*

$$\eta' = \beta \pm \eta^2.$$

Para que uma bifurcação do tipo fold ocorra de forma genérica, é necessário que duas condições fundamentais sejam satisfeitas: a condição de não-degenerescência e a condição de transversalidade. A primeira assegura que a derivada da função que define o sistema em relação à variável de estado não se anule no ponto de bifurcação, ou seja, que a função não seja localmente plana e que pequenas variações da variável de estado produzam alterações efetivas no valor da função. A segunda exige que a derivada da função em relação ao parâmetro de bifurcação seja diferente de zero, garantindo que o autovalor atravesse o eixo imaginário e que a estabilidade do sistema realmente mude.

## Bifurcação de Hopf

Uma bifurcação de Hopf é caracterizada pela ocorrência de um par de autovalores puramente imaginários na matriz jacobiana associada ao sistema no valor de bifurcação. Em outras palavras, ao variar um parâmetro real  $\alpha$ , o sistema passa por uma transição em que o ponto de equilíbrio muda de estabilidade e, simultaneamente, um ciclo limite surge ou desaparece. Como essa bifurcação é associada a ocorrência de um par de autovalores imaginários puros, ela ocorre tipicamente em sistemas dinâmicos bidimensionais, apesar de poder ser analisada em sistemas de ordem superior.

O interesse por esse tipo de bifurcação tem origem na observação de comportamentos oscilatórios em diversas áreas, como biologia, química e engenharia. Historicamente, as ideias que levaram à formalização da bifurcação de Hopf remontam à década de 1940, com os trabalhos do matemático austríaco Eberhard Hopf (1902-1983), que demonstrou matematicamente o surgimento de órbitas periódicas estáveis em torno de pontos de equilíbrio instáveis. Desde então, a bifurcação de Hopf tornou-se um dos mecanismos mais estudados na teoria das bifurcações. Neste capítulo, estudaremos as condições necessárias e suficientes para que uma bifurcação de Hopf ocorra em sistemas planares, bem como os procedimentos para obtenção da forma normal topológica que descreve localmente a dinâmica perto do valor de bifurcação.

### 3.1 Aspectos preliminares da bifurcação de Hopf

Consideremos agora o sistema de duas equações diferenciais dependendo de um parâmetro

$$\begin{cases} x' = \alpha x - y - x(x^2 + y^2), \\ y' = x + \alpha y - y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (3-1)$$

Temos que a origem do plano cartesiano é um ponto singular do sistema para qualquer valor de  $\alpha$ . Além disso, a matriz jacobiana associada ao sistema é dada por

$$A(x, y, \alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - 3x^2 - y^2 & -1 - 2xy \\ 1 - 2xy & \alpha - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix},$$

a qual avaliada na origem é a matriz

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

cujos autovalores são  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$ . Assim, pelo Teorema de Hartman Grobman, a origem representa um foco que pode ser atrator ou repulsor quando  $\alpha \neq 0$ . Introduzindo uma nova variável complexa  $z = x + iy$ , temos que  $\bar{z} = x - iy$  e  $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$ . Como  $x$  e  $y$  satisfazem o sistema (3-1), segue que  $z$  satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned} z' &= x' + iy' \\ &= (\alpha x - y - x(x^2 + y^2)) + i(x + \alpha y - y(x^2 + y^2)) \\ &= \alpha x - y - x(x^2 + y^2) + ix + i\alpha y - iy(x^2 + y^2) \\ &= \alpha(x + iy) - (x^2 + y^2)(x + iy) + i(x + iy). \end{aligned}$$

Portanto, o sistema (3-1) pode ser reescrito na forma complexa

$$z' = \alpha z - |z|^2 z + iz = (\alpha + i)z - z|z|^2. \quad (3-2)$$

Agora, utilizando a representação exponencial  $z = re^{i\theta}$ , podemos reescrever a equação diferencial (3-2) como

$$z' = (\alpha + i - |re^{i\theta}|^2)re^{i\theta}.$$

Por outro lado, derivando tal representação do número  $z$ , obtemos que  $z'$  também pode ser escrito como

$$z' = r'e^{i\theta} + ir\theta'e^{i\theta}.$$

Logo, igualando as duas expressões, segue que

$$(\alpha + i - |re^{i\theta}|^2)re^{i\theta} = r'e^{i\theta} + ir\theta'e^{i\theta}.$$

Dividindo ambos os lados por  $e^{i\theta}$ , segue que

$$re^{i\theta}(\alpha + i - r^2) = e^{i\theta}(r' + ir\theta') \Rightarrow r(\alpha - r^2) + ir = r' + ir\theta'.$$

Portanto, obtemos

$$\begin{cases} r' = r(\alpha - r^2), \\ r = r\theta'. \end{cases}$$

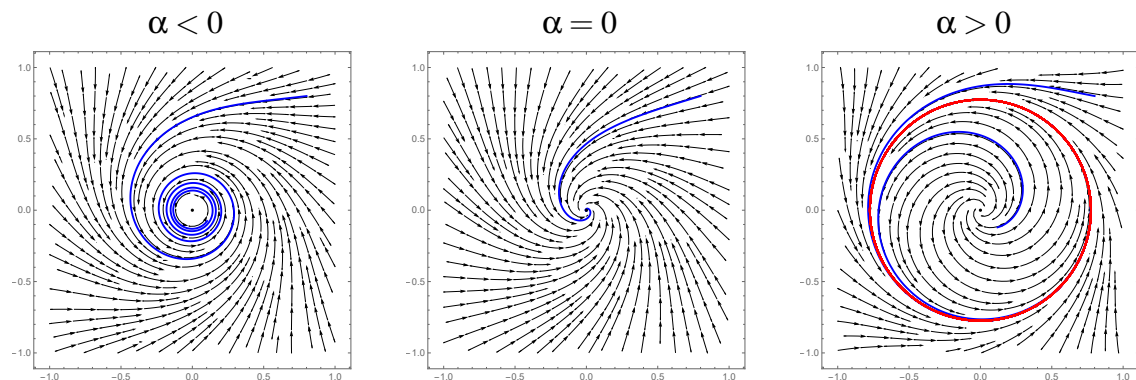
Ou seja, a forma polar do sistema (3-1) é dada por

$$\begin{cases} r' = r(\alpha - r^2), \\ \theta' = 1. \end{cases} \quad (3-3)$$

Como as equações para  $r$  e  $\theta$  são independentes, os retratos de fase são facilmente analisados. Observe que a primeira equação (que pode ser considerada apenas para  $r \geq 0$ , tendo em vista que  $r$  simboliza o raio), tem um equilíbrio em  $r = 0$  para qualquer valor de  $\alpha$ . Além disso,  $\theta$  é sempre crescente. Assim, para  $\alpha \leq 0$  temos  $r' \leq 0$ , logo  $r$  é decrescente e temos um foco estável na origem.

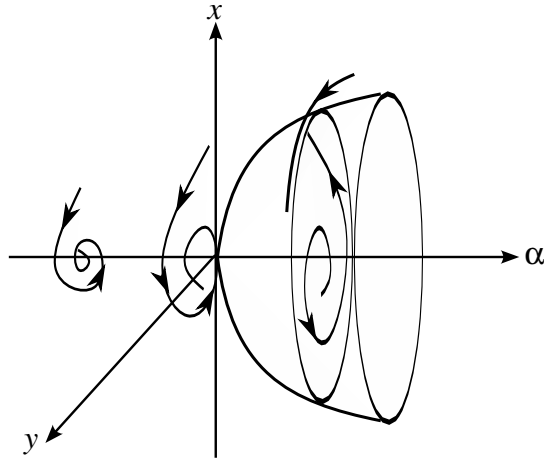
Em  $\alpha > 0$ , observemos inicialmente que  $r = \pm\sqrt{\alpha}$  também são possíveis zeros de  $r'$ . Como  $r \geq 0$  e  $\alpha \geq 0$ , segue que  $-\sqrt{\alpha}$  não pode ser equilíbrio do sistema pois não é valor possível para  $r$ . Portanto, temos que para  $\alpha$  positivo, o sistema possui equilíbrios em  $r_0 = 0$  e  $r_1 = \sqrt{\alpha}$ . Como o equilíbrio  $r_1$  é constante para qualquer ângulo  $\theta$ , segue que  $C = \{(r, \theta) : r = \sqrt{\alpha}\}$  é órbita periódica do sistema para valores positivos de  $\alpha$ . Agora, note que para  $r < \sqrt{\alpha}$ ,  $r' > 0$  e  $r$  cresce. Para  $r > \sqrt{\alpha}$ ,  $r' < 0$  e  $r$  decresce.

Uma bifurcação desse tipo é chamada bifurcação de Andronov-Hopf ou apenas bifurcação de Hopf. Note que, neste caso, o ciclo limite existe para valores positivos do parâmetro  $\alpha$ , ou seja, após o valor crítico de bifurcação que é  $\alpha = 0$ . Observe que um ciclo limite estável surge com a passagem do parâmetro  $\alpha$  pelo valor de bifurcação. Tal bifurcação é chamada de Hopf supercrítica.



**Figura 3.1:** Retratos de fase do sistema (3-1). O ciclo limite estável (em vermelho) ocorre para  $\alpha > 0$ . A trajetória em azul corresponde a um foco atrator quando  $\alpha < 0$ , a um foco atrator fraco em  $\alpha = \alpha_0$  e a um foco repulsor quando  $\alpha > 0$ .

Como vimos no capítulo anterior, o diagrama de bifurcação é o produto direto do espaço de parâmetros pelo espaço de fase. De acordo com as análises feitas acima, para  $\alpha > 0$ , temos um ciclo limite com raio  $r_1 = \sqrt{\alpha}$ . Portanto, com o crescimento de  $\alpha$ , o raio do ciclo limite também aumenta. O diagrama de bifurcação é mostrado na figura 3.2.



**Figura 3.2:** Espaço fase-parâmetro da bifurcação de Hopf supercrítica.

Consideramos agora o sistema em que os termos não lineares têm sinal oposto ao da equação (3-1), isto é

$$\begin{cases} x' = \alpha x - y + x(x^2 + y^2), \\ y' = x + \alpha y + y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (3-4)$$

Observe que a origem continua sendo ponto singular do sistema. Além disso, a matriz jacobiana agora é dada por

$$A(x, y, \alpha) = \begin{pmatrix} \alpha + 3x^2 + y^2 & -1 + 2xy \\ 1 + 2xy & \alpha + x^2 + 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Avaliando-a na origem, temos que

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

cujos autovalores são  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$ . Introduzindo a variável complexa  $z = x + iy$ , segue que

$$\begin{aligned} z' &= \alpha x - y + x(x^2 + y^2) + i(x + \alpha y + y(x^2 + y^2)) \\ &= \alpha(x + iy) + i(x + iy) + (x^2 + y^2)(x + iy) \\ &= \alpha z + iz + |z|^2 z. \end{aligned}$$

Além disso, como  $z = re^{i\theta}$ , vale a igualdade abaixo

$$z' = (\alpha + i)re^{i\theta} + re^{i\theta}|re^{i\theta}|^2.$$

Por outro lado, como  $z' = \alpha z + iz + |z|^2 z = (\alpha + i + |re^{i\theta}|^2)re^{i\theta}$ , igualando as expressões, obtemos

$$z' = r'e^{i\theta} + ir'\theta'e^{i\theta}.$$

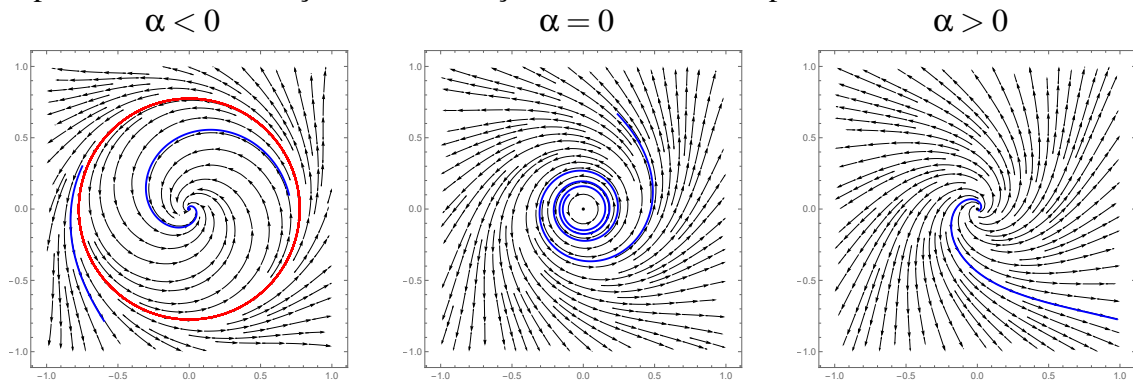
Igualando as expressões e dividindo ambos os lados por  $e^{i\theta}$ , obtemos

$$re^{i\theta}(\alpha + i + r^2) = e^{i\theta}(r' + ir\theta') \Rightarrow r(\alpha + r^2) + ir = r' + ir\theta'$$

e logo, a representação polar do sistema (3-4) é

$$\begin{cases} r' = r(\alpha + r^2), \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

Portanto, quando  $\alpha \geq 0$  então  $r' \geq 0$  e  $r$  cresce, com  $\theta$  crescente, o que caracteriza um foco instável. Para os valores negativos de  $\alpha$ ,  $r_1 = \sqrt{-\alpha}$  é ponto singular além da origem. Então, a curva  $C = \{(r, \theta) : r = \sqrt{-\alpha}\}$  é órbita periódica do sistema. Observe ainda que para  $r < r_1$ ,  $r'$  é menor que 0 e logo  $r$  decresce, indicando que o equilíbrio na origem é estável. Neste caso, um ciclo limite instável surge com a passagem do parâmetro  $\alpha$  pelo valor de bifurcação. Tal bifurcação é chamada de Hopf subcrítica.



**Figura 3.3:** Retratos de fase do sistema (3-1). o ciclo limite instável (em vermelho) ocorre para  $\alpha < 0$ . A trajetória em azul corresponde a um foco repulsor quando  $\alpha > 0$ , a um foco repulsor fraco em  $\alpha = \alpha_0$  e a um foco atrator quando  $\alpha < 0$ .

Assim, a principal característica de uma bifurcação de Hopf é o surgimento de um ciclo limite a medida em que o parâmetro passa pelo valor de bifurcação. Nosso objetivo, a partir de agora, é demonstrar que qualquer sistema que apresenta uma bifurcação de Hopf pode ser escrito localmente como (3-1) ou (3-4). Para isso, serão apresentados uma série de resultados que conduzem à obtenção da forma normal topológica da bifurcação de Hopf, evidenciando as etapas desse processo.

## 3.2 Forma normal topológica da bifurcação de Hopf

Os resultados a serem apresentados consideram inicialmente o caso em que o termo cúbico possui sinal negativo. No entanto, será demonstrado ao final dessa seção que esse sinal pode ser tanto negativo quanto positivo, como já observado na seção anterior. De forma análoga ao que foi feito na análise da bifurcação do tipo fold (ver Capítulo 2),

o primeiro passo consiste em eliminar, por meio de transformações adequadas, os termos de ordem superior. O primeiro resultado mostra que o sistema (3-1) é topologicamente equivalente em uma vizinhança da origem ao mesmo sistema com a adição de termos de ordem maior que três.

**Lema 3.1** *O sistema*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(\|(x,y)\|^4) \quad (3-5)$$

*é topologicamente equivalente, próximo da origem, ao sistema*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3-6)$$

*Prova.* Assim como visto anteriormente, considerando a variável complexa  $z = x + iy$ , podemos reescrever os sistemas (3-5) e (3-6) respectivamente como

$$z' = (\alpha + i)z - z|z|^2 + o(|z|^4) \quad (3-7)$$

e

$$z' = (\alpha + i)z - z|z|^2. \quad (3-8)$$

Dessa forma, nosso problema agora consiste em provar que (3-7) e (3-8) são topologicamente equivalentes. A demonstração será dividida em dois passos. Primeiramente, mostraremos que existe um único ciclo limite para o sistema (3-7), depois construiremos o homeomorfismo que leva um sistema no outro preservando a direção das órbitas, em uma vizinhança da origem. Inicialmente, escrevamos o sistema (3-7) em coordenadas polares utilizando a representação  $z = re^{i\theta}$ . Por um lado, substituindo  $z$  no sistema (3-7), temos

$$z' = (\alpha + i)re^{i\theta} - re^{i\theta}r^2 + o(|z|^4).$$

Por outro lado, derivando  $z = re^{i\theta}$ , obtemos  $z' = r'e^{i\theta} + ir\theta'e^{i\theta}$ . Igualando as duas equações obtidas, segue que a seguinte igualdade é verdadeira

$$r(\alpha + i - r^2) + o(|z|^4) = r' + ir\theta'.$$

Observe ainda que  $|z|^4 = |r|^4$  e, logo,  $o(|z|^4) = o(|r|^4)$ . Portanto, podemos reescrever tal igualdade como

$$r(\alpha + i - r^2) + o(|r|^4) = r' + ir\theta'.$$

Igualando as partes real e imaginária, segue que o sistema (3-7) pode ser escrito em sua

forma polar como

$$\begin{cases} r' &= r(\alpha - r^2) + \phi(r, \theta), \\ \theta' &= 1 + \psi(r, \theta), \end{cases} \quad (3-9)$$

onde  $\phi = o(|r|^4)$  e  $\psi = o(|r|^3)$ . Afim de simplificar a notação, a dependência de  $\alpha$  dessas funções não é indicada. Observe que dividindo (3-9) por  $1 + \psi$ , temos que

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} \frac{1}{1 + \psi} &= \frac{r(\alpha - r^2) + \phi}{1 + \psi}, \\ \frac{d\theta}{dt} \frac{1}{1 + \psi} &= 1. \end{cases}$$

Podemos introduzir uma nova variável de tempo  $\tau$  de modo que  $\frac{d\theta}{d\tau} = 1$ . Observe que, pela regra da cadeia,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \implies \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\tau}{dt}.$$

Donde segue que

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \psi(r, \theta).$$

Assim, podemos reescrever o sistema como

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau} &= \frac{r(\alpha - r^2) + \phi(r, \theta)}{1 + \psi(r, \theta)}, \\ \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{d\tau} &= 1. \end{cases}$$

Como em torno da origem a função  $\psi$  é pequena, temos que sua expansão em séries é dada por

$$\frac{1}{1 + \psi} = 1 - \psi + \psi^2 + \dots$$

Com isso, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= (1 - \psi + \psi^2 + \dots)(r(\alpha - r^2) + \phi) \\ &= r(\alpha - r^2) - r(\alpha - r^2)\psi + r(\alpha - r^2)\psi^2 + \phi(1 - \psi + \psi^2) + \dots \\ &= r(\alpha - r^2) + R(r, \theta). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{dr}{d\theta} = r(\alpha - r^2) + R(r, \theta). \quad (3-10)$$

Deste modo, uma órbita de (3-9) começando em  $(r, \theta) = (r_0, 0)$  será representada por  $r = r(\theta, r_0)$ , onde  $r_0 = r(0, r_0)$ . Note que, ao transformar ao transformar (3-9) em (3-10), estamos também reparametrizando o tempo de modo de que  $\theta' = 1$ . Logo, olhando para

o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \theta' = 1, \\ \theta(0) = 0, \end{cases}$$

sua solução é dada por  $\theta(\tau) = \tau$ . Assim, além de  $\theta(0) = 0$ , temos que  $\theta(2\pi) = 2\pi$ , o que implica que para qualquer órbita iniciada em  $(r_0, 0)$ , com  $r_0 > 0$  percorre uma volta completa no mesmo intervalo de tempo  $\tau = 2\pi$ . Portanto, todas essas órbitas possuem o mesmo tempo de retorno angular. Como a origem é ponto singular do sistema,  $r(\theta, 0) \equiv 0$  é solução trivial do sistema e podemos escrever a expansão de Taylor para  $r(\theta, r_0)$  em torno de  $r_0 = 0$ :

$$r = u_1(\theta)r_0 + u_2(\theta)r_0^2 + u_3(\theta)r_0^3 + o(|r_0|^4). \quad (3-11)$$

O objetivo passa a ser encontrar os coeficientes  $u_1, u_2, u_3$  e  $u_4$ . Para isso, substituímos (3-11) em (3-10) e, do lado esquerdo da igualdade, obtemos

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d(u_1(\theta)r_0 + u_2(\theta)r_0^2 + u_3(\theta)r_0^3 + o(|r_0|^4))}{d\theta} = u_1'(\theta)r_0 + u_2'(\theta)r_0^2 + u_3'(\theta)r_0^3 + o(|r_0|^4).$$

Do lado direito, temos

$$\begin{aligned} r(\alpha - r^2) + R(r, \theta) &= (u_1r_0 + u_2r_0^2 + u_3r_0^3 + o(|r_0|^4)) \\ &\quad (\alpha - (u_1r_0 + u_2r_0^2 + u_3r_0^3 + o(|r_0|^4))^2) + R(r, \theta) \\ &= r_0\alpha u_1 - r_0^3u_1^3 + r_0^2\alpha u_2 + r^3\alpha u_3 + o(|r|^4) \\ &= r_0\alpha u_1 + r_0^2\alpha u_2 + r_0^3(-u_1^3 + \alpha u_3) + o(|r|^4). \end{aligned}$$

Assim, vale a igualdade

$$u_1'r_0 + u_2'r_0^2 + u_3'r_0^3 + o(|r_0|^4) = r_0\alpha u_1 + r_0^2\alpha u_2 + r_0^3(-u_1^3 + \alpha u_3) + o(|r|^4).$$

Igualando as potências de  $r_0$ , temos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} u_1' = \alpha u_1, \\ u_2' = \alpha u_2, \\ u_3' = -u_1^3 + \alpha u_3. \end{cases}$$

Observe que  $r(0, r_0) = r_0$  e, por outro lado, tomando  $\theta = 0$  em (3-11), temos que

$$r_0 = r(r_0, 0) = u_1(0)r_0 + u_2(0)r_0^2 + u_3(0)r_0^3 + o(|r_0|^4).$$

Donde segue que podemos tomar  $u_1(0) = 1$ ,  $u_2(0) = 0$  e  $u_3(0) = 0$  como condições iniciais para o sistema dado. Resolvendo tal problema de valor inicial, temos que  $u_1(\theta) = e^{\alpha\theta}$  e  $u_2(\theta) \equiv 0$ . Para resolver a terceira equação do sistema, observe que  $u_3' = -e^{3\alpha\theta} +$

$\alpha u_3$ . Subtraindo  $\alpha u_3$  em ambos os lados, obtemos

$$u_3' - \alpha u_3 = -e^{3\alpha\theta} \Rightarrow (u_3 e^{-\alpha\theta})' = -e^{2\alpha\theta}.$$

Assim, podemos integrar ambos os lados de modo que

$$\int_0^\theta \left( \frac{d(u_3 e^{-\alpha\rho})}{d\rho} \right) d\rho = - \int_0^\theta e^{2\alpha\rho} d\rho.$$

Resolvendo tais integrais, segue

$$u_3 e^{-\alpha\theta} - u_3(0) = - \left( \frac{e^{2\alpha\theta} - 1}{2\alpha} \right).$$

Portanto,

$$u_3 = \frac{e^{\alpha\theta}(1 - e^{2\alpha\theta})}{2\alpha}.$$

Logo, substituindo em (3-11), temos a expressão para  $r$ :

$$r = e^{\alpha\theta} r_0 + e^{\alpha\theta} \frac{1 - e^{2\alpha\theta}}{2\alpha} r_0^3 + o(|r_0|^4).$$

Tal expressão é independente do termo  $R(r, \theta)$ . Portanto, a aplicação de retorno

$$r_0 \rightarrow r_1 \equiv r(2\pi, r_0),$$

tem a forma

$$\begin{aligned} r_1 \equiv r(2\pi, r_0) &= e^{2\pi\alpha} r_0 + e^{2\pi\alpha} \cdot \frac{1 - e^{4\pi\alpha}}{2\alpha} r_0^3 + o(|r|^4) \\ &= e^{2\pi\alpha} r_0 + \frac{e^{2\pi\alpha}}{2\alpha} r_0^3 - \frac{e^{2\pi\alpha} e^{4\pi\alpha}}{2\alpha} r_0^3 + o(|r|^4) \\ &= e^{2\pi\alpha} r_0 - e^{2\pi\alpha} \left( \frac{e^{4\pi\alpha} - 1}{2\alpha} \right) r_0^3 + o(|r|^4). \end{aligned}$$

Expandindo  $e^{4\pi\alpha}$  ao redor de  $\alpha = 0$ , obtemos  $e^{4\pi\alpha} = 1 + 4\pi e^{4\pi\alpha} \alpha + o(|\alpha|^2)$ . Então,  $e^{4\pi\alpha} - 1 = 4\pi\alpha + o(|\alpha|^2)$ . Assim,

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv e^{2\pi\alpha} r_0 - e^{2\pi\alpha} \left( \frac{4\pi\alpha + o(|\alpha|^2)}{2\alpha} r_0^3 + o(|r_0|^4) \right) \\ &= e^{2\pi\alpha} r_0 - e^{2\pi\alpha} (2\pi + o(|\alpha|)) r_0^3 + o(|r_0|^4). \end{aligned} \tag{3-12}$$

Agora, queremos encontrar os pontos fixos da aplicação de retorno, que são onde surgem os ciclos limites. Observe que a função em (3-12) pode ser facilmente analisada para  $r_0$  e  $|\alpha|$  suficientemente pequenos. Os pontos fixos da aplicação de retorno são dados pela

equação

$$r_0 = e^{2\pi\alpha} r_0 - e^{2\pi\alpha} (2\pi + o(|\alpha|)) r_0^3 + o(|r_0|^4),$$

ou seja,

$$-r_0 + e^{2\pi\alpha} r_0 - e^{2\pi\alpha} (2\pi + o(|\alpha|)) r_0^3 + o(|r_0|^4) = 0. \quad (3-13)$$

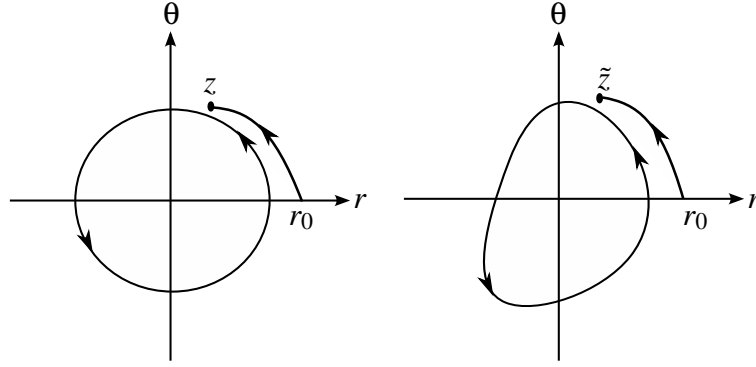
Reorganizando os termos, temos  $(e^{2\pi\alpha} - 1)r_0 - e^{2\pi\alpha} (2\pi + o(|\alpha|)) r_0^3 + o(|r_0|^4) = 0$ . Note que podemos expandir  $e^{2\pi\alpha}$  em torno de  $\alpha = 0$  como  $e^{2\pi\alpha} = 1 + 2\pi e^{2\pi\alpha} \alpha + o(|\alpha|^2)$ .

Substituindo tal expansão na equação (3-13), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= (2\pi\alpha + o(|\alpha|^2))r_0 - (1 + 2\pi\alpha e^{2\pi\alpha} + o(|\alpha|^2))(2\pi + o(\alpha))r_0^3 + o(|r_0|^4) \\ &= r_0\alpha(2\pi + o(\alpha)) - r_0^3(2\pi + o(|\alpha|)) + o(|r_0|^4) \\ &= 2\pi\alpha r_0 + r_0 o(\alpha^2) - 2\pi r_0^3 - r_0^3 o(\alpha) + o(|r_0|^4) \\ &= 2\pi r_0 \alpha - 2\pi r_0^3 + r_0(o(\alpha^2) + o(r_0^3)) + r_0^2 o(\alpha) \\ &= 2\pi r_0(\alpha - r_0^2 + o(\alpha^2) + o(r_0^3) + r_0^2 o(\alpha)). \end{aligned}$$

Observe que  $r_0 = 0$  é sempre zero da equação para qualquer valor de  $\alpha$ , mas não caracteriza um ciclo limite. Para  $\alpha < 0$  pequeno,  $r_0 = 0$  é o único zero da equação. Para  $\alpha > 0$ , temos  $r_0 = \pm \sqrt{\alpha + o(\alpha)}$ . Levando em consideração que um ponto fixo positivo da aplicação corresponde a um ciclo limite do sistema, concluímos que (3-9) tem um único ciclo limite (estável) ao redor da origem para  $\alpha > 0$ , como no sistema (3-8). Em outras palavras, os termos de ordem superior à terceira não alteram a existência de um ciclo limite próximo, para  $|\alpha|$  pequeno.

O segundo passo da demonstração consiste em mostrar que existe uma equivalência topológica entre os retratos de fase. Para tal, fixe  $\alpha$  pequeno e positivo. Ambos os sistemas (3-7) e (3-8) tem um ciclo limite em alguma vizinhança da origem. Assuma que a reparametrização do tempo resultando em um tempo de retorno constante  $2\pi$  é realizada no sistema (3-7). Também, aplique uma escala linear de coordenadas no sistema (3-7) de modo que o ponto de interseção do ciclo e do eixo horizontal esteja exatamente o ponto  $x = \sqrt{\alpha}$ . Agora, defina a função  $z \mapsto \tilde{z}$  dada pela seguinte construção: tome um ponto  $z = x + iy$  e encontre  $(r_0, \tau_0)$  onde  $\tau_0$  é o tempo mínimo necessário para que uma órbita de (3-8) se aproxime do ponto  $z$  a partir do eixo horizontal com  $r = r_0$ . Agora, construa, começando nesse ponto uma órbita do sistema (3-7) no intervalo de tempo  $[0, \tau_0]$ . Denote o ponto resultante por  $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ .



**Figura 3.4:** Construção do homeomorfismo entre os sistemas (3-7) e (3-8).

Coloque  $\tilde{z} = 0$  para  $z = 0$ , isto é,

$$h : U \rightarrow V$$

$$z \mapsto h(z) = \begin{cases} \tilde{z}, & \text{se } z \neq 0, \\ 0, & \text{se } z = 0, \end{cases}$$

onde  $h(z) = \varphi(r_0(z), \tau_0(z)) = \tilde{z}$ ,  $\varphi$  fluxo de (3-7). Assim, a função  $h$  mapeia órbitas de (3-7) para (3-8), preservando a orientação do tempo. Ainda, observe que  $h$  é contínua pois o fluxo  $\varphi$  é contínuo e, na origem,

$$\lim_{z \rightarrow 0} h(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \varphi(r_0(z), \tau_0(z)) = \varphi\left(\lim_{z \rightarrow 0} r_0(z), \lim_{z \rightarrow 0} \tau_0(z)\right) = \varphi(0, 0) = 0 = h(0)$$

e cuja inversa é dada por  $h^{-1}(\tilde{z}) = \rho(r_0(\tilde{z}), \tau_0(\tilde{z})) = z$  e  $h^{-1}(0) = 0$ , onde  $\rho$  é fluxo de (3-7).  $\square$

Nosso objetivo agora é mostrar que qualquer sistema bidimensional genérico possuindo uma bifurcação de Hopf pode ser transformado na forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(\|(x, y)\|^4),$$

com a possibilidade de mudança de sinal nos termos cúbicos. Com esse propósito, considere o sistema

$$x' = f(\mathbf{x}, \alpha), \tag{3-14}$$

com  $f$  suave,  $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , apresentando uma bifurcação de Hopf. Suponha que, para  $\alpha = 0$ , o sistema possua um ponto de equilíbrio na origem  $\mathbf{x} = 0$ , e que a jacobiana  $Df(0, 0)$  tenha autovalores  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ , com  $\omega_0 > 0$ .

Dessa forma, temos que  $f(0, 0) = 0$  e que a matriz jacobiana avaliada em  $(0, 0)$  não possui autovalores nulos, sendo, portanto, inversível. Pelo Teorema da Função Implícita, segue que existem vizinhanças de  $U$  e  $V$  de zero e uma função  $x_0 : U \rightarrow V$  de

modo que  $f(x_0(\alpha), \alpha) = 0$ , ou seja,  $x_0(\alpha)$  é um ponto de equilíbrio do sistema (3-14), que varia continuamente com  $\alpha$  e satisfaz  $x_0(0) = 0$ .

Para recentralizar o sistema em torno do equilíbrio, realizamos a mudança de coordenadas

$$u = \mathbf{x} - x_0(\alpha), \quad \text{isto é,} \quad \mathbf{x} = u + x_0(\alpha).$$

Substituindo essa nova variável no sistema original, obtemos:

$$u' = (u + x_0(\alpha))' = f(u + x_0(\alpha), \alpha).$$

Esse novo sistema possui um ponto de equilíbrio em  $u = 0$ , pois

$$f(0 + x_0(\alpha), \alpha) = f(x_0(\alpha), \alpha) = 0.$$

Assim, o equilíbrio foi movido para a origem e, sem perda de generalidade, podemos assumir que a origem é o ponto de equilíbrio de (3-14) para  $|\alpha|$  suficientemente pequeno. Expandindo a função  $f(\mathbf{x}, \alpha)$  ao redor de  $\mathbf{x} = 0$ , temos que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \alpha) &= f(0, \alpha) + A(0, \alpha)\mathbf{x} + o(\|\mathbf{x}\|^2) \\ &= A(0, \alpha)\mathbf{x} + F(\mathbf{x}, \alpha). \end{aligned}$$

A matriz jacobiana  $A(\alpha)$  pode ser escrita como

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} a(\alpha) & b(\alpha) \\ c(\alpha) & d(\alpha) \end{pmatrix},$$

onde  $a, b, c$  e  $d$  são funções suaves de  $\alpha$  e cujo polinômio característico é dado por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \sigma(\alpha)\lambda + \Delta(\alpha),$$

onde  $\sigma(\alpha) = a(\alpha) + d(\alpha)$  e  $\Delta(\alpha) = a(\alpha)d(\alpha) - b(\alpha)c(\alpha)$  e cujas raízes são os autovalores, dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \sigma(\alpha) \pm \sqrt{(\sigma(\alpha))^2 - 4\Delta(\alpha)} \right).$$

As condições da definição de uma bifurcação de Hopf implicam que quando  $\alpha = 0$ , os autovalores da jacobiana são complexos puros, isto é,

$$\frac{1}{2} \left( \sigma(\alpha) \pm \sqrt{(\sigma(\alpha))^2 - 4\Delta(\alpha)} \right) = \pm i\omega_0.$$

Donde segue que

$$\sigma(0) = 0 \quad \text{e} \quad (\pm i\omega_0)^2 = \left( \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4\Delta} \right)^2.$$

Resolvendo a segunda expressão, temos que

$$-\omega_0^2 = \frac{1}{4}(-4\Delta(0)) = -\Delta(0).$$

Logo,  $\omega_0^2 = \Delta(0)$ . Observe que,  $\lambda_{1,2}(\alpha)$  são complexos se  $\sigma^2(\alpha) - 4\Delta(\alpha) < 0$ . Neste caso,  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma(\alpha) \pm i\omega(\alpha))$  e portanto o equilíbrio na origem é um foco atrator se  $\sigma(\alpha) < 0$  e um foco repulsor se  $\sigma(\alpha) > 0$ . Note ainda que, como  $\sigma(0) = 0$  e  $\Delta(0) = \omega_0^2 > 0$ , segue que  $\sigma(0)^2 - 4\Delta(0) < 0$ . Assim, pela continuidade do traço e do determinante, para  $|\alpha|$  não nulo e suficientemente pequeno, segue que  $\sigma(\alpha)^2 - 4\Delta(\alpha) < 0$ . Logo,  $4\Delta(\alpha) - \sigma^2(\alpha) > 0$  e podemos escrever os autovalores da seguinte forma:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \sigma(\alpha) \pm i\sqrt{4\Delta - \sigma^2(\alpha)} \right).$$

Tomando  $\mu(\alpha) = \frac{1}{2}\sigma(\alpha)$  e  $\omega(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta - \sigma^2(\alpha)}$ , podemos reescrever os autovalores como  $\lambda_1(\alpha) = \lambda(\alpha)$  e  $\lambda_2(\alpha) = \overline{\lambda(\alpha)}$ , onde

$$\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha),$$

com  $\omega(0) = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta(0) - \sigma^2(0)} = \omega_0 > 0$ .

**Lema 3.2** *Introduzindo uma nova variável complexa  $z$ , o sistema*

$$\mathbf{x}' = A(\alpha)\mathbf{x} + F(\mathbf{x}, \alpha) \tag{3-15}$$

*pode ser escrito, para  $|\alpha|$  suficientemente pequeno, como*

$$z' = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha),$$

*onde  $g = o(\|z\|^2)$  é uma função suave de  $(z, \bar{z}, \alpha)$ .*

*Prova.* Sejam  $q(\alpha) \in \mathbb{C}^2$  um autovetor de  $A(\alpha)$  correspondente ao autovalor  $\lambda(\alpha)$ , e  $p(\alpha)$  um autovetor de  $A(\alpha)^T$  correspondente a  $\overline{\lambda(\alpha)}$ . Tal escolha é possível pois  $A(\alpha)$  e  $A^T(\alpha)$  possuem os mesmos autovalores. Então, vale que:

- $A(\alpha)q(\alpha) = \lambda(\alpha)q(\alpha)$ ;
- $A(\alpha)^T p(\alpha) = \overline{\lambda(\alpha)}p(\alpha)$ .

Ainda, é possível normalizar  $p$  em relação a  $q$  de modo que  $\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = 1$  (veja 3.3).

Observe que qualquer vetor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  pode ser unicamente representado, para  $|\alpha|$  pequeno, como  $\mathbf{x} = zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha)$ , para algum  $z \in \mathbb{C}$ . Podemos ainda encontrar uma fórmula para  $z$ , como segue. Observe que, tomando o produto escalar com  $p$  em ambos os lados de  $\mathbf{x} = zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha)$ , temos:

$$\begin{aligned}
\langle p(\alpha), \mathbf{x} \rangle &= \langle p(\alpha), zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha) \rangle \\
&= z\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle + \bar{z}\langle p(\alpha), \bar{q}(\alpha) \rangle \\
&= z + \bar{z}\langle p(\alpha), \bar{q}(\alpha) \rangle.
\end{aligned}$$

Note que,

$$\langle p, \bar{q} \rangle = \langle p, \frac{\bar{A}\bar{q}}{\lambda} \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle p, \bar{A}\bar{q} \rangle = \frac{1}{\lambda} \bar{p}^T \bar{A}\bar{q} = \frac{1}{\lambda} (\bar{A}^T \bar{p})^T \bar{q} = \frac{1}{\lambda} (\lambda \bar{p})^T \bar{q} = \frac{\lambda}{\lambda} \bar{p}^T \bar{q} = \frac{\lambda}{\lambda} \langle p, \bar{q} \rangle,$$

donde segue que

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda}\right) \langle p, \bar{q} \rangle = 0.$$

Como  $\omega_0 > 0$ ,  $\lambda \neq \bar{\lambda}$  para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeno e, logo,  $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$ . Assim, concluímos que  $z = \langle p, \mathbf{x} \rangle$ . Tomando então  $\mathbf{x}' = A(\alpha)\mathbf{x} + F(\mathbf{x}, \alpha)$ , segue que:

$$\begin{aligned}
z' &= \langle (p(\alpha))', \mathbf{x} \rangle + \langle p(\alpha), \mathbf{x}' \rangle \\
&= \langle p(\alpha), \mathbf{x}' \rangle \\
&= \langle p(\alpha), A(\alpha)\mathbf{x} + F(\mathbf{x}, \alpha) \rangle \\
&= \langle p(\alpha), A(\alpha)(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha)) + F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle \\
&= z\lambda\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle + \bar{z}\bar{\lambda}\langle p(\alpha), \bar{q}(\alpha) \rangle + \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle \\
&= z\lambda + \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle \\
&= z\lambda + g(z, \bar{z}, \alpha),
\end{aligned}$$

onde  $g(z, \bar{z}, \alpha) = \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle$ . □

**Observação 3.3**  $A(\alpha)$  e  $A^T(\alpha)$  possuem os mesmos autovalores. Além disso, dados  $p$  e  $q$  como na demonstração anterior então é possível normalizar  $p$  com respeito à  $q$  de modo que  $\langle p, q \rangle = 1$

De fato, seja  $\lambda$  autovalor de  $A(\alpha)$  e  $q(\alpha)$  autovetor associado. Observe que

$$\det(A^T - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^T) = \det(A - \lambda I) = 0,$$

donde segue que  $\lambda$  é autovalor de  $A^T$ . Além disso, para normalizar  $p$  com respeito a  $q$ , observe que  $\langle kp, q \rangle = 1$  se, e somente se,  $\bar{k}\bar{p}^T q = 1$ , donde  $\bar{k} = \frac{1}{\bar{p}^T q}$ . Portanto  $k = \frac{1}{\langle p, q \rangle}$ .

Como  $\langle p, q \rangle \neq 0$  e  $kp$  é autovetor de  $A(\alpha)$ , segue que é possível normalizar  $p$  com respeito à  $q$ .

O lema 3.2 mostra que é possível realizar uma mudança de variáveis no sistema

$$\mathbf{x}' = A(\alpha)\mathbf{x} + F(\mathbf{x}, \alpha),$$

para  $|\alpha|$  suficientemente pequeno, de modo que ele possa ser reescrito como

$$z' = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha),$$

onde

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle. \quad (3-16)$$

Agora, o objetivo é compreender e reescrever a função  $g$  para que sua análise se torne mais simples. Para isso, lembremos inicialmente que a fórmula de Taylor para as duas variáveis  $z$  e  $\bar{z}$  da função  $g(z, \bar{z}, \alpha)$  ao redor da origem  $z = 0$  é dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} g(z, \bar{z}, \alpha) &= g(0, 0, \alpha) + \frac{\partial g}{\partial z}(0, 0, \alpha)(z - 0) + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(0, 0, \alpha)(\bar{z} - 0) \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(0, 0, \alpha)(z - 0)^2 + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \bar{z}}(0, 0, \alpha)(z - 0)(\bar{z} - 0) + \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{z}^2}(0, 0, \alpha)(\bar{z} - 0)^2 \right] \\ &+ \frac{1}{3!} \left[ \frac{\partial^3 g}{\partial z^3}(0, 0, \alpha)(z - 0)^3 + 3 \frac{\partial^3 g}{\partial z^2 \partial \bar{z}}(0, 0, \alpha)(z - 0)^2(\bar{z} - 0) \right. \\ &\left. + 3 \frac{\partial^3 g}{\partial z \partial \bar{z}^2}(0, 0, \alpha)(z - 0)(\bar{z} - 0)^2 + \frac{\partial^3 g}{\partial \bar{z}^3}(0, 0, \alpha)(\bar{z} - 0)^3 \right] + o(|z|^4). \end{aligned}$$

Observe que  $g(0, 0, \alpha) = \langle p, F(0, \alpha) \rangle = 0$ , pois  $F$  é exatamente da ordem  $o(\|\mathbf{x}\|^2)$ , ou seja, seus termos se anulam mais rapidamente que qualquer termo quadrático à medida que  $\mathbf{x} \rightarrow 0$ . Ao calcular a primeira derivada de  $g$ , ela corresponde à derivada de uma função que é  $o(\|\mathbf{x}\|^2)$ , o que reduz sua ordem para  $o(\|\mathbf{x}\|)$ , e portanto, ao ser avaliada na origem, resulta em zero. Isso implica que as derivadas parciais de primeira ordem de  $g$  também se anulam na origem, de modo que o desenvolvimento de  $g$  inicia nos termos de segunda ordem. Com isso, podemos utilizar a fórmula de Taylor para as duas variáveis reais  $z$  e  $\bar{z}$ , expressando a função  $g(z, \bar{z}, \alpha)$  na forma

$$\begin{aligned} g(z, \bar{z}, \alpha) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(\alpha) z^2 + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \bar{z}}(\alpha) z \bar{z} + \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{z}^2}(\alpha) \bar{z}^2 \right] \\ &+ \frac{1}{3!} \left[ \frac{\partial^3 g}{\partial z^3}(\alpha) z^3 + 3 \frac{\partial^3 g}{\partial z^2 \partial \bar{z}}(\alpha) z^2 \bar{z} + 3 \frac{\partial^3 g}{\partial z \partial \bar{z}^2}(\alpha) z \bar{z}^2 + \frac{\partial^3 g}{\partial \bar{z}^3}(\alpha) \bar{z}^3 \right] + o(|z|^4) \\ &= \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^{k+l} g}{\partial z^k \partial \bar{z}^l}(\alpha) \Big|_{z=0} z^k \bar{z}^l \\ &= \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l, \end{aligned} \quad (3-17)$$

isto é, como um polinômio envolvendo potências mistas dessas variáveis, o que facilita as análises e manipulações algébricas. Dessa forma, passamos agora a realizar mudanças de coordenadas na expressão obtida para  $z'$  no Lema 3.2, com o objetivo de eliminar os termos quadráticos e cúbicos, à semelhança do que foi feito no caso da bifurcação tipo fold. Nesse contexto, o lema a seguir garante que os termos quadráticos da expressão de

$z'$  podem ser desconsiderados.

**Lema 3.4** *A equação*

$$z' = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + o(|z|^3),$$

onde  $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$ ,  $\mu(0) = 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0 > 0$  e  $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$  pode ser transformada por uma mudança de coordenadas complexa, dependente de um parâmetro e inversível da forma

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2,$$

em uma equação da forma

$$w' = \lambda w + o(|w|^3)$$

para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeno.

*Prova.* Primeiramente observe que a inversa de

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2$$

é dada pela expressão

$$w = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} z \bar{z} - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}^2 + o(|z|^3).$$

Derivando tal expressão, obtemos

$$w' = z' - h_{20} z \bar{z}' - h_{11} (z' \bar{z} + z \bar{z}') - h_{02} \bar{z} \bar{z}' + \dots$$

Substituindo  $z'$  e  $\bar{z}'$ , segue que

$$w' = \lambda z + z^2 \left( \frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20} \right) + z \bar{z} \left( g_{11} - h_{11} \bar{\lambda} - h_{11} \lambda \right) + \bar{z}^2 \left( \frac{g_{02}}{2} - h_{02} \bar{\lambda} \right) + \dots$$

Como  $z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2$  segue que

- $z^2 = \left( w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 \right)^2 = w^2 + o(|w|^3)$ ;
- $z \bar{z} = \left( w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 \right) \left( \bar{w} + \frac{h_{20}}{2} \bar{w}^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} w^2 \right) = w \bar{w} + o(|w|^3)$ ;
- $\bar{z}^2 = \left( \bar{w} + \frac{h_{20}}{2} \bar{w}^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} w^2 \right)^2 = w \bar{w}^2 + o(|w|^3)$ .

O que implica que

$$\begin{aligned}
w' &= \lambda z + z^2 \left( \frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20} \right) + z\bar{z} \left( g_{11} - h_{11}\bar{\lambda} - h_{11}\lambda \right) + \bar{z}^2 \left( \frac{g_{02}}{2} - h_{02}\bar{\lambda} \right) + \dots \\
&= \lambda w + \lambda \frac{h_{20}}{2} w^2 + \lambda h_{11} w\bar{w} + \lambda \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 + \frac{g_{20}}{2} w^2 - \lambda h_{20} w^2 + g_{11} w\bar{w} - \lambda h_{11} w\bar{w} \\
&\quad - \lambda h_{11} w\bar{w} + \frac{g_{02}}{2} \bar{w}^2 - h_{02} \bar{\lambda} \bar{w}^2 + o(|w|^3) \\
&= \lambda w + \left( \lambda \frac{h_{20}}{2} + \frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20} \right) w^2 + (\lambda h_{11} + g_{11} - \bar{\lambda} h_{11} - \lambda h_{11}) w\bar{w} \\
&\quad + \left( \frac{g_{02}}{2} + \lambda \frac{h_{02}}{2} - 2\bar{\lambda} h_{02} \right) \bar{w}^2 + o(|w|^3) \\
&= \lambda w + \left( \frac{g_{02}}{2} - \lambda \frac{h_{20}}{2} \right) w^2 + (g_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) w\bar{w} + \left( \frac{g_{02}}{2} + \lambda \frac{h_{02}}{2} - 2\bar{\lambda} h_{02} \right) \bar{w}^2 + o(|w|^3) \\
&= \lambda w + \frac{1}{2} (g_{20} - \lambda h_{20}) w^2 + (g_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) w\bar{w} + \frac{1}{2} (g_{02} - h_{02} (2\bar{\lambda} - \lambda)) \bar{w}^2 + o(|w|^3).
\end{aligned}$$

Assim, para zerar os termos quadráticos, basta que

$$\begin{cases} \frac{1}{2} (g_{20} - \lambda h_{20}) = 0, \\ g_{11} - \bar{\lambda} h_{11} = 0, \\ g_{02} - h_{02} (2\bar{\lambda} - \lambda) = 0. \end{cases}$$

Donde concluímos que  $h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}$ ,  $h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}$  e  $h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda}$ . Isso mostra que a transformação

$$z = w + \frac{g_{20}}{2\lambda} w^2 + \frac{g_{11}}{\lambda} w\bar{w} + \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda} \bar{w}^2$$

transforma a equação

$$z' = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z\bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + o(|z|^3)$$

em uma equação sem termos quadráticos da forma

$$w' = \lambda w + o(|w|^3), \quad (3-18)$$

para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeno. Note que tal transformação está bem definida pois como  $\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$  e  $\lambda(0) = i\omega_0 > 0$ , pela continuidade da função  $\lambda(\alpha)$  segue que  $2\lambda(\alpha)$ ,  $\bar{\lambda}(\alpha)$  e  $2\bar{\lambda} - \lambda$  são não nulos para  $|\alpha|$  suficientemente pequeno.  $\square$

**Observação 3.5** *A mudança de variáveis*

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2$$

é inversível e possui inversa

$$w = z - \frac{h_{20}}{2}z^2 - h_{11}z\bar{z} - \frac{h_{02}}{2}\bar{z}^2 + o(|z|^3).$$

De fato, note que, como  $w \in \mathbb{C}$ ,  $w = x + iy$ , para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Com isso, substituindo tal expressão para  $w$ , podemos escrever  $z$  como uma função de duas variáveis reais da seguinte forma:

$$\begin{aligned} z(x, y) &= x + iy + \frac{h_{20}}{2}(x + iy)^2 + h_{11}(x + iy)(\overline{x + iy}) + \frac{h_{02}}{2}(\overline{x + iy})^2 \\ &= x + iy + \frac{h_{20}}{2}(x + iy)^2 + h_{11}(x + iy)(x - iy) + \frac{h_{02}}{2}(x - iy)^2 \\ &= x + iy + \frac{h_{20}}{2}(x^2 + 2ixy - y^2) + h_{11}(x^2 + y^2) + \frac{h_{02}}{2}(x^2 - 2ixy + y^2) \\ &= x + \frac{h_{20}}{2}(x^2 - y^2) + h_{11}(x^2 + y^2) + \frac{h_{02}}{2}(x^2 + y^2) + i(y + h_{20}xy - h_{02}xy) \\ &= x + \frac{h_{20}}{2}(x^2 - y^2) + \left(h_{11} + \frac{h_{02}}{2}\right)(x^2 + y^2) + i(y + h_{20}xy - h_{02}xy) \\ &= u(x, y) + iv(x, y), \end{aligned}$$

cujas jacobiana é dada por

$$Dz(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + h_{20}x + 2h_{11}x + h_{02}x & -h_{02}y + 2h_{11}y + h_{02}y \\ h_{20}y - h_{02}y & 1 + h_{20}x - h_{02}x \end{pmatrix},$$

a qual avaliada na origem é a matriz identidade, que tem determinante 1 e é inversível. Portanto, pelo Teorema da Função Inversa, existe inversa da aplicação dada numa vizinhança da origem. Suponhamos que tal inversa seja dada por

$$w = az + bz^2 + cz\bar{z} + d\bar{z}^2 + o(|z|^3). \quad (3-19)$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned} z &= az + bz^2 + cz\bar{z} + d\bar{z}^2 + \frac{h_{20}}{2}(az + bz^2 + cz\bar{z} + d\bar{z}^2)^2 + h_{11}(az + bz^2 + cz\bar{z} + d\bar{z}^2) \\ &\quad (a\bar{z} + b\bar{z}^2 + c\bar{z}z + d\bar{z}^2) + \frac{h_{02}}{2}(az + bz^2 + cz\bar{z} + d\bar{z}^2)^2 + o(|z|^3). \end{aligned}$$

Dessa forma, segue que  $az = z$ ,  $b + \frac{h_{20}}{2} = 0$ ,  $c + a^2h_{11} = 0$  e  $d + \frac{h_{02}}{2}a^2 = 0$ . Disso segue que  $a = 1$ ,  $b = -\frac{h_{20}}{2}$ ,  $c = -h_{11}$  e  $d = \frac{-h_{02}}{2}$ . Substituindo  $a, b, c, d$  na equação (3-19), segue que

$$w = z - \frac{h_{20}}{2}z^2 - h_{11}z\bar{z} - \frac{h_{02}}{2}\bar{z}^2 + o(|z|^3)$$

é inversa de  $z$ .

O próximo passo consiste em aplicar o procedimento da demonstração do Lema 3.4 aos coeficientes de terceira ordem. O objetivo é eliminar os termos cúbicos por meio de uma mudança de coordenadas complexa, inversível e dependente de um parâmetro, da mesmo modo que foi feito no lema anterior para os termos quadráticos. No entanto, veremos que isso é “quase” possível, a menos de um termo cúbico que não poderá ser eliminado, como segue no próximo lema.

**Lema 3.6** *A equação*

$$z' = \lambda z + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \bar{z} + g_{12} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{2} \bar{z}^3 + o(|z|^4),$$

onde  $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$ ,  $\mu(0) = 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0 > 0$  e  $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$  pode ser transformada, por uma mudança de coordenadas complexa, dependente de um parâmetro e inversível da forma

$$z = w + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{21}}{2} w^2 \bar{w} + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3, \quad (3-20)$$

em uma equação com um único termo cúbico

$$w' = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + o(|w|^4)$$

com  $c_1 = c_1(\alpha)$ , para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeno.

*Prova.* Considere a transformação cúbica (3-20). Procedendo como na observação 3.5, temos que a inversa da transformação (3-20), até termos cúbicos, é dada por

$$w = z - \frac{h_{30}}{6} z^3 - \frac{h_{21}}{2} z^2 \bar{z} - \frac{h_{12}}{2} z \bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6} \bar{z}^3 + o(|z|^3).$$

Derivando essa expressão em relação a  $t$ , obtemos:

$$w' = z' - \frac{1}{2} h_{30} z^2 z' - h_{21} z z' \bar{z} - \frac{1}{2} h_{12} z' \bar{z}^2 - \frac{1}{2} h_{21} z^2 \bar{z}' - h_{12} z \bar{z} \bar{z}' - \frac{1}{2} h_{03} \bar{z}^2 \bar{z}' + o(|z|^3).$$

Substituindo

$$z' = \lambda z + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \bar{z} + \frac{g_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3$$

e

$$\bar{z}' = \bar{\lambda} \bar{z} + \frac{\overline{g_{30}}}{6} \bar{z}^3 + \frac{\overline{g_{21}}}{2} \bar{z}^2 z + \frac{\overline{g_{12}}}{2} \bar{z} z^2 + \frac{\overline{g_{03}}}{6} z^3,$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
w' &= \lambda z + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \bar{z} + \frac{g_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3 \\
&\quad - \frac{1}{2} h_{30} z^2 (\lambda z) - h_{21} z \bar{z} (\lambda z) - \frac{1}{2} h_{12} \bar{z}^2 (\lambda z) \\
&\quad - \frac{1}{2} h_{21} z^2 (\bar{\lambda} \bar{z}) - h_{12} z \bar{z} (\bar{\lambda} \bar{z}) - \frac{1}{2} h_{03} \bar{z}^2 (\bar{\lambda} \bar{z}) + o(|z|^3) \\
&= \lambda z + \left( \frac{g_{30}}{6} - \frac{1}{2} h_{30} \lambda \right) z^3 + \left( \frac{g_{21}}{2} - h_{21} \lambda - \frac{1}{2} h_{21} \bar{\lambda} \right) z^2 \bar{z} \\
&\quad + \left( \frac{g_{12}}{2} - \frac{1}{2} h_{12} \lambda - h_{12} \bar{\lambda} \right) z \bar{z}^2 + \left( \frac{g_{03}}{6} - \frac{1}{2} h_{03} \bar{\lambda} \right) \bar{z}^3 + o(|z|^3).
\end{aligned}$$

Substituindo  $z = w + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{21}}{2} w^2 \bar{w} + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
w' &= \lambda w + \frac{1}{6} (g_{30} - 2h_{30} \lambda) w^3 + \frac{1}{2} (g_{21} - h_{21} \lambda - h_{21} \bar{\lambda}) w^2 \bar{w} \\
&\quad + \frac{1}{2} (g_{12} - 2h_{12} \bar{\lambda}) w \bar{w}^2 + \frac{1}{6} (g_{03} + h_{03} \lambda - 3h_{03} \bar{\lambda}) \bar{w}^3 + o(|w|^4).
\end{aligned}$$

Para eliminar os termos cúbicos, impomos:

$$\begin{cases} \frac{1}{6} (g_{30} - 2h_{30} \lambda) = 0, \\ \frac{1}{2} (g_{21} - h_{21} \lambda - h_{21} \bar{\lambda}) = 0, \\ \frac{1}{2} (g_{12} - 2h_{12} \bar{\lambda}) = 0, \\ \frac{1}{6} (g_{03} + h_{03} \lambda - 3h_{03} \bar{\lambda}) = 0. \end{cases}$$

Assim, obtemos  $h_{30} = \frac{g_{30}}{2\lambda}$ ,  $h_{21} = \frac{g_{21}}{\lambda + \bar{\lambda}}$ ,  $h_{12} = \frac{g_{12}}{2\bar{\lambda}}$  e  $h_{03} = \frac{g_{03}}{3\bar{\lambda} - \lambda}$ . Observe que, para  $|\alpha|$  suficientemente pequeno, como  $\lambda(0) = \omega_0 > 0$ , segue que  $2\lambda$ ,  $2\bar{\lambda}$  e  $3\bar{\lambda} - \lambda$  são não nulos. No entanto,

$$\lambda + \bar{\lambda} = 2\mu$$

que se anula em  $\alpha = 0$ . Assim, o coeficiente  $h_{21}$  não está definido para  $|\alpha|$  nulo. Logo, não é possível fazer com que o termo  $w^2 \bar{w}$  desapareça para todo  $|\alpha|$  pequeno. Definindo  $h_{21} = 0$ , a transformação dada por

$$z = w + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3$$

elimina todos os coeficientes dos termos cúbicos, exceto o que acompanha  $w^2 \bar{w}$ , transformando a equação

$$z' = \lambda z + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \bar{z} + g_{12} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{2} \bar{z}^3 + o(|z|^4)$$

na equação com um único termo cúbico

$$w' = \lambda w + c_1(\alpha)w^2\bar{w} + o(|w|^4),$$

onde  $c_1(\alpha) = \frac{g_{21}(\alpha)}{2}$ . □

O termo cúbico restante é chamado de termo ressonante. Combinando os dois lemas anteriores, é possível reescrever a equação inicial  $z' = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha)$  sem os termos quadráticos e com apenas um termo cúbico, facilitando a análise de um sistema genérico qualquer que possui uma bifurcação de Hopf, conforme resume o lema a seguir.

**Lema 3.7** *A equação*

$$z' = \lambda z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l + o(|z|^4), \quad (3-21)$$

onde  $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$ ,  $\mu(0) = 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0 > 0$  e  $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$  pode ser transformada, através de uma mudança de coordenadas complexa, dependente de um parâmetro e inversível da forma

$$z = w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^2 + \frac{h_{30}}{6}w^3 + \frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{w}^3$$

na equação

$$w' = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + o(|w|^4),$$

para  $|\alpha|$  suficientemente pequeno, cujo único termo cúbico restante é o termo ressonante  $c_1 = c_1(\alpha)$ .

*Prova.* Basta combinar os lemas anteriores. Primeiramente, aplicamos a mudança

$$z = w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^2$$

com  $h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}$ ,  $h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}$  e  $h_{02} = \frac{g_{02}}{2\lambda - \lambda}$  e, pelo Lema 3.4, transformamos a equação (3-21) em outra da forma

$$u' = u + \frac{g_{30}}{2}u^3 + \frac{g_{12}}{2}u\bar{u} + \frac{g_{03}}{6}\bar{u}^3 + o(|u|^4).$$

Aplicando agora a mudança dada pelo Lema 3.6, os termos cúbicos dessa nova transformação (exceto o termo ressonante) desaparecem, resultando em uma equação da forma

$$w' = w + c_1 w^2 \bar{w} + o(|w|^4),$$

onde  $c_1 = c_1(\alpha)$ , para  $|\alpha|$  suficientemente pequeno.  $\square$

Com isso, precisamos agora calcular o coeficiente  $c_1(\alpha)$  em termos dos coeficientes  $g_{ij}$ . Um modo de realizar tal tarefa é calculando as transformações do lema anterior e encontrando o coeficiente  $g_{21}^{\sim}$  modificado, pois vimos no Lema 3.6 que  $c_1$  coincide com tal coeficiente. Observe que, para isso, precisamos conhecer a inversa até os termos cúbicos, que pode ser uma tarefa difícil. Como conhecemos a forma resultante e a transformação do Lema 3.7, podemos utilizar tais informações para encontrar o coeficiente desejado, como faremos a seguir.

**Proposição 3.8** *O coeficiente  $c_1$  é dado pela expressão*

$$c_1(\alpha) = \frac{g_{21}}{2} + \frac{(\bar{\lambda} + 2\lambda)g_{11}g_{20}}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \bar{\lambda})}.$$

Além disso,

$$c_1(0) = \frac{g_{21}}{2} + \frac{i}{2\omega_0} \left( g_{11}g_{20} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3} \right).$$

*Prova.* De fato, consideremos a transformação

$$z = w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^2,$$

como no Lema 3.4. Derivando, obtemos

$$z' = w' + h_{20}ww' + h_{21}(w'\bar{w} + w\bar{w}') + h_{02}\bar{w}'\bar{w}.$$

Do Lema 3.7, temos que

$$w' = w + c_1w^2\bar{w} + o(|w|^4) \quad \text{e} \quad \bar{w}' = \bar{w} + \bar{c}_1\bar{w}^2w + o(|w|^4).$$

Substituindo  $w'$  e  $\bar{w}'$ , segue que

$$\begin{aligned} z' &= c_1w^2\bar{w} + c_1h_{20}w^3\bar{w} + c_1h_{11}w^2\bar{w}^2 + w\lambda + h_{20}w^2\lambda + h_{11}w\bar{w}\lambda + h_{11}w^2\bar{w}^2\bar{c}_1 \\ &\quad + h_{02}w\bar{w}^3\bar{c}_1 + h_{11}w\bar{w}\bar{\lambda} + h_{02}\bar{w}^2\bar{\lambda} \\ &= c_1w^2\bar{w} + c_1h_{20}w^3\bar{w} + w\lambda + h_{20}w^2\lambda + h_{02}w\bar{w}^3\bar{c}_1 + w^2\bar{w}^2(c_1h_{11} + h_{11}\bar{c}_1) \\ &\quad + h_{02}\bar{w}^2\bar{\lambda} + w\bar{w}(h_{11}\lambda + h_{11}\bar{\lambda}) \\ &= w\lambda + c_1w^2\bar{w} + h_{20}w^2\lambda + h_{02}\bar{w}^2\bar{\lambda} + w\bar{w}(h_{11}\lambda + h_{11}\bar{\lambda}) + o(|w|^4). \end{aligned} \quad (3-22)$$

Por outro lado,

$$z' = z\lambda + \frac{g_{20}}{2}z^2 + g_{11}z\bar{z} + \frac{g_{02}}{2}\bar{z}^2 + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3. \quad (3-23)$$

Substituindo as expressões

$$z = w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^2 \quad \text{e} \quad \bar{z} = \bar{w} + \frac{\bar{h}_{20}}{2}\bar{w}^2 + \bar{h}_{11}w\bar{w} + \frac{\bar{h}_{02}}{2}w^2$$

do lado direito da equação (3-23), obtemos:

$$\begin{aligned} z' = & \frac{g_{20}}{2}w^2 + \frac{g_{30}}{6}w^3 + g_{11}w\bar{w} + \frac{1}{2}g_{21}w^2\bar{w} + g_{20}h_{11}w^2\bar{w} + \frac{1}{2}g_{11}h_{20}w^2\bar{w} \\ & + \frac{1}{2}g_{12}w\bar{w}^2 + \frac{1}{2}g_{20}h_{02}w\bar{w}^2 + g_{11}h_{11}w\bar{w}^2 + \frac{g_{02}}{2}\bar{w}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{w}^3 + \frac{1}{2}g_{11}h_{02}\bar{w}^3 \\ & + \lambda w + \frac{1}{2}h_{20}\lambda w^2 + h_{11}\lambda w\bar{w} + \frac{1}{2}h_{02}\lambda\bar{w}^2 + \frac{1}{2}g_{02}\bar{h}_{02}w^2\bar{w} + \frac{1}{2}g_{11}\bar{h}_{11}w^2\bar{w} \\ & + g_{11}\bar{h}_{02}w\bar{w}^2 + \frac{1}{2}g_{02}\bar{h}_{11}w\bar{w}^2 + \frac{1}{2}g_{11}h_{02}\bar{w}^3 + \frac{1}{2}g_{03}\bar{h}_{20}\bar{w}^3 + g_{11}\bar{h}_{20}w\bar{w}^2 \\ & + \frac{1}{2}g_{11}\bar{h}_{20}w\bar{w}^2 + \frac{1}{2}g_{02}\bar{h}_{20}\bar{w}^2 + g_{02}w\bar{h}_{11}\bar{w}^2 + g_{02}\bar{h}_{11}w\bar{w}. \end{aligned}$$

Agrupando os coeficientes que acompanham  $w^2\bar{w}$ , temos

$$z' = \left( \frac{g_{21}}{2} + g_{20}h_{11} + \frac{1}{2}g_{11}h_{20} + \frac{1}{2}g_{02}\bar{h}_{02} + g_{11}\bar{h}_{11} \right) w^2\bar{w} + \dots \quad (3-24)$$

Como  $h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}$ ,  $h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}$  e  $h_{02} = \frac{g_{02}}{2\lambda - \lambda}$ , podemos substituí-los na expressão (3-24), obtendo a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} z' = & \left( \frac{g_{21}}{2} + g_{20}\frac{g_{11}}{\lambda} + \frac{1}{2}g_{11}\frac{g_{20}}{\lambda} + \frac{1}{2}g_{02}\frac{\bar{g}_{02}}{2\lambda - \lambda} + g_{11}\frac{\bar{g}_{11}}{\lambda} \right) w^2\bar{w} + \dots \\ = & \left( \frac{g_{21}}{2} + \frac{(\bar{\lambda} + 2\lambda)g_{11}g_{20}}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} \right) w^2\bar{w} + \dots \end{aligned} \quad (3-25)$$

Com isso, podemos igualar (3-22) e (3-25) e comparar os coeficientes do termo  $w^2\bar{w}$ , donde conclui-se que

$$c_1(\alpha) = \frac{g_{21}}{2} + \frac{(\bar{\lambda} + 2\lambda)g_{11}g_{20}}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \bar{\lambda})}.$$

Além disso, avaliando tal expressão para  $\alpha = 0$ , temos

$$c_1(0) = \frac{g_{21}}{2} + \frac{(\bar{\lambda}(0) + 2\lambda(0))g_{11}g_{20}}{2|\lambda(0)|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda(0)} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda(0) - \bar{\lambda}(0))}.$$

Como  $\lambda(0) = \mu(0) + i\omega(0)$  onde  $\mu(0) = 0$  e  $\omega(0) = \omega_0 > 0$ , é possível simplificar a equação acima de modo que

$$\begin{aligned}
c_1(0) &= \frac{g_{21}}{2} + \frac{(-i\omega_0 + 2i\omega_0)g_{11}g_{20}}{2|i\omega_0|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{i\omega_0} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2i\omega_0 + i\omega_0)} \\
&= \frac{g_{21}}{2} + \frac{i}{2\omega_0} \left( g_{11}g_{20} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right).
\end{aligned}$$

□

Com os resultados obtidos, o próximo passo consiste em simplificar ainda mais o sistema, reescrevendo-o na forma  $w' = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + o(|w|^4)$ , onde  $c_1$  será o foco principal. Essa forma reduzida permite destacar o primeiro coeficiente de Lyapunov, que desempenha um papel central na análise da bifurcação de Hopf. Esse coeficiente fornece informações cruciais sobre a natureza da bifurcação, sendo fundamental para a determinação da forma normal topológica associada ao sistema. Neste contexto, será importante introduzir notações para as parte real e imaginária de um número complexo. Dessa forma, utilizaremos  $\Re(z)$  para parte real e  $\Im(z)$  para parte imaginária de um determinado número complexo  $z$ .

**Lema 3.9** *Considere a equação*

$$\frac{dw}{dt} = (\mu(\alpha) + i\omega(\alpha))w + c_1(\alpha)w|w|^2 + o(|w|^4),$$

onde  $\mu(0) = 0$  e  $\omega(0) = \omega_0 > 0$ . Suponha  $\mu'(0) \neq 0$  e  $\Re(c_1(0)) \neq 0$ . Então, a equação dada pode ser transformada através de uma mudança linear dependente de um parâmetro, uma nova escala de tempo e uma reparametrização não linear de tempo, em uma nova equação da forma

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + su|u|^2 + o(|u|^4), \quad (3-26)$$

onde  $u$  é uma nova coordenada complexa e  $\theta, \beta$  são os novos tempo e parâmetro, respectivamente. Além disso,  $s = \text{sgn} \Re(c_1(0)) = \pm 1$ .

*Prova.* Primeiramente introduza um novo tempo  $\tau = \omega(\alpha)t$ . A direção do tempo é preservada pois  $\omega(\alpha) > 0$  para  $|\alpha|$  suficientemente pequeno. Então  $\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\omega(\alpha)}$ , donde segue que

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{d\tau} &= \frac{dw}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \left( (\mu(\alpha) + i\omega(\alpha))w + c_1(\alpha)w|w|^2 + o(|w|^4) \right) \frac{1}{\omega(\alpha)} \\
&= \left( \frac{\mu(\alpha)}{\omega(\alpha)} + i \right) w + c_1(\alpha) \frac{w|w|^2}{\omega(\alpha)} + o(|w|^4) \\
&= (\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + o(|w|^4),
\end{aligned}$$

onde  $\beta = \frac{\mu(\alpha)}{\omega(\alpha)}$  e  $d_1(\beta) = \frac{c_1(\alpha(\beta))}{\omega(\alpha(\beta))}$ . Observe que, de fato, podemos considerar  $\beta$  um novo parâmetro, pois

- $\beta(0) = \frac{\mu(0)}{\omega(0)} = 0;$
- $\beta'(0) = \frac{\mu'(0)\omega(0)}{\omega(0)^2} = \frac{\mu'(0)}{\omega_0} \neq 0.$

Portanto, pelo Teorema da Função Inversa, existe um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$ , contendo  $\beta = 0$ , e uma função diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\alpha(0) = 0$ . Além disso, note que  $d_1(\beta)$  é complexo pois  $c_1(\alpha(\beta))$  o é. Agora, reparametrize o tempo ao longo das órbitas introduzindo uma nova variável temporal  $\theta = \theta(\tau, \beta)$  onde  $d\theta = (1 + e_1(\beta)|w|^2)d\tau$ , com  $e_1(\beta) = \Im(d_1(\beta))$ . Essa mudança de tempo é uma transformação de “quase identidade” em uma vizinhança da origem, isto é, uma perturbação da identidade. Note que, expandindo  $\frac{d\tau}{d\theta}$  em torno de  $w = 0$ , obtemos

$$\frac{d\tau}{d\theta} = \frac{1}{1 + e_1(\beta)|w|^2} = 1 - e_1(\beta)|w|^2 + o(|w|^4).$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\theta} &= \frac{dw}{d\tau} \frac{d\tau}{d\theta} = ((\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + o(|w|^4))(1 - e_1(\beta)|w|^2 + o(|w|^4)) \\ &= (\beta + i)w - (\beta + i)e_1(\beta)w|w|^2 + d_1(\beta)w|w|^2 + o(|w|^4) \\ &= (\beta + i)w + (d_1(\beta) - (\beta + i)e_1(\beta))w|w|^2 + o(|w|^4) \\ &= (\beta + i)w + (d_1(\beta) - ie_1(\beta) - \beta e_1(\beta))w|w|^2 + o(|w|^4) \\ &= (\beta + i)w + (\Re(d_1(\beta)) - \beta e_1(\beta))w|w|^2 + o(|w|^4) \\ &= (\beta + i)w + l_1(\beta)w|w|^2 + o(|w|^4), \end{aligned}$$

onde  $l_1(\beta) = \Re(d_1(\beta)) - \beta e_1(\beta)$ , que é um número real e  $l_1(0) = \Re(d_1(0)) = \frac{\Re(c_1(0))}{\omega_0}$ .

Finalmente, introduzimos uma nova variável complexa  $u$  de modo que  $u = w|l_1(\beta)|^{\frac{1}{2}}$ , o que é possível pois  $\Re(c_1(0)) \neq 0$  e, logo,  $l_1(0) \neq 0$ . Assim,

$$\frac{dw}{d\theta} = \frac{1}{|l_1(\beta)|^{\frac{1}{2}}} \frac{du}{d\theta}.$$

Deste modo, segue que

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} |l_1(\beta)|^{-\frac{1}{2}} &= (\beta + i)w + l_1(\beta)w|w|^2 + o(|w|^4) \\ &= (\beta + i)u|l_1(\beta)|^{-\frac{1}{2}} + l_1(\beta)u|u|^2 |l_1(\beta)|^{-\frac{1}{2}} |l_1(\beta)|^{-1} + o(|u|^4). \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados por  $|l_1(\beta)|^{\frac{1}{2}}$ , temos que

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + \frac{l_1(\beta)}{|l_1(\beta)|} |u|^2 + o(|u|^4) = (\beta + i)u + s|u|^2 + o(|u|^4),$$

com  $s = \text{sgn} l_1(0)$ . □

**Definição 3.10** A função real  $l_1(\beta)$  é chamada primeiro coeficiente de Lyapunov.

Segue da igualdade  $l_1(0) = \frac{\Re(c_1(0))}{\omega_0}$  que o primeiro coeficiente de Lyapunov em  $\beta = 0$  pode ser calculado pela fórmula

$$l_1(0) = \frac{\Re\left(\frac{i}{\omega_0}(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2) + \frac{g_{21}}{2}\right)}{\omega_0}.$$

Observe que  $2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2$  é real. Logo, a expressão  $\left(2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2\right)i$  não tem parte real. Assim, podemos simplificar a igualdade acima para

$$l_1(0) = \frac{\Re\left(\frac{i}{2\omega_0}g_{20}g_{11} + \frac{g_{21}}{2}\right)}{\omega_0} = \frac{1}{2\omega_0^2}\Re(ig_{20}g_{11} + \omega_0g_{21}). \quad (3-27)$$

Portanto, para calcular o primeiro coeficiente de Lyapunov na origem, precisamos apenas de certas derivadas de segunda e terceira ordem do campo vetorial associado ao sistema. Note que o valor de  $l_1(0)$  depende da normalização dos autovetores  $p$  e  $q$  enquanto seu sinal é invariante sob a escala de  $p$  e  $q$ , obedecendo a normalização  $\langle p, q \rangle = 1$ . Note que a equação de  $u$  com  $s = -1$  é

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u - u|u|^2 + o(|u|^4). \quad (3-28)$$

Tomando  $u = x + iy$ , temos que a equação (3-28) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} x' + iy' &= (\beta + i)(x + iy) - (x + iy)|x + iy|^2 + o(|x + iy|^4) \\ &= \beta x + \beta iy + ix - y - x(x^2 + y^2) - iy(x^2 + y^2) + o((x^2 + y^2)^2) \\ &= \beta x - y - x(x^2 + y^2) + (\beta y + x - y(x^2 + y^2))i + o((x^2 + y^2)^2), \end{aligned}$$

que, reescrita em formato matricial, é dada por

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(\|\mathbf{x}\|^4),$$

que é semelhante a (3-5). Agora, resumimos os resultados dos lemas anteriores nos teoremas a seguir. O primeiro teorema, versa sobre as condições de não-degenerescência e

transversalidade. Os passos de sua demonstração são os Lemas 3.4, 3.6, 3.7 e 3.9 provados anteriormente nessa seção. O segundo teorema, mostra que a forma normal topológica é dada pelo sistema (3-1).

**Teorema 3.11** *Qualquer sistema bidimensional  $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \alpha)$ , com  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  que tem no parâmetro  $\alpha = 0$  o equilíbrio  $\mathbf{x} = 0$  com autovalores*

$$\lambda_{1,2}(0) = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 > 0,$$

em que as seguintes condições são satisfeitas:

1.  $l_1(0) \neq 0$ ;
2.  $\mu'(0) \neq 0$ ,

onde  $l_1$  é dado por (3-27) e  $\mu$  é a parte real do autovalor da jacobiana, pode ser transformado, através de mudanças inversíveis de variáveis, parâmetros e reparametrização do tempo, em

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pm (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(\|\mathbf{x}\|^4).$$

**Teorema 3.12** *Qualquer sistema bidimensional  $x' = f(\mathbf{x}, \alpha)$ , com  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  que tem no parâmetro  $\alpha = 0$  o equilíbrio  $x = 0$  com autovalores*

$$\lambda_{1,2}(0) = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 > 0,$$

é topologicamente equivalente numa vizinhança da origem a seguinte forma normal topológica:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pm (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Observação 3.13** *No sistema (3-15), se a função  $F(\mathbf{x}, 0)$  for representada por*

$$F(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{2}B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{6}C(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x}\|^4), \quad (3-29)$$

onde  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  e  $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u})$  são funções vetoriais multilineares simétricas de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{u}$ , com  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ , então é possível encontrar uma fórmula simplificada para o cálculo dos coeficientes  $g_{20}$ ,  $g_{11}$ ,  $g_{02}$  e  $g_{21}$ .

De fato, note que

$$F(\mathbf{x}, 0) = F(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x})).$$

Expandindo cada  $F_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, 2$  em torno da origem, temos

$$F_i(\mathbf{x}) = F_i(0) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial F_i(0)}{\partial x_j} x_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(0)}{\partial x_j \partial x_k} x_j x_k + \frac{1}{6} \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F_i(0)}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} x_j x_k x_l.$$

Considerando  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ ,

$$B_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k$$

e

$$C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_j y_k u_l,$$

podemos reescrever cada  $F_i(\mathbf{x})$  como

$$F_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} B_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{6} C_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}). \quad (3-30)$$

Além disso, no Lema 3.2, vimos que  $\mathbf{x}$  pode ser escrito como  $\mathbf{x} = zq + \bar{z}\bar{q}$ , onde  $z = \langle p, \mathbf{x} \rangle$ , onde  $p$  é autovetor de  $A^T$  normalizado com relação à  $q$ , que é autovetor de  $A$ . Consideremos então  $p = (p_1, p_2)$  e  $q = (q_1, q_2)$ , donde podemos escrever  $\mathbf{x} = (zq_1 + \bar{z}\bar{q}_1, zq_2 + \bar{z}\bar{q}_2)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} B_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= B_i(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) \\ &= \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} (zq_j + \bar{z}\bar{q}_j)(zq_k + \bar{z}\bar{q}_k) \\ &= \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_1} \Big|_{\xi=0} (zq_1 + \bar{z}\bar{q}_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=0} (zq_1 + \bar{z}\bar{q}_1)(zq_2 + \bar{z}\bar{q}_2) \\ &\quad + \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_2 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=0} (zq_2 + \bar{z}\bar{q}_2)^2. \end{aligned}$$

Expandindo os produtos e agrupando os termos que acompanham as potências de  $z$  e  $\bar{z}$ , temos que

$$\begin{aligned}
B_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = & z^2 \left( \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_1} \Big|_{\xi=0} q_1 q_1 + 2 \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=0} q_1 q_2 + \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_2 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=0} q_2 q_2 \right) \\
& + \bar{z}^2 \left( \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_1} \Big|_{\xi=0} \bar{q}_1 \bar{q}_1 + 2 \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=0} \bar{q}_1 \bar{q}_2 + \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_2 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=0} \bar{q}_2 \bar{q}_2 \right) \\
& + 2z\bar{z} \left( \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_1} \Big|_{\xi=0} q_1 \bar{q}_1 + \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=0} q_1 \bar{q}_2 + \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=0} \bar{q}_1 q_2 \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_2 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=0} q_2 \bar{q}_2 \right).
\end{aligned}$$

Logo, podemos escrever  $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  como

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = z^2 B(q, q) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q}) + 2z\bar{z} B(q, \bar{q}).$$

Fazendo o mesmo processo para  $C(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x})$ , temos

$$\begin{aligned}
C_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) &= C_i(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) \\
&= \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} (zq_j + \bar{z}\bar{q}_j)(zq_k + \bar{z}\bar{q}_k)(zq_l + \bar{z}\bar{q}_l) \\
&= \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_1 \partial \xi_1} \Big|_{\xi=0} (zq_1 + \bar{z}\bar{q}_1)^3 + 3 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_1 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=0} (zq_1 + \bar{z}\bar{q}_1)^2 (zq_2 + \bar{z}\bar{q}_2) \\
&\quad + 3 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=0} (zq_2 + \bar{z}\bar{q}_2)^2 (zq_1 + \bar{z}\bar{q}_1) + \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_2 \partial \xi_2 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=0} (zq_2 + \bar{z}\bar{q}_2)^3.
\end{aligned}$$

Expandindo os produtos e agrupando os termos que acompanham as potências de  $z$  e  $\bar{z}$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
C_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = & z^3 \left( \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_1^3} q_1^3 + 3 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2} q_1^2 q_2 + 3 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2^2} q_1 q_2^2 + \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_2^3} q_2^3 \right) \\
& + z^2 \bar{z} \left( 3 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_1^3} q_1^2 \bar{q}_1 + 6 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2} q_1 q_2 \bar{q}_1 + 3 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2^2} q_2^2 \bar{q}_1 \right. \\
& \quad \left. + 3 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2} q_1^2 \bar{q}_2 + 6 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2^2} q_1 q_2 \bar{q}_2 + 3 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_2^3} q_2^2 \bar{q}_2 \right) \\
& + z \bar{z}^2 \left( 3 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_1^3} q_1 \bar{q}_1^2 + 3 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2} q_2 \bar{q}_1^2 + 6 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2^2} q_1 \bar{q}_1 \bar{q}_2 \right. \\
& \quad \left. + 6 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2^2} q_2 \bar{q}_1 \bar{q}_2 + 3 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2^2} q_1 \bar{q}_2^2 + 3 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_2^3} q_2 \bar{q}_2^2 \right) \\
& + \bar{z}^3 \left( \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_1^3} \bar{q}_1^3 + 3 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2} \bar{q}_1^2 \bar{q}_2 + 3 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2^2} \bar{q}_1 \bar{q}_2^2 + \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_2^3} \bar{q}_2^3 \right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = z^3 C(q, q, q) + 3z^2 \bar{z} C(q, q, \bar{q}) + 3z \bar{z}^2 C(q, \bar{q}, \bar{q}) + \bar{z}^3 C(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}).$$

Assim, podemos escrever  $F(\mathbf{x})$  como

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) = F(zq + \bar{z}\bar{q}) &= \frac{1}{2} B(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) + \frac{1}{6} C(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) \\ &= \frac{1}{2} (z^2 B(q, q) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q}) + 2z\bar{z} B(q, \bar{q})) + \frac{1}{6} (z^3 C(q, q, q) + 3z^2 \bar{z} C(q, q, \bar{q}) \\ &\quad + 3z \bar{z}^2 C(q, \bar{q}, \bar{q}) + \bar{z}^3 C(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q})). \end{aligned}$$

Do Lema 3.2 e da expansão da função  $g$  em séries, segue que podemos calcular os coeficientes  $g_{kl}$  utilizando a expressão para  $F$  obtida, como segue:

$$\begin{aligned} g_{20} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}, 0) \rangle \Big|_{z=0} = \langle p, \frac{\partial^2}{\partial z^2} F(zq + \bar{z}\bar{q}, 0) \Big|_{z=0} \rangle = \langle p, B(q, q) \rangle, \\ g_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}, 0) \rangle \Big|_{z=0} = \langle p, \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} F(zq + \bar{z}\bar{q}, 0) \Big|_{z=0} \rangle = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, \\ g_{02} &= \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}, 0) \rangle \Big|_{z=0} = \langle p, \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} F(zq + \bar{z}\bar{q}, 0) \Big|_{z=0} \rangle = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle, \\ g_{21} &= \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial \bar{z}} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}, 0) \rangle \Big|_{z=0} = \langle p, \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial \bar{z}} F(zq + \bar{z}\bar{q}, 0) \Big|_{z=0} \rangle = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, nos casos em que  $F$  possui essa estrutura, a verificação das condições para a ocorrência de uma bifurcação de Hopf torna-se consideravelmente mais fácil, uma vez que os coeficientes  $g_{kl}$  desempenham um papel fundamental nessa análise. Além disso, essa forma permite calcular explicitamente o primeiro coeficiente de Lyapunov, o que é essencial para determinar a natureza da bifurcação.

Concluimos, assim, que a bifurcação de Hopf ocorre quando, em um determinado valor do parâmetro, a matriz jacobiana associada ao sistema apresenta um par de autovalores puramente imaginários. Essa bifurcação é caracterizada pela transição de um ponto de equilíbrio do tipo foco para um ciclo limite que pode ser instável ou estável, conforme o sinal do coeficiente de Lyapunov. Esse tipo de bifurcação desempenha um papel fundamental na análise qualitativa de sistemas dinâmicos, que será explorado nas aplicações do capítulo 4.

---

## Aplicações da Bifurcação de Hopf

---

### 4.1 Bifurcação de Hopf em modelos predador-presa

Considere agora o problema de modelar a evolução da população de determinadas espécies, que se torna interessante quando há duas ou mais espécies em interação. Equações diferenciais não lineares são comumente utilizadas para modelar esse tipo de situação.

Quando a atividade de pesca diminuiu significativamente durante a primeira guerra mundial, um biólogo marinho italiano observou que esse período de decaimento coincidiu com o crescimento da população de tubarões. Assim, quando os pescadores retornaram ao mar no final da primeira guerra, descobriram que o estoque de peixes havia diminuído severamente, mesmo sem atividade de pesca nos anos anteriores. Este problema chamou a atenção de Vito-Volterra (1840-1940), que formulou equações que descrevem esse tipo de situação, conhecidas como Lotka-Volterra, que tem a forma

$$\begin{cases} x' = rx - axy, \\ y' = bxy - ky, \end{cases}$$

onde  $x$  e  $y$  denotam a densidade populacional da presa e do predador, respectivamente. Como os peixes comem algas, que são um recurso abundante, sua população cresce com uma taxa proporcional à população atual  $x' = rx$ . No entanto, os peixes são comidos por tubarões, o que faz com que sua população decresça em uma taxa que é proporcional a interação entre as espécies, com proporção  $a$ . Os predadores, por outro lado, morrem sem comida. Então, se a população  $x$  de presas se anula, isto é,  $x = 0$ , a população de predadores decresce pois faltaria alimento. Na presença das presas, a população de predadores cresce com taxa proporcional a interação entre as espécies, que é benéfica para o predador.

No entanto, esse modelo não leva em consideração alguns fatores realistas como a capacidade do ambiente, quantidade finita de recursos e clima. Por esse motivo, surgiram outros sistemas que modelam interações do tipo predador-presa. Assim, Holling

(1930-2019) introduziu as famílias chamadas “funcionais do tipo Holling”, ao considerar aspectos como o consumo das presas por predadores individuais e sua relação com a mudança na densidade das presas. Tais estudos envolveram casulos de mosca e a dinâmica de pequenos mamíferos, que matematicamente pode ser traduzida pelas expressões  $cx$  ou  $\frac{c}{a+x}$ , denotadas por “Holling tipo 1” e “Holling tipo 2”. Dessa forma, estudaremos o sistema predador presa Holling tipo 2, dado por

$$\begin{cases} x' &= rx(1-x) - \frac{cxy}{\alpha+x}, \\ y' &= -dy + \frac{cxy}{\alpha+x}. \end{cases} \quad (4-1)$$

O sistema (4-1) descreve a dinâmica de um simples ecossistema do modelo predador presa. Aqui,  $x$  e  $y$  são números populacionais (em escala) e  $r$ ,  $c$ ,  $d$  e  $\alpha$  são parâmetros que caracterizam o comportamento de populações isoladas e suas interações, em que  $r$  representa a taxa de crescimento da presa na ausência do predador,  $c$  representa a taxa de predação e  $d$  é a taxa de mortalidade natural dos predadores na ausência das presas. Consideremos  $\alpha$  um parâmetro de controle,  $c > d$  e  $r$ ,  $c$  e  $d$  positivos. Para simplificar cálculos futuros, consideremos um sistema polinomial que tem, para  $x > -\alpha$ , as mesmas órbitas que o original. Para tal, multiplique o sistema (4-1) pela função positiva  $x + \alpha$ , donde obtemos o sistema

$$\begin{cases} x'(\alpha+x) &= rx(1-x)(\alpha+x) - cxy, \\ y'(\alpha+x) &= -dy(\alpha+x) + cxy. \end{cases}$$

Introduzindo um novo tempo  $\tau$  de modo que  $dt = (\alpha+x)d\tau$ , segue que

$$x'(\alpha+x) = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dx}{d\tau}.$$

Logo, nesse novo tempo  $\tau$ , o sistema se torna

$$\begin{cases} x' &= rx(1-x)(\alpha+x) - cxy, \\ y' &= -\alpha dy + (c-d)xy. \end{cases} \quad (4-2)$$

O objetivo agora é mostrar que tal sistema apresenta uma bifurcação de Hopf com respeito a variação do parâmetro  $\alpha$ . Para isso, inicialmente encontramos os pontos singulares do sistema (4-2). Assim, precisamos resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} rx(1-x)(\alpha+x) - cxy &= 0, \\ -\alpha dy + (c-d)xy &= 0. \end{cases}$$

É claro que a origem é ponto de equilíbrio. Supondo então que  $y \neq 0$ , podemos dividir

ambos os lados da segunda equação por  $y$ , obtendo  $-\alpha d + (c-d)x = 0$  e donde segue que  $x = \frac{\alpha d}{c-d}$ . Substituindo tal valor de  $x$  na primeira equação, segue que

$$\frac{r\alpha d}{c(c-d)} \left(1 - \frac{\alpha d}{c-d}\right) \left(\alpha + \frac{\alpha d}{c-d}\right) - \frac{c\alpha d y}{c-d} = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} y &= \frac{r}{c} \left(\frac{c-d-\alpha d}{c-d}\right) \left(\frac{\alpha c}{c-d}\right) \\ &= r\alpha \left(\frac{c-d}{(c-d)^2} - \frac{\alpha d}{(c-d)^2}\right) \\ &= \frac{\alpha}{(c-d)} \left(1 - \frac{\alpha d}{c-d}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$E_0 = \left(\frac{\alpha d}{c-d}, \frac{rd}{c-d} \left(1 - \frac{\alpha d}{c-d}\right)\right),$$

é ponto singular não trivial do sistema. Observe ainda que a jacobiana associada ao sistema (4-2) é a matriz

$$\begin{aligned} A(x,y) &= \begin{pmatrix} -cy + r(1-x)(\alpha+x) + rx(-(\alpha+x) + (1-x)) & -cx \\ (c-d)y & -\alpha d + (c-d)x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -cy + r\alpha + 2rx - 2rx\alpha - 3rx^2 & -cx \\ (c-d)y & -\alpha d + (c-d)x \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

a qual avaliada no equilíbrio  $E_0$  é

$$\begin{aligned} A(E_0) &= \begin{pmatrix} \frac{-cr\alpha}{c-d} \left(1 - \frac{\alpha d}{c-d}\right) + r\alpha + \frac{2r\alpha d}{c-d} - \frac{2r\alpha^2 d}{c-d} - \frac{3r\alpha^2 d^2}{(c-d)^2} & \frac{-c\alpha d}{c-d} \\ r\alpha \left(1 - \frac{\alpha d}{c-d}\right) & -\alpha d + \alpha d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\alpha rd(c+d)}{(c+d)^2} \left(\frac{c-d}{c+d} - \alpha\right) & \frac{-\alpha cd}{c-d} \\ \frac{r\alpha(c-d(1+\alpha))}{c-d} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, os autovalores são encontrados através da equação característica

$$\det(A(E_0) - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{\alpha rd(c+d)}{(c+d)^2} \left(\frac{c-d}{c+d} - \alpha\right) - \lambda & \frac{-\alpha cd}{c-d} \\ \frac{r\alpha(c-d(1+\alpha))}{c-d} & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

A equação característica é dada por

$$\lambda \left( \frac{\alpha rd(c+d)}{(c-d)^2} \left(\frac{c-d}{c+d} - \lambda\right) - \lambda \right) + \frac{\alpha cd}{c-d} \left( \frac{\alpha cd}{c-d} \left(\frac{\alpha r(c-d(1+\alpha))}{c-d}\right) \right) = 0,$$

isto é,

$$\lambda^2 - \frac{\lambda \alpha r d (c+d)}{(c-d)^2} \left( \frac{c-d}{c+d} - \alpha \right) + \frac{\alpha c d}{(c-d)^2} (\alpha r (c-d(1+\alpha))) = 0,$$

donde segue que os autovalores são  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}$ , em que

$$\sigma = \frac{\alpha r d (c+d)}{(c-d)^2} \left( \frac{c-d}{c+d} - \alpha \right) \quad \text{e} \quad \Delta = \frac{\alpha c d}{(c-d)^2} (\alpha r (c-d(1+\alpha))).$$

Logo, a parte real do autovalor é dada por

$$\mu(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\alpha r d (c+d)}{(c-d)^2} \left( \frac{c-d}{c+d} - \alpha \right).$$

Das condições exigidas para que tenhamos uma bifurcação de Hopf, temos que os autovalores da jacobiana avaliada no ponto singular devem ser complexos puros. Assim, para que  $\alpha_0$  seja valor de bifurcação, é necessário que  $\mu(\alpha_0) = 0$ . Dessa forma

$$\mu(\alpha_0) = 0 \iff \frac{\alpha_0 r d (c+d)}{(c-d)^2} \left( \frac{c-d}{c+d} - \alpha_0 \right) = 0.$$

Como  $r$ ,  $c$  e  $d$  são não nulos e  $c \neq -d$ , tal igualdade só ocorre quando  $\alpha_0 = 0$  ou  $\alpha_0 = \frac{c-d}{c+d}$ . No entanto, se  $\alpha = 0$ , a parte imaginária do autovalor seria nula e não teria uma bifurcação de Hopf. Logo,  $\alpha_0 = \frac{c-d}{c+d}$ . Disso segue também que a parte imaginária é dada por

$$\pm i\omega(\alpha_0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_0 r d (c+d)^2}{(c-d)^4} \left( \frac{c-d}{c+d} - \alpha_0 \right)^2 - \frac{4\alpha_0 c d}{(c-d)^2} (\alpha_0 r (c-d(1+\alpha_0)))}.$$

Então,

$$-\omega_0^2 = (\pm i\omega_0)^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{-4\alpha_0 c d}{(c-d)^2} (r\alpha_0 (c-d(1+\alpha_0))) \right) = \frac{-\alpha_0 c d}{(c-d)^2} (r\alpha_0 (c-d(1+\alpha_0))). \quad (4-3)$$

Daí, substituindo  $\alpha_0$  na equação (4-3), segue que

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{c-d}{c+d} \frac{c d}{(c-d)^2} \left( r \frac{c-d}{c+d} (c-d(1+\alpha_0)) \right) \\ &= \frac{c d r}{(c+d)^2} \left( c-d - \frac{d(c-d)}{c+d} \right) \\ &= \frac{c d r}{(c+d)^2} \left( \frac{(c+d)(c-d) - d(c-d)}{c+d} \right) \\ &= \frac{c d r}{(c+d)^2} \left( \frac{c(c-d)}{c+d} \right) \\ &= \frac{c^2 d r (c-d)}{(c+d)^3} > 0. \end{aligned} \quad (4-4)$$

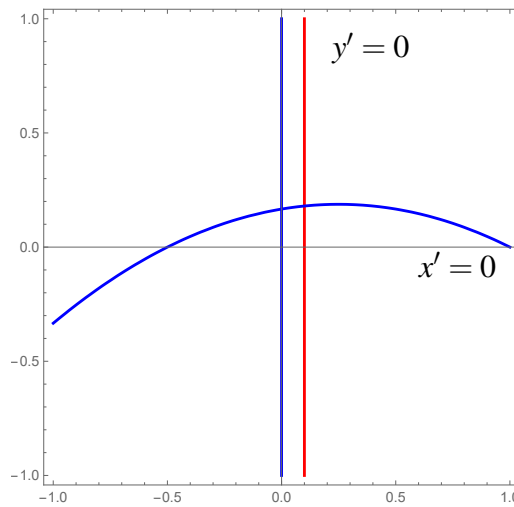
Portanto, em  $\alpha = \alpha_0$ , o equilíbrio  $E_0$  tem autovalores  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ , o que sugere uma possível ocorrência de uma bifurcação de Hopf em  $\alpha_0$ . Observe ainda que, para  $\alpha > \alpha_0$ , temos que

$$\mu(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 rd(c+d)}{(c-d)^2} \left( \frac{c-d}{c+d} - \alpha \right) < 0.$$

Agora, para  $\alpha < \alpha_0$ , temos que

$$\mu(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 rd(c+d)}{(c-d)^2} \left( \frac{c-d}{c+d} - \alpha \right) > 0,$$

donde concluímos que para  $\alpha > \alpha_0$  o equilíbrio  $E_0$  é estável e para  $\alpha < \alpha_0$  é instável.



**Figura 4.1:** Curvas dos equilíbrios do sistema (4-2).

Para aplicar o Teorema 3.11, é necessário checar se as condições de não degenerescência e transversalidade são satisfeitas, isto é,  $\mu'(\alpha_0) \neq 0$  e  $l_1(\alpha_0) \neq 0$ . Observe inicialmente que

$$\mu'(\alpha) = \frac{rd(c+d)}{2(c-d)^2} \left( \frac{c-d}{c+d} - \alpha \right) - \frac{\alpha rd(c+d)}{2(c-d)},$$

donde

$$\mu' \left( \frac{c-d}{c+d} \right) = \frac{-\alpha rd(c+d)}{2(c-d)} < 0.$$

Portanto, a condição de transversalidade é satisfeita. Resta agora calcular  $l_1(\alpha_0)$ . Em  $\alpha = \alpha_0$ , o equilíbrio não trivial  $E_0$  tem coordenadas

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) &= \left( \frac{c-d}{c+d} \frac{d}{c-d}, \frac{c-d}{c+d} \frac{r}{c-d} \left( 1 - \frac{c-d}{c+d} \frac{d}{c-d} \right) \right) \\ &= \left( \frac{d}{c+d}, \frac{r}{c+d} \left( 1 - \frac{d}{c+d} \right) \right) \\ &= \left( \frac{d}{c+d}, \frac{rc}{(c+d)^2} \right). \end{aligned}$$

Podemos transladar o equilíbrio para a origem do sistema de coordenadas pela mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = x_0 + \xi_1 = \frac{d}{c+d} + \xi_1, \\ y = y_0 + \xi_2 = \frac{rc}{(c+d)^2} + \xi_2. \end{cases}$$

Assim, observe que no valor de bifurcação  $\alpha = \alpha_0$ , temos

$$\begin{aligned} \xi_1' = x' &= rx(1 - x(\alpha + x)) - cxy \\ &= -\frac{cd\xi_2}{c+d} - \frac{c^2\xi_1\xi_2}{c+d} - \frac{cd\xi_1\xi_2}{c+d} - \frac{d\xi_1^2r}{c+d} - \frac{c\xi_1^3r}{c+d} - \frac{d\xi_1^3r}{c+d} \\ &= \frac{-cd\xi_2}{c+d} - \frac{rd}{c+d}\xi_1^2 - c\xi_1\xi_2 - r\xi_1^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \xi_2' = y' &= -\alpha dy + c(c-d)xy \\ &= -\frac{(c-d)drc}{(c+d)^3} - \frac{(c-d)}{c+d}d\xi_2 + (c-d) \left( \frac{rcd}{(c+d)^3} + \frac{d\xi_2}{c+d} + \frac{rc\xi_1}{(c+d)^2} + \xi_1\xi_2 \right) \\ &= \frac{(c-d)cr}{(c+d)^2}\xi_1 + (c-d)\xi_1\xi_2. \end{aligned}$$

Com isso, transformamos o sistema (4-2) em

$$\begin{cases} \xi_1' = \frac{-cd}{c+d}\xi_2 - \frac{rd}{c+d}\xi_1^2 - c\xi_1\xi_2 - r\xi_1^3 \equiv F_1(\xi_1, \xi_2), \\ \xi_2' = \frac{cr(c-d)}{(c+d)^2}\xi_1 + (c-d)\xi_1\xi_2 \equiv F_2(\xi_1, \xi_2). \end{cases} \quad (4-5)$$

Considere  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  e  $F(\xi) = (F_1(\xi_1, \xi_2), F_2(\xi_1, \xi_2))$ . Mostraremos que o sistema (4-5) pode ser representado como

$$\xi' = A\xi + \frac{1}{2}B(\xi, \xi) + \frac{1}{6}C(\xi, \xi, \xi), \quad (4-6)$$

onde  $A$  é a matriz jacobiana dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{cd}{c+d} \\ \frac{cr(c-d)}{(c+d)^2} & 0 \end{pmatrix},$$

$B = (B_1, B_2) = (B_1(\chi, \eta), B_2(\chi, \eta))$  e  $C = (C_1, C_2) = (C_1(\chi, \eta, \varsigma), C_2(\chi, \eta, \varsigma))$ , onde

$$B_i(\chi, \eta) = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} \chi_j \eta_k \quad (4-7)$$

e

$$C_i(\chi, \eta, \varsigma) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F_i(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} \chi_j \eta_k \varsigma_l, \quad (4-8)$$

com  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ ,  $\varsigma = (\varsigma_1, \varsigma_2)$  e  $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ .

De fato, calculando as derivadas de segunda ordem de  $F_1(\xi)$  e avaliando-as em  $\xi = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_1(\xi)}{\partial \xi_1^2} \Big|_{\xi=0} &= \frac{-2rd}{c+d}, \\ \frac{\partial^2 F_1(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=0} &= -c, \\ \frac{\partial^2 F_1(\xi)}{\partial \xi_2^2} \Big|_{\xi=0} &= 0. \end{aligned}$$

As derivadas parciais de segunda ordem de  $F_2(\xi)$  são

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_2(\xi)}{\partial \xi_1^2} \Big|_{\xi=0} &= 0, \\ \frac{\partial^2 F_2(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=0} &= c-d, \\ \frac{\partial^2 F_2(\xi)}{\partial \xi_2^2} \Big|_{\xi=0} &= 0. \end{aligned}$$

Substituindo essas derivadas em (4-7), segue que

$$B(\chi, \eta) = (B_1, B_2) = \left( \frac{-2rd}{c+d} \chi_1 \eta_1 - c(\eta_1 \chi_2 + \eta_2 \chi_1), (c-d)(\chi_1 \eta_2 + \eta_2 \chi_1) \right)$$

e, logo,

$$B(\xi, \xi) = \left( \frac{-2rd}{c+d} \xi_1^2 - 2c\xi_1 \xi_2, 2(c-d)\xi_1 \xi_2 \right).$$

Agora, calculando as derivadas de terceira ordem de  $F_1(\xi)$ , obtemos que  $\frac{\partial^3 F_1(\xi)}{\partial \xi_1^3} \Big|_{\xi=0} = -6r$  e as demais se anulam. Ao calcular as derivadas de terceira ordem de  $F_2(\xi)$ , vemos que todas são nulas em  $\xi = 0$ . Portanto, substituindo em (4-8), temos

$$C(\chi, \eta, \varsigma) = (C_1, C_2) = (-6r, 0),$$

donde

$$C(\xi, \xi, \xi) = (-6r\xi_1^3, 0).$$

Observe que com essas expressões para  $B$  e  $C$ , o sistema (4-6) é uma nova escrita para

(4-5). Ainda, reorganizando (4-4), temos que

$$\frac{\omega_0^2(c+d)}{cd} = \frac{rc(c-d)}{(c+d)^2}.$$

Com isso, podemos reescrever a matriz  $A$  como

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-cd}{c+d} \\ \frac{\omega_0^2(c+d)}{cd} & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{-cd}{c+d} \\ \frac{\omega_0^2(c+d)}{cd} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 + \omega_0^2 = 0,$$

e, deste modo, podemos calcular o autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $i\omega_0$ , da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{-cd}{c+d} \\ \frac{\omega_0^2(c+d)}{cd} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = i\omega_0 \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema, obtemos que a segunda coordenada  $q_2$  do vetor procurado é dada por  $q_2 = \frac{-(c+d)i\omega_0 q_1}{cd}$ . Portanto, o vetor  $q = \left(1, \frac{-(c+d)i\omega_0}{cd}\right)$  é autovetor de  $A$  associado a  $i\omega_0$ . Equivalentemente, como o produto de  $q$  pelo escalar  $cd$  também é autovetor associado a esse mesmo autovalor, podemos considerar  $q = (cd, -(c+d)i\omega_0)$  para simplificar cálculos futuros. Agora, para calcular autovetores de  $A^T$ , observe que

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\omega_0^2(c+d)}{cd} \\ \frac{-cd}{c+d} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = -i\omega_0 \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Segue que  $p_2 = \frac{-i\omega_0 cd p_1}{\omega_0^2(c+d)}$ . Assim, o vetor dado por  $r = \left(p_1, \frac{-i\omega_0 cd p_1}{\omega_0^2(c+d)}\right)$  é autovetor de  $A^T$  associado ao autovalor  $-i\omega_0$ . Como o produto do vetor  $p$  pelo escalar  $\omega_0(c+d)$  também é autovetor, vamos considerar  $s = (\omega_0(c+d), -icd)$ . Deste modo, vale que

$$Aq = i\omega_0 q \quad \text{e} \quad A^T p = -i\omega_0 p.$$

Além disso, note que podemos normalizar  $s$  com relação a  $q$  pois

$$\langle kp, q \rangle = 1 \iff \left\langle k \begin{pmatrix} \omega_0(c+d) \\ -icd \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} cd \\ -(c+d)i\omega_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1.$$

Tal igualdade ocorre se, e somente se,

$$\bar{k}(\omega_0(c+d)cd + cd\omega_0(c+d)) = 1.$$

Daí,

$$k = \frac{1}{2\omega_0 cd(c+d)}.$$

Logo, podemos tomar  $s$  normalizado com relação a  $q$ . Assim, os autovetores a serem utilizados nos cálculos futuros são

$$q = \begin{pmatrix} cd \\ -(c+d)i\omega_0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad p = ks = \frac{1}{2\omega_0 cd(c+d)} \begin{pmatrix} \omega_0(c+d) \\ -icd \end{pmatrix}.$$

Agora, podemos calcular  $l_1(\alpha_0)$ , dado pela expressão (3-27). Como escrevemos o sistema (4-5) na forma (4-6), da Observação 3.13 segue que podemos calcular o coeficiente  $g_{20}$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} g_{20} &= \langle p, B(q, q) \rangle \\ &= \frac{c(-d^2d - d^2r + id^2\omega_0 + c^2i\omega_0)}{c+d} \\ &= \frac{i\omega_0c(2cd + d^2 + c^2) + cd(c^2 - d^2 - rd)}{c+d} \\ &= \frac{i\omega_0c(c+d)^2 + cd(c^2 - d^2 - rd)}{c+d}. \end{aligned}$$

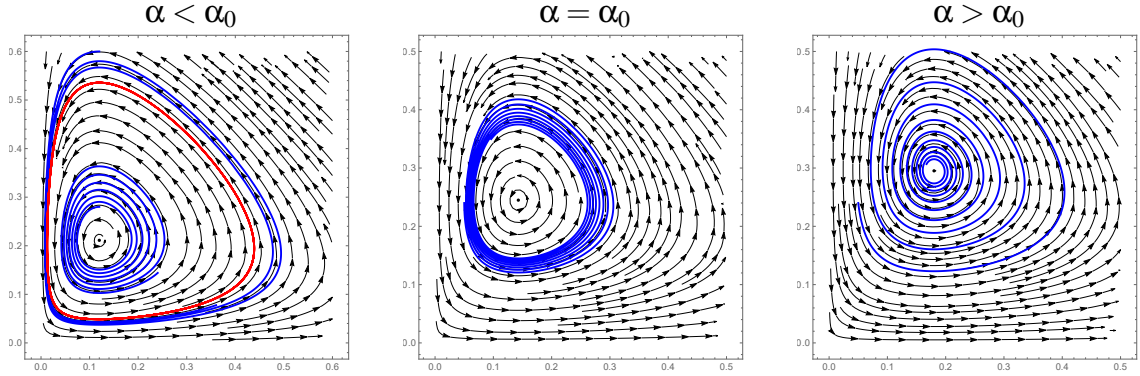
Analogamente, os coeficientes  $g_{11}$  e  $g_{21}$  são dados por

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle = \frac{-cd^2r}{cd}, \\ g_{21} &= \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle = \frac{-3c^3d^3r}{cd} = -3c^2d^2r. \end{aligned}$$

Logo, podemos utilizar a igualdade (3-27) para calcular o primeiro coeficiente de Lyapunov, como segue.

$$\begin{aligned} l_1(\alpha_0) &= \frac{1}{2\omega_0^2} \Re \left( \frac{i(i\omega_0c(c+d)^2 + cd(c^2 - d^2 - rd))}{c+d} \right) \\ &= \frac{1}{2\omega_0^2} \left( \frac{\omega_0c^2d^2r(c+d)^2}{(c+d)^2} - 3\omega_0c^2d^2r \right) = \frac{-c^2d^2r}{\omega_0} < 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $l_1(\alpha_0) < 0$ . Isso garante a ocorrência de uma bifurcação de Hopf supercrítica para o valor de bifurcação  $\alpha_0 = \frac{c-d}{c+d}$ .



**Figura 4.2:** Retratos de fase do sistema (4-2) para diferentes valores de  $\alpha$ . O ciclo limite estável (em vermelho) ocorre para  $\alpha < \alpha_0$ . A trajetória em azul corresponde a um foco atrator quando  $\alpha > \alpha_0$ , a um foco atrator fraco em  $\alpha = \alpha_0$  e a um foco repulsor quando  $\alpha < \alpha_0$ .

Consideremos agora o sistema dependente de três parâmetros, que pode ser visto em [19], dado em (4-9).

$$\begin{cases} x' = ax - bx^2 - y \frac{cx(1-\rho)}{d+x(1-\rho)}, \\ y' = -\mu y + \eta y \frac{cx(1-\rho)}{d+x(1-\rho)}, \end{cases} \quad (4-9)$$

em que  $\rho \in [0, 1)$  é um parâmetro de refúgio indicando que a fração  $\rho$  de presa é protegida da predação e  $1 - \rho$  é a fração da presa que está disponível para predação. O parâmetro  $\mu$  representa a taxa de morte do predador e  $\eta$  é a taxa de consumo da presa. Tais parâmetros têm influência na coexistência, oscilação e estabilidade do sistema. Dessa forma, o sistema (4-9) estende o modelo predador-presa com funcional de Holling tipo 2, incorporando um fator que regula a disponibilidade das presas, considerando que uma fração da presa escapa da predação. Isso torna o sistema ainda mais realista.

O objetivo é demonstrar a ocorrência de uma bifurcação de Hopf em função da variação do parâmetro  $\rho$ . A abordagem adotada é diferente daquela apresentada em [19]. Primeiramente, considere  $x > \frac{-d}{1-\rho}$  e multiplique o sistema (4-9) pelo fator positivo  $d + x(1 - \rho)$ , obtendo

$$\begin{cases} (d+x(1-\rho))x' = ax(d+x(1-\rho)) - bx^2(d+x(1-\rho)) - ycx(1-\rho), \\ (d+x(1-\rho))y' = -\mu y(d+x(1-\rho)) + \eta ycx(1-\rho), \end{cases}$$

Tomando a mudança de tempo  $\tau$  de modo que  $dt = (d + x(1 - \rho))d\tau$ , temos que

$$\begin{cases} x' = a(d+x(1-\rho))x - b(d+x(1-\rho))x^2 - ycx(1-\rho), \\ y' = -\mu(d+x(1-\rho))y + \eta ycx(1-\rho). \end{cases} \quad (4-10)$$

A estratégia será implementar os cálculos desenvolvidos ao longo da dissertação no software Mathematica. Além do que já foi comentado, durante o desenvolvimento dos cálculos se faz necessário inserir outras hipóteses sob as constantes do sistema (4-10). Dessa forma, precisamos inserir no software tais hipóteses e definir o campo de vetores associado, como segue.

```
(* Hipoteses do sistema*)
$Assumptions = \[Mu]>0 && Element[\[Mu], Reals] && \[Eta]>0 &&
Element[\[Eta], Reals] && Element[c, Reals] &&
Element[b, Reals] && Element[a, Reals] &&
Element[p, Reals] && \[Eta]*c - \[Mu] > 0 &&
(\[Eta]*a*c - \[Mu]*a) (1 - p) - \[Mu]*d*b > 0 &&
b*d (\[Eta]*c + \[Mu]) <= a (\[Eta]*c - \[Mu]) && a > 0 &&
b > 0 && c > 0 && d > 0 && \[Mu]^2 - c^2 \[Eta]^2 < 0 &&
c^2 \[Eta]^2 - \[Mu]^2 > 0

(* Campo de vetores *)
F[x_, y_, a_, b_, c_, d_, \[Eta]_, \[Mu]_, p_] := { (a*x - b*
x^2) (d + x (1 - p)) - y*c*x (1 - p), -\[Mu]*y (d + x (1 -
p)) + \[Eta]*y*c*x (1 - p)}
```

No decorrer das contas, será explicitado o motivo pelo qual cada uma dessas hipóteses foi inserida. O objetivo agora é analisar a existência de uma bifurcação de Hopf em função de  $\rho$  e determinar o valor do parâmetro para o qual ela ocorre. Para isso, é necessário calcular a jacobiana dos sistema e sua transposta.

```
(* Jacobiana J do campo F associado e sua transposta K *)
J[x_, y_, a_, b_, c_, d_, \[Eta]_, \[Mu]_, p_] =
D[F[x, y, a, b, c, d, \[Eta], \[Mu], p], {{x, y}}] //
Simplify
J[x, y, a, b, c, d, \[Eta], \[Mu], p] // MatrixForm

K[x_, y_, a_, b_, c_, d_, \[Eta]_, \[Mu]_, p_] :=
Transpose[J[x, y, a, b, c, d, \[Eta], \[Mu], p]]
K[x, y, a, b, c, d, \[Eta], \[Mu], p] // MatrixForm
```

Tais comandos devem retornar a jacobiana do sistema, que é dada por

$$J = \begin{pmatrix} a(d - 2(\rho - 1)x) + bx(-2d + 3(\rho - 1)x) & c(\rho - 1)x \\ + c(\rho - 1)y & \\ -(\rho - 1)y(c\eta - \mu) & -c(\rho - 1)x\eta - (d + x - \rho x)\mu \end{pmatrix}$$

e sua transposta

$$K = \begin{pmatrix} a(d - 2(\rho - 1)x) + bx(-2d + 3(\rho - 1)x) & -(\rho - 1)y(c\eta - \mu) \\ + c(\rho - 1)y & \\ c(\rho - 1)x & -c(\rho - 1)x\eta - (d + x - \rho x)\mu \end{pmatrix}$$

O próximo passo é encontrar os pontos de equilíbrio do sistema e a condição de traço nulo, para que os autovalores da jacobiana sejam imaginários puros. Para isso, faça

```
(* Encontrando o equilibrio e a condicao de traco nulo (para
que os autovalores sejam imaginarios puros)*)
Solve[F[x, y, a, b, c, d, \[Eta], \[Mu], p] == {0, 0}, {x, y
}] // Simplify

sol = Solve[{F[x, y, a, b, c, d, \[Eta], \[Mu], p] == {0, 0},
Tr[J[x, y, a, b, c, d, \[Eta], \[Mu], p]] == 0}, {x, y, p},
Reals] // FullSimplify
```

O primeiro comando diz respeito ao ponto singular do sistema. Os pontos singulares são

$$\mathbf{x}_0 = \left( \frac{d\mu}{(\rho - 1)(-c\eta + \mu)}, -\frac{d\eta(a(\rho - 1)(c\eta - \mu) + bd\mu)}{(\rho - 1)^2(-c\eta + \mu)^2} \right),$$

$\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ ,  $\mathbf{x}_2 = \left(\frac{a}{b}, 0\right)$  e  $\mathbf{x}_3 = \left(\frac{d}{-1 + \rho}, 0\right)$ . Quando se trata da interação entre populações, o foco são as populações não negativas, de modo que o ponto de interesse é  $\mathbf{x}_0$ . Note que o equilíbrio  $\mathbf{x}_0$  está bem definido pois  $\eta c - \mu > 0$  é hipótese do sistema e  $\rho \in [0, 1)$ .

Provaremos que  $\mathbf{x}_0$  satisfaz as condições da bifurcação de Hopf. O próximo passo apresentado tem o objetivo de encontrar o valor de bifurcação  $\rho_0$  e o ponto de equilíbrio neste valor. O segundo comando trata de encontrar o equilíbrio  $\mathbf{x}_0$  com a condição do traço nulo, que é necessária para que se tenha uma bifurcação de Hopf.

```
(*Atribuindo as coordenadas do ponto de equilibrio e valor de
bifurcacao*)
{x0, y0, p0} = {(a \[Mu])/(b c \[Eta] + b \[Mu]), (a^2 c \[
Eta]^2)/(b (c \[Eta] + \[Mu])^2), 1 - (b d (c \[Eta] + \[
Mu]))/(a (c \[Eta] - \[Mu]))}

XYeq = {x0, y0}
```

Disso, obtemos que o possível valor de bifurcação  $\rho_0$  é dado por

$$\rho_0 = 1 - \frac{bd(c\eta + \mu)}{a(c\eta - \mu)}.$$

Note que como  $bd(\eta c + \mu) \leq a(\eta c - \mu)$  é uma hipótese do sistema (4-10), temos que

$$0 < \frac{bd(\eta c + \mu)}{a(\eta c - \mu)} \leq 1.$$

Logo,

$$0 \leq 1 - \frac{bd(\eta c + \mu)}{a(\eta c - \mu)} < 1.$$

Portanto, uma vez que  $a > 0$ ,  $\eta c - \mu > 0$  e  $bd(\eta c + \mu) \leq a(\eta c - \mu)$ , o valor de bifurcação  $\rho_0$  é bem definido e está no intervalo  $[0, 1)$ . Além disso, o ponto singular em  $\rho_0$  é

$$(x_0, y_0) = \left( \frac{a\mu}{bc\eta + b\mu}, \frac{a^2c\eta^2}{b(c\eta + \mu)^2} \right),$$

que está bem definido pois  $\mu^2 - c\eta^2 < 0$  é hipótese do sistema (4-10) e implica que  $(\mu - c\eta)(\mu + c\eta) < 0$ , donde segue que  $\mu + c\eta > 0$ , tendo em vista que  $\mu - c\eta < 0$ , por hipótese.

Dadas essas informações sobre o valor de bifurcação e o equilíbrio, podemos calcular o determinante da jacobiana, avaliando-o em  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$  e  $\rho_0$ , como segue.

```
(* Verificando o determinante da jacobiana no equilibrio e no
valor de bifurcacao*)
detJ = Det[J[x0, y0, a, b, c, d, \[Eta], \[Mu], p0]] //
Simplify

\[Omega] = Sqrt[detJ] // Simplify
```

Com isso, segue que

$$\det J = \frac{ac^2d^2\eta^2\mu}{c^2\eta^2 - \mu^2}$$

e, portanto,

$$\omega = \sqrt{\det J} = cd\eta \sqrt{\frac{a\mu}{c^2\eta^2 - \mu^2}}.$$

Observe que  $\omega$  está bem definido pois temos que  $c^2\eta^2 - \mu^2 > 0$ . Consequentemente, os autovalores da matriz jacobiana atribuída no ponto de equilíbrio e no valor de bifurcação são dados por  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ . Tais autovalores podem ser calculados utilizando os seguintes comandos:

```
Eigenvalues[J[x0, y0, a, b, c, d, \[Eta], \[Mu], p0]] //
Simplify

FullSimplify[ComplexExpand[Eigenvalues[J[x0, y0, a, b, c, d,
\[Eta], \[Mu], p0]]], $Assumptions]
```

Conforme discutido na demonstração do Lema 3.2, é necessário avaliar a Jacobiana  $J$  e sua transposta  $K$  em  $\mathbf{x}_0$  e  $\rho_0$ . Em seguida, determina-se o autovetor  $q$ , associado ao autovalor  $\lambda$  de  $J$ , e o autovetor  $u$ , associado ao autovalor  $\bar{\lambda}$  de  $K$ , de modo que  $\langle u, q \rangle = 1$ . Considere  $\lambda = i\omega$  e  $\bar{\lambda} = -i\omega$ . Os comandos abaixo avaliam  $J$  e  $K$  em  $\mathbf{x}_0$  e  $\rho_0$ .

```
(* Jacobiana e sua transposta calculadas no ponto de Hopf*)
J0 = J[x0, y0, a, b, c, d, \[Eta], \[Mu], p0] // Simplify
J0 // MatrixForm

K0 = Transpose[J0]
K0 // MatrixForm
```

Tais comandos devem retornar a matriz jacobiana avaliada em  $x_0, y_0, \rho_0$ , dada por

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{cd\mu}{c\eta - \mu} \\ \frac{acd\eta^2}{c\eta + \mu} & 0 \end{pmatrix}$$

e sua transposta

$$K_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{acd\eta^2}{c\eta + \mu} \\ -\frac{cd\mu}{c\eta - \mu} & 0 \end{pmatrix}.$$

É importante salientar que como  $c\eta + \mu > 0$  e  $c\eta - \mu > 0$ , as entradas de  $J_0$  e  $K_0$  estão todas bem definidas. Com isso, utilizamos os comandos a seguir para calcular os autovetores  $q$  de  $J_0$  e  $u$  de  $K_0$ .

```
(* Autovetor q de J0 com autovalor i\[Omega] *)
baseq = NullSpace[J0 - I*\[Omega] IdentityMatrix[2]]
q = First[baseq]

(* Autovetor u de K0 com autovalor -i\[Omega] *)
baseu = NullSpace[K0 + I*\[Omega] IdentityMatrix[2]] //
Simplify
u0 = First[baseu]
```

Com esses comandos, obtemos

$$q = \left( \frac{i(c\eta + \mu) \sqrt{\frac{a\mu}{c^2\eta^2 - \mu^2}}}{a\eta}, 1 \right)$$

e

$$u_0 = \left( -\frac{i\eta(\mu - c\eta) \sqrt{\frac{a\mu}{c^2\eta^2 - \mu^2}}}{\mu}, 1 \right).$$

Agora, queremos encontrar  $u$  normalizado com relação a  $q$ , isto é,  $\langle u, q \rangle = 1$ . Para isso, definimos o produto interno entre  $u_0$  e  $q$  e calculamos o fator de normalização  $k$ , visto na Observação 3.3.

```
(* Normalizacao de p e q para que tenhamos <p,q> =1*)
prodint = Conjugate[u0[[1]]] q[[1]] + Conjugate[u0[[2]]] q
[[2]] // Simplify

normFactor = 1/Conjugate[prodint]

u = (normFactor*u0) // FullSimplify
```

Assim, obtemos  $u$  e  $q$  autovetores normalizados

$$q = \left( \frac{i(c\eta + \mu) \sqrt{\frac{a\mu}{c^2\eta^2 - \mu^2}}}{a\eta}, 1 \right)$$

e

$$u = \left( -\frac{i\eta(\mu - c\eta) \sqrt{\frac{a\mu}{c^2\eta^2 - \mu^2}}}{2\mu}, \frac{1}{2} \right),$$

que são importantes na definição da função  $g$  vista no Lema 3.2, cuja expansão gera os coeficientes  $g_{ij}$ . Vale destacar que algumas implementações no Mathematica ou em outros softwares (como Maple) podem produzir autovetores diferentes, porém equivalentes. Abaixo, introduzimos a variável complexa  $z$  de modo que  $\mathbf{x} = zq + \bar{z}\bar{q}$ , como visto no Lema 3.2.

```
(* Adicionando a variavel complexa z fazendo a mudanca (x,y)
-(x0,y0) = z q + z Conjugate[q] *)
X = {x, y} /. {x -> x0 + z q[[1]] + Conjugate[z] Conjugate[q
[[1]]],
```

$$y \rightarrow y_0 + z q[[2]] + \text{Conjugate}[z] \text{Conjugate}[q[[2]]]$$

Dessa forma, é possível reescrever o campo vetorial

$$F(x,y) = ((d + (1 - p)x)(ax - bx^2) - c(1 - p)xy, c(1 - p)xy\eta - (d + (1 - p)x)y\mu),$$

associado ao sistema (4-10) em termos das variáveis  $z$  e  $\bar{z}$  e utilizar a expressão da função  $g(z)$ , dada por

$$g(z) = \langle u(\rho_0), F((x_0, y_0) + zq(\rho_0) + \bar{z}\bar{q}(\rho_0)) \rangle, \quad (4-11)$$

conforme a equação (3-16), para calcular os coeficientes  $g_{ij}$ . Ainda, tais coeficientes são dados pela expansão da expressão (4-11) em torno da origem  $z = 0$ .

```
(* Definindo g(z) *)
g[z_] = Simplify[Conjugate[u[[1]]]*F[X[[1]], X[[2]], a, b, c,
  d, \[Eta], \[Mu], p0][[1]] + Conjugate[u[[2]]]* F[X[[1]],
  X[[2]], a, b, c, d, \[Eta], \[Mu], p0][[2]]]

(* Expandindo g em (z, zc) ate ordem 3 *)
gseries = Series[g[z], {z, 0, 3}, {Conjugate[z], 0, 3}] //
Normal
```

Com essas informações, é possível calcular os coeficientes  $g_{20}$ ,  $g_{11}$  e  $g_{21}$ , necessários para o cálculo do coeficiente de Lyapunov, como segue abaixo.

```
(* Encontrando os coeficientes g20, g11, g21 *)
g20 = Coefficient[Hseries, z^2] /. Conjugate[z] -> 0 //
Simplify

g11 = Coefficient[Hseries, z Conjugate[z]] // Simplify

g21 = Coefficient[Hseries, z^2 Conjugate[z]] // Simplify
```

Portanto, obtemos os coeficientes  $g_{ij}$  da seguinte forma

$$g_{20} = \frac{bd \left( a(-c^3\eta^3 + c\eta\mu^2) - i(-c^2\eta^2 \sqrt{a\mu(c^2\eta^2 - \mu^2)} + \sqrt{a^3\mu^3(c^2\eta^2 - \mu^2)}) \right)}{2a^2\eta(\mu - c\eta)^2}$$

$$g_{11} = \frac{\frac{ibd\sqrt{a\mu^5(c^2\eta^2 - \mu^2)}}{2a^2\eta(\mu - c\eta)^2} + \frac{ibd\mu^{3/2}(c\eta + \mu)}{\eta(c\eta - \mu)\sqrt{a(c^2\eta^2 - \mu^2)}}}{\eta(c\eta - \mu)\sqrt{a(c^2\eta^2 - \mu^2)}}$$

$$g_{21} = \frac{3b^2d\sqrt{\mu} \left( c^2\eta^2\sqrt{a\mu} + 2c\eta\mu\sqrt{a\mu} + \sqrt{a\mu^5} \right)}{2a^{5/2}\eta^2(\mu - c\eta)^2}.$$

Agora, utilizamos esses coeficientes para calcular o primeiro coeficiente de Lyapunov, através da fórmula (3-27), como segue.

```
(* Encontrando o primeiro coeficiente de Lyapunov l1*)
l1 = FullSimplify[1/(2 \[Omega]^2) Re[I g20 g11 + \[Omega]
g21]]

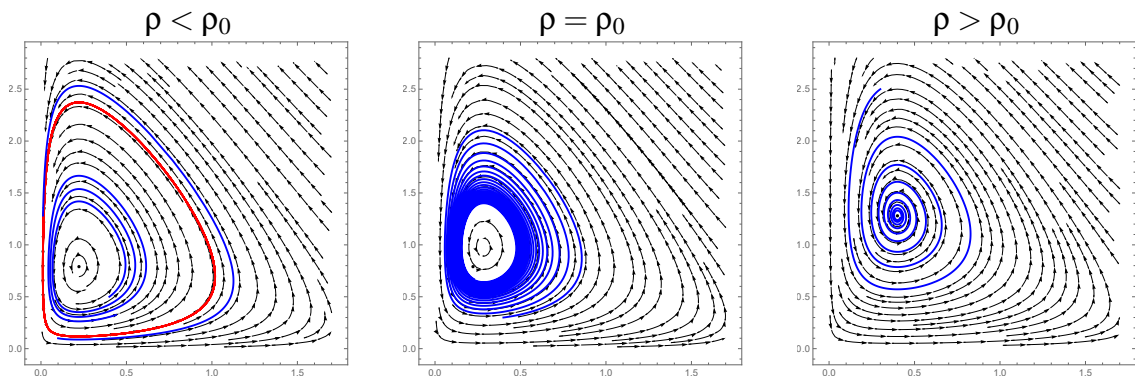
l1simp = ComplexExpand[l1] // FullSimplify

sinalL1 = Sign[l1simp] // Simplify
```

e obtemos

$$l_1 = -\frac{b^2(c\eta + \mu)^2 \sqrt{a(c\eta - \mu)\mu(c\eta + \mu)}}{2a^3c\eta^3(\mu - c\eta)^2},$$

cujo sinal é negativo. Assim, concluímos que existe uma bifurcação de Hopf supercrítica no equilíbrio  $(x_0, y_0)$  para  $\rho_0$ . Além disso, a estabilidade do equilíbrio passa de um foco atrator para um foco repulsor, gerando um ciclo limite estável.



**Figura 4.3:** Retratos de fase do sistema (4-9) para diferentes valores de  $\rho$ . O ciclo limite estável (em vermelho) ocorre para  $\rho < \rho_0$ . A trajetória em azul corresponde a um foco atrator para  $\rho > \rho_0$ , a um foco atrator fraco em  $\rho = \rho_0$  e a um foco repulsor quando  $\rho < \rho_0$ .

## 4.2 Bifurcação de Hopf no modelo Brusselator

O Brusselator, cujo nome é uma junção das palavras “oscillator” e “Bruxelles”, é um modelo desenvolvido por Prigogine e Lefever (veja em [12]) na Université Libre de Bruxelles, na Bélgica. Tal modelo é um modelo teórico na química e descreve reações químicas autocatalíticas, isto é, reações em que um dos produtos da reação atua como catalisador para a própria reação. Dessa forma, considere o esquema de reações químicas (4-12).



onde as letras maiúsculas denotam os reagentes e as constantes  $k_i > 0$  são as constantes de proporcionalidade. As substâncias  $D$  e  $E$  entram apenas uma vez em reação, enquanto  $A$  e  $B$  são escolhidas para serem constantes.

Podemos estudar o comportamento de tal esquema com relação às variáveis  $X$  e  $Y$ . Primeiramente, é necessário escrever esse esquema de reações como um sistema de equações diferenciais. Lembre que a Lei da Ação das Massas afirma que a taxa de uma reação química é diretamente proporcional ao produto dos reagentes. Aplicando tal lei no esquema de reações (4-12), obtemos o sistema de equações diferenciais dado por

$$\begin{cases} \frac{d[X]}{dt} = k_1[A] - k_2[B][X] + k_3[X]^2[Y] - k_4[X], \\ \frac{d[Y]}{dt} = -k_3[X]^2[Y] + k_2[B][X], \end{cases} \tag{4-13}$$

onde  $[X]$  denota a massa de  $X$ . Tomando agora um novo tempo  $\tau$  de modo que  $\frac{d\tau}{dt} = k_4$  e realizando essa mudança no sistema (4-13), obtemos

$$\begin{cases} \frac{d[X]}{d\tau} = \frac{d[X]}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{k_1}{k_4}[A] - \frac{k_2}{k_4}[B][X] + \frac{k_3}{k_4}[X]^2[Y] - [X], \\ \frac{d[Y]}{d\tau} = \frac{d[Y]}{dt} \frac{dt}{d\tau} = -\frac{k_3}{k_4}[X]^2[Y] + \frac{k_2}{k_4}[B][X], \end{cases} \tag{4-14}$$

Agora, realizando as mudanças de variáveis  $x = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}}[X]$  e  $y = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}}[Y]$ , a equação de  $[X]$  em (4-14) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\tau} &= \frac{\sqrt{k_3}}{\sqrt{k_4}} \frac{d[X]}{d\tau} = \frac{\sqrt{k_3}}{\sqrt{k_4}} \left( \frac{k_1}{k_4} [A] - \frac{k_2}{k_4} [B][X] + \frac{k_3}{k_4} [X]^2 [Y] - [X] \right) \\
&= \frac{\sqrt{k_3} k_1}{\sqrt{k_4} k_4} [A] - \frac{\sqrt{k_3} k_2}{\sqrt{k_4} k_4} [B] \frac{\sqrt{k_4}}{\sqrt{k_3}} x + \frac{\sqrt{k_3} k_3 k_4}{\sqrt{k_4} k_4 k_3} x^2 \frac{\sqrt{k_4}}{\sqrt{k_3}} y - \frac{\sqrt{k_3}}{\sqrt{k_4}} \frac{\sqrt{k_4}}{\sqrt{k_3}} x \\
&= \frac{\sqrt{k_3} k_1}{\sqrt{k_4} k_4} [A] - \frac{k_2}{k_4} [B] x + x^2 y - x.
\end{aligned}$$

Analogamente, a equação de  $[Y]$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{d\tau} &= \frac{\sqrt{k_3}}{\sqrt{k_4}} \frac{d[Y]}{d\tau} = -\frac{\sqrt{k_3} k_3 k_4}{\sqrt{k_4} k_4 k_3} x^2 \frac{\sqrt{k_4}}{\sqrt{k_3}} y + \frac{\sqrt{k_3} k_2}{\sqrt{k_4} k_4} [B] \frac{\sqrt{k_4}}{\sqrt{k_3}} x \\
&= -x^2 y + \frac{k_2}{k_4} [B] x.
\end{aligned}$$

Por fim, tomando  $a = \frac{\sqrt{k_3} k_1}{\sqrt{k_4} k_4} [A]$  e  $b = \frac{k_2}{k_4} [B]$ , o sistema (4-14) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} x' = a - bx + x^2 y - x = a - x(b + 1) + x^2 y \equiv F_1(x, y, a, b), \\ y' = -x^2 y + bx \equiv F_2(x, y, a, b). \end{cases} \quad (4-15)$$

Considere  $a > 0$  e  $b$  um parâmetro. O objetivo é estudar a ocorrência de uma bifurcação de Hopf nesse sistema sob a variação do parâmetro  $b$ . Para isso, utilizamos o software Wolfram Mathematica, assim como no sistema (4-10). Primeiramente, definimos as hipóteses do sistema (4-15), bem como o campo vetorial associado. Neste caso, consideramos o campo vetorial  $F(x, y) = (F_1(x, y, a, b), F_2(x, y, a, b))$ .

```
(* Hipoteses do sistema Brusselator *)
$Assumptions = A > 0 && Element[A, Reals]

(* Campo de vetores *)
F[x_, y_, a_, b_] := {a - (b + 1) x + x^2 y, b x - x^2 y}
F[x, y, a, b]
```

Em seguida, calculamos a jacobiana do sistema e sua transposta. Isso pode ser feito através dos seguintes comandos:

```
(* Jacobiana J do campo F associado*)
J[x_, y_, a_, b_] = D[F[x, y, a, b], {{x, y}}]
J[x, y, a, b] // MatrixForm

(*Tansposta da jacobiana*)
K[x_, y_, a_, b_] := Transpose[J[x, y, a, b]]
K[x, y, a, b] // MatrixForm
```

Através desses comandos, obtemos que a jacobina do sistema é dada pela matriz

$$J = \begin{pmatrix} -1 - b + 2xy & x^2 \\ b - 2xy & -x^2 \end{pmatrix}$$

e sua transposta é a matriz

$$K = \begin{pmatrix} -1 - b + 2xy & b - 2xy \\ x^2 & -x^2 \end{pmatrix}.$$

Agora, o objetivo é determinar os pontos de equilíbrio do sistema (4-15), resolvendo  $F(x, y, a, b) = 0$ , e identificar os valores do parâmetro  $b$  para os quais pode ocorrer uma bifurcação de Hopf, isto é, quando o traço da matriz jacobiana se anula.

```
(* Encontrando o equilibrio e a condicao de traco nulo (para
    que os autovalores sejam complexos puros)*)
soleq = Solve[F[x, y, a, b] == {0, 0}, {x, y}]

sol = Solve[{F[x, y, a, b] == {0, 0}, Tr[J[x, y, a, b]] ==
    0}, {x, y, b}, Reals] // Simplify
```

Realizando esses comandos, encontra-se que o único ponto singular de (4-15) é  $(x, y) = \left(a, \frac{b}{a}\right)$  e o possível valor de bifurcação é  $b_0 = 1 + a^2$ . Observe que como  $a > 0$ , o equilíbrio está bem definido. Além disso, em  $b = b_0$ , o equilíbrio é dado por  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = \left(a, \frac{1}{a} + a\right)$ . Os comandos abaixo são utilizados para atribuir as coordenadas ao ponto de equilíbrio.

```
(* Atribuindo as coordenadas do ponto de equilibrio e do
    parametro critico *)
{x0, y0, B0} = {x, y, b} /. First[sol]

XYeq = {x0, y0}
```

Agora, é necessário calcular o determinante da jacobiana no equilíbrio e no parâmetro de bifurcação. Fazendo isso, encontramos os autovalores  $\lambda_{1,2} = \pm ia$  de  $J$ .

```
(*Verificando o determinante da jacobiana no equilibrio e
    valor de bifurcacao*)
detJ = Det[J[x0, y0, a, b0]] // Simplify

\[\Omega] = Sqrt[detJ] // Simplify
```

```
Eigenvalues[J[x0, y0, a, b0]]
```

No quadro abaixo, avaliamos a jacobiana  $J$  e sua transposta  $K$  em  $\mathbf{x}_0$  e  $b_0$ .

```
(* Jacobiana e sua transposta calculadas no ponto de Hopf*)
J0 = J[x0, y0, a, b0] // Simplify
J0 // MatrixForm

K0 = Transpose[J0]
K0 // MatrixForm
```

Com isso, é possível ver que a jacobiana do sistema (4-15) avaliada em  $b_0$  é dada por

$$J_0 = \begin{pmatrix} A^2 & A^2 \\ -1 - A^2 & -A^2 \end{pmatrix}$$

e sua transposta é

$$K_0 = \begin{pmatrix} A^2 & -1 - A^2 \\ A^2 & -A^2 \end{pmatrix}.$$

Assim, é possível encontrar o autovetor  $q$  associado a  $J_0$  e o autovetor  $p$ , associado a  $K_0$ , de modo que  $p$  seja normalizado com relação a  $q$ .

```
(* Autovetor q de J0 com autovalor i\[Omega] *)
baseq = NullSpace[J0 - I*\[Omega] IdentityMatrix[2]]

q = First[baseq]

(* Autovetor p de K0 com autovalor -i\[Omega] *)
basep = NullSpace[K0 + I*\[Omega] IdentityMatrix[2]] //
Simplify

p0 = First[basep]
```

Dessa forma, encontramos os autovetores

$$q = \left( -\frac{A}{-i + A}, 1 \right)$$

e

$$p_0 = \left( \frac{-i + A}{A}, 1 \right),$$

associados a  $J_0$  e  $K_0$ , respectivamente. É importante ressaltar que os comandos podem produzir diferentes autovetores, a depender da versão do software utilizado, mas eles devem ser equivalentes. Vimos na Observação 3.3 que, para normalizar  $p$  com respeito a  $q$ ,

basta tomar  $p = k p_0$ , onde  $k = \frac{1}{\langle p_0, q \rangle}$ . O quadro abaixo contém os comandos utilizados para fazer essa normalização.

```
(* Normalizacao de p e q para que tenhamos <p,q> =1*)
prodint = Conjugate[p0[[1]]] q[[1]] + Conjugate[p0[[2]]] q
[[2]] // Simplify

normFactor = 1/Conjugate[prodint]

p = (normFactor*p0) // FullSimplify
```

A partir desses comandos, segue que os autovetores são

$$q = \left( -\frac{A}{-i+A}, 1 \right)$$

e

$$p = \left( -\frac{i(1+A^2)}{2A}, -\frac{1}{2}i(i+A) \right).$$

Os próximos passos são mover o equilíbrio para a origem e introduzir a variável complexa  $z$ , donde  $(x, y) = (zq + \bar{z}\bar{q})$ , conforme visto no Lema 3.2. Para isso, basta inserir o seguinte comando:

```
(* Adicionando a variavel complexa z fazendo a mudanca (x,y)
-(x0,y0) = z q + z Conjugate[q] *)
X = {x, y}/.{x -> x0 + zq[[1]] + Conjugate[z]Conjugate[q
[[1]]], y -> y0 + zq[[2]] + Conjugate[z]Conjugate[q[[2]]]}
```

Agora, definimos a função

$$g(z, \bar{z}, b_0) = \langle p, F((x_0, y_0) + zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle,$$

como na equação (3-16). O quadro abaixo mostra o comando utilizado para definir a função  $g$ .

```
(* Definindo a funcao g(z) = <p, F(XYeq+ z q + zc qc, A, B0)> *)
g(z) = Simplify[Conjugate[p[[1]]] F[X[[1]], X[[2]], a, b0
][[1]] + Conjugate[p[[2]]] F[X[[1]], X[[2]], b, b0][[2]]]
```

Esse comando deve retornar a função

$$g(z) = \frac{1}{2(-i+a)(i+a)^2} \left[ (i+a)^2 z \left( -z + a^2(2i+z) - a(-2+2iz+z^2) \right) - z(2-2a^4+az+2ia^2z+3a^3z)\bar{z} + (1+a^4+a^2(2+2iz)-az-3a^3z)\bar{z}^2 - a(-i+a)^2\bar{z}^3 \right].$$

A expansão dessa função torna possível o cálculo dos coeficientes  $g_{ij}$ , que são justamente os coeficientes da expansão da função  $g$  em séries, conforme visto na equação (3-17).

Podemo expandir  $g$  em séries através dos seguintes comandos:

```
(* Expandindo H em (z, Conjugate[z]) ate ordem 3 *)
gseries = Series[g[z], {z, 0, 3}, {Conjugate[z], 0, 3}] //
Normal

(* Encontrando os coeficientes: g20, g11, g21 *)
g20 = Coefficient[gseries, z^2] /. Conjugate[z] -> 0 //
Simplify

g11 = Coefficient[gseries, z Conjugate[z]] // Simplify

g21 = Coefficient[gseries, z^2 Conjugate[z]] // Simplify
```

Com isso, segue que

$$g_{20} = \frac{1}{2}(-i+a), \quad g_{11} = \frac{-1+a^2}{i+a} \quad \text{e} \quad g_{21} = \frac{(i-3a)a}{2(1+a^2)}.$$

Finalmente, utilizando a equação (3-27), é possível calcular o primeiro coeficiente de Lyapunov, como detalhado a seguir.

```
(* Encontrando o primeiro coeficiente de Lyapunov *)
l1 = FullSimplify[1/(2 \[Omega]^2) Re[I g20 g11 + \[Omega]
g21]]

(* Encontrando os coeficientes: g20, g11, g21 *)
g20 = Coefficient[Hseries, z^2] /. Conjugate[z] -> 0 //
Simplify

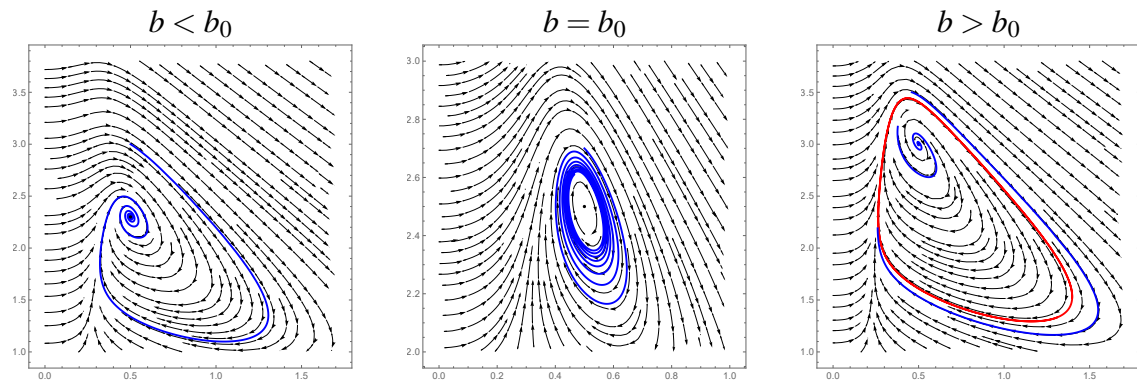
l1simp = ComplexExpand[l1] // FullSimplify

sinalL1 = Sign[l1simp] // Simplify
```

Dessa forma, obtêm-se que o primeiro coeficiente de Lyapunov é

$$l_1 = -\frac{2+A^2}{4(A+A^3)},$$

cujo sinal é  $-1$ , o que garante a ocorrência de uma bifurcação de Hopf supercrítica em que um ciclo limite estável surge a medida em que um foco atrator se torna repulsor, em  $b_0 = 1 + a^2$ .



**Figura 4.4:** Retratos de fase do sistema (4-15) para diferentes valores de  $b$ . O ciclo limite estável (em vermelho) ocorre para  $b > b_0$ . A trajetória em azul corresponde a um foco atrator quando  $b < b_0$ , a um foco atrator fraco em  $b = b_0$  e a um foco repulsor quando  $b > b_0$ .

---

## Bibliografia

---

- [1] ALLMAN, E. S.; RHODES, J. A. **Mathematical Models in Biology: an introduction**. Cambridge, first edition, 2003.
- [2] ARROWSMITH, D. K.; PLACE, C. M. **Dynamical systems**. Springer Science+Business Media B.V., first edition, 1992.
- [3] CHICONE, C. **Ordinary Differential Equations with Applications**, volume 34 de **Texts in Applied Mathematics**. Springer-Verlag New York, second edition, 1999.
- [4] HOFBAUER, J.; SIGMUND, K. **The Theory of Evolution and Dynamical Systems: mathematical aspects of selection**, volume 7 de **London Mathematical Society Student Texts**. Cambridge, second edition, 1992.
- [5] KUZNETSOV, Y. A. **Elements of Applied Bifurcation Theory**, volume 112 de **Applied Mathematical Sciences**. Springer-Verlag New York, second edition, 1998.
- [6] LAIATE, B.; ALVES, J. R.; MEYER, J. F. C. A. **Holling-type functional responses of fuzzy population models under cross operations**. *Biomatemática*, 34:101–115, 2024. A publication of the Biomathematics Group, IMECC – Unicamp.
- [7] MERZBACH, U. C.; BOYER, C. B. **A history of mathematics**. Wiley, 688 edition, 2011.
- [8] PERKO, L. **Differential Equations and Dynamical Systems**, volume 7 de **Texts in Applied Mathematics**. Springer-Verlag New York, third edition, 2001.
- [9] PICARD, É. **Traité d'Analyse**. Gauthier-Villars, Paris, 1891.
- [10] PICARD, É. **La théorie de la relativité et ses applications à l'astronomie**. Gauthier-Villars, 1922.
- [11] PICARD, É.; SIMART, G. **Téorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes**. Gauthier-Villars, Paris, 1897.
- [12] PRIGOGINE, I.; LEVEFER, R. **Symmetry Breaking Instabilities in Dissipative Systems. II**. American Institute of Physics, 1968.

- [13] SHUI-NEE CHOW, CHENGZHI LI, D. W. **Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields**. Cambridge University Press, 1 edition, 1994.
- [14] SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, São Paulo, 1979.
- [15] SOTOMAYOR, J. **Curvas definidas por equações diferenciais no plano**. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1981.
- [16] SOTOMAYOR, J. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Textos Universitários do IME-USP, Rio de Janeiro, 2011.
- [17] TUNG, K. K. **Topics in Mathematical Modeling**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007.
- [18] WIGGINS, S. **Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos**. Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag New York, second edition, 2003.
- [19] ZHOU, Y.; SUN, W.; SONG, Y.; ZHENG, Z.; LU, J.; CHEN, S. **Hopf bifurcation analysis of a predator–prey model with holling-ii type functional response and a prey refuge**. *Springer nature*, 2019.