

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ALESSANDRA CARLOS DE SOUZA

**Policiclos em Sistemas de Filippov
Planares**

Goiânia
2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Alessandra Carlos de Souza

3. Título do trabalho

Polímeros em Sistemas de Filippov Planares

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Otávio Marçal Leandro Gomide, Professor do Magistério Superior**, em 04/08/2023, às 11:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alessandra Carlos De Souza, Discente**, em 04/08/2023, às 16:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3858968** e o código CRC **56D691E8**.

ALESSANDRA CARLOS DE SOUZA

Policiclos em Sistemas de Filippov Planares

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos.

Orientador: Prof. Dr. Otávio Marçal Leandro Gomide

Goiânia
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Souza, Alessandra Carlos de
Polí-ciclos em Sistemas de Filippov Planares [manuscrito] /
Alessandra Carlos de Souza. - 2023.
LXXIX, 79 f.: il.

Orientador: Prof. Otávio Marçal Leandro Gomide.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2023.

Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Sistemas de Filippov. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Bifurcações. 4. Polí-ciclo. 5. Singularidade Dobra-regular. I. Gomide, Otávio Marçal Leandro, orient. II. Título.

CDU 517.938



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 03 da sessão de Defesa de Dissertação de **Alessandra Carlos de Souza**, que confere o título de Mestra em Matemática, na **área de Sistemas Dinâmicos**.

Ao vigésimo sétimo dia do mês de julho do ano de dois mil e vinte e três, a partir das quatorze horas, via Web Videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"Polígonos em Sistemas de Filippov Planares."** Os trabalhos foram instalados pelo presidente da banca e orientador, Professor Doutor **Otávio Marçal Leandro Gomide - IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: **Professor Doutor Rony Cristiano IME/UFG**, membro titular interno e a Professora Doutora **Dahisy Valadão de Souza Lima - CMCC/UFABC**, membra titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Otávio Marçal Leandro Gomide - IME/UFG**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao vigésimo sétimo dia do mês de julho do ano de dois mil e vinte e três.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Polígonos em Sistemas de Filippov Planares

Documento assinado eletronicamente por **Otávio Marçal Leandro Gomide, Professor do Magistério Superior**, em 27/07/2023, às 15:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rony Cristiano, Professor do Magistério Superior**, em 27/07/2023, às 15:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Dahisy Valadão de Souza Lima, Usuário Externo**, em 28/07/2023, às 17:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3858931** e o código CRC **9CDEB15D**.

Referência: Processo nº 23070.036131/2023-00

SEI nº 3858931

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Alessandra Carlos de Souza

Graduou-se em Matemática na UFG - Universidade Federal de Goiás. Durante sua graduação, foi bolsista do PIBID em um trabalho com robótica nas escolas públicas de Catalão. Durante o Mestrado, UFG - Universidade Federal de Goiás, foi bolsista da CAPES e desenvolveu um trabalho teórico sobre Bifurcações de uma conexão homoclínica que passa por uma singularidade dobra-regular. Atualmente desenvolve uma pesquisa sobre Policiclos em Sistemas de Filippov Planares.

Para as pessoas mais importantes da minha vida: Luciano, Iranete, Aline e Alcilene.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade de cursar este mestrado, pelas coisas boas que me concedeu e por ter me dado forças para não desistir.

À minha família por ter acreditado em mim e me motivado todos os dias.

Ao meu Orientador, Dr. Otávio Marçal Leandro Gomide, por toda a paciência, pelo apoio prestado durante toda a realização deste trabalho, por todo o conhecimento compartilhado, pela orientação e por toda a disponibilidade demonstrada.

Aos colegas de curso, especialmente a Vitória e a Fernanda que lutaram comigo, me apoiaram e me ajudaram durante esse tempo, vocês foram essenciais para essa conquista.

Aos professores do Instituto de Matemática e Estatística - UFG e ao grupos de Sistemas Dinâmicos do IME.

Aos professores, Rony Cristiano e Dahisy Valadão de Souza Lima que aceitaram o convite para ler minha dissertação e participar da minha banca.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

A todos que me ajudaram diretamente ou indiretamente.

O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano.

Isaac Newton,
Pensador.

Resumo

Souza, Alessandra Carlos de. **Policiclos em Sistemas de Filippov Planares**. Goiânia, 2023. 77p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho, estudamos a estrutura local de sistemas de Filippov planares ao redor de Σ -singularidades de codimensão baixa e analisamos sistemas que apresentam policiclos passando por Σ -singularidades. Neste processo, analisamos mapas de Poincaré (associados a estes policiclos) e determinamos diagramas de bifurcação de sistemas de Filippov ao redor destes conjuntos minimais. Mais especificamente, estudamos a bifurcação genérica de um sistema de Filippov ao redor de uma conexão global que passa por uma singularidade do tipo dobra-regular visível, conhecida como ciclo limite costurante crítico e mostramos que, sob pequenas perturbações, essa conexão se rompe e origina um ciclo deslizante ou um ciclo limite costurante. Também estudamos um modelo de sistema de Filippov planar ao redor de uma certa Σ -singularidade chamada dobra-cúspide, e mostramos a existência de um ciclo costurante crítico que bifurca desta singularidade em um desdobramento deste sistema. Além disso, exibimos o diagrama de bifurcação deste desdobramento.

Palavras-chave

Sistemas de Filippov, Sistemas dinâmicos, Bifurcações, Policiclo, Singularidade Dobra-regular, Singularidade Dobra-cúspide.

Abstract

Souza, Alessandra Carlos de. **Polycycles in Filippov Systems planars**. Goiânia, 2023. 77p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work, we study the local structure of planar Filippov systems around low codimension Σ -singularities and we analyze systems presenting polycycles passing through Σ -singularities. In this way, we analyze Poincaré maps (associated with such polycycles) and determine bifurcation diagrams of Filippov systems around these minimal sets. More specifically, we study the generic bifurcation of a Filippov system around a global connection passing through a visible fold-regular singularity, the so-called critical crossing cycle and we show that, under small perturbations, such connection breaks originating either a sliding cycle or a crossing limit cycle. We also study a planar Filippov system model around a certain Σ -singularity called Fold-Cusp, where a fold and a cusp meet and we show the existence of a critical crossing cycle bifurcations from such singularity in an unfolding of this system. In addition, we exhibit the bifurcation diagram of this unfolding.

Keywords

Filippov systems, Dynamical systems, Bifurcations, Polycycle, Fold-regular singularity, Fold-cusp singularity.

Sumário

Lista de Figuras	10
1 Introdução	12
2 Preliminares	16
2.1 Sistemas Suaves	16
2.2 Sistemas de Filippov	24
3 Σ —Estabilidade estrutural: A Estrutura da Dobra-Regular	31
3.1 Equivalência topológica e estabilidade estrutural em Ω'	31
3.2 O conjunto $\Xi_0(p)$ e suas propriedades	33
3.3 A singularidade dobra-regular	36
3.4 A caracterização de $\Xi_0(p)$	40
4 Policiclos: O caso do ciclo costurante crítico	42
4.1 Condições Genéricas	42
4.2 O mapa de primeiro retorno	43
4.3 Perturbações de Z_0 : Esboço do diagrama de Bifurcação	51
5 Estudo: Bifurcações de uma Singularidade Dobra-Cúspide	57
5.1 As regiões de Σ	58
5.2 O campo deslizante	60
5.3 Regiões de Deslize e Escape	61
5.4 Mapa de Primeiro Retorno	69
5.5 Existência de outras conexões	72
Referências Bibliográficas	76

Lista de Figuras

1.1	Variedades invariantes locais de uma singularidade dobra-regular.	13
1.2	Diagrama de bifurcação da família Z_α .	14
1.3	Diagrama de bifurcação.	15
2.1	Exemplos de retratos de fase.	19
2.2	Curva integral que passa por $\sigma(b)$.	22
2.3	Dinâmica local de Z ao redor de um ponto (x_0, y_0) fora de Σ .	25
2.4	Regiões de costura (a), deslize (b) e escape (c).	26
2.5	Combinação linear convexa dos vetores $X(p)$ e $Y(p)$.	27
3.1	Retrato de fase de Z .	32
3.2	Retrato de fase de \tilde{Z} .	32
3.3	A órbita de X por q atinge a curva de descontinuidade Σ .	34
3.4	A órbita de Y por p atinge a curva de descontinuidade Σ .	35
3.5	Construção de h em $q \in V \cap \Sigma^+$.	35
3.6	As figuras apresentam apenas a folheação gerada pelas órbitas de um campo que possui uma dobra-regular visível para $X(a)$, invisível para $X(b)$, invisível para $Y(c)$ e visível para $Y(b)$.	37
3.7	(a) $\Sigma^c \cup \Sigma^s$, (b) $\Sigma^c \cup \Sigma^e$, (c) $\Sigma^c \cup \Sigma^s$ e (d) $\Sigma^c \cup \Sigma^e$.	39
3.8	(a) $X_1(0,0) > 0$ e $Y_2(0,0) > 0$, (b) $X_1(0,0) > 0$ e $Y_2(0,0) < 0$, (c) $X_1(0,0) < 0$ e $Y_2(0,0) > 0$, (d) $X_1(0,0) < 0$ e $Y_2(0,0) < 0$.	40
4.1	Construção do mapa de primeiro retorno Π .	44
4.2	Vizinhança V do ponto de dobra-regular visível em que será analisado o comportamento do campo.	44
4.3	Mapa de transição T .	46
4.4	Mapa de transição D_1 .	48
4.5	Mapa de transição D_2 .	49
4.6	Comportamento do campo próximo de Γ .	50
4.7	Diagrama de bifurcação no caso $d > 0$.	51
4.8	Caso em que Z_0 possui orientação invertida gera um ciclo crítico repulsor.	52
4.9	Caso em que a auto-conexão se dá pelo outro lado da órbita que passa pela dobra-regular.	52
4.10	Direção do vetor $Z^s(0,0,0)$.	53
4.11	Comportamento do campo na região de deslize.	53
4.12	Campo $Z = (X, Y)$.	53
4.13	Rompimento do ciclo gerando um ciclo deslizante.	55
4.14	Comportamento local de $y = \Pi(\alpha, x)$ no caso em que $d > 0$.	56

5.1	Diagrama de bifurcação.	58
5.2	Comportamento de X próximo de Σ .	59
5.3	(a) caso $\beta < 0$, (b) caso $\beta = 0$ e (c) caso $\beta > 0$.	60
5.4	Regiões do espaço de parâmetros (μ, β) .	61
5.5	Comportamento do campo em $\beta < 0$.	62
5.6	Região R_1 .	62
5.7	Comportamento do campo em $\mu < 0$ e $\beta = 0$.	63
5.8	Comportamento do campo em $\beta = \mu = 0$.	63
5.9	Comportamento do campo em $\mu > 0$ e $\beta = 0$.	64
5.10	Região R_2 .	64
5.11	Região B_2 .	65
5.12	Região R_3 .	65
5.13	Região B_3 .	65
5.14	Região R_4 .	66
5.15	Dinâmica de Z_N^s na região R_2 .	67
5.16	Dinâmica de Z_N^s na curva B_2 .	67
5.17	Dinâmica de Z_N^s na região R_3 .	68
5.18	Dinâmica de Z_N^s na região B_3 .	69
5.19	Dinâmica de Z_N^s na região R_4 .	69
5.20	Comportamento de Z na curva $\mu = \sqrt{\beta}$.	71
5.21	Diagrama de bifurcação.	72
5.22	Conexão em que $F_\mu(\sqrt{\beta}) = -\sqrt{\beta}$	73
5.23	Conexões em que $F_\mu(\sqrt{\beta}) = -\sqrt{\beta}$.	73
5.24	Conexões em que $F_\mu \circ C_\beta(\frac{\mu}{2}) = -\sqrt{\beta}$.	74
5.25	Existência de uma sequência de curvas da forma $\mu = \mu_n \sqrt{\beta}$.	74

Introdução

A formalização matemática da Teoria de Sistemas Dinâmicos Não-Suaves ainda é um tópico recente, que se desenvolveu principalmente após o trabalho de Filippov [F88] e dos trabalhos de Teixeira e Sotomayor em 1995 [S95]. Na prática, existem diversos fenômenos da natureza que são modelados por sistemas não suaves, como pode ser conferido em [B99, B08, G03], e assim o estudo de sistemas dinâmicos descontínuos tem se tornado um tópico de pesquisa muito promissor por estabelecer uma fronteira comum entre a matemática, a física e a engenharia. De maneira geral, a Teoria de Sistemas Dinâmicos não-suaves estuda campos vetoriais que perdem a sua continuidade ou diferenciabilidade ao longo de certas hiper-superfícies presentes no espaço de fase, que são conhecidas como variedades de descontinuidade, e denotadas por Σ . Mais especificamente, no caso planar, um sistema não-suave pode ser definido através de uma curva de descontinuidade Σ que separa o plano em duas regiões disjuntas denotadas por Σ^+ e Σ^- , de modo que em $\overline{\Sigma^+}$ temos a atuação de um campo suave X e em $\overline{\Sigma^-}$ a dinâmica é regida por outro campo suave Y , e desta forma temos um campo vetorial da forma

$$Z(p) = \begin{cases} X(p); p \in \overline{\Sigma^+}, \\ Y(p); p \in \overline{\Sigma^-}, \end{cases} \quad (1-1)$$

que é denotado por $Z = (X, Y)$.

Observamos que o sistema (1-1) possui múltiplos valores em Σ e portanto, a teoria clássica de sistemas dinâmicos não pode ser aplicada diretamente, e assim é necessário se estabelecer uma maneira de definir as soluções deste sistema. Neste contexto, o capítulo 2 deste trabalho visa introduzir uma metodologia desenvolvida por Alexei Filippov [F88] que estabelece uma convenção para definir as soluções de um campo de vetores da forma (1-1), que a partir de agora será referido como sistema de Filippov.

Além das singularidades dos campos X e Y , temos o surgimento de novos tipos de singularidades pertencentes à variedade de descontinuidade Σ , e que são conhecidas como Σ -singularidades. O estudo destas novas singularidades é de extrema importância para o entendimento da dinâmica de um sistema de Filippov. Além disso, algumas Σ -

singularidades apresentam variedades invariantes locais, e com isso, tais singularidades admitem conexões globais que não aparecem no contexto suave e que possuem um alto grau de complexidade.

No capítulo 3, estabelecemos a classificação das Σ -singularidades de codimensão 0 que foram abordadas em [F88, G11, K03], e assim caracterizamos todos os campos que não possuem mudanças qualitativas significativas ao redor de uma singularidade quando sofrem pequenas perturbações. Em particular, destacamos o comportamento de um campo ao redor de uma Σ -singularidade do tipo dobra-regular num ponto p , que ocorre quando um dos campos (X ou Y) possui uma órbita que tem um contato quadrático com Σ em p , enquanto o outro campo possui uma órbita por p que atravessa Σ transversalmente.

Neste caso, essa singularidade de codimensão 0 possui variedades invariantes locais estáveis e instáveis que podem se autoconectar originando conexões globais (ver Figura 1.1). Contudo, vale ressaltar que, diferentemente do caso suave em que uma autoconexão só se dá em tempo infinito, no caso não-suave ela pode ocorrer em tempo finito.

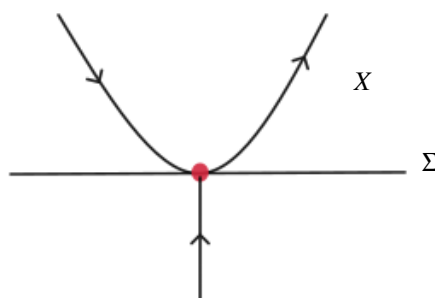


Figura 1.1: *Variedades invariantes locais de uma singularidade dobra-regular.*

O estudo de autoconexões tem sido realizado desde 1882 quando o conceito de ciclo limite foi introduzido por Henri Poincaré e, desde então, a detecção destes objetos tornou-se um dos problemas mais interessantes (e complicados) da Teoria Qualitativa de Sistemas Dinâmicos. Com o passar dos anos, outras conexões globais passaram a ser estudadas e com isso surgiu o conceito de políciclo. De maneira geral, um políciclo é uma curva simples e fechada que é composta por uma coleção de singularidades e órbitas regulares do sistema, de maneira que exista um mapa de primeiro retorno associado á curva. Tais objetos têm sido frequentemente estudados na literatura, como por exemplo, no famoso *Problema de Dulac* [R98].

Desta maneira, quando consideramos o conceito de políciclo para campos suaves e levamos em conta a existência de Σ -singularidades para sistemas de Filippov, podemos

estender de maneira natural o conceito de policiclo para este mundo de sistemas não-suaves. Com isso, o estudo de policiclos em sistemas de Filippov passou a ser considerado cada vez mais pela comunidade científica e tornou-se uma atrativa área de pesquisa (veja [B99, F78, L13, L17, L14], por exemplo). Mais especificamente, policiclos que formam uma conexão do tipo homoclínica com base em uma Σ -singularidade em sistemas planares foram estudadas em [K03, G11, F15, B12, A16]. Outros exemplos de policiclos que passam por Σ -singularidades também podem ser encontrados em [B18, B99, F78, L13, L17, L14, A17]. Vale ressaltar que policiclos através de Σ -singularidades aparecem naturalmente em aplicações físicas, como pode ser conferido em [B18, A17].

Dedicamos o capítulo 4 deste trabalho ao estudo de um policiclo que ocorre quando há uma autoconexão em uma Σ -singularidade do tipo dobra-regular. Este policiclo é conhecido na literatura como ciclo costurante crítico e seu estudo foi abordado em diversos trabalhos (ver [A16, A17, G11, K03, A19, F15, N18], dentre outros). Mais especificamente, construímos um mapa de Poincaré local ao redor desta conexão através de mapas de transição, e a partir das características intrínsecas de uma Σ -singularidade do tipo dobra-regular obtemos uma completa caracterização deste mapa que nos diz que este tipo de policiclo é sempre atrator ou repulsor, a depender da orientação do campo. Além disso, seguindo as ideias de [A16, F15], estendemos a construção e análise deste mapa de Poincaré para pequenas perturbações em famílias a 1-parâmetro Z_α que apresentam este policiclo em Z_0 , e com isso caracterizamos o seu diagrama de bifurcação que pode ser conferido na Figura 1.2. Assim, concluímos que o rompimento deste policiclo sob pequenas perturbações dá origem a um ciclo limite costurante de mesma estabilidade do policiclo, ou uma autoconexão no ponto de dobra-regular envolvendo um pedaço de órbita deslizante, também chamada de ciclo deslizante.

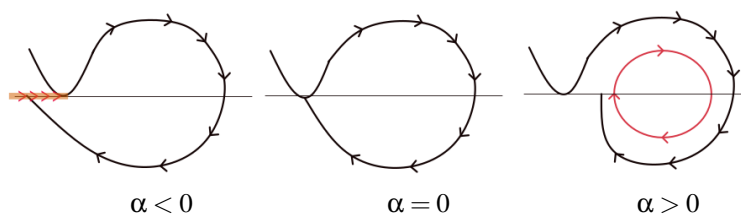


Figura 1.2: Diagrama de bifurcação da família Z_α .

Finalmente, no capítulo 5, inspirados por [B12] estudamos uma família a 2-parâmetros $Z_{\mu,\beta}$ que apresenta uma Σ -singularidade do tipo dobra-cúspide em $Z_{0,0}$. Tal Σ -singularidade ocorre a partir de um contato cúbico de uma das componentes de $Z_{0,0}$ com Σ enquanto a outra componente apresenta um contato quadrático com Σ . Mais especificamente, mostramos com este modelo que, para certas escolhas de parâmetros, o sistema $Z_{\mu,\beta}$ apresenta um ciclo costurante crítico que bifurca localmente da Σ -singularidade cúspide-dobra de $Z_{0,0}$, e mais ainda, para pequenas variações destes parâmetros os fenô-

menos apresentados no capítulo 4 (ver Figura 1.2) são detectados. Além disso, esboçamos o diagrama de bifurcação desta família que pode ser conferido na Figura 1.3.

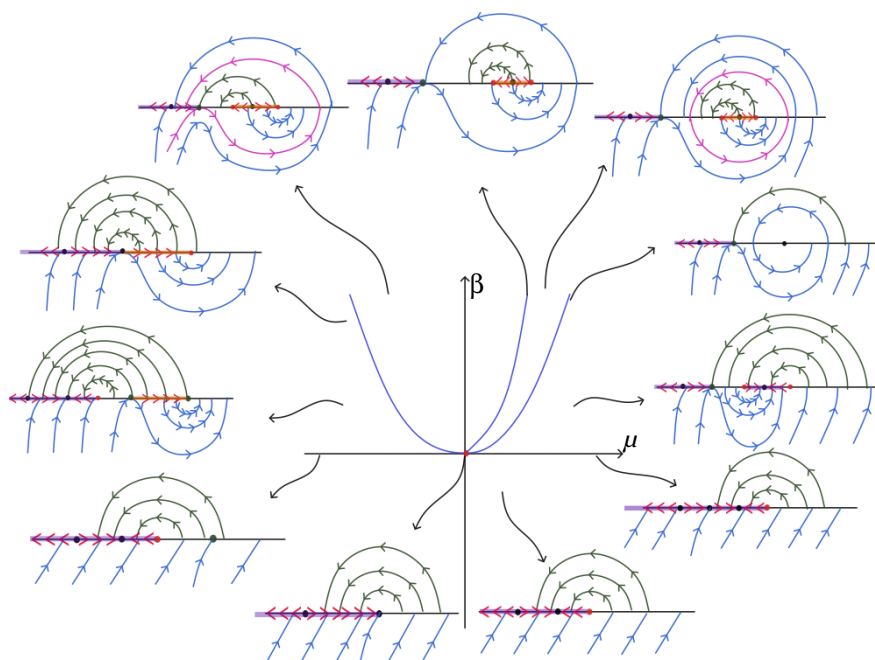


Figura 1.3: Diagrama de bifurcação.

Assim, este modelo exemplifica que o estudo da bifurcação genérica de polí-ciclos é necessário para o entendimento local de Σ -singularidades, o que justifica o alto grau de complexidade dinâmica que estas apresentam e que talvez por esse motivo o seu entendimento ainda seja tema de um dos grandes problemas em aberto da área.

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos básicos de sistemas suaves por partes, conhecidos por Sistemas de Filippov, que serão fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Buscamos apresentar definições e algumas propriedades desses sistemas, como, por exemplo, os conceitos de solução local e de singularidades que surgem neste contexto.

2.1 Sistemas Suaves

Primeiramente, discutimos alguns conceitos e resultados da teoria clássica de sistemas suaves. O primeiro teorema importante para o desenvolvimento deste trabalho é o Teorema de Existência e Unicidade [P00] para soluções de equações diferenciais ordinárias enunciado a seguir.

Teorema 2.1.1 (*Existência e Unicidade*). *Seja A um conjunto aberto de \mathbb{R}^n que contém $x_0 \in A$ e assumamos que $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja uma função de classe C^1 . Então existe $\varepsilon_0 > 0$ e uma solução $\varphi : [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow A$ do problema de valor inicial (PVI)*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), x \in A, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2-1)$$

Além disso, se $\psi : I \rightarrow A$ é uma solução de (2-1), existe $\varepsilon_0^* > 0$ tal que $[-\varepsilon_0^*, \varepsilon_0^*] \subset I \cap [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ e $\varphi(t) = \psi(t), \forall t \in [-\varepsilon_0^*, \varepsilon_0^*]$.

As soluções de uma equação diferencial ordinária (EDO) são definidas como funções $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde I é um intervalo aberto. No teorema acima, ψ está definida num intervalo fechado. Neste caso, cada função coordenada $\psi_i : [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$ possui derivadas laterais em $-\varepsilon_0$ e ε_0 , e assim $\psi'(t)$ está definida para todo $t \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.

O Teorema de Existência e Unicidade garante que dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe uma única solução $\varphi(t, x_0)$ tal que $\varphi(0, x_0) = x_0$ e φ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ próximo de t_0 . Sob algumas condições de regularidade, podemos garantir que as soluções dependam continuamente dos parâmetros e condições iniciais.

Teorema 2.1.2 (*Dependência Contínua*). Dado $(t_0, x_0, \varepsilon_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ fixado e seja $g(t, x, \varepsilon)$ uma função contínua para $(t, x) \in U$ e $\varepsilon \in V$, onde U é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^{n+1} contendo (t_0, x_0) e V é uma vizinhança de ε_0 em \mathbb{R}^k . Se o problema de valor inicial,

$$\begin{cases} \dot{x} = g(t, x, \varepsilon_0), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

tem uma única solução $x(t, t_0, x_0, \varepsilon_0)$, definida num intervalo maximal de existência I , com $t_0 \in (a, b) \subset I$, então, para todo (s, y, ε) suficientemente próximo de $(t_0, x_0, \varepsilon_0)$, o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} = g(t, x, \varepsilon), \\ x(s) = y, \end{cases}$$

tem uma única solução $x(t, s, y, \varepsilon)$ definida em (a, b) que é contínua em $(t, t_0, x_0, \varepsilon_0)$.

Teorema 2.1.3 (*Dependência Diferenciável*) Seja f contínua em um aberto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$, com $D_2 f$ contínua em Ω . Então, para $\lambda \in \mathbb{R}$ fixado, a solução $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ de

$$x' = f(t, x, \lambda), \quad x(t_0) = x_0,$$

é única e admite derivada parcial $D_3 \varphi$ com relação a x_0 . Mais ainda, a aplicação $(t, t_0, x_0, \lambda) \rightarrow D_3 \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ é contínua no seu domínio

$$D = \{(t, t_0, x_0, \lambda); (t_0, x_0, \lambda) \in \Omega, w_-(t_0, x_0, \lambda) < t < w_+(t_0, x_0, \lambda)\},$$

onde (Ω^+, Ω^-) é o intervalo maximal da solução que passa por x_0 em tempo t_0 . E

$$x(t) = D_3 \varphi(t, t_0, x_0, \lambda) \cdot e_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0^k}(t, t_0, x_0, \lambda),$$

para todo $1 \leq k \leq n$, é solução de

$$\begin{cases} x' = J(t)x, \\ x(t_0) = e_k, \end{cases}$$

onde $J(t) = J(t, t_0, x_0, \lambda) = D_2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda)$.

Com respeito ao intervalo de definição das soluções temos o seguinte resultado que nos permite definir o conceito de intervalo maximal.

Teorema 2.1.4 Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $x_0 \in A$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Para cada $x_0 \in A$ fixado, existem $w_0^- \in 9(\infty, 0)$ e $w_0^+ \in (0, \infty)$ de modo que o problema de valor

inicial (PVI)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2-2)$$

possui uma única solução $\varphi : (w_0^-, w_0^+) \rightarrow A$ com a propriedade de maximalidade:

Se I é um intervalo aberto e $\psi : I \rightarrow A$ é solução do PVI, então $I \subset (w_0^-, w_0^+)$ e $\varphi(t) = \psi(t), \forall t \in I$.

Neste caso, dizemos que (w_0^-, w_0^+) é o intervalo maximal da solução e φ é a solução maximal de (2-2).

Definição 2.1.5 Dado $x_0 \in A$, chamaremos a solução maximal do PVI (2-2) $\varphi(\cdot, x_0) : I_{x_0} \rightarrow A$ de **curva integral de f pelo ponto x_0** , e definimos o conjunto

$$\gamma_{x_0} = \{\varphi(t, x_0); t \in I_{x_0}\},$$

como a **órbita de f por x_0** .

Teorema 2.1.6 Seja $\varphi(\cdot, x_0) : I(x_0) \rightarrow A$ a curva integral de f pelo ponto $x_0 \in A$, então uma das opções abaixo é satisfeita:

- $\varphi(\cdot, x_0)$ é injetiva.
- $I(x_0) = \mathbb{R}$ e $\varphi(\cdot, x_0) \equiv x_0$ é constante.
- $I(x_0) = \mathbb{R}$ e φ é **periódica**, isto é, existe um $T > 0$ tal que

$$\varphi(t + T, x_0) = \varphi(t, x_0), \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{e } \varphi(t_1, x_0) \neq \varphi(t_2, x_0) \text{ se } |t_1 - t_2| < T.$$

Definição 2.1.7 Se $\varphi(\cdot, x_0)$ satisfaz (b) então dizemos que γ_{x_0} é um **ponto singular** e neste caso $\gamma_{x_0} = \{x_0\}$. Se $\varphi(\cdot, x_0)$ satisfaz (c) então dizemos que γ_{x_0} é uma **órbita fechada** ou **órbita periódica**.

Assim, é possível definir formalmente o conceito de retrato de fase (ver Figura 2.1).

Definição 2.1.8 O conjunto A munido da decomposição em órbitas de f é chamado de **retrato de fase de f** . As órbitas são orientadas no sentido das curvas integrais do campo f , com exceção dos pontos singulares que recebem a orientação trivial.

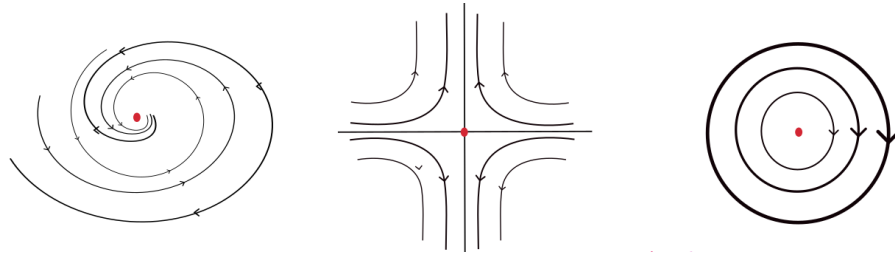


Figura 2.1: Exemplos de retratos de fase.

Sejam A, B abertos de \mathbb{R}^n e $M : A \rightarrow B$, uma função diferenciável e bijetora tal que $M^{-1} : B \rightarrow A$ é diferenciável. Considere um campo C^1 $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ e o sistema $\dot{x} = f(x)$, $x \in A$.

Fazendo $y = M(x)$, temos pela regra da cadeia que

$$\dot{y} = DM(x) \cdot \dot{x}.$$

Logo

$$\dot{y} = DM(x) \cdot f(x).$$

Como $x = M^{-1}(y)$, temos que

$$\dot{y} = DM(M^{-1}(y)) \cdot f(M^{-1}(y))$$

Assim, se $g : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a função dada por

$$g(y) = DM(M^{-1}(y)) \cdot f(M^{-1}(y))$$

então temos que g é diferenciável, e assim

$$\dot{y} = g(y).$$

Esse processo é conhecido por mudança de variáveis, e temos que os campos $\dot{x} = f(x)$ e $\dot{y} = g(y)$ possuem retratos de fases parecidos, no sentido de que a função M deforma o retrato de fase de $\dot{x} = f(x)$ no retrato de fase de $\dot{y} = g(y)$ de modo a preservar a estrutura das órbitas. Essa mesma noção de deformação de retratos de fase pode ser expressa com menos exigências através do conceito de equivalência topológica.

Definição 2.1.9 : Sejam A, B abertos de \mathbb{R}^n e $h : A \rightarrow B$ uma função. Diremos que

- a) h é um **homeomorfismo** se h é contínua, invertível e h^{-1} é contínua.
- b) h é um **difeomorfismo de classe C^r** se h é C^r , invertível e h^{-1} é C^r .

Definição 2.1.10 : Sejam A, B abertos de \mathbb{R}^n , $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ dois campos vetoriais. Dizemos que f é **topologicamente equivalente** a g se existe um homeomorfismo $h : A \rightarrow B$ tal que:

- i) Se $x_0 \in A$ e $\gamma_{x_0}^f$ é a órbita de f por x_0 , então $h(\gamma_{x_0}^f) = \gamma_{h(x_0)}^g$ é a órbita de g por $h(x_0)$.
- ii) h preserva a orientação das órbitas.

A definição abaixo estabelece quando dois campos não possuem diferenças qualitativas ao redor de determinado ponto, o que constitui um ponto de vista local para o conceito de equivalência estabelecido acima.

Definição 2.1.11 : Sejam A, B abertos de \mathbb{R}^n , $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ dois campos vetoriais, $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$. Dizemos que f é **localmente topologicamente equivalente (localmente C^r -equivalente) em (x_0, y_0) ao campo g** se existem abertos $x_0 \in U \subset A$ e $y_0 \in V \subset B$ e um homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ tal que

- a) $h(x_0) = y_0$;
- b) Se $x_1 \in U$ e γ_{f, x_1}^f é a órbita de f por x_1 então $h(\gamma_{x_1}^f \cap U) = \gamma_{h(x_1)}^g \cap V$, onde $\gamma_{h(x_1)}^g$ é a órbita de g por $h(x_1)$;
- c) h preserva a orientação das órbitas.

Observação:

- Se f é localmente topologicamente C^r -equivalente em (x_0, y_0) a g , então g é localmente topologicamente C^r -equivalente em (y_0, x_0) a f .
- Se $x_0 \in U \subset A$ e $V \subset B$ são abertos tais que $f|_U$ é equivalente a $g|_V$, então f é localmente equivalente a g em $(x_0, h(x_0))$.

Definição 2.1.12 : Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores, dizemos que x_0 é um

- a) **ponto singular de f** se $f(x_0) = \vec{0}$.
- b) **ponto regular de f** se $f(x_0) \neq \vec{0}$.

Se x_0 é um ponto regular, então o retrato de fase ao redor de x_0 pode ser "retificado" através do Teorema do Fluxo Tubular enunciado e demonstrado a seguir. Para isso, consideramos os seguintes conceitos e resultados abaixo.

Definição 2.1.13 : Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^r , $r \geq 1$. Seja $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ um aberto e $\sigma : B \rightarrow A$ uma função diferenciável de classe C^r . Diremos que σ é uma **seção transversal local de f** se

$$\{D\sigma(b)(e_1), D\sigma(b)(e_2), \dots, D\sigma(b)(e_{n-1}), f(D\sigma(b))\},$$

forma uma base de \mathbb{R}^n para cada $b \in B$, onde $e_j = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1} \forall j \in \{1, \dots, n-1\}$. Denote $\Sigma = \sigma(B)$.

Teorema 2.1.14 (Teorema da Função Implícita). Seja $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e suponha que $F(x_0, y_0) = 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Se $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ existem e são contínuas numa vizinhança de (x_0, y_0) , $i = 1, \dots, n+1$, e se $\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(x_0, y_0) \neq 0$, então existem $\varepsilon > 0$ e uma função de classe C^1 $\tau : B(x_0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tau(x_0) = y_0$ e $F(x, y) = 0$ com $x \in B(x_0, \varepsilon)$, $|y - y_0| < \varepsilon$ se, e somente se, $y = \tau(x)$. Neste caso:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_i}(x) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, \tau(x))}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(x, \tau(x))}.$$

Teorema 2.1.15 (Teorema da Função Inversa.) Suponha que f é uma função C^1 de um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ em \mathbb{R}^n , $f'(a)$ é invertível para algum $a \in U$ e $b = f(a)$. Então:

- Existem abertos V e W em \mathbb{R}^n tais que $a \in V$, $b \in W$ é bijetora entre V e $f(V) = W$.
- Se g é inversa de f , definida em W por $g(f(x)) = x$; para todo $x \in V$, então g é de classe C^1 .

Teorema 2.1.16 (Teorema do Fluxo Tubular). Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^r , $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ um aberto contendo a origem de \mathbb{R}^{n-1} , e $\sigma : B \rightarrow \Sigma \subset A$ uma seção transversal local de f tal que $\sigma(0) = x_0 \in A$. Se x_0 é um ponto regular de f , então existem um aberto $U \subset A$ tal que $x_0 \in U$ e um difeomorfismo de classe C^r

$$h : U \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B(0, r),$$

onde $B(0, r)$ é a bola de \mathbb{R}^{n-1} de centro na origem $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ e raio r , e $\varepsilon > 0$, tais que

- $h(\Sigma \cap U) = \{0\} \times B(0, r)$;
- h é uma C^r -conjugação local em $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^n$ entre $\dot{x} = f(x)$ e o campo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1, \\ \dot{x}_2 = 0, \\ \vdots \\ \dot{x}_n = 0. \end{cases}$$

Demonstração

Seja $\Omega = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times A, t \in I(y)\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ onde $I(y)$ é o intervalo maximal de

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = y, \end{cases}$$

e considere o fluxo $\varphi : \Omega \rightarrow A$ de $\dot{x} = f(x)$.

Defina

$$\Omega_B = \{(t, b) \in \mathbb{R} \times B; (t, \sigma(b)) \in \Omega\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n.$$

Note que $I(x_0) \times \{0\} \subset \Omega_B$ pois $\sigma(0) = x_0$ e $(t, x_0) \in \Omega$ para todo $t \in I(x_0)$.

Defina

$$\begin{aligned} F : \Omega_B &\longrightarrow A \\ (t, b) &\longmapsto \varphi(t, \sigma(b)) \end{aligned}$$

Note que para cada b fixado, F leva a reta horizontal $I(\sigma(b)) \times \{b\} \subset \Omega_B$ na curva integral que passa por $\sigma(b)$. Ver Figura 2.2.

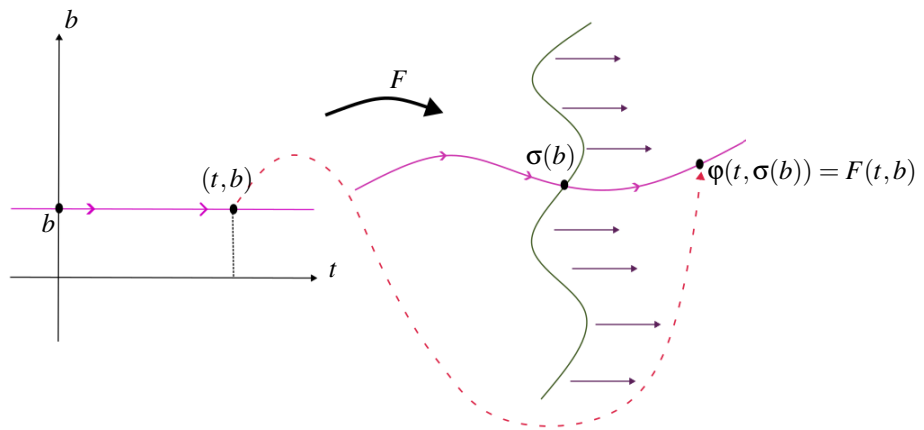


Figura 2.2: Curva integral que passa por $\sigma(b)$.

Mostraremos que F é um difeomorfismo local de classe C^r . Para isso, utilizamos o Teorema da Função Inversa 2.1.15. Observe que:

- Ω_B é um conjunto aberto.
- O fluxo de um campo de classe C^r é de classe C^r , logo φ é C^r .

Como σ é de classe C^r , $(t, b) \mapsto (t, \sigma(b))$ é de classe C^r e assim F é uma composição de funções de classe C^r , e portanto também é C^r . Além disso,

$$F(0, 0) = \varphi(0, \sigma(0)) = \varphi(0, x_0) = x_0.$$

Para usar o Teorema da Função Inversa 2.1.15, devemos ver que $DF(0, 0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. Note que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t}(0,0) &= \frac{d}{dt}(\varphi(t, \sigma(0))) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi(t, x_0)) \Big|_{t=0} \\
&= f(\varphi(t, x_0)) \Big|_{t=0} \\
&= f(\varphi(0, x_0)) \\
&= f(x_0).
\end{aligned}$$

Agora, para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$ temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial b_i}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial b_i} \varphi(0, \sigma(0, \dots, 0, b_i, 0, \dots, 0)) \Big|_{b_i=0} = \frac{\partial}{\partial b_i} \sigma(0, \dots, 0, b_i, 0, \dots, 0) \Big|_{b_i=0} \\
&= \frac{\partial \sigma}{\partial b_i}(0).
\end{aligned}$$

Note que $\frac{\partial \sigma}{\partial b_i}(0) = D\sigma(0)(e_i)$, $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$. Assim:

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ F(x_0) & D\sigma(0)(e_1) & \dots & D\sigma(0)(e_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix},$$

e como σ é seção transversal local, segue que $\{D\sigma(0)(e_1), \dots, D\sigma(0)(e_{n-1}), f(\sigma(0))\}$ é base de R^n .

Logo, $\det(DF(0,0)) \neq 0$ e portanto $DF(0,0)$ é um isomorfismo. Pelo Teorema da Função Inversa 2.1.15, existem abertos $(0,0) \in \tilde{U} \subset \Omega_B$ e $x_0 \in \tilde{V} \subset A$ tais que $F|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ seja invertível e $(F|_{\tilde{U}})^{-1}$ é de classe C^r . Como $(0,0) \in \tilde{U}$ e \tilde{U} é aberto, existem $\varepsilon > 0$ e $r > 0$ tais que $(-\varepsilon, \varepsilon) \times B(0, r) \subset \tilde{U}$, $B(0, r) = \{(b_1, \dots, b_{n-1}), |(b_1, \dots, b_{n-1})| < r\}$. Assim, se $U = F|_{\tilde{U}}((-\varepsilon, \varepsilon) \times B(0, r)) \subset \tilde{V}$, então, $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B(0, r) \rightarrow U$ é um difeomorfismo de classe C^r .

Defina $h = (F)^{-1} : U \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B(0, r)$. Então,

$$F(0, b) = \varphi(0, \sigma(b)) = \sigma(b) \in \Sigma \cap U, \forall b \in B(0, r).$$

Logo $h(\Sigma \cap U) = \{0\} \times B(0, r)$, e portanto o item (a) está provado.

Mostremos o item (b), isto é h^{-1} que conjuga $\dot{x} = f(x)$ e $\dot{x} = (1, 0, \dots, 0)$. De fato:

$$\begin{aligned}
Dh^{-1}(t, b) \cdot (1, 0, \dots, 0) &= D((F|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times B(0, r)})^{-1})^{-1}(t, b) \cdot (1, 0, \dots, 0) \\
&= DF(t, b) \cdot (1, 0, \dots, 0) \\
&= \frac{\partial F}{\partial t}(t, b) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, \sigma(b)) \\
&= f(\varphi(t, \sigma(b))) \\
&= f(F(t, b)) = f(h^{-1}(t, b)).
\end{aligned}$$

Assim $(1, 0, \dots, 0) = [Dh^{-1}(t, b)]^{-1} f(h^{-1}(t, b))$, $\forall (t, b) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times B(0, r)$.

Logo, h^{-1} é uma mudança de coordenada e portanto conjuga os campos. □

É importante ressaltar que este resultado é apenas local. Se um campo não possui singularidades, significa que em torno de cada ponto, seu retrato de fase pode ser trivializado, porém não significa que o retrato de fase pode ser trivializado completamente. Entretanto, podemos generalizar esse resultado para trivializar campos ao redor de órbitas regulares compactas através do Teorema do Fluxo Tubular Longo abaixo.

Definição 2.1.17 *Um fluxo tubular de $X \in X^r(M)$ é um par (F, f) onde F é um aberto de M e f é um difeomorfismo C^r de F sobre o cubo*

$$I^m = I \times I^{m-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}; |x| < 1, |y^i| < 1, i = 1, \dots, n-1\}.$$

que leva trajetórias de X em F nas retas $I \times y \subset I \times I^{m-1}$.

Teorema 2.1.18 (*Fluxo Tubular Longo*). *Seja $\gamma \subset M$ um arco de trajetória de X compacto e não fechado. Então existe um fluxo tubular (F, f) de X tal que $\gamma \subset F$.*

A demonstração do Teorema 2.1.18 pode ser encontrada em [P75] e se baseia em obter uma cobertura aberta da trajetória compacta por vizinhança em que o fluxo possa ser trivializado via Teorema do Fluxo Tubular 2.1.16 e na extração de uma subcobertura finita via compacidade.

2.2 Sistemas de Filippov

Nesta seção, formalizamos a noção de solução de um sistema dinâmico suave por partes planar dada pela convenção de Filippov [F88].

Sejam M um conjunto aberto e conexo de \mathbb{R}^2 e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave que possui 0 como valor regular de f . Assumindo que $\Sigma = f^{-1}(0)$ é uma subvariedade mergulhada de M , considere

$$\Sigma^+ = \{p \in M : f(p) > 0\} \text{ e } \Sigma^- = \{p \in M : f(p) < 0\}.$$

Então, definimos um **sistema de Filippov** $Z = (X, Y)$ como um campo da forma

$$Z(p) = \begin{cases} X(p) & \text{se } p \in \Sigma^+, \\ Y(p) & \text{se } p \in \Sigma^-, \end{cases} \quad (2-3)$$

onde X e Y são campos vetoriais de classe C^r definidos em $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$, respectivamente.

Denotamos por Ω'_Σ (ou Ω^r) o conjunto dos campos vetoriais suaves por partes no plano que possuem curva de descontinuidade Σ . Note que Ω^r pode ser identificado com o conjunto $\mathcal{X}^r \times \mathcal{X}^r$, onde \mathcal{X}^r é o conjunto dos campos suaves de classe C^r munido com a topologia C^r . Assim, podemos considerar que Ω^r está munido com a topologia produto.

Seja $Z = (X, Y) \in \Omega^r$. Como X é de classe C^r , temos que se $(x_0, y_0) \in \overline{\Sigma^+}$, então existe uma única solução do problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} (\dot{x}, \dot{y}) = X(x, y), \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0), \end{cases} \quad (2-4)$$

que denotamos por $\varphi_X(x_0, y_0) : I(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $I(x_0, y_0)$ é o intervalo maximal de solução.

Analogamente, para o campo Y , se $(x_0, y_0) \in \overline{\Sigma^-}$, existe uma única solução do PVI

$$\begin{cases} (\dot{x}, \dot{y}) = Y(x, y), \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0), \end{cases} \quad (2-5)$$

que denotamos por $\varphi_Y(x_0, y_0) : I(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}^2$.

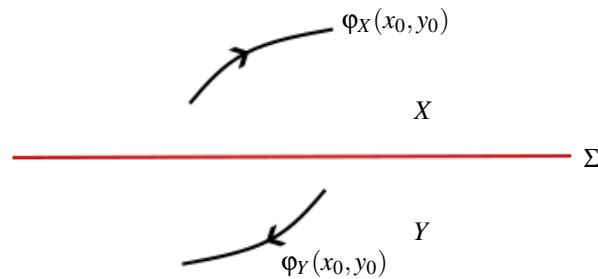


Figura 2.3: Dinâmica local de Z ao redor de um ponto (x_0, y_0) fora de Σ .

Assim, temos que para pontos fora de Σ , o sistema apresenta um candidato natural à solução local, ou seja, basta utilizar as soluções de X e de Y para determinar

a dinâmica de Z ao redor de um ponto (x_0, y_0) que está em Σ^+ ou Σ^- , respectivamente (ver Figura 2.3). A definição da **solução local** por um ponto $(x_0, y_0) \in \Sigma$ depende de como as soluções φ_X e φ_Y chegam no ponto (x_0, y_0) que é determinado através do cálculo das **derivadas de Lie** de f na direção dos campos X e Y nos pontos de Σ .

Definição 2.2.1 : A *derivada de Lie* de f na direção de X em $(x_0, y_0) \in \Sigma$ é dada por

$$Xf(x_0, y_0) = X(x_0, y_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0). \quad (2-6)$$

Analogamente, a derivada de f na direção de Y em $(x_0, y_0) \in \Sigma$ é dada por

$$Yf(x_0, y_0) = Y(x_0, y_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0). \quad (2-7)$$

As derivadas de Lie de ordem superior de f na direção de X são definidas por $X^n f = X(X^{n-1} f)$, onde $n \in \mathbb{N}$. Assim, podemos classificar as regiões de Σ conforme as órbitas de X e Y chegam ou partem dos pontos de Σ .

Dado um sistema de Filippov $Z = (X, Y)$, dividimos a variedade de descontinuidade Σ nas seguintes regiões (ver Figura 2.4):

- **Região de Costura:** $\Sigma^c = \{p \in \Sigma; Xf(p) \cdot Yf(p) > 0\}$,
- **Região de Deslize:** $\Sigma^s = \{p \in \Sigma; Xf(p) < 0, Yf(p) > 0\}$,
- **Região de Escape:** $\Sigma^e = \{p \in \Sigma; Xf(p) > 0, Yf(p) < 0\}$.

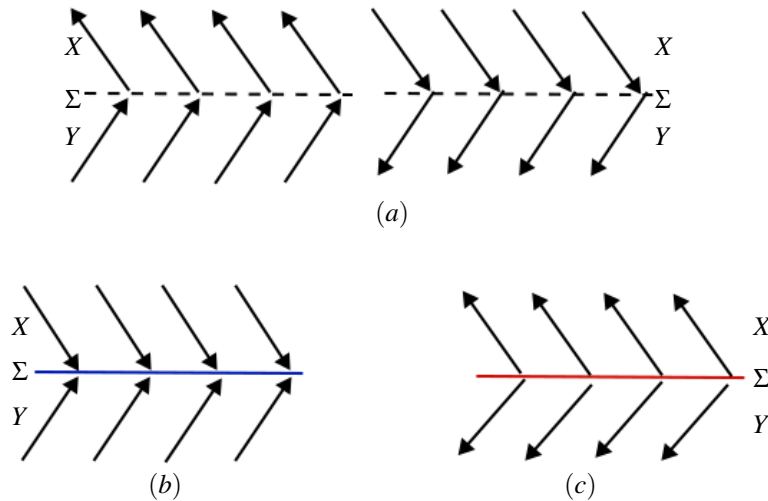


Figura 2.4: Regiões de costura (a), deslize (b) e escape (c).

Se $p \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$, então existe um único vetor $Z^s(p)$ que está na combinação linear convexa dos vetores $X(p)$ e $Y(p)$ e que é tangente a Σ em p (ver Figura 2.5). Desta forma, podemos definir um campo Z^s sobre $\Sigma^e \cup \Sigma^s$.

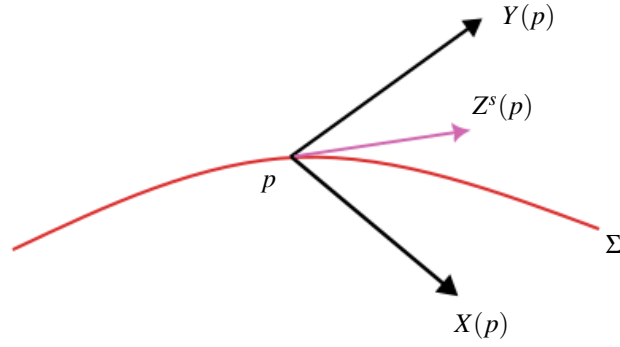


Figura 2.5: Combinação linear convexa dos vetores $X(p)$ e $Y(p)$.

Definição 2.2.2 : O campo Z^s definido em $\Sigma^e \cup \Sigma^s$ é chamado de **campo vetorial deslizante** associado a $Z = (X, Y)$. O campo deslizante Z^s apresenta a seguinte expressão em $p \in \Sigma$:

$$Z^s(p) = \frac{Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)}{Yf(p) - Xf(p)}. \quad (2-8)$$

Notamos que Z^s e $Z_N^s = (Yf(p) - Xf(p)) \cdot Z^s(p)$ possuem o mesmo retrato de fase em Σ^s , e o mesmo retrato de fase com direção contrária em Σ^e . Desta forma, podemos usar Z_N^s para entender as órbitas de Z^s . O campo Z_N^s é chamado de **campo deslizante normalizado**.

Agora, estamos aptos a definir a solução local de

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y), f(x, y) \geq 0, \\ Y(x, y), f(x, y) \leq 0. \end{cases} \quad (2-9)$$

Se $p \in \overline{\Sigma^+}$, denote por $\varphi_X(\cdot, p)$ a solução do campo $X : \overline{\Sigma^+} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que passa por p em um $t = 0$. Assim, φ_X satisfaz:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\varphi_X(t, p)) = X(\varphi_X(t, p)), \\ \varphi_X(t, p) = p. \end{cases} \quad (2-10)$$

Além disso, denote por $I(p, X)$ o intervalo maximal associado ao PVI acima.

Analogamente, se $p \in \overline{\Sigma^-}$, definimos $\varphi_Y(\cdot, p) : I(p, Y) \rightarrow \mathbb{R}^2$ como a solução maximal do PVI:

$$\begin{cases} (\dot{x}, \dot{y}) = Y(x, y), \\ (x(0), y(0)) = p. \end{cases} \quad (2-11)$$

Definição 2.2.3 : A **trajetória local** $\varphi_Z(\cdot, p)$ de um sistema de Filippov 2-3 por $p \in \mathbb{R}^2$ é dada por:

- a) Se $p \in \Sigma^+$, então $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p) \forall t \in I$, onde $I \subset I(p, X)$ é um intervalo aberto contendo 0 tal que $\varphi_X(I, p) \subset \Sigma^+$.
- b) Se $p \in \Sigma^-$, então $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p) \forall t \in I$, onde $I \subset I(p, Y)$ é um intervalo aberto contendo 0 tal que $\varphi_Y(I, p) \subset \Sigma^-$.
- c) Se $p \in \Sigma^c$ é tal que $Xf(p) > 0$ e $Yf(p) > 0$, então existem $\alpha < 0 < \beta$ tais que $\varphi_X((0, \beta), p) \subset \Sigma^+$ e $\varphi_Y((\alpha, 0), p) \subset \Sigma^-$. Neste caso, definimos $I = (\alpha, \beta)$ e

$$\varphi_Z(t, p) := \begin{cases} \varphi_Y(t, p), & \text{se } \alpha < t < 0, \\ p, & \text{se } t = 0, \\ \varphi_X(t, p), & \text{se } 0 < t < \beta. \end{cases} \quad (2-12)$$

- d) Se $p \in \Sigma^c$ é tal que $Xf(p) < 0$ e $Yf(p) < 0$, então existem $\alpha < 0 < \beta$ tais que $\varphi_X((\alpha, 0), p) \subset \Sigma^+$ e $\varphi_Y((0, \beta), p) \subset \Sigma^-$. Neste caso, definimos $I = (\alpha, \beta)$ e

$$\varphi_Z(t, p) := \begin{cases} \varphi_X(t, p), & \text{se } \alpha < t < 0, \\ p, & \text{se } t = 0, \\ \varphi_Y(t, p), & \text{se } 0 < t < \beta. \end{cases} \quad (2-13)$$

- e) Se $p \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$, então $\varphi_Z(t, p) = \varphi_{Z^s}(t, p) \forall t \in I$, onde φ_{Z^s} é o fluxo de Z^s e I é um intervalo aberto contendo 0 tal que $\varphi_{Z^s}(I, p) \subset \Sigma^e \cup \Sigma^s$.
- f) Se $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ e as trajetórias por pontos em Σ de ambos os lados de p podem ser estendidas para p e coincidem, então a trajetória por p será dada por essa trajetória. Neste caso, diremos que p é um **ponto de tangência regular**.
- g) Se $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ não é um ponto de tangência regular, então definimos $I = \mathbb{R}$ e $\varphi_Z(t, p) = p \forall t \in I$. Neste caso, dizemos que p é um **ponto de tangência singular**.

Definição 2.2.4 : A **órbita local** de p é dada por

$$\gamma(p) = \{\varphi_Z(t, p); t \in I\}.$$

No contexto de sistemas de Filippov, é natural o surgimento de novas singularidades. Abaixo, fazemos uma breve descrição destes elementos.

Definição 2.2.5 : Se $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ e $Z^s(p) = \vec{0}$, então diremos que p é um **pseudo-equilíbrio** de Z .

Proposição 2.2.6 Se $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ é um pseudo-equilíbrio de $Z = (X, Y)$ então os vetores $X(p)$ e $Y(p)$ são colineares.

Demonstração

Seja

$$Z^s(p) = \frac{Yf(p) \cdot X(p) - Xf(p) \cdot Y(p)}{Yf(p) - Xf(p)}$$

Como $p \in \Sigma^s \cap \Sigma^e$, temos que $Yf(p) \neq 0$ e $Xf(p) \neq 0$, e além disso $Yf(p) - Xf(p) \neq 0$. Logo $Z^s(p) = \vec{0} \Leftrightarrow X(p) = \frac{Xf(p)}{Yf(p)} \cdot Yf(p)$, e portanto $X(p)$ e $Y(p)$ são colineares. \square

Logo, a inclinação que as órbitas de X e Y chegam em um ponto $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ afeta diretamente as propriedades de Z^s .

Definição 2.2.7 : Se $p \in \Sigma^+$ (resp. $p \in \Sigma^-$) e $X(p) = \vec{0}$ (resp. $Y(p) = \vec{0}$), então diremos que p é um **ponto de equilíbrio natural** de Z .

Se p é um ponto de equilíbrio de X em $\overline{\Sigma^+}$, dizemos que ele é um ponto crítico admissível (ou natural). Se $p \notin \overline{\Sigma^+}$ é um ponto de equilíbrio de X , então dizemos que ele é um ponto crítico não-admissível (ou virtual).

Definição 2.2.8 : As **singularidades** de um sistema de Filippov $Z = (X, Y)$ são:

- os pontos $p \in \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ que são pontos de equilíbrio naturais de Z .
- os pontos $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ que são pseudo-equilíbrios.
- os pontos $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ que são pontos de tangência (regular ou singular).

Definição 2.2.9 : Se $p \in \mathbb{R}^2$ não é uma singularidade de Z então p é chamado de **ponto regular**.

Notamos que, diferentemente do caso suave, a trajetória de Z por uma singularidade p não é necessariamente estacionária, ou seja, sua órbita pode não ser apenas o ponto p .

Definição 2.2.10 : Dizemos que uma singularidade $p \in \Sigma$ de Z é:

- distinguida** se $\gamma(p) = p$.
- não-distinguida** se p é um ponto de tangência regular e sua órbita local $\gamma(p)$ é homeomorfa a \mathbb{R} .

As singularidades distinguidas podem ser pontos de equilíbrio de X ou Y , pseudo-equilíbrios ou pontos de tangência singular.

Agora, formalizaremos o conceito de Σ -singularidades, com o objetivo de definir rigorosamente o problema a ser abordado.

Definição 2.2.11 Seja $Z = (X, Y) \in \Omega^r$, um ponto $p \in \Sigma$ é dito ser:

- uma **singularidade do tipo tangência-regular** de Z quando $Xf(p) = 0$ (resp. $Yf(p) = 0$) e $Yf(p) \neq 0$ (resp. $Xf(p) \neq 0$);
- uma **singularidade do tipo tangência-tangência** de Z quando $Xf(p) = Yf(p) = 0$.

Para classificar as singularidades tangenciais, necessitamos do seguinte conceito que define o contato entre um campo de vetor suave e uma curva.

Definição 2.2.12 *Seja X um campo de vetores de classe C^r . Dizemos que X possui um contato de ordem n com Σ em p se $X^i f(p) = 0$ para $i = 1, \dots, n-1$, e $X^n f(p) \neq 0$. Em particular, para $n = 2, 3$, p é dito ser uma **dobra** e uma **cúspide** de X , respectivamente.*

Neste trabalho, focaremos nossa atenção nas singularidades tangenciais que envolvem dobras e cúspides.

Observação 2.2.13 *Se p é uma cúspide para ambos os campos X e Y , então dizemos que p é uma singularidade **cúspide-cúspide** de Z .*

*Se p é uma dobra para ambos os campos X e Y , então dizemos que p é uma singularidade **dobra-dobra** de Z .*

*Se p é uma dobra para X e uma cúspide para Y , então dizemos que p é uma singularidade **dobra-cúspide** de Z .*

*Se p é uma dobra para Y e uma cúspide para X , então dizemos que p é uma singularidade **cúspide-dobra** de Z .*

Além das singularidades, a ideia de ciclo também pode ser estabelecida para sistemas de Filippov.

Definição 2.2.14 : *Uma **órbita regular maximal** de Z é uma curva γ suave por partes tal que:*

- a) $\gamma \cap \Sigma^+$ e $\gamma \cap \Sigma^-$ é uma união de órbitas de X e Y , respectivamente.
- b) Se $p \in \gamma \cap \Sigma$, então $p \in \Sigma^c$ ou $p \in \partial \Sigma^c$ é um ponto de tangência regular.
- c) γ é maximal com respeito a (a) e (b).

Definição 2.2.15 : *Uma **órbita deslizante maximal** de Z é uma curva γ suave tal que $\gamma \subset \overline{\Sigma^s} \cup \overline{\Sigma^e}$ é uma órbita maximal de Z^s .*

Um **ciclo** é uma órbita regular fechada Γ de Z . Além disso, se $\Gamma \cap \Sigma \neq \emptyset$ e $\Gamma \cap \Sigma \subset \Sigma^c$, então dizemos que Γ é um **ciclo costurante** de Z . Caso contrário Γ é um **ciclo deslizante** de Z .

Σ –Estabilidade estrutural: A Estrutura da Dobra-Regular

Dedicamos esse capítulo à definição do conceito de estabilidade estrutural local no contexto de sistemas de Filippov e a exibir uma caracterização de campos localmente Σ –estruturalmente estáveis. Em particular, estudamos um tipo de singularidade em sistemas de Filippov conhecida como singularidade dobra-regular. Este objeto será de extrema importância para o entendimento do fenômeno a ser apresentado no decorrer deste trabalho.

3.1 Equivalência topológica e estabilidade estrutural em Ω^r

Seja $\Omega_\Sigma^r(U)$ o conjunto dos campos

$$Z(x,y) = \begin{cases} X(x,y); & \text{se } (x,y) \in \overline{\Sigma^+}, \\ Y(x,y); & \text{se } (x,y) \in \overline{\Sigma^-}. \end{cases} \quad (3-1)$$

onde X, Y são campos de classe C^r definidos em $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$, respectivamente, ou seja, $\Omega_\Sigma^r(U) = C^r(\overline{\Sigma^+}) \times C^r(\overline{\Sigma^-})$. Se \overline{U} é compacto, então $\Omega_\Sigma^r(U)$ é um espaço de Banach com a norma produto induzida da norma C^r . Inspirado pelo caso suave, podemos estabelecer uma noção de equivalência para sistemas de Filippov.

Definição 3.1.1 : *Sejam U, \tilde{U} dois abertos de \mathbb{R}^2 , $Z \in \Omega_\Sigma^r(U)$ e $\tilde{Z} \in \Omega_{\tilde{\Sigma}}^r(\tilde{U})$ com curvas de descontinuidade $\Sigma \subset U$ e $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$, respectivamente. Dizemos que Z e \tilde{Z} são Σ -**equivalentes (topologicamente)** se existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow \tilde{U}$ que leva Σ em $\tilde{\Sigma}$, órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} e que preserva a orientação das órbitas.*

Exemplo 3.1.2 *Os campos*

$$Z(x,y) = \begin{cases} (-1, -1), & \text{se } y > 0, \\ (-1, 1), & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad (3-2)$$

e

$$\tilde{Z}(x,y) = \begin{cases} (0, -1), & \text{se } y > 0, \\ (1, 1), & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad (3-3)$$

são Σ -equivalentes.

De fato, $Xf(x,y) = 1$ e $Yf(x,y) = -1$ logo, $Xf(x,0) < 0$ e $Yf(x,0) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, $\Sigma = \Sigma^s$, e neste caso:

$$\begin{aligned} Z^s(x,0) &= \frac{Yf(x,0) \cdot X(x,0) - Xf(x,0) \cdot Y(x,0)}{Yf(x,0) - Xf(x,0)} \\ &= \frac{1 \cdot (-1, 1) + 1 \cdot (-1, 1)}{2} \\ &= (-1, 0). \end{aligned}$$

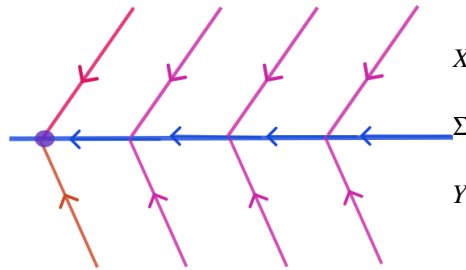


Figura 3.1: Retrato de fase de Z .

Agora, $\tilde{X}f(x,y) = 1$ e $\tilde{Y}f(x,y) = -1$ implica que $\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}^s$. Neste caso,

$$\tilde{Z}^s(x,0) = \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

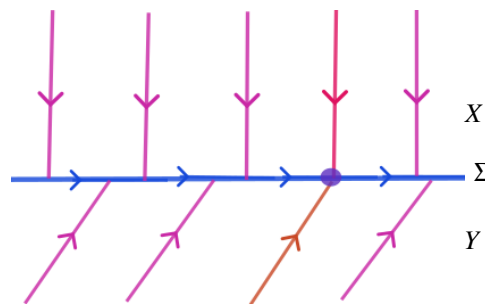


Figura 3.2: Retrato de fase de \tilde{Z} .

Assim, basta definir $h(x,0) = (-x, 0)$ e estender h usando os fluxos de Z e \tilde{Z} (ver Figuras 3.1 e 3.2).

Definição 3.1.3 Dizemos que $Z_0 \in \Omega_{\Sigma}^r(U)$ é Σ -estruturalmente estável se existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \Omega_{\Sigma}^r(U)$ de Z_0 tal que, para todo $Z \in \mathcal{U}$, Z e Z_0 são Σ -equivalentes.

Definição 3.1.4 *Sejam $Z_0 \in \Omega_\Sigma^r(U)$ e $p \in U$, diremos que Z_0 é **localmente Σ -estruturalmente estável em p** se existe uma vizinhança $V \subset U$ de p tal que $Z_0|_V \in \Omega_\Sigma^r(V)$ é estruturalmente estável.*

Note que, se Z_0 é localmente estruturalmente estável em p então existe uma vizinhança V de p e $\mathcal{V} \subset \Omega_\Sigma^r(V)$ de $Z_0|_V$ tal que para todo $Z \in \Omega_\Sigma^r(V)$, Z e $Z_0|_V$ são Σ -equivalentes.

3.2 O conjunto $\Xi_0(p)$ e suas propriedades

Sejam $p \in \Sigma$ e $Z_0 \in \Omega_\Sigma^r(U)$, é possível dizer se Z_0 é ou não localmente Σ -estruturalmente estável em p com base nas suas características.

Definição 3.2.1 : *Seja $p \in U$, definimos $\Xi_0(p)$ como o conjunto de todos os sistemas de Filippov $Z \in \Omega_\Sigma^r(U)$ que são localmente Σ -estruturalmente estáveis em p .*

Primeiramente, analisaremos o caso em que $p \in \Sigma^c \cup \Sigma^s \cup \Sigma^e$, ou seja, assumamos que $Z_0 = (X_0, Y_0)$ satisfaz que X_0 e Y_0 são transversais a Σ em p . Como estamos analisando o comportamento local, não temos nenhuma perda de generalidade em assumir que U é um aberto limitado, e portanto \bar{U} é compacto. Neste contexto, temos o seguinte resultado que auxiliará nosso estudo e cuja demonstração pode ser encontrada em [C01].

Teorema 3.2.2 *Seja Ω um subconjunto aberto do espaço de Banach X , Y um espaço normado e $f : \Omega \rightarrow Y$ uma aplicação Fréchet diferenciável. Assuma que existam $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tais que:*

- $\bar{B}(x_0; r) \subset \Omega$.
- $df(x_0)$ é invertível e $df(x_0)^{-1} \in B(Y, X)$, onde $B(Y, X)$ é o conjunto das aplicações lineares limitadas de Y em X .
- $k = \sup \|I - df(x_0)^{-1} \circ df(x)\| < 1$.

Então, para cada $y \in Y$ tal que $\|y - f(x_0)\| < (1 - k)r \|df(x_0)^{-1}\|^{-1}$, a equação $f(x) = y$ possui uma única solução em $\bar{B}(x_0; r)$.

Observação 3.2.3 *Uma aplicação $f : \Omega \rightarrow Y$ é Fréchet-diferenciável em $x_0 \in \Omega$ se existe $A = df(x_0) \in B(X, Y)$ tal que*

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - A(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Proposição 3.2.4 *Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega_\Sigma^r(U)$ e assumamos que $p \in \Sigma^c$. Então, existe uma vizinhança V de p em U e uma vizinhança V de Z_0 em $\Omega_\Sigma^r(U)$ tal que, para todo $Z \in \mathcal{V}$, $Z|_V$ e $Z_0|_V$ são Σ -equivalentes.*

Demonstração

: Como $p \in \Sigma^c$, temos que $X_0 f(p) \cdot Y_0 f(p) > 0$. Agora observe que se $\varphi_{X_0}, \varphi_{Y_0}$ são os fluxos de X_0 e Y_0 , podemos definir:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : C^r(\bar{U}) \times \mathbb{R} \times \bar{U} &\longmapsto \mathbb{R} \\ (X, t, q) &\longmapsto f(\varphi_X(t, q)). \end{aligned}$$

Assim, \mathcal{F} é uma função de classe C^r entre espaços de Banach, $\mathcal{F}(X_0, 0, p) = 0$ e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(X_0, 0, p) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} f(\varphi_{X_0}(t, p)) \right|_{t=0} \\ &= \nabla f(\varphi_{X_0}(0, p)) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{X_0}(t, p) \right|_{t=0} \\ &= \nabla f(p) \cdot X_0(\varphi_{X_0}(t, p)) \Big|_{t=0} \\ &= \nabla f(p) \cdot X_0(p) \\ &= X_0 f(p) \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(X_0, 0, p)$ é invertível. Pelo Teorema da Função Implícita para espaços de Banach 3.2.2, existem vizinhanças V_1 de p em \bar{U} , V_1 de X_0 em $C^r(\bar{U})$, e uma função de classe C^r (no sentido de Fréchet) $\tau_1 : V_1 \times \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\mathcal{F}(X, t, q) = 0 \text{ com } (X, q) \in \mathcal{V}_1 \times V_1 \Leftrightarrow t = \tau_1(X, q). \quad (3-4)$$

Assim, para cada $q \in V_1$, e $X \in \mathcal{V}_1$ a órbita de X por q atinge a curva de descontinuidade Σ pela primeira vez em tempo $\tau(X, q)$. Ver Figura 3.3.

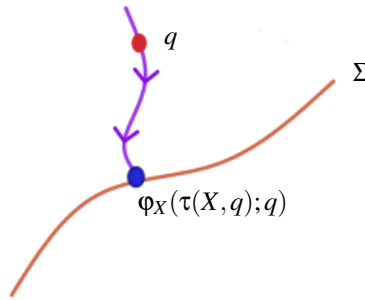


Figura 3.3: A órbita de X por q atinge a curva de descontinuidade Σ .

Analogamente, $\mathcal{F}(Y_0, 0, p) = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}(Y_0, 0, p) \neq 0$, e portanto, aplicando o TFI novamente, obtemos $p \in V \subset V_1$, $Y_0 \in \mathcal{V} \subset C^r(\bar{U})$, e $\tau_2 : V \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ com a mesma propriedade 3-4. Ver Figura (3.4).

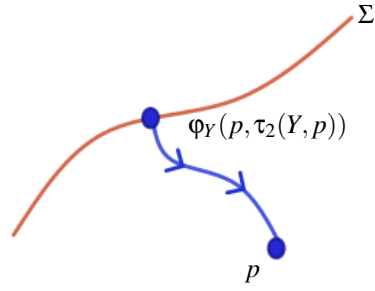


Figura 3.4: A órbita de Y por p atinge a curva de descontinuidade Σ .

Assim, defina $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$, e considere $Z = (X, Y) \in \mathcal{V}$. Diminuindo V e \mathcal{V} se necessário, podemos assumir que τ_1, τ_2 não mudam de sinal, pois τ_1, τ_2 são contínuas.

- Se $q \in V \cap \Sigma$, defina $h(q) = q$.
- Se $q \in V \cap \Sigma^+$, defina $h(q) = \Phi_X(-\tau_1(X, \tilde{q}), \Phi_{X_0}(\tau_1(X_0, q), q))$, onde $\tilde{q} = \Phi_{X_0}(\tau_1(X_0, q), q)$. Ver Figura 3.5.

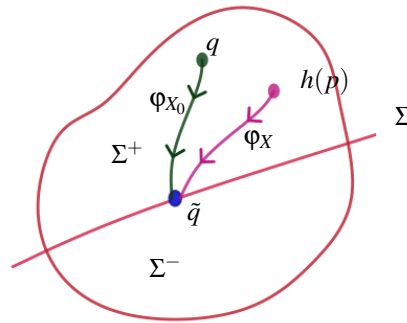


Figura 3.5: Construção de h em $q \in V \cap \Sigma^+$.

- Analogamente, se $q \in V \cap \Sigma^-$, defina $h(q) = \Phi_Y(-\tau_2(Y, \tilde{q}), \Phi_{Y_0}(\tau_2(Y_0, q), q))$, onde $\tilde{q} = \Phi_{Y_0}(\tau_2(Y_0, q), q)$.

Da construção, segue que h é um homeomorfismo, h leva órbita de Z_0 em órbita de Z e $h|_{\Sigma} = id$, logo h é Σ -equivalência entre Z e Z_0 .

□

O corolário abaixo segue diretamente da Proposição 3.2.4.

Corolário 3.2.5 Se $Z_0 \in \Omega_{\Sigma}^r(U)$ e $p \in \Sigma^c$, então $Z_0 \in \Xi_0(p)$.

No caso em que $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$, além das órbitas de X_0 e Y_0 temos as órbitas do campo deslizando para preservar. Assim, temos que analisar a natureza de Z_0^s em p . Lembre que Z_0^s é um campo de classe C^r tangente a Σ , e neste caso, Z_0^s pode ser visto como um campo escalar. Além disso, se Z e Z_0 são Σ -equivalentes, temos que Z_0^s e Z^s são topologicamente equivalentes. Assim, usando a teoria clássica, temos o seguinte resultado.

Lema 3.2.6 Z_0^s é localmente estruturalmente estável em p se, e somente se, $Z_0^s(p) \neq 0$ ou $Z_0^s(p) = 0$ e $(Z_0^s)'(p) \neq 0$.

Usando as mesmas ideias da Proposição 3.2.4 e usando o Lema 3.2.6, podemos construir um homeomorfismo em Σ e estendê-lo através das órbitas dos campos envolvidos para obter os seguintes resultados abaixo.

Proposição 3.2.7 Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega_\Sigma^r(U)$ e assumamos que $p \in \Sigma^s$ e $X_0(p) \not\parallel Y_0(p)$. Então existem uma vizinhança V de p em U e uma vizinhança \mathcal{V} de Z_0 em $\Omega_\Sigma^r(U)$ tal que, para todo $Z \in \mathcal{V}$, $Z|_V$ e $Z_0|_V$ são Σ -equivalentes.

Proposição 3.2.8 Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega_\Sigma^r(U)$ e assumamos que $p \in \Sigma^e$ e $X_0(p) \not\parallel Y_0(p)$. Então existe uma vizinhança V de p em U e uma vizinhança \mathcal{V} de Z_0 em $\Omega_\Sigma^r(U)$ tal que, para todo $Z \in \mathcal{V}$, $Z|_V$ e $Z_0|_V$ são Σ -equivalentes.

Logo, se $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ e $Z_0^s(p) \neq 0$, então $Z_0 \in \Omega_\Sigma^r(U)$ é localmente Σ -estruturalmente estável em p . De maneira análoga, obtemos o caso em que existe um pseudo-equilíbrio de Z_0^s .

Proposição 3.2.9 Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega_\Sigma^r(U)$ e assumamos que $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$, e p é um ponto crítico hiperbólico de Z_0^s . Então, existe uma vizinhança V de p em U e uma vizinhança \mathcal{V} de Z_0 em $\Omega_\Sigma^r(U)$ tal que, para todo $Z \in \mathcal{V}$, $Z|_V$ e $Z_0|_V$ são Σ -equivalentes.

Corolário 3.2.10 Z_0 é localmente Σ -estruturalmente estável em um pseudo-equilíbrio p se, e somente se, p é um ponto de equilíbrio hiperbólico de Z_0^s .

Com isso, caracterizamos a estabilidade estrutural local ao redor de pontos $p \in \Sigma^c \cup \Sigma^s \cup \Sigma^e$.

3.3 A singularidade dobra-regular

Agora, resta analisar a estabilidade estrutural local ao redor de uma singularidade $p \in \Sigma$. Em [K03] podemos ver que se p é um ponto de equilíbrio de X ou Y , então $Z = (X, Y)$ não é localmente Σ -estruturalmente estável em p . O caso em que p é um pseudo-equilíbrio já foi tratado e portanto devemos analisar o que ocorre quando p é um ponto de tangência. Em particular, descrevemos o comportamento de um sistema de Filippov ao redor de um tipo específico de ponto de tangência, conhecido como dobra-regular. Ver Figura 3.6.

Definição 3.3.1 : Um ponto do tipo **dobra-regular** de $Z = (X, Y) \in \Omega_\Sigma^r(U)$ é um ponto $p \in \Sigma$ tal que:

- i) $Xf(p) = 0$ (resp. $Yf(p) = 0$);
- ii) $X^2f(p) \neq 0$ (resp. $Y^2f(p) \neq 0$);
- iii) $Yf(p) \neq 0$ (resp. $Xf(p) \neq 0$).

Neste caso, convencionamos que se

- $Xf(p) = 0$, $X^2f(p) > 0$ e $Yf(p) \neq 0$: p é uma **dobra-regular visível** para o campo X .
- $Xf(p) = 0$, $X^2f(p) < 0$ e $Yf(p) \neq 0$: p é uma **dobra-regular invisível** para o campo X .
- $Yf(p) = 0$, $Y^2f(p) > 0$ e $Xf(p) \neq 0$: p é uma **dobra-regular invisível** para o campo Y .
- $Yf(p) = 0$, $Y^2f(p) < 0$ e $Xf(p) \neq 0$: p é uma **dobra-regular visível** para o campo Y .

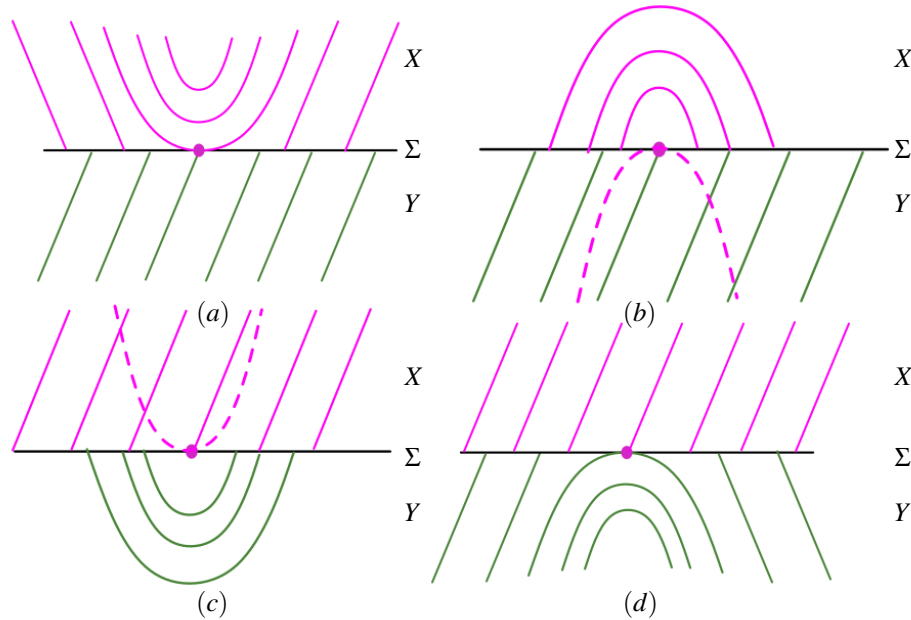


Figura 3.6: As figuras apresentam apenas a folheação gerada pelas órbitas de um campo que possui uma dobra-regular visível para X (a), invisível para X (b), invisível para Y (c) e visível para Y (d).

Analisamos as regiões de Σ em cada caso. Sem perda de generalidade considere que $Z = (X, Y)$ tem uma dobra-regular para o campo X em $p = (0, 0)$, assim $Xf(p) = 0$, $X^2f(p) \neq 0$ e $Yf(p) \neq 0$, e denote $X = (X_1, X_2)$ e $Y = (Y_1, Y_2)$, e assumamos que Σ é a reta $y = 0$.

Neste caso, $Xf(x, y) = X_2(x, y)$ e

$$X^2f(x, y) = \left(\frac{\partial X_2}{\partial x} \cdot X_1 + \frac{\partial X_2}{\partial y} \cdot X_2 \right)(x, y).$$

Como $Xf(0,0) = 0$, temos que $X_2(0,0) = 0$. Logo $X_1(0,0) \neq 0$, e como

$$0 \neq X^2f(0,0) = \frac{\partial X_2}{\partial x}(0,0) \cdot X_1(0,0),$$

segue que $\frac{\partial X_2}{\partial x}(0,0) \neq 0$. Por continuidade, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{\partial X_2}{\partial x}(x,0) \neq 0$ e tem o mesmo sinal para todo $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Isso significa que $X_2(x,0)$ é estritamente decrescente ou crescente para $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Como $X_2(0,0) = 0$, temos que uma das seguintes opções acontecem:

- $Xf(x,0) = X_2(x,0) < 0$ se $x \in (-\varepsilon, 0)$;
- $Xf(x,0) > 0$ se $x \in (-\varepsilon, 0)$.

Como $Yf(0,0) \neq 0$, diminuindo ε se necessário, a continuidade de Yf nos garante que uma das seguintes opções ocorre:

- $Yf(x,0) > 0$ para todo $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$;
- $Yf(x,0) < 0$ para todo $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Analogamente para o caso $Yf(p) = 0$, $Y^2f(p) \neq 0$, $Xf(p) \neq 0$, obtemos a conclusão trocando X por Y nos itens apresentados anteriormente. Logo, analisando todas as combinações obtemos o seguinte resultado (ver Figura 3.7).

Proposição 3.3.2 *Se $p \in \Sigma$ é um ponto de dobra-regular de Z , então existe $\varepsilon > 0$ tal que:*

- i) $(-\varepsilon, 0) \times [0] \subset \Sigma^c$ ou $(0, \varepsilon) \times [0] \subset \Sigma^c$;
- ii) Se $(-\varepsilon, 0) \times [0] \subset \Sigma^c$ então $(0, \varepsilon) \times [0] \subset \Sigma^s$ ou $(0, \varepsilon) \times [0] \subset \Sigma^e$;
- iii) Se $(0, \varepsilon) \times [0] \subset \Sigma^c$ então $(-\varepsilon, 0) \times [0] \subset \Sigma^s$ ou $(-\varepsilon, 0) \times [0] \subset \Sigma^e$.

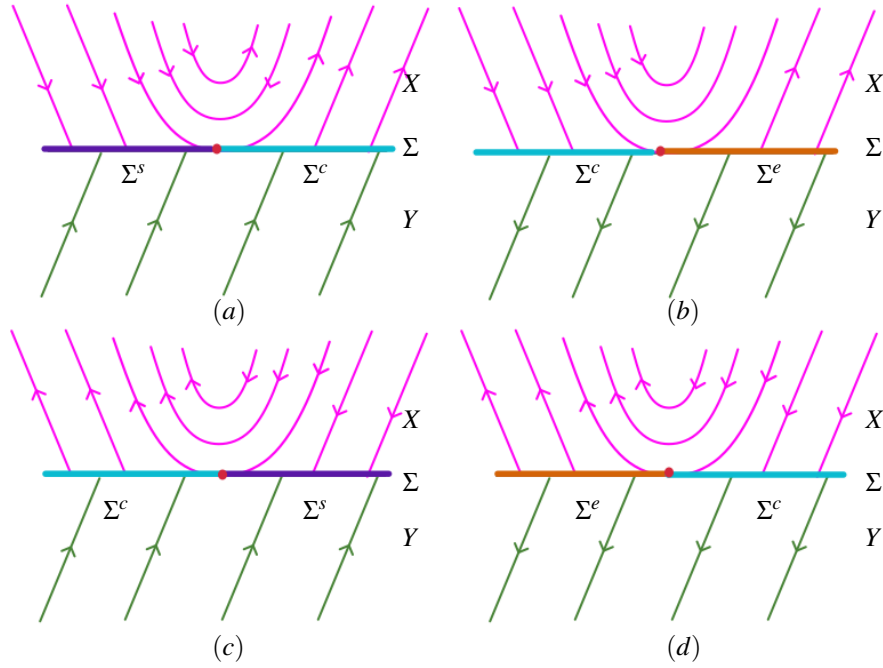


Figura 3.7: (a) $\Sigma^c \cup \Sigma^s$, (b) $\Sigma^c \cup \Sigma^e$, (c) $\Sigma^c \cup \Sigma^s$ e (d) $\Sigma^c \cup \Sigma^e$.

Como vimos na proposição anterior $(-\varepsilon, 0) \times \{0\} \subseteq \Sigma^s \cup \Sigma^e$ ou $(0, \varepsilon) \times \{0\} \subseteq \Sigma^e \cup \Sigma^s$, e portanto, perto de uma dobra regular temos sempre um campo deslizando Z^s em $(-\varepsilon, 0) \times \{0\}$ ou $(0, \varepsilon) \times \{0\}$. Observamos que

$$\begin{aligned} Z^s(x, 0) &= \frac{Yf(x, 0) \cdot X(x, 0) - Xf(x, 0) \cdot Y(x, 0)}{Yf(x, 0) - Xf(x, 0)} \\ &= \frac{Y_2(x, 0) \cdot (X_1(x, 0), X_2(x, 0)) - X_2(x, 0) \cdot (Y_1(x, 0), Y_2(x, 0))}{Y_2(x, 0) - X_2(x, 0)} \\ &= \left(\frac{Y_2(x, 0) \cdot X_1(x, 0) - X_2(x, 0) \cdot Y_1(x, 0)}{Y_2(x, 0) - X_2(x, 0)}, 0 \right). \end{aligned}$$

Assim $Xf(0, 0) = 0$, $X^2f(0, 0) \neq 0$, $Yf(0, 0) \neq 0$ implica que

$$\begin{aligned} Z^s(0, 0) &= \left(\frac{Y_2(0, 0) \cdot X_1(0, 0) - X_2(0, 0) \cdot Y_1(0, 0)}{Y_2(0, 0) - X_2(0, 0)}, 0 \right) \\ &= (X_1(0, 0), 0) \neq (0, 0), \end{aligned}$$

pois $X^2f(0, 0) \neq 0$ implica que $X_1(0, 0) \neq 0$. Analogamente $Xf(0, 0) \neq 0$, $Yf(0, 0) = 0$, $Y^2f(0, 0) \neq 0$ implica que $Z^s(0, 0) = (Y_1(0, 0), 0) \neq (0, 0)$. Logo, o seguinte resultado decorre imediatamente do Teorema do Fluxo Tubular 2.1.16 (ver Figura 3.8).

Proposição 3.3.3 *Se p é um ponto de dobra-regular para Z , então existe $\varepsilon > 0$ tal que Z^s é um campo regular definido em $(-\varepsilon, 0) \times [0]$ ou $(0, \varepsilon) \times [0]$. Assim,*

- i) Se p é uma dobra para X , então Z^s é topologicamente equivalente ao campo $\dot{x} = \text{sgn}(X_1(0,0))$.
- ii) Se p é uma dobra para Y , então Z^s é topologicamente equivalente ao campo $\dot{y} = \text{sgn}(Y_1(0,0))$.

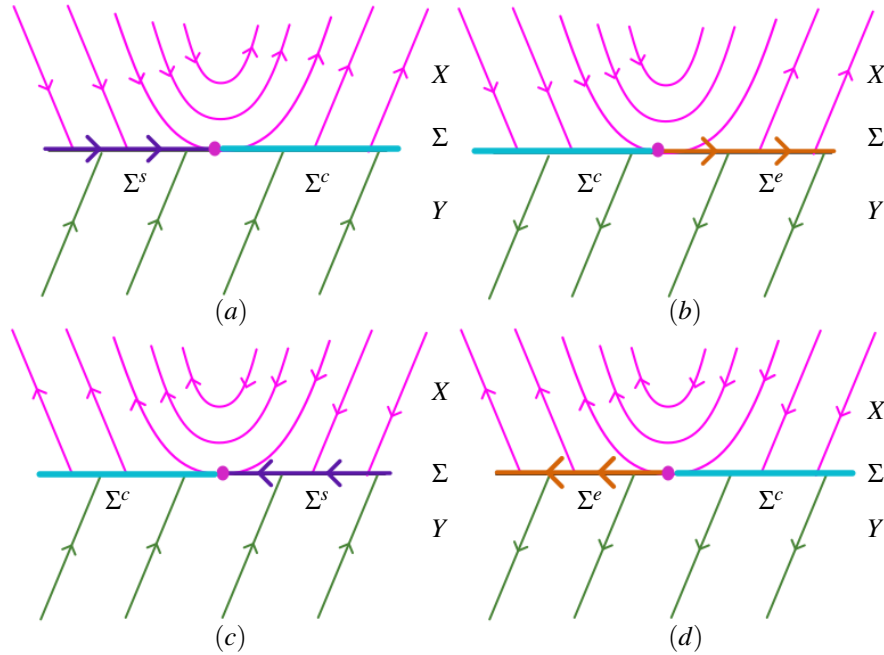


Figura 3.8: (a) $X_1(0,0) > 0$ e $Y_2(0,0) > 0$, (b) $X_1(0,0) > 0$ e $Y_2(0,0) < 0$, (c) $X_1(0,0) < 0$ e $Y_2(0,0) > 0$, (d) $X_1(0,0) < 0$ e $Y_2(0,0) < 0$.

Observação 3.3.4 *Perto de um ponto de dobra-regular o campo deslizante é regular e sua orientação é determinada pela orientação do campo para o qual este ponto é uma tangência.*

3.4 A caracterização de $\Xi_0(p)$

Seja Θ o conjunto dos sistemas de Filippov Z que satisfazem pelo menos uma das condições abaixo em p :

- 1) $p \in \Sigma^c$ é ponto regular de Z .
- 2) $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ e p é ponto regular de Z^s .
- 3) $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$, $Z^s(p) = 0$ e $(Z^s)'(p) \neq 0$.
- 4) p é o ponto de tangência do tipo dobra-regular.
- 5) $p \in \Sigma^+$ e p é ponto regular ou hiperbólico de X .
- 6) $p \in \Sigma^-$ e p é ponto hiperbólico ou regular de Y .

Em [G11], temos que se $p \in \Sigma$ é um ponto de tangência que não é uma dobra-regular, então Z_0 não é localmente Σ -estruturalmente estável em p . Com isso, temos a caracterização da estabilidade estrutural local em $\Omega^r(U)$, ou seja, a completa caracterização de Ξ_0 .

Assim, usando uma técnica similar a aplicada na Proposição 3.2.4, o seguinte resultado decorre das Proposições 3.2.4, 3.2.7, 3.2.8, 3.2.9, 3.2.10, 3.3.2 e 3.3.3, e da classificação de estabilidade estrutural de campos suaves (ver [P75]).

Teorema 3.4.1 $Z \in \Xi_0$ se, e somente se, $Z \in \Theta$.

Policiclos: O caso do ciclo costurante crítico

Neste capítulo, estudamos a bifurcação genérica de um sistema de Filippov ao redor de uma conexão global que passa por uma singularidade do tipo dobra-regular visível. Mais especificamente, mostramos que, sob pequenas perturbações, essa conexão se rompe e origina um ciclo deslizante ou um ciclo limite costurante.

Primeiramente, estabelecemos o conceito de policiclo introduzido em [A23] que formaliza a ideia de conexão global em sistemas de Filippov.

Definição 4.0.1 *Uma curva fechada Γ é dita ser um **policiclo** de $Z = (X, Y)$ se é composta por uma quantidade finita de pontos, p_1, p_2, \dots, p_n , e uma quantidade finita de órbitas regulares de Z , $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, de maneira que, para cada $1 \leq i \leq n$, γ_i tem pontos extremos p_i e p_{i+1} . Mais ainda:*

- Γ deve ser uma imersão de S^1 em M e deve ser orientada de acordo com o aumento do tempo ao longo de órbitas regulares;
- Se $p_i \in \Sigma$, então p_i é uma Σ^- singularidade;
- Se $p_i \in \Sigma^\pm$, então p_i é um ponto de equilíbrio para $X|_{\Sigma^+}$ ou $Y|_{\Sigma^-}$;
- Existe um mapa de primeiro retorno não-constante definido, ao menos, em um lado de Γ .

Em particular, se $p_i \in \Sigma$, para todo $1 \leq i \leq n$, então diremos que Γ é um Σ^- **policiclo**.

4.1 Condições Genéricas

Considere um sistema de Filippov $Z = (X, Y) \in \Omega^r$, e assuma que Z satisfaz as seguintes condições:

- H1** q_0 é uma singularidade do tipo dobra-regular visível para X e $X(q_0)$ aponta para a direita.
- H2** O campo X possui uma órbita γ^+ que passa por q_0 em $t = 0$ e retorna a Σ pela primeira vez em $t = \tau^+ > 0$ no ponto q_1 , que se encontra à direita do ponto q_0 .

H3 Existe uma órbita γ^- de Y conectando q_1 e q_0 que intersecta Σ transversalmente em q_1 e q_0 .

E conseqüentemente $\gamma^+ \cup \gamma^- \cup \{q_0, q_1\}$ forma uma órbita fechada.

Das Hipóteses H1, H2 e H3 segue que

$$Z = \begin{cases} (X_1(x,y), X_2(x,y)), & \text{se } y > 0, \\ (Y_1(x,y), Y_2(x,y)), & \text{se } y < 0, \end{cases} \quad (4-1)$$

tem um policiclo Γ , formado por uma órbita que parte e retorna ao ponto de singularidade dobra-regular visível, esse ciclo é conhecido na literatura como **ciclo costurante crítico** (ver [F15]). No decorrer deste capítulo, mostramos que o policiclo é a situação intermediária entre um ciclo de deslizamento e uma órbita periódica de costura, que corresponde a uma bifurcação para o campo Z . Assumimos sem perda de generalidade que $q_0 = (0, 0)$.

4.2 O mapa de primeiro retorno

Teorema 4.2.1 *Seja Z um sistema de Filippov da forma (4-1) satisfazendo as hipóteses H1, H2 e H3. Existe $\delta_1 > 0$ e um mapa diferenciável $\Pi : [0, \delta_1) \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\}$ de modo que o ponto $(x, 0)$ é conectado ao ponto $\Pi(x, 0)$ por uma órbita de Z em tempo positivo. Além disso, $\Pi(0, 0) = (0, 0)$ e $p_1(\Pi(x, 0)) < x$, para todo $x \in (0, \delta_1)$, onde p_1 é a projeção canônica na primeira coordenada, e assim o ciclo Γ é atrator.*

Para provar o Teorema 4.2.1 utilizamos como ferramenta principal alguns mapas induzidos pelos fluxos dos campos X e Y . De fato, para calcular o mapa de primeiro retorno de Z ao redor da conexão fechada, analisamos três mapas induzidos pelos fluxos de X e de Y , chamados T , D_1 e D_2 . O primeiro mapa (T) é induzido pelas órbitas que saem de $\Sigma \cap V$, onde V é uma pequena vizinhança de x_0 , e chegam em uma seção transversal τ_1 de X contida em V . O segundo mapa (D_1) é um difeomorfismo induzido pelas órbitas regulares de X que saem da seção transversal τ_1 e chegam em Σ , que é uma seção transversal de X em q_1 . Finalmente, o terceiro mapa (D_2) é um difeomorfismo induzido pelas órbitas de Y que saem de Σ e retornam para Σ , ao redor da órbita γ^- . Ver Figura 4.1.

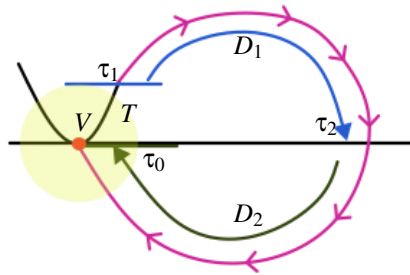


Figura 4.1: Construção do mapa de primeiro retorno Π .

Segue da construção acima o seguinte resultado.

Proposição 4.2.2 *Suponha que o sistema (4-1) satisfaz as hipóteses H1, H2 e H3. O mapa de primeiro retorno dado no Teorema 4.2.1 pode ser calculado através da composição*

$$\Pi = D_2 \circ D_1 \circ T.$$

Para o entendimento do comportamento do campo ao redor do políciclo Γ , é necessário estudar o comportamento do mapa Π ao redor do ponto fixo $q_0 = (0,0)$. Assim, necessitamos caracterizar os mapas T , D_1 e D_2 . Para isso, estudamos primeiramente o comportamento do campo próximo da singularidade dobra-regular e depois utilizamos a transversalidade para caracterizar o comportamento longe da singularidade. Ver Figura 4.2.

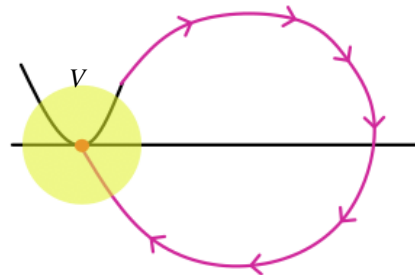


Figura 4.2: Vizinhança V do ponto de dobra-regular visível em que será analisado o comportamento do campo.

O seguinte resultado nos fornece uma maneira prática de entender o comportamento das órbitas de Z ao redor de uma singularidade dobra-regular.

Teorema 4.2.3 *Se X é um campo vetorial definido numa variedade com bordo Σ e X possui um ponto de dobra p pertencente à Σ , então existe um sistema de coordenadas*

(x, y) em p definido numa vizinhança $V(p)$ de p ($x(p) = y(p) = 0$) tal que $X|_{V(p)}$ é dado por

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm x \end{pmatrix}$$

e Σ é dada por $y = 0$.

Sua demonstração pode ser encontrada em [V72, C21]. Como podemos ver, através do Teorema de Vishik 4.2.3, é possível encontrar uma mudança de variáveis definida numa pequena vizinhança V de q_0 que leva q_0 na origem, Σ na reta $\{y = 0\}$ e transforma o campo X em $(1, x)$.

Desta forma, nesta vizinhança V o campo $Z = (X, Y)$ é dado por:

$$Z = \begin{cases} (1, x), & \text{se } y > 0, \\ (Y_1(x, y), Y_2(x, y)) & \text{se } y < 0. \end{cases} \quad (4-2)$$

A seguir, estudaremos 4-2 em V . A derivada de Lie de $f(x, y) = y$ na direção do campo X é dada por

$$Xf(x, y) = (1, x) \cdot (0, 1) = x,$$

e assim, $Xf(0, 0) = 0$.

Calculando a segunda derivada de Lie de f na direção de X , obtemos

$$X^2f(x, y) = (1, x) \cdot (1, 0) = 1 > 0,$$

e finalmente, calculando a derivada de Lie de f na direção do campo Y , obtemos:

$$Yf(x, y) = (Y_1, Y_2) \cdot (0, 1) = Y_2(x, y).$$

Como $(0, 0)$ é um ponto de dobra-regular visível para X , segue que $Yf(0, 0) \neq 0$ e, conseqüentemente, $Y_2(0, 0) \neq 0$.

Lema 4.2.4 *Sejam Z o campo dado em 4-2 e τ_1 uma seção transversal a X contida na reta $y = \delta$, onde $\delta > 0$ é suficientemente pequeno. Então existem $\delta_1 > 0$ e uma aplicação diferenciável $T : [0, \delta_1) \times 0 \rightarrow \tau_1$ induzida pelas órbitas de X que é dada por:*

$$T(x) = \sqrt{2\delta} + \frac{\sqrt{2\delta}}{4\delta}x^2 + O(x^3).$$

Demonstração

Considere a seção $[0, \delta_1) \times \{0\} \subset \Sigma$ e seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno de forma que τ_1 seja uma seção transversal em $p \in \gamma^+ \cap V$ que esteja contida em $V \cap \{y = \delta\}$ (ver Figura 4.3). Assim, o mapa de transição T é um mapa da forma:

$$T : [0, \delta_1) \times \{0\} \longrightarrow \tau_1.$$

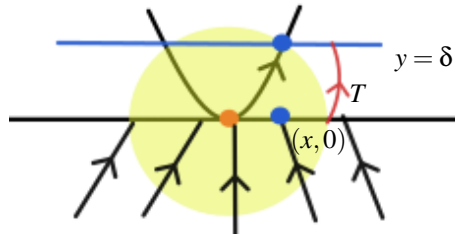


Figura 4.3: Mapa de transição T .

Por simplicidade, podemos identificar o mapa T com a função real:

$$\begin{aligned} \tilde{T} : [0, \delta_1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto p_1 \circ T(x, 0). \end{aligned}$$

Para facilitar a notação, não faremos diferença entre T e \tilde{T} . Para obter o fluxo do campo X , considere o P.V.I:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{y} = x, \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (4-3)$$

Integrando, temos

$$\begin{cases} x(t) = t + x_0, \\ y(t) = \frac{(t+x_0)^2}{2} + y_0 - \frac{x_0^2}{2}. \end{cases}$$

Portanto, a curva integral que passa pela origem é dada por:

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{t^2}{2} \right),$$

e assim γ intersecta $y = \delta$ em tempo positivo no ponto $p = (\sqrt{2\delta}, \delta)$. De fato:

$$\frac{t^2}{2} = \delta \implies t = \pm\sqrt{2\delta} \implies p = (\sqrt{2\delta}, \delta).$$

Assim, o mapa T está definido em

$$\begin{aligned} T : [0, \delta_1) &\longrightarrow [\sqrt{2\delta}, \sqrt{2\delta} + C) \\ x &\longmapsto p_1 \circ (\varphi_X((x, 0), t(x, 0))) \end{aligned} \quad (4-4)$$

onde $C > 0$ e $t(x, 0)$ é o tempo de vôo que a órbita que passa por $(x, 0)$ gasta para atingir $y = \delta$. Relembre que:

$$\varphi_X(x_0, y_0, t) = \left(t + x_0, \frac{(t + x_0)^2}{2} + y_0 - \frac{x_0^2}{2} \right),$$

logo, o mapa de transição é dado por:

$$T(x) = x + t(x, 0).$$

Para calcular o tempo de vôo, observe que

$$\varphi_X((x, 0), t) = \left(t + x, \frac{(t + x)^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right)$$

e portanto,

$$\frac{(t + x)^2}{2} - \frac{x^2}{2} = \delta$$

implica que $t^2 + 2tx + x^2 - x^2 = 2\delta$,

$$t = -x \pm \sqrt{x^2 + \delta}.$$

Como $x > 0$, e o tempo procurado deve ser positivo, então $t(x, 0) = -x + \sqrt{x^2 + \delta}$, logo,

$$T(x) = x - x + \sqrt{x^2 + 2\delta} = \sqrt{x^2 + 2\delta}.$$

Assim, o mapa de transição é dado por

$$T(x) = \sqrt{x^2 + 2\delta}.$$

Calculando a primeira derivada, obtemos:

$$T'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2\delta}},$$

e assim,

$$T'(0) = \frac{0}{2\sqrt{2\delta}} = 0.$$

Agora, calculando a segunda derivada, obtemos:

$$T''(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2\delta} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2\delta}}}{x^2 + 2\delta}$$

e assim

$$T''(0) = \frac{\sqrt{2\delta}}{2\delta} > 0.$$

Expandindo esse mapa de transição T ao redor da origem através da expansão de Taylor, obtemos:

$$\begin{aligned} T(x) &= T(0) + T'(0) \cdot (x-0) + \frac{T''(0)}{2!} \cdot (x-0)^2 + O(x-0)^3 \\ &= \sqrt{2\delta} + \frac{\sqrt{2\delta}}{4\delta} x^2 + O(x^3) \end{aligned} \quad (4-5)$$

Concluindo a demonstração. □

Analisemos agora o mapa de transição $D_1 : \tau_1 \rightarrow \tau_2$.

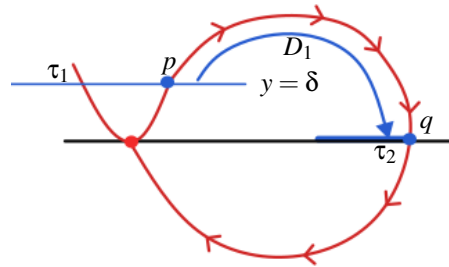


Figura 4.4: Mapa de transição D_1 .

Lema 4.2.5 *Sejam Z o campo dado em (4-2) e τ_1 a seção transversal à X dada no Lema 4.2.4. Então, existem uma seção transversal τ_2 à X contida em Σ e um difeomorfismo $D_1 : \tau_1 \rightarrow \tau_2$ induzido pelas órbitas de X que é dado por*

$$D_1(x) = q + k_1(x - p) + O(x - p)^2,$$

onde $k_1 < 0$ e p é o ponto em que a órbita de X , iniciada na origem, atinge τ_1 .

Demonstração

Pelo Teorema do Fluxo Tubular Longo 2.1.18, podemos construir um mapa $D_1 : \tau_1 \rightarrow \tau_2$ induzido pelas órbitas de X de modo que (x, δ) e $(D_1(x), 0)$ estão conectados por uma órbita de X em Σ^+ (ver Figura 4.4). Além disso D_1 é um difeomorfismo local no ponto p . Assim,

$$D_1(p) = q \text{ e } D_1'(p) \neq 0.$$

Portanto, expandindo esse mapa ao redor de p através da expansão de Taylor, temos

$$\begin{aligned} D_1(x) &= D_1(p) + D_1'(p) \cdot (x - p) + O(x - p)^2 \\ &= q + k_1(x - p) + O(x - p)^2. \end{aligned}$$

Observe que se $x > p$ (isto é $x - p > 0$), temos $D_1(x) < q$. Logo a orientação das órbitas nos permite concluir que $k_1 < 0$. \square

Calculando o mapa de transição D_2 , vamos considerar uma órbita, que sai de uma seção transversal $\tau_2 \in \Sigma$ e chega a uma seção transversal $\tau_0 \subset \Sigma$.

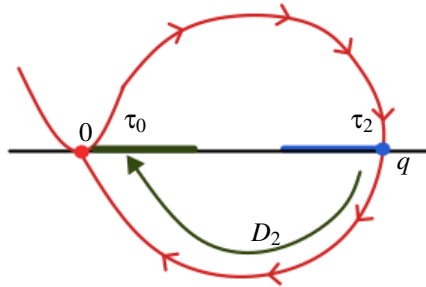


Figura 4.5: Mapa de transição D_2 .

Lema 4.2.6 *Sejam Z o campo dado em (4-2) e τ_2 a seção transversal à X dada no Lema 4.2.5. Então, existe um difeomorfismo $D_2 : \tau_2 \rightarrow \Sigma$ induzido pelas órbitas de Y que é dada por*

$$D_2(x) = k_2(x - q) + O(x - q)^2,$$

onde $k_2 < 0$ e q é o ponto em que a órbita de X , iniciada na origem, atinge τ_2 .

Demonstração

Pelo Teorema do Fluxo Tubular Longo 2.1.18, existe $D_2 : \tau_2 \rightarrow \Sigma$ induzido pelas órbitas de Y de modo que $(x, 0) \in \tau_2$ e $(D_2(x), 0) \in \Sigma$ estão conectados por uma órbita de Y em Σ^- (ver Figura 4.5). Assim,

$$D_2(q) = 0 \text{ e } D_2'(q) \neq 0.$$

Portanto, calculando a expansão de Taylor ao redor de q , temos

$$\begin{aligned} D_2(x) &= D_2(q) + D_2'(q) \cdot (x - q) + O(x - q)^2 \\ &= k_2(x - q) + O(x - q)^2. \end{aligned}$$

Se $x < q$ (isto é $x - q < 0$) temos $D_2(x) > 0$, e a orientação das órbitas nos permite concluir que $k_2 < 0$. \square

Finalmente estamos aptos a demonstrar o Teorema 4.2.1. De fato, para concluir a composição do mapa de primeiro retorno, fazemos a composição dos mapas de transição discutidos anteriormente.

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= D_2 \circ D_1 \circ T \\ &= D_2(D_1(T(x))) \\ &= D_2(D_1(p + kx^2 + O(x^3))) \\ &= D_2(q + k_1(p + kx^2 + O(x^3)) - p) + O((p + kx^2 + O(x^3)) - p)^2) \\ &= D_2(q + k_1kx^2 + O(x^3) + O(k^2x^4 + O(x^5) + O(x^6))) \\ &= D_2(q + k_1kx^2 + O(x^3) + O(x^4) + O(x^5) + O(x^6)) \\ &= D_2(q + k_1kx^2 + O(x^3)) \\ &= k_2(q + k_1kx^2 + O(x^3)) - q + O((q + k_1kx^2 + O(x^3)) - q)^2) \\ &= k_2k_1kx^2 + O(x^3). \end{aligned}$$

Assim,

$$\Pi(x) = k_3x^2 + O(x^3),$$

onde $k_3 = k_2k_1k > 0$. Note que $\Pi(x) < x$ para x próximo de 0, logo o ciclo é atrator. Ver Figura 4.6.

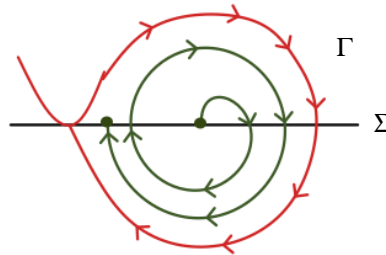


Figura 4.6: Comportamento do campo próximo de Γ .

4.3 Perturbações de Z_0 : Esboço do diagrama de Bifurcação

Nesta seção, fazemos a perturbação do campo em relação a um parâmetro α e analisamos o seu comportamento obtendo os seguintes resultados.

Proposição 4.3.1 *Seja $Z_\alpha = (X, Y_\alpha)$ uma família a 1-parâmetro de classe C^r tal que Z_0 é um sistema satisfazendo as hipóteses H1, H2 e H3. Então, existem $\alpha_0 > 0$, $\delta_1 > 0$ e um mapa diferenciável $\Pi : (-\alpha_0, \alpha_0) \times [0, \delta_1) \times 0 \rightarrow \Sigma$ de modo que, para cada α fixado, o ponto $(x, 0)$ é conectado ao ponto $\Pi(\alpha, x, 0)$ por uma órbita de Z em tempo positivo. Além disso:*

$$\Pi(\alpha, x, 0) = d\alpha + k_\alpha x^2 + O(\alpha^2, x^3),$$

onde $k_\alpha > 0$.

A Proposição 4.3.1 pode ser usada para demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 4.3.2 *Seja $Z_\alpha = (X, Y_\alpha)$ uma família a 1-parâmetro de classe C^r tal que Z_0 é um sistema satisfazendo as hipóteses H1, H2, H3, H4 e Π e a aplicação dada na Proposição 4.3.1. Assim, Z_0 possui um ciclo costurante crítico atrator passando pela origem e*

- 1) se $d = \frac{d}{d\alpha}\Pi(0, 0, 0) > 0$, então Z_α admite um ciclo limite costurante atrator para $\alpha > 0$, e um ciclo deslizante para $\alpha < 0$ (ver Figura 4.7).
- 2) se $d = \frac{d}{d\alpha}\Pi(0, 0, 0) < 0$, então Z_α admite um ciclo limite costurante atrator para $\alpha < 0$, e um ciclo deslizante para $\alpha > 0$.

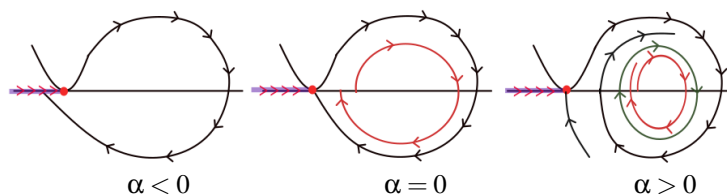


Figura 4.7: Diagrama de bifurcação no caso $d > 0$.

Observação 4.3.3 • Uma família a 1-parâmetro $Z_\alpha = (X_\alpha, Y_\alpha)$ poderia ser reduzida ao caso $Z_\alpha = (X, Y_\alpha)$ através de uma mudança de coordenadas C^r através do Teorema de Vishik 4.2.3, e assim não há perda de generalidade nessa hipótese.

- O caso em que Z_0 possui orientação invertida gera um ciclo crítico repulsor e assim o ciclo costurante que bifurca na família Z_α também é repulsor (ver Figura 4.8).

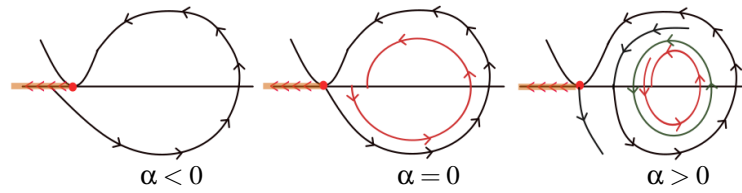


Figura 4.8: Caso em que Z_0 possui orientação invertida gera um ciclo crítico repulsor.

- O caso em que a auto-conexão se dá pelo outro lado da órbita que passa pela dobra pode ser estudado de maneira análoga e obtém-se os seguintes diagramas de bifurcação (Ver Figura 4.9).

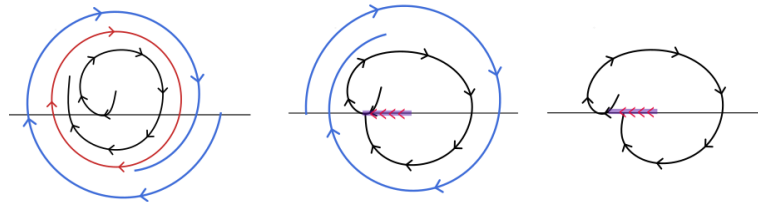


Figura 4.9: Caso em que a auto-conexão se dá pelo outro lado da órbita que passa pela dobra-regular.

Agora, para entender o comportamento do campo próximo da origem, vamos calcular o campo deslizando do campo

$$Z_\alpha(X, Y) = \begin{cases} (1, x), & \text{se } y > 0, \\ (Y_1(x, y, \alpha), Y_2(x, y, \alpha)), & \text{se } y < 0. \end{cases} \quad (4-6)$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} Z^s(x, y, \alpha) &= \frac{Y_2(x, y, \alpha) \cdot (1, x) - x \cdot (x, y, \alpha)}{Y_2(x, y, \alpha) - x} \\ &= \left(\frac{Y_2(x, y, \alpha) - x \cdot Y_1(x, y, \alpha)}{Y_2(x, y, \alpha) - x}, 0 \right). \end{aligned}$$

Avaliando esse campo no ponto $(0, 0)$, temos que

$$\begin{aligned} Z^s(x, 0, 0) &= \left(\frac{Y_2(0, 0, 0) - 0 \cdot Y_1(0, 0, 0)}{Y_2(0, 0, 0)}, 0 \right) \\ &= \left(\frac{Y_2(0, 0, 0)}{Y_2(0, 0, 0)}, 0 \right) \\ &= (1, 0). \end{aligned}$$



Figura 4.10: Direção do vetor $Z^s(0,0,0)$.

Deste modo, em $y = 0$ o vetor está apontando para a direção positiva (ver Figura 4.10). Assim, como Z^s é contínuo, por conservação de sinal, temos que $Z^s(x, 0, \alpha) \neq (0, 0)$, para todo x próximo de 0.

Portanto, é possível diminuir a vizinhança V de forma que o campo deslizante em V seja regular e aponte para a direita (ver Figura 4.11).

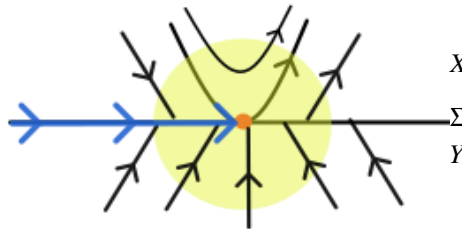


Figura 4.11: Comportamento do campo na região de deslize.

Neste caso, não há o surgimento de pseudo-equilíbrio em V , mesmo quando perturbamos o campo Z_0 .

Fazendo a mudança de coordenadas através do Teorema do Vishik 4.2.3, como anteriormente, podemos considerar que na vizinhança V , o campo X é dado por $X(x, y) = (1, x)$. Assim, podemos empregar os mesmos passos para calcular T e D_1 e obter as mesmas expressões. (Ver Figura 4.12).

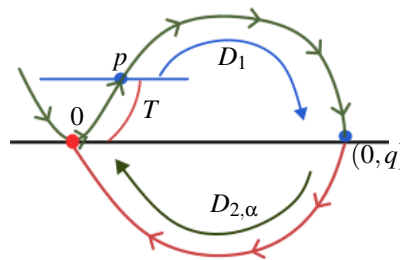


Figura 4.12: Campo $Z = (X, Y)$.

Investigaremos agora as órbitas de Y_α . Observe que existe $T_0 > 0$ tal que $\Phi_{Y_0}(T_0, (0, q)) \in \Sigma$, ou seja, $p_2 \circ \Phi_{Y_0}(T_0, (0, q)) = 0$. Então $p_2 \circ \Phi_{Y_0}(t, (0, q)) < 0$, para todo t entre 0 e t_0 .

Seja

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} \times (-\alpha_0, \alpha_0) \times (q - \varepsilon, q + \varepsilon) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((t, \alpha), x) &\longmapsto p_2 \circ \varphi(t, 0, x; \alpha) \end{aligned}$$

onde $\varphi(\cdot; \alpha)$ é o fluxo de Y_α . Pelo Teorema da Dependência Contínua e Diferenciável nas Condições Iniciais e Parâmetros 2.1.2 e 2.1.3 temos que ψ é C^r . Além disso:

$$\psi((T_0, 0), q) = 0, \psi((t, 0), q) < 0, \forall 0 < t < T_0.$$

Derivando ψ com respeito a t , obtemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}((T_0, 0), q) = \frac{\partial}{\partial t} p_\alpha \circ \varphi(t, (0, q); \alpha) \Big|_{t=T_0}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t}((T_0, 0), q) &= (0, 1) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, (0, q), 0) \Big|_{t=T_0} \\ &= (0, 1) \cdot Y_0(\varphi(T_0, (0, q), 0)) \\ &= (0, 1) \cdot Y_0(0, 0) \\ &= p_2(Y_0(0, 0)). \end{aligned}$$

Como Y_0 é transversal a Σ na origem, temos que

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}((T_0, 0), q) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, temos que existe apenas um $T : (-\alpha_1, \alpha_1) \times (q - \varepsilon_0, q + \varepsilon_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r , tal que $T(0, q) = T_0$ e $\psi((T(\alpha, x), \alpha), x) = 0$, para todo α pertencente a $(-\alpha_1, \alpha_1)$.

Pela unicidade, temos que $\psi((t, x); \alpha) = 0$, onde $\alpha \in (-\alpha_1, \alpha_1)$ e $x \in (q - \varepsilon_0, q + \varepsilon_0)$ se, e somente, se $t = T(\alpha, x)$ e $\psi((t, x); \alpha) < 0$, para todo t pertencente a $(0, T(\alpha, x))$.

Neste caso, temos que o mapa de primeiro retorno do campo Y_α é dado por

$$\begin{aligned} D_{2,\alpha} : (q - \varepsilon_0, q + \varepsilon_0) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto p_1(\varphi(T(\alpha, x), (0, x); \alpha)), \end{aligned}$$

e assim

$$D_{2,\alpha}(x) = D_{2,\alpha}(q) + k_{2,\alpha}(x - q) + O(x - q)^2.$$

Sabemos que

$$\frac{d}{dx} D_{2,0}(q) < 0,$$

e por conservação de sinal, temos que $k_{2,\alpha} = \frac{d}{dx}D_{2,\alpha}(q) < 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} D_{2,\alpha}(q) &= D_{2,0}(q) + \left. \frac{d}{d\alpha}D_{2,\alpha}(q) \right|_{\alpha=0} \alpha + O(\alpha^2) \\ &= \left. \frac{d}{d\alpha}D_{2,\alpha}(q) \right|_{\alpha=0} \alpha + O(\alpha^2). \end{aligned}$$

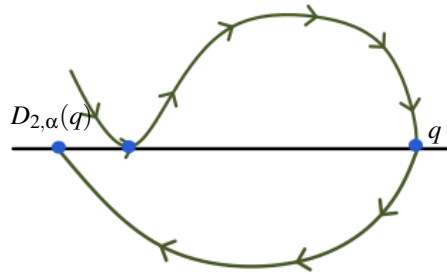


Figura 4.13: Rompimento do ciclo gerando um ciclo deslizante.

Defina

$$d = \left. \frac{d}{d\alpha}D_{2,\alpha}(q) \right|_{\alpha=0}.$$

Assim, o mapa $\Pi = D_{2,\alpha} \circ D_1 \circ T$ é dado por:

$$\Pi(\alpha, x) = d\alpha + k_\alpha x^2 + O(\alpha^2, x^3),$$

sendo $k_\alpha > 0$, e assim concluímos a demonstração da Proposição 4.3.1. Agora, para provar o Teorema 4.3.2, observe que

$$\Pi(\alpha, x) = x \Leftrightarrow \Pi(\alpha, x) - x = 0.$$

Considere

$$\begin{aligned} F(x, \alpha) &= \Pi(\alpha, x) - x \\ &= d\alpha - x + k_\alpha x^2 + O(\alpha^2, x^3), \end{aligned}$$

e observe que

$$\begin{aligned} F(0, 0) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) &= -1 \neq 0. \end{aligned}$$

Novamente, o Teorema da função Inversa 2.1.15 implica que existe $x(\alpha) : (-\alpha_2, \alpha_2) \rightarrow \mathbb{R}$ com $x(0) = 0$, tal que $F(x(\alpha), \alpha) = 0$, para todo α próximo de 0.

Neste caso,

$$d\alpha - x(\alpha) - k_\alpha (x(\alpha))^2 + O(\alpha^2, x(\alpha)^3) = 0,$$

e derivando em $\alpha = 0$, obtemos

$$d - x'(0) - k'_0(x(0))^2 - 2k_0x(0)x'(0) = 0,$$

e portanto

$$x'(0) = d.$$

Com isso, temos que

$$x(\alpha) = d\alpha + O(\alpha^2).$$

Obtemos assim os seguintes casos (ver Figura 4.14).

- 1) Se $d > 0$, então $x(\alpha) > 0$ quando $\alpha > 0$. Logo obtemos a existência de um ciclo limite costurante para $\alpha > 0$. Se $\alpha < 0$, $\Pi(\alpha, 0) < 0$ e portanto $\Pi(\alpha, 0) \in \Sigma^s$ dando origem a um ciclo deslizando (ver Figura 4.13).
- 2) Se $d < 0$, então $x(\alpha) > 0$ quando $\alpha < 0$. Logo obtemos a existência de um ciclo limite costurante para $\alpha < 0$. Se $\alpha > 0$, $\Pi(\alpha, 0) < 0$ e portanto $\Pi(\alpha, 0) \in \Sigma$ dando origem a um ciclo deslizando.

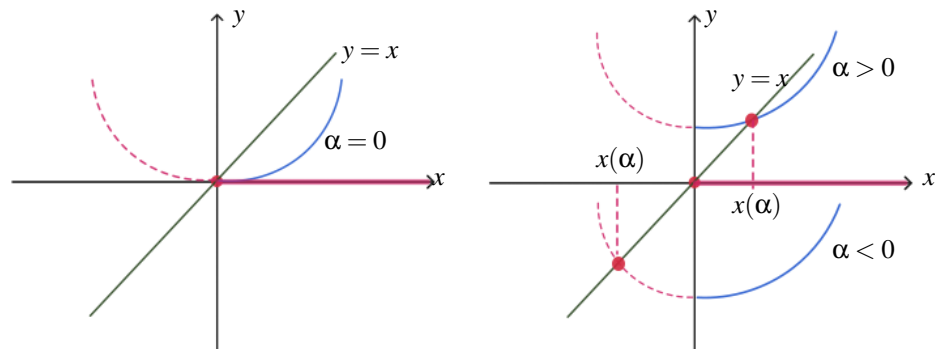


Figura 4.14: Comportamento local de $y = \Pi(\alpha, x)$ no caso em que $d > 0$.

□

Estudo: Bifurcações de uma Singularidade Dobra-Cúspide

Neste capítulo, estudamos um modelo de sistema dinâmico não-suave planar ao redor de uma certa Σ -singularidade chamada dobra-cúspide em 2.2.13 e mostramos a existência de um ciclo costurante crítico que bifurca desta singularidade em um desdobramento do sistema. Além disso, exibimos o diagrama de bifurcação (ver Figura 5.1) deste desdobramento. Mais especificamente, estudamos o campo $Z_{\mu,\beta} = (X_\mu, Y_\beta)$ dado por

$$Z_{\mu,\beta}(X, Y) = \begin{cases} (-1, 2x - \mu), & \text{se } y > 0, \\ (1, x^2 - \beta), & \text{se } y < 0. \end{cases} \quad (5-1)$$

O resultado abaixo sumariza o comportamento do campo (5-1).

Teorema 5.0.1 *Seja $Z_{\mu,\beta}$ o campo dado por (5-1). Existem vizinhanças U e V da origem em \mathbb{R}^2 , de forma que, para cada um dos retratos de fase da Figura 5.1, existe $(\mu, \beta) \in V$ tal que o retrato de fase $Z_{\mu,\beta}|_U$ seja topologicamente equivalente a este.*

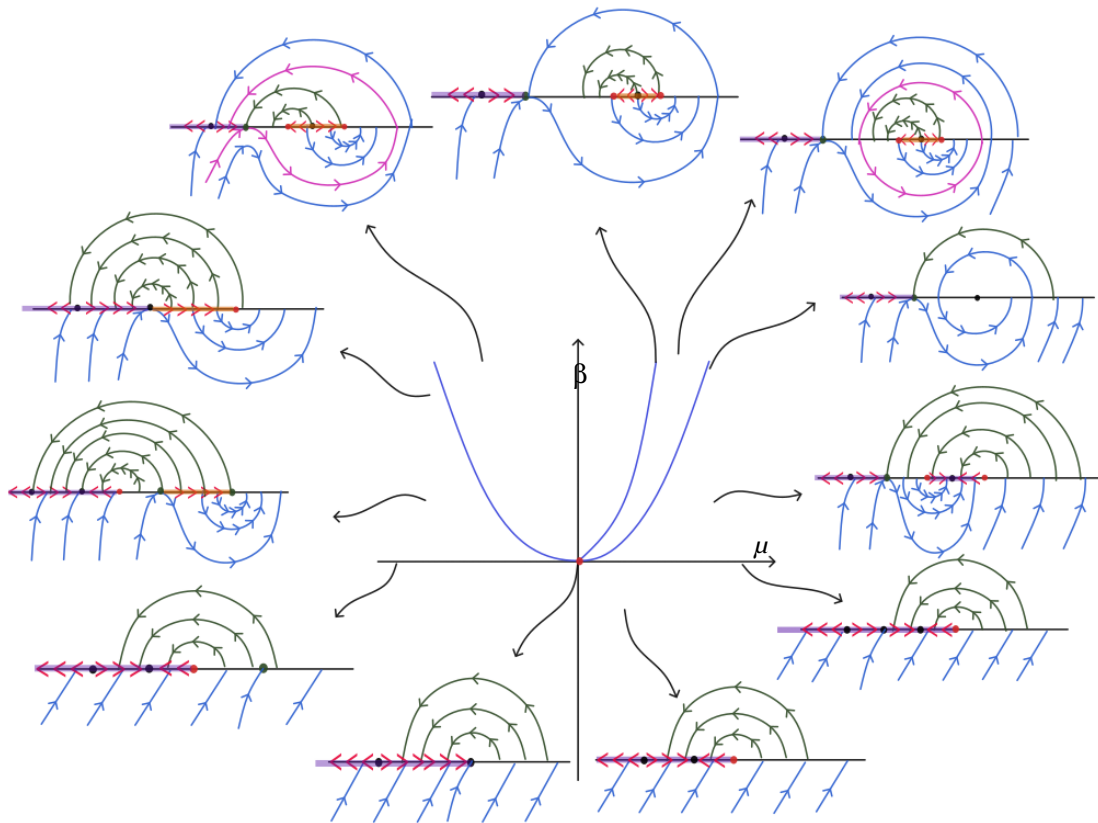


Figura 5.1: Diagrama de bifurcação.

Dedicamos o restante deste capítulo a demonstrar o Teorema 5.0.1. Por simplicidade, denotaremos $Z_{\mu,\beta}$, X_{μ} e Y_{β} por Z , X e Y , omitindo a dependência dos parâmetros.

5.1 As regiões de Σ

Primeiramente, encontramos as regiões de descontinuidade calculando as derivadas de Lie de f . De fato,

$$\begin{aligned} Xf(x,y) &= X(x,y) \cdot \nabla f(x,y) \\ &= (-1, 2x - \mu) \cdot (0, 1) \\ &= 2x - \mu, \end{aligned}$$

e portanto, para que $Xf(x,0) = 0$ devemos ter

$$2x - \mu = 0,$$

e assim

$$x = \frac{\mu}{2}.$$

Logo, $\left(\frac{\mu}{2}, 0\right)$ é um ponto de tangência do campo X , que é uma singularidade dobra do tipo invisível. De fato,

$$\begin{aligned} X^2 f(x, y) &= X(x, y) \cdot \nabla X f(x, y) \\ &= (-1, 2x - \mu) \cdot (2, 0) \\ &= -2, \end{aligned}$$

e como $X^2 f\left(\frac{\mu}{2}, 0\right) < 0$, segue que $\left(\frac{\mu}{2}, 0\right)$ é uma dobra invisível.

Note que, se $x < \frac{\mu}{2}$, então $Xf(x, 0) < 0$ e se $x > \frac{\mu}{2}$, então $Xf(x, 0) > 0$, logo o comportamento de X próximo de Σ é descrito na Figura 5.2.

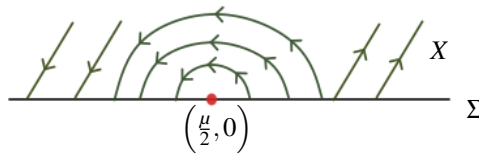


Figura 5.2: Comportamento de X próximo de Σ .

Agora, calculando as derivadas de Lie de f na direção de Y , temos que,

$$\begin{aligned} Yf(x, y) &= Y(x, y) \cdot \nabla f(x, y) \\ &= (1, x^2 - \beta) \cdot (0, 1) \\ &= x^2 - \beta. \end{aligned}$$

Para se ter $Yf(x, 0) = 0$ temos que,

$$\begin{aligned} Yf(x, 0) &= 0 \\ x^2 - \beta &= 0 \\ x^2 &= \beta \\ x &= \pm\sqrt{\beta}. \end{aligned}$$

Assim, temos as seguintes situações para o campo Y :

- $\beta < 0$: $Yf(x, 0) > 0$, logo não existe nenhuma Σ -singularidade;
- $\beta = 0$: $Yf(x, 0) > 0$, para todo $x \neq 0$, temos somente uma singularidade do tipo cúspide em $x = 0$.
- $\beta > 0$: $Yf(x, 0) > 0$ se $|x| > \sqrt{\beta}$ e $Yf(x, 0) < 0$ se $|x| < \sqrt{\beta}$. Neste caso, existem duas singularidades tangenciais, uma dobra visível no ponto $(-\sqrt{\beta}, 0)$ e uma dobra invisível no ponto $(\sqrt{\beta}, 0)$.

Portanto, o comportamento de Y ao redor de Σ é descrito na Figura 5.3.

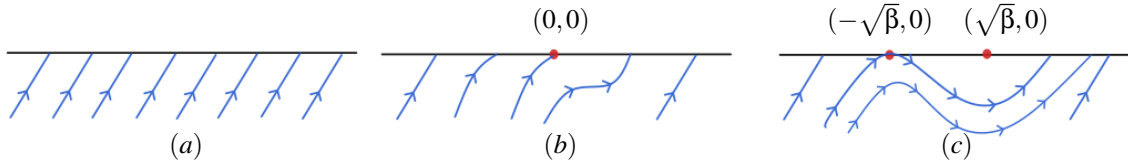


Figura 5.3: (a) caso $\beta < 0$, (b) caso $\beta = 0$ e (c) caso $\beta > 0$.

De fato, calculando a segunda derivada de f na direção de Y , temos,

$$\begin{aligned} Y^2 f(x, y) &= Y(x, y) \cdot \nabla Y f(x, y) \\ &= (1, x^2 - \beta) \cdot (2x, 0) \\ &= 2x. \end{aligned}$$

Então, para $\beta = 0$, $Y^2 f(0, 0) = 0$ e calculando $Y^3 f(x, y)$, temos:

$$\begin{aligned} Y^3 f(0, 0) &= Y(x, y) \cdot \nabla Y^2(x, y) \\ &= (1, x^2 - \beta) \cdot (2, 0) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Além disso, como $Y^2 f(-\sqrt{\beta}, 0) = -2\sqrt{\beta} < 0$ temos que $(-\sqrt{\beta}, 0)$ é uma dobra visível, e como $Y^2 f(\sqrt{\beta}, 0) = 2\sqrt{\beta} > 0$, temos que $(\sqrt{\beta}, 0)$ é uma dobra invisível.

5.2 O campo deslizando

Para entender o comportamento do campo deslizando em Σ , vamos calcular o campo deslizando normalizado de Z :

$$\begin{aligned} Z_N^S(x, 0) &= Yf(x, 0) \cdot X(x, 0) - Xf(x, 0) \cdot Y(x, 0) \\ &= (x^2 - \beta) \cdot (-1, 2x - \mu) - (2x - \mu) \cdot (1, x^2 - \beta) \\ &= (-x^2 - 2x + \beta + \mu, 0). \end{aligned}$$

Calculando as raízes de Z_N^S , obtemos:

$$P_{\pm} = -1 \pm \sqrt{1 + \beta + \mu}, \quad (5-2)$$

e analisando a linearização do campo deslizando normalizado em P_{\pm} , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} Z_N^S(P_{\pm}) &= -2(P_{\pm} + 1) \\ &= -(\pm \sqrt{1 + \beta + \mu}) \\ &= \mp \sqrt{1 + \beta + \mu}. \end{aligned}$$

Como assumimos que (μ, β) está numa vizinhança suficientemente pequena da origem, segue por conservação, que $1 + \beta + \mu > 0$, logo, P_+ é um ponto singular atrator e

P_- é um ponto singular repulsor. Então, se $P_{\pm} \in \Sigma^s$ então isso ocorre. Caso $P_{\pm} \in \Sigma^e$ ocorre o contrário.

5.3 Regiões de Deslize e Escape

Agora utilizamos as informações da Seção 5.2 para encontrar as regiões de costura, deslize e escape de Σ . Para isso, o espaço de parâmetros foi dividido da seguinte forma (ver Figura 5.4):

- $R_1 = \{(\mu, \beta); \beta < 0\}$
- $R_2 = \left\{(\mu, \beta); \mu > 0 \text{ e } 0 < \beta < \frac{\mu^2}{4}\right\}$.
- $R_3 = \left\{(\mu, \beta); \beta > \frac{\mu^2}{4}\right\}$.
- $R_4 = \left\{(\mu, \beta); \mu < 0 \text{ e } 0 < \beta < \frac{\mu^2}{4}\right\}$.
- $B_1 = \{(\mu, \beta); \mu > 0, \beta = 0\}$.
- $B_2 = \left\{(\mu, \beta); \mu > 0, \beta = \frac{\mu^2}{4}\right\}$.
- $B_3 = \left\{(\mu, \beta); \mu < 0, \beta = \frac{\mu^2}{4}\right\}$.
- $B_4 = \{(\mu, \beta); \mu < 0, \beta = 0\}$.
- $B_5 = \{(0, 0)\}$.

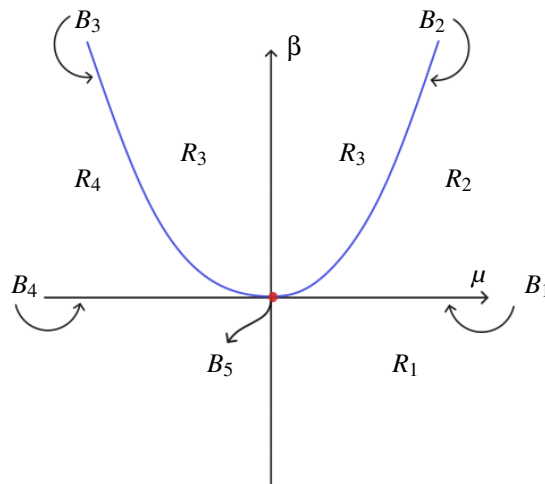


Figura 5.4: Regiões do espaço de parâmetros (μ, β) .

Na **Região** R_1 , em que $\beta < 0$, podemos observar o comportamento ilustrado na Figura 5.5.

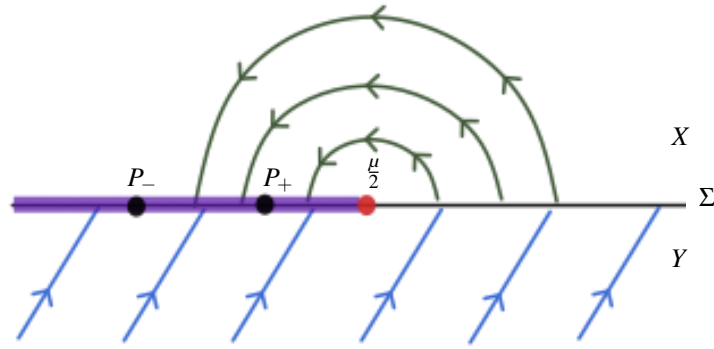


Figura 5.5: Comportamento do campo em $\beta < 0$.

Neste caso, $\Sigma^s = \left(-\infty, \frac{\mu}{2}\right)$, $\Sigma^e = \emptyset$ e $\Sigma^c = \left(\frac{\mu}{2}, +\infty\right)$. Agora, estudaremos as posições de P_+ e P_- nesta região. Para que (5-2) existam, devemos ter que $1 + \beta + \mu \geq 0$. Como μ , β são suficientemente pequenos, essa condição é trivialmente satisfeita. Note que,

$$\begin{aligned}
 \beta < \frac{\mu^2}{4} &\Leftrightarrow 1 + \beta + \mu < 1 + \mu + \frac{\mu^2}{4} \\
 &\Leftrightarrow 1 + \beta + \mu < \left(1 + \frac{\mu}{2}\right)^2 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{1 + \beta + \mu} < \sqrt{\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)^2} \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{1 + \beta + \mu} < 1 + \frac{\mu}{2} \\
 &\Leftrightarrow -1 + \sqrt{1 + \beta + \mu} < \frac{\mu}{2} \\
 &\Leftrightarrow P_+ < \frac{\mu}{2}.
 \end{aligned}$$

Como $\beta < 0$, temos que a condição $\beta < \frac{\mu^2}{4}$ é satisfeita e podemos concluir que $P_+ < \frac{\mu}{2}$. Portanto, $P_+ \in \left(-\infty, \frac{\mu}{2}\right)$ e como $P_- < P_+$, segue que $P_- \in \left(-\infty, \frac{\mu}{2}\right)$ (ver Figura 5.6).

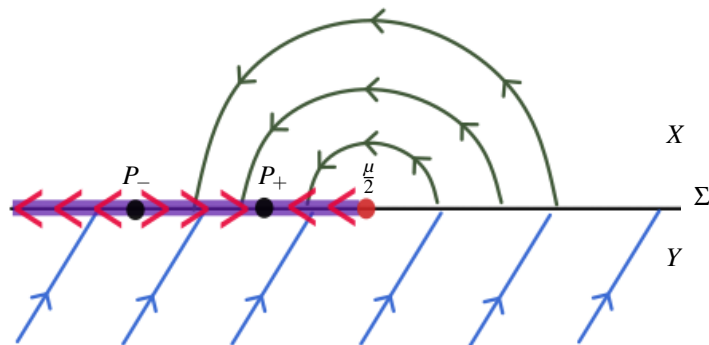


Figura 5.6: Região R_1 .

A seguir analisamos os casos onde $\beta = 0$, em que temos três comportamentos distintos.

- 1) **Curva B_4 :** Se $\beta = 0$ e $\mu < 0$, temos que $\Sigma^s = \left(-\infty, \frac{\mu}{2}\right)$, $\Sigma^e = \emptyset$ e $\Sigma^c = \left(\frac{\mu}{2}, +\infty\right) - \{0\}$.

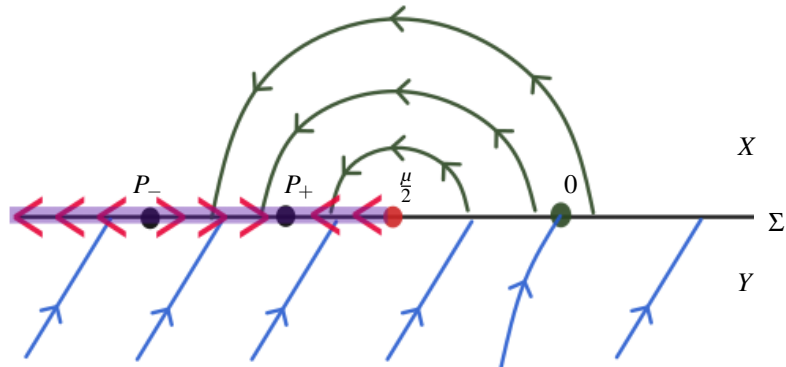


Figura 5.7: Comportamento do campo em $\mu < 0$ e $\beta = 0$.

Como $\mu < 0$ e $\beta = 0$, segue que $\beta < \frac{\mu^2}{4}$ e como vimos segue que $P_+ < \frac{\mu}{2}$, logo $P_+ \in \Sigma^s$ e como $P_- < P_+$, segue que $P_- \in \Sigma^s$. Assim, o comportamento de Z em Σ é ilustrado na Figura 5.7.

- 2) **Ponto B_5 :** Se $\beta = \mu = 0$, temos que $\Sigma^s = (-\infty, 0)$, $\Sigma^e = \emptyset$ e $\Sigma^c = (0, +\infty)$.

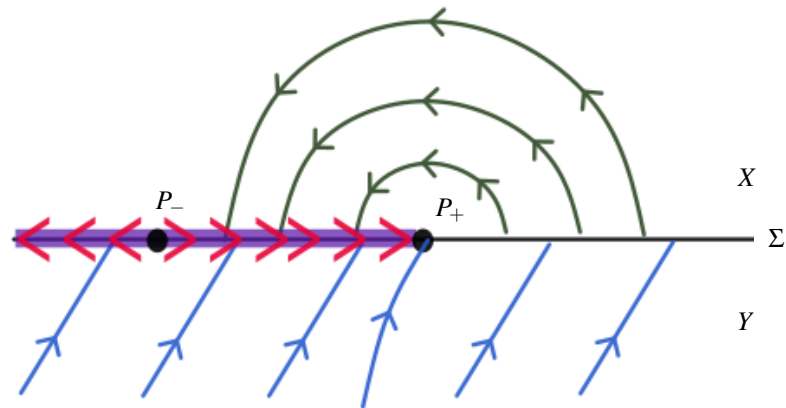


Figura 5.8: Comportamento do campo em $\beta = \mu = 0$.

Neste caso, $P_+ = 0$ e $P_- = -2$, logo $P_- \in \Sigma^s$, e o comportamento de Z é ilustrado na Figura 5.8.

- 3) **Curva B_1 :** Se $\beta = 0$ e $\mu > 0$, então $\Sigma^s = \left(-\infty, \frac{\mu}{2}\right) \setminus \{0\}$, $\Sigma^e = \emptyset$ e $\Sigma^c = \left(\frac{\mu}{2}, +\infty\right)$ (ver Figura 5.9).

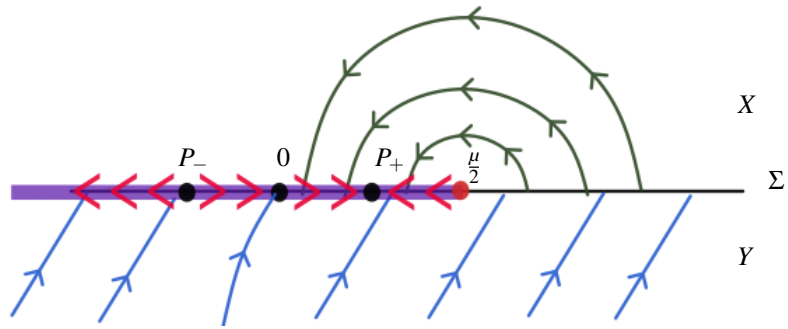


Figura 5.9: Comportamento do campo em $\mu > 0$ e $\beta = 0$.

Analisando as posições de P_+ e P_- . Temos que, $0 < P_+ < \frac{\mu}{2}$ e $P_- < P_+ < \frac{\mu}{2}$.

Finalmente, analisamos a região em que $\beta > 0$, onde temos os seguintes comportamentos:

- 1) **Região R_2 :** Se $0 < \beta < \frac{\mu^2}{4}$ e $\mu > 0$, temos que, $\Sigma^s = (-\infty, -\sqrt{\beta}) \cup (\sqrt{\beta}, \frac{\mu}{2})$, $\Sigma^e = \emptyset$ e $\Sigma^c = (-\sqrt{\beta}, \sqrt{\beta}) \cup (\frac{\mu}{2}, +\infty)$ (ver Figura 5.10).

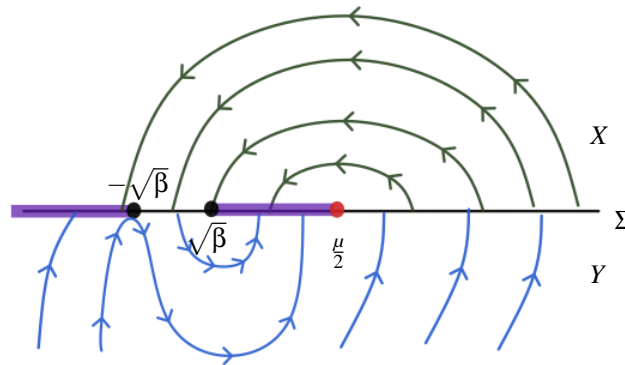


Figura 5.10: Região R_2 .

- 2) **Curva B_2 :** Se $\beta = \frac{\mu^2}{4}$ e $\mu > 0$, temos que $\Sigma^s = (-\infty, -\sqrt{\beta})$, $\Sigma^e = \emptyset$ e $\Sigma^c = (-\sqrt{\beta}, +\infty) \setminus \{\frac{\mu}{2}\}$ (ver Figura 5.11).

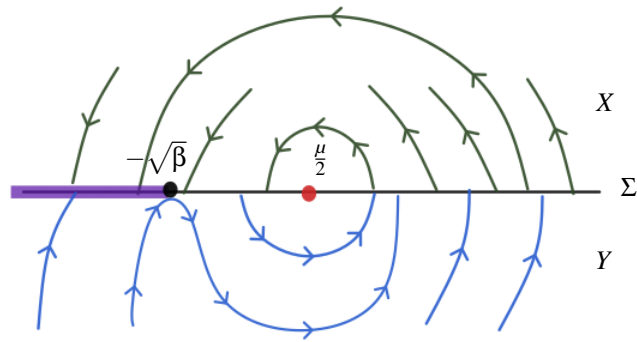


Figura 5.11: Região B_2 .

- 3) **Região R_3 :** Se $\beta > \frac{\mu^2}{4}$, temos que $\Sigma^s = (-\infty, -\sqrt{\beta})$, $\Sigma^e = (\frac{\mu}{2}, \sqrt{\beta})$ e $\Sigma^c = (-\sqrt{\beta}, \frac{\mu}{2}) \cup (\sqrt{\beta}, +\infty)$ (ver Figura 5.12).

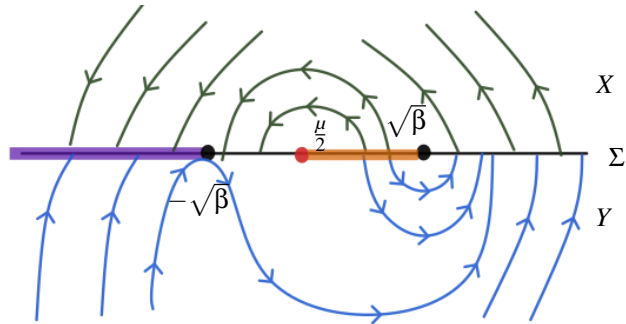


Figura 5.12: Região R_3 .

- 4) **Curva B_3 :** Se $\beta = \frac{\mu^2}{4}$ e $\mu < 0$, temos que $\Sigma^s = (-\infty, -\sqrt{\beta})$, $\Sigma^e = (-\sqrt{\beta}, \sqrt{\beta})$ e $\Sigma^c = (\sqrt{\beta}, +\infty)$ (ver Figura 5.13).

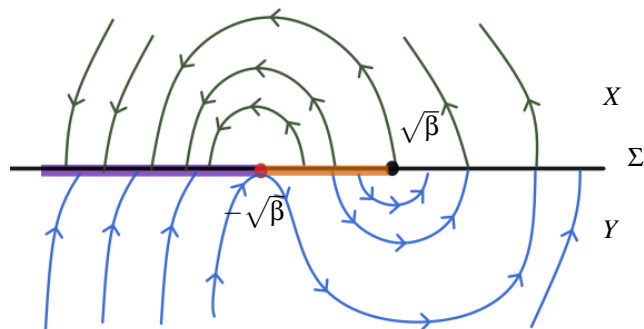


Figura 5.13: Região B_3 .

- 5) **Região R_4 :** Se $0 < \beta < \frac{\mu^2}{4}$ e $\mu < 0$, temos que $\Sigma^s = (-\infty, \frac{\mu}{2})$, $\Sigma^e = (-\sqrt{\beta}, \sqrt{\beta})$ e $\Sigma^c = (\frac{\mu}{2}, -\sqrt{\beta}) \cup (\sqrt{\beta}, +\infty)$ (ver Figura 5.14).

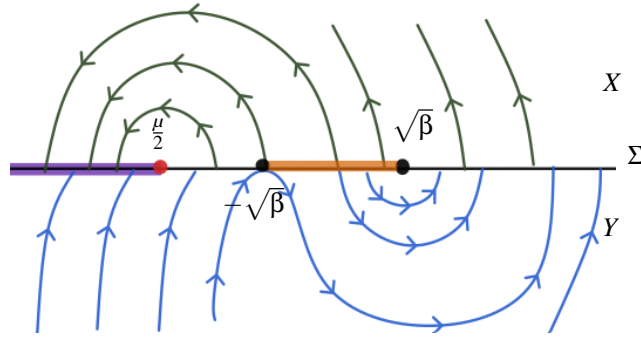


Figura 5.14: Região R_4 .

Agora, estudamos a posição de P_+ e P_- nestas regiões em que $\beta > 0$. Observe a Figura 5.1.

1) **Região R_2 :** Neste caso, $\mu > 0$ e $0 < \beta < \frac{\mu^2}{4}$, assim

$$\begin{aligned} P_- &= -1 - \sqrt{1 + \beta + \mu} \\ &< -\sqrt{1 + \beta + \mu} \\ &< -\sqrt{\beta} \end{aligned}$$

e mostramos a seguir que

$$P_+ = -1 + \sqrt{1 + \beta + \mu} > \sqrt{\beta}.$$

De fato, como $0 < \beta < \frac{\mu^2}{4}$ e $\mu > 0$, segue que $\mu > 2\sqrt{\beta}$, assim segue que

$$1 + \beta + 2\sqrt{\beta} < 1 + \beta + \mu,$$

e além disso,

$$\begin{aligned} 1 + \beta + 2\sqrt{\beta} < 1 + \beta + \mu &\Leftrightarrow (\sqrt{\beta} + 1)^2 < 1 + \beta + \mu \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\beta} + 1 < \sqrt{1 + \beta + \mu} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\beta} < -1 + \sqrt{1 + \beta + \mu} = P_+. \end{aligned}$$

Agora, verificamos que $P_+ < \frac{\mu}{2}$. Como $\beta < \frac{\mu^2}{4}$, temos que

$$\begin{aligned} 1 + \beta + \mu < 1 + \mu + \frac{\mu^2}{4} &\Leftrightarrow 1 + \beta + \mu < \left(\frac{\mu}{2} + 1\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1 + \beta + \mu} < \frac{\mu}{2} + 1 \\ &\Leftrightarrow P_+ = -1 + \sqrt{1 + \beta + \mu} < \frac{\mu}{2} \end{aligned}$$

Logo, concluímos que $P_+ \in \left(\sqrt{\beta}, \frac{\mu}{2}\right) \subset \Sigma^s$ e $P_- \in (-\infty, -\sqrt{\beta}) \subset \Sigma^s$ (ver Figura 5.15).

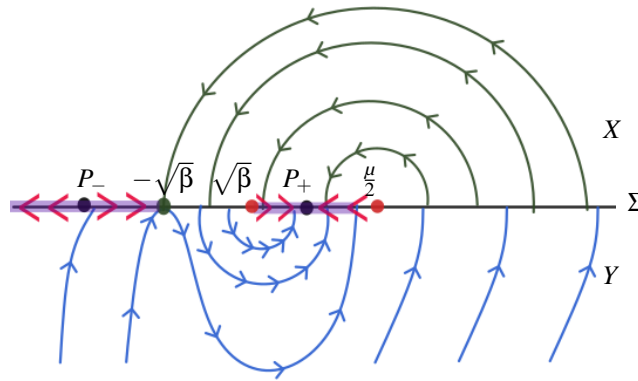


Figura 5.15: Dinâmica de Z_N^s na região R_2 .

- 2) **Curva B_2 :** Neste caso, $\beta = \frac{\mu^2}{4}$ e $\mu > 0$. Assim, analogamente à região R_2 , temos que $P_- < -\sqrt{\beta}$, e

$$\begin{aligned}
 P_+ &= -1 + \sqrt{1 + \beta + \mu} \\
 &= -1 + \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{4} + \mu} \\
 &= -1 + \sqrt{\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)^2} \\
 &= -1 + 1 + \frac{\mu}{2} \\
 &= \frac{\mu}{2}.
 \end{aligned}$$

Logo, $P_- \in \Sigma^s$ e P_+ coincide com o ponto de dobra-dobra invisível e portanto não é considerado como um pseudo-equilíbrio do sistema (ver Figura 5.16).

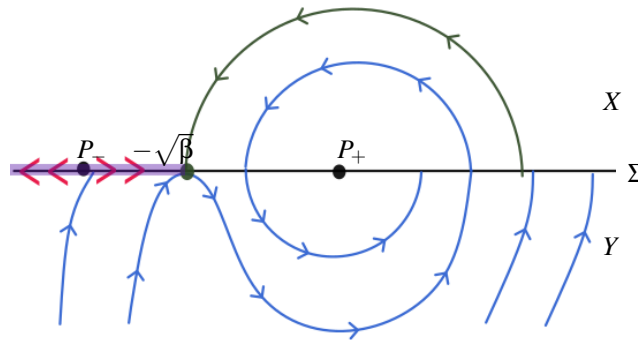


Figura 5.16: Dinâmica de Z_N^s na curva B_2 .

- 3) **Região R_3 :** Neste caso, $\beta > \frac{\mu^2}{4}$. Assim, analogamente à região R_2 , podemos ver que $P_- < -\sqrt{\beta}$.
Como, $\beta > \frac{\mu^2}{4}$, segue que $|\mu| < 2\sqrt{\beta}$, e portanto

$$\begin{aligned}
1 + \beta + \mu > 1 + \frac{\mu^2}{4} + \mu &\Leftrightarrow 1 + \beta + \mu > \left(1 + \frac{\mu}{2}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{1 + \beta + \mu} > \sqrt{\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)^2} \\
&\Leftrightarrow -1 + \sqrt{1 + \beta + \mu} > -1 + 1 + \frac{\mu}{2} \\
&\Leftrightarrow P_+ > \frac{\mu}{2}.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
1 + \beta + \mu < 1 + \beta + |\mu| &\Leftrightarrow 1 + \beta + \mu < 1 + \beta + 2\sqrt{\beta} \\
&\Leftrightarrow 1 + \beta + \mu < (1 + \sqrt{\beta})^2 \\
&\Leftrightarrow -1 + \sqrt{1 + \beta + \mu} < -1 + 1 + \sqrt{\beta} \\
&\Leftrightarrow P_+ < \sqrt{\beta}.
\end{aligned}$$

Concluimos que $P_+ \in \left(\frac{\mu}{2}, \sqrt{\beta}\right) \subset \Sigma^e$ e $P_- \in \Sigma^s$. Ver Figura 5.17.

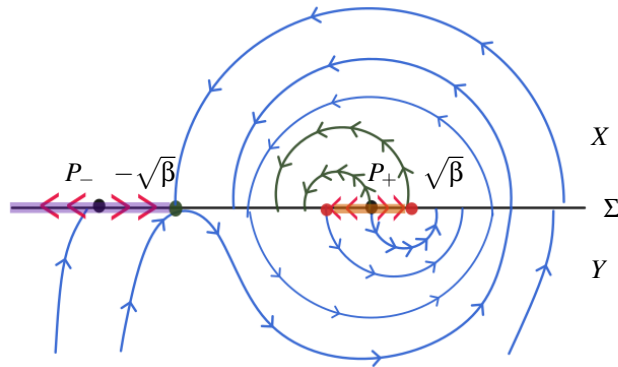


Figura 5.17: Dinâmica de Z_N^s na região R_3 .

- 4) **Curva B_3 :** Neste caso, $\beta = \frac{\mu^2}{4}$ e $\mu < 0$. Como visto anteriormente, $P_- < -\sqrt{\beta}$ e $P_+ = \frac{\mu}{2} = -\sqrt{\beta}$. Assim, $P_- \in \Sigma^s$ e P_+ coincide com a singularidade dobra visível-invisível, e portanto não é considerada como um pseudo-equilíbrio do sistema. Ver Figura 5.18.

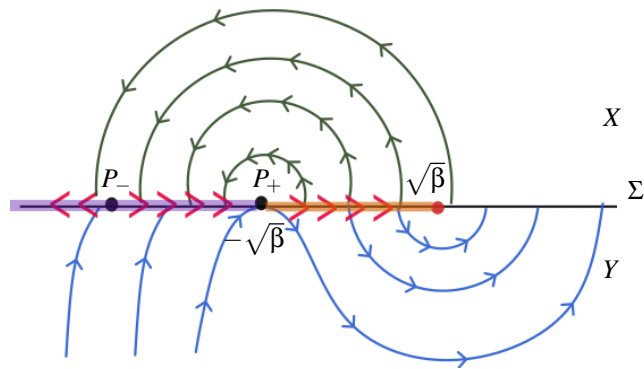


Figura 5.18: Dinâmica de Z_N^s na região B_3 .

- 5) **Região R_4 :** Neste caso, $\beta < \frac{\mu^2}{4}$ e $\mu < 0$. Assim, $P_- < -\sqrt{\beta}$, e como $0 < \beta < \frac{\mu^2}{4}$, analogamente ao que ocorre na região R_2 , temos que $P_+ < \frac{\mu}{2}$. Neste caso, $P_+ \in \left(-\infty, \frac{\mu}{2}\right) \subset \Sigma^s$ e $P_- \in \Sigma^s$. Ver Figura 5.19

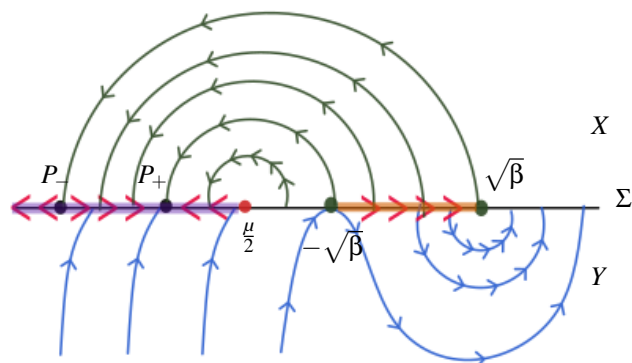


Figura 5.19: Dinâmica de Z_N^s na região R_4 .

5.4 Mapa de Primeiro Retorno

Na região R_3 , podemos observar que a órbita com condição inicial em um ponto $p \in [-\sqrt{\beta}, \frac{\mu}{2}) \subset \Sigma^c$ retorna a essa mesma região por uma órbita costurante de Z , assim, temos a possibilidade da existência de ciclos limites costurantes, ou até mesmo conexões entre Σ -singularidades. Assim, nesta seção estudamos a existência de mapas de primeiro retorno que serão utilizados na detecção destes fenômenos.

Primeiramente, observe que podemos integrar facilmente o campo $Y_\beta = (1, x^2 - \beta)$, e assim, a órbita que passa por $(x_0, 0)$ em tempo $t = 0$ é dada por:

$$\gamma_y(t, x_0; \beta) = \left(\begin{array}{c} t + x_0, \\ \frac{(t+x_0)^3}{3} + \beta t - \frac{x_0^3}{3} \end{array} \right).$$

Assim, resolvendo a equação abaixo, obtemos os tempos de retorno da órbita em Σ que inicia em $(x_0, 0)$

$$\frac{t^3}{3} - t\beta + t^2x_0 + tx_0^2 = 0,$$

que são dados por

$$t_Y^\pm(x_0) = \frac{-3x_0 \pm \sqrt{3}\sqrt{4\beta - x_0^2}}{2}.$$

Assim, os tempos são reais quando $4\beta - x_0^2 > 0$. Como queremos analisar o caso em que $\beta > \frac{\mu^2}{4} \geq 0$, podemos assumir que $\beta > 0$, e portanto os tempos estão bem definidos para $|x_0| < 2\sqrt{\beta}$.

Como $t_Y^-(x_0) < t_Y^+(x_0)$, segue que $t_Y^-(x_0)$ é o tempo de primeiro retorno da órbita. Desta forma, construímos um mapa de primeiro retorno para o campo Y_β dado por:

$$C_\beta(x_0) = \frac{-x_0 - \sqrt{3}\sqrt{4\beta - x_0^2}}{2}.$$

Agora, fazemos um estudo similar para o campo $X_\mu = (-1, 2x - \mu)$. Integrando o campo, temos que a órbita de X_μ que passa por $(x_0, 0)$ em tempo $t = 0$ é dada por

$$\gamma_x(t, x_0; \mu) = \left(\begin{array}{c} -t + x_0, \\ -(-t + x_0)^2 - \mu t + x_0^2 \end{array} \right).$$

Assim, resolvendo a equação abaixo, obtemos o tempo de primeiro retorno da órbita que inicia em $(x_0, 0)$

$$-t^2 + 2tx_0 - x_0^2 - \mu t + x_0^2 = 0,$$

que é dado por:

$$t_X(x_0) = 2x_0 - \mu,$$

e assim obtemos o mapa de primeiro retorno do campo X_μ que é dado por

$$F_\mu(x_0) = -x_0 + \mu.$$

Assim, compondo os mapas de primeiro retorno dos campos Y_β e X_μ obtemos um mapa de primeiro retorno $R_{\mu, \beta} = F_\mu \circ C_\beta$ que é dado por

$$R_{\mu, \beta}(x_0) = \frac{1}{2} \left(x_0 + \sqrt{3}\sqrt{4\beta - x_0^2} \right) + \mu,$$

e está definido sempre que $|x_0| < 2\sqrt{\beta}$.

Resolvendo a equação $R_{\mu, \beta}(x) = x$, obtemos as soluções

$$Q_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\mu \pm \sqrt{3} \sqrt{4\beta - \mu^2} \right)$$

que podem corresponder a órbitas fechadas de Z .

Agora, precisamos determinar quando Q_+ ou Q_- estão em $\left[-\sqrt{\beta}, \frac{\mu}{2} \right]$. Observe que:

- $4\beta - \mu^2 < 0 \Rightarrow$ Nenhum ciclo.
- $4\beta - \mu^2 > 0 \Rightarrow$ Duas raízes distintas.
- $4\beta - \mu^2 = 0 \Rightarrow Q_+ = Q_- = \frac{\mu}{2}$.

Quando $4\beta - \mu^2 > 0$, temos que

$$Q_+ > \frac{\mu}{2},$$

e, portanto, não está no domínio considerado. Note que:

$$Q_- = \frac{1}{2}\mu - \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{4\beta - \mu^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} Q_- = -\sqrt{\beta} &\Leftrightarrow -\sqrt{\beta} = \frac{1}{2}\mu - \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{4\beta - \mu^2} \\ &\Leftrightarrow \mu = -2\sqrt{\beta} \text{ ou } \mu = \sqrt{\beta}. \end{aligned}$$

Note que $\mu = -2\sqrt{\beta}$ corresponde a curva B_3 , e neste caso o primeiro retorno é trivial (ponto de dobra-dobra invisível-visível). Por outro lado, $\mu = \sqrt{\beta}$ nos gera uma curva na região R_3 onde o sistema admite um políciclo por uma dobra-regular. Ver Figura 5.20.

Fazendo $Q_- = \frac{\mu}{2}$, obtemos que $4\beta - \mu^2 = 0$. Logo, $Q_- \in \left[-\sqrt{\beta}, \frac{\mu}{2} \right]$ se, e somente se, $\sqrt{\beta} \leq \mu \leq 2\sqrt{\beta}$. Assim, podemos ver que na curva $\mu = \sqrt{\beta}$, o sistema possui um ciclo costurante crítico, e como esperado pelo Teorema 4.3.2, este ciclo se rompe originando um ciclo limite costurante atrator na região $\sqrt{\beta} < \mu < 2\sqrt{\beta}$. Conforme μ se aproxima de $2\sqrt{\beta}$, este ciclo costurante diminui e se degenera no ponto de dobra-dobra invisível na curva $\mu = 2\sqrt{\beta}$. Ver Figura 5.21.

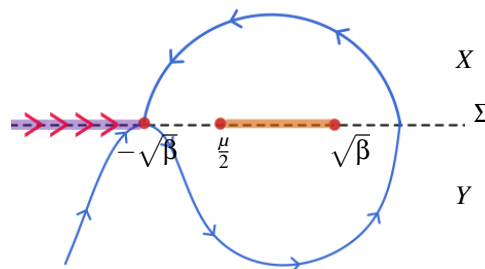


Figura 5.20: Comportamento de Z na curva $\mu = \sqrt{\beta}$.

Assim, combinando o estudo da dinâmica deslizante e da existência de órbitas fechadas, obtemos o diagrama de bifurcação abaixo:

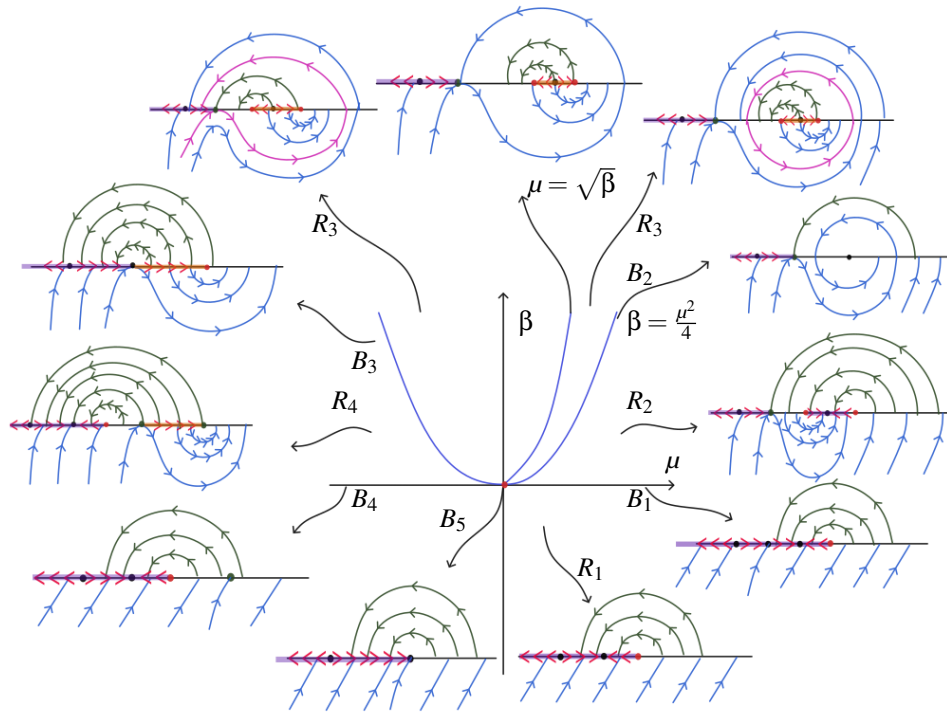


Figura 5.21: Diagrama de bifurcação.

5.5 Existência de outras conexões

Agora apresentaremos outras conexões que podem ocorrer neste sistema. Considere o ponto $P_+ = 1 + \sqrt{1 + \beta + \mu}$ e os mapas obtidos $C_\beta(x_0) = \frac{1}{2} \left(-x_0 + \sqrt{3} \sqrt{4\beta - x_0^2} \right)$ e $F_\mu(x_0) = \mu - x_0$.

Assim, observe que a equação $F_\mu(\sqrt{\beta}) = -\sqrt{\beta}$ detecta quando existe uma conexão entre o ponto dobra-regular invisível $(\sqrt{\beta}, 0)$ e o ponto de dobra-regular visível $(-\sqrt{\beta}, 0)$. Neste caso:

$$\begin{aligned} F_\mu(\sqrt{\beta}) = -\sqrt{\beta} &\Leftrightarrow \mu - \sqrt{\beta} = -\sqrt{\beta} \\ &\Leftrightarrow \mu = 0. \end{aligned}$$

Assim, se $\beta > 0$ e $\mu = 0$, então temos uma nova curva de bifurcação em que esta conexão ocorra. Ver Figura 5.22.

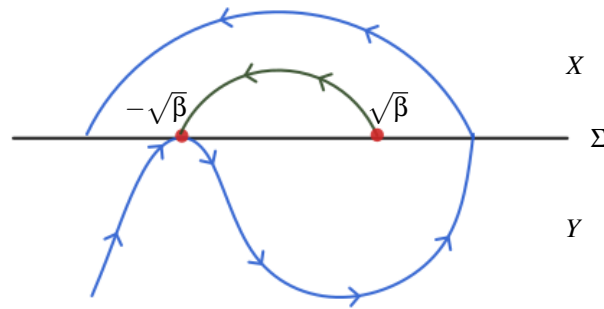


Figura 5.22: Conexão em que $F_\mu(\sqrt{\beta}) = -\sqrt{\beta}$

Da mesma forma, a equação $F_\mu(\sqrt{\beta}) = -\sqrt{\beta}$, nos descreve quando ocorre uma conexão entre o pseudo-equilíbrio $(P_+, 0)$ e o ponto de dobra-regular visível $(-\sqrt{\beta}, 0)$. Neste caso

$$\begin{aligned}
 F_{P_\mu}(\sqrt{\beta}) = -\sqrt{\beta} &\Leftrightarrow \mu - (-1 - \sqrt{1 + \beta + \mu}) = -\sqrt{\beta} \\
 &\Leftrightarrow \mu + 1 - \sqrt{1 + \beta + \mu} = -\sqrt{\beta} \\
 &\Leftrightarrow (\mu + 1 + \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{1 + \beta + \mu})^2 \\
 &\Leftrightarrow (\mu + 1)^2 + 2\sqrt{\beta}(\mu + 1) + \beta = 1 + \beta + \mu \\
 &\Leftrightarrow \mu^2 + 2\mu + 1 + 2\sqrt{\beta}\mu + 2\sqrt{\beta} + \beta = 1 + \beta + \mu \\
 &\Leftrightarrow \mu^2 + (1 + 2\sqrt{\beta})\mu + 2\sqrt{\beta} = 0.
 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação obtemos $\mu = -2\sqrt{\beta}$ ou $\mu = -1$. A curva $\mu = -1$ está longe da vizinhança de nossa análise e portanto é desconsiderada. A curva $\mu = -2\sqrt{\beta}$, é a curva em que P_+ coincide com a dobra-dobra invisível-visível $(\frac{\mu}{2}, 0)$. Logo, não existe esse tipo de conexão neste caso, ou seja, na curva $\mu = -2\sqrt{\beta}$ nasce uma conexão entre $(-\sqrt{\beta}, 0)$ e um ponto que está entre P_+ e $(\sqrt{\beta}, 0)$, originando uma conexão deslizante entre $(-\sqrt{\beta}, 0)$ e $(\sqrt{\beta}, 0)$ quando $-2\sqrt{\beta} < \mu < 0$, e em $\mu = 0$ essa conexão atinge o seu limite formando uma pseudo-conexão por uma órbita de X entre $(-\sqrt{\beta}, 0)$ e $(\sqrt{\beta}, 0)$. Ver Figura 5.23.

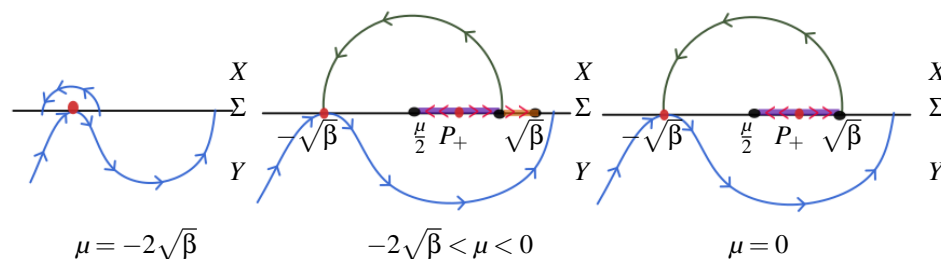


Figura 5.23: Conexões em que $F_\mu(\sqrt{\beta}) = -\sqrt{\beta}$.

Prosseguindo com esse raciocínio, quando $\mu > 0$, a conexão entre $(-\sqrt{\beta}, 0)$ e $(\sqrt{\beta}, 0)$ é desfeita e neste caso, o ponto $(-\sqrt{\beta}, 0)$ pode voltar a se conectar com

$(P_+, 0)$ e $(\frac{\mu}{2}, 0)$ através de uma órbita de Y . De fato, resolvendo $F_\mu \circ C_\beta(P_+) = -\sqrt{\beta}$ obtemos $\mu = 2\sqrt{\beta}$ que nos dá a curva em que a dobra-dobra invisível acontece e portanto esta curva não nos dá conexão real.

Agora, resolvendo $F_\mu \circ C_\beta(\frac{\mu}{2}) = -\sqrt{\beta}$ obtemos $\mu = \frac{4}{7}\sqrt{\beta}$, e com isso temos que nesta curva o ponto $(-\sqrt{\beta}, 0)$ se conecta ao ponto $(\frac{\mu}{2}, 0)$ e obtemos o comportamento descrito na Figura 5.24.

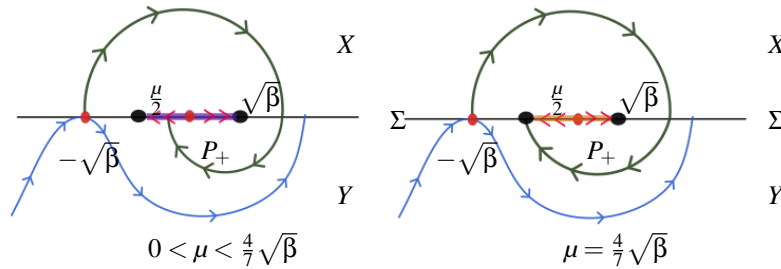


Figura 5.24: Conexões em que $F_\mu \circ C_\beta(\frac{\mu}{2}) = -\sqrt{\beta}$.

Assim, na curva $\mu = 0$, surge uma pseudo-conexão deslizando entre $(-\sqrt{\beta}, 0)$ e $(\frac{\mu}{2}, 0)$ que se transforma na conexão costurante entre $(-\sqrt{\beta}, 0)$ e $(\frac{\mu}{2}, 0)$ na curva $\mu = \frac{4}{7}\sqrt{\beta}$. Procedendo de maneira indutiva, podemos conjecturar a existência de uma sequência de curvas da forma $\mu = \mu_n \sqrt{\beta}$, onde $\mu_n \rightarrow 1$, de forma que nessas curvas temos conexões costurantes entre $(-\sqrt{\beta}, 0)$ e $(\frac{\mu}{2}, 0)$ ou entre $(-\sqrt{\beta}, 0)$ e $(\sqrt{\beta}, 0)$. Além disso, quanto maior n , mais vezes essa conexão intersecta Σ . Ver Figura 5.25.

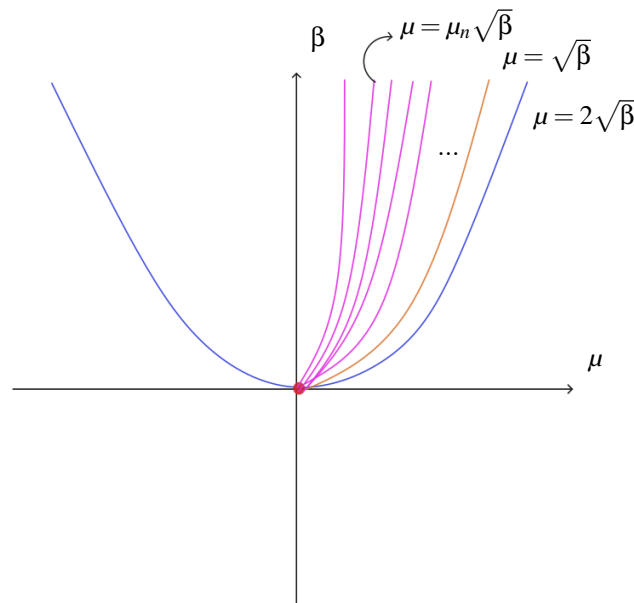


Figura 5.25: Existência de uma sequência de curvas da forma $\mu = \mu_n \sqrt{\beta}$.

Como o número de vezes que uma órbita intersecta Σ deve ser preservado por Σ -equivalência, então podemos conjecturar que o desdobramento $Z_{\mu,\beta}$ apresenta uma infinidade de tipos topológicos. Ressaltamos que esse tipo de comportamento também foi detectado em [A16]. A análise deste fenômeno é bastante difícil de ser feita em razão da complexidade dos cálculos envolvidos, e por isso é deixada como uma direção futura deste trabalho.

Referências Bibliográficas

- [A16] Andrade, K. d. S. On degenerate cycles in discontinuous vector fields and the Dulacs problem. Thesis (Unicamp), 2016.
- [A23] Andrade, K. d. S.; Gomide, O. M. L. ; Novaes, D. D. Bifurcation Diagrams of Global Connections in Filippov Systems. *Nonlinear Analysis-Hybrid Systems*, 2023.
- [A19] Andrade, K. d. S.; Gomide, O. M. L. and Novaes, D. D. Qualitative analysis of polycycles in filippov systems. arXiv preprint 1905.11950, 2019.
- [A17] Andrade, K. d. S.; Jeffrey, M. R.; Martins, R. M. and Teixeira, M. A. Homoclinic boundary-saddle bifurcations in nonsmooth vector fields. arXiv preprint arXiv:1701.05857, pages 1939, 2017.
- [B18] Benadero, L.; Ponce, E. A.; El Aroudi, and Torres, F. Limit cycle bifurcations in resonant lc power inverters under zero current switching strategy. *Nonlinear Dynamics*, 91(2):11451161, 2018.
- [B99] Bernardo, M. Di; Feigin, M. I.; Hogan, S. J. and Homer, M. E. Local analysis of c-bifurcations in n-dimensional piecewise-smooth dynamical systems. *Chaos, Solitons and Fractals: the interdisciplinary journal of Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena*, 11(10):18811908, 1999.
- [B08] Bernardo, M. Di; Budd, C. A. R.; Champneys, and Kowalczyk, P. *Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications*, volume 163. Springer Science e Business Media, 2008.
- [B99] Brogliato, B. *Nonsmooth mechanics*. Springer, 1999.
- [B12] Buzzi, C. A.; Tiago, d. C.; Teixeira, M. A. On 3 Parameter Families of Piecewise Smooth Vector Fields in the Plane. *Siam Journal on Applied Dynamical Systems*. Philadelphia: Siam Publications, v. 11, n. 4, p. 1402-1424, 2012.
- [C21] Castro, M. M.; Martins, R. M.; Novaes, D. D. A note on Vishik's normal form, *Journal of Differential Equations*, Volume 281, 2021, Pages 442-458, ISSN 0022-0396.
- [C01] Cheney, W. *Analysis for Applied Mathematics*. Springer, 2001.
- [F78] Feigin, M. I. On the structure of c-bifurcation boundaries of piecewise-continuous systems. *Journal of Applied mathematics and Mechanics*, 42(5):885895, 1978.

- [F88] Filippov, A. F. *Differential equations with discontinuous righthand sides: control systems*, volume 18. Springer Science e Business Media, 1988.
- [F15] Freire, E.; Ponce, E. and Torres F. On the critical crossin cycle bifurcation in planar filippov systems. *Journal of Differential Equations*, 259(12):70867107, 2015.
- [G03] Gouze, T. S. J. L. A class of piecewise-linear differential equations arising in biological models. *Dynam. Syst.*, 17:229316, 2003.
- [G11] Guardia, M.; Seara, T. M. and Teixeira, M. A. Generic bifurcations of low codimension of planar filippov systems. *Journal of Differential Equations*, 250(4):19672023, 2011.
- [K03] Kuznetsov, Y. A.; Rinaldi, S. and Gragnani, A. One-parameter bifurcations in planar filippov systems. *International Journal of Bifurcation and chaos*, 13(08):21572188, 2003.
- [L13] Liang, F. and Han, M. The stability of some kinds of generalized homoclinic loops in planar piecewise smooth systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 23(02):1350027, 2013.
- [L17] Liang, F. and Wang, D. Limit cycle bifurcations near a piecewise smooth generalized homoclinic loop with a saddle-fold point. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 27(05):1750071, 2017.
- [L14] Liu, Y. and Romanovski, V. G. Limit cycle bifurcations in a class of piecewise smooth systems with a double homoclinic loop. *Applied Mathematics and Computation*, 248:235245, 2014.
- [N18] Novaes, D. D.; Teixeira, A. M.; Zeli. I. The generic unfolding of a codimension-two connection to a two-fold singularity of planar Filippov systems. v. 31, n. 5, p. 20832104, 6 abr. 2018.
- [P75] Palis Jr. J.; Melo, W. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. 10º Colóquio Brasileiro de Matemática. Poço de Caldas, 1975.
- [P00] Lawrence, P., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Texts in Applied Mathematics, vol. 7, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [R98] Roussarie, R. *Bifurcation of Planar Vector Fields and Hilbert's Sixteenth Problem*. [s.l: s.n.].
- [S95] Sotomayor, J. and Teixeira, M. A. Regularization of discontinuous vector fields. *International Conference on Differential Equations*, Lisboa, Equadiff, pages 207223, 1995.
- [V72] Vishik, S. M. Vector fields in the neighborhood of the boundary of a manifold. *Vestnik Moskov. Univ Ser. I Mat. Meh.*, 27(1):21-28, 1972.