UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS (UFG)
FACULDADE DE FILOSOFIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

FILIPE BORGES ALBERNAZ

DA INTERPRETAÇÃO BHK À TEORIA INTUICIONISTA DOS TIPOS:

a construção mental como conceito primitivo fundamental

GOIÂNIA
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
FACULDADE DE FILOSOFIA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[ ] Dissertação [x] Tese

2. Nome completo do autor

Filipe Borges Albernaz

3. Título do trabalho

“ Da Interpretação Bhk à Teoria Intuicionista Dos Tipos: a Construção Mental como Conceito Primitivo Fundamental”

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **FILIPE BORGES ALBERNAZ**, **Discente**, em 02/04/2022, às 04:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **André Da Silva Porto**, **Professor do Magistério Superior**, em 02/04/2022, às 09:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2804776** e o código CRC **DC10768A**.

Referência: Processo nº 23070.015937/2022-75 SEI nº 2804776

FILIPE BORGES ALBERNAZ

DA INTERPRETAÇÃO BHK À TEORIA INTUICIONISTA DOS TIPOS:
a construção mental como conceito primitivo fundamental

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia, da Faculdade de Filosofia da Universidade Federal de Goiás (UFG), como requisito para a obtenção do título de Doutor em Filosofia.
Área de concentração: Filosofia.
Linha de pesquisa: Lógica e filosofia da linguagem.

Orientador: André da Silva Porto

GOIÂNIA
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Albernaz, Filipe Borges
Da Interpretação Bhk à Teoria Intuicionista Dos Tipos [manuscrito] : a Construção Mental como Conceito Primitivo Fundamental / Filipe Borges Albernaz. - 2022.
xi, 127 f.

Orientador: Prof. Dr. André da Silva Porto.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Faculdade de Filosofia (Fafil), Programa de Pós-Graduação em Filosofia, Goiânia, 2022.
Bibliografia.

1. fundamentos da matemática. 2. intuicionismo. 3. lógica de Heyting. 4. dedução natural. 5. interpretação BHK. I. Porto, André da Silva, orient. II. Título.

CDU 1

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

FACULDADE DE FILOSOFIA

ATA DE DEFESA DE TESE

Ata nº 07/2022 da sessão de Defesa de Tese de Filipe Borges Albernaz que confere o título de Doutor em Filosofia do Programa de Pós Graduação em Filosofia, na área de concentração em Filosofia.

Aos trinta e um dias do mês de março do ano de dois mil e vinte e dois, a partir das 14:00 horas, por videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Tese intitulada " Da Interpretação Bhk à Teoria Intuicionista Dos Tipos: a Construção Mental como Conceito Primitivo Fundamental". Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor André da Silva Porto (FAFIL) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Abilio Azambuja Rodrigues Filho (UFMG), membro titular externo, cuja participação ocorreu através de videoconferência; Professor Doutor Javier Legris (UBA) membro titular externo, cuja participação ocorreu através de videoconferência; Professor Doutor Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira (PUC - RJ) membro titular externo, cuja participação ocorreu através de videoconferência; Professor Doutor Ruy José Guerra Barretto de Queiroz (UFPI) membro titular externo, cuja participação ocorreu através de videoconferência. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Tese tendo sido o candidato) **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor André da Silva Porto (FAFIL), Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos trinta e um dias do mês de março do ano de dois mil e vinte e dois.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Ruy Jose Guerra Barretto de Queiroz**, **Usuário Externo**, em 29/04/2022, às 11:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **André Da Silva Porto**, **Professor do Magistério Superior**, em 29/04/2022, às 12:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **JAVIER LEGRIS**, **Usuário Externo**, em 02/05/2022, às 13:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **ABILIO AZAMBUJA RODRIGUES FILHO**, **Usuário Externo**, em 05/05/2022, às 11:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira**, **Usuário Externo**, em 06/05/2022, às 17:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2864835** e o código CRC **EBEA78D2**.

Referência: Processo nº 23070.015937/2022-75 SEI nº 2864835

Resumo

Em meio a uma disputa de fundamentos filosóficos que dura mais de uma centena de anos, a fundamentação intuicionista da matemática parece cada vez mais próxima de ser uma alternativa à fundamentação clássica. Interpretação de noções fundamentais e primitivas e consequências para a interpretação dos conectivos lógicos são algumas das questões a serem tratadas neste texto, em uma estrutura que pretende mostrar o papel fundamental e primitivo da noção de construção mental no Intuicionismo, desde a proposta de Brouwer até a Teoria Intuicionista dos Tipo de Martin-Löf. A discussão dos aspectos particulares da proposta de Martin-Löf não nos permite perder de vista que ela se trata essencialmente de um sistema formal, universal, porém, aberto, mas também uma linguagem para a prática da matemática intuicionista. Essas e outras características próprias do intuicionismo formal de Martin-Löf precisaram ir além das elucidações e conceitos do intuicionismo original de Brouwer, até então, considerado como mais especulativo e pouco viável do ponto de vista prático. Justamente, o aprofundamento conceitual do sistema de Martin-Löf trouxe luz ao intuicionismo e fazem dele único e tão importante, não apenas para a matemática, mas também para a lógica, filosofia e, até mesmo, para a computação. Com uma adequada compreensão da Teoria Intuicionista dos Tipos, especialmente a partir da interpretação intuicionista fundamental de provas como construções mentais, temos uma medida mais exata de o que se trata o intuicionismo e suas principais consequências. Algumas delas tratadas neste trabalho são a recusa do princípio do terceiro excluído, a interpretação de noções como “existência”, “construção”, “proposição” e “asserção”, além do caráter construtivo compulsório para provas matemáticas formais. Em se tratando especificamente do sistema de Martin-Löf, discutimos ainda as ideias de “verdade” e “bivalência das proposições”, “domínios primitivos” e “domínios proposicionais”, imprescindíveis para o sistema e distintas das concepções clássicas, apesar da coincidência terminológica.

Palavras-chave: fundamentos da matemática, intuicionismo, lógica de Heyting, dedução natural, interpretação BHK, Teoria Intuicionista dos Tipos, Martin-Löf.

Abstract

In the midst of a dispute over philosophical foundations that has lasted for over a hundred years, the intuitionistic foundations of mathematics seems ever closer to being an alternative to classical foundation. Interpretation of fundamental and primitive notions and consequences for the interpretation of logical connectives are some of the issues to be addressed in this text, in a framework that intends to show the fundamental and primitive role of the notion of mental construction in Intuitionism, from Brouwer's proposal to Martin-Löf's Intuitionistic Type Theory. The discussion of particular aspects of the Martin-Löf's proposal does not allow us to lose sight of the fact that it is essentially a formal system, universal, however, open, but also a language for the practice of intuitionist mathematics. These and other characteristics of Martin-Löf's formal intuitionism needed to go beyond the definitions and concepts of Brouwer's original intuitionism, until then, considered as more speculative and impractical from a practical point of view. Precisely, the conceptual deepening of the Martin-Löf's system brought light to intuitionism and make it unique and so important, not only for mathematics, but also for logic, philosophy and even for computation. With an adequate understanding of the Intuitionistic Type Theory, especially from the fundamental intuitionist interpretation of proofs as mental constructions, we have a more accurate measure of what intuitionism is about and its main consequences. Some of them dealt with in this work are the refusal of the law of excluded middle, the interpretation of notions such as "existence", "construction", "proposition" and "assertion", in addition to the compulsory constructive character for formal mathematical proofs. In the specific case of the Martin-Löf's system, we also discuss the ideas of truth and bivalence of propositions, primitive domains and propositional domains, essential for the system and distinct from classical conceptions, despite the terminological coincidence.

Keywords: foundations of mathematics, intuitionism, Heyting's logic, natural deduction, BHK interpretation, Intuitionistic Type Theory, Martin-Löf.

À minha querida filha, Cecília.
Quando tudo chegar ao fim,
estaremos juntos novamente,
para nada mais nos separar!

Toda a minha admiração e respeito ao professor André da Silva Porto, por sua generosidade ao longo desses anos de orientação, pela sua honestidade intelectual em nossas discussões, pelos seus ensinamentos e conselhos. Muito obrigado!

Registro ainda a minha admiração e meu agradecimento ao professor Guilherme Ghisoni da Silva, que foi um importante incentivador, no início de meu percurso, para que eu me investisse nesse doutoramento e chegasse a este momento.

Sumário

INTRODUÇÃO

> … uma prova ou construção matemática é essencialmente uma entidade mental, algo que pode ser representado por um arranjo de símbolos no papel, mas não pode ser identificado com ele. Essa tese é … uma rejeição da ideia de que possa mesmo haver um isomorfismo entre a totalidade das possíveis provas de afirmações dentro de alguma teoria matemática e uma totalidade determinadamente especificada de estrutura simbólicas qualquer, ou seja, provas dentro de um sistema formal qualquer. (Dummett, 1978, p. 200, *tradução nossa*)

Não parece haver disputa quanto a importância para o Intuicionismo da interpretação de "provas como construções mentais" (também conhecida como BHK ou *proof interpretation*[1]). No entanto, do nosso ponto de vista, a interpretação BHK é mais que importante, é fundamental, pois trata-se do ponto de partida da proposta intuicionista de fundamentação da matemática. Essa, aliás, parece ser uma interpretação bem aceita entre intuicionistas e que perdura até os dias atuais. Podemos dizer o mesmo das noções de "proposição" e "asserção", essenciais para a correta compreensão do intuicionismo, mas principalmente para viabilizar uma proposta adequada de formalização da matemática intuicionista.

A partir da noção fundamental de "construção mental", entendemos que as demais noções intuicionistas surgem como decorrências naturais e inevitáveis, que avançam até as interpretações dos conectivos lógicos, de modo a abrir caminho até as interpretações das noções fundamentais da Teoria Intuicionista do Tipos (TIT), mantendo estável a interpretação original de "construção mental", sendo essa a tese central deste texto.

A sustentação de tal tese requer o cuidado na apresentação dos pontos de conexão entre Brouwer e ML, mas não podemos deixar de ressaltar que ML buscou contribuições em diferentes fontes de modo a viabilizar seu sistema formal. Para desenvolver sua fundamentação intuicionista e formalização construtivista[2] da matemática, ML combina as ideias intuicionistas originais (em especial a interpretação BHK) às ideias de Prawitz, Curry, Howard e toda uma escola holandesa de aplicação de Teoria dos Tipos para verificação automática de provas. Aqui nos referimos respectivamente à Dedução

---

[1] cf. (Troelstra & Van Dalen, 1988, p. 9-10, p. 24)

[2] Geralmente utiliza-se o termo intuicionismo para designar um conjunto de ideias que remetem às intuições de Brouwer, em especial às noções de "existência" e de "construções mentais" como únicos objetos matemáticos. Já o construtivismo refere-se essencialmente a um modo antirrealista de praticar a matemática, em que asserções matemáticas devem vir acompanhadas de suas respectivas provas, e que pode ou não adotar os princípios intuicionistas na produção de seus resultados.

Natural, a propriedade de Curry-Howard e na ideia de proposições como domínios, amplamente utilizada por pesquisadores matemáticos holandeses. Juntos, esses componentes, perfeitamente compatíveis intuicionisticamente, permitem o desenvolvimento do sistema formal de ML, e em nada alteram ou contradizem as noções intuicionistas fundamentais, especialmente a noção primitiva de "construção".

É importante notar que neste texto tratamos do intuicionismo em dois âmbitos, um que poderíamos chamar de 'conceitual' ou 'especulativo', i.e., a teoria intuicionista 'pura', e outro âmbito, que poderíamos chamar de 'prático' ou 'formal', i.e., de um verdadeiro sistema formal, como a proposta de ML para a formalização da sua teoria intuicionista. Poderíamos dizer, a grosso modo, que Brouwer é quem apresenta o Intuicionismo 'conceitual', enquanto ML é o responsável pelo desenvolvimento do Intuicionismo 'formal', ou pela formalização do Intuicionismo 'conceitual', entretanto, com um longo espaço de tempo de esforços entre os dois.

Por se tratar de um texto introdutório de fundamentos do intuicionismo, foi feita a opção que melhor parece explicitar a importância lógica da interpretação BHK, assim contribuindo para uma adequada compreensão da proposta de ML e das conexões entre as noções desenvolvidas no âmbito de seu sistema e as ideias apresentadas por Brouwer. Em se tratando de uma proposta intuicionista, a TIT mantém a interpretação das noções fundamentais introduzidas por Brouwer e elucidadas por Heyting. No entanto, a fim de viabilizar a formalização da proposta intuicionista e a utilização em contextos práticos matemáticos, ML nos apresenta algumas distinções conceituais novas fundamentais. Algumas delas significam desdobramentos de noções originais que, inclusive, contribuem para uma melhor compreensão do intuicionismo. São os casos das noções de "objeto-prova", "proposição" e "juízo".

Para enfatizar a importância e relevância das ideias apresentadas por ML e a maneira como ele as organiza para desenvolver sua TIT, é preciso lembrar que houve um grande lapso temporal de várias décadas entre a publicação da dissertação de Brouwer em 1907 e o livro de ML em 1984. Entre essas publicações, algumas tentativas se mostraram frustradas em desenvolver um sistema formal construtivo alternativo à Teoria dos Conjuntos. A Teoria Abstrata das Construções de Kreisel foi uma delas, e a utilizamos aqui como exemplo para mostrar que as ideias presentes na TIT são qualquer coisa menos óbvias, ao menos para a época, e representaram a possibilidade de um enorme avanço, não apenas para a matemática, mas para a filosofia e a lógica.

Um último ponto a ser destacado diz respeito à terminologia utilizada. Como veremos adiante em alguns exemplos, há uma quantidade considerável de discussões a respeito dos temas construtivismo e intuicionismo. No entanto, nos parece haver divergências de sentido no uso de determinados termos ao longo do tempo e, por vezes, até mesmo oscilações de sentido de termos utilizados por um mesmo autor. Certamente, isso tende a dificultar a compreensão desses termos em sua conexão com noções intuicionistas e as suas consequências. Portanto, a fim de preservar distinções importantes, tentaremos, neste trabalho, sempre esclarecer e reforçar o que se pretende expressar quando do uso de uma determinada terminologia técnica.

Assim, a tese é estrutura em três capítulos. No capítulo 1, apresentamos um contexto histórico geral desde Brouwer até ML, passando por Bishop. No capítulo 2, apresentamos os conceitos fundamentais do Intuicionismo de Brouwer. Iniciamos o capítulo 3 apresentando rapidamente a Teoria Abstrata das Construções de Kreisel, que talvez mais tenha se aproximado de formalizar uma matemática construtiva até a TIT. Logo em seguida, passamos ao que realmente interessa para a proposta deste trabalho, a apresentação do sistema de ML, com especial atenção aos seus conceitos fundamentais e aos pontos principais que viabilizam essa proposta como alternativa à Teoria dos Conjuntos.

Um dos objetivos do capítulo 3 é evidenciar um certo caráter continuísta em relação às principais noções dos fundamentos do intuicionismo de Brouwer, quer dizer, o que ML se apropria das ideias de Brouwer de modo que a sua TIT é compreendida como uma verdadeira teoria de fundamentos da matemática intuicionista. Entretanto, o capítulo ressalta a importância de aspectos particulares e desenvolvimentos conceituais intuicionistas profundos introduzidos por ML em sua TIT. Isso permite à TIT ser alçada ao estatuto de alternativa construtiva viável à Teoria dos Conjuntos para a formalização da matemática, o que havia sido provado por Bishop como algo possível, porém sem verdadeiros candidatos a tal posto até então.

Naturalmente, a TIT de ML permitiu avanços óbvios para a matemática e para a filosofia, mas também evidencia que a ideia de “construções mentais como provas” de Brouwer era de fato correta e que se trata simplesmente da intuição e noção fundamental para o desenvolvimento de uma fundamentação intuicionista completa da matemática. Em outras palavras, apesar de Brouwer apresentar ideias e intuições convincentes, mesmo para alguns matemáticos de sua época, acerca do intuicionismo, foi ML quem comprovou que elas poderiam ser, além de convincentes, aplicadas e utilizadas para a prática da matemática. Essa é a construção que esperamos que o leitor consiga realizar a partir da leitura deste texto.

Boa construção!

CAPÍTULO 1 - CONTEXTO HISTÓRICO

Introdução

O século XX teve seu início com uma cisma de toda surpreendente que atingiu os próprios fundamentos daquela que deveria ser nossa ciência mais sólida, a Matemática. É verdade que a cisma teve origens ainda no século XIX, mas foi mesmo em 1907 com a dissertação de doutoramento de Luitzen Egbertus Jan Brouwer, "*Os Fundamentos da Matemática*", que a cisma começou ganhar contornos de crise. Com a proposta intuicionista de Brouwer, iniciou-se de fato uma disputa que perdura até os dias atuais. Até então, a Teoria dos Conjuntos de Georg Cantor e Richard Dedekind de 1870 parecia ser suficiente para a prática da matemática tendo um crescente apoio no meio. No entanto, os paradoxos da Teoria dos Conjuntos, em especial o paradoxo de Russell, mas também alguns resultados polêmicos da Teoria dos Conjuntos, como o Axioma da Escolha de Ernst Zermelo de 1904, "levaram ao desenvolvimento de três escolas de fundamentos da matemática: intuicionismo, formalismo e logicismo"[3] (Hesseling, 2003, p. xvi). Como sabemos, no entanto, o desafiante maior da fundamentação da Teoria dos Conjuntos foi Brouwer, com o primeiro golpe em 1907 com sua dissertação de doutoramento. Em seguida, após um período de arrefecimento, tivemos o ressurgimento do debate com a publicação do livro de Errett Bishop em 1967[4]. Por fim, mesmo contando com o importante trabalho de desenvolvimento da TIT realizado por Per Erik Rutger Martin-Löf em 1984, até os dias atuais, mais de um século se passou e a disputa sobre fundamentos da matemática continua em aberto, sem ainda um declarado vencedor.

O caminho, no entanto, parece promissor para os anticlássicos. Em 2013, o Programa de Fundamentos Univalentes desenvolvido em Princeton nos Estados Unidos publicou, em cooperação com matemáticos e pesquisadores de outras áreas como filosofia e computação, um livro em que os autores dizem acreditar que "a fundamentação univalente irá eventualmente se tornar uma alternativa viável à Teoria dos Conjuntos como a 'fundamentação implícita' para a matemática praticada pela maioria dos matemáticos" (Aczel, 2013, p. 1). A importância desse trabalho para nós se dá pelo fato de ser um projeto essencialmente baseado na fundamentação intuicionista de ML

---

[3] Hesseling aponta ainda que o logicismo teve um papel marginal no debate em reação ao desenvolvimento do intuicionismo, que também tem uma importante atenção à lógica.

[4] Bishop publicou em 1967 seu livro "Fundamentos da Análise Construtiva" que basicamente trouxe a disputa de fundamentos da matemática de volta com ainda mais força a intuicionistas e construtivistas, aumentando assim a pressão sobre os defensores de Teoria dos Conjuntos.

juntamente com o Axioma Univalente, de Vladimir Voevodsky. Não daremos ênfase ao Programa de Fundamentos Univalentes, mas, sim, na parte basilar que serve realmente de fundamentação para esse candidato a alternativa à fundamentação conjuntística, a TIT de ML.

Atualmente a Teoria Intuicionista dos Tipos é bastante conhecida, principalmente no meio matemático e computacional. Esse conhecimento muito se deve aos trabalhos de diversos autores como Sundholm (em vários artigos), Nordström, Petersson, Smith (1990), Granström (2011), e, claro, do próprio ML. No entanto, entendemos que cada apresentação do sistema de ML possui um viés próprio, dados os interesses específicos no sistema por parte dos autores e do público alvo. Neste trabalho, tomamos o desafio de fazer uma apresentação cujo propósito é a elucidação de conceitos fundamentais para o intuicionismo e para o sistema de ML. Essa apresentação passa pelo que entendemos ser um ordenamento mais intuitivo daqueles conceitos, de modo que a compreensão do sistema seja a mais natural possível, de modo a possibilitar a compreensão das conexões das noções do sistema de ML com a da proposta original de Brouwer.

No entanto, devemos inicialmente apresentar o contexto em que surge o intuicionismo, apontando alguns marcos importantes que antecederam o atual momento da disputa. E faremos essa menção em um breve percurso histórico levando em consideração três personagens principais: Brouwer – considerado o grande precursor e inventor do intuicionismo; Bishop – que publicou seu Fundamentos da Análise Construtiva oferecendo um caminho para novos intuicionistas; ML – que desenvolveu um sistema viável para a prática de uma matemática intuicionista contemporânea[5].

[5] Chamamos de intuicionismo contemporâneo as tentativas intuicionistas que não subscrevem a ideia de sequências de escolha da proposta original de Brouwer. Devemos dizer ainda que o intuicionismo sueco difere do intuicionismo de Dummett e mesmo do construtivismo de Bishop, ambos contemporâneos. Neste trabalho estamos realmente interessados no intuicionismo sueco, cujas ideias partem principalmente de Prawitz e Martin-Löf.

1.1 Brouwer

Como dissemos, o primeiro forte golpe na disputa de fundamentos da matemática foi dado pelo lado intuicionista em 1907, com a dissertação de Brouwer que enfatizava suas ideias iniciais de construções mentais como provas e da independização da matemática em relação à lógica ou qualquer linguagem. Em um segundo momento, já em 1908, Brouwer publica um artigo[6] em que enfatiza sua crítica ao Princípio do Terceiro Excluído da maneira em que era utilizado até então por adeptos da Teoria dos Conjuntos. No entanto, a 'nova crise dos fundamentos' foi, assim e definitivamente, proclamada por Hermann Weyl mais tarde, em 1921[7]. Weyl, que havia adotado o intuicionismo apenas em 1919, teve papel importante na disseminação das ideias de Brouwer. De fato, o ápice do debate sobre os fundamentos da matemática ocorreu na década de 1920, com uma intensa participação de matemáticos e filósofos influentes da época (Hesseling, 2003, p. xv). Um deles, o matemático John von Neumann, faz um relato em 1947 de que o impacto das ideias e do trabalho de Brouwer e Weyl à época foi realmente profundo.

> É difícil superestimar o significado desses eventos. Na terceira década do século XX, dois matemáticos [Brouwer e Weyl, DH] – ambos de primeira magnitude, e tão profundamente conscientes do que a matemática é, ou é para, ou é sobre, como qualquer um poderia ser – na verdade, propuseram que o conceito de rigor matemático, do que constitui uma prova exata, deveria ser mudado! (von Neumann, 1947, p. 188, *tradução nossa*)

Hesseling aponta ainda que questões relativas à ontologia eram especialmente discutidas nesse período. De fato, Brouwer tem suas preocupações principais relativas à noção de "existência", resolvendo-a conectando ontologia à noção de "prova", ou "construção", como veremos no próximo capítulo. Essa questão ontológica, relativamente à interpretação da existência dos objetos matemáticos, juntamente ao tratamento de linguagem matemática, será crucial para a fundamentação da teoria intuicionista e das propostas de fundamentação de uma matemática construtiva.

> O debate de fundamentos na década de 1920 definitivamente pertence a um período em que uma grande significância estava vinculada a essas questões. Questões existenciais estavam entre os principais assuntos discutidos. (Hesseling, 2003, p. 120, *tradução nossa*)

---

[6] Artigo *The Unreliability of the Logical Principles* de 1908.

[7] Weyl publica em 1921 o artigo *neue Grundlagenkrise* (Nova crise de fundamentos) e se declara publicamente intuicionista.

No mesmo ano de 1921, Hilbert, em uma clara reação às ideias de Brouwer, anuncia o desenvolvimento de uma nova fundamentação da matemática, conhecido como Programa Formalista de Hilbert, em que a consistência formal implicaria na verdade das proposições. Os esforços de defesa de ambos os lados, intuicionista e formalista (conjuntístico), continuaram durante toda a década, tendo como maiores contribuidores Brouwer e Weyl, do lado intuicionista, e, talvez, Hilbert e Zermelo, do lado formalista/conjuntístico. Coincidentemente ou não, o fim da chamada crise de fundamentos ocorre a partir de 1928, após Brouwer apresentar suas 4 intuições[8] que, segundo o próprio, seriam suficientes para dar fim ao debate.

Isso não significa que os intuicionistas pararam de trabalhar ou publicar, mas simplesmente que as reações tiveram considerável retração por parte de matemáticos clássicos, que, por sua vez, também continuaram trabalhando em defesa da Teoria dos Conjuntos e, especialmente, nas propostas de formalização capazes de produzir mais resultados para a ciência. Tal eficiência científica fora reconhecida, inclusive, por Weyl que, em diferentes momentos (em 1921, 1930 e, mesmo muitos anos após o fim do debate, em 1946) apontou para a dificuldade da proposta intuicionista em produzir os resultados que a Teoria dos Conjuntos já apresentava à época. Especificamente em 1930, Weyl sugere que, do ponto de vista científico, a proposta de Hilbert seria mais produtiva, apesar de, do ponto de vista estritamente intuitivo-matemático, a fundamentação intuicionista ser a correta.

> Com Brouwer, a matemática ganha a mais alta clareza intuitiva; sua doutrina é idealismo em matemática pensada até o fim. Mas, cheio de dor, o matemático vê a maior parte de suas imponentes teorias se dissolver no nevoeiro. (Weyl. The Current Epistemological Situation in Mathematics, 1921. *Apud* Mancosu, 1998, p. 136, *tradução nossa*)
>
> Se alguém toma a matemática por si só, deve restringir-se a Brouwer às verdades da intuição (…) Mas em ciência natural (…) eu concedo o ponto de vista de Hilbert. (Weyl, 1930. Em Weyl, 2012, p. 29, *tradução nossa*)
>
> Mas, no geral, a matemática de Brouwer é menos simples e muito mais limitada em poder do que a nossa matemática “existencial” familiar. É por essa razão que a grande maioria dos matemáticos hesita em seguir sua reforma radical. (Weyl, 1946. *Apud* Weyl, 2012, p. 141, *tradução nossa*)

[8] Brouwer apresenta, em dezembro de 1927 em Amsterdã, 4 intuições que basicamente reforçam as ideias intuicionistas frente as interpretações clássicas de existência e de tratamento de linguagem e metalinguagem matemáticas. Ver Hesseling (2003, p. 78).

Com o aparentemente fim da crise dos fundamentos da matemática, o que parecia ser o princípio da vitória do programa de Hilbert sobre o intuicionismo de Brouwer acaba se revertendo em sua inevitável derrocada. Menos de um ano depois, em 1931, Kurt Friedrich Gödel, supostamente inspirado por uma palestra proferida por Brouwer em Viena em 1928, publica seus Teoremas de Incompletude, dos quais o primeiro basicamente prova que qualquer sistema axiomático que inclua a aritmética, portanto, qualquer sistema matemático relevante, não pode ser ao mesmo tempo completo e consistente[9]. Alguns poderiam imaginar ser o fim da linha para o programa de Hilbert e a fundamentação clássica/conjuntística. No entanto, havia um grande problema a ser resolvido: o programa de Hilbert não poderia ser levado adiante, mas, por outro lado, a fundamentação de Brouwer era ainda embrionária e não fornecia uma proposta de implementação estável e viável para a prática da matemática.

Com os resultados aparentemente negativos dos Teoremas da Gödel, os participantes da disputa se retiraram, restando um vácuo sobre a decisão entre Teoria dos Conjuntos e Intuicionismo. Não foi uma surpresa que a comunidade matemática em geral tenha ignorado a falta de uma resposta definitiva quanto à disputa de fundamentos e continuasse a trabalhar como vinha fazendo antes do início da crise. Pelos próximos 30 anos, a uniformização e padronização da linguagem matemática conjuntística realizada por Nicolas Bourbaki[10] foi disseminada por todo o mundo, garantindo assim a hegemonia do que se pôde salvar da Teoria dos Conjuntos.

> (...) na década de 1960, quando o autor [Beeson] foi para a graduação, Brouwer nem sequer era mencionado para a maioria dos estudantes de matemática. A controvérsia tinha acabado. A teoria dos conjuntos era ensinada logo na segunda série primária e as provas de existência por contradição eram tomadas como garantidas. (Beeson, 1985, p. xiv, *tradução nossa*)

Em uma espécie de inércia, a matemática clássica conjuntística permaneceu hegemônica enquanto os intuicionistas ficaram relegados aos seus poucos departamentos com ainda menos visibilidade. Esse período de calmaria perdura até 1967, quando Bishop apresenta seu livro “Fundamentos da Análise Construtiva”.

---

[9] GÖDEL, Kurt. Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I. *Monatscefte für Mathematik und Physik*, 38, p. 173-198, 1931. In: Feferman, S. (Ed.). Collected Works. V. I. Oxford: Oxford University Press, 1986-1995.

[10] Pseudônimo utilizado por um coletivo de autores, de maioria francesa, que assinou uma série de publicações em matemática entre 1934 e 2016.

1.2 Bishop

> **A tentativa de Bishop foi bem-sucedida.** Dentro de uma estrutura construtiva intimamente relacionada ao intuicionismo de Brouwer - embora com diferenças importantes - ele desenvolveu uma parte substancial da análise abstrata (...) Ele não está brincando quando sugere que a matemática clássica (...) provavelmente deixará de existir (...) uma vez que as implicações e vantagens do programa construtivista sejam percebidas. (Stolzenberg, 1970, p. 301, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

A reticente, porém, conveniente, aceitação da Teoria dos Conjuntos como fundamentação para a prática matemática tem como grande argumento os resultados obtidos para a ciência. A matemática, em especial a Análise, contribuiu e muito para ciências como física, astronomia, engenharias, entre outras aplicações em diversas áreas. A Teoria dos Conjuntos pode não ter ganho a disputa, mas saiu da crise com a hegemonia entre os matemáticos por meio do uso de sua linguagem. Durante mais de 30 anos a matemática conjuntística ganhou praticantes em toda a comunidade científica enquanto intuicionismo e construtivismo foram, aos poucos, sendo esquecidos. Era o que parecia, até a década de 1960, quando entraram em cena Bishop e o computador, o que Beeson (1985, p. xiv-xv) aponta terem sido as principais causas do renascimento da disputa dos fundamentos da matemática com uma “enxurrada de novas pesquisas” sobre intuicionismo e construtivismo já na década seguinte.

A estratégia de trabalho de Bishop é de grande importância para a sua rápida disseminação e compreensão entre matemáticos, se dividindo em duas partes principais. Primeiro, Bishop se distancia das discussões de fundamentos, optando por trabalhar diretamente com a prática da matemática, utilizando-se apenas de alguns princípios, que tornam sua proposta construtiva. Em segundo lugar, Bishop aproxima a linguagem utilizada em sua proposta à linguagem conjuntística, utilizada pela quase totalidade da comunidade matemática. Assim, Bishop conseguia evitar possíveis rejeições imediatas ou preconceitos em relação às ideias ali contidas.

No entanto, a relevância do trabalho de Bishop para o ressurgimento, por assim dizer, do intuicionismo se dá pela eliminação da situação de mutua exclusão entre as duas teorias da antiga disputa de fundamentos. Bishop não apenas mostra que os resultados da Análise Conjuntística poderiam ser expressos construtivamente como, de fato, demonstra construtivamente os teoremas fundamentais da Análise e da Teoria das Medidas. Essas demonstrações construtivas de Bishop, assim como toda a sua análise, passam a ser encaradas por muitos matemáticos, como Bridger e Beeson, como sendo mais naturais e penetrantes para um matemático que as reproduzisse. Outro termo que poderia ser utilizado para qualificar provas intuicionistas ou construtivas é “convincente”, como faz Beeson ao se referir a Brouwer.

> (...) [Brouwer] enfatizou o papel da intuição em reconhecer que a prova matemática é convincente, em oposição à ideia ‘formalista’ de que a prova matemática é apenas uma sequência de sinais que seguem certas regras. (Beeson, 1985, p. xiii, *tradução* nossa)

Portanto, poderíamos dizer que o grande papel de Bishop nesse contexto de disputa de fundamentos da matemática foi mostrar que, ao assumir uma fundamentação construtiva, a Análise não seria perdida como imaginava Weyl. Isso certamente extinguiu o suposto impacto negativo da adoção de uma fundamentação essencialmente construtiva para a matemática e torna mais promissores os esforços em desenvolver uma proposta de formalização de uma matemática intuicionista.

> (…) ambos [Brouwer e Hilbert] pensavam que, se alguém levasse a sério a matemática construtiva, seria necessário ‘abrir mão’ das partes mais importantes da matemática moderna (como, por exemplo, a teoria das medidas ou análise complexa). Bishop mostrou que isso era simplesmente falso (…) (Beeson, 1985, p. xv, *tradução nossa*)

Claro que ainda faltavam opções viáveis de implementação de uma matemática construtiva ou, ainda mais delicado, de fundamentação intuicionista. Essa viabilidade passava obrigatoriamente pela possibilidade de implementação computacional da matemática, o que significou mais algumas décadas de pesquisa até que uma proposta estável pudesse, de fato, ser considerada para a prática matemática. O passo seguinte foi justamente uma corrida no desenvolvimento de linguagens matemáticas com bases intuicionistas ou, simplesmente, construtivas, mas que fossem também linguagens computacionais ou facilmente traduzidas em uma linguagem computacional.

Ainda na década de 60, na Holanda, paralelamente às pesquisas de fundamentos da matemática, encontramos diversas tentativas de aplicar Teoria dos Tipos para o desenvolvimento de verificadores automáticos de prova[11]. Justamente, a possibilidade de utilizar máquinas para realizar cálculos e verificar provas permitiu uma série de tentativas de criar um sistema eficaz para tais tarefas. Tais verificadores automáticos de prova podem ser vistos como linguagens formais, entretanto, limitados se comparados com

---

[11] Ver Nederpelt e Geuvers (2014).

sistemas formais com pretensões de exprimir toda a matemática. O que vale ressaltar é que a utilização da Teoria dos Tipos, mesmo em uma lógica restrita para uso específico de verificadores de provas viria a ser de extrema importância para a viabilização de um sistema formal intuicionista a partir da ideia de “proposições como tipos”.

Dentre esses projetos de verificadores de provas, destaca-se o projeto de Nicolaas Govert de Bruijn, o Automath[12], uma linguagem matemática capaz de “expressar detalhadamente pensamentos matemáticos” em uma “tradução passo a passo da matemática ordinária” (de Bruijn, 1968, p. 1-2). Um dos principais objetivos desse tipo de sistema era possibilitar que o que antes entendia-se como linguagem e metalinguagem matemáticas fossem utilizadas em um mesmo e único contexto. No entanto, o Automath apresentava algumas limitações, como a necessidade de se reescrever ou redefinir todo o sistema em caso de qualquer alteração ou correção em conceitos primários, por exemplo. O sistema de de Bruijn não viria a ser largamente utilizado, mas suas ideias de “proposições como tipos” para lógica de predicados, a mesma descoberta por Haskell Curry e William Alvin Howard, serviram de grande inspiração para propostas mais bem sucedidas como a TIT de ML[13].

É importante deixar claro que a postura de Bishop em relação ao trabalho de Brouwer era de crítica, em especial à sua posição idealista em relação à natureza das provas matemáticas. Bishop acreditava que a proposta de Brouwer, o Intuicionismo, estava há muito morto, como, de fato, aparentava. Seu trabalho, como o próprio diz, é uma “propaganda construtivista, desenvolvida para mostrar que existe uma alternativa satisfatória” (Bishop, 1967, p. ix) para a proposta conjuntística. No entanto, foi exatamente o trabalho de Bishop o responsável para que novas tentativas de se desenvolver uma matemática intuicionista fossem iniciadas. Nesse sentido, a proposta de ML aparece como promissora candidata a cumprir esse papel de levar a cabo a fundamentação intuicionista, ao fornecer um sistema e uma linguagem capazes de reproduzir os resultados da análise construtiva desenvolvida por Bishop, porém, com a semântica dada pela fundamentação intuicionista e uma capacidade de expressão ainda maior que as propostas conjuntísticas.

[12] Ver de Bruijn (1968).
[13] Ver Dybjer e Palmgren (2015, p. 2).

1.3 Martin-Löf

> Parece que toda filosofia construtiva coerente (exceto a análise recursiva) concorda com esse ponto e aceita a ideia de prova construtiva como um conceito fundamental. (Beeson, 1982, p. 14, grifo nosso, tradução nossa)

Antes de ML chegar ao status de autor de uma fundamentação confiável como alternativa à fundamentação conjuntística, um longo caminho foi percorrido. Ao longo desse caminho, alguns personagens importantes, se não participaram decisivamente, certamente contribuíram para que ML amadurecesse suas convicções intuicionistas. Entre eles estão: Dag Prawitz, tanto pelo fato de ter sido responsável pela reabilitação do Sistema de Dedução Natural criado por Gentzen[14], quanto pela introdução da ideia de "regras de redução" e de "forma normal"[15], que desempenharão um papel crucial na Teoria dos Tipos de ML; Kolmogorov, orientador de ML com quem possivelmente teve contato com princípios intuicionistas como a interpretação de proposições como problemas, equivalente à interpretação de Brouwer de construções como provas[16]; Howard, com quem trabalhou brevemente, entre 1968 e 1969 em Chicago, e teve acesso às suas ideias de "proposições-como-tipos" aplicadas à lógica de predicados; indiretamente, podemos citar também o trabalho de Bishop em Análise Construtiva, já que ML admite que seu sistema pode ser visto como uma formalização da proposta de Bishop.

Prawitz traz sua contribuição pelo desenvolvimento das ideias de Gentzen e seu sistema de Dedução Natural, o que ML utiliza como base lógica da interpretação intuicionista em seu projeto de formalização de uma matemática construtiva. Segue-se a contribuição de Kolmogorov, quem possivelmente influenciou ML com as bases conceituais intuicionistas, além de Howard e toda uma escola de pesquisadores holandeses em verificadores automáticos de provas, de quem ML importou para seu

[14] PRAWITZ, Dag. *Natural Deduction – A Proof-Theoretical Study*. Stockholm: ALMQVIST & WIKSELL, 1965.

[15] A ideia de "regras de redução" implica uma uniformização e generalização da maneira de se utilizar regras de eliminação e introdução, de modo a, no sistema de Martin-Löf, evitar passos desnecessários em uma demonstração. Já a ideia de "forma normal" é reinterpretada no sistema de Martin-Löf como forma canônica. Assim, o sistema de Martin-Löf permite dizer que toda proposição verdadeira possui um objeto-prova em sua forma canônica a ser obtido por meio de regras de redução.

[16] A ideia intuicionista de "construções como provas", também foi interpretada como "proposições como tipos" (*propositions as types*) ou proposições como problemas. Essa interpretação é conhecida amplamente no meio intuicionista e construtivista como "Interpretação BHK" seguindo as iniciais de Brouwer, Heyting e Kolmogorov.

projeto a interpretação lógica de "proposições-como-tipos" que, combinada com a semântica da Dedução Natural de Prawitz, serviu de alicerce para sua TIT.

> Essa pré-história mais técnica da teoria construtiva dos tipos começa com Gentzen e Prawitz na dedução natural e normalização, prossegue ao isomorfismo de Curry e Howard, e combina esses dois métodos na normalização de Martin-Löf para a lógica proposicional infinitária. (Sommaruga, 2000, p. 318, *tradução nossa*)

A conexão, portanto, de ML ao intuicionismo não se dá diretamente por Brouwer, mas por uma série de ramificações de ideias intuicionistas e de projetos independentes compatíveis com a fundamentação intuicionista, às quais ML teve acesso. Certamente, ML teve acesso aos trabalhos de Brouwer, bem como de Heyting e Troelstra, mas a principal influência para que desse início a seu projeto de formalização de uma matemática intuicionista talvez tenha se dado a partir do contato com o trabalho construtivista de Bishop. Afinal, a grande dificuldade do lado intuicionista durante a década da crise de fundamentos da matemática era justamente a inexistência de uma alternativa viável para a prática da matemática intuicionista ou mesmo construtiva.

Enquanto a lógica intuicionista parecia funcionar perfeitamente com Dedução Natural, o "isomorfismo de Curry-Howard" e a interpretação da noção intuicionista de "construção" pareciam permitir uma linguagem de nível superior, onde objetos-prova deveriam ter seus respectivos tipos, i.e., as proposições intuicionistas. O passo final foi a não separação entre sintaxe e semântica, ou melhor, a junção de ambas na própria linguagem a partir da distinção entre a asserção (ou, nos termos de ML, 'juízo'[17]) e a proposição[18], deixando claro o papel de cada um na linguagem e permitindo que, tanto regras de inferência quanto juízos, sejam formalmente representados na própria linguagem. No caso do sistema de ML, as regras de inferência são representadas por sequências de juízos ou, simplesmente, derivações, enquanto objetos-prova são expedientes sintáticos de menção às derivações que representam aquelas inferências. Desse modo, temos uso e menção como expedientes admitidos e necessários à linguagem.

[17] O termo 'juízo' é sinônimo de asserção, afirmação ou mesmo enunciado ou proferimento. A interpretação particular desta noção intuicionista será devidamente tratada em seção específica do capítulo 3.

[18] Também o termo 'proposição' é interpretado de maneira particular por Martin-Löf e será tratada em uma seção específica do capítulo 3.

> Finalmente, na tradição metamatemática, os juízos e regras de inferência são apenas parcialmente formalmente representados na chamada linguagem objeto, ao passo que são implicitamente usados na chamada metalinguagem. Na teoria construtiva dos tipos, há apenas uma linguagem e os juízos e regras de inferência devem ser representados completa e formalmente nessa linguagem. (Sommaruga, 2000, p. 317, *tradução nossa*)

Podemos, inclusive, ver o trabalho de ML sob 4 aspectos principais em termos de impacto: 1. lógico; 2. matemático; 3. filosófico; 4. computacional. O impacto lógico se dá, pela sua visão, ao juntar em uma proposta as ideias de Prawitz de “regras de redução” e “formal normal” às de Howard sobre proposições como tipos e essas à interpretação BHK de proposições como problemas. A motivação de ML ao proceder essa aproximação de teorias era inicialmente centrada em Teoria da Prova para fins matemáticos, especificamente em Estatística. Posteriormente, essa decisão significou uma expansão da noção de “proposição intuicionista”, que passa a ser interpretada no sistema de ML como um “tipo” para os objetos do sistema, mas também como um “problema”, em seu sistema, a ser resolvido ou demonstrado (a partir das regras de redução). Isso deu ao seu sistema uma capacidade expressiva de uma lógica de primeira ordem, mas também de ordem superior.

O impacto matemático é mais que evidente, uma vez que a Análise Construtiva de Bishop, apesar de efetiva, não se tratava de um sistema formal completo em termos de fundamentação e capacidade expressiva, o que ML conseguiu realizar com sucesso. Por se tratar de uma proposta capaz de formalizar por completo a Análise de Bishop, o sistema de ML, assim como a Análise de Bishop, é amigável ao matemático clássico, o que permite um melhor entendimento das ideias e da fundamentação da proposta.

Filosoficamente, as noções fundamentais da teoria intuicionista pareciam ser profundamente claras, mas eram geralmente acompanhadas por uma dificuldade de implementação. As distinções entre “proposição” e “juízo”, “ato de julgar” e “aquilo que é julgado”, “ato de provar” e “objeto-prova”, foram relevantes, não por trazerem reinterpretações sobre as noções fundamentais intuicionistas, mas por mostrar como uma elucidação sobre aquelas noções permitia a implementação da teoria como um todo, algo que outros pesquisadores tentaram sem o mesmo sucesso. Algumas dessas tentativas foram lideradas por pesquisadores como de Bruijn, Feferman, Friedman, Myhill (Beeson, 1985, p. xvi), também Heyting e Kreisel (Sundholm, 1983, p. 151), com objetivos de desenvolver uma formalização de uma Teoria das Construções, dentre as quais destacamos a proposta de Kreisel, que veremos com algum detalhe no capítulo 3 antes de apresentarmos a proposta de ML.

Do ponto de vista computacional, o trabalho de ML parece ter tido até então um menor impacto, apesar de seu óbvio interesse em um período ainda anterior à publicação de sua TIT[19]. No entanto, a TIT, por se tratar de uma proposta de formalização que opera por meio do que podemos chamar de lógica de necessidade, é muito citada em trabalhos de áreas de computação, reconhecendo que as ideias apresentadas ali são computacionalmente relevantes e compatíveis com propostas computacionalmente efetivas de verificadores de provas e de extratores de programas a partir de provas construtivas. Esse último atributo, a possibilidade de se extrair programas diretamente a partir de uma especificação, é possível graças ao Isomorfismo de Curry-Howard que, em contexto computacional, reinterpreta proposições como especificações para programas. As provas seriam interpretadas como a garantia de que a especificação é correta e, a partir dela, o programa computacional deveria ser automaticamente extraído, traduzido em uma linguagem de computador.

Temos então, na proposta de ML, uma fundamentação intuicionista juntamente com uma linguagem que incorpora uma interpretação lógica de modo que semântica e sintaxe devem ser completamente representadas. Esse resultado é o que ML pretende ao se referir a “formalização da matemática”: seu sistema é formal no sentido que permite que a matemática não separar a interpretação da expressão sintática, evitando a necessidade de essa interpretação ser feita em uma outra linguagem. Assim, a semântica é explícita na linguagem e também os resultados da interpretação da prática matemática não só podem como são compulsoriamente utilizados na matemática a partir da própria linguagem. Como consequência, ML identifica as noções de “verdade” e “demonstrabilidade” (ou “provabilidade”) de proposições, de modo que uma proposição verdadeira, intuicionisticamente falando, significa que uma prova dessa proposição deve poder ser ou foi obtida.

Em pouco mais de 30 anos, a proposta de ML amadureceu e se tornou uma linguagem formal para uma matemática construtiva de fundamentação intuicionista que

[19] Aqui fazemos referência ao relatório técnico e a um artigo, publicados em 1979 e 1982, respectivamente, ambos como o mesmo nome de *Construtive mathematics and computer programming*.

a permite ser utilizada e reconhecida como alternativa para a fundamentação clássica. Após essa contextualização, podemos seguir ao nosso desafio de apresentar as noções fundamentais do Intuicionismo de Brouwer e, em seguida, mostrar como ML aprofundou a interpretação daquelas noções dando origem a um sistema complexo e a uma particular proposta de fundamentação intuicionista da matemática. Para tal, optamos por uma divisão em três etapas: 1. apresentação e explicação das noções fundamentais do intuicionismo tradicional de Brouwer; 2. apresentação em geral da proposta de Kreisel e do ponto fundamental para sua inviabilização; 3. apresentação e explicação dos conceitos fundamentais do sistema de ML, suas relações com as noções intuicionistas tradicionais e as consequências essenciais para o funcionamento do sistema.

CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTOS DO INTUICIONISMO TRADICIONAL DE BROUWER

Introdução

Após perfazer este breve percurso histórico, podemos destacar os seguintes pontos: 1. Brouwer deu a primeira versão de uma fundamentação intuicionista mais organizada ainda no início do século XX; 2. No entanto, somente após os esforços de Bishop (na metade do século XX) e ML (no fim do século XX) uma fundamentação Intuicionista da matemática passou a ser, de fato, considerada (já no século XXI) como uma alternativa viável à clássica/conjuntística, até então hegemônica; 3. Diferentemente da proposta de Brouwer, a TIT de ML se propõe uma fundamentação da matemática, mas também uma linguagem a partir da qual a matemática poderia ser praticada sem restrições, algo que não era possível a partir da proposta de Brouwer ou mesmo de Bishop.

Neste capítulo pretendemos apresentar a nossa interpretação sobre a proposta intuicionista tradicional de Brouwer e Heyting, em especial sobre as suas noções fundamentais do e suas principais consequências. A primeira e mais importante delas se trata da noção de “construção mental”, da qual as demais noções e interpretações derivam. Questões como a ontologia dos objetos matemáticos, o caráter antiformalista da proposta, e demais interpretações e noções típicas da proposta de Brouwer, como as sequências de escolha, trazem a necessidade de alguma problematização a fim de compreendermos melhor a sua motivação diante do contexto em que o autor se encontrava no início do século XX.

Podemos dizer que as implicações da disputa de fundamentos da matemática foram e são conceitualmente profundas a ponto de grandes e influentes matemáticos e filósofos se debruçarem sobre as propostas a fim de dar um direcionamento aos problemas. A dissertação de Brouwer, em sua fundamentação intuicionista, tem como marca seu antiformalismo, presente em seu 1º Ato do Intuicionismo, mas também seu idealismo, com a interpretação de provas como construções mentais, presente em seu 2º Ato do Intuicionismo e que perdura até a atualidade entre intuicionistas contemporâneos. No entanto, é de se ressaltar que a noção de “sequências de escolha” que Brouwer usa para apresentar a ideia de construções mentais como objetos matemáticos não parece ter tido o efeito desejado, suscitando discussões e tentativas de esclarecimento das intenções de Brouwer quando do uso desse exemplo específico para apresentar a tese central de seu idealismo. Diversas foram as tentativas de esclarecer a tese central por detrás do exemplo usado por Brouwer por alguns de seus seguidores, como Heyting (1960, p. 180-181), Troelstra (1977, p. 11-12), van Atten (2007, p. 99), van Dalen (2013, p. 238-239), e Michael Dummett (2000, p. 45), que era um grande entusiasta da ideia de “objetos saltando em existência”. Entre intuicionistas, digamos, posteriores como Prawitz e ML, a ideia essencial de construções como provas recebeu o papel que lhe parece devido, deixando a discussão sobre sequências de escolha de lado. Foi também essa a opção de Bishop que, como vimos, evitou lidar com as questões ontológicas que a Teoria dos Conjuntos mostrava não ser capaz de lidar adequadamente. No entanto, por mais convincente ou intuitiva que fosse a proposta, nem o próprio Brouwer conseguiu evitar ou responder satisfatoriamente algumas questões no mínimo polêmicas para a visão hegemônica da época.

Trazendo para os dias atuais, podemos dizer que, do ponto de vista filosófico, temos duas importantes propostas de fundamentação da matemática, a já bastante difundida Teoria dos Conjuntos e a versão intuicionista mais contemporânea e, por isso, menos difundida, TIT. E ao longo de todo o período de disputa, pode-se dizer que, à exceção do trabalho de Bishop, a discussão acerca da noção de “existência” sempre ocupou um papel central[20]. A nosso ver, inclusive, essa é a principal distinção entre a fundamentação clássica e a intuicionista, a raiz de todos os problemas. Essa distinção quanto à interpretação da noção de “existência” está diretamente conectada à forma como é concebida a lógica subjacente a cada teoria, ou ao menos é o que alegam alguns autores como Hesseling (2003, p. 187) e de Bruijn (1995, p. 46). Por certo que, em Teoria dos Conjuntos, a noção de “existência” é conectada à ideia de uma realidade abstrata, de modo que a existência dos objetos estaria garantida independentemente de qualquer instância epistemológica. O resultado é uma lógica que admite algumas asserções, no mínimo, desafiadoras à compreensão, mas que são explicadas e, por que não dizer, respaldadas pela lógica subjacente à teoria.

Já no intuicionismo, a noção de “existência” é conectada a uma noção de “atualidade da posse” de um objeto[21] ou de um método que permita, mesmo que em

[20] The basic difference between intuitionism and formalism is, in Brouwer’s view, a matter of ontology. (Hesseling, 2003, p. 76)

[21] Aqui tomamos a liberdade de usar a ideia de “posse de um objeto ou método” na mesma maneira como usa Martin-Löf.

princípio, a obtenção do objeto. A lógica intuicionista, por sua vez, é considerada parte da linguagem e, portanto, dependente da fundamentação da matemática, não sendo possível extrair ou explicar a teoria a partir da lógica, tanto quanto não se deve esperar ser possível explicar ou extrair uma teoria a partir de qualquer linguagem que se proponha a exprimir essa teoria. Por exemplo, a partir da dedução natural de Prawitz e Gentzen, não se extrai a interpretação fundamental intuicionista de construções como provas, mas sim o contrário.

> O intuicionismo, em vez de começar com a lógica, considera a lógica como sendo simplesmente uma parte da linguagem matemática, dependente da própria matemática. (Hesseling, 2003, p. 187, *tradução nossa*)
>
> (...) não há verdades não-experimentadas e que lógica não é um instrumento absolutamente confiável para descobrir verdades (...). Matemática tratada rigorosamente deste ponto de vista, e deduzindo teoremas exclusivamente a partir de construção introspectiva, é chamada de matemática intuicionista. Em muitos aspectos se afasta da matemática clássica. Em primeiro lugar porque **a matemática clássica usa lógica para gerar teoremas, acredita na existência de verdades desconhecidas, e, em particular, aplica o princípio do terceiro excluído para expressar que toda asserção matemática (i.e., toda atribuição de uma propriedade matemática a uma entidade) ou é verdadeira ou não pode ser verdadeira.** (Brouwer, 1948, p. 1243, em Brouwer, 1975, p. 488, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

A partir dessa apresentação preliminar da interpretação intuicionista de *existência*, podemos prosseguir aos conceitos que consideramos fundamentais de modo a evitar ambiguidades e facilitar a compreensão desses conceitos que se mantém de certa forma estáveis no intuicionismo de Brouwer e ML. Devemos ainda lembrar e reforçar que a interpretação intuicionista dos conectivos e quantificadores lógicos foi estabelecido por Brouwer[22]. Assim, temos Brouwer como ponto partida e ML como ponto de chegada para este trabalho.

Também não é surpresa verificar que alguns termos utilizados por intuicionistas desde Brouwer até ML são normalmente utilizados em outros contextos. Casos como os de ‘prova’, ‘verdade’, ‘proposição’, ou mesmo ‘asserção’ ou ‘juízo’ como usado preferencialmente por ML. Esses são os conceitos fundamentais cujos significados foram

[22] The constructive interpretations of the mathematical connectives and quantifiers have been established by Brouwer. (Bishop, 1967, p. 7, *grifo nosso*)

reinterpretados por Brouwer, sendo de grande ajuda uma explicação mais pormenorizada para a correta compreensão deles.

> Assim, as explicações teóricas semânticas ou de significado que têm que ser fornecidas no caso da linguagem da lógica predicativa são aquelas das noções **de proposições, de verdade, de juízo, de prova** e eventualmente algo tem que ser dito sobre a validade de provas também. (Martin-Löf, 1987, p. 409-410, *grifo nosso, tradução nossa*)

> No caso das noções matemáticas de função e conjunto, não se trata tanto de uma questão de lhes proporcionar novos significados, como de restaurar os antigos, enquanto que **as noções lógicas de proposição, prova, verdade etc. recebem genuinamente novas interpretações. Foi Brouwer quem percebeu a necessidade de fazê-lo**: a verdadeira fonte das funções não computáveis da matemática clássica não é o axioma da escolha (que é válido intuicionisticamente), mas a lei do terceiro excluído e a lei da prova indireta. (Martin-Löf, 1982, p. 156, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

Em relação à estrutura do capítulo, optamos por iniciar com a apresentação dos 1º e 2º atos do intuicionismo de Brouwer, com a nossa interpretação sobre a tese central de ambos. Nas subseções seguintes, procedemos com as noções mais importantes, "construção", "proposição" e "asserção", passando à interpretação dos conectivos lógicos e finalizando com um esclarecimento sobre os argumentos intuicionistas que levam à rejeição do princípio do terceiro excluído. Ao longo do texto, as referências aos 1º e 2º atos serão feitas à medida que forem necessárias. Essa opção tem por objetivo enfatizar a interpretação e consequências dos atos e não reduzir seus efeitos a uma mera posição antiformalista e idealista da proposta de Brouwer. Esperamos, por fim, conseguir evidenciar que a noção fundamental para o intuicionismo de Brouwer é mesmo a de "construção mental" ou "prova".

Por fim, devemos alertar que não faremos neste capítulo grandes considerações acerca das eventuais divergências entre as interpretações de Brouwer e ML, uma vez que a intenção aqui é essencialmente apresentar de forma clara as noções fundamentais da teoria proposta por Brouwer, de modo que as interpretações e análises da proposta de ML serão abordadas no capítulo seguinte.

2.1. 1º e 2º atos do intuicionismo como introdução da noção de "construção"

Neste trabalho, apresentamos as ideias intuicionistas a partir de uma noção fundamental primitiva, a "construção mental". Diferentemente do que sugerimos para este texto, Brouwer opta por apresentar o intuicionismo a partir do que ele chama de '1º e 2º atos do intuicionismo'. No entanto, entendemos que, em ambos os atos, um elemento central pode ser facilmente apontado como essencial para as explicações apresentadas: a noção de "construção mental". No 1º ato, Brouwer enfatiza o caráter essencialmente não-formalista do intuicionismo, talvez por uma questão que lhe tocava pessoalmente, o formalismo clássico, liderado especialmente por Hilbert e seu programa formalista. O que não se pode pôr em dúvida é o argumento que sustenta o caráter essencialmente não-formalista do intuicionismo de Brouwer, e esse argumento recai sobre a natureza ontológica dos objetos matemáticos para o intuicionismo. Como devemos repetir ainda algumas vezes neste texto, intuicionisticamente, os objetos matemáticos são interpretados como processos mentais chamados de 'construções' e identificados, do ponto de vista matemático, como provas, os objetos matemáticos. Ao tratar os objetos matemáticos como processos mentais, frutos da intuição de um indivíduo criador, o intuicionismo apresenta seu argumento definitivo para refutar qualquer tentativa de identificar provas matemáticas a expressões sintáticas de uma linguagem formal. Vejamos o 1º Ato do Intuicionismo nas íntegra.

> Nessa situação, o intuicionismo interveio com dois atos, dos quais o primeiro parece necessariamente levar a consequências destrutivas e esterilizantes; entretanto, o segundo gera amplas possibilidades de recuperação e novos desenvolvimentos. Para começar, o
>
> PRIMEIRO ATO DO INTUICIONISMO
>
> *separa completamente a matemática da linguagem matemática, em particular dos fenômenos da linguagem que são descritos pela lógica teórica, e reconhece que* ***a matemática intuicionista é uma atividade da mente essencialmente sem linguagem*** [independente da linguagem], *tendo sua origem na percepção de um movimento do tempo, i.e., do desmoronar de um momento da vida em duas coisas distintas, uma das quais dá lugar à outra, mas é retida pela memória. Se a duidade* ["two-ity"] *assim nascida é despojada de toda a qualidade, resta a forma vazia do substrato comum de todas duidades. É esse substrato comum, essa forma vazia, que é a intuição básica da matemática.*
>
> O quanto da matemática 'separável' pode ser reconstruída de uma forma ligeiramente modificada, através do autodesenvolvimento ilimitado da intuição básica, é realizada introspectivamente.

> No edifício do pensamento matemático assim erigido, **a linguagem não desempenha outra parte senão a técnica eficiente, mas nunca infalível ou exata, para memorizar construções matemáticas e sugeri-las a outras pessoas**; de modo que a linguagem matemática por si só nunca pode criar novos sistemas matemáticos. (Brouwer, 1952 B, p. 8-9, em Brouwer, 1975, p. 509-510, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

Dessa maneira, entendemos que o que Brouwer apresenta no 1º ato do intuicionismo se trata, portanto, de uma consequência inevitável da interpretação intuicionista de *construções* como provas matemáticas e não o contrário. Da mesma maneira, entendemos o 2º ato: a ideia de *sequências de escolha* apresentada por Brouwer tem por objetivo recuperar partes da matemática que o próprio Brouwer admitia serem perdidas a partir da rejeição da proposta formalista clássica e, até mesmo, do princípio do terceiro excluído.

> Nós vimos anteriormente como o primeiro ato do intuicionismo afetou a matemática clássica de duas maneiras: **em primeiro lugar, devido ao desaparecimento da base lógica do continuum**, uma parte tão grande se torna ilusória que essencialmente apenas as partes separáveis da álgebra e a teoria dos números permanece; **em segundo lugar, mesmo nesta parte restante, vários capítulos baseados no princípio do terço excluído devem ser rejeitados**. Nessas circunstâncias, pode-se temer que a matemática intuicionista deva ser necessariamente pobre e anêmica, e em particular não teria lugar para análise. Mas esse medo teria pressuposto que sequências infinitas geradas pelo auto desdobramento intuicionista da intuição básica teriam que ser sequências fundamentais, i.e., sequências infinitas predeterminadas que, como as clássicas, procedem de tal maneira que, desde o início, o *m*-ésimo termo é fixado para cada *m*. Esse, porém, não é o caso; pelo contrário, um campo de desenvolvimento muito mais amplo, que inclui análise, e em vários lugares excede em muito as fronteiras da matemática clássica, é aberto pelo
>
> SEGUNDO ATO DO INTUICIONISMO
>
> *que* ***reconhece a possibilidade de gerar novas entidades matemáticas****:* (Brouwer, 1952 B, p. 9-10, 1975, p. 511, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

Brouwer destaca a possibilidade de os termos da sequência serem escolhidos seguindo uma restrição (regra, lei, exprimível sintaticamente) ou abolindo qualquer restrição, dependendo apenas de “possíveis experiências matemáticas (e aqui lê-se experiências intuitivas) futuras do sujeito criador”.

> *primeiro, na forma de* ***sequências de processo infinito*** *$p_1, p_2, \ldots,$* ***cujos termos são escolhidos mais ou menos livremente de entidades matemáticas previamente adquiridas; de tal maneira que a liberdade de escolha que existe talvez para o primeiro elemento p_1 possa estar sujeita a uma restrição duradoura em alguns p_v seguintes****, e repetidas vezes a restrições duradouras mais nítidas* ***ou mesmo à abolição em outros p_v's subsequentes,**** * enquanto todas essas intervenções restritivas, bem como as escolhas dos próprios p_v's, em qualquer estágio pode ser feito* ***para depender de possíveis experiências matemáticas futuras do sujeito criador****;* (Brouwer, 1952 B, p. 9-10, 1975, p. 511, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

A "capacidade de gerar novas entidades matemáticas", mencionada por Brouwer no 2º ato, traz consigo duas conclusões imediatas principais: 1. reafirma a ontologia das provas matemáticas como sendo entidades mentais; 2. explicita o caráter de conjectura da proposição intuicionista. Primeiro, Brouwer explica o que seriam as suas sequências de escolha, como sendo o exemplo mais simples de construção mental, podendo ou não coincidir com uma construção traduzível em uma linguagem formal. Em seguida, apresenta o conceito de *espécie matemática*, que, a depender do uso de Brouwer, pode ser entendido como o que entendemos atualmente como a *proposição* intuicionista ou como uma *categoria* matemática (como explicada por ML[23]).

Talvez, a dificuldade de compreensão do que Brouwer pretendia esteja relacionado a algo mais simples do que a sua explicação, uma opção terminológica, como alega Troelstra (1977, p. 11-12). O ponto central da ideia, o que realmente importa e resta da apresentação das *sequências de escolha* feita por Brouwer, não é nada mais do que a ideia de que *construções mentais* são os únicos objetos matemáticos, e que esses não guardam qualquer relação de dependência ou identidade com qualquer expediente linguístico. O que se deve decidir é o que fazer com a ideia de *sequências de escolha*. Certamente, essa noção tem pouca ou nenhuma utilidade para a prática da matemática, o que não significa que a noção seja absurda ou incorreta do ponto de vista intuicionista. Mesmo Troelstra (1977), que dedicou parte de seu trabalho às sequências de escolha e suas possíveis contribuições para a matemática, esclarece que o uso de um termo mal escolhido pode ter trazido dificuldades para a compreensão do que é realmente essencial.

[23] Ver Martin-Löf (1984, p. 21)

> A admissão de sequências sem lei como objetos matemáticos implica a negação da tese de que todas as entidades matemáticas deveriam ser dadas a nós via representação linguística. (TROELSTRA, 1977, p. 11)

> Sequências sem lei oferecem o mais simples exemplo de um conceito de sequências onde as sequências não são pensadas como sendo completamente determinada antecipadamente por uma lei. (TROELSTRA, 1977, p. 11-12)

> Até o momento, evitamos a terminologia da 'escolha' e 'escolher', que é habitual na literatura intuicionista tradicional. Essa terminologia muitas vezes suscitou objeções do tipo: 'falar sobre escolhas (livres) está introduzindo um elemento de arbitrariedade (subjetividade) na matemática, onde ela não pertence'. Mas o que é relevante do ponto de vista matemático não é nenhuma sequência de escolha individual como tal, mas o fato "matemático" de que existem muitas operações em sequências perfeitamente definidas (semelhantes a leis) que podem ser realizadas sem assumir que os argumentos sejam determinados por lei. (TROELSTRA, 1977, p. 12, tradução nossa)

Ocorre que, do ponto de vista da prática matemática, sequências obtidas sem a possibilidade de uma tradução linguística de um conjunto de regras formais, como um método de obtenção com passos finitos, não parecem servir de grande utilidade. Isso se explica pelo fato de teoremas e provas matemáticas serem obtidos por meio de derivações de teoremas e provas anteriormente obtidos. Assim, do ponto de vista da prática da matemática, as sequências de interesse recaem sobre aquelas que podem ser efetivamente representadas sintaticamente e é o que faz ML em sua Teoria Intuicionista dos Tipos, ao considerar apenas aquilo que pode ser formalizado da teoria intuicionista de Brouwer.

No entanto, as sequências de escolha de Brouwer tem um papel importante para o intuicionismo. Em outro momento, Brouwer (1954) apresenta a maneira como é introduzido o continuum linear a partir das ideias intuicionistas contidas no 1º e 2º atos, de modo que ele é obtido a partir da construção de sequências convergentes, sendo elas pré-determinadas ou não. Em outras palavras, podemos dizer que os Reais compreendem métodos de obtenção exprimíveis sintaticamente em funções, por exemplo, mas também outras sequências convergentes cuja função não é expressa sintaticamente, seja porque não foi ainda ou porque não pode ser. Nas palavras de Brouwer, sequências que não seguem um método de obtenção pré-determinado podem ser coincidentes com um método de obtenção pré-determinado, como são os diferentes métodos de obtenção do pi, por exemplo.

> A refutação do princípio do terceiro excluído. O primeiro ato de intuicionismo nos permite construir a rede racional linear. Com base nisso, em virtude do segundo ato de intuicionismo, introduzimos o continuum linear da seguinte maneira: Por um *número limite*, entendemos uma sequência convergente (não necessariamente predeterminada) de números racionais. Então, considerando como autoexplicativo o significado de uma *coincidência* de dois números limite, nós chamamos a espécie dos números limites coincidentes com um número limite determinado, um *núcleo do número limite*. Um número limite predeterminado também é chamado de *número limite agudo*, e um núcleo de número limite contendo um número limite agudo é chamado de *núcleo do número limite agudo*. A espécie dos núcleos de número limite é chamada *continuum linear* ou *continuum*. (Brouwer, 1954 A, p. 5, em Brouwer, 1975, p. 524-525, *tradução nossa*)

Por fim, Brouwer apresenta ainda uma consequência de grande importância para a bem sucedida proposta de fundamentação de ML: a noção de “espécie” matemática, que pode ser entendida como a noção de “proposição” intuicionista ou mesmo a noção de “tipo”. É certo que a noção de “proposição” ainda não representava um papel central na proposta intuicionista de Brouwer, que tinha uma agenda a cumprir à altura da publicação de seus primeiros trabalhos sobre o intuicionismo, evidenciados pela ênfase no antiformalismo e idealismo matemático. Com isso, mesmo a rejeição do princípio do terceiro excluído, além de outras noções que se mostraram de extrema importância para a prática da matemática intuicionista, foram um pouco deixados de lado em um primeiro momento. De qualquer maneira, fica o registro da ciência, por parte de Brouwer, do papel do que ele chamou de ‘espécies matemáticas’ enquanto propriedades válidas para as construções que atenderem a suas condições, ideia que o próprio Brouwer desenvolverá ao chamar de condições a serem cumpridas pela prova.

> *em segundo lugar, sob a forma de* ***espécies matemáticas****, i.e.,* ***propriedades presumíveis para entidades matemáticas adquiridas anteriormente e satisfazendo a condição de que, se elas se mantêm para uma certa entidade matemática, elas também se aplicam a todas as entidades matemáticas que foram definidas para serem iguais a ela****, as relações de igualdade devendo ser simétricas, reflexivas e transitivas;* ***entidades matemáticas previamente adquiridas para as quais a propriedade é válida, são chamadas de elementos da espécie****.* (Brouwer, 1952 B, p. 9-10, 1975, p. 511, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

Se a estratégia de Brouwer era mostrar que o continuum matemático, essencialmente denso, seria explicado ou justificado pela ideia de construções matemáticas como sequências de escolha, mais uma vez, a natureza da noção de “construção” é utilizada como o argumento para a tese de que os objetos matemáticos que formam o continuum matemático (o que entendemos como números Reais) compreendem sequências de escolha regidas ou não por leis, i.e., exprimíveis ou não sintaticamente, mas que certamente são originadas por processos mentais. A polêmica, assim, se resolve restringindo a discussão acerca do que é realmente essencial nos dois atos do intuicionismo de Brouwer: a noção fundamental de "construção mental".

Nota-se que o termo 'construção' é amplamente utilizado por autoproclamados construtivistas e intuicionistas e entendemos haver um consenso quanto a sua interpretação, i.e., ambos se referem à noção de "construção" explicada por Brouwer e Heyting. A interpretação de construção como atividade mental não parece ser disputada, tornando-se bastante iluminadora a ideia de uma atividade mental como forma de evidência convincente[24] a partir da qual é possível produzir um *juízo* que nada mais é que uma alegação de algo necessário[25]. Essa interpretação faz da atividade mental a essência da matemática (e de sua prática), sendo utilizada por intuicionistas desde Brouwer, Heyting, Dummett, e mais recentemente, ML e Prawitz[26].

Em resumo, apresentamos nas sessões seguintes as explicações que nos permitem dizer que, segundo a fundamentação intuicionista, construção:

i. é uma atividade mental, independente da atividade linguística e fonte única de necessidade;
ii. é sinônimo de prova[27];
iii. introduz a noção fundamental de *existência* intuicionista.

---

[24] A ideia de convencimento é utilizada por Martin-Löf (1984), especificamente de autoconvencimento, e fazendo a observação de que não há melhor maneira de se convencer alguém, como a si próprio, do que por meio de uma evidência ou prova, tratados como sinônimos por Martin-Löf (1987, p. 417), sendo também utilizada por Beeson (1985, p. xv) para dizer que as provas construtivas são convincentes.
[25] A noção de *juízo* será tratada mais adiante, podendo neste momento ressaltar que, para Martin-Löf, "juízo" é sinônimo de asserção, afirmação, alegação, proferimento, mas não de proposição, que em seu sistema possui uma interpretação absolutamente distinta.
[26] Mais adiante veremos detalhadamente como Martin-Löf utiliza os termos 'construção', 'objeto', entre outros. Neste momento podemos fazer a observação de que o termo 'construção' é utilizado por Martin-Löf em seus textos com alguma oscilação de significado. Por exemplo, em Martin-Löf (1984, p. 6), o termo 'construção' é utilizado como sinônimo de 'prova de proposição', uma expressão própria do sistema de Martin-Löf, identificada com a expressão 'objeto-prova'. Por se tratar de um termo próprio do sistema, o 'objeto-prova' designa uma sequência de sinais à esquerda de "∈" em um juízo, uma asserção, no sistema. Esta é uma oscilação do significado dos termos 'construção' e da própria noção de "objeto", que para Brouwer é uma entidade mental.
[27] Também veremos adiante que Martin-Löf procede uma caracterização da noção de "prova" de modo a distinguir 'prova de proposição' e 'prova de juízo', sendo a segunda sinônima de 'demonstração' (como ordinariamente se usa na matemática) ou 'derivação' (seguindo a terminologia utilizada por Heyting). Para este momento, é suficiente dizer que o termo 'prova' que é sinônimo de 'construção' refere-se à 'prova de proposição' no sistema de Martin-Löf.

2.2. Construção, prova e existência

2.2.1. Atividade mental, independente da atividade linguística, fonte única de necessidade

Grande parte da explicação acerca da natureza da noção de "construção" é extraída dos 1º e 2º atos do intuicionismo. No entanto, acreditamos que a sua relação com a atividade linguística deva ser discutida um pouco além, de modo que fique claro o papel de cada uma para o intuicionismo. Para isso, nada melhor do que recorrer a trabalhos posteriores de Brouwer e Heyting. Heyting utiliza a expressão 'construção matemática mental' para designar o que entendemos ser a noção de "construção". Assim, o termo 'construção' pode ser melhor compreendido como sendo uma versão abreviada da expressão 'construção matemática mental' utilizada por Heyting como vemos nas citações abaixo.

> (…) foi Brouwer quem primeiro descobriu **um objeto** que realmente requer uma forma diferente de lógica, a saber, a **construção matemática mental**. (Heyting, 1956, p. 1, *grifo nosso, tradução nossa*)

> Consistia na investigação da **construção matemática mental** como tal, sem referência a questões relativas à natureza dos **objetos construídos**, tais como se esses objetos existem independentemente de nosso conhecimento deles. (Heyting, 1956, p. 1, *grifo nosso, tradução nossa*)

Por se tratar de uma atividade mental, não se deve confundir construção com qualquer tipo de correspondente físico (como símbolos, sons, sinais). Brouwer deixa claro o papel da construção ao explicitar, à sua maneira, que o objeto matemático[28] "é a construção", restando um papel diferente para sinais e sons que não o de objeto propriamente dito.

> O principal ponto de vista [de Brouwer] é que a matemática como **uma construção mental não deve ser confundida com sua expressão linguística**. (Brouwer, 1975, Ed. Heyting, p. XIV, *grifo nosso, tradução nossa*)

As expressões linguísticas teriam, assim, um papel específico para Brouwer. Elas seriam um meio para "originar cópias de construções matemáticas", de modo que outras

[28] Mais adiante, veremos com mais detalhes como Martin-Löf utiliza o termo 'objeto' em seu sistema, mas podemos já adiantar neste ponto que Martin-Löf utiliza o termo 'objeto' para designar uma entidade física, uma expressão no sistema de Martin-Löf. É importante ter em mente que o termo 'objeto' deve sempre ter seu significado ancorado na teoria subjacente. No caso de Martin-Löf os objetos do sistema tratam-se de expressões admitidas no sistema, portanto, sinais. Como exemplo, o 'objeto-prova' é descrito por Martin-Löf (1984, p. 6) como sendo a expressão encontrada "ao lado esquerdo de ∈" em um juízo.

pessoas que tenham acesso a essas expressões possam, elas próprias, reproduzir a construção relativa àquelas expressões. Inclusive, um sujeito que executa o ato mental, a construção, e produz uma expressão linguística relativa a ela, pode a usar para, posteriormente, relembrar e executar novamente a construção, de modo que temos duas instâncias aqui, a expressão linguística enquanto entidade física (como uma demonstração matemática escrita no papel) e a construção matemática enquanto entidade mental subjetiva.

> As palavras de sua demonstração matemática meramente acompanham uma **construção matemática que é realizada sem palavras**. (…)
>
> (…) As pessoas tentam, por meio de sons e símbolos, originar em outras pessoas **cópias de construções matemáticas** e raciocínios **que elas mesmas criaram**; **da mesma forma que elas tentam ajudar a própria memória**. Dessa maneira, a *linguagem matemática* surge, e como seu caso especial, a *linguagem do raciocínio lógico*. (Brouwer, Ed. Heyting, 1975, p. 73, *grifo nosso, tradução nossa*)
>
> A linguagem da matemática é uma **tentativa (necessariamente quase sempre inadequada) de descrever essas construções mentais**. Falar sobre a matemática intuicionista é então uma questão de **sugerir construções mentais análogas a outras pessoas**. Similaridades entre os processos de pensamento de vários indivíduos humanos faz com que tal comunicação seja possível. (Troelstra, 1969, p. 4, *grifo nosso, tradução nossa*)

A construção é, portanto, um ato, um processo no tempo, e tem a si atribuído um caráter temporal, atual, podendo naturalmente ser executado novamente ou quantas vezes se queira. Por se tratar de um ato empírico, não se pode fazer a errônea conexão entre o ato de provar e aquilo que ele prova, como veremos adiante[29]. No entanto, a asserção, o enunciado produzido a partir do ato da prova, essa sim é uma entidade física e que depende da execução do ato (se considerarmos a honestidade do indivíduo que produziu a asserção), i.e., construções são necessárias sempre que um sujeito produzir uma asserção em um contexto de necessidade. Em outras palavras, podemos dizer que construções e asserções têm uma relação de coincidência, i.e., não faz sentido falar em construção fora do contexto de uma asserção ou asserção sem uma correspondente construção.

Isso mostra o caráter fundamental e primitivo da construção e sua função no contexto da matemática: dar o direito ao sujeito cognoscente de produzir um enunciado,

[29] A relação de ordem entre construção e proposição não será explicada neste momento, mas cabe dizer que, intuicionisticamente, a proposição não depende da execução de um ato construtivo.

proferimento ou asserção. Como consequência, a própria lógica e sua interpretação são tributárias da noção de "construção", i.e., as construções, e somente as construções, permitem a produção de asserções, que deverão ser sempre necessárias, em uma determinada linguagem, incluindo a linguagem lógica. Deste modo, as construções, e somente as construções, constituem o que chamamos aqui de fonte única de necessidade.

2.2.2. Sinônimo de prova

O primeiro passo para a elucidação da noção de "construção" foi dado ao apresentar seu caráter ontológico enquanto entidade mental. O passo seguinte para a melhor compreensão da noção de "construção" carece da explicitação da sua função ou característica particular. Heyting a faz ao dizer que a construção "prova" algo, ao passo que substitui o termo 'construção' por 'prova', o que nos parece ser adequado pois irá enfatizar o papel que desempenha a noção de "construção" na teoria de ML.

> (…) nós lembramos que a proposição matemática *p* sempre exige uma construção matemática com certas propriedades dadas; ela pode ser asserida assim que tal construção tenha sido realizada. **Dizemos, nesse caso, que a construção *prova* a proposição *p* e a chamamos de *prova* de *p***. (Heyting, 1956, p. 102, *grifo nosso, tradução nossa*)

ML é ainda mais enfático ao apresentar seu entendimento dizendo que provas são atos mentais e que os termos 'construção' e 'prova' são, de fato, sinônimos.[30]

> Assim uma prova é, não um objeto, mas apenas um ato. Isso é o que Brouwer queria enfatizar dizendo que uma prova é uma construção mental, porque aquilo que é mental, ou psíquico, é precisamente nossos atos, e **a palavra construção**, como usada por Brouwer, **é apenas um sinônimo para prova**. (Martin-Löf, 1996, p. 18, *grifo nosso, tradução nossa*)

Neste momento, podemos fazer uma observação acerca do tratamento mais cuidadoso de ML sobre a noção de "prova". Por se tratar de um sistema formal, ML entende que, nesse contexto formal, o que designamos por 'prova' ou 'construção' pode ser entendido como um ato ou processo, conforme a ideia de Brouwer, mas que esse processo não se pode confundir com a construção enquanto resultado desse ato, que, por sua vez, não deve ser confundido com a asserção produzida a partir desse produto do ato

[30] Devemos lembrar que, aqui, citamos Martin-Löf em um tratamento do termo 'prova' conforme admitido por Brouwer e não propriamente conforme Martin-Löf utiliza em seu sistema em suas variações de prova de proposição ou objeto-prova e prova de juízo ou demonstração.

ou mesmo com as expressões que servem como demonstração em um sistema formal. Desta análise inicial, ML propõe três entidades relacionadas à noção intuicionista de "prova": o ato de provar, o produto desse ato e o que ele próprio chama de 'rastro de prova'. Mais adiante, devemos explicar com mais detalhes essas entidades e apresentar a noção de "objeto" no sistema de ML e sua relação com a noção de "prova" intuicionista.

2.2.3. Introdução à noção fundamental de "existência".

O tratamento da noção de "construção" apresentado até o momento e sua relação com a noção de "asserção" resulta em uma interpretação própria da noção de "existência" no contexto intuicionista.[31] Na proposta de Brouwer, a construção matemática é tratada como 'objeto matemático' que, apesar de podermos questionar o exato sentido dessa noção, não é o propósito discuti-lo neste momento[32]. O que resta é apontar para a noção de "construção" como sendo a mais adequada e próxima a o que o clássico interpreta como "existência objetual". Segundo essa interpretação, a noção de "existência" clássica tem sua equivalente intuicionista na noção de "construção", i.e., pode-se falar de um objeto matemático, num contexto intuicionista, se e somente se ele foi, ou pode ser (mesmo que em princípio), construído (mentalmente), de modo que passa a ser redundante dizer de uma construção que ela existe ou mesmo que seria absurdo um objeto matemático existir sem ter sido devidamente construído. Nas palavras de Heyting,

> No estudo de construções matemáticas mentais **"existir" deve ser sinônimo de "ser construído"**. (Heyting, 1956, p. 2, *grifo nosso, tradução nossa*)
>
> Está bem claro que a noção de existência que entra aqui não é a noção de existência que é expressa por meio do quantificador existencial: a noção de existência que entra aqui é a noção filosófica tradicional de existência de um conceito, ou existência de uma essência, se preferir, onde **ao dizer que um conceito tem existência, eu quero dizer que existe um objeto que se enquadra no conceito**. Assim, dizer que uma proposição é verdadeira é o mesmo que dizer que o conceito prova da

---

[31] Devemos fazer a observação de que a noção de *existência* que tratamos aqui é uma noção fundamental e que não se confunde com a *existência* do quantificador existencial ou com as distinções acerca da noção de *existência* feitas por Martin-Löf em seu sistema. Por exemplo, para Martin-Löf, a *existência* de objetos em seu sistema é condicionada à posse de um método de obtenção. Apesar de ter uma correspondência com a noção de *existência* apresentada por Brouwer, é uma caracterização particular do sistema de Martin-Löf. Esse assunto será tratado com mais detalhe no Capítulo 3.

[32] No entanto, é importante ter atenção que, invariavelmente, um "objeto matemático" é, intuicionisticamente, uma entidade mental.

> proposição existe no sentido filosófico tradicional. (Martin-Löf, 1990, p. 141, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

Temos que fazer aqui a importante observação de que o uso de termos como ‘prova’ ou ‘existência’ pode ser observado em casos com a qual a presente explicação parece não estar totalmente de acordo como, por exemplo, o uso de Brouwer de expressões como ‘prova de teorema’ ou ‘prova de existência’. Dizer que ‘prova’ e ‘existência’ são sinônimas significa dizer que seria redundante dizer que ‘algo’ é uma ‘prova de existência’ de outra ‘coisa’, ou mesmo pedir a ‘prova de existência da própria prova’, isto é, se ‘algo’ é uma ‘prova’, ou se ‘algo’ prova qualquer coisa, certamente a existência (intuicionista) daquele objeto, a prova, está automaticamente garantida. Do contrário, poder-se-ia perguntar: o que mais seria existente além daquilo que foi construído? No mesmo sentido, poder-se-ia perguntar, sobre a prova de teorema, se o que é provado é a existência do teorema, i.e., ao se construir tal prova, o que é provado é a existência dos sinais impressos no papel? Não parece ser o caso. A resposta para ambas as perguntas indica que, o que quer que seja e que gostaríamos de entender a partir de uma interpretação intuicionista da noção de “existência”, essa entidade que cumpriria o papel de ser prova de existência certamente deverá ser a própria construção ou ter, em um contexto formal, uma correspondência construtiva[33].

Apesar de podermos encontrar, mesmo em textos de autores intuicionistas, algumas oscilações e interpretações distintas em torno do uso do termo ‘existência’, neste momento devemos nos ater à interpretação intuicionista da noção de “existência”, que dá ao termo um significado específico, tomado a partir de sua relação com a noção de “construção”, intuicionisticamente primitiva. O caráter primitivo da noção de “construção” não parece ser disputado, sendo reconhecido inclusive por Martin-Löf (1987, p. 413-414) enquanto ato de provar ou ato de conhecer, e primitivo em relação às noções de “proposição” e “asserção”. Assim, como vimos anteriormente, é a construção (ou a existência da construção) que permite ou possibilita a produção de asserções, a prova de proposições, mas essencialmente a prática matemática intuicionista por assim dizer.

[33] Esta ideia de correspondência construtiva será importante quando estivermos no contexto do sistema formal de Martin-Löf, uma vez que não serão manipuladas entidades mentais, mas físicas, i.e., sinais impressos no papel, expressões admitidas no sistema, mas que guardam uma correspondência com aquelas entidades mentais, as construções.

Por fim, devemos ter cautela quando nos depararmos com esses tipos de termos em textos, distinguindo seus usos ordinários ou específicos, i.e., técnicos. O significado técnico do termo não carece de explicações sobre uso em particular, mas ele deve permanecer circunscrito à sua definição em um dado contexto, enquanto o uso ordinário desses mesmos termos pode produzir variações na interpretação ou mesmo ambiguidades e confusões para a compreensão do que se pretende expressar. Assim, no contexto intuicionista, devemos manter os termos e seus significados a partir da cadeia de interpretações das noções fundamentais, tendo como primitiva a noção de “construção”, bem como seu estatuto ontológico que deve recair sobre os objetos matemáticos. Como resultado imediato, temos os objetos matemáticos como construções mentais, de modo que o uso da ideia de “existência” deverá sempre remeter à noção de “construção mental”. Por esse motivo, não se deve misturar a ideia de existência clássica com a ideia de existência intuicionista, como não se deve criticar a ideia de geração de novas entidades matemáticas ou de entidades matemáticas saltando em existência. Isso seria inadmissível num contexto em que os objetos são dados numa realidade abstrata. Está claro que esse não é o caso no Intuicionismo.

2.3. Proposição

Dizer que Brouwer não apresenta uma definição da noção de “proposição”, por assim dizer, talvez seja um exagero, uma vez que essa é uma noção de grande importância para o Intuicionismo, assim como para o sistema de ML. No entanto, podemos dizer que o foco de Brouwer não era, inicialmente ao menos, na noção de “proposição”, mas sim na defesa de seu antiformalismo e no idealismo subjetivista das construções mentais. Heyting, por sua vez, esclarece melhor uma das primeiras consequências da interpretação de construções como provas: proposições interpretadas como intenções (ou problemas, para Kolmogorov). Já no sistema formal de ML, a proposição inevitavelmente assume um papel ainda mais importante, visto que é a partir da proposição que as construções são viabilizadas do ponto de vista formal, i.e., as proposições possibilitam a percepção do propósito das construções, o de provar algo. ML apresenta esse “algo” a partir da definição e formalização da noção de “proposição”.

Não há contestação que as ideias relacionadas à noção de “proposição”, encontradas em trabalhos como os de ML, estão, de alguma forma, presentes nas ideias de Brouwer desde o princípio. No entanto, o uso de diferentes termos causa alguma dificuldade para que possamos dizer qual era precisamente a ideia de Brouwer em relação àquilo que entendemos atualmente como ‘proposição intuicionista’, em distinção à ‘asserção intuicionista’. Brouwer já apresentava as noções de “proposição” e “asserção”, bastando observar com atenção o uso de termos em contextos que nos remetem ora a uma, ora a outra, nos casos como ‘propriedades matemáticas’, ‘espécies’, ‘condições’, que se aproximam da noção de “proposição”, e ‘asserções’, ‘declaração’ ou ‘sentença’, que se referem a uma asserção no sentido tradicionalmente utilizado como afirmação positiva, mesmo na matemática clássica. Especificamente para o termo ‘proposição’, Brouwer mantém seu uso como sendo uma asserção quando menciona teoremas, lemas e outros tipos de sentenças matemáticas que atualmente reconheceríamos simplesmente como ‘asserções’ (ou ‘juízos’, nos termos de Martin-Löf). De modo que Brouwer apresenta várias maneiras de se referir àquilo que Martin-Löf trata como ‘proposição intuicionista’.

> As **propriedades** comutativa, associativa e distributiva **são agora facilmente provadas**. (Brouwer, 1907, p. 6, em Brouwer, 1975, p. 16, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

> **As seguintes propriedades são válidas para este grupo** (...). (Brouwer, 1907, p. 12, em Brouwer, 1975, p. 19, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

> Em primeiro lugar porque a matemática clássica usa lógica para gerar teoremas, acredita na existência de verdades não conhecidas, e, em particular, aplica o princípio do terceiro excluído para expressar que toda asserção matemática **(i.e., toda atribuição de uma propriedade matemática a uma entidade) ou é verdadeira ou não pode ser verdadeira.** (Brouwer, 1948, p. 1243, em Brouwer, 1975, p. 488, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

Nas citações acima, Brouwer chama de 'propriedade' aquilo que deve ser uma atribuição da entidade matemática (construção), ou algo que se pode dizer ser obtida, provada ou mesmo validada. No entanto, é verdade que há ainda uma oscilação no sentido de termos como afirmação ou asserção, que aparecem como entidades que poderiam ser passíveis de prova. Com o passar do tempo, essa distinção fica mais marcada no intuicionismo, em especial com ML, sendo a proposição a entidade a ser provada ou refutada[34], enquanto a asserção é definida como a afirmação da posse da prova ou da refutação da proposição. Inclusive, a ideia que aparece nos trabalhos de ML sobre prova como posse de um método pode ser observada também em citações de Brouwer. Algo que Heyting já apresenta com mais clareza quando de sua explicação sobre o papel de proposições como problemas. De qualquer maneira é interessante observar que o próprio termo 'método' e a expressão 'método de prova' estão presentes nos textos de Brouwer e que se assemelham com a maneira como ML as utiliza em sua proposta.

> E a afirmação de que pelo menos uma dessas duas proposições está correta só teria um significado intuicionista **se fosse dado um caminho (embora talvez muito grande) que levaria a uma das duas frases após um número finito de etapas**. (Brouwer, 1914, p. 4, em Brouwer, 1975, p. 140)
>
> **Isso prova a afirmação**. **O mesmo método de prova** mostra que o conjunto C também é maior que o conjunto K. (Brouwer, 1925, p. 7-8, in Brouwer, 1975, p. 310)

O que, indubitavelmente se mantém estável é a ideia de que construções provam algo, e chegamos ao momento de tratar esse algo adequadamente como sendo uma 'proposição', distinguindo-a da noção de "asserção". O termo 'proposição' é outro amplamente utilizado em diferentes contextos com significados distintos. Assim, carece de uma cuidadosa caracterização a fim de prevenir eventuais confusões. Isso porque, mesmo entre intuicionistas, podemos encontrar alguma oscilação no uso do termo, especialmente observado ao se comparar um uso em contexto intuicionista teórico,

[34] A refutação de uma proposição é interpretada pela posse da prova de que a assunção da proposição leva ao absurdo. Ou seja, a proposição, de fato provada, não é a proposição refutada, mas a "absurdidade da proposição". Esta situação será melhor explicada adiante.

especulativo, e outro em um contexto formal. O que chamamos aqui de contexto intuicionista teórico trata-se da explicação do conceito dentro da teoria intuicionista, anterior a qualquer tentativa de formalização. Já o contexto formal diz respeito à aplicação prática da teoria intuicionista, especificamente à proposta de formalização da teoria do sistema de ML, mas que poderia muito bem se referir a outra prática matemática qualquer ou mesmo em computação. As distinções semânticas no uso dos termos devem ficar claras ao longo da seção, mas já se pode adiantar que uma distinção importante a se fazer recai sobre o uso de um mesmo termo para entidades de ontologias distintas. Estamos falando do caso de se usar um mesmo termo para uma entidade e sua correspondente em um sistema formal. Por exemplo, devemos distinguir a proposição intuicionista e a expressão sintática[35] da proposição no sistema. Outra distinção que devemos fazer se dá entre o ato mental e objeto do ato (ou resultado do ato).

> Se você tomar **a palavra proposição**, por exemplo, ela é tão **ambígua** quanto **entre o ato de propor e aquilo que é proposto**. (Martin-Löf, 1996, p. 4, *grifo nosso, tradução nossa*)

Na citação acima, ML quer mostrar como o termo ‘proposição’, interpretado classicamente como asserção, é ambíguo. Ele poderia ser entendido como um ato de propor, um processo, correspondendo a uma entidade empírica mental[36], ou mesmo como uma entidade física, correspondendo àquilo que é, de fato, proposto (a fala ou símbolos da expressão sintática no papel). Já no contexto intuicionista, a proposição não é uma entidade mental, isto é, não é tratada como uma construção (algo que foi o verdadeiro calcanhar de Aquiles para a proposta de Kreisel, que veremos adiante), já que proposições são provadas por construções. No entanto, vale a pena fazer a ressalva de que a proposição expressa sintaticamente é parte da asserção, não algo isolado e independente da asserção, conforme veremos mais adiante no contexto do sistema de ML.

[35] Não há um tratamento adequado acerca da ontologia da noção de “proposição”, a despeito do que é feito em relação às noções de “construção”, “juízo”, “verdade”, entre outras. Nos parece, no entanto, que a noção de “proposição” trata de uma entidade abstrata, em oposição à natureza mental da construção ou concreta das expressões a que correspondem essas noções em sistemas formais como o sistema de Martin-Löf, por exemplo. Em tempo, é preciso dizer que em 1996 Martin-Löf acena com uma mudança na interpretação de provas como entidades mentais, passando a tratá-las como sendo abstratas. No entanto, essa controversa guinada interpretativa não parece ter sido desenvolvida de maneira exaustiva, de modo que permaneceremos com a interpretação que Martin-Löf utiliza ao longo de suas exposições sobre seu sistema até seu artigo de 1996.

[36] Vale a pena fazer a ressalva que a proposição expressa sintaticamente é parte da asserção, não algo isolado e independente da asserção, e será tratado mais adiante no contexto do sistema de Martin-Löf.

O que nos interessa desta discussão a respeito da distinção entre o ato e objeto do ato é que ela nos permite evidenciar a distinção entre as noções "proposição" e "asserção", de onde se extrai a conclusão sobre o papel crucial desempenhado pela noção de "proposição" no intuicionismo. Por certo que a asserção é uma entidade concreta, expressa por meio de uma linguagem, cabendo a distinção entre ato e objeto do ato. Já a proposição tem uma ontologia distinta daquela da asserção e, mesmo, da construção. Esta questão da ontologia da proposição nos parece ser um ponto pouco discutido dada a importância para o Intuicionismo de Brouwer e ainda mais para o sistema de ML. No entanto, essa discussão será realizada no capítulo dedicado ao sistema de ML.

No decorrer das próximas sessões devemos apresentar as explicações que nos permitem dizer que, no contexto intuicionista desde o mais tradicional dado por Brouwer até o mais contemporâneo de ML, uma proposição:

i. é prescrição balizadora de provas, i.e., provas são construídas em satisfação a proposições;

ii. é uma conjectura (em caráter absoluto) necessariamente provável, i.e., mesmo após obtida uma prova ela não perde o caráter de conjectura.

2.3.1. Balizadora de provas

Talvez a melhor maneira de entender a noção de "proposição" intuicionista seja pela metáfora de uma prescrição para a execução de uma tarefa que pode ser levada a cabo de maneiras diferentes, desde que respeitem a prescrição original. Outras tentativas de explicar essa noção foram dadas por Heyting, como sendo uma intenção a ser cumprida por uma construção; ou, nas palavras de Brouwer, de condições a serem satisfeitas por uma cadeia de silogismos; ou mesmo, para ML, uma expressão compreendida como uma proposição, em que compreender uma proposição significa ter provado essa proposição[37].

> Eu distingo entre proposições e asserções: **uma asserção é a afirmação de uma proposição**. Uma proposição matemática expressa uma certa expectativa; (…) Talvez até melhor que a palavra "expectativa", a palavra "intenção", cunhada pelos fenomenológicos, expressa melhor o que se entende aqui. (…) **A afirmação de uma proposição significa o cumprimento da intenção**. (…) (Heyting, 1931, p. 114, *grifo nosso, tradução nossa*)
>
> (…) [uma cadeia particular de silogismos e relações entre estruturas matemáticas] produz **um sistema de condições, adequado** como um ponto de partida **para a construção da estrutura [mental] requerida. Apenas por essa construção será provado que as condições originais podem ser satisfeitas**. (Brouwer, Ed. Heyting, 1975, p. 72, *grifo nosso, tradução nossa*)
>
> E o que é uma proposição? **Uma proposição é uma expressão** para a qual o juízo anterior já foi compreendido, porque não há dúvida de que algo é verdadeiro a menos que você **o tenha compreendido anteriormente como uma proposição**. (Martin-Löf, 1996, p. 17, *grifo nosso, tradução nossa*)

Vemos que Brouwer trata o ato de prova como um cumprimento de certas "condições" por uma construção, o que resulta justamente na asserção de que "certas condições foram satisfeitas por uma construção". Como toda reunião de condições, essas condições servem, nesse caso, como um balizamento de uma determinada cadeia de silogismos, conforme Brouwer pensava. Nesse sentido, podemos dizer que aquelas condições foram satisfeitas, provadas ou mesmo compreendidas. O mesmo raciocínio

[37] Aqui Martin-Löf trata da proposição em suas duas instâncias, a expressão física e a entidade abstrata compreendida pelo ato de construção da prova da proposição. Por se tratar de instâncias de uma mesma noção, é natural ver esse tipo de uso em que se alternam em uma mesma explicação. No entanto, cabe fazer a ressalva de que são, de fato, duas instâncias com suas respectivas características. Mais adiante, trataremos com mais detalhes da noção de "proposição" no sistema de Martin-Löf, de modo que sua proposta deve ficar mais clara.

pode ser aplicado às demais explicações vistas acima e obter conclusões intuicionistas equivalentes.

Certamente, essas tentativas de esclarecer a noção de "proposição" mereceriam explicações adicionais acerca dos termos utilizados nelas e estamos cientes que tais explicações tomariam grande espaço no texto. Por isso, nos deteremos aqui à ideia de que uma proposição é vista como balizadora de atos mentais, que nada mais são do que evidências de seu próprio balizamento, a proposição[38]. Essa ideia está presente na passagem de Martin-Löf (1987, p. 413-414) que devemos analisar quando do tratamento da noção de "juízo". Também podemos apontar outra semelhança entre a maneira como ML apresenta sua noção de "proposição" em seu sistema formal e o tratamento dado por Dummett ao significado das constantes lógicas em uma dada sentença. Certamente, Dummett tem em vista uma expressão, uma sentença, onde os operadores lógicos são utilizados, e que têm seus significados individuais parciais traduzidos ao se especificar, ou explicitar, o que deve ser considerada uma prova daquela sentença como um todo. A definição de ML vai no mesmo caminho, ao apresentar a definição de proposição a partir da explicitação do que deve contar como uma prova dela.

> **O significado de cada constante é dado especificando**, para qualquer sentença em que essa constante é o operador principal, **o que deve ser considerado uma prova dessa sentença**, assumindo-se que já sabemos o que deve ser considerado uma prova de qualquer um dos constituintes. (Dummett, 2000, p. 8, *tradução nossa*)
>
> (...) uma proposição é definida ao se apresentar o que conta como prova da proposição. (Martin-Löf, 1984, p. 11, *tradução nossa*)

Do ponto de vista de um sistema formal, a conexão entre um conceito, no caso a proposição, e uma expressão em um sistema formal não levanta, nem deve levantar, qualquer tipo de espanto. Principalmente, devido ao fato de o conceito, sobre o qual recai a definição no sistema formal, ter sido apresentado por Brouwer e, posteriormente, bem esclarecido por Heyting, Dummett e outros autores que acompanharam o trabalho de Brouwer.

---

[38] O termo 'evidência' é usado aqui em seu sentido ordinário. Não está, portanto, relacionado ao uso de Martin-Löf de evidência de um juízo. Para Martin-Löf, "prova" e "evidência" são intimamente relacionados, sendo tratados por ele como sinônimos, porém com preferência do uso do termo 'evidência' para juízos e 'prova' para proposições. Assim, a prova de uma proposição também é o que permite dizer que um juízo é evidente, para Martin-Löf. Essas noções voltarão a ser trabalhadas no capítulo 3.

No entanto, ao contrário do que se poderia supor, uma proposição não tem caráter arbitrário, mas também não é "produzida" após construída, ou obtida, uma prova. Podemos dizer que uma proposição é compreendida, ou apreendida, à medida que o sujeito cognoscente constrói provas que respeitam os limites da própria proposição. Mesmo para ML, compreender é sinônimo de conhecer, de modo que o conhecimento é tratado como o objeto do ato mental a que nos referimos, o de construir uma prova de uma proposição. E é essa prova que confere o direito de asserir aquele conhecimento: de que a tal proposição foi provada, i.e., que ela fora conhecida ou reconhecida como tal. Na seguinte passagem vemos Heyting explicar a mesma ideia:

> (...) nós lembramos que uma proposição matemática *p* sempre exige uma construção matemática com determinadas propriedades; **ela pode ser asserida assim que essa construção for realizada**. Dizemos neste caso que a construção *prova* a proposição *p* e a chamamos de *prova* de *p*. (Heyting, 1956, p. 102, *tradução nossa*, *grifo nosso*)

> Observe que **o conhecimento da premissa é necessário para garantir que A(a) é uma proposição**, de modo que faz sentido falar sobre uma prova de que A(a) é verdadeira. (Martin-Löf, 1996, p. 46, *grifo nosso, tradução nossa*)

Assim, proposição e provas (da proposição) são conectados em uma relação de necessidade, onde provas são necessariamente restritas em relação à proposição, e a compreensão da proposição ocorre exclusivamente por meio do ato de construir provas em satisfação à proposição. A própria tentativa de construir uma prova, digamos, fora dos limites da proposição pode até ser reconhecida como uma tentativa equivocada de provar uma proposição em uma espécie de ato, mas que não proporciona a compreensão ou o conhecimento de uma proposição por parte do sujeito que realizou a tentativa em primeiro lugar. Por isso não se deve confundir os cálculos realizados no âmbito de um sistema formal e as entidades intuicionistas eventualmente a eles conectados. Voltaremos a tratar dessa distinção entre tais entidades e suas correspondentes formais mais à frente neste trabalho.

2.3.2. Caráter absoluto de conjectura

A interpretação intuicionista da noção de "construção" como sendo primitiva e fonte única de necessidade, traz uma consequência direta para a interpretação da noção de "proposição": seu caráter absoluto de conjectura. Explica-se: a possibilidade de se construir provas, em outras palavras, de se realizar atos mentais que evidenciam as condições de uma proposição, dá a essa proposição o caráter de conjectura, de poder ser satisfeita por diferentes construções que respeitam o balizamento determinado pela proposição. Heyting trata proposições como sendo intenções ou expectativas a serem alcançadas ou frustradas. Kolmogorov explica a noção de "proposição" como sendo um problema a ser solucionado. Ambas explicações são equivalentes por terem como noção fundamental a de construções como provas.

> As interpretações mais antigas de Kolmogorov (como **cálculo de problemas**) e Heyting (como **cálculo de construções pretendidas**) **eram substancialmente equivalentes**. Heyting (1958, p. 107. Em: Sundholm, 1983, p. 160, *grifo nosso, tradução nossa*)
>
> *A afirmação*. - **Uma proposição *p***, como, por exemplo, "A constante de Euler é racional"; **expressa um problema**, ou melhor ainda, uma certa expectativa (a de *encontrar* dois inteiros a e b tais que $C = a / b$), que podem ser realizadas ou frustradas (...)
>
> (...) Notemos novamente que, tanto na lógica clássica quanto na lógica intuicionista, **a afirmação de uma proposição não é propriamente uma proposição, mas a constatação de um fato**. (Heyting, 1930, pp. 958-959. Em: Sundholm, 1983, 157, *grifo nosso, tradução nossa*)

A constatação do fato empírico de se construir mentalmente a prova, mencionado por Heyting, não faz com que a proposição perca seu caráter de conjectura, ao contrário do que ocorre em contexto clássico em que, uma vez provada ou refutada, a proposição é "tornada" verdadeira ou falsa, perdendo assim seu caráter de conjectura. Percebe-se então que a própria noção de "conjectura" tem uma interpretação particular no contexto intuicionista, de modo que ser uma conjectura não é um estado condicionado, mas absoluto ou não condicionado. Essa noção de "conjectura", no entanto, não pode ser confundida com a noção de "problema a ser resolvido" em um contexto formal intuicionista. Isto porque a expressão que representa o "problema a ser resolvido" (ou não) em um sistema formal nada mais é que uma expressão que, se resolvido, será interpretada como uma proposição (no sistema) e, se não for resolvido, será interpretado como uma expressão não proposicional no sistema, que nada representa.

Martin-Löf (1996, p. 23-24) subscreve essa interpretação, da proposição como conjectura necessariamente provável, como algo inevitável a partir da rejeição do princípio do terceiro excluído. Já o caráter absoluto de conjectura da proposição, conforme explicamos anteriormente, é um desdobramento natural, inevitável, e não uma mera opção.

> Assim, como eu disse anteriormente, a lei do terceiro excluído, na verdade, todas as leis do cálculo proposicional, são sem dúvida válidas nessa concepção de proposição [clássica], isso significa que **a rejeição da lei do terceiro excluído é implicitamente a rejeição da concepção de uma proposição como algo que é verdadeiro ou falso**. Assim, a rejeição dessa noção de proposição é algo que pertence a Brouwer. Por outro lado, ele não disse isso explicitamente pelo que ela deveria ser substituída. (Martin-Löf, 1996, p. 23, *grifo nosso, tradução nossa*)
>
> Eu tomei por certo o princípio de que, **se algo foi feito, então isso pôde ser feito**. (Martin-Löf, 1996, p. 47, *grifo nosso, tradução nossa*)
>
> **o golpe horizontal é necessário** para mostrar que o juízo tem a forma de uma afirmação. (Martin-Löf, 1996, p. 16, *grifo nosso, tradução nossa*)

Justamente, o golpe horizontal[39] mencionado por ML se refere à parte do juízo que se compromete com a posse da evidência, construção ou prova, e.g., 'é *verdadeiro*' em '*A* é *verdadeiro*'[40]. Essa interpretação deixa claro que o que se pretende, e o que realmente importa, não é encontrar a verdade de uma proposição, mas sim asserir a sua necessidade apresentando um exemplo de satisfação de suas condições. Assim, podemos produzir asserções como: 'a prova *a* satisfaz a proposição *A*', ou, simplesmente, '*A* é *verdadeiro*', como usadas por ML. A relevância dessa interpretação de proposições como conjecturas intuicionista se dá por enfatizar o papel central da construção enquanto prova de uma proposição e por significar que uma proposição deve poder ser provada de diferentes maneiras ou por diferentes provas sem a perda de valor de cada nova prova ou asserção produzida. Há, então, a mudança do eixo de relevância que classicamente se concentrava na verdade da proposição e passou para a necessidade do caráter conjectural da proposição, interpretado pela possibilidade da construção de diferentes provas para uma mesma proposição.

---

[39] O golpe vertical se refere à parte implícita de uma asserção "eu sei que" em "eu sei que *A* é *verdadeira*". Esse golpe vertical é tratado como supérfluo, já que asserir algo carrega implicitamente a alegação de que o sujeito conhece o que se alega (Martin-Löf, 1996, p. 15-16).

[40] Essa forma de juízo será devidamente tratada em seção específica mais adiante, bem como a noção de verdade intuicionista.

2.4. Asserção, afirmação ou alegação

Além da distinção entre asserção e proposição, a característica mais importante da noção de "asserção" recai sobre seu aspecto afirmativo. Do ponto de vista intuicionista, cada asserção afirma o conhecimento ou posse de uma prova de uma proposição, de modo que essa característica se evidencia de maneira particular na interpretação de negação enquanto conectivo lógico. Enquanto a ideia de falsidade clássica é interpretada e expressa intuicionisticamente como a negação de uma proposição, no intuicionismo, a asserção da negação de uma proposição é interpretada como o conhecimento ou posse de uma prova da refutação de uma proposição. Em outras palavras, no intuicionismo, asserir a negação de uma proposição significa a afirmação do conhecimento de que a assunção da verdade de uma proposição leva a uma contradição. Já classicamente, o uso da negação serve para a afirmação de uma falsidade, como a negação de uma proposição absurda. Assim, diferentemente do contexto clássico, não faz sentido falar em falsidade no intuicionismo.

Entretanto, a interpretação da negação precisa de algumas explicações a mais e assim será feito na próxima seção. O que devemos ressaltar neste momento é o fato de que essas ideias estão presentes no intuicionismo de Brower, porém, sem a terminologia que conhecemos atualmente. Entre os usos de Brouwer para a ideia de asserção matemática, podemos citar a expressão 'teoremas como tautologias', que traz a ideia de que as asserções matemáticas, sintaticamente expressas, devem ser afirmativas acerca da posse da prova da proposição, isso sem perder de vista que as provas são, de fato, construções.

> As provas que demos no Capítulo I para os primeiros teoremas da matemática, nos ensinaram a ler esses **teoremas como tautologias**. O fato de que, em casos mais complicados, o teorema não é imediatamente claro, mas apenas compreendido mediante uma cadeia de tautologias, meramente prova que nós construímos nossas estruturas muito complicadas para serem compreendidas em um olhar [breve]. (Brouwer, Ed. Heyting, 1975, p. 72, *grifo nosso, tradução nossa*)

Fica claro que asserções, ou teoremas (enquanto tautologias), não podem ser tratados como as proposições clássicas, bivalentes. Desse modo, a asserção é a expressão de um conhecimento subjetivo, daquele indivíduo criativo, que constrói a prova em satisfação a um conjunto de condições e a reconhece como tal.

> Eu distingo entre proposições e asserções: **uma asserção é a afirmação de uma proposição**. Uma proposição matemática expressa uma certa expectativa; (…) Talvez até melhor que a palavra "expectativa", a palavra "intenção", cunhada pelos fenomenológicos, expressa melhor o que se entende aqui. (…) **A afirmação de uma proposição significa o cumprimento da intenção**. (…) (Heyting, 1931, p. 114, *grifo nosso, tradução nossa*)

Com essa ideia, Heyting enfatiza a distinção da asserção em relação à proposição, mas também traz à tona o importante papel a ser desempenhado pela linguagem, algo que ainda não era totalmente aceito por Brouwer que, em seu antiformalismo, não percebia a importância de uma linguagem, não para a semântica, mas para a própria prática da matemática pelos matemáticos. Talvez seja esse o ponto que torna o sistema de ML tão interessante para a comunidade matemática: o reconhecimento de que o intuicionismo não tem utilidade a menos que seja capaz de exprimir os teoremas matemáticos e suas respectivas provas, enquanto uma sequência de asserções como premissas que levam a uma conclusão.

2.5. Interpretação dos conectivos lógicos

Como mencionamos anteriormente, a interpretação das constantes lógicas, conectivos e quantificadores foi dada por Brouwer e Heyting.

> Portanto, lembre-se das explicações sobre os significados das constantes lógicas, dos conectivos e dos quantificadores, dados por Brouwer, Heyting e Kolmogorov: todos seguem o padrão comum de que, qualquer que seja a constante lógica, é dada uma explicação de que prova de uma proposição formada por meio dessa constante lógica parece, ou seja, qual é a forma e, mais precisamente, a forma canônica ou direta, de uma prova de uma proposição que tem essa constante lógica específica como seu sinal mais externo. (Martin-Löf, 2013, p. 5-6, *tradução nossa*)

A explicação acerca da interpretação da noção de "existência" intuicionista, dada na seção 2.2.3, nos parece crucial para a compreensão das consequências lógicas da fundamentação intuicionista. Tomando o ponto de vista de Hesseling, ter a lógica como o princípio da teoria clássica significaria dizer que não há uma interpretação dessa lógica, de modo que ela não teria uma relação de dependência em relação à teoria, mas sim que a lógica é propriamente parte da teoria. Assim, a lógica seria prescritiva podendo ser utilizada para explicar a própria realidade abstrata admitida por aquela teoria, como é o caso da Teoria dos Conjuntos. Uma das consequências negativas dessa falta de interpretação na concepção da lógica, apontada por de Bruijn, foi a dificuldade de compreensão da rejeição da lei do terceiro excluído por parte da comunidade matemática, uma vez que até então o uso dessa lei era permitida em qualquer contexto, inclusive infinitos.

> A ideia de que os valores da verdade são a base da lógica pode ter sido uma das razões pelas quais a rejeição de Brouwer da lei do terceiro excluído foi tão pouco compreendida em seu tempo. (de Bruijn, 1995, p. 46, *tradução nossa*)

Ocorre que no intuicionismo a rejeição do terceiro excluído não é uma mera opção, é consequência direta e inevitável da interpretação fundamental de construções mentais como provas, o que parece não ter sido bem compreendida na época de Brouwer por parte dos adeptos da Teoria dos Conjuntos. De uma maneira abreviada, podemos dizer que a lógica subjacente a cada teoria marca uma importante distinção entre elas. Mas, antes de tratarmos da recusa do terceiro excluído, comecemos com a noção de "existência" e sua interpretação via quantificador universal.

Em Teoria dos Conjuntos, a *existência platônica* garante a bivalência das asserções (que nesse contexto não se distingue de proposições, como ocorre no intuicionismo), uma vez que os objetos são dados numa realidade abstrata independentemente do estado atual de conhecimento matemático (acerca de novas funções ou outros objetos matemáticos como os números reais, por exemplo). Essa interpretação clássica tem como principal consequência a admissão da asserção da existência a partir da falha de generalidade. Explicamos: da negação de uma asserção com o quantificador universal, admite-se produzir uma asserção com o quantificador existencial:

$$\neg\forall x. P(x) \rightarrow \exists x. \neg P(x)$$

Já no contexto intuicionista, esse expediente lógico clássico não é admitido. A existência só pode ser asserida a partir da posse de um método de obtenção do objeto a que se atribui a existência, i.e., é preciso justificar ou provar a existência do objeto para que se possa asserir sua existência. Essa interpretação intuicionista da noção de "existência" é responsável por outras distinções acerca da interpretação de conectivos lógicos. Por exemplo, a disjunção é interpretada de forma distinta entre clássicos e intuicionistas.

> $\mathfrak{p} \vee \mathfrak{q}$ podem ser asseridas se e somente se ao menos uma das proposições $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{q}$ pode ser asserida. (Heyting, 1971, p. 102, *tradução nossa*)

Para o clássico, duas asserções verdadeiras podem ser combinadas a partir da disjunção. Mais além, a disjunção entre uma asserção e a sua negação também é admitida, mesmo que não se possa decidir qual das duas é a verdadeira. Um dos problemas matemáticos não resolvidos até hoje é um dos mais utilizados para ilustrar a estranha interpretação clássica da noção de "existência" juntamente com a disjunção. A conjectura de Goldbach pode ser formulada de maneira simples como: todo número par maior que 2 pode ser identificado à soma de dois números primos. A disjunção envolve o caso da conjectura de Goldbach ser verdadeira ou falsa. Ocorre que, aparentemente, não há solução para a conjectura. No entanto, pelo princípio do terceiro excluído e a noção de "existência" clássica, ou bem a conjectura de Goldbach é verdadeira ou bem ela é falsa, o que faz da disjunção entre as duas asserções (a afirmação e a negação da conjectura) ser, não apenas uma asserção correta e admissível na teoria, mas também verdadeira[41].

$$\vdash (\mathrm{G} \vee \neg \mathrm{G})$$[42]

Justificada pelo princípio do terceiro excluído, não parece haver qualquer problema com a interpretação lógica de disjunção clássica. No entanto, é difícil admitir que o exemplo dado se trate de uma asserção verdadeira tendo que admitir que não se sabe e, aparentemente, não é possível saber se a conjectura de Goldbach é verdadeira ou falsa. Apenas dizer que ela ou é verdadeira ou é falsa, não parece ser suficiente para assentar a questão. Intuicionisticamente, a interpretação da noção de "existência" produz a consequência lógica que determina que para produzir uma asserção com a disjunção de duas ou mais asserções, é preciso saber qual das partes da disjunção é "verdadeira". Assim, intuicionisticamente, deveríamos ter um dos seguintes:

$$\frac{\vdash G}{\mathrm{G} \vee \neg \mathrm{G}} \quad \text{ou} \quad \frac{\vdash \neg G}{\mathrm{G} \vee \neg \mathrm{G}}$$

[41] Classicamente a disjunção de uma proposição e sua negação é tratada trivialmente como uma tautologia, portanto, sempre verdadeira. O símbolo $\vdash$ indica e garante a verdade da asserção.
[42] Onde "G" representa a Conjectura de Goldbach.

Aproveitando o exemplo, podemos apontar outra importante distinção entre as duas teorias, a interpretação da negação. Como a interpretação clássica dos conectivos lógicos é dada pelas suas respectivas tabelas de verdade, a negação é interpretada como a inversão do valor de verdade da proposição segundo sua tabela de verdade antes da negação (1). Por isso mesmo, uma dupla negação, i.e., a negação de uma proposição já negada (2), representa a anulação de uma primeira negação. Isso é justificado e verificado também via tabela de verdade.

(1) $\neg P$

P	¬P
V	F
F	V

(2) $\neg\neg P$

P	¬P	¬¬P
V	F	V
F	V	F

Já no caso intuicionista a interpretação da negação é uma implicação direta da teoria. Como as asserções intuicionistas precisam de uma justificativa ou prova, uma asserção "falsa" que não pode ser provada não é admitida, ou não pode ser admitida na mesma concepção clássica. Por consequência, a interpretação da negação no intuicionismo é representada da seguinte maneira:

$$[P] \rightarrow \perp \quad \text{ou} \quad P \text{ é falsa,}$$

que se lê como "*P* não pode ser verificada"[43]. O que não é admitido no contexto intuicionista é partir da asserção acima e concluir:

$$\neg P \text{ é verdadeiro}$$

Assim, a negação é interpretada intuicionisticamente como uma asserção afirmativa e positiva acerca da posse de uma prova de que uma proposição não pode ser provada, i.e., que a tentativa de se produzir uma prova da proposição leva a uma contradição. E a prova que evidencia essa contradição dá o direito de se afirmar a negação da proposição.

[43] Intuicionisticamente, "*P*" não é uma asserção. A asserção, nesse caso, é justamente a alegação de que "*P* não pode ser verificada" (Martin-Löf, 1996, p. 42-43). A explicação completa da noção intuicionista de "negação" será dada posteriormente em seção específica.

> **A negação factual é expressa por "nós não temos o direito de asserir isso", "ninguém sabem isso"**, etc. (…)
>
> **A negação matemática dessa asserção pode ser expressa como "Eu efetuei em minha mente a construção B, que deduz uma contradição a partir da suposição de que a construção A foi levada a cabo"**, o que tem, novamente, a mesma forma. **Pelo contrário, a negação factual** da primeira asserção é: **"Eu não efetuei a construção A na minha mente"**; essa afirmação **não tem a forma de uma asserção matemática**. (Heyting, 1971, p. 18-19, *grifo nosso*, *tradução nossa*)
>
> Então $\neg \mathfrak{p}$ pode ser asserida se e somente se nós temos a posse da construção que a partir da suposição de que a construção $\mathfrak{p}$ fosse realizada, nos levaria a uma contradição. (Heyting, 1971, p. 102, *tradução nossa*)
>
> Certamente, essa noção construtiva de falsidade, definida em termos da noção de desaprovação [*disproof*] ou refutação, remonta a Brouwer: **saber que uma proposição *A* é falsa é ter construído ou encontrado uma refutação de *A*, isto é, ter uma refutação de *A* em sua posse**. (Martin-Löf, 2013, p. 8, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

Percebe-se que o intuicionismo busca um rigar maior que permita uma interpretação dos conectivos lógicos à luz dos conceitos fundamentais e primitivos. A interpretação dos conectivos lógicos dada pelas tabelas de verdade significa que uma asserção clássica, de fato, assere algo verdadeiro ou falso. Isso é especialmente importante para o resultado da combinação de proposições com conectivos lógicos, i.e., para determinar seu valor de verdade, basta verificar a tabela de verdade e nada mais. Já na fundamentação intuicionista, a interpretação dos conectivos lógicos não é dada, é, sim, uma consequência da teoria, i.e., a interpretação da noção fundamental de "construção" tem como resultado a lógica intuicionista e a interpretação intuicionista dos conectivos lógicos. Podemos encontrar uma boa apresentação dessa interpretação na chamada "dedução natural"[44], sendo absolutamente rejeitado o recurso a tabelas de verdade. Na prática vemos que a "asserção intuicionista" não é bivalente como no caso clássico, i.e., não faz sentido falar em uma "asserção" falsa, ou mesmo verdadeira, no intuicionismo. A verdade é sinônimo de 'demonstrabilidade' e a falsidade de 'não demonstrabilidade', sendo ambas atribuídas à "proposição" intuicionista e não a "asserções"[45].

---

[44] Ver Prawitz (1965).

[45] Essas noções são apresentadas em suas respectivas seções no capítulo sobre o intuicionismo de Martin-Löf.

Dessa maneira, a principal consequência lógica da proposta intuicionista provavelmente recai sobre a rejeição do princípio do terceiro excluído, mas também sobre a interpretação da ideia de "negação" e, certamente, sobre a distinção entre as noções de "proposição" e "asserção", que no contexto clássico são tratados como sinônimos. A grande vantagem em termos de rigor filosófico do intuicionismo está justamente no fato de essas consequências resultarem de sua noção fundamental de *prova*. Uma segunda vantagem, essa de implicação na prática da matemática, é que a proposta intuicionista é perfeitamente implementável[46], enquanto a clássica não é para todos os casos.

Devemos ainda fazer uma menção especial ao funcionamento da implicação no intuicionismo. Heyting apresenta a implicação tendo em vista a noção fundamental de "construção" e que se mantém estável até a teoria de ML.

> A *implicação* $\mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{q}$ pode ser asserida, se e somente se nós temos posse de uma construção $\mathfrak{r}$, que, junto com qualquer construção provando $\mathfrak{p}$ (supondo que a última seja efetuada), efetuaria automaticamente uma construção provando $\mathfrak{q}$. Em outras palavras, uma prova de $\mathfrak{p}$, junto com $\mathfrak{r}$, formaria uma prova de $\mathfrak{q}$. (Heyting, 1971, p. 102-103, *tradução nossa*)

A implicação é, portanto, um conectivo lógico que opera sobre proposições intuicionistas. Significa dizer, portanto, que uma proposição formada com o uso do conectivo da implicação deve poder ser provada, ou ter uma construção mental que a prova.

Entretanto, primeiramente, devemos lembrar que existe uma diferença entre dizer que "*A* é uma proposição" e que "*A* é verdadeira". A primeira asserção significa que eu sei o que conta como uma verificação de *A*, ou que eu conheço *A*. A segunda asserção significa que eu tenho posse atual de um método de verificação de *A*, que eu tenho atualmente uma prova de *A*. Dito isso, ML trata a implicação como uma consequência lógica de inferência imediata, auto evidente. Mas, na verdade há talvez uma complicação maior aqui, que talvez não tenha sido bem explorada. Vejamos primeiro a explicação da regra de implicação:

[46] A partir do trabalho de Bishop que demonstrou construtivamente os Teoremas da Análise e da Teoria das Medidas e a partir da TIT de Martin-Löf.

(...) eu introduzi mais cedo esta (...) consequência lógica (...)

(A true)

B prop

Explicação. A regra de formação da **implicação é uma regra de inferência imediata**, o que significa que você deve chegar uma conclusão evidente a si mesmo imediatamente, sem qualquer passo intermediário, na assunção de que você conhece as premissas. (...)

(...) a explicação é que o que conta como uma verificação de $A \supset B$ é uma hipotética prova de

A true
.
.
.
B true

que *B* é verdadeira sob a assunção de que *A* é verdadeira. Na interpretação de Kolmogorov, tal hipotética prova aparece como um método de solução do problema *B* dado que o problema *A* pode ser resolvido, isto é, um método que, juntamente com um método para resolver o problema A, **se torna** um método para resolver o problema B. (Martin-Löf, 1996, p. 34-35, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

O que queremos evidenciar aqui é que, como percebemos da explicação sucinta de Heyting ou mesmo de ML, não há uma explicitação acerca de como é obtida uma construção a partir de outra construção, i.e., como uma prova de uma proposição “se torna” uma prova de outra proposição. Há apenas a expectativa (ou a necessidade) de que tal fenômeno ocorra para que a implicação possa ser utilizada conforme sempre foi utilizada na matemática clássica. Essa é uma discussão que não será feita neste trabalho, mas que precisa ser mencionada neste ponto até porque nos parece ser um ponto importante que outras tentativas de formalização de uma matemática construtiva, como a de Kreisel, não conseguiram lidar de maneira adequada e efetiva.

2.6. Rejeição do princípio do terceiro excluído (e obrigatoriedade do caráter construtivo da matemática)

A partir da elucidação dos conceitos fundamentais ao Intuicionismo e a consequente interpretação dos conectivos lógicos, pensamos ser oportuno apresentar o argumento que mostra a recusa do terceiro excluído como consequência da interpretação de construções como provas e proposições como conjecturas (interpretação BHK). Como vimos, a noção de *conjectura* da proposição é uma consequência imediata da possibilidade de se construir mentalmente novas provas da proposição. Esta interpretação é fundamental para o intuicionismo, de modo que essa *possibilidade* é mais importante do que a *eventual*[47] necessidade de se provar uma proposição qualquer para fins de se encontrar uma verdade qualquer.

> Assim, como eu disse anteriormente, a lei do terceiro excluído, na verdade, todas as leis do cálculo proposicional, são sem dúvida válidas nessa concepção de proposição [clássica], isso significa que **a rejeição da lei do terceiro excluído é implicitamente a rejeição da concepção de uma proposição como algo que é verdadeiro ou falso**. Assim, a rejeição dessa noção de proposição é algo que pertence a Brouwer. Por outro lado, ele não disse isso explicitamente pelo que ela deveria ser substituída. (Martin-Löf, 1996, p. 23, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

No entanto, entendemos que a consequência mais importante da interpretação BHK recai sobre a lógica intuicionista, cuja interpretação é dada por Brouwer e Heyting, e que é, digamos, traduzida formalmente na Dedução Natural de Gentzen e Prawitz, de modo que pôde ser utilizada no sistema de ML. A consequência em questão trata-se da rejeição do princípio do terceiro excluído, cujo argumento intuicionista é apresentado pelo próprio Heyting (1956)[48]:

> Você deve considerar o que era o programa de Brouwer [L.E.J. Brouwer 1907]. Consistia na investigação da **construção matemática mental** como tal, sem referência a questões relativas à natureza dos **objetos construídos**, tais como se esses objetos existem independentemente de nosso conhecimento deles. Que **esse ponto de vista leva imediatamente à rejeição do princípio do terceiro excluído**, eu posso demonstrar melhor por um exemplo.
>
> Vamos comparar duas definições de números naturais, digamos, *k* e *l*.

[47] Eventual no sentido de que uma teoria pode estabelecer uma relação de prioridade conceitual entre *verdade* e *prova*. Mesmo sendo as noções de "verdade" e "prova" distintas em cada teoria, no caso clássico, a *verdade* é primitiva e conceitualmente anterior à *prova*, enquanto que, para o intuicionismo, a *prova* é primitiva em relação à *verdade*, por exemplo.

[48] Brouwer apresenta sua explicação em Brouwer (1952 B, p. 9, em Brouwer, 1975, p. 510).

> **I**. *k* é o maior primo tal que *k* - 1 é também primo, ou *k* = 1 se tal número não existe.
>
> **II**. *l* é o maior primo tal que *l* - 2 é também primo, ou *l* = 1 se tal número não existe.
>
> A matemática clássica negligencia completamente a óbvia diferença de caráter entre essas duas definições. *k* pode realmente ser calculado (*k* = 3), enquanto que não possuímos nenhum método para calcular *l*, pois não se sabe se a sequência de pares de primos gêmeos *p*, *p* + 2 é finita ou não. Portanto, os intuicionistas rejeitam **II** como uma definição de um inteiro; eles consideram um inteiro bem definido apenas se um método para o calcular é dado. Agora, **essa linha de pensamento leva à rejeição do princípio do terceiro excluído**, pois se a sequência de primos gêmeos fosse finita ou não finita, **II** definiria um inteiro. (Heyting, 1956, p. 1-2, *grifo nosso, tradução nossa*)

Devemos notar que alguns termos e expressões utilizados por Heyting como 'posse de um método', 'método de cálculo', lembram e muito expressões e ideias presentes na proposta de ML em seus esclarecimentos conceituais, sendo 'posse de um método' uma ideia importante para o esclarecimento da noção de "existência", por exemplo, enquanto que 'método de cálculo' é reinterpretado como 'método de obtenção' (de um objeto canônico) por ML. O argumento de Heyting é claro ao explicitar a estranheza da ideia clássica de existência objetual sem que seja apresentado um método, ao menos em princípio, para que se possa calcular ou instanciar o objeto pretendido. A proposta intuicionista é, então, mais intuitiva mesmo, ao admitir que provas de proposições devem ser interpretadas como a atualização da possibilidade de obtenção do objeto pretendido, para que só assim sejam reconhecidas como 'prova da proposição'. Devemos fazer um alerta neste ponto para que não seja dado um passo indevido a partir da ideia que acabamos de apresentar. Não se deve admitir que, a partir da atualização da possibilidade de obtenção do objeto pretendido (mesmo que por meio de um método de obtenção em princípio), a proposição "passa a ser verdadeira". O que, de fato, ocorre, é o reconhecimento daquela atualização da possibilidade, ou da posse do método, ou mesmo da instanciação do objeto pretendido, como uma prova da proposição, ou o reconhecimento do cumprimento das condições proposicionais por parte da prova.

O que devemos, enfim, enfatizar é que, do ponto de vista intuicionista, as noções fundamentais que levam à rejeição do princípio do terceiro excluído se mantém, permitindo que a Dedução Natural seja reconhecida como uma proposta de lógica formalmente arregimentada para a fundamentação intuicionista, o que permite que ML a utilize em sua proposta de formalização do intuicionismo.

CAPÍTULO 3 – FORMALIZAÇÃO DO INTUICIONISMO

3.1. O Problema da Proposta de Formalização de Kreisel

3.1.1. Visão Geral

Não há dúvidas de que o trabalho de Brouwer produziu impactos tanto do ponto de vista filosófico, mas também na matemática, questionando suas noções mais fundamentais. É inegável também a influência de Brouwer em tentativas de se produzir uma fundamentação da matemática que reunisse o rigor intuicionista, mas também que fosse viável do ponto de vista da prática da formal da matemática. O que impressiona é o fato de, desde Brouwer até meados dos anos 80, nenhuma proposta de formalização da matemática intuicionista ou construtivista obteve êxito[49]. Mas, o que distingue a TIT de ML de todas elas, incluindo a proposta original de Brouwer? Nos parece que a resposta recai sobre um rigor no tratamento das noções fundamentais do intuicionismo, sobretudo, e de maneira decisiva, na distinção entre as noções de "proposição", "construção" e "asserção" matemáticas. E, para melhor explicar a importância dessas distinções, utilizaremos a Teoria Abstrata das Construções de Kreisel, que peca justamente na distinção entre essas noções.

É importante ressaltar a tentativa de Kreisel (1965) de desenvolver um sistema formal construtivista, que ele chamou de 'Teoria Abstrata das Construções', cujo objetivo era fazer com que as regras de cálculo de predicados de Heyting pudessem ser interpretadas formalmente. Isso significa que Kreisel precisava encontrar uma forma de traduzir para um sistema formal, a partir de conceitos fundamentais, as regras da interpretação BHK para os conectivos lógicos e, em seguida, estabelecer as conexões entre aqueles conceitos de modo a permitir a expressão de sentenças com o conteúdo necessário para a prática da matemática. Essa nos parece ser a grande motivação de Kreisel, a tradução da interpretação BHK, onde o desafio principal, a nosso ver, se encontrava na estratégia de Kreisel para traduzir a regra de implicação e para exprimir uma sentença existencial. Entretanto, apesar de apresentar intuições interessantes que levaram a proposta de Kreisel a ser considerada por algum tempo como uma possível alternativa para a fundamentação clássica (Dummett, 2000), devemos mesmo nos ater a o que, a nosso ver, é o aspecto crucial para a inviabilidade da proposta de Kreisel: o

[49] Como mencionamos na seção 1.3 (p. 12).

tratamento de todas as entidades matemáticas como sendo construções (o que Kreisel interpreta em sua proposta como funções).

Vejamos. Apesar de bem identificar os principais desafios para a desejada formalização e de aparentemente levar muito bem em conta o papel central da noção de "construção" de Brouwer, a Teoria das Construções de Kreisel não parecia ter o mesmo rigor no tratamento de outras noções, em especial a noção de "*proposição*" que também desempenha um papel crucial no intuicionismo. É o que ressalta Sundholm (1983).

> A diferença de objetivos entre as primeiras visões de Heyting-Kolmogoroff e Kreisel agora se torna clara. **Heyting-Kolmogoroff** não oferecem uma redução a nenhuma outra teoria, mas **tentam explicar o que é uma proposição, como ela deve ser entendida**. **Para Kreisel**, por outro lado, **o objetivo era formalizar as propriedades das 'construções abstratas'** em uma teoria **e reduzir a teoria da lógica a isso**. (Sundholm, 1983, p. 160, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

O reconhecimento da inviabilidade da Teoria das Construções fica marcado nas palavras de Dummett no prefácio da 2ª edição de seu *Elements of Intuitionism* ao comentar a proposta de Kreisel.

> No prefácio original, eu mencionei com entusiasmo que a teoria das construções inaugurada por Kreisel, tinha como objetivo fornecer uma semântica canônica para a lógica intuicionista; infelizmente, ela não se mostrou frutífera. (Dummett, 2000, *tradução nossa*)

Talvez esteja aí a grande contribuição de ML, motivado pelo trabalho de Bishop, e que definitivamente reposiciona o intuicionismo na discussão dos fundamentos da matemática. Além da evidência da viabilidade prática do construtivismo demonstrado por Bishop, o rigor filosófico que ML adotou no desenvolvimento de sua proposta certamente produziu explicações ricas e contundentes acerca da noção de "construção". Entretanto, o que de fato diferencia e permite a formalização do intuicionismo é a distinção clara e rigorosa entre as noções de "proposição" e "asserção", noções essas que na matemática clássica ou mesmo no construtivismo de Kreisel eram confundidas ou mesmo identificadas. Prawitz (2012), inclusive, faz uma bela análise crítica ao sistema de ML onde ele consegue capturar e apresentar com exatidão essa distinção.

A nosso ver, é justamente a partir correta compreensão da noção de "proposição" intuicionista, e certamente da sua relação com as noções de "construção" e "asserção", que ML se distancia das propostas anteriores para se tornar a única proposta viável para substituir a fundamentação clássica da matemática. Mas, vejamos a contribuição de

Kreisel para a discussão dos fundamentos da matemática ao propor sua Teoria das Construções.

3.1.2. Colapso conceitual no sistema de Kreisel

Por se tratar de uma proposta posterior à de Brouwer e Heyting, contudo, anterior à de ML, existe uma grande diferença em relação à terminologia utilizada por Kreisel em sua estratégia de criar as conexões entre as noções que ele considera mais importantes para o funcionamento de um sistema formal que levasse em consideração os princípios intuicionistas de Brouwer. Troelstra (1969) apresenta o sistema de Kreisel de maneira sucinta e objetiva e tentamos reproduzi-la nesta seção de modo a explicar como ela reproduz os principais conceitos de Brouwer.

É importante ressaltar que o ponto de partida de Kreisel é a ideia de que as construções representam a natureza essencial dos objetos matemáticos. O passo seguinte mostra uma interpretação própria e original da proposta tradicional de Brouwer e que, inevitavelmente, o leva a um não tratamento mais rigoroso das principais noções intuicionistas. Vejamos o que diz Kreisel.

> A matemática intuicionista, como desenvolvida por Brouwer e Heyting, tem dois aspectos. Seu aspecto negativo, que é bem conhecido, rejeita as noções básicas da matemática da teoria dos conjuntos (ou clássica). O aspecto positivo é o seguinte: **as noções de 'construção (função construtiva)' e 'prova construtiva (de igualdade entre duas construções)'** são consideradas suficientemente claras para que pelo menos uma parte da matemática seja construída sistematicamente a partir de algumas afirmações evidentes sobre essas noções. (Kreisel, 1962, p. 198, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

Imediatamente, percebemos que Kreisel identifica ‘construção’ e ‘função’. Mas, sabemos desde Brouwer, que as construções são as provas intuicionistas, de modo que fica claro que, para Kreisel, as funções construtivas desempenham o papel de prova em seu sistema. Em outras palavras, os objetos matemáticos no sistema de Kreisel são funções, que serão utilizadas para provar igualdades entre outras funções.

Já neste ponto, Kreisel deixa claro que sua opção e aposta era no desenvolvimento de um sistema formal centrado em funções, diferentemente do que havia sugerido Brouwer, que tratava a construção como um ato mental que satisfaz um certo conjunto de condições interpretado como uma proposição. Kreisel também não mostrou uma preocupação em desfazer a confusão entre as noções de “asserção” e “proposição” clássica. Vejamos como funciona no sistema formal.

Inicialmente, devemos apontar os conceitos[50] fundamentais e como eles são representados no sistema. Kreisel apresenta os seguintes:

1. letras minúsculas gregas: representam *noções*, explicadas como sendo propriedades decidíveis de uma *construção* e definidas no sistema como uma *função característica*.

> Letras gregas minúsculas α, β, ..., π, $\boldsymbol{\pi_A}$, ...são usadas como noções; **uma noção $\boldsymbol{\alpha}$ é interpretada como uma função em {0,1}** (função característica) tal que
>
> $\alpha c = 0$ se e somente se *c* tem a propriedade *α*. (Troelstra, 1969, p. 6, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

2. letras minúsculas: representam uma *construção* mental, explicada como sendo uma prova de uma ‘*asserção*’ (nos termos de Kreisel). No entanto, são também as variáveis da operação de *aplicação*.

> **Uma construção pode consistir de um esquema aplicável a outras construções.** Nossa primeira idealização está incluída na seguinte assunção:
>
> “a é aplicável a b” é uma noção
> (i.e., uma propriedade decidível).
>
> Consequentemente, podemos supor um operador de aplicação *.(.)* a ser definido ao estipular *a(b) = a*, digamos, se *a* não é aplicável a *b*, e *a(b) = c*, se *a* aplicado a *b* nos produz *c*. (Troelstra, 1969, p. 6, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

3. letras maiúsculas: representam uma *asserção* (nos termos de Kreisel) e são as entidades a serem combinadas por meio dos conectivos lógicos. Funcionam, no entanto, como propriedades das *construções*, uma vez que são utilizadas na linguagem do sistema associada à letra grega *π*, que designa uma *noção*.

[50] Utilizamos o termo ‘conceito’ aqui para distinguir do termo ‘noção’ usada por Kreisel com um significado específico em seu sistema.

> "*c* é uma prova de *A*" é uma noção para qualquer asserção *A*. (2)
>
> A noção associada a *A* de acordo com (2) será indicada por π_A:
>
> $\pi_A c = 0$ se e somente se *c* é uma prova de *A*. (Troelstra, 1969, p. 6, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

Esses são os elementos utilizados para expressar, no sistema, teoremas e provas. Devemos lembrar que Kreisel adota o uso de valores de verdade para determinar quais expressões em seu sistema possuem um, digamos, conteúdo verdadeiro. Em outras palavras, o conceito de "*noção*" de Kreisel serve ao propósito de introduzir o conceito de *verdade* em sua teoria; afirmações verdadeiras ou falsas no sistema são representadas pela composição de uma *noção* e uma *construção*; sendo a *construção* uma prova, mesmo ela sendo identificada a uma função no sistema de Kreisel, temos que as *noções* representam o que Brouwer chama de 'condições a serem satisfeitas pela prova'.

No entanto, essas são distinções que, apesar de fazermos nessa apresentação do sistema, o próprio Kreisel não faz. De fato, Kreisel não faz uma distinção clara entre asserção e proposição, de modo que as duas se misturam.

Vejamos um comparativo entre Brouwer e Kreisel:

i. Brouwer: "<u>Construção *a*</u> é uma prova da <u>proposição *A*</u>" é <u>uma asserção.</u>

ii. Kreisel: "<u>Construção *a*</u> é uma prova da <u>asserção *A*</u>" é <u>uma noção.</u>

Kreisel chama de 'asserção' aquilo que é provado pela construção e chama a afirmação de que uma construção prova uma asserção de noção, que é interpretada como uma propriedade que a construção tem ou não, de modo que ela pode ocupar o papel de uma '*asserção*' (nos termos de Kreisel) em uma outra afirmação. Na interpretação original de Brouwer, quando uma construção atende a determinadas condições (ou propriedades), diz-se que esta construção é uma prova dessas determinadas condições. Assim, há no sistema de Kreisel, certamente, uma não distinção entre 'noção' e 'asserção', ou, nos termos de Brouwer, 'proposição' e 'asserção'. Como consequência, vemos os dois conceitos colapsarem no sistema de Kreisel, como uma estratégia clara no objetivo de exprimir o uso dos conectivos lógicos em combinações de 'asserções' (ou proposições, nos termos de Brouwer).

> Conjunção:
>
> $\pi_{A \wedge B}(c) = 0$ se e somente se $c = < c_1, c_2 >$ e $\pi_A(c_1) = 0$ e $\pi_B(c_2) = 0$. (Troelstra, 1969, p. 7, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

Percebemos que o que são combinados por meio dos operadores lógicos, como vemos no exemplo acima, são asserções. Mas, para produzir a expressão no sistema que indica que uma construção é uma prova dessa conjunção de asserções, é necessário subordinar essa conjunção a uma noção genérica π, que basicamente cumpre o papel de transformar uma asserção em '*noção*' (nos termos de Kreisel). Ou seja, uma asserção, no fim das contas é uma 'noção' no sistema de Kreisel, i.e., não há uma distinção clara e inequívoca entre proposição e asserção (nos termos de Brouwer) no sistema de Kreisel.

A confusão de Kreisel em relação à distinção entre asserção e proposição fica evidente quando o próprio utiliza o termo 'asserção' no lugar de 'proposição', entendidas sob a ótica de ML ou mesmo Brouwer. E vai além, apresentando a sua "noção" com o estatuto de "construção", o que significa que proposições e asserções teriam a mesma natureza mental de provas matemáticas.

> O sentido de uma **asserção matemática denotada por** um objeto linguístico *A* é determinado intuicionisticamente (ou entendido) se nós apresentarmos **que construções constituem uma prova de *A***, i.e., se nós temos **uma construção *rA*** tal que, **para qualquer construção *c***, $rA(c)=0$ se c é uma prova de A e $rA(c)=1$ se c não é uma prova de A. (Kreisel, 1962, p. 201, *grifo nosso, tradução nossa*)

Em resumo, para Kreisel, *construções* são funções, *noções* são funções, e *asserções* são transformadas em funções por meio de uma operação de *aplicação*. Em outras palavras, todas as entidades utilizadas para expressar um conteúdo no sistema de Kreisel são tratadas como funções, isto é, no sistema de Kreisel todas as entidades são interpretadas como expressões de construções mentais.

Sundholm (1983, p. 154) atribui a opção de Kreisel à uma suposta tentativa de garantir a decidibilidade de proposições no sistema. É certo que, talvez seguindo uma tradição clássica, Kreisel opta por recuar em relação ao rigor proposto por Brouwer em distinguir os conceitos matemáticos intuicionistas originais. Com isso, ele ignora a relação fundamental entre construções e proposições: a de que uma proposição só "é" porque é "provada" por uma construção. Ou seja, para um intuicionista como Brouwer, não faz sentido falar de uma proposição não provada, o que Kreisel inadvertidamente permite em seu sistema (a partir da introdução de funções característica). Se trata, no entanto, de uma opção equivocada e incompatível com a fundamentação intuicionista ou mesmo construtivista.

Veremos a seguir como ML viabiliza a formalização da matemática intuicionista ao dar um passo além em relação ao de Brouwer, aumentando o nível de rigor no tratamento das noções intuicionistas fundamentais. Ressaltamos a distinção clara e incontornável entre as noções de “construção”, “proposição” e “asserção”, mas principalmente pela explicação acerca da conexão dos conceitos intuicionistas teóricos e seus correspondentes no sistema formal, sem confundi-los.

3.2. Teoria Intuicionista dos Tipos / Intuicionismo Sueco

Introdução

Já se passavam décadas desde o fim da disputa dos fundamentos da matemática e o avanço máximo nas pesquisas em matemática construtiva havia sido dado por Bishop com sua proposta de análise construtiva, mas que não se tratava de um sistema formal por ser restrito à demonstração construtiva informal e intuitiva dos teoremas fundamentais da Análise e da Teoria das Medidas. Mais tarde, em 1984, como vimos, ML consegue sintetizar suas ideias para desenvolver um sistema formal com fundamentos intuicionistas originais de Brouwer, com destaque à interpretação BHK de 'construções como provas'. ML ainda utilizou o 'isomorfismo de Curry-Howard', que permitiu uma linguagem de nível superior, e a lógica interpretada formalmente pela Dedução Natural de Prawitz e Gentzen. Como resultado, os objetos no sistema, as provas, deveriam ter seus respectivos tipos intuicionistas, as proposições. Temos, finalmente, a Teoria Intuicionista dos Tipos, uma fundamentação intuicionista da matemática, mas que compreende também uma linguagem formal de capacidade expressiva superior onde, por consequência de sua fundamentação, sintaxe e semântica deveriam ser tratadas na própria linguagem, distinguindo definitivamente as noções de "proposição" e "asserção".

Devemos lembrar que a proposta de ML tem por objetivo principal o desenvolvimento de uma fundamentação completa da matemática intuicionista de modo a permitir a obtenção de teoremas e provas matemáticas por meio de um sistema formal. Para tal, ML precisou aumentar o rigor na análise e explicação acerca do papel de cada uma das principais noções intuicionistas fundamentais e suas correspondentes no sistema, permitindo que todos sejam formalmente representados em uma única linguagem formal, desde regras de inferência (ou atos de prova) até asserções e proposições. Veremos como ML trata cada uma dessas noções em seu sistema e as noções que ele acrescentou à sua fundamentação de modo a viabilizá-la como um verdadeiro sistema formal intuicionista.

Ressaltamos que ML entende um sistema formal como um sistema que permita que as expressões criadas no âmbito do sistema sejam completamente interpretadas no próprio sistema, não havendo necessidade de qualquer interpretação adicional exterior ou em outra linguagem (uma metalinguagem). Como resultado, a semântica e os resultados obtidos são expressos na mesma linguagem formal, podendo ser mencionados na própria linguagem para a obtenção de novos resultados. Assim, não apenas a noção intuicionista de “proposição”, mas também a de “construção”, deve ser expressa sintaticamente no âmbito do sistema formal, a fim de formar ‘juízos’[51], termo utilizado por ML para asserções. Dessa maneira, a TIT se apresenta como uma fundamentação intuicionista mas também como uma linguagem formal semelhante a uma linguagem de programação.

> O que eu acabei de dizer sobre a estreita conexão entre matemática construtiva e programação explica porque a teoria intuicionista dos tipos (MARTIN-LÖF, 1975), que eu comecei a desenvolver apenas com o motivo filosófico de esclarecer a sintaxe e a semântica da matemática intuicionista, pode igualmente bem ser vista como uma linguagem de programação. (Martin-Löf, 1982, p. 156, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

> **Nosso principal objetivo é construir um sistema de regras formais** representando da melhor maneira possível o raciocínio informal (matemático). No estilo natural [usual] de dedução natural, as regras dadas não são muito formais. Por exemplo, a regra
>
> $$\frac{A}{A \vee B}$$
>
> toma como certo que A e B são fórmulas, e só então diz que podemos inferir que $A \vee B$ é verdadeiro quando A é verdadeira. **Se quisermos dar uma regra formal, temos que deixar isso explícito**, escrevendo
>
> $$\frac{A\ prop. \quad B\ prop. \quad A\ verdadeira}{A \vee B}$$
>
> ou
>
> $$\frac{A, B\ prop. \quad \vdash A}{A \vee B}$$
>
> onde usamos, como Frege, o símbolo $\vdash$ à esquerda de A para significar que A é verdadeira. **No nosso sistema de regras, isso sempre será explícito.** (Martin-Löf, 1984, p. 4, *grifo nosso, tradução nossa*)

Entendemos, no entanto, ser crucial deixar claro de onde vêm as interpretações que determinam tais consequências no sistema de ML. Por isso, passamos agora a uma apresentação e explicitação mais aprofundada dos conceitos fundamentais da proposta de formalização mais robusta e completa de ML, em uma ordem que entendemos ser a mais natural possível. Como ponto de partida, temos as seguintes: uma asserção corresponde a um juízo, que por sua vez é formado por um objeto-prova e uma proposição; uma construção mental corresponde a uma sequência de juízos nomeada por um objeto-prova e uma proposição intuicionista corresponde a uma proposição no sistema; por fim, uma

[51] A noção de *juízo* corresponde a uma asserção no sistema de ML e será devidamente explicada em seção específica.

sequência de juízos correspondem às regras de inferência produzidas no ato mental de realização da construção mental. Para ajudar na visualização desses conceitos, mostramos a estrutura típica de um juízo:

objeto-prova proposição

$$\overbrace{a \in A}^{\text{juízo}}$$

ou

$$a : A$$ [52]

ML trata essas noções e suas consequências em grande detalhe em seu sistema e que passamos a apresentar nas próximas sessões, começando pela noção de “proposição”.

---

[52] Martin-Löf (1994, p. 91) utiliza o símbolo “:” para a relação entre objeto-prova e proposição em seu sistema.

3.2.1. Proposição como expressão sintática no sistema de Martin-Löf

Apesar de as explicações sobre o intuicionismo serem intuitivamente compreendidas, uma das grandes dificuldades na tentativa de formalizar a teoria intuicionista passava pela representação sintática formal dos seus conceitos fundamentais. No sistema de ML, a noção de "proposição" desempenha um papel central, sendo definida a partir da explicitação de o que vale como prova da proposição. Logo, o sistema formal de ML busca expressão sintática que corresponda à noção de "proposição" proposta por Brouwer. Como consequência imediata, temos a possibilidade de produzir novas expressões a partir da combinação de sinais (e conectivos lógicos) que serão tratados e manipulados no âmbito do sistema formal tendo em vista à proposição propriamente dita. Essas expressões no sistema formal serão também chamadas de proposições por ML e são os problemas ou desafios a serem resolvidos por demonstrações, como veremos mais adiante.

Mais uma vez, atentamos para o uso de um mesmo termo, 'proposição', para dois conceitos distintos. O primeiro deles se refere à entidade abstrata, proposta por Brouwer na fundamentação da teoria intuicionista, e o segundo é a opção de ML para designar a expressão sintática que deverá corresponder ao primeiro em seu sistema.

> **uma proposição é definida** ao se explicitar o que conta como uma prova da proposição, (Martin-Löf, 1984, p. 11, *grifo nosso, tradução nossa*)
>
> **O que combinamos por meio de operações lógicas** ($\perp$, $\supset$, &, $\vee$, $\forall$, $\exists$) e **consideramos ser verdadeiras são proposições. Quando sustentamos que uma proposição é verdadeira, fazemos um juízo.** (Martin-Löf, 1984, p. 3, *grifo nosso, tradução nossa*)
>
> [Sobre a noção de *proposição*] A lógica moderna simplesmente não funcionaria a menos que tivéssemos esse conceito, porque é nas coisas que estão sob ele que as operações lógicas operam. (Martin-Löf, 1996, p. 5, *grifo nosso, tradução nossa*)

O que queremos enfatizar é que a "proposição expressa sintaticamente" no sistema de ML não é identificada à "proposição intuicionista", a noção não sintática. Em breve, podemos utilizar um exemplo análogo que o próprio ML utiliza. a ambiguidade aqui se dá entre o que o autor chama de 'ato de propor' e 'aquilo que é proposto', i.e., o ato de propor e expressão sintática do ato em uma linguagem, uma asserção (aqui, ainda com a interpretação clássica de proposição/asserção). ML introduz o "ato de propor" a fim de distinguir a expressão sintática e aquilo que ela corresponde, que está aqui como uma atividade mental (lembrando que, neste exemplo, essa atividade mental não tem qualquer tipo de relação com a noção intuicionista de “proposição”).

Enfim, a “proposição intuicionista” de Brouwer tem caráter normativo, prescritivo, de modo que ela não depende de um ato mental voluntário e arbitrário para que exerça seu caráter de balizador de construções (provas), conforme vimos no capítulo dedicado a Brouwer. E certamente não se confunde com a expressão sintática no sistema formal de ML.

Essa expressão sintática, no entanto, nos apresenta a vantagem de deixar explícitas as condições a serem satisfeitas por uma prova, claro, no âmbito do sistema formal. Na verdade, essa é a caracterização de formalização presente no sistema de ML e a que usamos neste texto.

> (...) **a noção de fórmula, como dada pela definição indutiva usual, nada mais é do que o substituto formalista da noção de *proposição***: (...) **enquanto a noção de fórmula é uma noção sintática**, uma fórmula sendo definida como uma expressão que pode ser formada por meio de certas regras de formação, **a noção de *proposição* é uma noção semântica,** (...) Que uma regra de inferência é completamente formal significa precisamente que não deve haver condições semânticas envolvidas na regra: **ela pode apenas colocar condições nas formas das premissas e na conclusão.** (…)
>
> **Agora, a formalidade completa da regra foi restaurada.** (…)
>
> **Assim, A e B agora abrangem expressões completas arbitrárias.** (…)
>
> Mas acho que terei que confiar aqui em um acordo de que temos uma noção geral de expressão, que é de caráter formal, **de modo que a regra possa agora contar como uma regra formal.** (Martin-Löf, 1996, p. 7-8, *grifo nosso, tradução nossa*)

Portanto, ressalta-se que “o que combinamos por meio de operações lógicas” é uma expressão em uma linguagem, algo que cumpre o papel de corresponder a uma “proposição intuicionista”, mas que não pode ser identificada à própria “proposição intuicionista”. O que ML faz, na verdade, é a opção pelo mesmo termo ‘proposição’ para designar a expressão sintática que deve corresponder à “proposição intuicionista”, não sintática, abstrata. Assim, para não restar dúvidas, sempre que o termo ‘proposição’ for utilizado, devemos ter atenção se o contexto implica na interpretação do termo como designação da expressão sintática, concreta, ou da noção de “proposição” intuicionista original, abstrata. No âmbito do sistema de ML devemos encontrar o termo 'proposição' como designação da expressão sintática.

Devemos fazer um pequeno desvio aqui para lembrar que ML não faz a mesma discussão rigorosa e exaustiva acerca da noção de "proposição" como ele faz para as noções de "objeto-prova" ou "juízo" e suas relações com as respectivas noções intuicionistas originais de Brouwer (que, por sua vez, também não esclarece de maneira inequívoca a natureza ontológica da proposição). Como vimos, pela teoria de Brouwer, as construções matemáticas são mentais e as proposições funcionam como condições a serem cumpridas por aquelas. E, como veremos na seção seguinte, ML trata as construções mentais de maneira mais detalhada, distinguindo o ato mental, o resultado do ato e o vestígio concreto do ato (como uma prova escrita em um papel). O importante a se ressaltar aqui é que a proposição não pode ter a mesma natureza mental que a construção, justamente por ser anterior à realização do ato mental balizado pelas condições "impostas" pela proposição. Também não pode ter a mesma natureza dos juízos que, por sua vez, são posteriores à realização da construção, i.e., dependem da "existência da construção" para poderem ser produzidos concretamente. Como consequência, a "proposição intuicionista" não pode ser concreta nem mental, restando à proposição, em seu caráter normativo e prescritivo em relação às construções mentais, uma natureza abstrata.

Já a correspondente sintática da "proposição intuicionista" na TIT, que se pretende uma proposição, deve ser formada a partir de regras formais de formação, de modo que possa ser chamada de proposição no sistema formal. Por se tratar de uma proposição, deve poder ser demonstrável, i.e., deve-se poder apresentar uma prova que a torne verdadeira. Uma vez encontrada uma prova para a proposição, ela é interpretada como uma proposição verdadeira. Por consequência, será admitida a ideia de uma proposição ser tornada verdadeira[53], i.e., uma expressão bem formada no sistema, do ponto de vista das regras de utilização de sinais e conectivos lógicos, que é chamada de proposição e se torna uma "proposição verdadeira" a partir da obtenção de uma prova que atenda as condições explicitadas naquela expressão original.

---

[53] A noção de *verdade* no sistema de ML, bem como no intuicionismo é distinta da utilizada em outros contextos técnicos ou ordinários e será esclarecida posteriormente em seção específica. Neste momento, basta mencionar que dizer que uma proposição é verdadeira significa dizer que é possível obter uma prova dela.

É importante fazer uma última observação aqui: é a “proposição verdadeira” que realmente corresponde à “proposição intuicionista”, uma vez que é essa “proposição verdadeira” que de fato desempenha o papel de balizadora de provas. A mera proposição no sistema é uma candidata a correspondente de uma “proposição intuicionista”, pois a proposição é uma expressão arbitrária, bem formada a partir das regras de formação do sistema formal e, caso não seja encontrada uma prova que a satisfaça, não será possível estabelecer tal conexão de correspondência com uma “proposição intuicionista”. No caso de se obter uma prova que leve a assunção da verdade da proposição a uma contradição, a conclusão é de que, afinal, aquela expressão não se trata de uma proposição verdadeira, ou que ela simplesmente não corresponde a uma “proposição intuicionista".

Essa interpretação se distingue da clássica, que tem a proposição como uma asserção, passível de verdade ou falsidade. Dessa forma, quando demonstrada, a mesma entidade, a proposição/asserção passa a ser interpretada como teorema. Essa indistinção entre proposição e asserção é uma marca clássica (presente ainda na proposta de Kreisel, como vimos) que será desfeita definitivamente pelo intuicionismo. A “proposição intuicionista” é tratada como conjectura (como vimos) ou mesmo como um desafio ou problema a ser resolvido no sistema de ML. Em ambos os casos ela não se confunde com a noção de “asserção” ou “juízo”, mesmo após a obtenção de uma prova da proposição. Seria como dizer que, no intuicionismo, cada entidade mantém sua natureza ontológica, proposição abstrata, construção mental e asserção concreta, tendo suas respectivas correspondentes na TIT como proposição verdadeira, objeto-prova e juízo.

Há então um avanço no tratamento intuicionista da noção de “proposição”, mas também uma clara distinção entre Brouwer e ML na maneira de tratar essa noção. O sistema formal de ML se trata de um contexto circunscrito, munido de regras de formação de expressões interpretadas, quando bem formadas, como proposições, entendidas como desafios, ou problemas, cujas soluções devem ser produzidas no âmbito do próprio sistema. Uma vez encontradas tais soluções, esses desafios são tratados como proposições verdadeiras e suas soluções como objetos-prova.

Assim, no sistema de ML, uma proposição verdadeira deve sempre ser expressa em companhia de um objeto-prova, produzindo um juízo evidente onde a proposição está posicionada à direita e o objeto-prova à esquerda do símbolo “∈” ou “:”, que designam a relação entre prova e proposição, como podemos ler no juízo abaixo “*a* prova a proposição A" ou, como usaremos daqui por diante para facilitar a apresentação das ideias, "a habita A"[54]:

$$a \in A$$

ou

$$a : A$$

Finalmente, chegamos à estrutura da asserção no sistema de ML, que corresponde ao que se pretendia com a asserção intuicionista desde Brouwer. Diferentemente do que ocorre na teoria intuicionista proposta por Brouwer ou mesmo na Teoria das Construções de Kreisel, na proposta de formalização de ML, a proposição enquanto expressão sintática desempenha o papel central e não propriamente a noção de *prova* enquanto ato mental. Isso porque, a partir da proposição enquanto conjectura ou desafio será possível representar qualquer domínio de objetos matemáticos, de modo a permitir a produção dos teoremas necessários à prática matemática tradicionalmente conhecida.

[54] Utilizamos a relação de "habitação" para evitar a relação de pertença, normalmente utilizada em contexto clássico para a sua noção tradicional de *conjunto*. Assim, na nossa exposição daqui por diante, utilizaremos essa relação de "habitação", de modo que objetos-prova habitam (ou provam) proposições.

3.2.1.1. Domínio proposicional x domínio primitivo

Certamente, sabemos que o que foi apresentado até então não diz exatamente o que são proposições ou qual papel elas desempenham no âmbito do sistema formal. Segundo ML (1984, p. 3), proposições são “aquilo que nós combinamos com operadores lógicos e que nós asseguramos ser verdadeiras. Quando nós asseguramos a verdade de uma proposição, fazemos um juízo”. No entanto, nesta altura, podemos dizer que essa definição restringe um pouco o entendimento sobre a essência da proposição no sistema de ML. Na verdade, o que caracteriza de fato a proposição de ML é o fato de ser, em seu sistema, aquilo que pode ser tornada verdadeira por uma demonstração.

Essa interpretação automaticamente distingue a proposição de ML da noção clássica de “conjunto”. Aquilo que ML chama de ‘conjuntos’, são os domínios de significatividade de elementos canônicos primitivos, que devem atender regras prescritivas de formação. Em outras palavras, não se prova a existência de um conjunto, ao contrário, são os conjuntos quem determinam a “existência” dos elementos canônicos do sistema[55]. Essencialmente, podemos dizer que um conjunto é definido ao se apresentar as regras de formação de elementos canônicos e de suas identidades, de modo que essas regras determinam o que é ser um elemento daquele conjunto, ou qual o significado de ser um elemento daquele conjunto. Por isso, temos a interpretação de conjuntos como domínios de significatividade.

Isso quer dizer, por exemplo, que as regras de formação dos Naturais são dadas após assumir que “Naturais” é um conjunto e em seguida apresentar as suas regras de formação e igualdade entre elementos, ideia que também encontramos em Bishop (1967, p. 2). Isso é o oposto do que ocorre com as proposições, em que primeiro são explicitadas as regras de formação e igualdade entre elementos (provas) para então assumir (ou formar) a proposição. A título de exemplo, temos a seguinte definição dos “Naturais”:

[55] A explicação detalhada sobre a distinção entre elementos canônicos e não-canônicos será apresentada adiante.

$$\frac{\mathbb{N}\ \text{set}}{0 \in \mathbb{N} \qquad \dfrac{a \in \mathbb{N}}{a' \in \mathbb{N}} \qquad 0 = 0 \in \mathbb{N} \qquad \dfrac{a = b \in \mathbb{N}}{a' = b' \in \mathbb{N}}}$$

> À primeira vista, nós poderíamos assumir que um conjunto é definido ao prescrever como seus elementos são formados. Isso nós fazemos quando dizemos que o conjunto dos números naturais ℕ é definido fornecendo-se as regras:
>
> $$0 \in \mathbb{N} \qquad \frac{a \in \mathbb{N}}{a' \in \mathbb{N}}$$
>
> Nós então, **temos que distinguir os elementos que têm a forma pela qual nós podemos diretamente ver que são resultado de uma das regras, e chamá-los de canônicos, de todos os outros elementos, que nós chamaremos de não-canônicos.** Mas então, para sermos capazes de definir quando dois elementos não-canônicos são iguais, nós devemos também prescrever como dois elementos canônicos são formados.
>
> (...) às regras de ℕ acima, nós devemos adicionar
>
> $$0 = 0 \in \mathbb{N} \qquad \frac{a = b \in \mathbb{N}}{a' = b' \in \mathbb{N}}$$
>
> (Martin-Löf, 1984, p. 7-8, *tradução nossa, grifo nosso*)

Como dissemos, uma proposição possui regras de formação distintas, de modo que a sua formação é desenvolvida no sistema formal e interpretada como uma demonstração ou derivação. No caso da formação de conjuntos, esses passos formais não são tratados da mesma maneira. Como veremos na seção seguinte, a formação de “juízos canônicos”[56], i.e., sentenças com domínios primitivos (conjuntos), são realizados em um contexto de cálculo. Em oposição, a formação de juízos proposicionais, i.e., sentenças com domínios proposicionais (proposições), são realizados em um contexto de demonstração de propriedades de cálculos. Entendemos cálculo aqui como passos inferenciais imediatos observados na produção de um juízo canônico a partir de juízos canônicos imediatamente anteriores (sem menção a juízos dados em passos muito anteriores ou mesmo menção a uma sequência de juízos), como na obtenção de uma conclusão a partir de premissas imediatamente anteriores. No que chamamos de demonstração de propriedades de cálculo, um juízo proposicional é produzido a partir de uma proposição e um objeto-prova, que nomeia, ou menciona, uma cadeia inteira de

[56] Em oposição a juízos proposicionais, produzidos a partir de um domínio proposicional.

juízos (canônicos ou proposicionais). Essa cadeia de juízos é chamada de derivação por ML e é interpretada como a demonstração ou prova da proposição.

Assim, ambas as formas de juízo, canônico e proposicional, têm em sua estrutura a presença de um objeto-prova que habita um domínio. No juízo canônico temos um domínio primitivo e um objeto prova como um elemento canônico. E no juízo proposicional temos um domínio proposicional e um objeto-prova que nomeia uma derivação (uma sequência de juízos). Veremos essa distinção na seção seguinte com exemplos de produção de sentenças singulares e gerais na TIT.

É verdade que ML trata, em determinado momento, conjuntos e proposições como sinônimos. No entanto, a distinção é clara de maneira que o próprio ML é quem a esclarece a em primeiro lugar, não havendo razão para não a manter. A intenção de ML em facilitar o uso terminológico no tratamento dos domínios sobre os quais serão quantificados em sua linguagem deixa escapar que a distinção importante a ser feita entre conjuntos e proposições recai sobre o fato de que temos dois tipos essenciais de domínios na TIT: domínios primitivos e domínios proposicionais, e que essa distinção traz consigo as consequências notáveis que acabamos de ressaltar.

Os domínios primitivos são habitados por elementos canônicos obtidos por regras de indução simples, como no caso do exemplo dos naturais acima e estão em um nível lógico inferior. Já os proposicionais são domínios de ordem superior que permitem quantificar sobre os domínios primitivos em nível de segunda ordem, mas que podem ser quantificados sobre níveis lógicos indefinidos, atributo essencial para a prática da matemática a nível de análise ou topologia. Consequentemente, veremos também a mesma distinção entre juízos canônicos e não-canônicos, sendo produzidos respectivamente a partir de conjuntos e proposições. A grande relevância dos domínios primitivos recai então, na necessidade de se definir um tal domínio para que se introduza um domínio proposicional[57]. Essa possibilidade de se quantificar sobre domínios foi concebida a partir da correspondência de Curry-Howard, importada por ML para seu sistema formal, como o próprio reconhece.

[57] Não iremos tratar aqui, mas o sistema de ML permite a introdução de proposições a partir de juízos hipotéticos não canônicos, ou a partir de domínios hipotéticos.

> em lógica de predicados de primeira ordem, você sempre quantifica sobre um domínio, e Curry-Howard é uma correspondência, ou isomorfismo, entre proposições e conjuntos nesse sentido. (Martin-Löf, 2008, p. 249, *tradução nossa*)

E, justamente, a consequência inevitável de tal organização do sistema formal de ML é a possibilidade (necessária) de uso e menção na mesma linguagem, de modo que uma proposição (ou domínio proposicional) pode ser introduzida a partir de um juízo (canônico ou não). Veremos na seção seguinte um exemplo de como isso pode ser realmente feito.

3.2.1.2. Uso e menção na Teoria Intuicionista dos Tipos e derivação de sentenças

No sistema de ML, asserções predicam de objetos como em qualquer outra linguagem clássica. O que linguagens clássicas não permitem é que predicações de asserções, i.e., predicações de proposições (clássicas), sejam utilizadas na própria linguagem. Essas predicações seriam tratadas não como asserções na linguagem, mas em uma metalinguagem, hierarquicamente superior à linguagem base. Vejamos como produzimos tais asserções classicamente:

Exemplo de *proposição* clássica na linguagem base:

$$x^2 + 2 = 0.$$

Exemplo de *proposição* clássica em metalinguagem:

"$x^2 + 2 = 0$" é uma função de primeiro grau.

No sistema de ML, a prova (ou, lembrando, objeto-prova) corresponde a uma construção, e é tratada como "tornador de verdade"[58] de uma proposição. Entretanto, é também um nome de uma derivação, i.e., uma sequência de juízos que "prova"[59] a determinada proposição e permite afirmar que a proposição é verdadeira. Assim, nota-se que um objeto prova é uma menção à sequência de juízos necessária para se afirmar a verdade de uma proposição.

Portanto, objeto prova e proposição são as partes nominais necessárias para se produzir um juízo proposicional em que a parte predicativa é a relação de "provar", como em "a prova A". No entanto, objeto prova e proposição, ou o que está à esquerda e à direita dos dois pontos em um juízo proposicional desempenham papeis distintos na linguagem de ML, e são certamente interpretados de forma também distinta classicamente. Enquanto o clássico faria algum esforço para interpretar a prova intuicionista como sendo algo que serve à metalinguagem, na TIT, a prova nada mais é que um expediente natural e necessário da linguagem.

---

[58] A ideia de "tornador de verdade" tem uma interpretação no sistema que nos permite dizer apenas que uma proposição é demonstrável, o que não tem relação com o estatuto ontológico da proposição ou do objeto prova, como discutiremos na seção dedicada à noção de "objeto prova".

[59] O verbo "provar" aqui se refere aos passos indutivos que permitem dizer que uma proposição atende às regras de formação introduzidas ao sistema.

> A linguagem matemática é um organismo vivo. Houveram muitos casos na história da matemática em que pessoas começaram a realizar e provar afirmações sobre o próprio texto matemático, o que muitas vezes levou a mudanças essenciais nas regras da linguagem. A discussão sobre a linguagem é mantida em o que pode ser chamado metalinguagem, de modo que as mudanças significam que partes da metalinguagem foram empurradas para dentro da linguagem. Às vezes, esse foi um processo lento. Como um exemplo, pode-se citar que levou todo o século XIX para que a noção de função passasse da metalinguagem para a linguagem. (de Bruijn, 1995, p 42, *tradução nossa*)

A proposta de ML combina o que o clássico chama de 'linguagem' e 'metalinguagem' e que ele mantém separadas (com consequências tecnicamente indevidas quando resultados obtidos na metalinguagem são importados para a linguagem original). O objetivo de ML é "explicitar o que usualmente é tomado como garantido" e, com isso, evitar ambiguidades. Vejamos o que o autor diz:

> Nós evitaremos manter a forma e o significado (conteúdo) separados. Em vez disso, exibiremos, ao mesmo tempo, certas formas de juízo e inferência que são usadas em provas matemáticas e as explicaremos semanticamente. **Assim, tornamos explícito o que geralmente é implicitamente considerado certo**. Quando se trata a lógica como qualquer outro ramo da matemática, como na tradição metamatemática originada por Hilbert, tais juízos e inferências são apenas parcial e formalmente representados na chamada linguagem de objeto, quando são usados implicitamente, como em qualquer outro ramo da matemática, na chamada metalinguagem. (Martin-Löf, 1984, p. 3-4, *tradução nossa*, *grifo nosso*)

Quando ML menciona aquilo que está "implicitamente tomado como garantido", ele se refere a tudo aquilo que é usado para justificar uma regra de inferência ou para fazer um juízo. Como exemplos elementares podemos citar a "disjunção" ou a "soma de dois naturais" como em '1+1=2'.

> Uma regra de inferência é justificada ao explicar a conclusão na suposição de que as premissas são conhecidas. Portanto, antes que uma regra de inferência possa ser justificada, deve ser explicado o que devemos saber para termos o direito de realizar um juízo sobre qualquer uma das várias formas que as premissas e conclusões podem ter. (Martin-Löf, 1984, p. 3, *tradução nossa*)

Vê-se que, em teoria dos conjuntos tradicional, a expressão '$1 + 1 = 2$' é uma proposição, pois é bem formada, tem sentido e, portanto, pode ter a si atribuído um valor de verdade. Já no sistema de ML, aquela expressão nada é, nem proposição, nem juízo. O juízo no sistema de ML que expressaria aquela "proposição em teoria dos conjuntos" seria algo como '$1 + 1 = 2 : \mathbb{N}$'.

No exemplo da disjunção, temos, em contexto de teoria dos conjuntos tradicional, uma proposição bem formada quando asserimos algo como:

$$A \vee B$$

Enquanto que na TIT só se poderia asserir tal disjunção em caso de saber qual das duas possibilidades *A* ou *B* é verdadeira, caso contrário seria uma sentença mal formada ou simplesmente não se reconheceria a sentença como um juízo no sistema. Para ML, essa disjunção deveria ser traduzida da seguinte maneira:

$$\frac{\text{A verdadeira}}{\text{A} \vee \text{B verdadeira}}$$

ou seja, é preciso saber ao menos que uma das duas possibilidades da disjunção é verdadeira para asserir que a disjunção é verdadeira. Caso contrário, ela poderia ser interpretada como indecidível e, portanto, não faria sentido ou não diria nada do ponto de vista do sistema de ML. Só nos falta agora ver como produzimos de fato esses juízos na linguagem própria do sistema.

No entanto, é preciso, primeiramente, esclarecer uma importante distinção própria da TIT acerca da interpretação da noção de "identidade". Diferentemente da noção clássica de "identidade extensional" como um expediente que nos permite simplesmente determinar o sentido de duas expressões que nomeiam o mesmo objeto, por assim dizer. ML tem esse expediente em seu sistema, mas ele adiciona uma interpretação de uma igualdade intensional, necessária para a produção de proposições e, consequentemente, de juízos proposicionais. Para não restar dúvida acerca das diferentes interpretações de identidade no sistema de ML, passamos diretamente a essas explicações na seção seguinte.

3.2.1.3. Identidade proposicional e Identidade de definição

Em sua TIT, ML apresenta duas noções de "igualdade" em seu sistema, uma mais próxima da noção clássica de "identidade" e outra que assume importante papel para a produção de sentenças gerais no sistema. ML as denomina como:

a) Igualdade de Definição (correspondente à Identidade clássica)
b) Igualdade Proposicional

Antes de partir para as noções em questão, acreditamos ser de grande ajuda fazer um breve resumo de o que seria o sistema formal de ML. A TIT é proposta como uma fundamentação da matemática a partir de um conjunto de regras fundamentais, mas que se trata também de uma linguagem formal capaz de expressar sentenças, chamada de juízos. Essa linguagem formal permite naturalmente produzir juízos a partir de elementos da linguagem (objetos e propriedades), mas também permite mencionar juízos produzidos na linguagem e utilizar os resultados obtidos a partir desses novos juízos em, digamos, um nível lógico superior. Esse recurso de menção a elementos da linguagem seria normalmente chamado de 'metalinguagem' (por exemplo, no contexto de Teoria dos Conjuntos), mas perfeitamente admitido e necessário no sistema de ML. Dessa maneira, ML propõe um sistema formal, mas também uma linguagem universal, no sentido de não haver a necessidade de recorrer a uma metalinguagem para produzir asserções sobre expressões produzidas na linguagem de base; na TIT a linguagem de base teria, então, essa capacidade de mencionar seus próprios conteúdos, inclusive suas regras fundamentais.

Após essa breve recapitulação, temos o seguinte cenário do sistema. ML apresenta 4 formas básicas de juízo:

(i) A é um conjunto (A *set*),

(ii) A e B são conjuntos iguais ($A = B$),

(iii) a é um elemento do conjunto A ($a \in A$),

(iv) a e b são elementos iguais do conjunto A ($a = b \in A$).

(Martin-Löf, 1984, p. 5, *tradução nossa*)

onde as letras minúsculas correspondem a objetos-prova e as maiúsculas correspondem a domínios, como vimos anteriormente.

Também são quarto as formas básicas de expressar uma igualdade:

(1) $\equiv$ ou $=_{def.}$,

(2) $A = B$,

(3) $a = b \in A$,

(4) $I(A, a, b)$.

(Martin-Löf, 1984, p. 59, *tradução nossa*)

Aqui, (1) corresponde à Igualdade de Definição, i.e., uma Igualdade Intensional, e é tratada como uma "estipulação" de sentido de uma expressão linguística em relação a outra. Por exemplo:

$$\text{ss}0 \equiv 2$$

Já (2), (3) e (4) correspondem a Igualdades Extensionais, sendo que (2) e (3) são juízos nas formas (ii) e (iv), e (4) tem a forma de uma proposição (chamada de igualdade proposicional):

- em (2), "A = B", significa que os elementos que habitam "A" são os mesmos que habitam "B".
- em (3), "a = b ∈ A", significa que "a" e "b" produzem o mesmo elemento canônico em "A". Por exemplo:

$$2 = (1 + 1) \in \mathbb{N}$$

significa que "2" e "(1+1)" produzem o mesmo elemento canônico "ss0" nos "Naturais".

- já (4) é uma forma interna de (3), denominada Igualdade Proposicional.

Um exemplo de uma igualdade na forma (4) será apresentado na seção seguinte, quando faremos um exemplo de derivação de asserções singulares e gerais no sistema de ML. No caso da igualdade de "2" e "(1+1)", podemos expressá-la classicamente da seguinte maneira:

$$2 = (1 + 1)$$

Em TIT, podemos expressar essa igualdade de duas maneiras:

a) como uma igualdade canônica

$$2 = (1 + 1): \mathbb{N}$$

b) ou uma igualdade proposicional (uma proposição)

$$\mathrm{I}(\mathbb{N}, 2, (1 + 1))$$

Como vimos, no Intuicionismo, essa igualdade proposicional, que é interpretada em TIT como um domínio proposicional, precisa ser provada. Vejamos de maneira simples como isso se dá. Esse domínio pode ser interpretado como uma conjectura (como sugere ML a partir da interpretação BHK de proposições). Essa conjectura deve ser provada, de acordo com as regras da linguagem, a fim de verificarmos seu caráter necessário. Outra forma de interpretar é que o domínio acima faz um uso adequado das regras do sistema e, portanto, pode ser utilizado para especificar um objeto no sistema. Para provar esse domínio proposicional de igualdade, precisamos apresentar um objeto-prova "α" que nomeia uma derivação que demostra essa igualdade canônica. Assim, o juízo que assere que a proposição é verdadeira é expresso da seguinte maneira:

$$\alpha: \mathrm{I}(\mathbb{N}, 2, (1 + 1))$$

onde "α", nomeia a derivação que nos permite chegar no juízo canônico:

$$2 = (1 + 1): \mathbb{N}$$

O juízo canônico acima tem a forma (iv) com uma igualdade da forma (3). Portanto, a forma (4) de expressão de uma igualdade é uma proposição (ou domínio proposicional) no sistema de ML, cuja prova tem a forma do juízo correspondendo à igualdade em (3).

Passando para uma sentença geral, por exemplo, para exprimir uma sentença existencial como faríamos classicamente em:

$$\exists x\big(x = (1 + 1)\big),$$

em TIT, expressamos essa sentença a partir de um domínio proposicional que também utiliza uma igualdade proposicional:

$$[(\Sigma x: \mathbb{N}) \cdot I(\mathbb{N}, (1+1), x)]$$

Como qualquer domínio na TIT, ele precisa ser provado. Entretanto, a prova desse domínio é um par ordenado "(a, α)" que compreende:

i. um elemento "a" (canônico ou não) que, ao substituir "x", produz um juízo canônico demonstrável; e
ii. o nome de um objeto-prova "α" que nomeia a derivação do juízo produzido em "i".

É natural que possamos apresentar inúmeras provas para esse domínio, i.e., podemos apresentar diferentes derivações que produzam elemento canônico "ss0", como por exemplo:

a) $2 = (1+1) \in \mathbb{N}$

b) $(3-1) = (1+1) \in \mathbb{N}$

Ambos juízos acima, da forma (3), também permitem produzir uma igualdade da forma (iv). A derivação do primeiro será realizada na seção seguinte e a do segundo pode ser obtido a partir dos mesmos princípios e regras de inferência do primeiro.

Entretanto, além dos aspectos técnicos e práticos da utilização da linguagem para a produção de juízos e suas derivações, é importante ressaltar que ML distingue igualdade intensional (mais adequada à noção clássica de "identidade lógica" e interpretada aqui como 'identidade de sentido' ou 'sinonímia') de igualdade extensional (igualdade entre objetos). Uma igualdade intensional é, tão somente, uma relação de identidade de sentido entre expressões linguísticas, i.e., ambas expressam o mesmo sentido, podendo assim, dada uma definição, ser substituídas diretamente uma pela outra em uma asserção na linguagem, sem em nada modificar a semântica ou as regras do sistema. Uma igualdade intensional, portanto, não é expressa em uma asserção própria da linguagem. Ela é usada como uma forma de explicação da própria linguagem, na definição de termos e expressões a serem utilizadas na linguagem. ML dá o nome de 'Igualdade de Definição' a esse tipo de relação de igualdade intensional.

Já uma igualdade extensional é interpretada como uma relação entre objetos com o mesmo valor, i.e., remetem a uma mesma entidade no sistema (que devem produzir um mesmo elemento canônico). Assim, os objetos da relação teriam sentido independentemente um do outro, porém, remetendo-se às mesmas entidades no sistema. Ainda, em sua interpretação de proposições como domínios, ML estabelece outra distinção, dessa vez interna ao conceito de igualdade extensional, onde os objetos da relação de igualdade remetem à mesma entidade. É o que ML chama de 'Igualdade Proposicional'. Essa noção de "Igualdade Proposicional" é extremamente importante pois serve ao propósito de produzir as primeiras proposições (domínios proposicionais) no sistema, permitindo a produção de sentenças gerais, que com a combinação a outras proposições por meio dos operadores lógicos, evidencia a expansibilidade indefinida do sistema.

Uma observação curiosa poderia ser colocada acerca da igualdade de definição e sua importância para o sistema de ML. A questão que se coloca recai sobre o que significa para um sistema de asserções necessariamente "verdadeiras" uma expressão que, segundo o autor, "estipula" uma relação de sentido entre expressões linguísticas do sistema. Se uma linguagem é essencialmente um meio pelo qual se produz asserções, do que se trata algo que nada "assere" nessa linguagem? Há aqui um ponto controverso, pois a estipulação de identidade de sentido entre expressões linguísticas é o que permite a definição de diversos conceitos no sistema. Certamente, ML não pretende uma metalinguagem, mas um expediente dentro da linguagem que menciona expressões utilizadas no sistema, apesar de não serem tratadas como juízos propriamente ditos. Por se tratarem de definições, essas estipulações são relações importantes para o sistema formal. Observa-se, no entanto, que essas estipulações não são obtidas por derivações e tão pouco são utilizadas em derivações no sistema, são, portanto, arbitrárias.

Uma alternativa é tratar a proposta de ML como uma linguagem de especificações, em que uma identidade intensional deve ser compreendida como uma declaração de objetos e não como metalinguagem. Por certo que essas declarações são realizadas no âmbito da própria linguagem, uma vez que os objetos declarados são utilizados no contexto dos juízos, asserções propriamente ditas na linguagem.

Entretanto, não é nosso objetivo problematizar essa questão neste texto. O que não podemos mesmo perder de vista é o fato de que a noção de "Igualdade Proposicional" é a noção essencial, pois é o que permite, no sistema formal, produzir sentenças gerais utilizando quantificadores existencial ou universal, o que faz desse tipo de expressão (interna) de uma igualdade canônica, algo fundamental na TIT.

3.2.1.4. Derivação de sentenças singulares: canônica e proposicional

Em uma linguagem predicativa, sentenças singulares devem poder ser obtidas facilmente. Na TIT não é diferente, mas devemos ter em mente que os passos de explicitação das regras de formação devem estar presentes na derivação da sentença produzida, conforme explicamos anteriormente. Primeiramente começamos com um exemplo de produção de um juízo canônico. Vejamos.

Escolhemos como exemplos dois juízos de identidade entre elementos canônicos, ou, simplesmente, duas identidades canônicas. No primeiro exemplo, expressaremos a identidade "'1=1' habita os naturais". No segundo exemplo, que a igualdade entre "'1+1' e '2' habite os naturais". Em ambos exemplos, produziremos um juízo proposicional a partir dos juízos canônicos expressos. Assim, poderemos perceber como o grau de complexidade da representação de juízos aumenta rapidamente.

Exemplo 1

O que queremos expressar: identidade "1=1". Vejamos:

$$\boxed{1}\left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\mathbb{N}\ \text{set}} \\ \hline 0 \in \mathbb{N} & \begin{array}{c} a \in \mathbb{N} \\ a' \in \mathbb{N} \end{array} & 0 = 0 \in \mathbb{N} & \begin{array}{c} a = b \in \mathbb{N} \\ a' = b' \in \mathbb{N} \end{array} \end{array}\right\}$$

1. Declaração de "Naturais" como um conjunto do sistema: como vimos, o primeiro passo para produzir um juízo canônico passa pela declaração "axiomática" de um conjunto com as regras de inferência que permitirão produzir os elementos e as identidades de elementos do conjunto em novas derivações, como na que fazemos em seguida;

$$\boxed{2}\left\{\dfrac{\dfrac{\mathbb{N}\ \text{set}}{0 = 0 \in \mathbb{N}}}{s0 = s0 \in \mathbb{N}}\right\}$$

$$\boxed{3}\left\{\dfrac{}{\alpha \in [I(\mathbb{N}, s0, s0)]}\right\}$$

2. Derivação juízo de identidade canônica "$s0 = s0 \in \mathbb{N}$": uma vez tendo sido formalmente declarado no sistema o conjunto dos Naturais, é possível, a partir do juízo "$\mathbb{N}$ set", e das regras de inferência pressupostas da declaração dos

Naturais, produzir de maneira trivial o primeiro juízo canônico de identidade dos Naturais “$0 = 0 \in \mathbb{N}$” e, aplicando a operação de sucessão nesse juízo, produzir o juízo de identidade canônica “$s0 = s0 \in \mathbb{N}$”, como queríamos demonstrar inicialmente nesse exemplo;

3. Produção de uma primeira proposição (na notação de ML “$[I(\mathbb{N}, s0, s0)]$”): a partir do juízo de identidade canônica realizado, um novo juízo proposicional é realizado, contando com um objeto prova “α” e uma proposição. O objeto prova “α” nomeia a derivação que acabamos de proceder no passo “2” e prova a proposição produzida. A proposição “$[I(\mathbb{N}, s0, s0)]$” é chamada de igualdade proposicional e é interpretada como a igualdade entre os elementos “sucessor de 0” e “sucessor de 0” que habita os naturais. O juízo proposicional realizado, portanto, diz que a proposição produzida é verdadeira pois podemos obter uma derivação (formal no sistema) que prova essa proposição.

Exemplo 2

O que queremos expressar: identidade “1+1=2”. Desta vez, optamos por apresentar primeiramente a explicação dos passos para, em seguida, apresentar a derivação completa que produz, primeiramente, uma sentença singular a partir de um domínio primitivo, os naturais, e uma identidade canônica. Por fim, produzimos o juízo proposicional de um objeto prova que prova uma igualdade proposicional. Vejamos:

1. A declaração do conjunto dos Naturais deve ser feita no sistema, ao menos uma vez.

$$\frac{\mathbb{N}\ \text{set}}{0 \in \mathbb{N} \qquad \dfrac{a \in \mathbb{N}}{a' \in \mathbb{N}} \qquad 0 = 0 \in \mathbb{N} \qquad \dfrac{a = b \in \mathbb{N}}{a' = b' \in \mathbb{N}}}$$

2. Declarar outras regras de inferência a serem utilizadas na derivação: 2.1. regra da transitividade[60]; 2.2. regras da adição[61].

$$\boxed{2.1}\left\{\quad \frac{a = b : \mathbb{N} \qquad b = c : \mathbb{N}}{a = c : \mathbb{N}} \quad\right\}$$

$$\boxed{2.2}\left\{\quad \frac{a : \mathbb{N} \qquad y' : \mathbb{N}}{R(0, a, (x, y)y') = a : \mathbb{N}} \qquad \frac{a : \mathbb{N} \qquad b : \mathbb{N} \qquad y' : \mathbb{N}}{R(a', b, (x, y)y') = \big(R(a, b, (x, y)y')\big)' : \mathbb{N}} \quad\right\}$$

Temos nas regras de adição acima:

i. y' - operação de sucessor;
ii. $R(a, b, (x, y)y')$ - operação de recursão natural usada para a obtenção de um elemento canônico a partir das premissas iniciais da derivação.

3. Derivação do juízo de igualdade canônica de que "1+1=2 habita os Naturais":

3.1. Produzir os elementos canônicos que irão saturar (ou substituir) as variáveis x e y na regra da adição para "1+1";

3.2. Produzir os elementos canônicos que irão saturar (ou substituir) as variáveis x e y na regra da adição para "0+1";

3.3. Utilizar a regra da transitividade para substituir "$R(0, s0, (x, y)y')$" por "s0" no juízo da soma de "1+1";

3.4. Utilizar a operação de sucessor ao elemento "s0" para produzir o elemento "ss0" e encontrar o juízo que assere a igualdade canônica "1+1=2 habita os Naturais".

---

[60] Martin-Löf (1984, p. 14)

[61] A regra de inferência da adição é obtida a partir de uma regra geral de formação de funções com domínio em Naturais e contra domínio em um conjunto derivado dos Naturais ($\mathbb{N} \rightarrow C_{(0)}$) no âmbito do sistema (Martin-Löf, 1984, p. 71-74).

4. O passo seguinte seria a formação de um juízo de igualdade proposicional, i.e., um juízo a partir de um domínio proposicional de igualdade. Para isso, é preciso declarar a regra de introdução de uma igualdade proposicional (Martin-Löf, 1984, p. 60).

$$\frac{a = b : A}{\alpha : [I(A, a, b)]}$$

onde “α” nomeia a derivação que prova a proposição “$[I(A, a, b)]$”.

Vejamos, agora, a derivação completa:

$$\dfrac{\dfrac{\boxed{3.1}\ \dfrac{\dfrac{0:\mathbb{N}}{s0:\mathbb{N}} \qquad \dfrac{0:\mathbb{N}}{s0:\mathbb{N}}}{R(s0, s0, (x,y)y') = \big(R(0, s0, (x,y)y')\big)' : \mathbb{N}} \qquad \dfrac{0:\mathbb{N} \qquad \dfrac{0:\mathbb{N}}{s0:\mathbb{N}}}{R(0, s0, (x,y)y') = s0 : \mathbb{N}}\ \boxed{3.2}}{\boxed{3.3}\ R(s0, s0, (x,y)y') = (s0)' : \mathbb{N}}}{R(s0, s0, (x,y)y') = ss0 : \mathbb{N}\ \boxed{3.4}}$$

$$\boxed{4}\ \ \alpha : [I(\mathbb{N}, R(s0, s0, (x,y)y'), ss0)]$$

Nós podemos ainda simplificar a derivação utilizando uma notação mais amigável[62].

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{0:\mathbb{N}}{1:\mathbb{N}} \qquad \dfrac{0:\mathbb{N}}{1:\mathbb{N}}}{1 + 1 = (0 + 1)' : \mathbb{N}} \qquad \dfrac{0:\mathbb{N} \qquad \dfrac{0:\mathbb{N}}{1:\mathbb{N}}}{0 + 1 = 1 : \mathbb{N}}}{1 + 1 = (1)' : \mathbb{N}}}{1 + 1 = 2 : \mathbb{N}}}{\alpha : [I(\mathbb{N}, (1 + 1), 2)]}$$

O juízo proposicional produzido assere que a proposição “$[I(\mathbb{N}, (1 + 1), 2)]$” é habitada por uma prova “α”. Isso significa que a igualdade entre “$(1 + 1)$” e “2” é ‘demonstrável’, tendo como objeto prova “α”, com a sua derivação em forma de árvore exposta acima.

---

[62] Em (Martin-Löf, original, p. 74), temos a seguinte definição: $a + b \equiv R(b, a, (x,y)y')$, que nos permitiu fazer as substituições na derivação seguinte.

3.2.1.5. Derivação de uma sentença geral proposicional

Uma vez apresentadas as maneiras de se expressar sentenças singulares como juízos canônicos e proposicionais, podemos passar à apresentação de como expressamos uma sentença geral no sistema, que deve ser obrigatoriamente um juízo proposicional e veremos o porquê.

O que queremos expressar: que existe um "x" que é igual a "1+1". Lembrando que essa igualdade será do tipo proposicional no domínio dos Naturais.

Classicamente, a notação para uma sentença assim seria expressa da seguinte maneira:

$$\exists x\big(x = (1+1)\big) \tag{1}$$

No entanto, para expressar uma sentença geral como essa no sistema de ML, é necessário explicitar todas as condições necessárias para se ter o direito de fazer tal asserção. Vejamos como ficaria a asserção completa e, em seguida, daremos a explicação das razões para que essa asserção seja feita desta forma:

$$(ss0, \alpha): [(\Sigma x: \mathbb{N}) \cdot I(\mathbb{N}, R(s0, s0, (x, y)y'), x)] \tag{2}$$

ou, em notação simplificada:

$$(2, \alpha): [(\Sigma x: \mathbb{N}) \cdot I(\mathbb{N}, (1+1), x)]$$

Agora, a explicação:

Diferentemente da lógica clássica, para se asserir um existencial, é necessário mais do que uma sentença singular (ou juízo canônico) produzida. Por exemplo, seria correto classicamente:

$$\frac{P_{(a)}}{\exists x P_{(x)}} \tag{3}$$

No sistema de ML, para asserir "$P_{(a)}$" é preciso antes explicitar a condição de "existência" de "a", i.e., deve-se explicitar o conjunto "A", classicamente dado como garantido. Além disso, é preciso explicitar uma prova (demonstração ou, no sistema de

ML, derivação) "p" de "$P_{(a)}$". A partir dessas explicitações, basta aplicar a regra de introdução da "União Disjunta de uma Família de Conjuntos" (Martin-Löf, 1984, p. 39):

$$\frac{a{:}A \qquad\qquad p{:}P_{(a)}}{(a{,}p){:}[(\Sigma{:}A).(P_x)]} \tag{4}$$

e, agora, a aplicação da regra à sentença que queremos produzir "existe um "x" igual a "1+1"":

$$\frac{2{:}\mathbb{N} \qquad\qquad \alpha{:}I(\mathbb{N},(1+1),2)}{(2{,}\alpha){:}\big[(\Sigma_x{:}\mathbb{N}).\big(I(\mathbb{N},(1+1),x)\big)\big]} \tag{5}$$

onde,

i. $\alpha{:}\,I(\mathbb{N},(1+1),2)$ - é o juízo que produz o primeiro tipo de proposição, uma igualdade proposicional, sendo essa uma sentença singular;

ii. α - é a derivação da identidade canônica entre "$(1+1)$" e "2" e que prova a igualdade proposicional "$I(\mathbb{N},(1+1),2)$"; e

iii. $ss0 \equiv 2$; $s0 \equiv 1$; $R(s0, s0, (x, y)y') \equiv 1+1$; $\Sigma \equiv \exists$.

Finalmente, no sistema de ML, (5) diz que: o par ordenado "$(2, \alpha)$", composto por um elemento de "ℕ" e um objeto-prova "α", é uma prova de que há (ao menos) um tal elemento "x" em "ℕ" que é definicionalmente idêntico a "$1+1$". Com isso pensamos ter coberto o que há de mais relevante para a compreensão da noção de "proposição" no sistema de ML, lembrando que há ainda mais detalhes acerca da utilização e mesmo da interpretação dessa noção que não cabe neste texto, pelo que passamos a tratar a seguir da noção de "objeto-prova" com maior atenção.

3.3. Objeto-prova

Esta seção serve para apresentar uma noção importante para o sistema de ML cuja correspondente na teoria intuicionista de Brouwer deveria recair sobre a noção de "construção". No entanto, como mencionamos algumas vezes ao longo do texto, a interpretação de ML sobre as noções intuicionistas fundamentais preserva sua essência, mas nos apresenta um avanço conceitual e filosófico que justamente permite o desenvolvimento de sua TIT. Assim, para ML, a noção de "prova" precisa ter um tratamento cuidadoso, pois envolve algumas instâncias, digamos, que não podem ser confundidas, especialmente quando lidamos com essa noção em um contexto formal.

No sistema de ML, uma prova é, naturalmente, algo que nos permite asserir que uma proposição é verdadeira, mas é também uma estrutura que nos conduz à produção de novos juízos. Por isso, em seu sistema, ML interpreta a noção de "prova" como tendo duas formas: como uma demonstração (uma derivação) ou um objeto-prova, que por sua vez nomeia uma demonstração.

> Martin-Löf faz uma distinção entre dois sentidos de prova. Um sentido é o ontológico e, nesse sentido, ele chama *objetos-prova* de prova. Ele mantém o que o que os intuicionistas chamaram de provas em suas explicações sobre significado realmente equivale a o que ele chama de objetos-prova. O outro sentido de prova é o epistêmico usual e, nesse sentido, ele chama *demonstrações* de provas. (Prawitz, 2012, p. 45, *tradução nossa*)

Fica clara a distinção feita por ML entre dois tipos de prova: de juízo e de proposição. O termo 'prova de juízo' se refere à derivação que dá o direito de fazer o respectivo juízo, provado pela derivação. Já a 'prova da proposição' é simplesmente o sinal ou combinação de sinais à esquerda dos dois pontos ":" (ou do sinal de pertença "∈").

> Para distinguir entre provas de juízos (usualmente na forma de árvore) e provas de proposições (aqui identificado a elementos, portanto, à esquerda de ∈) nós reservamos a palavra construção para o segundo e a usamos quando ocorrer confusão. (Martin-Löf, 1984, p. 6, *tradução nossa*)

Assim, em:

$$\dfrac{\boxed{1}\left\{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{0:\mathbb{N}}{1:\mathbb{N}} \quad \dfrac{0:\mathbb{N}}{1:\mathbb{N}}}{1+1=(0+1)':\mathbb{N}} \qquad \dfrac{0:\mathbb{N} \quad \dfrac{0:\mathbb{N}}{1:\mathbb{N}}}{0+1=1:\mathbb{N}}}{1+1=(1)':\mathbb{N}}}{1+1=2:\mathbb{N}}\right\}}{\alpha:[I(\mathbb{N},(1+1),2)]}$$

, "1" é uma derivação (em forma de árvore) e prova do juízo "$\alpha:[I(\mathbb{N},(1+1),2)]$", e "$\alpha$" é o objeto-prova que prova a proposição "$[I(\mathbb{N},(1+1),2)]$".

ML ainda esclarece a distinção entre uma prova canônica e não canônica, para dizer que ambas são tratadas como objetos-prova em seu sistema, de modo que a diferença entre elas recai tão somente na possibilidade de obtenção de um elemento canônico de maneira direta (prova canônica) ou de maneira indireta (prova não canônica). ML chama de 'método de verificação direto' aquele que nos permite chegar ao elemento canônico diretamente como em um cálculo direto e finito, enquanto um 'método de verificação indireto' nos permitiria apenas saber que é possível obter um elemento canônico que prova a proposição, caso executássemos o tal método, como por exemplo em uma definição indutiva dos números naturais sabemos que qualquer número natural pode ser obtido, mas, apenas ao executar atualmente o método, obteremos o elemento pretendido. Em ambos os casos de verificação, direta ou indireta, a prova estaria formalmente e corretamente representada e cumpriria sua função de provar a proposição, sendo, portanto, tratadas como objetos-prova no sistema.

> Nós temos então duas possibilidades terminológicas, seja para chamar provas que entram nas explicações de significado das constantes lógicas simplesmente "provas", caso em que, em geral, nós teríamos apenas um método de prova, ou para chamar provas das formas prescritas pelas explicações de significado "provas canônicas", ou "verificações diretas", caso em que também temos que permitir provas não canônicas, ou verificações indiretas. Escolher a segunda alternativa, uma prova não canônica, ou verificação indireta, torna-se claramente o mesmo que um método de prova canônica, ou verificação direta. (Martin-Löf, 1998, p. 111, *tradução nossa*)

Assim, o objeto-prova, que prova a proposição, é o mesmo que nomeia a derivação que serve como "prova do juízo" em que se encontra aquele mesmo objeto-prova, como havíamos prevenido quando discutimos a possibilidade de uso e menção na própria linguagem. Entretanto, apesar de ML não apresentar formalmente ou explicar exaustivamente a noção de "derivação" em seu sistema, derivações são passos inferenciais que utilizam as regras de inferência disponíveis no sistema, premissas e até mesmo conclusões obtidas a partir de outras derivações dentro do próprio sistema. Na citação abaixo, "r" é um sinal que corresponde a um objeto-prova que nomeia uma derivação completa que prova a igualdade entre os elementos "a" e "b", ambos habitantes do domínio "A".

> se $a = b \in A$, então existe uma prova canônica r de $I(A, a, b)$. (Martin-Löf, 1984, p. 60, *tradução nossa*)

Entretanto, essas explicações iniciais, sobre como ML se refere às provas em seu sistema, ainda carece de um tratamento mais aprofundado. É o que fazemos na seção seguinte ao apresentarmos uma tripla distinção de noções conectadas à noção intuicionista original de "construção".

3.3.1. Ato de prova, objeto-prova e traço de prova

Como havíamos adiantado na seção 2.2, ML oferece três caracterizações possíveis conectadas à noção de "construção", ainda levando em consideração sua relação de sinonímia com o termo 'prova'. Certamente, uma noção fundamental em uma teoria não pode ter oscilações de significado. Assim, o que ML faz na verdade é uma elucidação necessária para que interpretações ambíguas não recaiam sobre um mesmo termo, distinguindo essas interpretações e as colocando em seus devidos lugares, algo fundamental para sua proposta de formalização construtiva.

Para ML, o termo 'prova' aparece frequentemente relacionado a três interpretações: a. um processo (de construir a prova); b. um objeto (como resultado do processo de construção); c. um "caminho" (*track*)[63]. Resumidamente, (a) é o ato mental de construção, realizada ou executada pelo indivíduo cognoscente, (b) é o que dá o direito de produzir asserções matemáticas no sistema de ML[64], (c) é aquilo que pode ajudar o indivíduo executar novamente o ato ou, nas palavras de Brouwer, "originar em outras pessoas cópias daquele ato"[65].

> (…) em abril de 1992, Per Martin-Löf chamou a atenção para uma distinção tripartite análoga com respeito ao termo 'prova':
>
> (a) Ato de prova / processo
>
> (b) Objeto-prova / construção[-objeto]
>
> (c) Traço de prova / caminho (Sundholm, 1993, p. 55, *tradução nossa*)

Essa distinção tripla de noções relacionadas ao termo 'prova' suscita algumas questões que devemos elucidar. Primeiramente, devemos dizer que as três noções são, como vimos na seção 2.2, mencionadas por Brouwer ou Heyting e são relacionadas à sua noção fundamental de "construção", de modo que essa separação em noções distintas e específicas realizada por ML não diverge de todo da noção original de "construção"

[63] Aqui, o termo '*track*', traduzido como 'caminho', claramente é uma metáfora para o percurso mental percorrido ao longo da construção da prova, de modo que, a partir de sinais e sons correspondentes àquele caminho ou percurso, é possível ajudar o próprio indivíduo a realizar novamente a construção realizada ou mesmo ajudar outra pessoa a realizar uma "cópia das construções matemática e raciocínios" (Brouwer, Ed. Heyting, 1975).
[64] Não devemos confundir objeto-prova e construção matemática. O objeto-prova corresponde aos *mathematical construction-objects* de Heyting (Sundholm, 1993, p.55), enquanto uma construção matemática é interpretada como o objeto do conhecimento, que corresponde a um juízo no sistema de ML.
[65] Ver seção 2.2.

pretendida no Intuicionismo. Por outro lado, devemos dizer que existe uma razão de cunho prático para ML proceder com tal distinção. E essa razão recai sobre a natureza das entidades relacionadas àquelas noções. Para Brouwer não há dúvidas, construção é uma entidade mental, não havendo qualquer margem para uma interpretação da noção como uma entidade física qualquer que seja, muito menos uma expressão sintática.

Já sob a perspectiva de ML e sua proposta de formalização, a noção de "construção" original carece de uma correspondente sintática adequada que não se confunda com a entidade mental. Assim, ML disseca e esclarece a noção intuicionista original de "construção" em três noções, todas mentais: "ato de prova", "construção-objeto" e "objeto do ato de prova". O ato de prova é, talvez, o de compreensão imediata, por se tratar da noção mais próxima da noção original de Brouwer. Já as noções de "construção-objeto" e "objeto do conhecimento" são particularmente especiais pois correspondem, respectivamente, às noções de "objeto-prova" e "juízo" no sistema de ML, conforme veremos mais adiante.

Esse desmembramento feito por ML em relação à noção de "construção" se justifica pelo reconhecimento de que em um sistema formal só se pode trabalhar com ou manipular sinais, expressões sintáticas, que, por sua vez, podem corresponder a entidades mentais ou mesmo a outras expressões no sistema, como vimos no caso do sistema de ML. Assim, nos parece natural a ideia de que, partindo do princípio de que em um sistema formal nomes são manipulados e não propriamente as entidades que aqueles nomeiam, devemos ter bem definidas no sistema as noções que correspondam às entidades com as quais desejamos trabalhar.

> (...) nós atribuímos às entidades sintáticas com as quais estamos lidando certos objetos matemáticos e **falamos desses objetos como as interpretações das entidades sintáticas**. (Martin-Löf, 1987, p. 407, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

> A melhor redação para o princípio poderia ser "provas como nomes", mas poucas pessoas gostariam disso. A maioria das pessoas de fora não estaria ciente do fato de que os **sistemas de verificação lidam apenas com nomes de objetos, não com os próprios objetos**. (de Bruijn, 1995, p. 48, *grifo nosso, tradução nossa*)

Além das entidades intuicionistas mencionadas temos, naturalmente, em um sistema formal a necessidade de registrar os passos necessários para a obtenção de uma prova matemática, que ML chama de 'rastro de prova'. Sundholm (1993, p. 62) apresenta a metáfora utilizada por ML para explicar a noção de "rastro de prova" pretendida. A ideia é a de um esquiador que percorre um certo caminho e chega à linha de chegada de modo que os rastros deixados na neve poderiam ser utilizados para auxiliar um outro esquiador, ou o próprio, a realizar novamente o percurso e chegar ao mesmo objetivo. É importante notar que mesmo a ideia de ML de rastro de prova já estava, de certa maneira, presente nas ideias de Brouwer como vimos na seção 2.2.

> **As palavras de sua demonstração matemática** meramente acompanham uma construção matemática que é realizada sem palavras. (…)
>
> (…) As pessoas tentam, **por meio de sons e símbolos**, originar em outras pessoas **cópias de construções matemáticas** e raciocínios **que elas mesmas criaram**; **da mesma forma que elas tentam ajudar a própria memória**. Dessa maneira, a *linguagem matemática* surge, e como seu caso especial, a *linguagem do raciocínio lógico*. (Brouwer, Ed. Heyting, 1975, p. 73, *grifo nosso, tradução nossa*)
>
> Provar algo para você mesmo é simplesmente conhecê-lo. **E provar algo a outra pessoa é tentar fazer com ele ou ela conhecer a prova**. (Martin-Löf, 1996, p. 18, *grifo nosso*, *tradução livre*)

Em sua metáfora do esquiador, ML explica que:

i. realizar o percurso equivale ao "ato de provar" ou (a);
ii. o cruzar a linha de chegada é o resultado de se realizar o percurso, portanto equivale ao objeto do conhecimento que, por sua vez, contempla um "objeto-prova" ou (b);
iii. e as marcas deixadas pelo esqui na neve pelo esquiador que realizou o percurso equivalem ao "rastro de prova" ou (c).

A ideia é que a partir do rastro de prova disponibilizado por um primeiro indivíduo, um segundo poderia realizar um novo percurso (mental), se não exatamente igual (até mesmo pela impossibilidade de se verificar uma tal identidade), similar a ponto de ao menos atingir o mesmo objetivo (construir a mesma construção). Por fim, ML esclarece que esse rastro de prova pode muito bem ser feito com recurso a um "registro escrito ou uma descrição do caminho percorrido", o que é feito de maneira formal em seu sistema.

> Martin-Löf considera o caso de uma excursão de esqui cross-country, realizada por um esportista. O ato, ou ação, é o de completar uma certa turnê, naturalmente, é o objetivo alcançado. **O rastro**, ou pista, deixado por esse ato de esquiar, é, nesse caso particular, devido à natureza da atividade, **nada além de um par de pistas, talvez também complementadas com sinais ou bandeiras. Essa pista do ato de esquiar tem a propriedade de habilitar outro esportista a realizar um ato que produzirá o mesmo objeto**, ou seja, o objetivo em questão, simplesmente seguindo o par de pistas e atendendo às bandeiras e outros sinais. **O ato de esquiar pode deixar um rastro adicional na forma de um registro escrito ou uma descrição do caminho percorrido**. (Sundholm 1993, 62, grifo nosso, tradução nossa)

É importante notar que a analogia feita por ML na metáfora do esquiador permite verificar a correspondência entre entidades mentais e as sintáticas de seu sistema. Vejamos:

i. o ‘ato de prova’ é o ato mental de construir a corresponde, no sistema, à derivação completa incluindo o seu último ‘juízo’;
ii. o ‘objeto-prova’ corresponde à ‘construção-objeto’ que, por sua vez, é parte do ‘produto do ato mental’ que corresponde ao ‘juízo’;
iii. o ‘rastro de prova’ corresponde ao caminho mental percorrido pelo indivíduo e que pode ser percorrido novamente com ajuda de, por exemplo, uma demonstração matemática.

Em outras palavras, ML apresenta essa distinção tripla (ato de prova, objeto-prova e rastro de prova) por estarem conectadas entre si e por se tratarem de noções importantes em sua teoria, sendo que as noções de “objeto-prova” e “rastro de prova” (interpretado como a derivação de uma prova) são próprias do sistema formal de ML. Assim, apesar de ML mencionar a distinção entre ato, objeto e rastro[66], dessas três noções, apenas as duas últimas são de real interesse e, portanto, utilizadas em seu sistema.

Vale esclarecer que a primeira noção apresentada, a de ato de prova, não tem um lugar explícito no sistema de ML até mesmo por se tratar de um processo mental. No entanto, percebe-se que a derivação de uma prova, em uma sequência de juízos, desempenha o papel de rastro de prova que permite a execução de um novo ato e a produção do mesmo objeto do ato. Podemos dizer, então, que a derivação corresponde aos passos inferenciais mentais executados no ato de prova e que, portanto, é a

[66] Martin-Löf faz uma longa discussão sobre a importante distinção entre ato e objeto em (Martin-Löf, 1990).

correspondente no sistema de ML ao ato de prova, cujo maior interesse recai sobre seu produto, o objeto obtido ao fim do processo.

O produto do ato de prova tem como correspondente no sistema de ML o juízo, sendo interpretado como objeto do conhecimento. Isso significa que o ato mental executado tem como resultado o conhecimento do indivíduo que o executou obtendo a prova da proposição, i.e., a execução do ato mental dá o direito ao indivíduo de produzir um juízo. O ato se trata, portanto, do processo mental que executamos quando desejamos provar algo, no nosso caso, uma proposição. Uma vez executado esse ato, temos o direito de produzir a asserção de que provamos aquela proposição. ML não tem pretensão de se referir ao processo de construção, já que ele, enquanto não finalizado, não garante o direito a produzir qualquer asserção, sendo, portanto, de menor relevância para seu sistema.

Assim, sendo o sistema de ML uma linguagem que trabalha com os nomes das entidades que desejamos ter correspondidas ali, o tipo de asserção possível combina justamente objetos-prova e proposições por meio da relação de "provar" (tratada aqui como sinônima de "habitar"), produzindo uma expressão que se pode ler da seguinte maneira: "um objeto-prova *a* prova a proposição *A*". Abaixo apresentamos uma forma básica de asserção na linguagem proposta por ML e identificamos as noções mencionadas anteriormente.

objeto-prova   asserção   proposição

$$\overbrace{a \in A}$$

ou

$$a : A$$ [67]

No entanto, por questões de praticidade, o termo 'prova' é frequentemente utilizado para designar as expressões sintáticas às quais nos referimos anteriormente como 'objeto-prova'. Por isso, ML (1984) também faz uma distinção entre dois usos do termo 'prova', deixando claro que, em seu sistema, podemos nos referir a: provas de

[67] Martin-Löf utiliza o símbolo ":" para a relação entre objeto-prova e proposição em seu sistema, como pode ser notado em Martin-Löf (1994, p. 91), mas também podemos encontrar o uso do símbolo "∈" com a mesma finalidade (Martin-Löf, 1984, p.6).

proposição e provas de juízo. Como vimos, a prova de proposição é o próprio objeto-prova. Já a prova de juízo é também sintática, mas designa uma sequência de juízos que permitem a produção de um último juízo após uma chamada derivação, ou demonstração, no sistema. Essa, inclusive, é a maneira como ML interpreta a ideia de prova formal de teoremas como veremos na sessão específica sobre juízos.

A prova de juízo é, então, uma sequência de juízos (expressões sintáticas) que corresponde a uma sequência de passos inferenciais mentais que resultam em um juízo pretendido[68]. Essa sequência de juízos, 'prova de juízo' ou mesmo demonstração, é o que ML chama de 'rastro de prova', i.e. aquilo que permite que seja executado (novamente pelo sujeito cognoscente ou por um outro) o ato mental de construir a prova do último juízo da sequência.

Prova de juízo ou demonstração

$a \in A \longrightarrow$ Juízo ou teorema no sistema

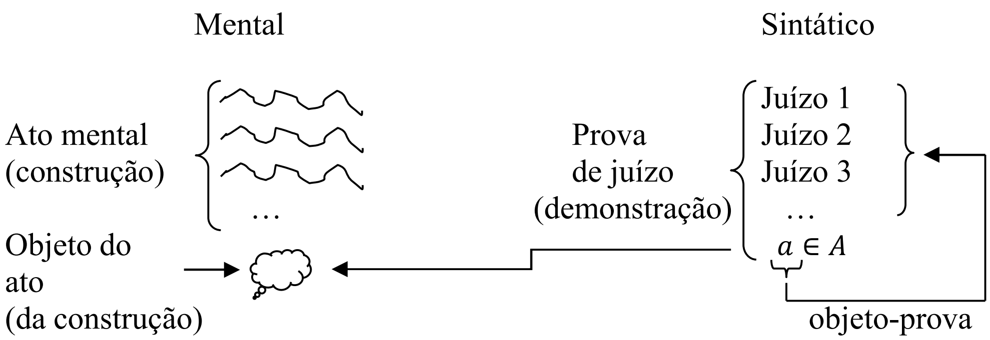
(Martin-Löf, 1987, p. 416, *tradução nossa, adaptação nossa*)

> A é verdadeira é **o juízo** ou, em geral, o objeto do ato, que neste caso **é um objeto de conhecimento** (...) (Martin-Löf, 1996, p. 14, *grifo nosso, tradução nossa*)

No exemplo acima, a linha vertical indica uma certa sequência de juízos anteriores a "$a \in A$", todos eles correspondendo, juntos, ao ato mental de construção da prova que permite a produção do objeto desse ato, o último juízo da sequência. ML chama esse ato mental de 'ato de provar' ou 'ato de conhecer' e, consequentemente, chama o produto desse ato de 'objeto de conhecimento' ou, simplesmente 'juízo'. No entanto, ainda não chegamos ao objeto-prova. Esse objeto-prova é parte do objeto de conhecimento ou juízo. Como podemos ver no exemplo acima o objeto prova é aquilo que localizamos à esquerda do símbolo "$\in$", i.e., o objeto-prova corresponde no exemplo ao símbolo "a".

[68] Não se deve interpretar esta sequência de juízos como tendo uma correspondência paritária com o número de etapas no processo de construção. Devemos ter em mente que se trata de um "rastro de prova" servindo como uma demonstração formal no sistema de Martin-Löf, mas que fundamentalmente serve como uma espécie de auxílio para que o sujeito cognoscente, digamos, reconstrua o objeto matemático por meio de um novo ato mental.

Esse objeto prova “a” é, então, apenas parte do juízo, que corresponde de fato à construção intuicionista. Portanto, no sistema de ML, o objeto-prova desempenha a função específica de mencionar uma demonstração no sistema. ML o usa, então, para mencionar o rastro de prova, ou a sequência de juízos anteriores, relativos à prova do juízo do qual é parte, de modo que esse objeto-prova designe aquilo que permite, de fato, a produção de um juízo enquanto objeto de conhecimento. No nosso exemplo, o objeto-prova “a” menciona uma demonstração obtida anteriormente e, por isso, e somente por isso, pode-se dizer ser uma prova de “A”.



Dessa forma, temos do lado mental um ato e um objeto do ato e, do lado sintático, uma demonstração e um objeto de conhecimento, o juízo, do qual fazem parte o objeto-prova e a proposição provada por ele. É importante ressaltar que não parece ser o caso de se tentar estabelecer uma relação de correspondência simétrica entre ato mental/objeto do ato e demonstração/juízo. Como já mencionamos, a derivação não se pretende uma correspondência para etapas de um certo ato mental, não há uma tentativa de se buscar uma correspondência entre rastro de prova e uma entidade mental qualquer que seja (ainda que Brouwer tenha mencionado a memória como aquilo que seria ajudada por uma demonstração matemática, a memória sendo, eventualmente, uma entidade mental).

> Minha resposta às perguntas, o que é um juízo? e, o que é uma prova de um juízo? é simplesmente que uma prova de um juízo é um ato de conhecer e que o juízo que ele prova é o objeto desse ato de conhecer, isto é, um objeto de conhecimento. (Martin-Löf, 1987, p. 417, *tradução nossa*)

Por isso, o “objeto prova” é parte de um “objeto de conhecimento”, uma asserção no sistema, tratado como um teorema ou como um juízo não-imediato (que necessita de uma sequência de juízos para ser produzido). Assim, essa sequência de juízos tem, formalmente, por objetivo tornar evidente um juízo, mas também possibilitar que todos os passos mentais para a evidência do juízo possam ser executados novamente pelo indivíduo que originalmente os havia executado ou mesmo para que outra pessoa possa executá-lo[69]. Isso é o que ML chama de ‘conhecer uma prova’ e ‘possibilitar que outra pessoa conheça a prova’.

O que entendemos ser importante enfatizar é que as ideias de ML não alteram a noção intuicionista original de “prova”, mas que não se pode confundir as noções apresentadas para o sistema com as da teoria intuicionista. Enfim, no contexto do sistema de ML, temos juízos expressos sintaticamente, como em “$a \in$ A”. Nota-se que, intuicionisticamente, o que se pretende por “prova” enquanto construção mental não pode “estar à esquerda de “∈”, i.e., localizada à esquerda de uma expressão sintática. Nesse caso, ML oferece sua interpretação de prova de proposição e prova de juízo, acomodando as noções intuicionistas originais.

O que ainda não é tratado no âmbito dessa discussão é como ML trata a noção de “existência” e sua relação com a construção, a prova da proposição. Como vimos no capítulo 2, Brouwer associa a existência à construção mental da prova pelo sujeito cognoscente. ML mais uma vez vai além e apresenta uma interpretação cuidadosa acerca da existência de provas de proposição e sua eventual existência potencial. É o que veremos na próxima seção.

[69] Veremos as explicações em detalhes na seção específica sobre juízos.

3.3.2. Existência potencial e verdade potencial

Em se tratando da noção intuicionista de "existência", devemos dizer que ML também mantém a conexão com a noção de "prova", apresentada por Brouwer. No entanto, ML estende sua análise a respeito da relação entre provas e proposições para dizer que as provas são potencialmente existentes, de modo que a possibilidade de se construir uma prova é mesmo anterior à própria construção dessa prova, possibilidade essa entendida como sendo conferida pela proposição a ser provada ou "tornada verdadeira"[70].

> Tem sido frequentemente apontado que é muito contraintuitivo dizer que uma proposição se torna verdadeira quando ela for provada, e tem sido frequentemente sustentado contra os intuicionistas que eles interpretam a noção de verdade dessa maneira... é claro, mesmo um intuicionista não pode deixar de entender essa objeção, e deveria responder **que há, não apenas a noção de verdade atual, mas também a noção de verdade potencial**, e que, mesmo antes da proposição ser provada, ela poderia ser provada, o que significa que, embora ainda não seja atualmente verdadeira, ela era potencialmente verdadeira. Assim, a noção de verdade potencial não é tensa da mesma forma que a noção de verdade atual. Nessa análise da noção de verdade, isto é, verdade potencial, fica claro que não existem proposições que sejam verdadeiras, mas que não possam ser provadas, porque a verdade potencial é simplesmente analisada como **existência potencial da prova**. (Per Martin Löf, 1990, p. 142, *tradução nossa*, *grifo nosso*)

A "existência potencial de provas" traria uma nova interpretação para a noção intuicionista de "construção". Brouwer parecia rejeitar uma realidade matemática platônica, como admitiam os clássicos. No entanto, apesar de contemplar atos empíricos para suas construções matemáticas, essas eram intrinsecamente conectadas a proposições, interpretadas como condições para a execução do ato mental. Mesmo sem dar o devido tratamento ontológico para a noção de "proposição", uma vez tomando a noção de

[70] A ideia de "tornar verdadeira" uma proposição é explicitamente encontrada em um artigo de 1990 de ML (Martin-Löf, 1990, p.142), e em outros de Sundholm (1993, p. 62) (1994, p. 121-122). No entanto, não é uma noção a ser explorada neste momento, cabendo dizer que as implicações dessa interpretação de objetos-prova como tornadores de verdade para proposição é extremamente problemática do ponto de vista da lógica subjacente presente no sistema de ML, como bem observado por Prawitz (2012). A discussão sobre a ideia de tornadores de verdade não parece ter tido uma discussão ou desenvolvimento adequado ou exaustivo por parte de ML, até o momento. Por esse motivo mesmo, não devemos utilizar a expressão ou a ideia de "tornar verdadeira" uma proposição, mantendo apenas a ideia original que proposições são verdadeiras, i.e., provas podem ser construídas para aquela proposição. Já a noção de "falsidade", apesar de utilizada no sistema de ML, é interpretada de maneira distinta à forma como a noção de "verdade" se relaciona com a noção de "proposição" conforme veremos na seção 3.4.4.

"construção" como sendo primitiva para a teoria, é inevitável inferir que a proposição seja uma entidade abstrata, conforme vimos neste capítulo.

A partir desse raciocínio, podemos discutir a ideia de uma existência atual e potencial da prova. Atual, após ter sido construída por um sujeito cognitivo, e potencial, pela possibilidade de se atender as condições impostas por uma proposição. Toda a ideia fica mais clara quando ML apresenta a existência potencial da prova como sendo uma consequência da definição de "verdade potencial" da proposição[71].

> O segundo ponto que quero enfatizar é que, na definição de verdade potencial, não podemos mudar as palavras *A pode ser provada* em *A foi, está sendo ou será provada*, ou seja, será provada em algum momento do curso da história, porque a relação conceitual entre dizer que algo foi, está sendo ou será feito e dizer que isso pode ser feito é que temos um vínculo na direção de que, se algo foi, está sendo ou será feito, então isso pode ser feito, mas não na direção inversa. No caso de provar uma proposição, isso significa que, se uma proposição foi, está sendo ou será provada, certamente pode ser provada, ou seja, **é potencialmente verdadeira**, mas não há absolutamente nenhuma razão para acreditar que pode ir na direção oposta. O princípio que acabamos de expor é novamente um princípio que teve uma formulação escolástica sucinta: é o princípio *Ab esse ad posse valet consequentia* (illatio). (Martin-Löf, 1990, p. 143, *tradução nossa*, *grifo nosso*)

> (...) claramente existem proposições verdadeiras cuja verdade não foi experimentada, ou seja, proposições que podem ser mostradas verdadeiras no futuro, embora não tenham sido provadas verdadeiras agora. (Martin-Löf, 1996, pg. 14, *tradução nossa*)

Em seu artigo de 1990, ML fala longamente sobre "verdade potencial" e "existência potencial". No entanto, é preciso lembrar que estamos tratando aqui de um contexto em que esses termos, 'verdade' e 'existência', têm um significado intuicionista específico: a verdade é identificada à possibilidade de se provar a proposição; e existência com a atualidade de uma construção mental, a prova da proposição. Assim, para entender a modalidade proposta por ML sem cair em armadilhas semânticas, a minha sugestão passa pela correta interpretação do papel da proposição para as noções de "existência" e "verdade", que estão conectadas. A noção intuicionista de "proposição", como vimos, é interpretada como um conjunto de condições a serem atendidas por um ato mental, a construção. Usamos a analogia de um tipo de balizamento para um ato mental, de modo que se um tal ato é performado dentro dos limites daquele balizamento, poderemos asserir

[71] ML também faz referência à verdade (ou evidência ou demonstrabilidade...) potencial do juízo (Martin-Löf, 1998, p. 109), que, por sua vez, é também consequência da noção de verdade potencial da proposição.

que a proposição em questão foi provada a partir da existência atual daquela prova. No entanto, a própria interpretação de existência da prova, nesse contexto, depende, em primeiro lugar, da proposição em seu conjunto de condições, i.e., recai na proposição a possibilidade da existência da prova, ou da possibilidade da realização do ato mental que será interpretado como prova a proposição.

> E quanto à noção de criação? Se entendermos criação da maneira usual como causando ou trazendo à existência, e entendermos a noção de ser ou existência como atualidade, que é como a noção exaltada de ser tradicionalmente tem sido entendida, então chegamos ao que parece ser uma conclusão muito herética aqui, porque o que é que dá atualidade aos objetos do mundo? Bem, eu já disse que o que torna um objeto atual é que há um ato que está sendo realizado com aquele objeto, então nesta concepção é nossa atividade que dá aos objetos do mundo atual sua atualidade, o que significa que é nossa atividade que se torna o processo de criação. (Martin-Löf, 1990, p. 147, *tradução nossa*)

ML parece oscilar entre o sentido clássico e o intuicionista de existência. Ele diz que um objeto passa a existir quando um indivíduo executa um ato com aquele objeto. Oras, se o objeto já está disponível para ser utilizado, já não teria a tal existência? Ou seja, ML apenas distorce o conceito de existência para tentar explicar como é possível provar uma proposição com um objeto-prova que a torna verdadeira sem cair na armadilha da temporalização da verdade na matemática. Mas parece lhe escapar que todas essas noções, "existência", "verdade" e "prova", não são mais os conceitos clássicos. A atemporalidade da matemática intuicionista se dá a partir da noção de "proposição" e não da de "construção mental". Assim, a atemporalidade na matemática é consequência da possibilidade de se construir objetos matemáticos mentais que atendem a condições à priori, que o intuicionista convencionou chamar de proposição. A noção de "proposição" reuniria, então, o universo de possibilidades de construção de tais objetos e é esse universo de possibilidade que permitiria dizer que, se uma proposição foi provada, é porque ela sempre pode ser provada, ou que, se uma construção mental foi obtida, é porque ela poderia ser obtida mesmo antes de ter sido obtida, ou, enfim, como diz ML, se uma prova existe atualmente, é porque ela existia potencialmente.

O que ML não deixa claro, é o caráter ontológico da noção de "construção", uma vez que, para que seja considerada existente (e aqui estamos considerando a existência atual e não apenas a existência potencial), é necessário que a construção seja executada por um sujeito. Assim, a construção, pode-se dizer, tem caráter subjetivo e empírico, portanto, mental. Mas, qual seria o estatuto ontológico da construção potencialmente existente? Seria uma entidade abstrata? Mas, o que ocorreria caso tal entidade fosse construída por um indivíduo? Ela passaria a ser uma entidade mental? Ou essa entidade abstrata simplesmente desapareceria enquanto a mental passaria a existir atualmente.

Talvez, a distinção entre existência atual e potencial nos leve, em consequência, a distinguir também dois tipos de construção, uma construção atual, esta sim, efetivamente a prova da proposição, e uma construção de existência potencial, ainda não construída ou efetivada, e, portanto, não existente. Esse segundo tipo de construção, de existência potencial garantida pela força prescritiva da proposição, talvez pudesse ser tratado como uma entidade abstrata, afinal. Mas, seria ela realmente uma entidade ou seria tal existência potencial uma existência implícita à proposição?

Nos parece que as mudanças de estatuto ontológico da construção não combinam com o rigor analítico e filosófico demonstrado até o momento, de modo que mantemos a ideia de que é importante preservar as interpretações intuicionistas originais para as noções de "existência" e "verdade", garantindo o estatuto ontológico da noção de "construção" como uma entidade mental, sendo a existência potencial um expediente utilizado para esclarecer que não há objetos saltando em existência de maneira arbitrária e aleatória. O que temos realmente são objetos matemáticos construídos a partir de atos mentais, portanto, atualmente, dentro dos limites de uma proposição. E, por se tratar de atos, são efêmeros no tempo, o que nos impõe que a atemporalidade matemática resta na noção de "proposição" intuicionista. Isso nos parece não ser passível de disputa.

> Esses atos, provas no sentido subjetivo, quando concluídos, não têm mais existência, mas podem deixar rastros. Esses traços, ou provas no sentido objetivo, são o que encontramos escritos em textos matemáticos e o que podem ser usados por outros matemáticos para realizar provas no sentido subjetivo do mesmo teorema. Essas não são as provas que estão em questão na concepção intuicionista do tornador de verdade. (Sundholm, 1994, p. 121, *grifo nosso*)

Não devemos fazer essa discussão neste texto, pelo que nos importa dizer que, no contexto formal da TIT, as entidades de interesse não são as de existência potencial, mas sim as de existência atual e concreta, portanto, expressões que correspondem a construções e proposições, respectivamente, objetos-prova e proposições, fundamentais para o sistema formal.

3.4. Juízo, a asserção de Martin-Löf

Bem como as demais noções intuicionistas fundamentais, a interpretação da noção de "asserção" parece ser estável, recebendo um termo particular na TIT. ML faz questão de proceder com um esclarecimento profundo desta noção e sua relação com outras noções também importantes como as de "evidência", "verdade" e "falsidade", além das noções fundamentais de "construção" e "proposição".

Em seu artigo de 1996[72], ML faz uma longa e detalhada exposição sobre a noção de "juízo". No artigo, o autor esclarece que a sua interpretação de juízo vem da opção de distinguir "asserção" e "proposição" (Martin-Löf, 1996, p. 9), noções classicamente tidas como sinônimas. A menção à opção de distinguir tais noções é feita pelo próprio ML, o que não significa que esta opção é meramente arbitrária. Na verdade, é tratada como compulsória sendo justificada por se tratar de uma consequência inevitável de uma teoria mais rigorosa do ponto de vista filosófico, em especial em relação às suas noções fundamentais. De fato, a noção de "juízo" desempenha um papel importante, de modo que ML chega a dizer que é a primeira de todas as noções da lógica, devendo ser explicada antes mesmo das noções de "proposição" e "verdade". Essa não é a nossa opção na ordem de apresentação das noções fundamentais para o intuicionismo, mas é possível dizer que a noção de "juízo" desempenha realmente um papel central na TIT, juntamente com as noções de "proposição" e "objeto-prova".

> "(…) ou então abandonar a velha definição de juízo, ampliando-a para dar lugar a *A é uma proposição* como uma nova forma de juízo. Eu escolhi a última alternativa, bem ciente de que, ao fazer isso, estou usando a palavra juízo de uma nova maneira." (Martin-Löf, 1996, p. 9, *tradução nossa*)
>
> (…) porque a noção de *juízo* é apenas a primeira de todas as noções da lógica, aquela que deve ser explicada antes de todas as outras, antes mesmo das noções de proposição e verdade, por exemplo. (Martin-Löf, 1996, p. 9, *tradução nossa*)

Intuicionisticamente falando, uma asserção em uma linguagem é produzida a partir do resultado do ato mental de construir uma construção ou provar uma proposição. Particularmente no sistema de ML, uma asserção deve sempre asserir o conhecimento acerca da construção que prova a proposição, i.e., o indivíduo que constrói a prova e que

[72] Ver Martin-Löf (1996).

produz a asserção, ao fazê-lo, assere o seu conhecimento acerca da sua própria construção.

> (…) como "*A* é verdadeira" é uma forma de afirmação, ou juízo, seu significado é determinado ao se estabelecer sua condição de asserção, isto é, ao se estabelecer o que é que você deve saber para ter o direito de fazer um juízo desta forma e, nesse caso, a explicação é que, para ter o direito de fazer um juízo da forma "*A* é verdadeira", você deve conhecer uma prova de *A*, uma prova que, em geral, não é canônica, isto é, que em geral é meramente um método que, quando você o executa, obtém uma prova canônica como resultado. (Martin-Löf, 1998, p. 112, *tradução nossa*)

Como resultado, assim como as noções de "construção" e "proposição", a noção de "asserção" intuicionista tem um correspondente particular no sistema de ML. Na verdade, ML, ao caracterizar a noção de "asserção", procede com uma distinção entre ato e objeto do ato, como vimos na seção anterior.

A opção de ML para o sistema é a de utilizar o termo 'juízo' no lugar dos sinônimos 'asserção', 'afirmação' ou 'alegação'. Assim, temos juízos produzidos a partir de objetos-prova e proposições no sistema. Essa é uma característica especialmente importante do sistema, esclarecida a partir da distinção entre proposição e juízo. Como vimos, intuicionisticamente, proposições desempenham um papel de *balizador* para a obtenção de provas, sendo interpretadas na TIT como problemas ou desafios a serem resolvidos, demonstrados ou provados. Juízos, por sua vez, ocorrem no sistema como axiomas ou teoremas, sendo encontrados como parte de demonstrações de novos teoremas. E dessa maneira, um juízo assere o conhecimento acerca da proposição, especificamente sua verdade ou falsidade.

A interpretação da verdade ou falsidade da proposição também possui uma interpretação distinta no intuicionismo, de modo que tanto a verdade quanto a falsidade da proposição são asserções que devem ser evidentes para o sujeito que profere o juízo. Nas subseções seguintes, devemos esclarecer o papel da noção de "evidência" para explicar a distinção entre axioma e teorema, sendo o axioma um juízo auto evidente ou imediato e o teorema um juízo cuja demonstração o torna evidente, sendo chamado de 'juízo não imediato' (ou mediado). Também devemos esclarecer a interpretação e distinção entre verdade e falsidade da proposição, além de elucidar a relação entre "juízo" e as noções de "proposição" e "objeto-prova". Resumidamente, para ML, um juízo pode ser tratado como:

i. ato de julgar ou objeto de conhecimento;

ii. juízo ou juízo evidente;

iii. juízo imediato ou juízo não imediato (mediado);

iv. asserção da verdade ou da falsidade de uma proposição.

3.4.1. Ato de julgar ou objeto de conhecimento

A primeira observação a ser feita em relação à noção de "juízo" no sistema de ML se refere à distinção entre o que o autor chama de 'ato de julgar' e o 'produto desse ato'. Conforme dito anteriormente, temos que manter a distinção entre aquilo que é mental e aquilo que é físico e, portanto, tratado diretamente no sistema formal. Tratando da noção de "juízo", devemos separar o ato mental de julgar e a expressão sintática por meio da qual se torna público o produto desse ato. O ato de julgar é mental, enquanto a asserção do conhecimento do produto desse ato é física, podendo ser uma expressão oral ou escrita, mas sempre em uma linguagem.

> **A maneira tradicional de relacionar as noções** de julgamento e proposição **foi dizendo que uma proposição é a expressão verbal de um julgamento.** (…) O que antes era chamado de proposição passou a ser chamado de julgamento, **o termo julgamento adquiriu um duplo sentido**. Veio a ser usado, por um lado, para **o ato de julgar**, assim como antes, **e**, por outro lado, passou a ser usado em vez **da velha proposição**. (…)

	juízo	
	o ato de julgar	o que é julgado
antiga tradição	juízo	proposição
Kant	ato de julgar	juízo descaído

(Martin-Löf, 1996, p. 3, *tradução nossa*)

Temos então que o ato mental de julgar nada mais é do que o ato subjetivo de tomar ciência da construção que prova uma proposição, ou, de forma abreviada, ato de julgar. A expressão sintática, o que realmente vai importar no sistema de ML, é tratada simplesmente por 'juízo'. Mais uma vez, é importante apontar para o fato de que preservar essas distinções não altera a interpretação da noção intuicionista original de "asserção", apenas esclarece o que no sistema é tratado como expressão sintática não a confundindo com um ato mental. Assim, ML esclarece que o ato de julgar é ou pode ser entendido como um ato de provar ou, talvez até melhor, de apreender ou de conhecer. Todas elas são maneiras de explicitar o caráter subjetivo do ato de julgar esclarecendo a natureza do próprio juízo o correspondente ao produto do ato no sistema formal.

> (…) Assim, ele [Brouwer] poderia também ter dito que **a prova de um juízo é o ato de prová-lo**, ou apreendê-lo. E o ato é primeiramente o ato que está sendo realizado. Apenas secundariamente, e irrevogavelmente, ele se torna o ato que foi realizado. (Martin-Löf, 1996, p. 18, *grifo nosso, tradução nossa*)

> Mesmo que cada número par seja a soma de dois números primos, **é errado dizer isso, a menos que eu saiba, isto é, a menos que eu tenha provado isso.** (…) Assim, a condição para que seja correto eu afirmar uma proposição *A*, isto é, dizer que *A* é verdadeira, não é que *A* é verdadeira, mas que eu sei que *A* é verdadeira. (Martin-Löf, 1996, p. 13, *grifo nosso, tradução nossa*)

A ideia aqui é que o ato de conhecer é uma experiência epistêmica sobre uma determinada construção, executada pelo próprio indivíduo, e que satisfaz uma proposição. E a alegação sobre esse conhecimento ou experiência é o que ML, seguindo as ideias de Kant, chama de 'juízo'. Devemos ressaltar que o conhecimento só é reconhecido como tal após a experiência subjetiva, o ato subjetivo de conhecer, a partir da própria compreensão da prova da proposição. Esse conhecimento não se trata de um recurso à memória sobre algo que nos foi dito, ao contrário, é obtido da experiência do ato de construir a prova. Em se tratando de um conhecimento matemático, pode-se dizer que essa experiência é, de fato, uma 'evidência' a um conhecimento acerca de algo necessário, a verdade da proposição.

> (…) um ato de julgar é essencialmente nada mais que um ato de conhecer, de modo que **julgar é o mesmo que conhecer**, e que aquilo que é julgado é um pedaço, ou um objeto, de conhecimento. (Martin-Löf, 1996, p. 10-11, *grifo nosso, tradução nossa*)

> (…) **uma prova de um juízo é um ato de conhecer** e que o juízo que ele prova é o objeto desse ato de conhecer, isto é, um objeto de conhecimento. (Martin-Löf, 1987, p. 409, *grifo nosso, tradução nossa*)

> Quando você diz que um julgamento é evidente, você simplesmente expressa que entendeu, compreendeu, apreendeu, ou viu, isto é, que você sabe disso, porque **ter entendido é saber**. (Martin-Löf, 1996, p. 13, *grifo nosso, tradução nossa*)

Segundo essa interpretação de compreensão da proposição como um ato subjetivo que requer o construir de uma prova da proposição, o conhecimento asserido a partir do juízo é, da mesma forma, subjetivo, i.e., relativo ao sujeito cognoscente que compreendeu, em primeiro lugar, a proposição. Em consequência, intuicionisticamente, não parece fazer sentido falar de um conhecimento não experimentado, i.e., um conhecimento em si. No contexto do sistema de ML, isso significa dizer que, para que os juízos tenham essa característica de asserir um conhecimento, esses devem vir acompanhados de uma evidência ou, como ML diz, uma ‘prova de juízo’ (e aqui não devemos confundi-lo com ‘objeto-prova’ ou ‘prova de proposição’).

> Não há absolutamente nenhuma questão sobre um juízo ser evidente em si mesmo, independentemente de nós e de nossa atividade cognitiva. **Isso seria tão absurdo quanto falar de um juízo como sendo conhecido, não por alguém, você ou eu, mas em si mesmo. Ser evidente é ser evidente para alguém, já que, inevitavelmente, ser conhecido é ser conhecido por alguém**. Isso é o que Brouwer queria dizer, em Consciência, Filosofia e Matemática, que não existem verdades não experimentadas, um princípio intuicionista básico. (Martin-Löf, 1996, p. 14, *grifo nosso, tradução nossa*)

Ainda devemos reforçar que, no contexto do sistema de ML, por se tratar de um sistema formal e uma linguagem, a parte mental do juízo, o ato de julgar, apesar de essencial para a teoria intuicionista, não é quem de fato desempenha o papel principal. Isso porque o juízo, bem como as demais noções intuicionistas formalizadas no sistema, carregam, além da expressão sintática, a semântica que permite que uma demonstração seja realizada estritamente a partir da manipulação de outras expressões sintáticas. Em outras palavras, uma demonstração pode ser verificada por um computador, sem que haja, necessariamente, um ato mental. Certamente, um matemático que tenha acesso à prova poderá realizar o ato e efetivamente construir a prova que torna evidente para si o juízo.

> (…) além da noção de juízo, temos a noção de evidência **ou prova de juízo** (…). (Martin-Löf, 1987, p. 409, *grifo nosso, tradução nossa*)
>
> Assim, **prova e evidência são o mesmo**. (Martin-Löf, 1987, p. 417, *grifo nosso, tradução nossa*)

Uma ressalva deve ser feita neste ponto acerca da ideia de “prova de juízo”, como feita por ML na citação acima. Como vimos na seção 1.1, o termo ‘prova’ deveria ser utilizado junto à noção de “proposição”, como em ‘prova de proposição’, e não junto à noção de “juízo”, como em ‘prova de juízo’. Entretanto, para ML, a “prova da proposição” também é o que torna evidente um juízo em seu sistema. A noção de “evidência de um juízo” é algo especialmente tratado por ML e que veremos na seção seguinte. Não se deve, portanto, confundir “prova” no sentido intuicionista original e “objeto prova” e demais distinções conectadas à noção de “prova” no sistema de ML.

3.4.2. Juízo e juízo evidente

A distinção entre juízo e juízo evidente é, mais uma vez, uma consequência natural da formalização proposta por ML. Na concepção intuicionista original, a construção mental que prova uma proposição também é aquilo que dá o direito de se produzir um juízo. Como o sistema de ML funciona na prática como uma linguagem, ela permite a manipulação de símbolos da linguagem de modo que uma expressão pode ser corretamente construída segunda suas regras sintáticas e, mesmo assim, não corresponder à noção intuicionista originalmente pretendida, i.e., uma expressão produzida corretamente segundo as regras para a produção de um juízo, ou mesmo uma proposição, pode não corresponder a um "juízo", ou "proposição", respectivamente, caso não obedeçam a outros critérios, nesse caso, intuicionistas. O tratamento dessa situação, dado por ML, é o de reconhecer quando uma expressão desempenha um papel meramente sintático, i.e., ele apenas obedece às regras sintáticas de produção de uma expressão que se pretende um juízo, ou quando uma expressão desempenha um papel de "juízo" de fato, i.e., quando, além de obedecer às regras sintáticas, ele é acompanhado de uma prova de juízo admitida no sistema.

Isso significa que, assim como no caso de 'proposição', o termo 'juízo' tem uma dupla ocorrência no sistema: 'juízo' e 'juízo evidente', equivalentes respectivamente a: 'proposição' e 'proposição verdadeira'. Explica-se, a diferença entre juízo e juízo evidente resta justamente na explicitação da prova, ou no conhecimento, que torna tanto a proposição verdadeira, quanto o juízo evidente. Assim, em um juízo temos uma proposição, enquanto em um juízo evidente temos uma proposição verdadeira.

> G é verdadeira
>
> é um juízo, ou não é um juízo? Claramente, em certo sentido, é, e, em outro sentido, não é. Não é um juízo no sentido de que não é conhecido, isto é, que não foi provado ou apreendido. Mas, em outro sentido, é um juízo, a saber, no sentido de que G é verdadeira faz sentido perfeitamente, porque G é uma proposição que todos nós entendemos e, presumivelmente, entendemos o que significa para uma proposição ser verdadeira. A distinção que estou insinuando é a distinção tradicionalmente feita entre uma enunciação e uma proposição. (…)
>
> **Uma enunciação é o que uma proposição, no antigo sentido da palavra, é antes de ser provada ou tornar-se conhecida. Assim, é uma proposição despojada de sua força epistêmica.** Por exemplo, nessa terminologia tradicional, que estaria bem se ainda estivesse viva, G é verdadeira é uma enunciação perfeitamente boa, mas não é uma proposição, pelo menos não ainda. (…)

> Se adotamos essa terminologia, então nos deparamos com uma tabela quádrupla, que terminarei escrevendo.
>
> | | |
> |---|---|
> | **juízo** | proposição |
> | **juízo evidente** | proposição verdadeira |
>
> (Martin-Löf, 1996, p. 11-12, *grifo nosso, tradução nossa*)

Intuicionisticamente, a força epistêmica que carrega o juízo é conferida pelo caráter subjetivo da noção de "construção" enquanto ato mental. Isso justifica a interpretação do juízo como objeto de conhecimento. Assim, no sistema de ML, o juízo evidente, que assere o conhecimento da verdade da proposição, deve ser interpretado como a indicação de evidência daquele conhecimento a partir da prova da proposição, que corresponde a um objeto prova. Nessa interpretação, ML caracteriza o juízo evidente como uma alegação no sistema em que é assegurada a sua evidência, i.e., em que a proposição e o objeto prova, que compreendem aquele juízo, são conhecidos, de modo que a compreensão da proposição e o conhecimento do juízo são tratados equivalentes.

> (…) **não há juízo evidente cuja evidência não tenha sido experimentada**, e experimentá-la é o que você faz quando a entende, compreende, apreende ou vê. Não há evidência fora da nossa atual ou possível experiência dela. **A noção de *evidência* é, por sua própria natureza, subjetiva, relativa ao sujeito cognoscente** (…) (Martin-Löf, 1996, p. 14, *grifo nosso, tradução nossa*)

> (...) **a noção de *evidência***, que foi a de que **é o ato de entender**, compreender, apreender ou ver **um juízo** que lhe confere evidência, a conclusão inevitável é que **a prova de um juízo é o próprio ato de apreendê-lo**. Assim, uma prova não é um objeto, mas um ato. (…) E o ato é principalmente o ato que está sendo realizado. Apenas secundária e irrevogavelmente, ele se torna o ato que foi realizado. (Martin-Löf, 1996, p. 18, *tradução nossa*, *grifo nosso*)

Devemos ainda chamar a atenção para a razão de ML utilizar o mesmo termo 'prova' para justificar a sua noção de "juízo evidente". Como vimos anteriormente, 'prova de proposição' diz respeito ao "objeto prova" e 'prova de juízo' diz respeito à demonstração ou derivação completa e incluindo o juízo evidenciado. Assim, no contexto do sistema de ML, a noção de "prova de juízo", ou "evidência de juízo", é a noção mais próxima da de "prova formal", uma vez que a cadeia de juízos que prova, ou evidencia, o último juízo daquela cadeia é o que de fato entende-se (mesmo entre matemáticos) como sendo uma prova no sistema formal.

> (…) para evitar confusões terminológicas, os **juízos são qualificados como evidentes ao invés de verdadeiros**. Assim, traduzido para a terminologia que eu escolhi, a definição do dicionário se torna simplesmente,
>
> **Uma prova é o que torna um juízo evidente.**
>
> Isso significa que provar é apenas outro sinônimo para entender, compreender, apreender ou ver. (Martin-Löf, 1996, p. 18-19, *grifo nosso, tradução nossa*)

> A noção de *prova* formal a que me referi no início de minha discussão da noção de *prova* chegou ao interpretar formalmente o que você quer dizer com uma inferência imediata, esquecendo-se da diferença entre um juízo e uma proposição e, finalmente, interpretando a noção de *proposição* formalmente, isto é, substituindo-a pela noção de fórmula. Mas **uma prova real é e permanece o que sempre foi, a saber, aquilo que torna um juízo evidente, ou simplesmente, a evidência disso**. Assim, se não temos a noção de *evidência*, não temos a noção de *prova*. (Martin-Löf, 1996, p. 20, *grifo nosso, tradução nossa*)

Para exemplificar essa distinção entre juízo e juízo evidente, Martin-Löf (1996, p. 16-17) apresenta duas formas básicas de juízo admitidas em seu sistema e o que eles representam do ponto de vista epistêmico.

> Por exemplo, se nós considerarmos as duas formas de juízo
>
> A é uma proposição
>
> e
>
> A é verdadeira,
>
> (…) Portanto, é o meu ato de apreensão que é a fonte da evidência. Esses dois juntos, ou seja, o julgamento e meu ato de apreendê-lo, tornam-se o juízo evidente. (…)
>
> $$\overbrace{\text{Eu sei que } \overbrace{\underbrace{A}_{\text{proposição}}\ \underbrace{\text{é verdadeira}}_{\text{forma de juízo}}}^{\text{juízo}}}^{\text{juízo evidente}}$$
>
> (Martin-Löf, 1996, p. 20, *grifo nosso, tradução nossa*)

O exemplo serve para esclarecer dois pontos, 1. o caráter subjetivo do juízo evidenciado por um indivíduo, 2. o caráter formal de um juízo expresso no sistema. Podemos perceber que o que distingue um juízo e um juízo evidente é justamente a componente implícita que diz respeito ao conhecimento do indivíduo acerca do próprio juízo, que ML chama de ‘objeto de conhecimento’. No exemplo, ML explicita uma componente do juízo evidente que normalmente é dada como implícita, aquilo que o sujeito cognoscente apreende e passa a saber: “Eu sei que *A* é verdadeira”.

Essa distinção poderia ser tratada como algo um tanto quanto trivial não fosse pelo caráter formal do juízo expresso no sistema de ML, de modo que, em juízos da forma "*A* é verdadeira", não se pode admitir uma correspondência com a noção de "juízo" ou tratada como um objeto de conhecimento a menos que a prova de juízo seja explicitada também no sistema. Isso significa que os juízos produzidos no âmbito do sistema podem ser tratados e manipulados, como em demonstrações, sem a necessidade de qualquer contrapartida mental, mas carecem de uma contrapartida formal para serem tratados como juízos evidentes.

3.4.3. Juízo imediato (axioma) e juízo mediado (teorema)

Uma vez compreendidas as noções de “evidência” e “juízo”, podemos começar a olhar para o juízo no contexto do sistema e identificar alguns desdobramentos úteis à compreensão de conceitos clássicos mais familiares. Como todo sistema formal, algumas regras iniciais devem ser fixadas para que, a partir delas, possam ser derivadas novas regras. As regras iniciais de um sistema formal são normalmente chamadas de axiomas, enquanto as novas regras derivadas desses axiomas são usualmente chamadas de teoremas, sendo aquelas derivações chamadas de provas daqueles teoremas. No sistema de ML, as regras expressas são asserções necessárias, tratadas, portanto, como juízos. Entre axiomas e teoremas, ML estabelece uma nomenclatura própria, sendo axiomas chamados de Juízos Imediatos (ou não mediados) e teoremas chamados de Juízos Não-imediatos (ou mediados).

> Lembre-se de que a prova de um juízo é o próprio ato de conhecê-lo. Se esse ato é atômico ou indivisível, a prova é considerada imediata. Caso contrário, isto é, se a prova consistir em uma sequência inteira, ou cadeia, de ações atômicas, ela será mediada. E, como prova e conhecimento são os mesmos, os atributos imediato e mediado se aplicam igualmente bem ao conhecimento. Na lógica, estamos sem dúvida mais acostumados a dizer inferências, ao invés de provas, de que elas são imediatas ou mediadas, conforme o caso. Mas isso não faz diferença, porque inferência e prova são iguais. Não importa, por exemplo, se dizemos regras de inferência ou regras de prova, como se tornou costume na programação. E, para dar outro exemplo, não importa se dizemos que uma prova intermediária é uma cadeia de inferências imediatas ou uma cadeia de provas imediatas.
>
> (…)
>
> E **um juízo imediatamente evidente é o que chamamos de axioma**.
>
> (…)
>
> E **um juízo mediadamente evidente é o que chamamos de teorema**, em oposição a um axioma. (Martin-Löf, 1996, p. 19-20, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

> As provas que demos no Capítulo I para os primeiros teoremas da matemática, nos ensinaram a ler esses **teoremas como tautologias**. O fato de que, em casos mais complicados, o teorema não é imediatamente claro, mas apenas compreendido mediante uma cadeia de tautologias, meramente prova que nós construímos nossas estruturas muito complicadas para serem compreendidas em um olhar [breve]. (Brouwer, Ed. Heyting, 1975, p. 72, *grifo nosso, tradução nossa*)

A ideia de que axiomas e teoremas são tratados como regras ou como sendo juízos que asserem um conhecimento necessário traz consigo a conclusão de que no contexto do sistema formal, juízos são tautologias, não sendo admitida a possibilidade da falsidade de um juízo. De fato, como veremos na subseção seguinte, juízos são afirmativos e asserem um conhecimento, ou seja, não podem ser falsos ou falseados. A falsidade ou a verdade seriam atribuições exclusivas de proposições. Na verdade, a ideia de juízos como asserções de um conhecimento necessário ou como tautologias, vai de encontro com as ideias intuicionistas originais de Brouwer, o que conta mais uma vez a favor da proposta de ML, que procede com um esclarecimento profundo da noção de "asserção" sem entrar em rota de colisão com as concepções intuicionistas originais.

3.4.4. Asserção da verdade e falsidade de uma proposição

Como vimos, a noção de "verdade" no intuicionismo é tratada como a possibilidade de se obter uma prova da proposição. ML subscreve essa interpretação intuicionista original de modo que a nada mais no sistema pode ser atribuída a noção de "verdade".

> Assim, intuicionisticamente, a verdade é identificada com a provabilidade [provability], embora é claro que não (por causa do teorema da incompletude de Gödel) com a derivabilidade dentro de qualquer sistema formal particular. (Martin-Löf, 1984, p. 11, *tradução nossa*)

Dizer que uma proposição é verdadeira é, portanto, o mesmo que dizer que ela pode ser provada a partir da obtenção de uma prova no sistema, um elemento canônico ou um método para a obtenção de um elemento canônico.

> Uma prova arbitrária, em analogia com um elemento arbitrário de um conjunto, é um método de produzir uma prova de forma canônica. (Martin-Löf, 1984, p. 13)

> (…) mesmo intuicionisticamente, a definição de correspondência da verdade é correta para a verdade de uma proposição, **se por correspondência com a realidade você simplesmente se refere à existência de um objeto prova**. (Martin-Löf, 1990, p. 145, *grifo nosso, tradução nossa*)

Vale ressaltar que, ao ser identificada com a noção de "demonstrabilidade" (*provability*), a noção de "verdade", no sistema de ML, passa a não ter relação alguma com a noção de "falsidade" ou de "absurdidade". Se uma proposição, no sistema, não é verdadeira, por assim dizer, ela é, na verdade, um desafio, i.e., uma proposição (enquanto combinação de sinais por meio de operadores lógicos) que pode vir a ser habitada por uma prova. Vejamos o tratamento de ML para a asserção da "verdade" e "falsidade" de uma proposição.

3.4.4.1. A noção de verdade

O esclarecimento da noção de "verdade" deve visto por como de fundamental importância para entendermos algumas relações entre os demais conceitos no sistema de ML e para mostrar o seu papel secundário em relação à noção de "prova" (seja de juízo ou de proposição). Neste ponto, podemos dizer que a noção de "prova" no sistema de ML está bem clara como sendo uma expressão sintática, podendo encontrar nos textos de ML o termo 'prova' ao se referir a 'evidência' ou 'objeto-prova' (respectivamente, em relação à prova de juízo e à prova de proposição).

No contexto intuicionista, a noção de "verdade" também tem sua particularidade, sendo importante primeiro dizer que essa noção intuicionista é distinta de outra utilizada em qualquer outro contexto (por exemplo o contexto clássico). Como afirma ML (1984), "verdade é identificado com demonstrabilidade". No sistema de ML, a ideia de "prova" aqui está no sentido de "prova da proposição" e, assim sendo, a verdade é tratada como uma propriedade da proposição provada.

No entanto, mais do que a mera afirmação, ML fornece a argumentação para sustentar a identidade entre "verdade" e "demonstrabilidade". Da passagem abaixo, podemos retirar as afirmações principais que mostram a essência da noção de "verdade" sugerida no intuicionismo. "Saber que uma proposição é verdadeira é saber como prová-la diretamente". Assim, "ser verdadeira é o mesmo que ser diretamente provável", e "verdade é identificado com provabilidade". Agora, um ponto crucial está na relação entre saber, ou conhecer, uma prova e a verdade da proposição. ML deixa claro que "a noção de *prova* da proposição é conceitualmente anterior à noção de *verdade*", e continua, afirmando que, "ao dizer que a proposição é verdadeira, você expressa que você sabe que ela é verdadeira", por conhecer diretamente uma prova daquela proposição. A conclusão que ML chega é a de que "a noção de *verdade* é dependente de conhecimento", no caso, do conhecimento de provas. Em suas palavras, primeiro o que temos "é o conceito de conhecer uma prova da proposição … e então a noção de *verdade* é extraída dele", ou seja, extraída do conhecimento de uma prova da proposição. Segue o trecho na íntegra, um pouco longo, mas de grande relevância.

> A noção de *verdade* da proposição é explicada intuicionisticamente ao se explicar o que é saber que uma proposição é verdadeira: saber que uma proposição é verdadeira é conhecer uma prova dela, uma prova que pode em geral ser indireta. Uma vez que conhecer uma prova possivelmente indireta de uma proposição é saber como dar uma prova direta dela, **saber que uma proposição é verdadeira é saber como prová-la diretamente**. Por outro lado, de acordo com o princípio de que saber como fazer algo é o mesmo que saber que é possível fazê-lo, saber como provar uma proposição diretamente é o mesmo que saber que ela é diretamente provável. Cancelando saber nos dois membros da identidade, chegamos à conclusão que **ser verdadeiro é o mesmo que ser diretamente provável**, e que **verdade é identificada com provabilidade direta**. O que é característico de toda essa análise, intuicionista ou verificacionista, das noções de proposição e verdade é que **a noção de *prova* de uma proposição é conceitualmente anterior à noção de *verdade***. E é isso que faz do intuicionismo uma filosofia idealista no sentido da teoria do conhecimento: **ao dizer que uma proposição é verdadeira, você expressa que você sabe que ela é verdadeira**, e não pode haver questão sobre a verdade de uma proposição, mas apenas como resultado de alguém saber que ela é verdadeira. Precisamente nesse sentido, **a noção de *verdade* é dependente do conhecimento**. Claro, quando você olha para a combinação de palavras, saber que uma proposição *A* é verdadeira, quando você olha para como ela está, parece que, antes de tudo, você tem a proposição *A*, então você tem a noção de *verdade* que você aplica a ela, chegando à afirmação ou juízo, *A* é verdadeira, e, finalmente, você aplica a noção de conhecimento em cima disso. É assim que parece, é claro, se você olhar apenas para a construção sintática dela, mas o resultado da análise intuicionista da noção de *verdade* é que a ordem de prioridade é o inverso aqui: **é o conceito** de saber que uma proposição é verdadeira, isto é, **de conhecer uma prova da proposição**, que é a noção conceitualmente anterior, e **então a noção de *verdade* é extraída dela** ao dizer que uma proposição é verdadeira se ela é diretamente provável, isto é, se ela pode ser provada pelo meio mais direto. (Martin-Löf, 1987, p. 413-414, *grifo nosso, tradução nossa*)

Podemos ainda reforçar que o conhecimento de que se trata aqui não é acerca da verdade da proposição, mas sim acerca da construção que prova a proposição. Assim, dizer 'conhecer uma prova' significaria o mesmo que dizer 'construir uma prova', sendo a prova uma construção mental. Por fim, alegar que uma proposição é verdadeira é o mesmo que alegar ter construído uma prova daquela proposição. No entanto, no contexto do sistema formal de ML, um juízo que assere a verdade de uma proposição deve simplesmente apresentar uma prova daquela proposição.

Por fim, pode-se dizer que três coisas essenciais ficam claras em relação à noção de "verdade" intuicionista: 1. a dependência do conhecimento da prova, ou, corretamente, da construção da prova; 2. o estatuto de necessidade da verdade, uma vez que aquilo que não pode ser provado não é classificado como falso, mas simplesmente não é admitido como proposição; 3. no âmbito de um sistema formal, a verdade da proposição pode ser asserida por um juízo uma vez que tenhamos obtido uma prova da proposição.

Assim, nos parece que a noção de "verdade" intuicionista é de importância secundária para a sua fundamentação, quase como uma tentativa de encontrar um correspondente intuicionista a um conceito central da fundamentação clássica. A verdade é central para os clássicos por razões de sua própria fundamentação, cujo ponto crucial recai sobre uma realidade abstrata platônica em oposição ao idealismo intuicionista. Uma vez esclarecida a noção de "verdade" e desfeito qualquer princípio de confusão ou ambiguidade, devemos esclarecer a interpretação da falsidade intuicionista, certamente distinta da noção clássica de "falsidade", i.e., como a negação da verdade.

3.4.4.2. A noção de falsidade e a negação intuicionista

A primeira a mais importante coisa a se dizer sobre a noção de "falsidade" é que, intuicionisticamente, ela não conectada à noção de verdade como se uma fosse a oposição da outra. Como vimos, para o intuicionismo, as noções mais relevantes são relacionadas à atividade subjetiva do indivíduo, a construção mental enquanto prova de uma proposição, ou mesmo o que ML chama de 'ato de conhecer' e 'produzir um juízo'. A consequência desses atos subjetivos seria interpretada como a compreensão de uma proposição, a partir do quê poder-se-ia expressar que a tal proposição é verdadeira. A partir do que já foi apresentado, é natural causar certa estranheza ao deparar-se com tal afirmação "a proposição *A* é verdadeira", sendo a verdade algo intrínseco à proposição. Afinal, o que seria caso não fosse verdadeira? Falsa? E o que significaria dizer de uma proposição que ela é falsa? Ocorre que, como vimos, a interpretação intuicionista da noção de "verdade de uma proposição" é dada explicitamente como sendo a existência de uma prova da proposição, ou da possibilidade de se obter tal prova. Assim, não se pode confundir as noções de "verdade" e "falsidade" intuicionistas e clássicas.

No entanto, talvez pela necessidade de se apresentar um correspondente intuicionista daquelas noções clássicas tão relevantes naquele contexto, os mesmos termos foram utilizados para expressar, no intuicionismo, interpretações acerca da possibilidade e da impossibilidade de se obter provas de proposições. Em primeiro lugar, foi explicitada a interpretação acerca da entidade à qual se deve atribuir a verdade e a falsidade, estamos a falar da proposição e não mais de asserções, como no caso clássico. No sistema de ML, inclusive, temos proposições verdadeiras como expressões acompanhadas de um objeto-prova que encontram correspondência em construções mentais, que confeririam uma justificativa epistêmica.

> Uma vez que esse passo foi dado, surgiu a pergunta: que tipo de coisa é afirmada em uma afirmação e negada em uma negação? isto é, que tipo de coisa é o *A* [proposição clássica] aqui? (...) A lógica moderna simplesmente não funcionaria, a menos que tivéssemos esse conceito, porque é nas coisas que recaem sobre ele que as operações lógicas operam.
>
> (…)
>
> Parece, então, que a deficiência da primeira resposta, com a qual eu me refiro à resposta de que *A* e *B* devem variar sobre fórmulas, é eliminada ao se dizer que as variáveis *A* e *B* devem variar sobre proposições em vez de fórmulas. (Martin-Löf, 1996, p. 5-7)

Como proposições são mencionadas em juízos e esses por sua vez são sempre afirmativos, a afirmação da falsidade de uma proposição deve, naturalmente, ser provada. No entanto, esse movimento é, digamos, no mínimo, distinto daquele da prova de uma proposição 'verdadeira'. Explicamos, para se obter uma proposição falsa, deve-se primeiro admitir a hipótese de que ela seja verdadeira, i.e., admitir que, para uma 'pretensa proposição', pode-se obter uma prova. Da verificação da hipótese de se provar a proposição, chega-se a uma contradição, o que leva à conclusão de que a hipótese inicial é absurda. A partir da prova de que não é possível obter uma prova da tal 'pretensa proposição', extrai-se que ela não pode ser verdadeira e, portanto, é falsa. Devemos perceber que a 'pretensa proposição' é tratada, no sistema, como uma proposição, mas não corresponde à noção de "proposição" intuicionista, pois a prova obtida não atende às condições de uma proposição, mas sim das condições da 'absurdidade' da hipótese da proposição. ML trata aquela 'pretensa proposição' como uma proposição no sistema e interpreta a impossibilidade de obtenção de uma prova sua como a noção intuicionista de "falsidade".

> Explicação. Quando você infere por esta regra [⊥-eliminação], você se compromete a verificar a proposição *C* quando recebe uma prova de que ⊥ é verdadeiro, isto é, pela definição de verdade, com um método de verificar ⊥. Mas isso é algo que você pode realizar com segurança, porque, **pela definição de falsidade, não há nada que conte como verificação de ⊥. Logo, ⊥ é falso**, isto é, não pode ser verificado, e, consequentemente, é impossível que você receba uma prova que ⊥ é verdadeiro. Observe aqui o passo da falsidade de uma proposição ⊥ à improvabilidade do juízo que ⊥ é verdadeiro. O compromisso que você assume quando deduz a regra de eliminação da falsidade é, portanto, como dizer:
>
> Comerei meu chapéu se você fizer isso e aquilo,
>
> onde isso e aquilo é algo que você sabe, isto é, é certo, que não pode ser feito.
>
> Observe que a justificação da regra de eliminação para a falsidade repousa apenas no conhecimento de que ⊥ é falso. Assim, se *A* é uma proposição, não necessariamente ⊥, e *C* é uma proposição desde que *A* seja verdadeira, então a inferência
>
> $$\frac{A \text{ é verdadeira}}{C \text{ é verdadeira}}$$
>
> é válida assim que *A* for falsa. Escolhendo *C* para ser ⊥, nós podemos concluir, por introdução de implicação [⊃-introdução], que *A* ⊃⊥ é verdadeira desde que que *A* seja falsa. Inversamente, se *A* ⊃⊥ é verdadeira, então, por modus ponens, ⊥ seria verdadeiro, o que não é.

> Portanto, A é falsa se $A \supset \perp$ é verdadeira. Esses dois fatos juntos justificam a definição nominal de $\sim A$, a negação de A, como $A \supset \perp$, que é comumente feita na lógica intuicionista. No entanto, o fato de que A é falsa se e somente se $\sim A$ for verdadeira não deve tentar definir a **noção de recusa** [*denial*, um ato análogo ao de produzir uma asserção, assim como um juízo] dizendo que
>
> A é falsa
>
> significa que
>
> $\sim A$ é verdadeira
>
> Que a proposição A é falsa ainda significa que é impossível verificar A, e esta é uma noção que não pode ser reduzida às noções de negação [*negation*], isto é, negação de proposições [*negation of propositions*], e verdade. A recusa [*denial*] vem antes da negação [*negation*] na ordem de prioridade conceitual, assim como consequência lógica vem antes de implicação, e o tipo de generalidade que um juízo pode ter vem antes da quantificação universal.
>
> Como está implícito no que acabei de dizer,
>
> A é falsa = A não é verdadeira = A não é verificável = A não pode ser verificada. (Martin-Löf, 1996, p. 42-43, *tradução nossa*, *grifo nosso*)

Em outras palavras, intuicionisticamente falando, temos que juízos são afirmativos, i.e., afirmam a verdade da proposição, interpretada como a possibilidade de obtenção de uma prova dela. Para acomodar a noção de "falsidade", foi preciso apresentar um juízo que afirmasse outra coisa, no caso a impossibilidade da obtenção de uma prova para uma 'pretensa proposição' no sistema. Para compreender a justificação lógica para esta interpretação ML recorre à regra de introdução de $\perp$ (absurdo), tratada como um axioma, que diz que $\perp$ é falso, ou, que "não há nada que conta como uma verificação [prova] de $\perp$" (Martin-Löf, 1996, p. 41). Em seguida, ML toma uma inferência simples como:

$$\frac{A \text{ é verdadeira}}{C \text{ é verdadeira}}$$

para extrair a seguinte implicação:

$$A \supset C \text{ é verdadeira.}$$

Devemos notar que "$A \supset C$" é uma proposição no sistema de ML. Ao assumir $C = \perp$, temos:

$$A \supset \bot \text{ é verdadeira}$$

o que nos leva a duas possibilidades: 1. A é verdadeira e $\bot$ é falsa, ou 2. A é falsa e $\bot$ é falsa. Já que, segundo a regra de introdução de $\bot$, $\bot$ é falsa, podemos descartar a possibilidade "1", uma vez que inferir $\bot$ a partir de uma prova de uma proposição iria de encontro com a própria definição de $\bot$, que diz que nada pode contar como prova de $\bot$. Assim, conclui-se que:

$$\frac{A \supset \bot \text{ é verdadeira}}{A \text{ é falsa}}$$

> Certamente, essa noção construtiva de falsidade, definida em termos da noção de desaprovação [*disproof*] ou refutação, remonta a Brouwer: **saber que uma proposição A é falsa é ter construído ou encontrado uma refutação de *A*, isto é, ter uma refutação de *A* em sua posse**. (Martin-Löf, 2013, p. 8, *grifo nosso*, *tradução nossa*)

Em consequência, podemos, também, extrair a interpretação de negação (da proposição) intuicionista:

$$\sim A \; = \; A \supset \bot = \; A \text{ é } falsa \; \neq \sim A \text{ é } verdadeira$$

Um juízo como "$\sim A$ é verdadeira" não é admitido pois "$\sim A$" não é uma proposição no sistema de ML, pois seria o mesmo que produzir um juízo como "'A é falsa' é verdadeira". Não parece fazer muito sentido além de poder trazer mais problemas para o sistema, uma vez que seria desfeita a distinção entre proposição e juízo ao permitir a atribuição de predicados (ou propriedades), originalmente restritos a proposições, a juízos, colapsando as duas noções. Por fim, é importante que a distinção entre negação e falsidade fique clara, uma vez que para a compreensão da falsidade intuicionista, a noção mais importante é a de um juízo que assere a impossibilidade de obtenção de uma prova de uma 'pretensa proposição' no sistema, de modo que a negação de uma proposição não é interpretada como uma mera operação lógica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos estar claro que o objeto central dessa tese é o papel da construção mental intuicionista enquanto entidade primitiva para o desenvolvimento da teoria intuicionista, de modo que algumas das principais consequências puderam ser apresentadas desde conexões com outras noções fundamentais (como "proposição" e "juízo"), mas também a desdobramentos conceituais inevitáveis dessas noções e consequências interpretativas lógicas como nos casos dos conectivos lógicos, a interpretação da negação ou a rejeição do princípio do terceiro excluído.

Com uma estratégia traçada para sustentar essa tese, esperamos que a construção desse texto, de caráter introdutório, dos conceitos e noções intuicionistas fundamentais tenha conseguido suscitar nos leitores que chegaram até aqui as intuições que pretendíamos para evidenciar o caminho aberto por essa, a nosso ver, opção inicial fundamental do intuicionismo da qual todas as demais 'opções interpretativas' são meras decorrências naturais e inevitáveis daquela primeira.

O fato de apresentarmos o intuicionismo como uma decorrência de uma interpretação inicial fundamental não deve ser vista como algo arbitrário ou que atende a algum tipo de conveniência. Pelo contrário, a ideia de construções mentais como objetos matemáticos se trata de uma opção por não ser justificada por nenhuma outra interpretação anterior, ela serve sim para justificar as demais interpretações decorrentes dela, de modo que possamos facilmente compreender o que se passa quando realizamos tais atos mentais. Esses atos mentais matemáticos diferem de outros, justamente, por não terem, digamos, uma liberdade criativa como a experimentada, por exemplo, por autores e artistas em suas obras. Construções mentais como objetos matemáticos são atos mentais de criação, porém, restritos aos limites lógicos das proposições. A interpretação intuicionista dos objetos matemáticos enquanto atos mentais, da maneira como apresentada na proposta de ML, mostra claramente como é possível conceber cognitivamente a relação entre entidades de natureza distintas para a prática de uma matemática de uma maneira convincente e confiável.

Apesar de ser um texto introdutório acerca dos elementos fundamentais do intuicionismo, precisamos enfatizar a ideia de que temos uma distinção clara do que chamamos de 'intuicionismo conceitual' (como o de Brouwer) e 'intuicionismo formal' (que contempla a teoria intuicionista, como a de ML). Essa distinção é de extrema importância, pois é ela quem impõe a especialização e desdobramentos de várias noções intuicionistas fundamentais que não foram feitas antes de ML justamente por estarem circunscritas em uma instância estritamente 'conceitual', em que as necessidades da aplicação formal, da prática matemática, não estavam presentes.

Reconhecemos alguns limites do trabalho dada à circunscrição do tema e à proposta de sustentação da tese a partir de uma compreensão propositalmente direcionada aos fundamentos filosóficos do intuicionismo e não poderíamos deixar de mencionar algumas contribuições importantes para a história do intuicionismo não tratadas nesse texto. A começar pelos primórdios das discussões acerca da representação construtiva de funções na França, especialmente com Borel e Lebesgue (MONNA, 1972, p. 81), e que viriam a ser observadas posteriormente no intuicionismo de Brouwer. Esse tópico também mereceria um capítulo à parte na discussão das distinções entre a fundamentação clássica e a intuicionista.

Entendemos ser de extrema importância compreender ainda a real contribuição para o intuicionismo de ML da propriedade de Curry-Howard e das descobertas obtidas pelas pesquisas em verificadores automáticos de provas daquela que chamamos aqui de 'escola holandesa' de pesquisadores que seguiu o trabalho de de Bruijn. Nos parece que ambas, mais do que apenas compatíveis com as ideias intuicionistas, são peças fundamentais para a correta implementação de uma proposta de formalização intuicionista que produz consequências não apenas na matemática, mas na computação, na lógica e na filosofia. Por isso, acreditamos que há ainda uma discussão importante a ser feita para a adequada compreensão dessas componentes do sistema formal de ML, para que elas não sejam encaradas como acessórios opcionais e sim como instâncias obrigatórias e naturais à formalização do intuicionismo.

Haveria espaço ainda para uma discussão mais aprofundada acerca da ontologia das noções intuicionistas fundamentais e a dinâmica das relações entre elas, uma vez que, nesse texto, tratamos de uma tríade de entidades de natureza distintas: construção mental, proposição abstrata e asserção concreta. Seria interessante compreender como essa dinâmica poderia ser conectada a partir da ideia de verdade da proposição e diante da proposta de Sundholm (1994) de tornadores de verdade para proposições. Ou mesmo aprofundar uma discussão acerca da ontologia das entidades fundamentais e sua conexão com as diferentes noções de identidade, em especial a identidade de definição de ML, necessária especialmente ao sistema formal, e que poderia (ou não) ser interpretada como um tipo de metalinguagem.

Todas essas discussões teriam o mesmo eixo comum, a noção de construção mental como noção primitiva fundamental. Por isso acreditamos que esse trabalho pode realmente ter cumprido seu papel de apresentar essa noção como tal, passando pelo teste incontestável do leitor que deve ter (ou não) construído (chegado a) os mesmos juízos (conclusões) que nós.

BIBLIOGRAFIA

BEESON, Michael. Problematic Principles in Constructive Mathematics. In: van Dalen; Lascar; Smiley (Ed.). **Logic Colloquium "80 - Papers intended for the European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic**. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company, 1982.

BEESON, Michael. **Foundations of Constructive Mathematics. Metamathematical Studies**. Berlim, Heidelberg: Springer, 1985.

BISHOP, Errett. **Foundations of Constructive Analysis**. New York: McGraw-Hill, 1967.

BROUWER, Luitzen Egbertus Jan. **Collected Works I**. Ed. A. Heyting. Amsterdam: North Holland, 1975.

de BRUIJN, Nicolaas Govert. Type-theoretical checking and philosophy of mathematics. In: Smith (Ed.). **Twenty-five years of constructive Type Theory: Proceedings of a Congress held in Venice, October 1995**. Oxford: Oxford University Press, 1995.

de BRUIJN, Nicolaas Govert. **Automath: a language for mathematics**. Technische Hogeschool Eindhoven. Eindhoven. 1968.

DUMMETT, Michael. **Elements of Intuitionism**. 2nd. ed. Oxford: Clarendon Press, 2000.

DUMMETT, Michael. **Truth and Other Enigmas**. Cambridge: Harvard University Press, 1978.

DYBJER, Peter; PALMGREN, Erik. **Intuitionistic Type Theory**. [S.l.], 2015.

GOODMAN, Nicolas. A Theory of Constructions Equivalent to Arithmatic. In: Vesley (Ed.). **Intuitionism and Proof Theory, Proceedings of the Summer Conference at Buffalo N. Y. 1968**. London: North-Holland Publishing Company, 1970.

HEYTING, Arend. „Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik". **Erkenntnis 2**, p. 106-115, 1931.

HEYTING, Arend. **Mathematische Grundlagenforschung Intuitionismus Beweistherorie**. Berlin: Springer, 1934.

HEYTING, Arend. **Intuitionism, an introduction**. 3ª ed. Amsterdam, London: North Holland, 1956.

HEYTING, Arend. Remarques sur le constructivisme. **Logique et Analyse**, [S.l.], v. 3, p. 177-182, 1960.

KREISEL, Georg. Foundations of intuitionistic logic. In: E. Nagel (Ed.). **Logic, methodology, and the philosophy of science**. Stanford: Stanford University Press, 1962. p. 198-210.

KREISEL, Georg. Mathematical logic. In: Saaty (Ed.). **Lectures on modern mathematics**. New York: John Wiley & Sons, 1965. p. 95-195.

MANCOSU, Paolo. **From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s**. Oxford: Oxford University Press, 1998.

MARTIN-LÖF, Per. Truth and knowability: On the principles C and K of Michael Dummett. In: Dales; Oliveri (Ed.). **Truth in mathematics**. Oxford: Clarendon Press, 1998.

MARTIN-LÖF, Per. On the Meanings of the Logical Constants and the Justifications of the Logical Laws. **Nordic Journal of Philosophical Logic**, [S.l.], v. 1, n. 1, p. 11-60, 1996.

MARTIN-LÖF, Per. Analytic and synthetic judgements in type theory. **Kant and Contemporary Epistemology**, [S.l.], p. 87-99, 1994.

MARTIN-LÖF, Per. A Path from Logic to Metaphysics. In: **Congresso Nuovi problemi della logica e della filosofia della scienza**, 01/1991, Bologna. Viareggio, 1990. p.8-13.

MARTIN-LÖF, Per. Truth of a proposition, Evidence of a Judgement, Validity of a Proof. **Synthese**, [S.l.], v. 73, p. 407-420, 1987.

MARTIN-LÖF, Per. **Intuitionistic Type Theory**. Napoli: Bibliopolis, 1984.

MARTIN-LÖF, Per. Constructive mathematics and computer programming. In: Cohen et al (Ed.). **Logic, Methodology and Philosophy of Science VI**. Amsterdam: North-Holland, 1982. p. 153-175.

MONNA, A. F. The concept of function in the 19th and 20th centuries, in particular with regard to the discussions between Baire, Borel and Lebesgue. **Archive for History of Exact Sciences**, [S.l.], v. 9, p. 57-84, 1972.

NEDERPELT, Rob; GEUVERS, Herman. **Type Theory and Formal Proof**. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

PRAWITZ, Dag. **Natural Deduction - A Proof-Theoretical Study**. Stockholm: Almqvist & Wiksell, 1965.

PRAWITZ, Dag. Truth and Proof in Intuitionism. In: Dybjer et al (Ed.). **Epistemology versus Ontology**: Springer, 2012. Cap.3. p. 45-67.

SOMMARUGA, Giovanni. **History and Philosophy of Constructive Type Theory**. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 2000.

STOLZENBERG, Gabriel. Review: Errett Bishop, Foundations of constructive analysis. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 76, n. 2, p. 301-323, 1970.

SUNDHOLM, Göran. Proof-Theoretical Semantics and Fregean Identity Criteria for Propositions. **The Monist**, v. 77, n. 3, p. 294-314, 1994.

SUNDHOLM, Göran. Questions of Proof. **Manuscrito**, v. 16, n. 2, p. 47-70, 1993.

SUNDHOLM, Göran. Constructions, proofs and the meaning of logical constants. **Journal of Philosophical Logic**, v. 12, p. 151-172, 1983.

TROELSTRA, Anne Sjerp. **Principles of Intuitionism**. Berlin: Springer-Verlag, 1969.

TROELSTRA, Anne Sjerp. **Choice Sequences: a Chapter of Intuitionistic Mathematics**. Oxford: Clarendon Press, 1977.

TROELSTRA, Anne Sjerp; van DALEN, Dirk. **Constructivism in Mathematics: an introduction**. Amsterdam, New York, Oxford, Tokio: Elsevier Science Publishers B.V., 1988.

van ATTEN, Mark. The hypothetical judgement in the history of intuitionistic logic. In: **2007 International Congress of Logic, Methodology, and Philosophy of Science XIII, Beijing**. King's College Publications, 2007. p.122-136.

van DALEN, Dirk. L.E.J. **Brouwer – Topologist, Intuitionist, Philosopher - How Mathematics Is Rooted in Life**. Verlag, London: Springer, 2013.