

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RAIMUNDO CAVALCANTE MARANHÃO NETO

Estudo Qualitativo de Equações Diferenciais Binárias Cúbicas

Goiânia
2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Raimundo Cavalcante Maranhão Neto

3. Título do trabalho

Estudo Qualitativo de Equações Diferenciais Binárias Cúbicas

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Raimundo Cavalcante Maranhao Neto, Discente**, em 07/12/2022, às 17:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ronaldo Alves Garcia, Professor do Magistério Superior**, em 17/01/2023, às 14:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3390022** e o código CRC **02C3A387**.

RAIMUNDO CAVALCANTE MARANHÃO NETO

Estudo Qualitativo de Equações Diferenciais Binárias Cúbicas

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos.

Orientador: Prof. Ronaldo Alves Garcia

Goiânia
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Maranhão Neto, Raimundo Cavalcante
Estudo Qualitativo de Equações Diferenciais Binárias Cúbicas
[manuscrito] / Raimundo Cavalcante Maranhão Neto. - 2022.
CXLI, 141 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de
Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em
Matemática, Goiânia, 2022.

Bibliografia.

Inclui símbolos, gráfico, tabelas.

1. Equações diferenciais ordinárias implícitas de primeira ordem. 2.
Lie-Cartan. 3. Linhas de Laguerre. 4. Binárias cúbicas. I. Garcia,
Ronaldo Alves, orient. II. Título.

CDU 5



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE TESE

Ata nº **07** da sessão de Defesa de Tese de **Raimundo Cavalcante Maranhão Neto**, que confere o título de Doutor em Matemática, **na área de concentração de Sistemas Dinâmicos**.

Ao quinto dia do mês de dezembro do ano de dois mil e vinte e dois, a partir das dez horas, via Web videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Tese intitulada "**Estudo Qualitativo de Equações Diferenciais Binárias Cúbicas**." Os trabalhos foram instalados pelo Orientador e Presidente da banca, Professor Doutor **Ronaldo Alves Garcia - IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Bruno Rodrigues de Freitas - IME/UFG** - membro titular interno, Professor Doutor **Rodrigo Donizete Euzébio - IME/UFG** - membro titular interno, Professora Doutora **Luciana de Fátima Martins - DMat/IBILCE/UNESP** membro titular externa e o Professor Doutor **Claudio Aguinaldo Buzzi - DMat/IBILCE/UNESP**, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Tese, tendo sido o candidato **APROVADO** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Ronaldo Alves Garcia - IME/UFG**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao vigésimo primeiro dia do mês de novembro do ano de dois mil e vinte e dois.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Estudo Qualitativo de Equações Diferenciais Binárias Cúbicas



Documento assinado eletronicamente por **Claudio Aguinaldo Buzzi, Usuário Externo**, em 05/12/2022, às 14:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Bruno Rodrigues De Freitas, Professor do Magistério Superior**, em 05/12/2022, às 14:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **LUCIANA DE FÁTIMA MARTINS, Usuário Externo**, em 05/12/2022, às 15:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Donizete Euzébio, Professor do Magistério Superior**, em 06/12/2022, às 20:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ronaldo Alves Garcia, Professor do Magistério Superior**, em 30/12/2022, às 11:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3289202** e o código CRC **8FCFE9ED**.

Referência: Processo nº 23070.058793/2022-41

SEI nº 3289202

Dedico a minha mãe Osvald (in memoriam), a minha esposa Wedina e ao meu filho Davi.

Agradecimentos

Agradeço à Força que alguns chamam de Deus, outros chamam de cosmos ou por outro nome, por nos presentear com a ciência.

Agradeço a minha mãe pelos anos de incentivo ao estudo e pela dedicação com que me acompanhou durante minha infância na escola.

Agradeço aos professores Francisco Aurilo Azevedo Pinho e Glaydston de Carvalho Bento, ambos grandes amigos, por me considerarem carta de recomendação para ingresso no doutorado.

Agradeço ao meu orientador, pela compreensão, paciência, dedicação e por acreditar em mim.

Ao meu irmão de área e um grande amigo, Douglas Hilário, pelas diversas vezes que se dispôs a discutir algum assunto e muitas vezes a tirar dúvidas como um co-orientador.

Ao meu irmão de área Hugo Belisário pelos momentos de discussão sobre equações diferenciais e por ceder, gentilmente, uma cópia de sua tese como referência.

Ao professor Alacyr José Gomes que sempre se dispôs a discutir equações diferenciais e a dar conselhos importantes como um amigo.

Aos meus colegas, amigos e irmãos de área, Bruno Rodrigues de Freitas e Thársis Souza Silva.

Agradeço também a todos os meus colegas e a todos os demais professores do IME por suas participações na minha vida acadêmica e como pessoa.

Agradeço a minha esposa por todo o apoio que me deu durante essa caminhada. Várias vezes teve que fazer o papel de mãe e pai para que pudesse me dedicar mais.

Agradeço ao meu filho pelos momentos de descontração.

Agradeço aos meus colegas do curso de Licenciatura em Matemática de Araguaína pelo apoio durante minha licença para o doutorado. De modo especial quero dirigir meus agradecimentos a Basíledes Temístocles Colunche Delgado, José Carlos de Oliveira Júnior, Renata Alves da Silva, Samara Leandro Matos da Silva, Sinval de Oliveira e Yukiko Massago por me substituírem durante minhas licenças capacitação e me apoiando nos momentos mais difíceis. Também quero agradecer de

modo particular a professora Claudenice Cardoso Brito, Coordenadora de Formação e Desenvolvimento da UFNT, pela presteza, coleguismo e profissionalismo com que agilizou meu segundo processo de licença capacitação e à professora Elisângela Aparecida Pereira de Melo, pelo carinho e preocupação com que me apoiou.

Resumo

Maranhão Neto, Raimundo Cavalcante. **Estudo Qualitativo de Equações Diferenciais Binárias Cúbicas**. Goiânia, 2022. 141p. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho apresentamos um estudo qualitativo para duas classes de equações diferenciais binárias cúbicas. A primeira delas é da forma

$$\operatorname{Im}[(a + i b)(du + i dv)^3] = 0, \quad (0-1)$$

onde $a, b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe C^∞ e a segunda é da equação diferencial implícita das linhas de Laguerre de uma superfície de classe C^6 . Esta segunda classe, conforme mostrado em [5], possui a forma

$$A_3(u, v) dv^3 + 3 A_2(u, v) dv^2 du + 3 A_1(u, v) dv du^2 + A_0(u, v) du^3 = 0.$$

Com relação às equações da forma (0-1), realizamos um estudo local, expressamos a derivada da aplicação de primeiro retorno, classificamos as singularidades no infinito e apresentamos um resultado global para o caso em que a e b são polinômios de grau um.

Para a equação diferencial das linhas Laguerre, estudamos o comportamento qualitativo próximo a curva discriminante, fizemos um estudo parcial das singularidades, apresentamos uma expressão para derivada da aplicação de primeiro retorno, realizamos um estudo de estabilidade estrutural e estudamos os casos particulares para superfícies de rotação, superfícies regradas e superfícies quádricas.

Palavras-chave

Equações diferenciais ordinárias implícitas de primeira ordem; Lie-Cartan; Linhas de Laguerre; Binárias cúbicas.

Abstract

Maranhão Neto, Raimundo Cavalcante. **Estudo Qualitativo de Equações Diferenciais Binárias Cúbicas**. Goiânia, 2022. 141p. PhD. Thesis. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work we present a qualitative study for two classes of differential equations. The first of these is of the form

$$\operatorname{Im}[(a + i b)(du + i dv)^3] = 0, \quad (0-2)$$

where $a, b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ are functions of class C^∞ and the second is from the implicit differential equation of the Laguerre lines of a surface of class C^6 . This second class, as proved in [5], has the shape

$$A_3(u, v) dv^3 + 3 A_2(u, v) dv^2 du + 3 A_1(u, v) dv du^2 + A_0(u, v) du^3 = 0.$$

With regard to equations of the form (0-2), we perform a local study, express the derivative of the application of the first return, we classify the singularities at infinity and present a global result for the case where a and b are polynomials of degree one. For the differential equation of the Laguerre lines, we studied the qualitative behavior close to the discriminant curve, we made a partial study of the singularities, we presented an expression for the derivative of the application of the first return, we carried out a study of structural stability and we studied the particular cases for surfaces of rotation, ruled surfaces and quadric surfaces.

Keywords

First order implicit ordinary differential equations; Lie-Cartan; Laguerre Lines; Cubic binaries.

Conteúdo

Introdução	9
1 Preliminares	11
1.1 Geometria	11
1.1.1 Curvas planas e círculo osculador	11
1.1.2 Curvas e superfícies no \mathbb{R}^3	13
1.2 Álgebra	15
1.2.1 Equações polinomiais	15
1.2.2 Equações polinomiais de terceiro grau	16
1.3 Análise e topologia	17
1.4 Teoria qualitativa para campos em variedades	19
1.4.1 Campos de vetores	19
1.4.2 Campos de direções	22
1.5 Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem implícitas	24
2 Uma classe especial de equações diferenciais binárias cúbicas	34
2.1 Introdução:	34
2.2 Estudo local	36
2.2.1 Soluções regulares	36
2.2.2 Singularidades	38
2.3 Singularidades hiperbólicas	42
2.4 Aplicação de Poincaré	54
2.5 Singularidades no infinito	61
2.5.1 Caso $m = n$	66
2.6 Estabilidade Estrutural	69
3 Linhas de Laguerre	73
3.1 Definições e resultados importantes	73
3.2 Configuração próximo a curva discriminante	77
3.3 Configuração próximo a um ponto singular	79
3.3.1 Resultados preliminares	79
3.3.2 Caso em que o campo de Lie-Cartan tem singularidade	83
3.3.3 Caso particular	84
4 Estabilidade Estrutural e Genericidade para Linhas de Laguerre	90
4.1 Aplicação de Poincaré	90
4.2 Estabilidade Estrutural	96
4.2.1 Condições para estabilidade estrutural	97
4.3 Equação variacional	102

5	Exemplos de linhas de Laguerre	110
5.1	Linhas de Laguerre em superfícies de revolução	110
5.2	Linhas de Laguerre em superfícies regradadas	115
5.3	Linhas de Laguerre nas superfícies quádricas	118
5.3.1	Linhas de Laguerre no parabolóide	119
5.3.2	Linhas de Laguerre no hiperbolóide	121
5.3.3	Linhas de Laguerre no elipsoide	126
5.3.4	Linhas de Laguerre nos Cilindros	131
5.3.5	Linhas de Laguerre nos Cones	133
5.3.6	A equação diferencial das linhas de Laguerre em uma quádrica	134
5.4	Problema inverso para linhas de Laguerre	134
	Contribuições e perspectivas de trabalhos futuros	136
	Bibliografia	138

Introdução

Uma equação diferencial ordinária implícita de primeira ordem é uma equação da forma

$$F(u, v, p) = 0, \quad (0-3)$$

onde F é uma função de classe C^k , $k \geq 1$ e $p = \frac{dv}{du}$.

Equações diferenciais implícitas possuem aplicações em geometria diferencial de superfícies, como por exemplo, a equação diferencial das linhas de curvaturas principais e a de linhas assintóticas. Aparecem em problemas de mecânica, por exemplo, a equação

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)^2 = \frac{2k(x)^2}{m}(E - U(x)),$$

modela um sistema mecânico unidimensional, onde U representa uma força, E a energia do sistema e $k(x)$ é uma função de proporcionalidade entre a força de atrito e a velocidade.

Também aparecem no estudo de equações diferenciais parciais e estão relacionadas com problemas importantes da Matemática como, por exemplo, com a obtenção da transformada de Legendre de uma determinada função.

Neste trabalho tratamos de uma classe específica de equações diferenciais ordinárias implícitas de primeira ordem: “as equações diferenciais binárias cúbicas”. Abordamos duas subclasses destas e o método que utilizamos para a realização desse estudo foi o levantamento de Lie-Cartan e está exposto na Seção 1.5.

No Capítulo 1 apresentamos uma lista de definições e de resultados preliminares de álgebra, geometria, análise, topologia e de equações diferenciais ordinárias implícitas de primeira ordem que são necessários para o entendimento dos demais capítulos. Além disso, temos dois resultados neste Capítulo: na Seção 1.3 temos a Proposição 1.65 e na Seção 1.5 temos o Teorema 1.66.

No Capítulo 2 apresentamos a primeira classe de equações que estudamos que é a das equações da forma

$$\text{Im}[(a + ib)(du + idv)^3] = 0,$$

onde $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $du, dv : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são as projeções canônicas de \mathbb{R}^2 , isto é, $du(u, v) = u$ e $dv(u, v) = v$. Com relação a estas, descrevemos o comportamento qualitativo genérico local, fizemos a classificação de singularidades no infinito, obtivemos uma expressão para a aplicação de Poincaré para um arco de trajetória e apresentamos uma classificação global para o caso em que $a(u, v) = a_1u + a_2v$ e $b(u, v) = b_1u + b_2v$, onde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Os principais resultados desse Capítulo estão nos teoremas [2.12](#), [2.19](#) e [2.31](#).

A segunda classe de equações que estudamos é das equações diferenciais das linhas de Laguerre em superfícies. Este estudo está distribuído nos Capítulos [3](#), [4](#) e [5](#). Na primeira seção do Capítulo [3](#) apresentamos uma lista de definições e resultados retirados da referência bibliográfica e na segunda seção apresentamos um estudo do comportamento das linhas de Laguerre próximo à curva discriminante.

Na terceira seção do Capítulo [3](#) apresentamos um estudo das singularidades da equação [\(3-2\)](#) que são os pontos (\bar{u}, \bar{v}) tais que $A_j(\bar{u}, \bar{v}) = 0$ para $j = 0, 1, 2, 3$. Trata-se do estudo de um caso particular e os resultados deste capítulo estão distribuídos nas proposições de [3.8](#) à [3.20](#).

No Capítulo [4](#) deduzimos uma expressão para a derivada da aplicação de Poincaré para um arco de trajetória regular (sem intersecção com o conjunto crítico) e desenvolvemos um estudo de estabilidade estrutural para as linhas de Laguerre, sendo que o estudo da estabilidade foi restrito às superfícies compactas e orientáveis. Os principais resultados deste capítulo estão contidos nos teoremas [4.3](#), [4.8](#), [4.19](#), [4.20](#) e no Lema [4.24](#) que é um resultado que visa um estudo futuro.

No Capítulo [5](#) desenvolvemos um estudo das linhas de Laguerre em superfícies de revolução na Seção [5.1](#), em superfícies regradas na Seção [5.2](#) e em superfícies quádricas na Seção [5.3](#). Os principais resultados deste capítulo estão nos teoremas [5.4](#), [5.29](#) e [5.30](#).

Preliminares

Neste capítulo apresentamos, sem muita delonga, conceitos essenciais de geometria, análise, topologia, álgebra e equações diferenciais implícitas ordinárias de primeira ordem. Tais conceitos serão utilizados nos capítulos seguintes para formulação e demonstração dos resultados da nossa pesquisa.

1.1 Geometria

1.1.1 Curvas planas e círculo osculador

Definição 1.1. *Sejam I um intervalo da reta e seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável. Dado $t_0 \in I$, se $\|\gamma'(t_0)\| \neq 0$, dizemos que γ é regular em t_0 , caso contrário dizemos que γ possui um ponto de cúspide em t_0 . Caso $\|\gamma'(t)\| \neq 0$ para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma curva regular.*

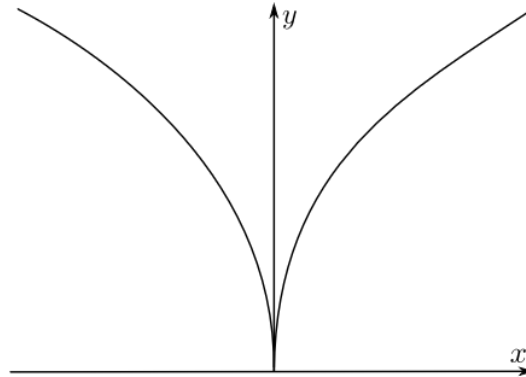


Figura 1.1: A curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ tem um ponto de cúspide em $\gamma(0)$.

Consideremos $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de classe C^r , $r \geq 2$, parametrizada por comprimento de arco. Se $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, então, $\{t(s), n(s)\}$, onde $t(s) = \gamma'(s)$ e $n(s) = (-y'(s), x'(s))$, é uma base positiva do \mathbb{R}^2 . Como $n(s)$ e $\gamma''(s)$ possuem a mesma direção existe uma função $k : I \rightarrow \mathbb{R}$

tal que $\gamma''(s) = k(s)n(s)$, para todo $s \in I$, chamada função curvatura de γ (Veja [3]). Note que

$$k(s) = \langle \gamma''(s), n(s) \rangle = x'y'' - x''y'.$$

Caso γ seja uma curva regular de classe C^r , $r \geq 2$, não necessariamente parametrizada por comprimento de arco, o vetor $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ é unitário e tangente a γ em s . A aplicação $t \mapsto T(t)$ é chamada indicatriz tangente da curva. Note que, para cada $t \in I$, existe $\theta(t)$ tal que $T(t) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$

Definição 1.2. Chamamos de curvatura de γ em $s \in I$, ao número $k(s) = \theta'(s)$.

Proposição 1.3. Consideremos $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de classe C^r , $r \geq 2$, parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Então,

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Veja [3] para uma prova da Proposição anterior.

Definição 1.4. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de classe C^2 parametrizada por comprimento de arco, com curvatura $k(s) \neq 0$. Chamamos $r(s) = \frac{1}{|k(s)|}$ de raio de curvatura da curva γ em s e o círculo de centro

$$c(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)} n(s)$$

e raio $r(s)$ é denominado círculo osculador de γ em s .

Seja $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^m , $m \geq 1$. Dizemos que $x \in U$ é um ponto regular de F se $dF(x)$ for sobrejetiva. Um número $y \in \mathbb{R}$ é dito valor regular de F se todo $x \in F^{-1}(y)$ for ponto regular de F . Se y_0 é um valor regular de F , então $F^{-1}(y_0)$ é uma subvariedade de classe C^n de codimensão um, ou seja é uma curva (Veja [33]). Consideremos uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 e a função $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = F(\gamma(t))$.

Definição 1.5. Diremos que γ e $F^{-1}(0)$ têm contato de ordem r em $t_0 \in I$, se $g^{(n)}(t_0) = 0$ para $0 \leq n \leq r-1$ e $g^{(r)}(t_0) \neq 0$, onde $g^{(n)}(t)$ é a derivada de ordem n de g em t e $g^{(0)} = g$.

Proposição 1.6. De todos os círculos tangentes a γ em $p_0 = \gamma(t_0)$, o círculo osculador é o que possui maior ordem de contato.

Demonstração. A família de todos os círculos tangentes a γ em $p_0 = \gamma(t_0)$ é dada por

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \tag{1-1}$$

onde $x_0 = x(t_0) - ry'(t_0)$ e $y_0 = y(t_0) + rx'(t_0)$. Consideremos a função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2$ e seja $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = F(\gamma(t))$. Daí,

$$g(t_0) = g'(t_0) = 0 \quad \text{e} \quad g''(t_0) = 2(1 - rk(t_0)).$$

Logo, para um dos círculos de (1-1) ter contato de ordem máxima ele tem que ter raio $r = \frac{1}{k(t_0)}$. \square

Da demonstração da Proposição 1.6 vemos que uma curva tem contato de, no mínimo, ordem três com seu círculo osculador.

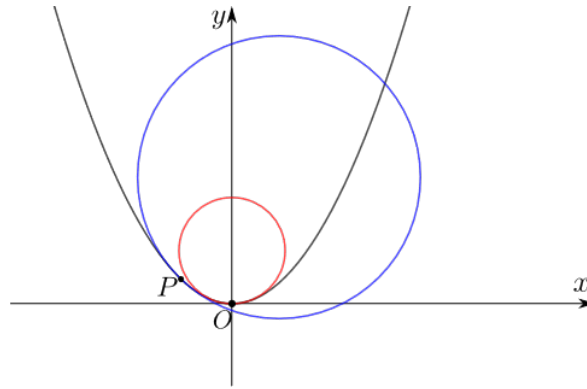


Figura 1.2: No ponto P o círculo osculador tem contato de ordem três com a parábola e na origem tem contato de ordem quatro.

Definição 1.7. Dizemos que uma curva γ é super osculada pelo seu círculo osculador em um ponto $\gamma(t_0)$ se, neste ponto, ela tem contato de ordem igual ou superior a quatro com seu círculo osculador.

1.1.2 Curvas e superfícies no \mathbb{R}^3

Definição 1.8. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $s \in I$. O número $k(s) = \|\gamma''(s)\|$ chama-se curvatura de γ em s .

Dada uma curva parametrizada por comprimento de arco $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, nos pontos onde $k(s) \neq 0$, fica bem definido pela equação $\gamma''(s) = k(s)n(s)$, um vetor unitário $n(s)$. Como $\gamma''(s)$ é normal a $\gamma'(s)$, $n(s)$ também é. O vetor $b(s) = t(s) \wedge n(s)$, produto vetorial de $t(s)$ por $n(s)$, é também unitário e normal a $t(s)$ e $n(s)$. O vetor $b(s)$ é chamada o binormal a γ em s .

Definição 1.9. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s tal que $\gamma''(s) \neq 0$, $s \in I$. O número $\tau(s)$ definido por $b'(s) = \tau(s)n(s)$ é chamado de torção de γ em s .*

O referencial $\{t, n, b\}$ é chamado de triedro de Frenet. Esse referencial satisfaz as equações

$$\begin{aligned} t' &= k n, \\ n' &= -k t - \tau b, \\ b' &= \tau n, \end{aligned}$$

chamadas de fórmulas de Frenet.

Sejam M uma superfície em \mathbb{R}^3 de classe C^k , $k \geq 2$, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável de classe C^r , $r \geq 2$, parametrizada por comprimento de arco. Suponhamos que exista uma vizinhança V_γ de $\gamma(I)$ em que M seja orientável e seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ uma parametrização tal que $V_\gamma \subset X(U)$. Podemos definir, em V_γ , o campo vetorial normal unitário N dado por

$$N(u, v) = \frac{X_u(u, v) \wedge X_v(u, v)}{\|X_u(u, v) \wedge X_v(u, v)\|},$$

onde X_u, X_v são as derivadas de X com relação a u e a v , respectivamente, e \wedge denota o produto vetorial. Seja $T(s) = \gamma'(s)$. Escrevendo $N(\gamma(s)) = N(s)$ podemos definir, em pontos de γ , o campo vetorial $(N \wedge T)(s) = N(s) \wedge T(s)$. O referencial $\{T(s), N(s), (N \wedge T)(s)\}$ é chamado de referencial de Darboux (ou triedro de Darboux) associado a γ . O triedro de Darboux satisfaz as equações

$$\begin{aligned} T'(s) &= k_g(s) (N \wedge T)(s) + k_n(s) N(s), \\ (N \wedge T)'(s) &= -k_g(s) T(s) + \tau_g(s) N(s), \\ N'(s) &= -k_n(s) T(s) - \tau_g(s) (N \wedge T)(s), \end{aligned}$$

onde $k_g(s)$ e $\tau_g(s)$ são a curvatura geodésica e a torção geodésica de γ no ponto $\gamma(s)$, $k_n(s)$ é a curvatura normal da superfície no ponto $\gamma(s)$ e na direção $T(s) = \gamma'(s)$ e $N(s)$ é o vetor unitário normal à superfície no ponto $\gamma(s)$.

Chamamos de equações de Gauss às equações:

$$\begin{aligned} X_{uu}(u, v) &= \Gamma_{11}^1(u, v) X_u(u, v) + \Gamma_{11}^2(u, v) X_v(u, v) + e(u, v) N(u, v), \\ X_{uv}(u, v) &= \Gamma_{12}^1(u, v) X_u(u, v) + \Gamma_{12}^2(u, v) X_v(u, v) + f(u, v) N(u, v), \\ X_{vv}(u, v) &= \Gamma_{22}^1(u, v) X_u(u, v) + \Gamma_{22}^2(u, v) X_v(u, v) + g(u, v) N(u, v), \\ N_u(u, v) &= \frac{Ff - Ge}{EG - F^2} X_u(u, v) + \frac{Fe - Ef}{EG - F^2} X_v(u, v), \\ N_v(u, v) &= \frac{Fg - Gf}{EG - F^2} X_u(u, v) + \frac{Ff - Eg}{EG - F^2} X_v(u, v) \end{aligned}$$

e de equações de Codazzi–Mainardi, às:

$$\begin{aligned} e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 &= e_v - f_u, \\ e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1) - g\Gamma_{12}^2 &= f_v - g_u, \end{aligned}$$

onde E, F, G são os coeficientes da primeira forma fundamental; e, f, g os da segunda forma fundamental e Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel.

Proposição 1.10. (*G. Monge*) *Seja M uma superfície regular de classe C^k , $k \geq 1$. Dado $p \in M$, existem abertos $U \subset \mathbb{R}^2$ e $U_p \subset M$, uma aplicação $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k tais que a aplicação $X : U \rightarrow M$ dada por $X(u, v) = (u, v, h(u, v))$, com $X(U) = U_p$, é uma parametrização local em M .*

1.2 Álgebra

1.2.1 Equações polinomiais

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, 1, \dots, n$, com $a_n \neq 0$.

Definição 1.11. *Dizemos que $x_0 \in \mathbb{R}$ é raiz da equação $f(x) = 0$ quando $f(x_0) = 0$. Caso $n - m > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$, dizemos que $x_0 \in \mathbb{R}$ é uma raiz com multiplicidade m de $f(x) = 0$, se existir $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $q(x) = b_{n-m} x^{n-m} + \dots + b_1 x + b_0$, $b_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, n - m$, tal que $f(x) = (x - x_0)^m q(x)$. Quando $m = 2$, dizemos que x_0 é uma raiz dupla.*

Proposição 1.12. *Um número real x_0 é raiz dupla da equação $f(x) = 0$ se, e só se,*

$$f(x_0) = f'(x_0) = 0.$$

Definição 1.13. *O conjunto*

$$\Delta = \{(a_n, \dots, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = 0 \text{ tem raiz com multiplicidade}\}$$

é denominado discriminante da equação $f(x) = 0$.

1.2.2 Equações polinomiais de terceiro grau

Dada uma equação

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

com $a_3 \neq 0$, aplicando a mudança de coordenadas $x = \frac{z-a_2}{3a_3}$, colocamos a equação acima na forma padrão

$$z^3 + 3Hz + G = 0, \quad (1-2)$$

onde

$$H = 3a_1a_3 - a_2^2 \text{ e } G = 27a_0a_3^2 - 9a_1a_2a_3 + 2a_2^3. \quad (1-3)$$

Esta mudança de coordenadas não afeta a natureza das raízes e torna a análise muito mais simples, a começar pelo conjunto discriminante de (1-2) que fica $\{(H, G) \in \mathbb{R}^2 : \delta = 0\}$, onde $\delta = G^2 + 4H^3$, em lugar do original $\{(a_3, a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^4 : \delta_0 = 0\}$ onde

$$\delta_0 = 27a_0^2a_3^2 - 18a_0a_1a_2a_3 + 4a_0a_2^3 + 4a_1^3a_3 - a_1^2a_2^2.$$

A Tabela 1.1 apresenta as possibilidades para o número de raízes reais para (1-2) em termos do sinal de H .

Tabela 1.1: Número de raízes reais versus sinal de H

Condições	Número máximo de raízes reais distintas
$H > 0$	1
$H = 0$	1
$H < 0$	3

Fonte: J. P. Dalton (1933, p.189)

Proposição 1.14. Quando $\delta > 0$, (1-2) possui uma única raiz real (as outras duas são complexas) e quando $\delta < 0$, (1-2) possui três raízes reais.

Proposição 1.15. As soluções de (1-2) são:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{-\frac{G}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\delta}} + \sqrt[3]{-\frac{G}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\delta}}, \\ x_2 &= e^{\frac{2\pi i}{3}} \sqrt[3]{-\frac{G}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\delta}} + e^{\frac{4\pi i}{3}} \sqrt[3]{-\frac{G}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\delta}}, \\ x_3 &= e^{\frac{4\pi i}{3}} \sqrt[3]{-\frac{G}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\delta}} + e^{\frac{2\pi i}{3}} \sqrt[3]{-\frac{G}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\delta}}. \end{aligned}$$

Para uma prova da Proposição 3.14 veja [31].

1.3 Análise e topologia

Para a compreensão desta seção é necessário o conhecimento do conceito de variedade diferenciável. Para o leitor ainda não familiarizado com este assunto sugiro uma leitura de [32], [33] ou do Capítulo 1 de [11]

Dada uma variedade diferenciável M , denotaremos por $T_x M$ o plano tangente a M em $x \in M$.

Definição 1.16. *Sejam M e N variedades de classe C^r , $r \geq 1$, e $S \subset N$ uma subvariedade de mesma classe. Dizemos que $f : M \rightarrow N$, de classe C^m , $m \geq 1$, é transversal a S em $x \in M$ se $f(x) \notin S$ ou $df_x(T_x M) + T_{f(x)} S = T_{f(x)} N$. Dizemos que f é transversal a S e escrevemos $f \pitchfork S$, se f for transversal a S em cada ponto $x \in M$.*

Teorema 1.17. *(Teorema de Transversalidade de Thom) Sejam M e N variedades de classe C^∞ e $S \subset N$ uma subvariedade. O conjunto $R = \{f \in C^\infty(M, N) : f \text{ é transversal a } S\}$ é residual em $C^\infty(M, N)$. Se S for fechada, então R é aberto.*

Veja [33] para uma prova do Teorema 1.17.

Definição 1.18. *Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Dizemos que $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ é um ponto de dobra de f se, através de uma mudança de coordenadas, podemos escrever $f(x, y) = (x, h(x, y))$, numa vizinhança de z_0 , onde $h_y(z_0) = 0$ e $h_{yy}(z_0) \neq 0$.*

Definição 1.19. *Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Dizemos que $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ é um ponto de cúspide de f se, através de uma mudança de coordenadas, podemos escrever $f(x, y) = (x, h(x, y))$, numa vizinhança de z_0 , onde $h_y(z_0) = h_{yy} = 0$, $h_{xy}(z_0) \neq 0$ e $h_{yyy}(z_0) \neq 0$.*

Definição 1.20. *Sejam M e N variedades de classe C^1 e $f : M \rightarrow N$ diferenciável. Dizemos que f é uma imersão quando, para cada $x \in M$, a diferencial $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ é injetiva.*

Definição 1.21. *Sejam M e N espaços métricos. Dizemos que $f : M \rightarrow N$ é própria se para todo compacto $K \subset N$, $f^{-1}(K)$ é um subconjunto compacto de M .*

Teorema 1.22. *Uma imersão $f : M \rightarrow N$ que é injetiva e própria é um difeomorfismo sobre sua imagem $f(M)$.*

Para uma prova do Teorema acima veja [25], página 17.

Teorema 1.23. *(Teorema de Whitney) Genericamente, uma aplicação $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ é, numa vizinhança de cada ponto $z \in \mathbb{R}^2$, estável e equivalente a uma das formas:*

- (i) $g(x, y) = (x, y)$ (regular);
- (ii) $g(x, y) = (x, y^2)$; (dobra);
- (iii) $g(x, y) = (x, xy - y - y^3)$ (cúspide).

Teorema 1.24. (Teorema de Preparação de Malgrange) Sejam $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, aberto com $(0, 0) \in U$, e

$$\begin{aligned} f : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto f(x, t) \end{aligned}$$

satisfazendo $f(0, 0) = \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(0, 0) = 0$, para $1 \leq k < n$, $n \in \mathbb{Z}$. Então existe uma função Q de classe C^∞ definida numa vizinhança V de $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e funções $a_0, \dots, a_{n-1} \in C^\infty(B, \mathbb{R})$, onde B é uma vizinhança da origem de \mathbb{R}^m , tais que $Q(0, 0) \neq 0$, $a_0(0) = \dots = a_{n-1}(0) = 0$ e

$$f(x, t) = \left(t^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)x^j \right) Q(x, t), \quad (x, t) \in V.$$

Teorema 1.25. (Forma Local das Submersões) Sejam M , uma variedade diferenciável de dimensão $m+n$, N uma variedade diferenciável de dimensão n , $f : M \rightarrow N$ de classe C^r , $r \geq 1$, e $x \in M$ tal que df_x é sobrejetiva. Existem vizinhanças $U_x, V_{f(x)}, U_0$ em \mathbb{R}^m , V_0 em \mathbb{R}^n e difeomorfismos $\phi : U_x \rightarrow U_0 \times V_0$ e $\psi : V_{f(x)} \rightarrow V_0$ tais que $\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x, y) = y$.

Dados $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, diremos que (x_1, x_2) está relacionado com (y_1, y_2) e escreveremos $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$, se existir $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $(x_1, x_2) = \lambda(y_1, y_2)$. Mostra-se que a relação \sim é uma relação de equivalência.

Definição 1.26. Chamamos de espaço projetivo real de dimensão um, denotado por $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, ao conjunto das classes de equivalência sob a relação \sim descrita acima, i.e., $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) := (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) / \sim$. Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, denotaremos sua classe por $(dx : dy)$.

O espaço $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ pode ser obtido identificando os pontos antípodas de \mathbb{S}^1 . Podemos, também, identificar $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ com a reta real estendida projetivamente $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, da seguinte forma: Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, se $x = 0$ identificamos sua classe com $p = \infty$ e se $x \neq 0$, identificamos sua classe com o número real $p = \frac{y}{x}$. Com a identificação de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ com $\widehat{\mathbb{R}}$, denotaremos a classe $(dx : dy)$ por $p = \frac{dy}{dx}$.

Seja M uma variedade compacta de dimensão n (Veja [30], [32] e [33], para o conceito de variedade compacta). O espaço $C^r(M, \mathbb{R}^m)$ das aplicações de classe C^r de M em \mathbb{R}^m , com as operações de adição e multiplicação por escalar:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

para $f, g \in C^r(M, \mathbb{R}^m)$, $x \in M$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, é um espaço vetorial. Consideremos uma cobertura finita de M por abertos V_1, \dots, V_s tal que cada V_i esteja contido no domínio de uma carta (x_i, U_i) com $x_i(U_i) = B_2(0)$ e $x_i(V_i) = B_1(0)$, onde $B_k(0)$ é a bola de centro na origem de \mathbb{R}^n e raio k . Para cada $f \in C^r(M, \mathbb{R}^m)$ seja $f_i = f \circ x_i^{-1} : B_2(0) \rightarrow \mathbb{R}^m$. Definimos

$$\|f\|_r := \max_i \sup_{u \in B_1(0)} \{ \|f_i(u)\|, \|df_i(u)\|, \dots, \|d^r f_i(u)\| \},$$

onde $\|w\|$, $w \in \mathbb{R}^n$ denota a norma de w em \mathbb{R}^n .

Proposição 1.27. *A aplicação $f \mapsto \|f\|_r$ é uma norma completa em $C^r(M, \mathbb{R}^m)$.*

Veja [37], página 37, para uma prova da proposição acima.

1.4 Teoria qualitativa para campos em variedades

Nesta seção M sempre denotará uma variedade diferenciável de classe C^r , $r \geq 1$.

1.4.1 Campos de vetores

Definição 1.28. *Se $M \subset \mathbb{R}^n$, um campo de vetores de classe C^r em M é uma aplicação $Y : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^r , que associa a cada ponto $y \in M$ um vetor $Y(y) \in T_y M$.*

Denotaremos por $\mathfrak{X}^r(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^r em M .

Definição 1.29. *Uma curva integral de $Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ por um ponto $y \in M$ é uma aplicação diferenciável $\gamma : I \rightarrow M$, onde I é um intervalo da reta contendo $0 \in \mathbb{R}$, tal que $\gamma(0) = y$ e $\gamma'(t) = Y(\gamma(t))$, $t \in I$.*

Proposição 1.30. *Se M for compacta, dado $Y \in \mathfrak{X}^r(M)$, existe uma aplicação $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ tal que $\phi(0, x) = x$ e $\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, x) = Y(\phi(t, x))$.*

A aplicação ϕ da Proposição 1.30 é chamada fluxo global de classe C^r para Y em M . Da proposição anterior temos que, dado $y \in M$, existe $\gamma_y : \mathbb{R} \rightarrow M$, definida por $\gamma_y(t) = \phi(t, y)$, uma curva integral de Y por y .

Corolário 1.31. *Suponhamos M compacta. Sejam $Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ o fluxo de Y . Para cada $t \in \mathbb{R}$, a aplicação $Y_t : M \rightarrow M$, dada por $Y_t(y) = \phi(t, y)$ é um difeomorfismo de classe C^r .*

Uma prova da Proposição 1.30 e do Corolário acima pode ser encontrada em [37].

Definição 1.32. Se $\gamma_y : I \rightarrow M$ é uma curva integral de $Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ por $y \in M$, o conjunto $\mathcal{O}_Y(y) = \{\gamma_x(t), t \in I\}$ é denominado de órbita de Y pelo ponto y .

Proposição 1.33. Dados $x, y \in M$ e $Y \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$, tem-se $\mathcal{O}_Y(x) = \mathcal{O}_Y(y)$ ou $\mathcal{O}_Y(x) \cap \mathcal{O}_Y(y) = \emptyset$.

Para uma prova da proposição acima veja [40], página 217.

Proposição 1.34. Sejam $Y \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$, e $y \in M$. Ocorre uma, e somente uma, das assertivas seguintes:

- (i) $\mathcal{O}_Y(y)$ é a imagem biunívoca de um intervalo da reta;
- (ii) $\mathcal{O}_Y(y) = \{y\}$;
- (iii) $\mathcal{O}_Y(y)$ é difeomorfa a um círculo.

Para uma prova da Proposição 1.34 veja [40], página 217.

Definição 1.35. Sejam $Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $y \in M$. Se $\mathcal{O}_Y(y) = \{y\}$, dizemos que y é uma singularidade ou que é um ponto singular de Y . Caso contrário, dizemos que y é um ponto regular de Y . Se $\mathcal{O}_Y(y)$ for difeomorfa a um círculo, dizemos que $\mathcal{O}_Y(y)$ é uma órbita fechada ou periódica.

Definição 1.36. Dois campos $Y, Z \in \mathfrak{X}^r(M)$ são ditos topologicamente equivalentes se existir um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$, tal que para cada $x \in M$ e $\delta > 0$, existe $\varepsilon_{x\delta} > 0$ de modo que, se $0 < t < \delta$, tem-se $h(Y_t(x)) = Z_{\tilde{t}}(h(x))$, para algum $0 < \tilde{t} < \varepsilon$.

Proposição 1.37. Sejam $Y, Z \in \mathfrak{X}^r(M)$ e h uma equivalência topológica entre Y e Z . Então:

- (i) $x \in M$ é uma singularidade de Y se, e somente se, $h(x)$ é uma singularidade de Z ;
- (ii) $\mathcal{O}_Y(x)$ é fechada se, e somente se, $\mathcal{O}_Z(h(x))$ é fechada.

Na Definição 1.36, t e \tilde{t} possuem o mesmo sinal. Em vista disto e da Proposição 1.37, dizemos que h leva órbitas de Y em órbitas de Z preservando a orientação das órbitas.

Definição 1.38. Suponhamos M compacta e $\mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$, munido da norma $\|\cdot\|_r$ definida na Seção 1.3. Dizemos que $Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ é estruturalmente estável se existir uma vizinhança \mathcal{V}_Y de Y em $\mathfrak{X}^r(M)$ tal que todo $Z \in \mathcal{V}_Y$ é topologicamente equivalente a Y .

Definição 1.39. *Sejam $Y, Z \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $y, z \in M$. Dizemos que Y e Z são localmente topologicamente equivalentes em y e z , respectivamente, se existirem vizinhanças V_y e V_z de y e z , respectivamente, em M , e um homeomorfismo $h : V_y \rightarrow V_z$ levando órbitas de Y em órbitas de Z preservando a orientação das mesmas.*

Definição 1.40. *Suponhamos M compacta e $\mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$, munido da norma $\|\cdot\|_r$ definida na Seção 1.3. Dizemos que $Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ é localmente estruturalmente estável em $x \in M$ se existir uma vizinhança \mathcal{V}_Y de Y em $\mathfrak{X}^r(M)$ tal que todo $Z \in \mathcal{V}_Y$ seja localmente topologicamente equivalente a Y em x .*

Teorema 1.41. *(Teorema do Fluxo Tubular) Sejam n a dimensão de M , $Y \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$, e $x \in M$ um ponto regular para Y . Consideremos $I = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; |x_i| < 1\}$ e C um campo em I definido por $C(x) = (1, 0, \dots, 0)$. Existem, uma vizinhança V_x de x em M e um difeomorfismo de classe C^r , $h : V_x \rightarrow I$, levando órbitas de Y em órbitas de C .*

Corolário 1.42. *Sejam $Y, Z \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$, e $y, z \in M$ pontos regulares para Y e Z , respectivamente. Então, Y e Z são topologicamente equivalentes em y e z , respectivamente.*

Corolário 1.43. *Se $y \in M$ é um ponto regular de $Y \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$, então, Y é localmente estruturalmente estável em y .*

Para uma prova do Teorema 1.41 e dos Corolários 1.42 e 1.43, veja [37], páginas de 68 à 70.

Definição 1.44. *Sejam $Y \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$ e $y \in M$ uma singularidade de Y . Dizemos que y é uma singularidade hiperbólica de Y se $DY_y : T_yM \rightarrow T_yM$ não possuir autovalor no eixo imaginário.*

Definição 1.45. *Sejam M uma variedade de dimensão $n = 2$, $Y \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$, $y \in M$ uma singularidade hiperbólica de Y e λ_1, λ_2 os autovalores de DY_y . Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1\lambda_2 < 0$, dizemos que y é uma sela hiperbólica e caso $\lambda_1\lambda_2 > 0$, dizemos que y é um nó. Se $\lambda_1 = a - ib$, $\lambda_2 = a + ib$, com $b \neq 0$, onde $i = \sqrt{-1}$, chamamos y de um foco.*

Teorema 1.46. *(Teorema de Hartman-Grobman) Sejam n a dimensão de M , $Y \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$, e $y \in M$ uma singularidade hiperbólica de Y . Então Y e DY_y são localmente topologicamente equivalentes em y e $0 \in \mathbb{R}^n = T_yM$, respectivamente.*

Teorema 1.47. *Sejam $Y \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$, e $y \in M$ uma singularidade hiperbólica de Y . Então, Y é localmente estruturalmente estável em y .*

Para uma demonstração dos Teoremas 1.46 e 1.47 veja [37], páginas de 120 à 123.

Definição 1.48. *Sejam M uma superfície de classe C^r em \mathbb{R}^3 , $Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ e ε um número real positivo. Seja $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ uma aplicação de classe C^r tal que, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $f'(t)$ e $Y(f(t))$ sejam linearmente independentes. Tomando $\Sigma = f((-\varepsilon, \varepsilon))$ com a topologia induzida, se a restrição $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$ for um homeomorfismo, dizemos que Σ é uma seção transversal a Y .*

Sejam M uma superfície regular em \mathbb{R}^3 , $Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $\mathcal{O}_Y(y)$ a órbita de Y por $y \in M$, um ponto regular de Y . Dado $z \in \mathcal{O}_Y(y)$, com $z = Y_t(y)$, $t > 0$, consideremos $f_j : (-\varepsilon_j, \varepsilon_j) \rightarrow \Sigma_j \subset M$, $j = 1, 2$, tais que $\varepsilon_j > 0$, $f_1(0) = y$, $f_2(0) = z$ e, Σ_1, Σ_2 , sejam seções transversais a Y . Do Teorema 1.41, para ε_1 suficientemente pequeno, para cada $x \in \Sigma_1$, existe $t_x > 0$ tal que $Y_{t_x}(x) \in \Sigma_2$ e $Y_t(x) \notin \Sigma_j$, $j = 1, 2$, para $0 < t < t_x$. Dessa forma fica definida uma aplicação $\pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$, por $\pi(x) = Y_{t_x}(x)$, $x \in \Sigma_1$. A aplicação π assim definida é chamada de transformação de Poincaré associada ao arco de trajetória $\{Y_t(y); 0 \leq t \leq t_y\}$. Caso $\mathcal{O}_Y(y)$ seja uma órbita periódica, podemos considerar $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ e, neste caso, π é chamada a transformação de Poincaré associada à órbita $\mathcal{O}_Y(y)$.

Teorema 1.49. *Se $Y \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$ então a aplicação π associada a uma órbita periódica, definida acima, é um difeomorfismo de classe C^r de uma vizinhança $V \subset \Sigma_1$ de y em $\pi(V) \subset \Sigma_2$.*

Definição 1.50. *Sejam M uma superfície de classe C^r , $r \geq 1$ em \mathbb{R}^3 , $Y \in \mathfrak{X}^s(M)$, $s \geq 1$, e $\mathcal{O}_Y(y)$ uma órbita periódica regular de Y . Dizemos que $\mathcal{O}_Y(y)$ é hiperbólica se $|\pi'(y)| \neq 1$.*

1.4.2 Campos de direções

Definição 1.51. *Um campo de linhas (ou campo de direções) em M é uma aplicação Y que associa a cada $y \in M$ um subespaço vetorial $Y(y)$ de T_yM , tal que $Y(y)$ é o subespaço trivial $\{0\}$ ou $Y(y)$ tem dimensão um. Um campo de linhas Y é dito de classe C^r se, para cada $y \in M$, existir uma vizinhança V_y de y em M e um campo de vetores $Z \in \mathfrak{X}^r(M)$, tal que*

$$Y(z) = \mathbb{R} \cdot Z(z), \forall z \in V_y.$$

Denotaremos por $\mathfrak{D}^r(M)$ o conjunto dos campos de direções de classe C^r em M .

Definição 1.52. Dado $Y \in \mathfrak{D}^r(M)$, dizemos que um ponto $y \in M$ é uma singularidade de Y se $Y(y) = \{0\}$.

Notemos que, dada M , se $Y \in \mathfrak{D}^r(M)$ e $Z \in \mathfrak{D}^r(M)$ são tais que $Y(z) = \mathbb{R} \cdot Z(z)$ para todo $y \in V \subset M$, então $y \in V$ é uma singularidade de Y se, e somente se, for singularidade de Z .

Definição 1.53. Sejam $Y \in \mathfrak{D}^r(M)$, $y \in M$ um ponto singular de Y , V_y uma vizinhança de y em M e $Z \in \mathfrak{X}^r(M)$ tal que $Y(z) = \mathbb{R} \cdot Z(z)$ qualquer que seja $z \in V_y$. Dizemos que y é uma singularidade hiperbólica de Y se y for singularidade hiperbólica de Z .

Definição 1.54. Sejam M uma variedade com dimensão dois, $Y \in \mathfrak{D}^r(M)$, $y \in M$ um ponto singular hiperbólico de Y , V_y uma vizinhança de y em M e $Z \in \mathfrak{X}^r(M)$ tal que $Y(z) = \mathbb{R} \cdot Z(z)$ qualquer que seja $z \in V_y$. Dizemos que y é uma sela, um foco ou um nó para Y conforme y for uma sela, um foco ou um nó, respectivamente, para Z .

Definição 1.55. Seja M uma variedade de classe C^r e dimensão m . Uma folheação \mathcal{F} de classe C^k e dimensão $n \leq m$, de M está definida por um atlas máximo $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \Lambda}$ que satisfaz:

- (i) Dado $i \in \Lambda$, $\varphi_i(U_i) = U_{i,1} \times U_{i,2} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ onde $U_{i,1}$ e $U_{i,2}$ são discos abertos;
- (ii) Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então a mudança de coordenadas

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

é de classe C^k e tem a forma

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)).$$

Definição 1.56. Fixado $c \in U_{i,2}$ a componente conexa $\varphi_i^{-1}(x, c)$ é denominada uma placa de \mathcal{F} . Um subconjunto conexo F , união maximal de placas de \mathcal{F} , é denominado uma folha de \mathcal{F} .

Teorema 1.57. Seja M uma variedade folheada por uma folheação \mathcal{F} de dimensão n e classe C^r . Cada folha F de \mathcal{F} possui uma estrutura de variedade C^r de dimensão n , onde os domínios das cartas são placas de \mathcal{F} .

Proposição 1.58. Sejam M uma superfície de classe C^1 em \mathbb{R}^3 , $Y \in \mathfrak{D}^r(M)$, $r \geq 1$, e $S = \{y \in M; y \text{ é singularidade de } Y\}$. Existe uma folheação \mathcal{F} de classe C^r e dimensão um em $M \setminus S$ tal que, para cada ponto x de uma folha qualquer F de \mathcal{F} , tem-se $T_x F = Y(x)$.

Para prova do Teorema 1.57 e da Proposição 1.58, veja o segundo capítulo de [9].

Definição 1.59. *Sejam M uma superfície em \mathbb{R}^3 , $Y \in \mathfrak{D}^r(M)$ e S o conjunto dos pontos singulares de Y . Dado $y \in M$, chamamos de órbita de Y por y ao conjunto $\mathcal{O}_Y(y)$ tal que:*

- (i) $\mathcal{O}_Y(y) = \{y\}$, se $y \in S$;
- (ii) $\mathcal{O}_Y(y) = F$, se $y \in F$, onde F é uma folha da folheação mencionada na Proposição 1.58.

Proposição 1.60. *Sejam M uma superfície em \mathbb{R}^3 e $Y \in \mathfrak{D}^r(M)$, $r \geq 1$, e $y \in M$. Ocorre uma, e somente uma, das assertivas seguintes:*

- (i) $\mathcal{O}_Y(y)$ é a imagem biunívoca de um intervalo da reta;
- (ii) $\mathcal{O}_Y(y) = \{y\}$;
- (iii) $\mathcal{O}_Y(y)$ é difeomorfa a um círculo.

Definição 1.61. *Dada uma superfície M em \mathbb{R}^3 , $Y \in \mathfrak{D}^r(M)$, $r \geq 1$, e $y \in M$, se $\mathcal{O}_Y(y)$ é difeomorfa a um círculo, dizemos que $\mathcal{O}_Y(y)$ é uma órbita periódica ou fechada.*

Definição 1.62. *Sejam M uma superfície em \mathbb{R}^3 e $Y, Z \in \mathfrak{D}^r(M)$. Dizemos que Y e Z são topologicamente equivalentes se existir um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ tal que para cada $y \in M$, tem-se $\mathcal{O}_Z(h(y)) = h(\mathcal{O}_Y(y))$.*

Definição 1.63. *Sejam $Y, Z \in \mathfrak{D}^r(M)$ e $y, z \in M$. Dizemos que Y e Z são localmente topologicamente equivalentes em y e z , respectivamente, se existirem vizinhanças V_y e V_z de y e z , respectivamente, em M , e um homeomorfismo $h : V_y \rightarrow V_z$ levando órbitas de Y em órbitas de Z .*

1.5 Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem implícitas

Seja $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ o espaço projetivo real de dimensão um. Uma equação diferencial ordinária implícita de primeira ordem é uma equação da forma

$$L(u, v, p) = 0, \quad (1-4)$$

onde $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^k , $k \geq 1$ e $p = \frac{dv}{du}$.

Usualmente, chamamos de uma solução de (1-4) a toda função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , onde I é um intervalo da reta, tal que

$$L(u, f(u), f'(u)) = 0, \forall u \in I.$$

No que segue e em todo o restante deste trabalho, não supomos que seja possível resolver (1-4) em p , isto é, nas questões que abordaremos, nem sempre existe uma função g de duas variáveis tal que (1-4) possa ser colocada na forma $\frac{dv}{du} = g(u, v)$.

No espaço $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ a equação (1-4) determina uma superfície $\mathcal{L} = L^{-1}(0)$ que chamaremos de superfície de Lie-Cartan.

Em cada ponto $(u, v, p) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ consideremos o plano de todos os vetores $\eta \in \ker(\omega)$, onde $\omega = dv - pdu$. Este plano é chamado de plano de contato e a 1-forma ω de forma de contato. A intersecção do plano de contato com o plano uv é uma reta que forma com o eixo u um ângulo de tangente p . O plano tangente a \mathcal{L}

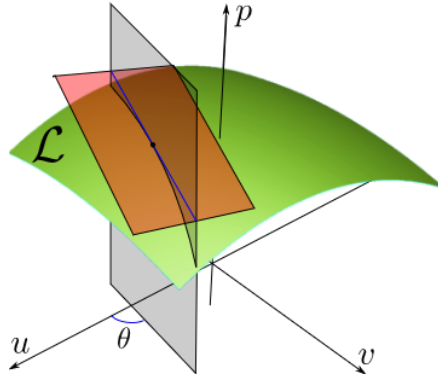


Figura 1.3: Plano de contato e plano tangente.

em um ponto (u, v, p) pode ou não coincidir com o plano de contato. Caso o plano tangente seja distinto do plano de contato a intersecção destes é uma reta tangente à \mathcal{L} em (u, v, p) . Com isto conseguimos definir um campo de direções tangente a \mathcal{L} que denotaremos por \mathcal{LC} .

Definição 1.64. Chamamos de conjunto crítico (ou de conjunto criminante) de (1-4) ao conjunto

$$\Sigma_L = \{(u, v, p) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}); L(u, v, p) = L_p(u, v, p) = 0\},$$

e chamamos de conjunto discriminante ao conjunto $\Gamma_L = \pi(\Sigma_L)$ onde $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por $\pi(u, v, p) = (u, v)$.

Proposição 1.65. A aplicação $\pi|_{\mathcal{L}}$ é localmente própria.

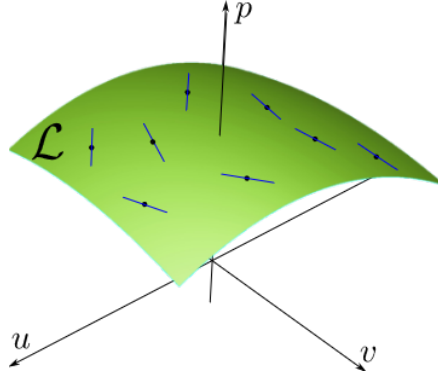


Figura 1.4: Campo de direções.

Demonstração. Suponhamos $L(0, 0, 0) = 0$ e seja n tal que $\frac{\partial^k L}{\partial p^k}(0, 0, 0) = 0$ para, $0 \leq k < n$ e $\frac{\partial^n L}{\partial p^n}(0, 0, 0) \neq 0$. Pelo Teorema da Preparação de Malgrange, existem um intervalo aberto I contendo o $0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, uma bola aberta B contendo $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ e funções $Q \in C^\infty(B \times I, \mathbb{R})$ e $a_{n-1}, \dots, a_0 \in C^\infty(B, \mathbb{R})$ tais que

$$L(u, v, p) = (p^n + a_{n-1}(u, v)p^{n-1} + \dots + a_1(u, v)p + a_0(u, v))Q(u, v, p)$$

e $Q(0, 0, 0) \neq 0$. A equação

$$p^n + a_{n-1}(u, v)p^{n-1} + \dots + a_1(u, v)p + a_0(u, v) = 0$$

possui no máximo n soluções que são funções contínuas. Logo, existe uma bola $B_1 \subseteq B$ de centro em $(0, 0)$ tal que o grau de recobrimento de π é menor ou igual a um certo inteiro $k \geq 1$. Logo, a pré-imagem de qualquer compacto $K \subset B_1$ pela π é ainda um compacto. \square

Da demonstração da Proposição 1.65, vemos que, dado um ponto (u_0, v_0) do plano, existe uma vizinhança V deste ponto tal que o grau de recobrimento de π em V é menor ou igual a um número $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Ou seja, por um ponto qualquer de V existem k órbitas de (1-4) por este ponto, com $0 \leq k \leq m$.

Teorema 1.66. *Consideremos a equação (1-4) e o espaço $C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}), \mathbb{R})$, com a topologia C^∞ de Whitney. Então, para um conjunto aberto e denso desse espaço, temos:*

- (i) $\mathcal{L} = L^{-1}(0)$ é vazio ou uma superfície regular;
- (ii) Σ_L é o vazio ou uma subvariedade regular de codimensão dois;
- (iii) $\pi|_{\mathcal{L} \setminus \pi^{-1}(\Gamma_L)} : \mathcal{L} \setminus \pi^{-1}(\Gamma_L) \rightarrow \pi(\mathcal{L}) \setminus \Gamma_L$ é um difeomorfismo local;
- (iv) Γ_L é o vazio ou um ponto ou a união de arcos regulares e pontos de cúspide do tipo (t^2, t^3) .

Demonstração. Da forma local das submersões e do Teorema de Transversalidade de Thom segue que \mathcal{L} é uma superfície regular para um subconjunto aberto e denso de $C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

Seja $\Psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\Psi(u, v, p) = (L(u, v, p), L_p(u, v, p))$. Notemos que $\Sigma_L = \Psi^{-1}(0, 0)$. Segue da forma local das submersões e do Teorema de Transversalidade de Thom que, para um subconjunto aberto e denso de $C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}), \mathbb{R}^2)$, Σ_L é uma subvariedade regular de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ de codimensão dois.

O item (iii) segue de π ser localmente injetiva e própria (Veja Proposição 1.65 e Teorema 1.22).

Por fim segue do item (ii) e do Teorema de Whitney em [44], que para um subconjunto aberto e denso de $C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}), \mathbb{R})$, temos $\pi(\Sigma_L) = \emptyset$ ou $\pi(\Sigma_L)$ é constituída de arcos regulares, dobras e cúspides. \square

Definição 1.67. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular suave tal que $\gamma(t) = (u(t), v(t))$. Dizemos que γ é uma solução (ou uma curva integral) de (1-4) se, para cada $t \in I$, existe $p(t) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tal que $L(u(t), v(t), p(t)) = 0$ e,*

$$v'(t) - p(t)u'(t) = 0 \quad \text{ou} \quad u'(t) - p(t)v'(t) = 0.$$

Dizemos que γ é uma solução regular de (1-4) se $\gamma(I) \cap \Gamma_L = \emptyset$ e dizemos que ela é uma solução crítica se $\gamma(I) \subset \Gamma_L$. Todo ponto $x \in \gamma(I)$ é chamado de ponto regular se γ for solução regular e de ponto crítico se γ for solução crítica. Chamamos o conjunto $\gamma(I)$ de uma órbita da equação (1-4) e, dado $x \in \gamma(I)$ dizemos que $\gamma(I)$ é uma órbita por x .

Definição 1.68. *Dizemos que uma solução $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de (1-4) é uma solução periódica se $\gamma(I)$ for um ponto ou uma curva fechada. Caso γ seja uma solução periódica diremos que $\gamma(I)$ é uma órbita periódica (ou que é uma órbita fechada).*

Definição 1.69. *Dado um subconjunto V do plano, chamamos de configuração de (1-4) em V ao conjunto de todas as órbitas de (1-4) em V .*

Proposição 1.70. *O campo*

$$LC = L_p \frac{\partial}{\partial u} + p L_p \frac{\partial}{\partial v} - (L_u + p L_v) \frac{\partial}{\partial p}$$

é tangente a \mathcal{L} e os pontos singulares de LC estão contidos no conjunto dos pontos de dobra de \mathcal{L} . Em cada componente conexa V de $\pi(\mathcal{L}) \setminus \Gamma_L$ o número de soluções de (1-4) com condição inicial $(u_0, v_0) \in V$ é igual ao grau de recobrimento de $\pi : \mathcal{L} \cap \pi^{-1}(V) \rightarrow V$ e as soluções regulares de (1-4) são as projeções, pela π , das curvas integrais de LC .

Demonstração. Como $\langle LC, (L_u, L_v, L_p) \rangle = 0$ segue que LC é tangente à $L^{-1}(0)$. Além disso, se $\gamma : I \rightarrow \mathcal{L}$, com $\gamma(t) = (u(t), v(t), p(t))$ é uma solução de LC , então

$$L(u(t), v(t), p(t)) = 0 \quad \text{e} \quad v'(t) - p(t)u'(t) = 0.$$

Ou seja, as curvas integrais de (1-4) são as projeções, em \mathbb{R}^2 , das curvas integrais de LC .

Como os pontos singulares de LC são dados por $L_p = L_u + pL_v = 0$, eles pertencem ao conjunto de dobras.

Segue da teoria clássica de equações diferenciais ordinárias que o número de soluções de (1-4) com condição inicial $(u_0, v_0) \in V$ é igual ao grau de recobrimento de $\pi : \mathcal{L} \cap \pi^{-1}(V) \rightarrow V$. \square

O campo LC é conhecido como campo de Lie-Cartan. Observemos que, dado $x \in \mathcal{L}$, tem-se

$$\mathcal{L}C(x) = \mathbb{R} \cdot LC(x). \quad (1-5)$$

Como LC é de classe C^∞ segue que $\mathcal{L}C$ também é de classe C^∞ .

Exemplo 1.71. Seja $L(u, v, p) = p^3 + u^2p^2 + (v^2 + 1)p$, onde $p = \frac{dv}{du}$. Como, $L(u, v, p) = 0$ se, e somente se, $p = 0$, temos $\mathcal{L} = \{(u, v, 0) : u, v \in \mathbb{R}\}$. Note que $L_p(u, v, 0) \neq 0$, qualquer que seja $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Logo, $\Sigma_L = \emptyset$ de modo que $\Gamma_L = \emptyset$. O campo LC é dado por

$$LC(u, v, p) = (3p^2 + 2u^2p + (v^2 + 1), 3p^3 + 2u^2p^2 + (v^2 + 1)p, -2(u + v)p^2)$$

e, como ele deve ser restrito à \mathcal{L} , temos $LC(u, v, p) = (v^2 + 1, 0, 0)$ cujas projeções das curvas integrais no plano uv coincidem com as da equação $\frac{dv}{du} = 0$, como era esperado.

Exemplo 1.72. Consideremos $L(u, v, p) = p^2 - u$. Note que, $\mathcal{L} = \{(p^2, v, p); v \in \mathbb{R} \text{ e } p \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})\}$ é um cilindro parabólico contendo o eixo v , $\Sigma_L = \{(0, v, 0); v \in \mathbb{R}\}$ e $\Gamma_L = \{(0, v); v \in \mathbb{R}\}$. O campo LC é dado por

$$LC(u, v, p) = (2p, 2p^2, 1).$$

Uma curva integral de LC por $(0, v_0, 0)$ é dada por $\varphi_{v_0}(t) = (t^2, \frac{2}{3}t^3 + v_0, t)$ com $t \in \mathbb{R}$. Logo as soluções de $L(u, v, p) = 0$ são dadas por $\gamma_{v_0}(t) = (t^2, \frac{2}{3}t^3 + v_0)$, $t \in \mathbb{R}$ (Veja Figura 1.6).

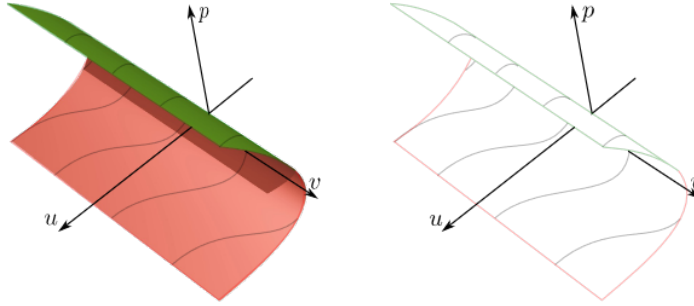


Figura 1.5: Superfície \mathcal{L} do Exemplo 1.72.

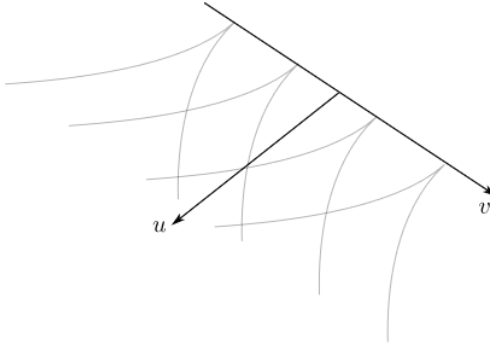


Figura 1.6: Soluções da equação diferencial do Exemplo 1.72.

Exemplo 1.73. Consideremos $L(u, v, p) = p^2 - v$. Note que, $\mathcal{L} = \{(u, p^2, p); u \in \mathbb{R} \text{ e } p \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})\}$ é um cilindro parabólico contendo o eixo u , $\Sigma_L = \{(u, 0, 0); u \in \mathbb{R}\}$ e $\Gamma_L = \{(u, 0); u \in \mathbb{R}\}$. O campo LC é dado por

$$LC(u, v, p) = (2p, 2p^2, p).$$

Note que todo ponto do eixo u é uma singularidade de LC. Associado a LC temos o sistema

$$\frac{du}{dt} = 2p, \quad \frac{dv}{dt} = 2p^2, \quad \frac{dp}{dt} = p.$$

Consideremos o problema de valor inicial

$$\frac{du}{dt} = 2p, \quad \frac{dv}{dt} = 2p^2, \quad \frac{dp}{dt} = p, \quad u(0) = u_0, \quad v(0) = p_0^2, \quad p(0) = p_0 \neq 0.$$

A solução do PVI acima é $\varphi(t) = (u(t), v(t), p(t))$, onde $u(t) = u_0 + 2p(t)$, $v(t) = p(t)^2$, $p(t) = p_0 e^t$, com $t \in \mathbb{R}$. Assim, as soluções da equação $L(u, v, p) = 0$ são dadas por $\gamma(p) = (u_0 + 2p, p^2)$, $p \in \mathbb{R}$ (Veja a Figura 1.8 para ilustração).

Exemplo 1.74. (Equação de Clairaut) A equação diferencial ordinária, não linear, $y(x) = xp + f(p)$, onde $p = \frac{dy}{dx}$, é conhecida como equação de Clairaut. Consideremos a equação diferencial implícita $L(x, y, p) = xp + f(p) - y = 0$, onde f é uma função suave. O conjunto crítico é $\Sigma_L = \{(-f'(p), -pf'(p) + f(p), p); p \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})\}$,

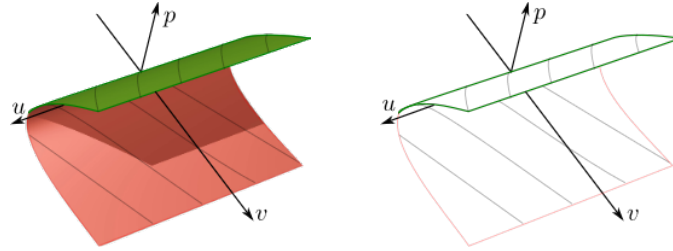


Figura 1.7: Superfície \mathcal{L} do Exemplo 1.73.

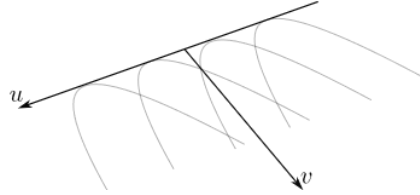


Figura 1.8: Soluções da equação diferencial do Exemplo 1.73.

a curva discriminante $\Gamma_L = \{(-f'(p), -pf'(p) + f(p)); p \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})\}$ e $LC(x, y, p) = (x + f'(p), px + pf'(p), 0)$. Como vemos cada curva integral do campo LC está contida em um plano $p = c$, onde c é uma constante. Assim, uma curva integral de LC é a intersecção de um plano $p = c$ com a superfície $\mathcal{L} = L^{-1}(0)$. Como para pertencer a \mathcal{L} , devemos ter $y = px + f(p)$, segue que, uma curva integral de uma equação de Clairaut é uma reta $y = cx + c_1$, onde $c = p$ e $c_1 = f(c)$.

Exemplo 1.75. Consideremos a equação diferencial implícita de Clairaut $L(x, y, p) = px + \frac{1}{2}p^2 - y$. Temos $\Gamma_L = \{(-p, -\frac{1}{2}p^2); p \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})\}$ de modo que sua equação cartesiana é $y = -\frac{1}{2}x^2$.

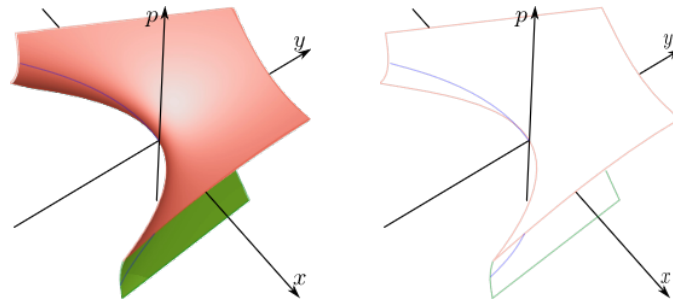


Figura 1.9: Superfície \mathcal{L} do Exemplo 1.75.

Exemplo 1.76. Consideremos a equação diferencial implícita de Clairaut $L(x, y, p) = px + \frac{1}{3}p^3 - y$. Do Exemplo 1.74, o conjunto crítico é $\Sigma_L = \{(-p^2, -\frac{2}{3}p^3, p) : p \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})\}$ de modo que a curva discriminante é $\Gamma_L = \{(-p^2, -\frac{2}{3}p^3) : p \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})\}$. Note que podemos parametrizar a curva discriminante por $\gamma(t) = (-t^2, -\frac{2}{3}t^3)$, $t \in \mathbb{R}$. Ou seja, Γ_L tem um ponto de cúspide na origem.

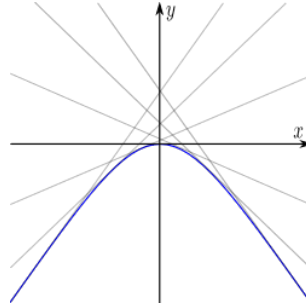


Figura 1.10: Soluções da equação diferencial do Exemplo 1.75.

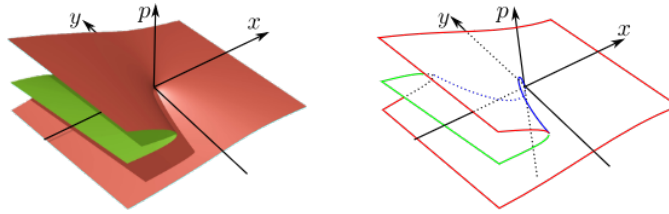


Figura 1.11: Superfície \mathcal{L} para o Exemplo 1.76.

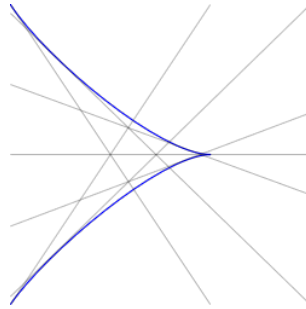


Figura 1.12: Soluções da equação diferencial do Exemplo 1.76.

Definição 1.77. Um ponto do conjunto crítico é chamado um ponto de tangência com o plano de contato, se o vetor tangente à Σ_L estiver contido no plano de contato.

No Exemplo 1.73, todo ponto de Σ_L é um ponto de tangência com o plano de contato, já no Exemplo 1.72 não há ponto de tangência com o plano de contato.

Definição 1.78. Consideremos a aplicação $\Psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\Psi(u, v) = (L(u, v, p), L_p(u, v, p))$. Dizemos que um ponto de $(u_0, v_0, p_0) \in \Sigma_L$ é regular (ou um ponto singular regular da equação $L = 0$), se não for um ponto de tangência com o plano de contato e se a matriz $d\Psi_{(u_0, v_0, p_0)}$ tem posto dois.

No Exemplo 1.72, $d\Psi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ em Σ_L e como não há pontos de tangências com o plano de contato, todo ponto de Σ_L é um ponto singular regular neste exemplo.

Teorema 1.79. (*M. Cibrario, [14]*) Consideremos $(u_0, v_0, p_0) \in \Sigma_L$ um ponto singular regular da equação diferencial $L(u, v, p) = 0$. Existe um difeomorfismo de uma vizinhança de (u_0, v_0) numa vizinhança de $(0, 0)$ transformando a equação $L(u, v, p) = 0$ na forma $P^2 = X$, onde $P = \frac{dY}{dX}$.

Demonstração. Veja [4], página 27. □

Teorema 1.80. (*Lak Dara, [16]*) Suponhamos que, no ponto (u_0, v_0, p_0) , vale $L_p = L_{pp} = 0$, $L_u L_{ppp}(L_u L_{vp} - L_v L_{up}) \neq 0$ e seja:

$$\rho = \begin{vmatrix} L_u & L_v \\ L_{up} & L_{vp} \end{vmatrix} = L_u L_{vp} - L_v L_{up}.$$

Se $\rho(u_0, v_0, p_0) > 0$ as projeções das curvas integrais num vizinhança de (u_0, v_0, p_0) são homeomorfas as da Figura 1.13(a) e se $\rho(u_0, v_0, p_0) < 0$, às da Figura 1.13(b).

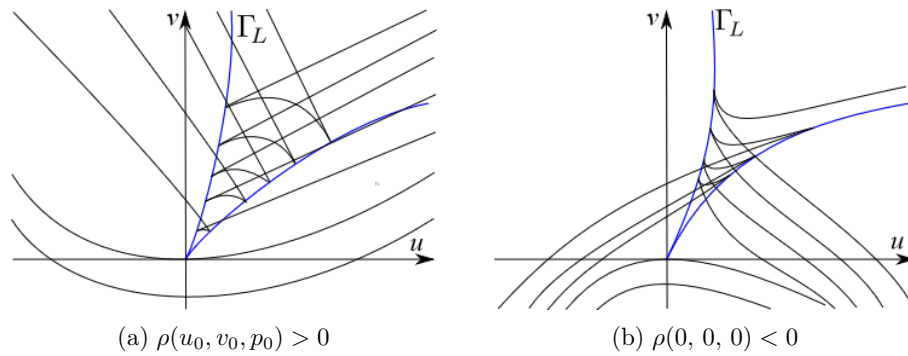


Figura 1.13: Ilustração do Teorema 1.80.

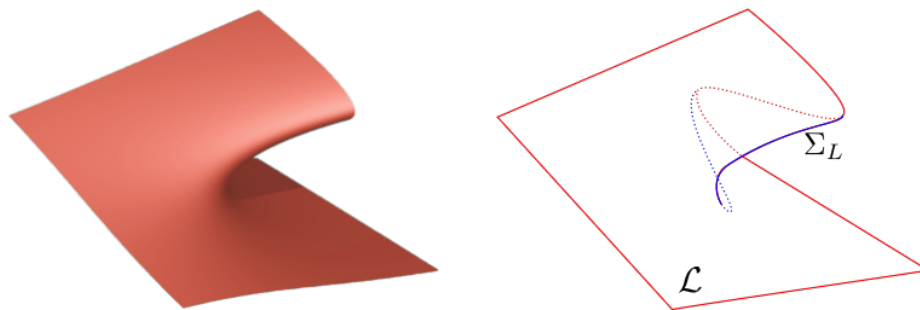


Figura 1.14: Superfície de Lie-Cartan para o caso do Teorema 1.80.

Teorema 1.81. (*J. W. Bruce, [8]*) Se $L_p(u_0, v_0, p_0) = 0$ e $L_{pp}(u_0, v_0, p_0) \neq 0$, então as curvas integrais próximas a (u_0, v_0) são difeomorfas a cúspides.

Demonstração. Para uma prova veja [8]. \square

Teorema 1.82. (A. A. Davydov, [4, 17, 18]) *Seja $(u_0, v_0, p_0) \in \Sigma_L$ tal que o plano de contato é tangente a \mathcal{L} neste ponto, Σ_L é suave numa vizinhança V de (u_0, v_0, p_0) e em $V \setminus \{(u_0, v_0, p_0)\}$ o plano de contato não é tangente a Σ_L . Então, a equação $L(x, v, p) = 0$ é localmente redutível à forma normal $y = (p + kx)^2$, via um difeomorfismo do plano, onde $k = -1$ ou $k = \frac{1}{9}$ ou $k = \frac{1}{4}$. Além disso, o campo $LC = L_p \frac{\partial}{\partial u} + pL_p \frac{\partial}{\partial v} - (L_u + pL_v) \frac{\partial}{\partial p}$ tem genericamente, em (u_0, v_0, p_0) , uma singularidade do tipo sela, nó ou foco. Caso seja sela $k = -1$, se for um nó $k = \frac{1}{9}$ e foco $k = \frac{1}{4}$.*

Demonstração. Veja [17] teoremas 6 e 7. \square

Proposição 1.83. (A. A. Davydov, [4, 17, 18]) *As projeções, no plano uv , das curvas integrais de LC numa vizinhança de uma sela, nó e de um foco são homeomorfas as apresentadas nas Figura 1.16, sendo da esquerda para direita a sela, o nó e o foco, respectivamente.*

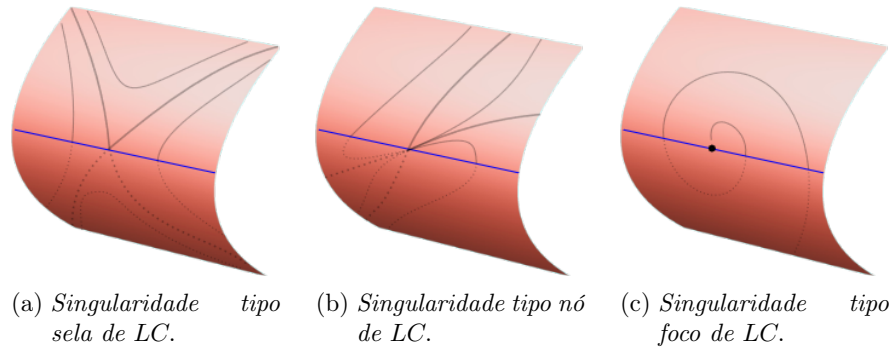


Figura 1.15: Curvas integrais de LC na vizinhança de uma sela, nó e foco.

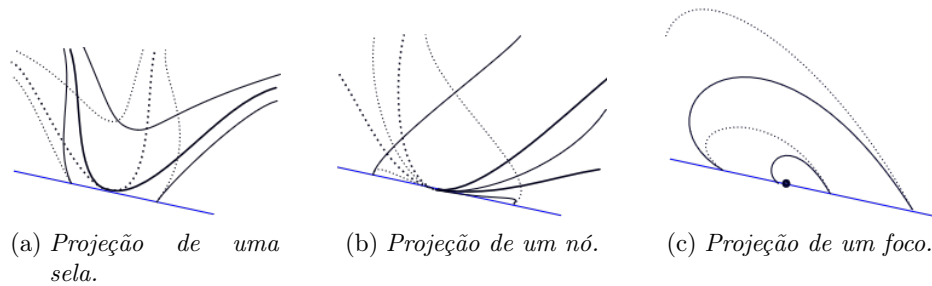


Figura 1.16: Projeções das curvas integrais de LC na vizinhança de uma sela, um nó e um foco.

Demonstração. Veja [17] teoremas 6 e 7, ou o capítulo 6 de [24]. \square

Uma classe especial de equações diferenciais binárias cúbicas

2.1 Introdução:

Toda equação diferencial que pode ser escrita na forma

$$\sum_{0 \leq j \leq n} A_j du^j dv^{n-j} = 0, \quad (2-1)$$

onde A_j são funções nas variáveis u, v , é dita uma equação diferencial binária de grau n . Se $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$L(u, v, p) = \sum_{0 \leq j \leq n} A_j(u, v) p^j,$$

para $p = \frac{dv}{du}$, as soluções de (2-1) são as soluções da equação diferencial implícita $L(u, v, p) = 0$. Da demonstração da Proposição 1.65, segue que, por cada ponto regular da equação (2-1) passa k soluções com $1 \leq k \leq n$. Temos, portanto, n famílias de soluções. No nosso caso de interesse, que são as binárias de grau três, por um ponto regular passa uma ou três soluções.

São exemplos de equações diferenciais binárias de grau dois a equação diferencial de linhas de curvaturas principais e a de linhas assintóticas e, a equação

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)^2 = \frac{2k(x)^2}{m}(E - U(x)),$$

citada na introdução da Seção 1.5.

Uma classe importante de equações diferenciais binárias é a das equações

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = p(y), \quad (2-2)$$

onde p é uma função racional. No caso particular em que $p(y) = 1 \pm y^2$, a equação (2-2) define as funções trigonométricas inversas, arcsen e arccos.

O estudo das equações diferenciais binárias de grau dois

$$a(x, y)dx^2 - 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dy^2 = 0, \quad (2-3)$$

é importante na compreensão das soluções da equação diferencial parcial

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

onde a, b e c são funções diferenciáveis, F é uma função dada e u uma função desconhecida (veja, por exemplo, [18]). Segundo A. A. Davydov, “estas equações desempenham papel importante em teoria de equações diferenciais parciais”([18], p.7).

Um detalhe intrigante é, se $c = -a$, a equação (2-3) é equivalente a

$$\text{Im}[(-b + ia)(dx + idy)^2] = 0,$$

onde $i^2 = -1$ e $\text{Im}(x + iy) = y$, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$. O mesmo ocorre com a equação diferencial das linhas de curvaturas principais, que nas coordenadas de Bonnet toma a forma $\text{Im}[(a + ib)(dx + idy)^2] = 0$. Além disso, a equação diferencial das linhas de curvatura axial pode ser escrita na forma $\text{Im}[(a + ib)(dx + idy)^4] = 0$. Isso nos motiva investigar qual significado geométrico possui as equações da forma $\text{Im}[(a + ib)(dx + idy)^3] = 0$.

Neste capítulo apresentamos um estudo inicial que realizamos da classe de equações diferenciais binárias da forma

$$w = \text{Im} [(a + ib) (du + idv)^3] = 0$$

onde $a, b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, são funções de classe C^∞ . Estudamos o comportamento qualitativo genérico local, deduzimos uma expressão para a aplicação de Poincaré e classificamos as singularidades no infinito.

Com cálculos simples vemos que esta equação pode ser escrita na forma

$$w = -a dv^3 - 3b dv^2 du + 3a dv du^2 + b du^3 = 0, \quad (2-4)$$

ou seja uma equação diferencial binária cúbica. Seja $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$L(u, v, p) = -a(u, v) p^3 - 3b(u, v) p^2 + 3a(u, v) p + b(u, v).$$

Lembremos que Σ_L e Γ_L , são o conjunto crítico e o conjunto discriminante, respectivamente, definidos no Capítulo 1 para $L(u, v, p) = 0$.

2.2 Estudo local

Como $L(u, v, p) = 0$, é uma equação polinômial de grau 3 em p , dado um ponto (\bar{u}, \bar{v}) do plano tal que $a(\bar{u}, \bar{v})^2 + b(\bar{u}, \bar{v})^2 \neq 0$, a equação $L(\bar{u}, \bar{v}, p) = 0$ terá, genericamente, $n \in \{1, 3\}$ soluções reais. Assim, teremos, por (\bar{u}, \bar{v}) , uma ou três soluções que determinam folheações f_1, f_2, f_3 do plano.

Definição 2.1. *Um ponto (\bar{u}, \bar{v}) do plano tal que $a(\bar{u}, \bar{v}) = b(\bar{u}, \bar{v}) = 0$ será chamado singularidade ou ponto singular da equação $L = 0$. Sejam $\mathcal{S}_L = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; a(u, v) = b(u, v) = 0\}$ e \mathcal{F} o conjunto de todas as folheações de (2-1). Chamaremos de configuração de (2-1) ao conjunto $\mathcal{C} = \mathcal{F} \cup \mathcal{S}_L$.*

Como $L(u, v, p) = L_p(u, v, p) = 0$ para qualquer que seja $(u, v) \in \mathcal{S}_L$, temos que $\mathcal{S}_L \subset \Gamma_L$. Afirmamos que $\mathcal{S}_L = \Gamma_L$. Com efeito, se existisse $(u, v, p) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tal que $a(u, v) \neq 0$, e $L(u, v, p) = L_p(u, v, p) = 0$, teríamos

$$(a(u, v)^2 + b(u, v)^2) \left(-b(u, v) \pm \sqrt{a(u, v)^2 + b(u, v)^2} \right) = 0$$

e daí seria $0 = a(u, v) \neq 0$, o que é um absurdo.

2.2.1 Soluções regulares

Nesta seção descrevemos o comportamento qualitativo numa vizinhança de um ponto regular e apresentamos alguns exemplos construídos utilizando a Proposição 2.2 a seguir.

Proposição 2.2. *O menor ângulo formado pelas retas tangentes às curvas integrais de $w = 0$ por um ponto regular é $\frac{\pi}{3}$ rad. Em outras palavras, em um ponto regular, as retas tangentes as três folheações dividem o plano uv em seis ângulos de 60° .*

Demonstração. Seja (\tilde{u}, \tilde{v}) um ponto regular. Então $a(\tilde{u}, \tilde{v}) \neq 0$ ou $b(\tilde{u}, \tilde{v}) \neq 0$. Suponhamos $a(\tilde{u}, \tilde{v}) \neq 0$. Por questão de simplificação, escreveremos $a(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{a}$ e $b(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{b}$. Aplicando a mudança de variáveis da Seção 1.2.2, vemos que a equação

$$-\tilde{a}p^3 - 3\tilde{b}p^2 + 3\tilde{a}p + \tilde{b} = 0 \tag{2-5}$$

é equivalente a

$$z^3 + 3Hz + G = 0, \tag{2-6}$$

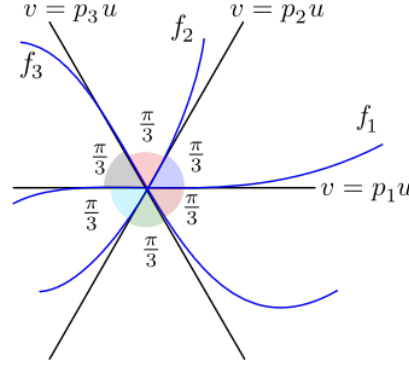


Figura 2.1: Ilustração da Proposição 2.2.

onde $H = -9(\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2)$, $G = -54\tilde{b}(\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2)$ e $z = -3\tilde{b} - 3\tilde{a}p$. Como $\delta = G^2 + 4H^3 = -2916\tilde{a}^2(\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2)^2$ da Proposição 1.14, a equação (2-6) possui três raízes reais. Da Proposição 1.15 as raízes de (2-6) são:

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 \sqrt[3]{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2} \left(\sqrt[3]{\tilde{b} + \sqrt{-\tilde{a}^2}} + \sqrt[3]{\tilde{b} - \sqrt{-\tilde{a}^2}} \right) \\ z_2 &= 3 \sqrt[3]{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2} \left(e^{\frac{2\pi}{3}i} \sqrt[3]{\tilde{b} + \sqrt{-\tilde{a}^2}} + e^{\frac{4\pi}{3}i} \sqrt[3]{\tilde{b} - \sqrt{-\tilde{a}^2}} \right) \\ z_3 &= 3 \sqrt[3]{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2} \left(e^{\frac{4\pi}{3}i} \sqrt[3]{\tilde{b} + \sqrt{-\tilde{a}^2}} + e^{\frac{2\pi}{3}i} \sqrt[3]{\tilde{b} - \sqrt{-\tilde{a}^2}} \right). \end{aligned}$$

Como as raízes de (2-5) são $p_j = -\frac{z_j + 3\tilde{b}}{3\tilde{a}}$, $j = 1, 2, 3$, temos

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &= \frac{\left(1 - e^{\frac{2\pi}{3}i}\right) \sqrt[3]{(\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2)(\tilde{b} + \sqrt{-\tilde{a}^2})} + \left(1 - e^{\frac{4\pi}{3}i}\right) \sqrt[3]{(\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2)(\tilde{b} - \sqrt{-\tilde{a}^2})}}{\tilde{a}} \\ &= \frac{\left[\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \sqrt[3]{\tilde{b} + \sqrt{-\tilde{a}^2}} + \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \sqrt[3]{\tilde{b} - \sqrt{-\tilde{a}^2}}\right] \sqrt[3]{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2}}{\tilde{a}} \\ &= \frac{\sqrt{3} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right) \sqrt[3]{\tilde{b} + \sqrt{-\tilde{a}^2}} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) \sqrt[3]{\tilde{b} - \sqrt{-\tilde{a}^2}}\right] \sqrt[3]{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2}}{\tilde{a}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 1 + p_1 p_2 &= \frac{z_1 z_2 + 3\tilde{b}(z_1 + z_2) + 9\tilde{b}^2}{\tilde{a}^2} \\ &= \frac{\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right) \sqrt[3]{\tilde{b} + \sqrt{-\tilde{a}^2}} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) \sqrt[3]{\tilde{b} - \sqrt{-\tilde{a}^2}}\right] \sqrt[3]{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2}}{\tilde{a}}. \end{aligned}$$

Como p_j é o coeficiente angular da reta tangente a j -ésima solução por (\tilde{u}, \tilde{v}) , se θ for o menor ângulo formado pelas retas tangentes a primeira e a segunda solução, então

$$\operatorname{tg}(\theta) = \left| \frac{p_2 - p_1}{1 + p_1 p_2} \right| = \sqrt{3}.$$

Com cálculos idênticos, mostra-se que

$$\left| \frac{p_3 - p_1}{1 + p_1 p_3} \right| = \left| \frac{p_3 - p_2}{1 + p_2 p_3} \right| = \sqrt{3}.$$

Ou seja, $\theta = \frac{\pi}{3}$ rad.

Caso $a(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0$, temos $b(\tilde{u}, \tilde{v}) \neq 0$ e a prova é a mesma somente trocando a equação (2-5) pela equação $-\tilde{a} - 3\tilde{b}q + 3\tilde{a}q^2 + \tilde{b}q^3 = 0$ e, resolvendo em q , o coeficiente \tilde{b} aparecerá no denominador. \square

A Proposição 2.2 nos inspira uma técnica de construir exemplos, com certas características, que detalharemos a seguir.

Consideremos duas funções $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ quaisquer e o campo de vetores X tal que $X(u, v) = f(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + g(u, v) \frac{\partial}{\partial v}$. Associada a X temos a 1-forma $w_1 = f dv - g du$. Seja R_θ a matriz de rotação de ângulo θ . Os campos $R_{\frac{\pi}{3}}X$ e $R_{(-\frac{\pi}{3})}X$ são tais que suas trajetórias interseam as de X segundo ângulo de $\frac{\pi}{3}$ rad e $\frac{2\pi}{3}$ rad respectivamente. Note que as 1-formas associadas aos campos $R_{\frac{\pi}{3}}X$ e $R_{(-\frac{\pi}{3})}X$ são, respectivamente:

$$w_{(\frac{\pi}{3})} = \frac{1}{2} (f + \sqrt{3}g) dv - \frac{1}{2} (\sqrt{3}f + g) du \quad \text{e} \quad w_{(-\frac{\pi}{3})} = \frac{1}{2} (f + \sqrt{3}g) dv - \frac{1}{2} (g - \sqrt{3}f) dv.$$

Considerando $w = w_1 w_{(\frac{\pi}{3})} w_{(-\frac{\pi}{3})}$, temos

$$w = -a dv^3 - 3b dv^2 du + 3a dv du^2 + b du^3,$$

onde

$$a(u, v) = -\frac{1}{4} f(u, v) (f(u, v)^2 - 3g(u, v)^2) \quad \text{e} \quad b(u, v) = -\frac{1}{4} g(u, v) (g(u, v)^2 - 3f(u, v)^2).$$

Ou seja, w é uma forma diferencial cúbica como a da equação (2-4).

Exemplo 2.3. Para $f(u, v) = 1$ e $g(u, v) = v$, temos

$$w = -\frac{1}{4}v(v^2 - 3)du^3 + 3\left(\frac{3}{4}v^2 - \frac{1}{4}\right)dvdu^2 + \frac{3}{4}v(v^2 - 3)dv^2du - \left(\frac{3}{4}v^2 - \frac{1}{4}\right)dv^3 = 0.$$

Temos um esboço das curvas integrais, numa vizinhança da origem na Figura 2.2.

2.2.2 Singularidades

Nesta seção e na próxima estudaremos a configuração da equação diferencial (2-4) numa vizinhança de um dado ponto singular. Suporemos, sempre, que esta

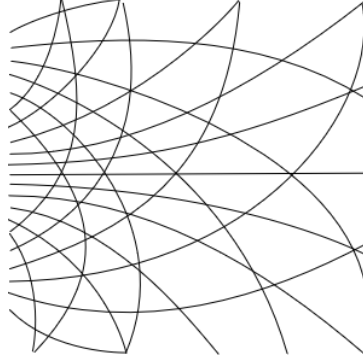


Figura 2.2: *Curvas integrais do Exemplo 2.3.*

singularidade é a origem de modo que tomaremos a e b na forma

$$a(u, v) = \sum_{1 \leq j+k} a_{jk} u^j v^k \quad \text{e} \quad b(u, v) = \sum_{2 \leq j+k} b_{jk} u^j v^k,$$

onde $a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{R}$. Notemos que, para um disco V com centro em $(0, 0)$ suficientemente pequeno $V \cap \Gamma_L = \{(0, 0)\}$. Como

$$L_u(0, 0, 0) = b_{10}, \quad L_v(0, 0, 0) = b_{01} \quad \text{e} \quad L_p(0, 0, 0) = 0,$$

para garantir que a superfície de Lie-Cartan \mathcal{L} seja regular numa vizinhança da origem deveremos ter $b_{10} \neq 0$ ou $b_{01} \neq 0$. Como,

$$\varphi(p) = (p^3 - 3p)(a_{10} + a_{01}p) + (3p^2 - 1)(b_{10} + b_{01}p),$$

para $p \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $a_{10} + a_{01}p \neq 0$, temos:

$$\varphi(p) = 0 \Leftrightarrow \frac{p^3 - 3p}{3p^2 - 1} + \frac{b_{10} + b_{01}p}{a_{10} + a_{01}p} = 0.$$

Sejam $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $\varphi_1(p) = \frac{p^3 - 3p}{3p^2 - 1}$ e $\varphi_2(p) = -\frac{b_{10} + b_{01}p}{a_{10} + a_{01}p}$. A aplicação φ_1 possui duas assíntotas verticais como mostra a Figura 2.3. Já o gráfico de φ_2 possui uma das formas apresentadas na Figura 2.4. Note que a intersecção dos gráficos de φ_1 e φ_2 é não vazia. Dessa forma, a equação $\varphi(p) = 0$, possui pelo menos duas soluções reais. Podemos supor, sem perda de generalidades, que uma delas é $p_1 = 0$. Como $\varphi(0) = -b_{10}$, isto equivale a supor $b_{10} = 0$. Fazendo $b_{10} = 0$, obtemos $\varphi(p) = p g(p)$, onde

$$g(p) = (p^2 - 3)(a_{10} + a_{01}p) + b_{01}(3p^2 - 1).$$

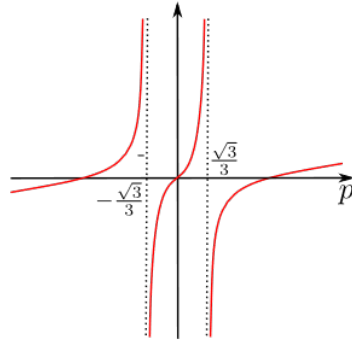


Figura 2.3: Esboço do gráfico de φ_1 .

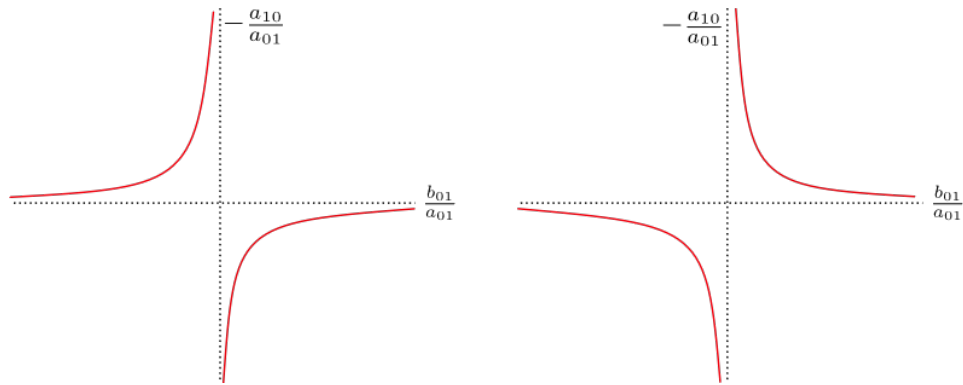


Figura 2.4: Esboço do gráfico de φ_2 , genericamente.

Supondo $b_{01} \neq 0$, consideremos $A = \frac{a_{10}}{b_{01}}$ e $B = \frac{a_{01}}{b_{01}}$ e, sejam:

$$g_1(p) = \frac{1 - 3p^2}{p^2 - 3} \quad \text{e} \quad g_2(p) = A + Bp.$$

Para $p \neq \pm\sqrt{3}$, temos $g(p) = 0$ se, e só se, $g_2(p) = g_1(p)$. O gráfico de g_1 está na Figura 2.5. Para que $\varphi(p) = 0$ tenha somente mais uma raiz real além de $p_1 = 0$, é

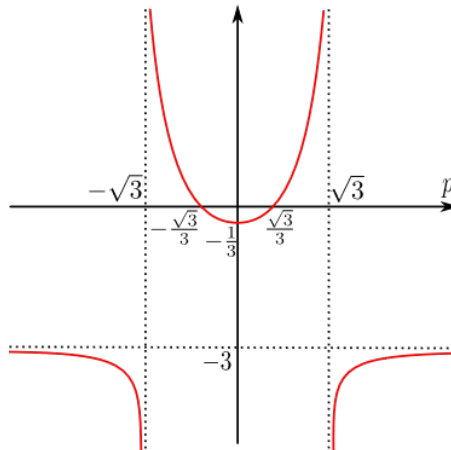


Figura 2.5: Esboço do gráfico de g_1 .

necessário e suficiente que o gráfico de g_2 interseste o de g_1 em um único ponto. De modo geral, $\varphi(p) = 0$ terá n raízes, $n = 1, 2, 3, 4$, se e somente se, a intersecção dos gráficos de g_1 e g_2 tiver $n - 1$ pontos.

Naturalmente que as curvas integrais de $w = 0$ são as mesmas de $\frac{1}{b_{10}} w = 0$. Dessa forma, por uma questão de simplificação, consideramos em lugar da equação (2-4), a equação

$$\bar{w} = -\bar{a} dv^3 - 3\bar{b} dv^2 du + 3\bar{a} dv du^2 + \bar{b} du^3 = 0, \quad (2-7)$$

onde

$$\bar{a}(u, v) = Au + Bv + c(u, v) \quad \text{e} \quad \bar{b}(u, v) = v + d(u, v),$$

sendo c e d funções em u e v de classe C^∞ tais que $c(0, 0) = d(0, 0) = c_u(0, 0) = c_v(0, 0) = d_u(0, 0) = d_v(0, 0) = 0$. Assim,

$$g(p) = (p^2 - 3)(A + Bp) + (3p^2 - 1),$$

e a matriz jacobiana de LC em um ponto $(0, 0, p)$ fica

$$JLC_{(0,0,p)} = \begin{bmatrix} 3A(1-p^2) & 3(B-2p-Bp^2) & 0 \\ 3Ap(1-p^2) & 3p(B-2p-Bp^2) & 0 \\ -(L_{uu} + pL_{uv})(0, 0, p) & -(L_{uv} - pL_{vv})(0, 0, p) & \varphi'(p) \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de $JLC_{(0,0,p)}$ são:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \varphi'(p) \quad \text{e} \quad \lambda_3 = -(\varphi'(p) + L_v(0, 0, p)),$$

e, os autovetores correspondentes são:

$$\vec{v}_1 = \left(-\frac{B(p^2-1)+2}{A(p^2-1)}, 1, -\frac{L_{up}(0,0,p) \left(L_{uv}(0,0,p) + pL_{vv}(0,0,p) \right) - L_{vp}(0,0,p) \left(L_{uu}(0,0,p) + pL_{uv}(0,0,p) \right)}{L_{up}(0,0,p) \varphi'(p)} \right),$$

$$\vec{v}_2 = (0, 0, 1) \quad \text{e} \quad \vec{v}_3 = \left(1, p, -\frac{p^2 L_{vv}(0,0,p) + 2p L_{uv}(0,0,p) + L_{uu}(0,0,p)}{2p L_{vp}(0,0,p) + 2L_{up}(0,0,p) + L_v(0,0,p)} \right).$$

Pelo teorema de Hartman-Grobman, se o produto

$$\Lambda(p) = \lambda_2 \lambda_3 = -\varphi'(p) (\varphi'(p) + L_v(0, 0, p)), \quad (2-8)$$

for não nulo, então $(0, 0, p)$ é singularidade hiperbólica para o campo LC . Este produto também pode ser escrito como segue:

$$\Lambda(p) = 3\varphi'(p)(1-p^2) \left[(A+Bp) - \frac{2p^2}{1-p^2} \right]. \quad (2-9)$$

Em particular, temos:

$$\Lambda(0) = 3\varphi'(0)A = -3(3A + 1)A.$$

Se $\bar{p} \neq 0$ é solução de $\varphi(p) = 0$, então,

$$B = -\frac{(A+3)\bar{p}^2 - (3A+1)}{\bar{p}(\bar{p}^2 - 3)} \quad \text{e} \quad A = -\frac{B\bar{p}^3 + 3\bar{p}^2 - 3B\bar{p} - 1}{\bar{p}^2 - 3}. \quad (2-10)$$

Substituindo as informações de (2-10) em (2-9), obtemos,

$$\Lambda(\bar{p}) = -3 \left[A + 3 \left(\frac{\bar{p}^2 + 1}{\bar{p}^2 - 3} \right)^2 \right] (\bar{p}^2 + 1)^2 = 3\bar{p}[B - g'_1(\bar{p})] (\bar{p}^2 + 1)^2. \quad (2-11)$$

Para completar, precisamos entender o que ocorre quando p assume valores arbitrariamente grandes. Isto é feito considerando-se

$$T(u, v, q) = \bar{b}(u, v)q^3 + 3\bar{a}(u, v)q^2 - 3\bar{b}(u, v)q - \bar{a}(u, v),$$

onde $q = \frac{du}{dv}$, e estudando o comportamento do campo

$$LC_1 = qT_q \frac{\partial}{\partial u} + T_q \frac{\partial}{\partial v} - (qT_u + T_v) \frac{\partial}{\partial q},$$

numa vizinhança da origem. Como $LC_1(0, 0, 0) = (0, 0, 120B)$, para p arbitrariamente grande, LC é regular e “paralelo” a $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

2.3 Singularidades hiperbólicas

Definição 2.4. *Diremos que $(0, 0)$ é uma singularidade hiperbólica de (2-7) se toda singularidade $(0, 0, \bar{p})$ de LC for uma singularidade hiperbólica de LC .*

Nesta seção estudaremos condições necessárias e suficientes para que $(0, 0)$ seja uma singularidade hiperbólica. Dividimos este estudo em dois casos: o caso em que $\varphi(p) = 0$ tem duas raízes reais e o caso em que tem quatro raízes reais.

Proposição 2.5. *Caso $\varphi(p) = 0$ tenha somente duas raízes $p_1 = 0$ e $p_2 \neq 0$, então $(0, 0, 0)$ e $(0, 0, p_2)$ são selas hiperbólicas para LC .*

Demonstração. A equação $\varphi(p) = 0$ tem somente duas raízes reais se, e só se, a intersecção do gráfico de g_1 com o de g_2 tem um único elemento. Naturalmente que, para haver somente um ponto de intersecção entre os gráficos de g_1 e g_2 , o valor de

p correspondente deverá satisfizer $p < -\sqrt{3}$ ou $p > \sqrt{3}$. Além disto, devemos ter $A < -\frac{1}{3}$ e daí,

$$\Lambda(0) = -3A(3A + 1) < 0,$$

o que mostra que $(0, 0, 0)$ é uma sela hiperbólica.

Com relação p_2 , se $p_2 < -\sqrt{3}$, temos $B > 0$ e $g'_2(p_2) < 0$. Daí, $B - g'_2(p_2) > 0$ e portanto,

$$\Lambda(p_2) = 3p_2 [B - g'_2(p_2)](p_2^2 + 1)^2 < 0.$$

Caso $p_2 > \sqrt{3}$, temos $B < 0$ e $g'_2(p_2) > 0$. Daí, $B - g'_2(p_2) < 0$ e novamente,

$$\Lambda(p_2) = 3p_2 [B - g'_2(p_2)](p_2^2 + 1)^2 < 0.$$

Logo, $(0, 0, p_2)$ é uma sela hiperbólica para LC . □

Lema 2.6. *Consideremos o caso em que $\varphi(p) = 0$ tem quatro raízes reais distintas e sejam $p_1 = 0, p_2, p_3$ e p_4 tais raízes. Caso $A \neq 0$ e $B \neq 0$, temos as seguintes possibilidades, conforme as intersecções dos gráficos de g_1 e g_2 :*

- (a) $p_2 < -\sqrt{3} < p_3 < 0 < p_4 < \sqrt{3}$;
- (b) $p_2 < -\sqrt{3}$ e $0 < p_3 < p_4 < \sqrt{3}$;
- (c) $p_2 < -\sqrt{3}$ e $\sqrt{3} < p_3 < p_4$;
- (ã) $-\sqrt{3} < p_2 < 0 < p_3 < \sqrt{3} < p_4$;
- (b̃) $-\sqrt{3} < p_2 < p_3 < 0$ e $p_4 > \sqrt{3}$;
- (c̃) $p_2 < p_3 < -\sqrt{3}$ e $p_4 > \sqrt{3}$.

A demonstração do lema acima é simples verificação das possibilidades de intersecção entre os gráficos de g_1 e g_2 para $B > 0$ e $B < 0$ e, variando A nos intervalos $(-\frac{1}{3}, \infty)$, $(-3, -\frac{1}{3})$ e $(-\infty, -3)$. Note que, no caso (a) do Lema 2.6, temos $A > -\frac{1}{3}$, no caso (b), $A < -\frac{1}{3}$ e no caso (c), $A < -3$.

Proposição 2.7. *Caso ocorra (a) do Lema 2.6, então a origem é uma sela ou um nó para o campo LC . Já $(0, 0, p_2)$, $(0, 0, p_3)$ e $(0, 0, p_4)$ são selas.*

Demonstração. Como

$$\Lambda_1(0) = -3A(3A + 1),$$

se $A > 0$ temos

$$\Lambda_1(0) < 0$$

e se, $A \in (-\frac{1}{3}, 0)$, temos

$$\Lambda_1(0) > 0.$$

Ou seja, para $A > 0$ a origem é uma sela para LC e se $A \in (-\frac{1}{3}, 0)$, ela é um nó.

Quanto a p_j , $j = 2, 3, 4$, como

$$3 \left(\frac{p_j^2 + 1}{p_j^2 - 3} \right) > \frac{1}{3},$$

temos

$$A + 3 \left(\frac{p_j^2 + 1}{p_j^2 - 3} \right) > 0.$$

Daí

$$\Lambda_1(p_j) = -3A \left[A + 3 \left(\frac{p_j^2 + 1}{p_j^2 - 3} \right) \right] (p_j^2 + 1)^2 < 0.$$

o que conclui a prova. \square

Proposição 2.8. *Caso ocorra (b) do Lema 2.6, então $(0, 0, p_3)$ é um nó para o campo LC. Já $(0, 0, p_1)$, $(0, 0, p_2)$ e $(0, 0, p_4)$ são selas.*

Demonstração. Como $A < -\frac{1}{3}$, temos:

$$\Lambda_1(0) = -3A(3A + 1) < 0.$$

Como, $B > g'_2(p_2)$, $B > g'_2(p_3)$ e $B < g'_2(p_4)$, temos:

$$B - g'_2(p_2) > 0, \quad B - g'_2(p_3) > 0 \quad \text{e} \quad B - g'_2(p_4) < 0.$$

Como, $p_2 < 0$ e $p_4 > p_3 > 0$, segue

$$\Lambda_1(p_2) = 3p_2 [B - g'_2(p_2)] (p_2^2 + 1)^2 < 0,$$

$$\Lambda_1(p_3) = 3p_3 [B - g'_2(p_3)] (p_3^2 + 1)^2 > 0$$

e

$$\Lambda_1(p_4) = 3p_4 [B - g'_2(p_4)] (p_4^2 + 1)^2 < 0.$$

\square

Proposição 2.9. *Caso ocorra (c), então $(0, 0, p_4)$ é um nó para o campo LC enquanto, $(0, 0, p_1)$, $(0, 0, p_2)$ e $(0, 0, p_3)$ são selas.*

Demonstração. A demonstração é idêntica a da proposição anterior. \square

Lema 2.10. *Seja $L_0 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$L_0(u, v, p) = -(Au + Bv)p^3 - 3vp^2 + 3(Au + Bv)p + v.$$

Para cada $\varepsilon > 0$, seja $V_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Identificando $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ com \mathbb{S}^1 podemos definir $\|\cdot\|_r$ em V_ε , onde $\|\cdot\|_r$ é a norma C^r definida no Capítulo 1 de [37] e no Capítulo X de [32]. Então, dado $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|L|_{V_\varepsilon} - L_0|_{V_\varepsilon}\|_1 < \delta$.

Demonstração. Como

$$L = -ap^3 - 3bp^2 + 3ap + b,$$

onde

$$a = Au + Bv + \sum_{2 \leq j+k} a_{jk}u^jv^k \quad \text{e} \quad b = v + \sum_{2 \leq j+k} b_{jk}u^jv^k,$$

segue que,

$$(L - L_0)(0, 0, p) = (L - L_0)_u(0, 0, p) = (L - L_0)_v(0, 0, p) = (L - L_0)_p(0, 0, p) = 0.$$

Daí segue que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, as restrições de L e L_0 à V_ε estão C^1 próximas. \square

Lema 2.11. *A superfície de Lie-Cartan para L_0 é $\mathcal{L}_0 = \bigcup_{p \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})} d_p$, onde d_{p_0} é a reta em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dada por*

$$h_1(p_0)u + h_2(p_0)v = 0, \quad p = p_0,$$

sendo $h_1, h_2 : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $h(p) = -Ap(p^2 - 3)$ e $h_2(p) = -Bp^3 - 3p^2 + 3Bp + 1$. Ou seja, \mathcal{L}_0 é uma superfície regrada. Além disso, se $A > 0$ a medida que p cresce d_p gira no sentido horário e se $A < 0$ no sentido anti-horário.

Demonstração. Dado $p_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ fixado arbitrariamente,

$$L_0(p_0) = 0 \Leftrightarrow h_1(p_0)u + h_2(p_0)v = 0.$$

Logo, d_{p_0} está contida em \mathcal{L}_0 . Assim, $\mathcal{L}_0 = \bigcup_{p \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})} d_p$. Agora, observemos que, dado p , se $h_2(p) \neq 0$ a reta $\pi(d_{p(t)})$ tem equação

$$v = -\frac{h_1(p)}{h_2(p)}u.$$

Como,

$$\frac{d}{dp} \left[-\frac{h_1(p)}{h_2(p)} \right] = -\frac{3A(p^2 + 1)^2}{(Bp^3 - 3Bp + 3p^2 - 1)^2}, \quad (2-12)$$

se $A < 0$, a medida que o valor de p aumenta a geratriz d_p gira no sentido anti-horário e se $A > 0$ no sentido horário. \square

Teorema 2.12. *Caso $\varphi(p) = 0$ tenha somente duas raízes reais, a configuração de (2-7) numa vizinhança da origem é homeomorfa a da Figura 2.6. Caso o campo LC tenha quatro singularidades, a configuração numa vizinhança da origem é homeomorfa a uma das que aparecem na Figura 2.7, sendo o caso em que todas as singularidades são selas a da esquerda, d_{p_j} as retas do Lema 2.11 e $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\pi(u, v, p) = (u, v)$.*

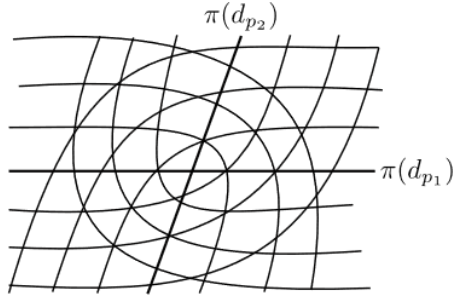


Figura 2.6: Ilustração do Teorema 2.12.

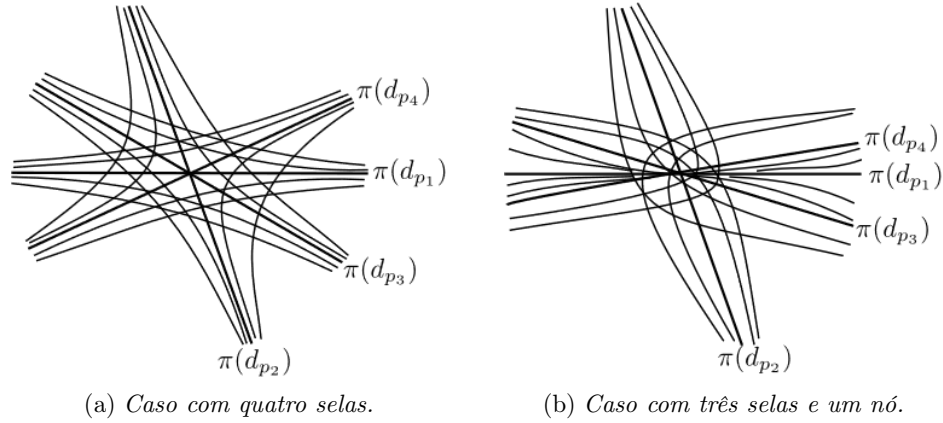


Figura 2.7: Ilustração do Teorema 2.12.

Demonstração. Seja LC_0 o campo de Lie-Cartan para $L_0 = 0$, onde L_0 é a aplicação do Lema 2.10. Da demonstração do Lema 2.10 vemos que $(0, 0, p_j)$ é uma singularidade de LC se, e somente se, é uma singularidade de LC_0 . Além disso, da expressão de $\Lambda(p_j)$ vemos que as singularidades de LC são do mesmo tipo que as de LC_0 . Desse modo, para a compreensão da configuração de $L = 0$ numa vizinhança da origem, podemos restringir nossa análise à configuração de $L_0 = 0$ nessa mesma vizinhança.

Dado $p_j \notin \{0, \pm\sqrt{3}\}$ uma raiz de $\varphi(p) = 0$, temos

$$B = -\frac{Ap_j^2 + 3p_j^2 - 3A - 1}{p_j(p_j^2 - 3)}.$$

Daí,

$$h_2(p_j) = A(p_j^2 - 3). \quad (2-13)$$

Começemos pelo caso em que $\varphi(p) = 0$ tem, exatamente, duas raízes reais $p_1 = 0$ e $p_2 \neq 0$. Faremos o caso $p_2 > \sqrt{3}$ (O caso $p_2 < -\sqrt{3}$ é análogo). Da Proposição 2.5, temos que $(0, 0, p_1)$ e $(0, 0, p_2)$ são singularidades do tipo sela de LC_0 . Sejam d_{p_1} e d_{p_2} as retas dadas pelo Lema 2.11.

Consideremos $\varepsilon > 0$ e sejam σ_1 e σ_2 seções transversais a LC_0 por $x_1 \in d_{p_1} \cap V_\varepsilon$ e por $x_2 \in d_{p_2} \cap V_\varepsilon$ respectivamente, como ilustrado na Figura 2.8. Identifiquemos σ_1 com $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ e σ_2 com $(-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$ de modo que x_i corresponda ao número zero, onde $\varepsilon_i > 0$ é um número real. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathcal{L}_0$, $\gamma(t) = (u(t), v(t), p(t))$ uma curva integral de LC_0 tal que $\gamma(t_1) \in \sigma_1$, $\gamma(t_2) \in \sigma_2$ e $\gamma(t) \notin \sigma_1 \cup \sigma_2$ qualquer que seja t entre t_1 e t_2 . Para fixar as idéias, suponhamos $t_1 < t_2$. Seja t_1 tal que

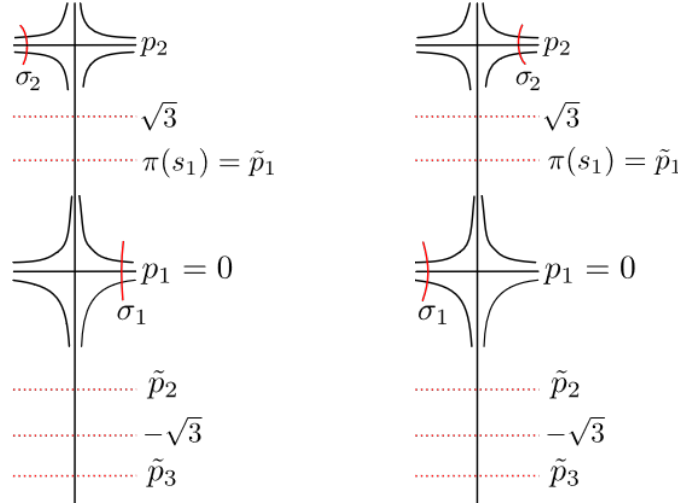


Figura 2.8: Ilustração do Teorema 2.12.

$0 < p(t_1) < \sqrt{3}$. Como

$$LC_0(0, 0, p) = (0, 0, p(Bp^3 + (A + 3)p^2 - 3Bp - 3A - 1)),$$

diminuindo ε , se necessário, o Teorema do Fluxo tubular garante que a aplicação $t \mapsto p(t)$, $t \in (t_1, t_2)$ é estritamente crescente ou estritamente decrescente. Suponhamos $t \mapsto p(t)$, $t \in (t_1, t_2)$ estritamente crescente (O caso decrescente é inteiramente análogo). Como $p_2 > \sqrt{3}$, diminuindo ε_1 e ε_2 , se necessário, temos $p(t_2) > \sqrt{3}$.

Do Teorema do Valor Intermediário, existe $s_0 \in (t_1, t_2)$ tal que $p(s_0) = \sqrt{3}$. Como as equações da reta $d_{p(s_0)}$ são

$$Ap(s_0)(p(s_0)^2 - 3)u + h_2(p(s_0))v = 0, \quad p = p(s_0),$$

segue que $d_{p(s_0)}$ é dada por $v = 0$ e $p = p(s_0)$. Ou seja, $\pi(\gamma(s_0)) = (u(s_0), 0)$, onde $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definida por $\pi(u, v, p) = (u, v)$. Isto significa que a curva $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\tilde{\gamma}(t) = \pi(\gamma(t))$ intersecta o eixo u no ponto $(u(s_0), 0)$. Notemos que $u(s_0) \neq 0$, pois do contrário $\gamma([t_1, t_2])$ conteria o ponto $(0, 0, p_2)$.

Agora observemos que $\tilde{\gamma}(t)$ pertence ao eixo v se, e somente se, $h_2(p(t)) = 0$. Como $h_2(0) = 1 > 0$ e $h_2(\sqrt{3}) = -8 < 0$, existe $s_1 \in (t_1, s_0)$ tal que $h_2(p(s_1)) = 0$. Ou seja, $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$ intersecta o eixo v no ponto $(0, v(s_1))$. Além disso, de $h_2(p_1) = 1 > 0$, $h_2(-\sqrt{3}) = -8 < 0$ e como $p_2 > \sqrt{3}$ implica $B < 0$, segue que existem \tilde{p}_2, \tilde{p}_3 tais que $\tilde{p}_3 < -\sqrt{3} < \tilde{p}_2 < p_1$ e $h_2(\tilde{p}_2) = h_2(\tilde{p}_3) = 0$. Então, $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$ intersecta o eixo u somente em $(u(s_0), 0)$ e o eixo v somente no ponto $(0, v(s_1))$ e, portanto um esboço de $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$ é um dos apresentados na Figura 2.9.

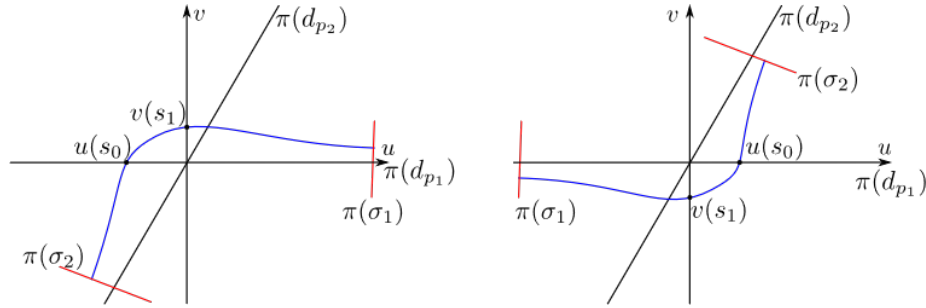


Figura 2.9: Ilustração do Teorema 2.12.

O caso $\tilde{p}_2 < p(t_1) < 0$ é semelhante e fornece as outras duas possibilidades que completa a configuração próximo a origem, para o caso em que $\varphi(p) = 0$ tem exatamente duas raízes reais.

Agora consideremos o caso em que $\varphi(p) = 0$ possui quatro raízes reais distintas $p_1 = 0, p_2, p_3, p_4$. Conforme as proposições 2.7, 2.8 e 2.9, este caso possui dois subcasos: o caso em todas as singularidades de LC_0 são selas e o que ele tem um nó e três selas. Começemos pelo primeiro deles e, suponhamos que ocorra o caso do item (a) do Lema 2.6. Consideremos $\varepsilon > 0$ e sejam σ_1 e σ_2 seções transversais a LC_0 por $x_1 \in d_{p_2} \cap V_\varepsilon$ e por $x_2 \in d_{p_3} \cap V_\varepsilon$ respectivamente. Identifiquemos σ_1 com $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ e σ_2 com $(-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$ de modo que x_i corresponda ao número zero, onde $\varepsilon_i > 0$ é um número real (Veja Figura 2.10(a) e 2.10(b) para uma ilustração). Seja $\gamma : I \rightarrow \mathcal{L}_0$, $\gamma(t) = (u(t), v(t), p(t))$ uma curva integral de LC_0 tal que $\gamma(t_1) \in \sigma_1$, $\gamma(t_2) \in \sigma_2$ e $\gamma(t) \notin \sigma_1 \cup \sigma_2$ qualquer que seja t entre t_1 e t_2 . Para fixar as idéias, suponhamos $t_1 < t_2$. Como $p_2 < p_3$, para ε_1 e ε_2 suficientemente pequenos, $p(t_1) < -\sqrt{3} < p(t_2)$, onde $p(t)$ é a terceira coordenada de $\gamma(t)$. Como $t \mapsto p(t)$ é contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $s_0 \in (t_1, t_2)$ tal que $p(s_0) = -\sqrt{3}$. De forma análoga á primeira parte, mostra-se que $\pi(\gamma(s_0)) = (u(s_0), 0)$ e que $u(s_0) \neq 0$. Desse modo, $\pi(\gamma([t_1, t_2]))$ é uma das apresentadas na Figura 2.11.

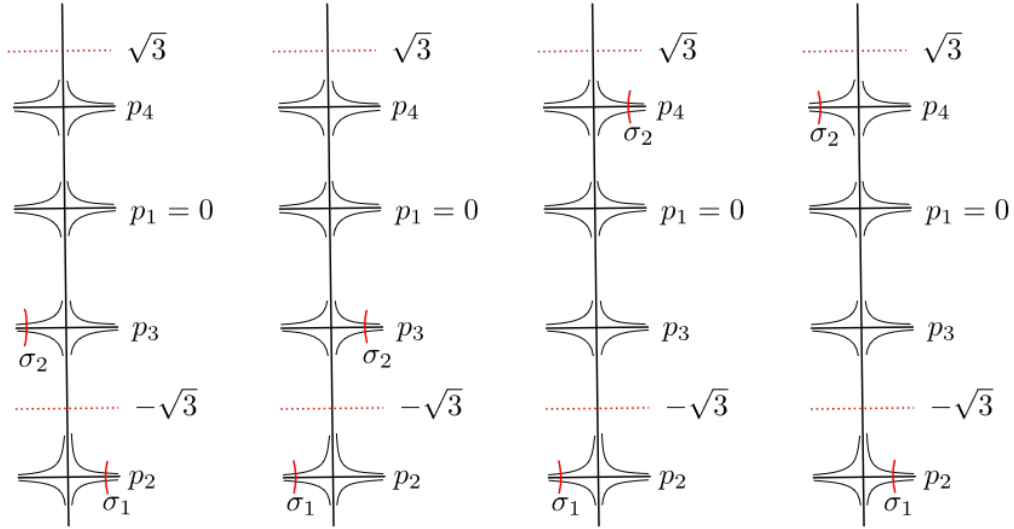


Figura 2.10: Ilustração do Teorema 2.12.

Caso seja $x_1 \in d_{p_2} \cap V_\varepsilon$ e $x_2 \in d_{p_4} \cap V_\varepsilon$, (Figura 2.10(c) e Figura 2.10(d)) o Teorema

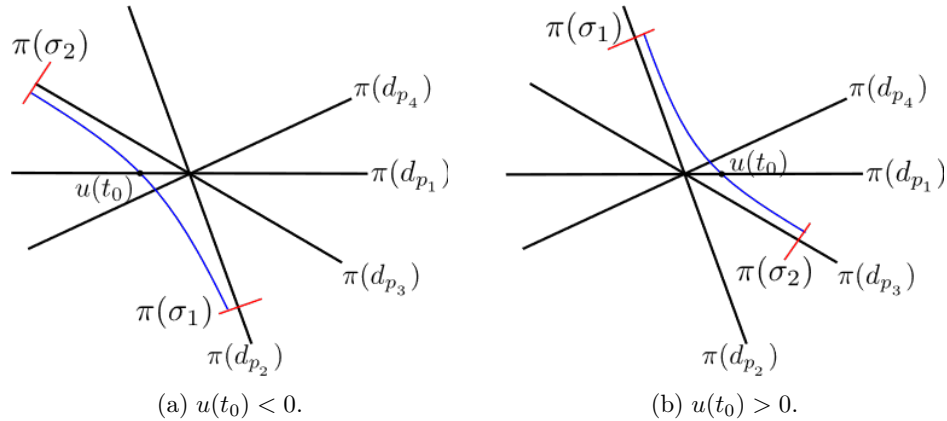


Figura 2.11: Ilustração de $\pi(\gamma([t_1, t_2]))$ para o caso (a) de quatro selas e $x_1 \in d_{p_2} \cap V_\varepsilon$ e $x_2 \in d_{p_3} \cap V_\varepsilon$.

do Valor Intermediário garante que existe $t_0 \in (t_1, t_2)$ tal que $p(t_0) = \sqrt{3}$ e mostra-se que $\pi(\gamma([t_1, t_2]))$ é uma das apresentadas na Figura 2.12.

Vamos ao caso em que $x_1 \in d_{p_3} \cap V_\varepsilon$ e $x_2 \in d_{p_1} \cap V_\varepsilon$, exposto na Figura 2.13(a) e 2.13(b). Da demonstração da Proposição 2.7, temos $A > 0$. Como $|p_j| < \sqrt{3}$, $j = 3, 4$, tem-se $h_2(p_j) < 0$ daí, como $h(0) = 1 > 0$, existem $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tais que $f(\tilde{p}_1) = f(\tilde{p}_2) = 0$. Além disso, $|p_2| > \sqrt{3}$, de modo que $f(p_2) > 0$. Daí, como $h_2(\sqrt{3}) = -8 < 0$, a terceira raiz de $h_2(p) = 0$ está entre p_2 e $-\sqrt{3}$. De $h_2(\tilde{p}_j) = 0$, segue que as equações da reta $d_{\tilde{p}_j}$, são

$$Ap(p^2 - 3)u = 0, p = \tilde{p}_j,$$

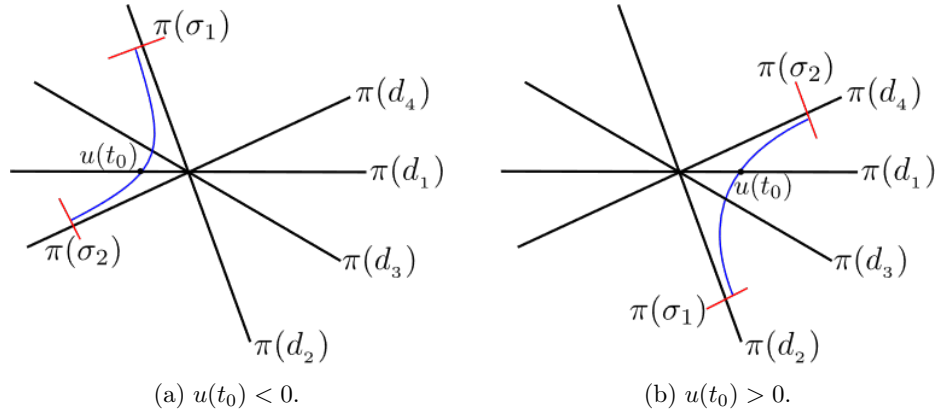


Figura 2.12: Ilustração de $\pi(\gamma([t_1, t_2]))$ para o caso (a) de quatro selas e $x_1 \in d_{p_2} \cap V_\varepsilon$ e $x_2 \in d_{p_4} \cap V_\varepsilon$.

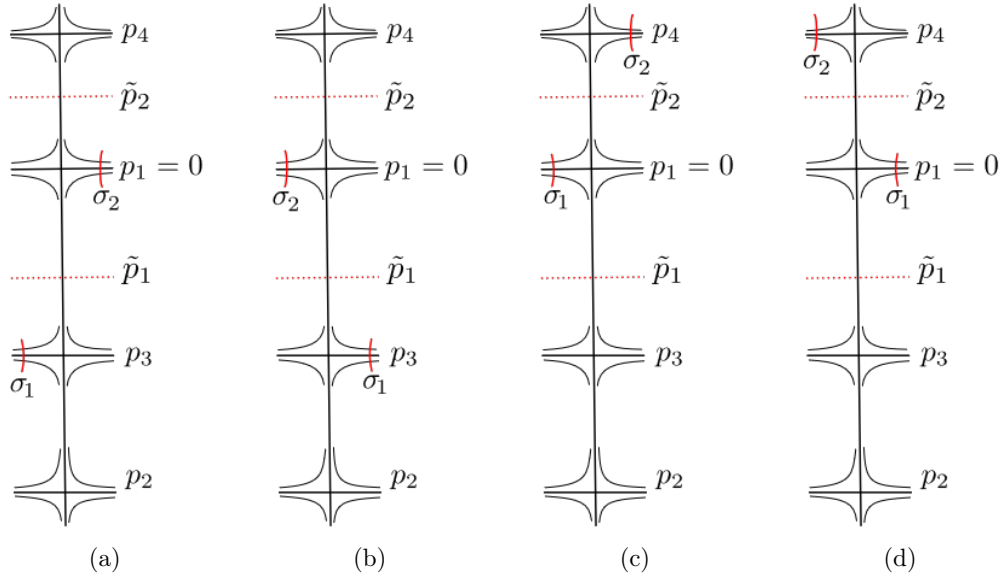


Figura 2.13: Ilustração do Teorema 2.12.

para $j = 1, 2$. Ou seja, as equações de $d_{\tilde{p}_j}$ são $u = 0, p = \tilde{p}_j, j = 1, 2$. Agora, se $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{L}_0$ for uma curva integral de LC_0 tal que $\gamma(t_1) \in \sigma_1, \gamma(t_2) \in \sigma_2$, existe $s_0 \in (t_1, t_2)$ tal que $p(s_0) = \tilde{p}_1$. Assim, $\gamma(s_0) = (0, v(s_0), \tilde{p}_1)$ e, portanto, $\pi(\gamma(s_0)) = (0, v(s_0))$. Notemos que $v(s_0) \neq 0$, caso contrário $\gamma(s_0)$ pertenceria ao eixo projetivo. Além disso, $v = 0$ não é solução de

$$Ap(t)(p(t)^2 - \sqrt{3})u(t) + h_2(p(t))v = 0,$$

qualquer que seja $t \in [t_1, t_2]$ que satisfaça $u(t) \neq 0$. Dessa forma temos uma das possibilidades da Figura 2.14 para $\pi(\gamma([t_1, t_2]))$.

Com um raciocínio totalmente análogo, mostra-se que, para $x_1 \in d_{p_1} \cap V_\varepsilon$

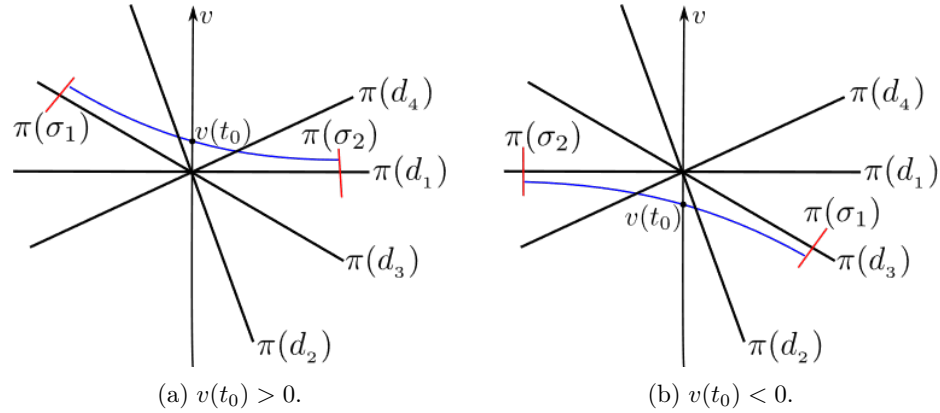


Figura 2.14: Ilustração do caso em que LC_0 tem quatro selas e $x_1 \in d_{p_3} \cap V_\varepsilon$ e $x_2 \in d_{p_1} \cap V_\varepsilon$.

e $x_2 \in d_{p_4} \cap V_\varepsilon$, as possibilidades para $\pi(\gamma([t_1, t_2]))$ são as apresentadas na Figura 2.15. Os casos (b) e (c) são análogos.

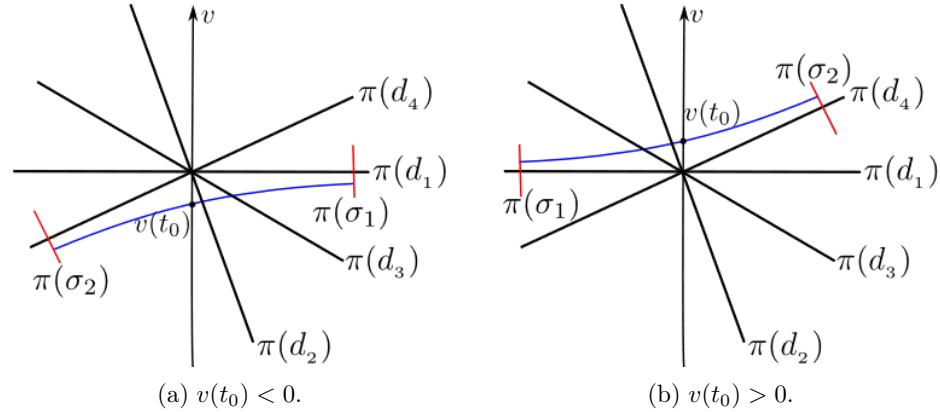


Figura 2.15: Ilustração do caso em que LC_0 tem quatro selas e $x_1 \in d_{p_1} \cap V_\varepsilon$ e $x_2 \in d_{p_4} \cap V_\varepsilon$.

Por fim consideremos o caso (a) do Lema 2.6 em que a origem é um nó. Sejam σ_1 e σ_2 seções transversais a LC_0 como na Figura 2.16(a) ou 2.16(b). Neste caso $-\frac{1}{3} < A < 0$ e $B > 0$. Mostra-se, utilizando os sinais de $h_2(p_j)$ e o Teorema do Valor Intermediário que, os zeros de h_2 são \tilde{p}_1, \tilde{p}_2 e \tilde{p}_3 satisfazendo $-\sqrt{3} < \tilde{p}_1 < p_3, p_4 < \tilde{p}_2 < \sqrt{3}$ e $\sqrt{3} < \tilde{p}_3$. Notemos que, neste caso $\pi(\gamma([t_1, t_2]))$ não intersecta nenhum dos eixos coordenados e portanto, um esboço para $\gamma([t_1, t_2])$, neste caso é um dos apresentados na Figura 2.17. O restante da demonstração segue de modo totalmente análogo a de duas e quatro selas, utilizando o Teorema do Valor Intermediário e o Lema 2.11. \square

Podemos construir exemplo para qualquer valor $p_2 \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, pré escolhido.

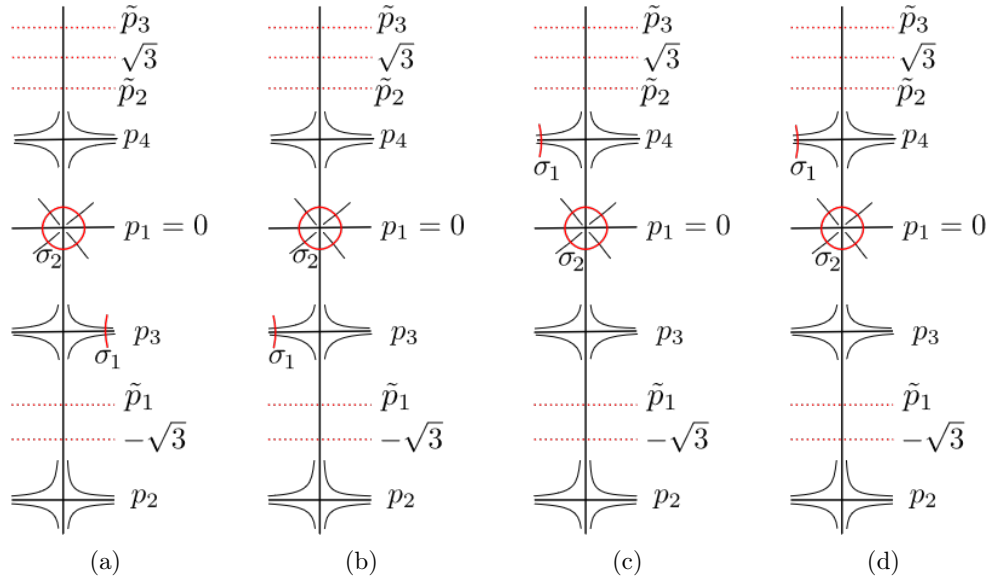


Figura 2.16: Ilustração do subcaso em que a origem é um nó para o caso (a) do Lema 2.6.

Exemplo 2.13. Seja $p_2 = 2$. Resolvendo a equação $\varphi(2) = 0$ em B , obtemos

$$B = -\frac{A + 11}{2}.$$

Substituindo em $\varphi(p) = 0$ e resolvendo em p , obtemos:

$$p_1 = 0, p_2 = 2, p_3 = \frac{-8 + \sqrt{3A^2 + 34A + 75}}{A + 11}$$

e

$$p_4 = \frac{-8 - \sqrt{3A^2 + 34A + 75}}{A + 11}$$

Impondo $3A^2 + 34A + 75 < 0$, obtemos $-\frac{25}{3} < A < -3$. Escolhendo $A = -5$, temos que $B = -3$, donde $\frac{A}{B} > \frac{\sqrt{3}}{3}$. Portanto,

$$w(u, v) = v du^3 - 3(5u + 3v) du^2 dv - 3v du dv^2 + (5u + 3v) dv^3$$

é um exemplo para o caso em que $\varphi(p) = 0$ tem exatamente duas raízes reais.

Exemplo 2.14. Seja $p_2 = -2$. Seguindo o mesmo raciocínio do exemplo anterior chegamos que, novamente deve ser $-\frac{25}{3} < A < -3$. Escolhendo $A = -5$, obtemos $B = 3$ e, nosso exemplo fica:

$$w(u, v) = v du^3 - 3(5u - 3v) du^2 dv - 3v du dv^2 + (5u - 3v) dv^3.$$

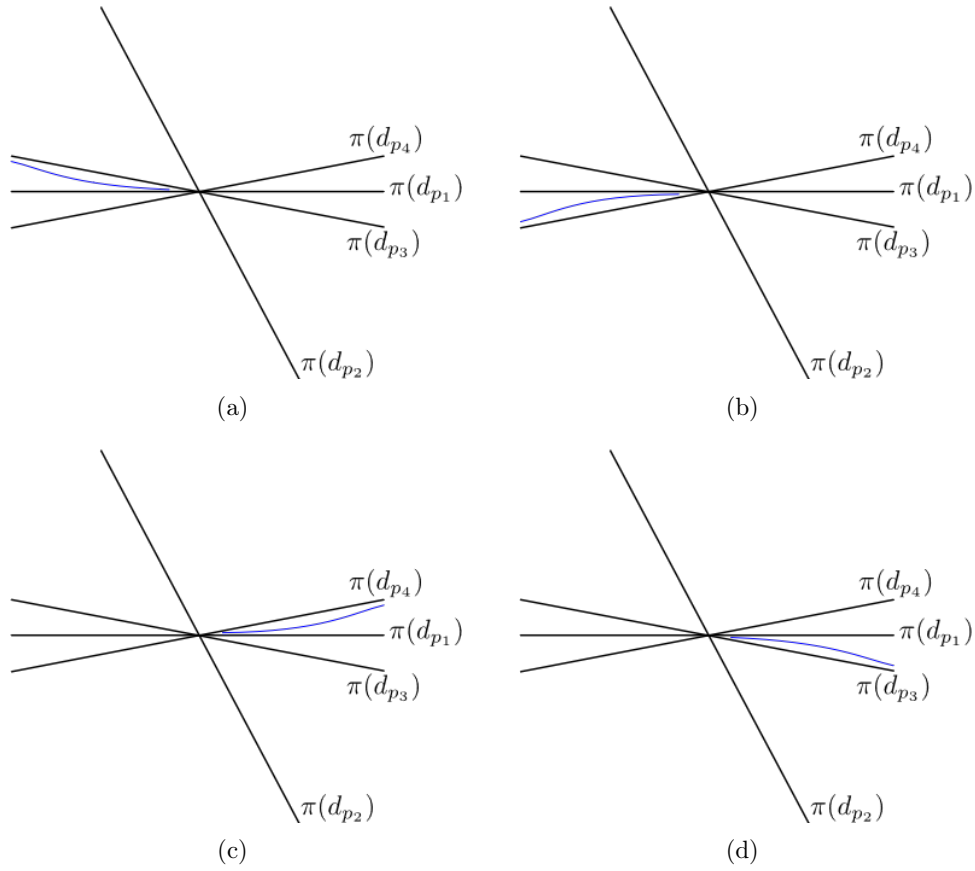


Figura 2.17: Esboço para $\pi(\gamma([t_1, t_2]))$ para o caso σ_1 e σ_2 como na Figura 2.16.

Exemplo 2.15. Consideremos o caso em que $p_2 = -2$ e $A = 1$. De $\varphi(p_2) = 0$ obtemos $B = 6$ e a equação diferencial é

$$-(u + 6v) dv^3 - 3v du dv^2 + (3u + 18v) du^2 dv + v du^3 = 0.$$

O campo de Lie-Cartan tem quatro singularidades e da Proposição 2.7 todas são selas e, do Teorema 2.12 segue que a configuração numa vizinhança da origem é a da Figura 2.7(a).

Exemplo 2.16. Escolhendo $p_2 = -2$ e $A = -\frac{1}{4}$. De $\varphi(p_2) = 0$ obtemos $B = \frac{43}{8}$ e a equação diferencial é:

$$\left(\frac{1}{4}u - \frac{43}{8}v\right) dv^3 - 3v du dv^2 - 3\left(\frac{1}{4}u - \frac{43}{8}v\right) du^2 dv + v du^3 = 0.$$

O campo de Lie-Cartan possui quatro singularidades, da Proposição 2.7 para $p = 0$ tem-se um nó para LC e as demais são selas. Do Teorema 2.12 segue que a

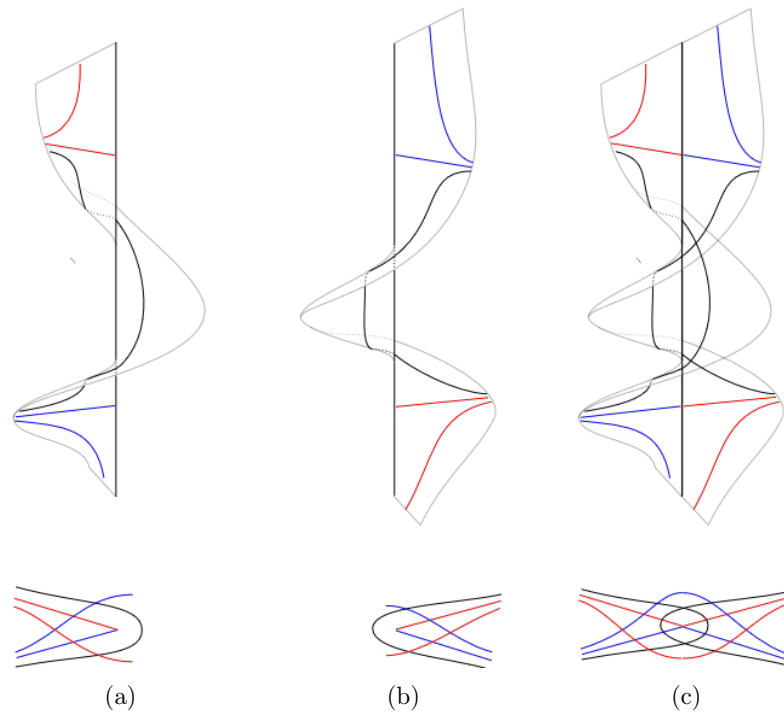


Figura 2.18: Ilustração do caso em que $\varphi(p) = 0$ tem duas raízes distintas.

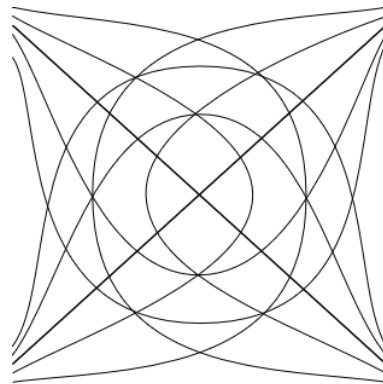


Figura 2.19: Ilustração do Teorema 2.12.

configuração próximo a origem é a da Figura 2.7(b).

2.4 Aplicação de Poincaré

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma órbita regular de (2-4) parametrizada pelo comprimento de arco s . Assim, $t(s) = \gamma'(s)$ é um vetor unitário. Escrevendo $\gamma(s) = (u(s), v(s))$, o campo vetorial $n(s) = (-v'(s), u'(s))$ é ortogonal a $t(s)$. Existe uma função $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $t'(s) = k(s)n(s)$ (Veja [10]). Sejam $t_1, t_2 \in I$ com $t_1 < t_2$. A reta $r_1 : (u(\lambda), v(\lambda)) = \lambda n(t_1)$ divide \mathbb{R}^2 em dois semi-planos. Um deles

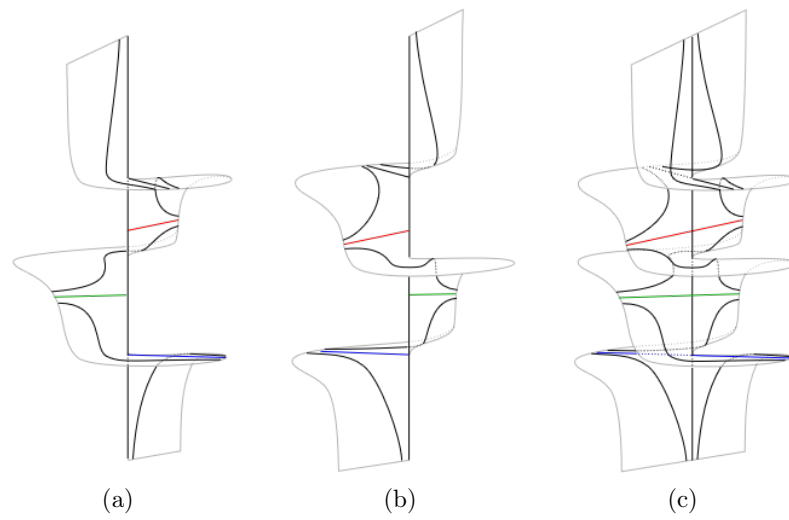


Figura 2.20: Superfície de Lie-Cartan quando o campo de Lie-Cartan possui quatro selas.

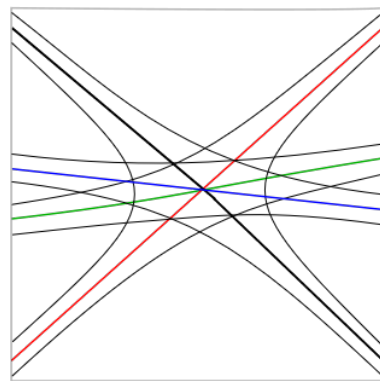


Figura 2.21: Projeção para o caso em que LC possui quatro selas.

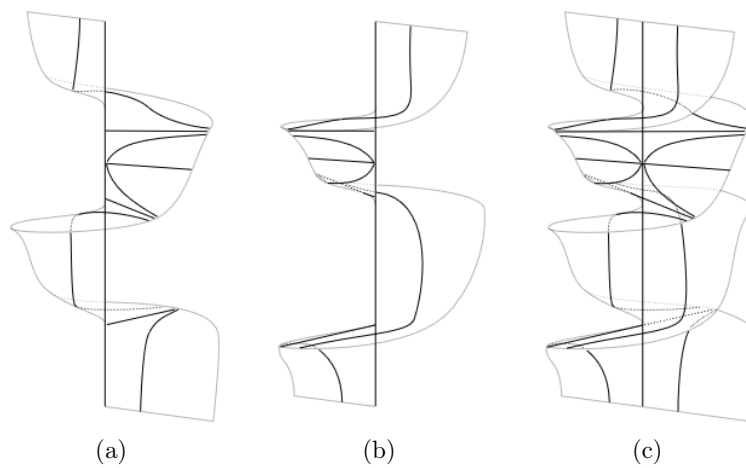


Figura 2.22: Caso em que LC tem três selas e um nó.

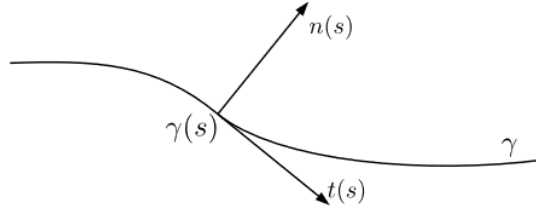


Figura 2.23: Vetores tangente e normal a γ .

contem $\gamma([t_1, t_2])$. Seja A o semi-plano determinado por r_1 e que contém $\gamma([t_1, t_2])$. De forma análoga ocorre com a reta $r_2 : (u(\lambda), v(\lambda)) = \lambda n(t_2)$, ela determina dois semi-planos e, denominaremos por B o que contém $\alpha([t_1, t_2])$. Seja $V = A \cap B$. Note que, para cada $(u, v) \in V$ existem $s \in I$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $(u, v) = \gamma(s) + \lambda n(s)$. Isto

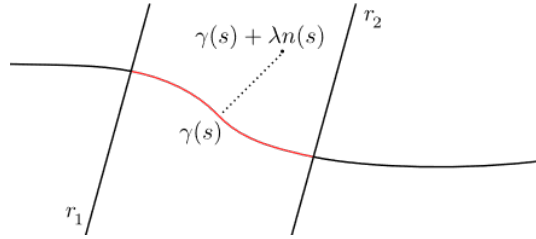


Figura 2.24: Ilustração da Proposição 2.17.

nos motiva definir a aplicação $\Phi : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\Phi(s, \lambda) = \gamma(s) + \lambda n(s) = (u(s) - \lambda v'(s), v(s) + \lambda u'(s)), \quad (2-14)$$

onde $\varepsilon > 0$ será descrito a seguir.

Proposição 2.17. *Existe uma vizinhança tubular V_0 de $[t_1, t_2] \times \{0\}$ em \mathbb{R}^2 tal que $\Phi|_{V_0}$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. Como

$$d\Phi_{(s, \lambda)} = \begin{pmatrix} u'(s) - \lambda v''(s) & -v'(s) \\ v'(s) + \lambda u''(s) & u'(s) \end{pmatrix},$$

temos

$$\det(d\Phi_{(s, 0)}) = |t(s)|^2 = 1.$$

Conseqüentemente, para cada $s \in [t_1, t_2]$, existem números reais positivos δ_s e ε_s tais que $\Phi|_{(s-\delta_s, s+\delta_s) \times (-\varepsilon_s, \varepsilon_s)}$ é um difeomorfismo. Como

$$\bigcup_{s \in [t_1, t_2]} (s - \delta_s, s + \delta_s) \times (-\varepsilon_s, \varepsilon_s)$$

é uma cobertura aberta para o compacto $[t_1, t_2]$, então esta cobertura possui um número de Lebesgue. Seja ε o número de Lebesgue da cobertura acima. Daí é só tomar $V_0 = (t_1 - \delta_{t_1}, t_2 + \delta_{t_2}) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ e $\Phi|_{V_0}$ é um difeomorfismo. \square

Pela Proposição 2.17, Φ é uma mudança de coordenadas que está bem definida em uma vizinhança de $\gamma([t_1, t_2])$. Como, $u''(s) = -k(s)v'(s)$ e $v''(s) = k(s)u'(s)$, de $(u(s, \lambda), v(s, \lambda)) = \Phi(s, \lambda)$, temos

$$du = (u'(s) - \lambda v''(s)) ds - v'(s) d\lambda = u'(s)(1 - \lambda k(s)) ds - v'(s) d\lambda$$

e

$$dv = (v'(s) + \lambda u''(s)) ds + u'(s) d\lambda = v'(s)(1 - \lambda k(s)) ds + u'(s) d\lambda.$$

Por uma questão de simplificação, escreveremos de agora em diante $a(\Phi(s, 0)) = a_0$, $b(\Phi(s, 0)) = b_0$, $a_u(\Phi(s, 0)) = a_u$, $a_v(\Phi(s, 0)) = a_v$, $b_u(\Phi(s, 0)) = b_u$ e $b_v(\Phi(s, 0)) = b_v$.

Aplicando a mudança de coordenadas φ à equação (2-4), obtemos

$$-F d\lambda^3 - 3(1 - k\lambda) G d\lambda^2 ds + 3(1 - k\lambda)^2 F d\lambda ds^2 + (1 - k\lambda)^3 G ds^3 = 0 \quad (2-15)$$

onde

$$F(\Phi(s, \lambda)) = a(\Phi(s, \lambda)) u'((u')^2 - 3(v')^2) + b(\Phi(s, \lambda)) v'((v')^2 - 3(u')^2),$$

$$G(\Phi(s, \lambda)) = a(\Phi(s, \lambda)) v'(3(u')^2 - (v')^2) + b(\Phi(s, \lambda)) u'((u')^2 - 3(v')^2).$$

Lema 2.18. *Para todo $s \in [t_1, t_2]$, tem-se $F(\gamma(s)) \neq 0$.*

Demonstração. Como $\gamma(s)$ é uma curva integral de (2-4), temos

$$-a(\gamma(s)) v'(s)^3 - 3b(\gamma(s)) u'(s) v'(s)^2 + 3a(\gamma(s)) u'(s)^2 v'(s) + b(\gamma(s)) u'(s)^3 = 0,$$

i.e, $G(\gamma(s)) = 0$, para todo $s \in [t_1, t_2]$.

Agora, como γ é uma órbita regular (não há singularidade em γ), segue:

$$F(\gamma(s))^2 = F(\gamma(s))^2 + G(\gamma(s))^2 = ((u')^2 + (v')^2)^3 (a_0^2 + b_0^2) \neq 0.$$

Logo, $F(\gamma(s)) \neq 0$ para todo $s \in [t_1, t_2]$. \square

O Lema acima nos diz que $F(\gamma(s))$ não depende das derivadas u' e v' . Além disto ele garante que o denominador na expressão da derivada primeira da aplicação de Poincaré na Proposição 2.19 é sempre não nulo.

Sendo γ uma curva regular existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que, se

$$\Sigma_1 = \{\gamma(t_1) + \lambda n(t_1) : \lambda \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)\},$$

toda órbita de (2-4) da mesma folheação que γ que interseste Σ_1 também intersesta r_2 . Seja Σ_2 o conjunto de todos os pontos de r_2 formados pela primeira intersecção de uma folha da mesma folheação de γ como descrito acima. Podemos, então, definir uma orientação local das órbitas desta folheação e conseqüentemente definir uma aplicação $\pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ que associa a cada ponto $p \in \Sigma_1$ o primeiro ponto $\pi(p) \in \Sigma_2$ de intersecção da folha orientada positivamente contendo p com Σ_2 . Dado $p = \gamma(t_1) + \lambda_0 n(t_1) \in \Sigma_1$ seja γ_p a folha, da mesma folheação de γ , que o

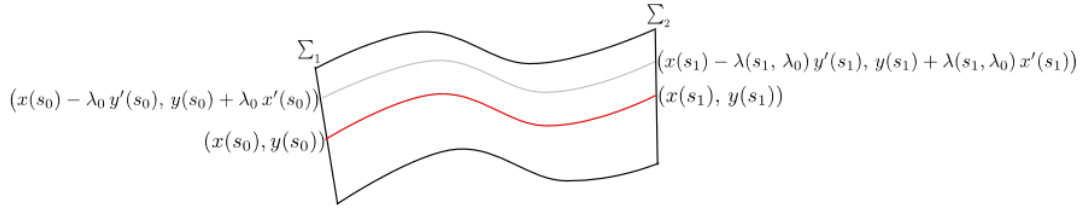


Figura 2.25: Aplicação de Poincaré.

contém. Dado $s \in [t_1, t_2]$ existe $\lambda(s, \lambda_0)$ real tal que $\gamma_p(s) = \gamma(s) + \lambda(s, \lambda_0) n(s)$. Sendo $\lambda = \lambda(s, \lambda_0)$, da equação (2-15), temos

$$-F\left(\frac{d}{ds}\lambda\right)^3 - 3(1 - k\lambda)G\left(\frac{d}{ds}\lambda\right)^2 + 3(1 - k\lambda)^2 F\frac{d}{ds}\lambda + (1 - k\lambda)^3 G = 0. \quad (2-16)$$

Se $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ for uma órbita regular de w tal que $\gamma(t_2) = \gamma(t_1)$ diremos que γ é uma órbita fechada de w (ou órbita periódica ou compacta de w).

Teorema 2.19. *Seja $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ um arco de trajetória regular de $w = 0$. A derivada da aplicação $\pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ de Poincaré de γ , em $p = \gamma(t_1)$, é*

$$\pi'(0) = \frac{F(\gamma(t_1))}{F(\gamma(t_2))} \exp\left(\frac{1}{3} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\langle X(\gamma(s))\gamma'(s)^T, \gamma'(s)^T \rangle}{F(\gamma(s))} ds\right)$$

onde

$$X = \begin{pmatrix} \text{div}(a, -b) & \text{div}(b, -a) \\ \text{div}(b, -a) & \text{div}(a, -b) \end{pmatrix}.$$

Demonstração. De (2-16), temos

$$\frac{d}{d\lambda_0} \left[-F\left(\frac{d}{ds}\lambda\right)^3 - 3(1 - k\lambda)G\left(\frac{d}{ds}\lambda\right)^2 + 3(1 - k\lambda)^2 F\frac{d}{ds}\lambda + (1 - k\lambda)^3 G \right] = 0.$$

Como $\lambda(s, 0) = 0, \forall s \in [t_1, t_2]$, temos que $\frac{d}{ds}\lambda(s, \lambda_0)\Big|_{\lambda_0=0} = 0, \forall s \in [t_1, t_2]$. Daí

$$3F(\gamma(s))\frac{d}{ds}\left(\frac{d}{d\lambda_0}\lambda(s, \lambda_0)\right)\Big|_{\lambda_0=0} + \left[G_v(\gamma(s))\frac{dx}{ds} - G_u(\gamma(s))\frac{dy}{ds}\right]\frac{d}{d\lambda_0}\lambda(s, \lambda_0)\Big|_{\lambda_0=0} = 0,$$

onde $G_u = \frac{\partial G}{\partial u}$ e $G_v = \frac{\partial G}{\partial v}$. Resolvendo a equação acima obtemos

$$\pi'(0) = \exp \left(-\frac{1}{3} \int_{t_1}^{t_2} \frac{G_v(\gamma(s)) \frac{dx}{ds} - G_u(\gamma(s)) \frac{dy}{ds}}{F(\gamma(s))} ds \right).$$

Como

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} \frac{G_v(\gamma(s)) \frac{dx}{ds} - G_u(\gamma(s)) \frac{dy}{ds}}{F(\gamma(s))} &= \frac{1}{3} \left(\frac{-[G_v(\gamma(s)) \frac{dx}{ds} - G_u(\gamma(s)) \frac{dy}{ds}] + \frac{d}{ds} F(\gamma(s))}{F(\gamma(s))} - \frac{\frac{d}{ds} F(\gamma(s))}{F(\gamma(s))} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{(a_u - b_v) \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 - \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right] - 2(a_v + b_u) \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds}}{F(\gamma(s))} - \frac{\frac{d}{ds} F(\gamma(s))}{F(\gamma(s))} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\langle X(\gamma(s)) \gamma'(s)^T, \gamma'(s)^T \rangle}{F(\gamma(s))} - \frac{\frac{d}{ds} F(\gamma(s))}{F(\gamma(s))} \right) \end{aligned}$$

e

$$-\int_{t_1}^{t_2} \frac{\frac{d}{ds} F(\gamma(s))}{F(\gamma(s))} ds = \ln(F(\gamma(t_1))) - \ln(F(\gamma(t_2))) = \ln \frac{F(\gamma(t_1))}{F(\gamma(t_2))},$$

segue o resultado. \square

Corolário 2.20. *Se $\gamma : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ for uma solução periódica regular, então*

$$\pi'(0) = \exp \left(\frac{1}{3} \int_0^l \frac{\langle X(\gamma(s)) \gamma'(s)^T, \gamma'(s)^T \rangle}{F_0(s)} ds \right).$$

Definição 2.21. *Um órbita regular periódica de $w = 0$ é dita hiperbólica se $\pi'(0) \neq 1$. Caso contrário, ela é chamada de não hiperbólica.*

Vamos apresentar alguns exemplos começando por casos em que $w = w_1 w_2 w_3$ onde $w_i = b_i dx - a_i dy$ é uma 1-forma $X_1 = (a_1, b_1)$ é um campo C^∞ que possui pelo menos uma solução periódica regular, $X_2 = R_{\frac{\pi}{3}} X_1$ e $X_3 = R_{\frac{2\pi}{3}} X_1$ são os campos associados a w_2 e w_3 , respectivamente.

Exemplo 2.22. *Se $X_1(u, v) = (-v, u)$, então $w_1 = u du + v dv$, $w_2 = (-\sqrt{3}v + u) du + (\sqrt{3}u + v) dv$ e $w_3 = (-\sqrt{3}v - u) du + (\sqrt{3}u - v) dv$. Um esboço das curvas integrais de $w = w_1 w_2 w_3 = 0$ próximo da origem, é apresentado na Figura 2.26. Todo círculo $\gamma_r(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$ é uma órbita de $w = 0$ e a derivada da aplicação de primeiro retorno de γ_r é*

$$\pi'_r(0) = \exp \left(\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \frac{\langle X(\gamma(s)) \gamma'(s)^T, \gamma'(s)^T \rangle}{F_0(s)} ds \right) = 1,$$

qualquer que seja $r > 0$ como era de esperar.

Exemplo 2.23. *Sabemos que o campo*

$$X(u, v) = (-v + u(1 - u^2 - v^2), u + v(1 - u^2 - v^2))$$

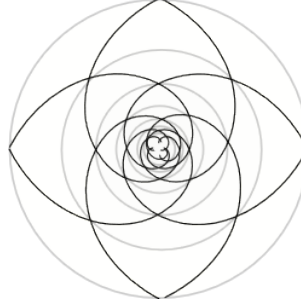


Figura 2.26: Soluções da equação diferencial do Exemplo 2.22.

possui uma órbita periódica hiperbólica. Pondo $X_1 = X$, temos:

$$w_1 = (u + v - u^2 v - v^3) du + (-u + v + u^3 + u v^2) dv$$

$$w_2 = ((1 + \sqrt{3})u + (1 - \sqrt{3})v - \sqrt{3}u^3 - \sqrt{3}u v^2 - u^2 v - v^3) du + ((\sqrt{3} - 1)u + (1 + \sqrt{3})v - \sqrt{3}u^2 v - \sqrt{3}v^3 + u^3 + u v^2) dv$$

$$w_3 = ((\sqrt{3} - 1)u - (\sqrt{3} + 1)v - \sqrt{3}u^3 + u^2 v - \sqrt{3}u v^2 + v^3) du + ((1 + \sqrt{3})u + (\sqrt{3} - 1)v - u^3 - \sqrt{3}u^2 v - u v^2 - \sqrt{3}v^3) dv$$

A equação diferencial $w = w_1 w_2 w_3 = 0$ possui duas órbitas fechadas hiperbólicas

$\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t))$ e $\gamma_2(t) = (\sqrt{1 + \sqrt{3}} \cos(t), \sqrt{1 + \sqrt{3}} \sin(t))$. Temos

$$\pi'_{\gamma_1}(p) = \exp\left(\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \frac{\langle X(\gamma_1(s)) \gamma_1'(s)^T, \gamma_1'(s)^T \rangle}{F_0(s)} ds\right) = \exp(-4\pi)$$

e

$$\pi'_{\gamma_2}(p) = \exp\left(\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \frac{\langle X(\gamma_2(s)) \gamma_2'(s)^T, \gamma_2'(s)^T \rangle}{F_0(s)} ds\right) = \exp(-\pi).$$

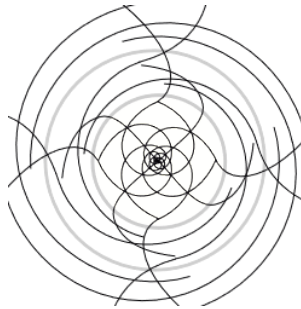


Figura 2.27: Soluções da equação $w = 0$ do Exemplo 2.23.

Exemplo 2.24. Sejam:

$$a(u, v) = 4u^3 + 12u^2 v - 12u v^2 - 4v^3 - 36u^4 v - 24u^2 v^3 + 12v^5 - 12u^7 + 36u^6 v + 12u^5 v^2 + 60u^4 v^3 + 60u^3 v^4 + 12u^2 v^5 + 36u v^6 - 12v^7,$$

$$b(u, v) = u^3 - 3u^2 v - 3u v^2 + v^3 - 3u^5 + 6u^3 v^2 + 9u v^4 + 3u^7 + 9u^6 v - 3u^5 v^2 + 15u^4 v^3 - 15u^3 v^4 + 3u^2 v^5 - 9u v^6 - 3v^7.$$

A equação diferencial

$$w = 3adv du^2 - adv^3 + bdu^3 - 3bdv^2 du = 0$$

possui uma órbita fechada hiperbólica $\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt[4]{54}}{3} \cos(t), \frac{\sqrt[4]{54}}{3} \sin(t)\right)$ e w não pode ser fatorada como produto de três 1-formas de classe C^∞ . Um esboço das curvas integrais de $w = 0$ próximo a origem, é apresentado na Figura 2.28. Temos

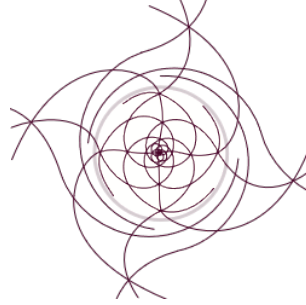


Figura 2.28: Ilustração do Exemplo 2.24.

$$\pi'_\gamma(p) = \exp\left(\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \frac{\langle X(\gamma(s))\gamma'(s)^T, \gamma'(s)^T \rangle}{F_0(s)} ds\right) = \exp\left(-\frac{32\pi\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}\right).$$

2.5 Singularidades no infinito

Nesta seção realizaremos um estudo global das folheações de w para

$$a(u, v) = Au + Bv + \sum_{k=2}^n a_k(u, v) \quad \text{e} \quad b(u, v) = v + \sum_{k=2}^m b_k(u, v), \quad (2-17)$$

com $n, m, k \in \mathbb{N}$ e a_k e b_k são polinômios homogêneos de grau k .

Para este estudo associaremos w à forma diferencial $\varphi^*(w)$ definida em \mathbb{S}^2 que descrevemos a seguir.

Sejam $\mathbb{S}_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2; z > 0\}$ e $\mathbb{S}_-^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2; z < 0\}$ e consideremos $\varphi^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}_+^2$ e $\varphi^- : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}_-^2$ definidas por

$$\begin{aligned} \varphi_+(u, v) &= \left(\frac{u}{\rho(u, v)}, \frac{v}{\rho(u, v)}, \frac{1}{\rho(u, v)} \right), \\ \varphi_-(u, v) &= \left(-\frac{u}{\rho(u, v)}, -\frac{v}{\rho(u, v)}, -\frac{1}{\rho(u, v)} \right), \end{aligned}$$

onde $\rho(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2 + 1}$. Temos

$$d\varphi_{+(u,v)} = -d\varphi_{-(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\rho(u,v)-u\rho_u(u,v)}{\rho(u,v)^2} & -\frac{u\rho_v(u,v)}{\rho(u,v)^2} \\ -\frac{v\rho_u(u,v)}{\rho(u,v)^2} & \frac{\rho(u,v)-v\rho_v(u,v)}{\rho(u,v)^2} \\ -\frac{\rho_u(u,v)}{\rho(u,v)^2} & -\frac{\rho_v(u,v)}{\rho(u,v)^2} \end{pmatrix}.$$

Como

$$\begin{vmatrix} \frac{\rho(u,v)-u\rho_u(u,v)}{\rho(u,v)^2} & -\frac{u\rho_v(u,v)}{\rho(u,v)^2} \\ -\frac{v\rho_u(u,v)}{\rho(u,v)^2} & \frac{\rho(u,v)-v\rho_v(u,v)}{\rho(u,v)^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \neq 0, \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

as aplicações φ_+ e φ_- são difeomorfismos, de modo que podemos definir, em \mathbb{S}_+^2 e \mathbb{S}_-^2 , respectivamente, as formas diferenciáveis $\varphi_+^*(w)$ e $\varphi_-^*(w)$ que para cada $p \in \mathbb{S}_\pm^2$ e cada $\vec{v} \in T_p\mathbb{S}_\pm^2$ associa o número real $\varphi_\pm^*(w)(p)\vec{v} = w(\varphi_\pm^{-1}(p))(d\varphi_\pm^{-1})_p\vec{v}$. Agora, seja $\varphi^*(w)$ a forma diferencial definida em $\mathbb{S}_+^2 \cup \mathbb{S}_-^2$ cujas folheações é a reunião das folheações de $\varphi_+^*(w)$ com as de $\varphi_-^*(w)$. Denotaremos por f_1, f_2 e f_3 as folheações de $\varphi_\pm^*(w)$.

Proposição 2.25. *Seja $\mathbb{S}^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2; z = 0\}$. A forma diferencial $\varphi^*(w)$ definida acima em $\mathbb{S}^2 - \mathbb{S}^1$ pode ser estendida analiticamente à uma forma diferencial ϖ definida em toda a esfera \mathbb{S}^2 e o equador \mathbb{S}^1 é invariante pelas folheações f_1, f_2 e f_3 de ϖ .*

Demonstração. A esfera \mathbb{S}^2 é totalmente coberta pelo atlas $\mathcal{A} = \{(\phi_i, U_i), (\psi_i, V_i), i = 1, 2, 3\}$ onde $U_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2; x_i > 0\}$ e $V_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2; x_i < 0\}$. Defina, $\sigma_i : U_i \cup V_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $\sigma_i(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_j}{x_i}, \frac{x_k}{x_i}\right), j < k, i \neq j, i \neq k, i = 1, 2, 3$.

Dado $p = \left(\frac{u}{\rho}, \frac{v}{\rho}, \frac{1}{\rho}\right) = \sigma_1^{-1}(x, y) \in U_1 \cup V_1$, temos $(x, y) = \left(\frac{v}{u}, \frac{1}{u}\right)$ e daí, $u = \frac{1}{y}$ e $v = \frac{x}{y}$ o que implica em $du = -\frac{1}{y^2}dy$ e $dv = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$. Dessa forma, se $w_1(p)[dx; dy] = \varphi^*(w)(p)[dx; dy]$, na carta $\sigma_1 : U_1 \cup V_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, temos

$$\begin{aligned} w_1(p)[dx; dy] &= \frac{1}{y^6} \left[(x^3 - 3x)a\left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y}\right) + 3(x^2 - 1)b\left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y}\right) \right] dy^3 \\ &\quad + \frac{3}{y^5} \left[(1 - x^2)a\left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y}\right) - 2xb\left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y}\right) \right] dy^2 dx \\ &\quad + \frac{3}{y^4} \left(xa\left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y}\right) + b\left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y}\right) \right) dy dx^2 - \frac{1}{y^3} a\left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y}\right) dx^3 \\ &= \frac{1}{y^6} \left\{ \left[(x^3 - 3x)a\left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y}\right) + 3(x^2 - 1)b\left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y}\right) \right] dy^3 \right. \\ &\quad + 3y \left[(1 - x^2)a\left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y}\right) - 2xb\left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y}\right) \right] dy^2 dx \\ &\quad \left. + 3y^2 \left(xa\left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y}\right) + b\left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y}\right) \right) dy dx^2 - y^3 a\left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y}\right) dx^3 \right\}. \end{aligned}$$

Para $p = \sigma_2^{-1}(x, y) \in U_2 \cup V_2$, temos $(x, y) = (\frac{u}{v}, \frac{1}{v})$ e daí, $u = \frac{x}{y}$ e $v = \frac{1}{y}$ o que implica em $du = \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy$ e $dv = -\frac{1}{y^2} dy$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} w_2(p)[dx; dy] &= \frac{1}{y^6} \left[(1 - 3x^2) a\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) + (3x - x^3) b\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) \right] dy^3 \\ &\quad + \frac{3}{y^5} \left[2x a\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) + (x^2 - 1) b\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) \right] dy^2 dx \\ &\quad - \frac{3}{y^4} \left(a\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) + x b\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) \right) dy dx^2 - \frac{1}{y^3} b\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) dx^3 \\ &= \frac{1}{y^6} \left\{ \left[(1 - 3x^2) a\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) + (3x - x^3) b\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) \right] dy^3 \right. \\ &\quad + 3y \left[2x a\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) + (x^2 - 1) b\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) \right] dy^2 dx \\ &\quad \left. - 3y^2 \left(a\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) + x b\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) \right) dy dx^2 - y^3 b\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) dx^3 \right\}. \end{aligned}$$

Por fim, se $p = \sigma_3^{-1}(x, y) \in U_3 \cup V_3$ temos $(x, y) = (u, v)$ e daí,

$$w_3(p)[dx; dy] = \varphi^*(w)(p)[dx; dy] = w(u, v)[du; dv].$$

Temos:

$$\begin{aligned} a\left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y}\right) &= Ay^{-1} + Bxy^{-1} + \sum_{k=2}^n y^{-k} a_k(1, x); \\ b\left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y}\right) &= xy^{-1} + \sum_{k=2}^m y^{-k} b_k(1, x); \\ a\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) &= Axy^{-1} + By^{-1} + \sum_{k=2}^n y^{-k} a_k(x, 1); \\ b\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) &= y^{-1} + \sum_{k=2}^m y^{-k} b_k(x, 1). \end{aligned}$$

Seja $r = \max\{m, n\}$. Escrevendo $a_1(u, v) = Au + Bv$ e $b_1(u, v) = v$, temos:

$$\begin{aligned} a\left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y}\right) &= \sum_{k=1}^n y^{-k} a_k(1, x) = \frac{1}{y^r} P_1(x, y); \\ b\left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y}\right) &= \sum_{k=1}^n y^{-k} b_k(1, x) = \frac{1}{y^r} Q_1(x, y); \\ a\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) &= \sum_{k=1}^n y^{-k} a_k(x, 1) = \frac{1}{y^r} P_2(x, y); \\ b\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) &= \sum_{k=1}^m y^{-k} b_k(x, 1) = \frac{1}{y^r} Q_2(x, y), \end{aligned}$$

onde

$$P_1(x, y) = \sum_{k=1}^n y^{r-k} a_k(1, x), \quad Q_1(x, y) = \sum_{k=1}^n y^{r-k} b_k(1, x),$$

$$P_2(x, y) = \sum_{k=1}^n y^{r-k} a_k(x, 1), \quad Q_2(x, y) = \sum_{k=1}^n y^{r-k} b_k(x, 1).$$

Daí,

$$w_1(p)[dx; dy] = \frac{1}{y^{r+6}} \left\{ [(x^3 - 3x) P_1(x, y) + (3x^2 - 1) Q_1(x, y)] dy^3 \right. \\ \left. - 3y [(x^2 - 1) P_1(x, y) + 2x Q_1(x, y)] dx dy^2 \right. \\ \left. + 3y^2 [x P_1(x, y) + Q_1(x, y)] dx^2 dy - y^3 P_1(x, y) dx^3 \right\}$$

e

$$w_2(p)[dx; dy] = \frac{1}{y^{r+6}} \left\{ [(1 - 3x^2) P_2(x, y) + (3x - x^3) Q_2(x, y)] dy^3 \right. \\ \left. + 3y [2x P_2(x, y) + (x^2 - 1) Q_2(x, y)] dx dy^2 \right. \\ \left. - 3y^2 [P_2(x, y) + x Q_2(x, y)] dx^2 dy - y^3 Q_2(x, y) dx^3 \right\}.$$

Seja $\mathbb{R}_0^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}$. Note que $\mathbb{S}^1 = \sigma_1^{-1}(\mathbb{R}_0^2) \cup \sigma_2^{-1}(\mathbb{R}_0^2)$ e que w_1 e w_2 estão bém definidas em $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_0^2$. Note ainda que podemos estender w_1 e w_2 a todo \mathbb{R}^2 multiplicando as mesmas por y^{r+6} e obtendo as formas

$$\varpi_1 = A_3 dy^3 + 3y A_2 dx dy^2 + 3y^2 A_1 dx^2 dy + y^3 A_0 dx^3$$

e

$$\varpi_2 = B_3 dy^3 + 3y B_2 dx dy^2 + 3y^2 B_1 dx^2 dy + y^3 B_0 dx^3$$

onde

$$A_3(x, y) = (x^3 - 3x) P_1(x, y) + (3x^2 - 1) Q_1(x, y);$$

$$A_2(x, y) = (1 - x^2) P_1(x, y) - 2x Q_1(x, y);$$

$$A_1(x, y) = x P_1(x, y) + Q_1(x, y);$$

$$A_0(x, y) = -P_1(x, y);$$

$$B_3(x, y) = (1 - 3x^2) P_2(x, 1) + (3x - x^3) Q_2(x, 1);$$

$$B_2(x, y) = 2x P_2(x, y) + (x^2 - 1) Q_2(x, y);$$

$$B_1(x, y) = -(P_2(x, y) + x Q_2(x, y));$$

$$B_0(x, y) = -Q_2(x, y).$$

Agora, observe que $(\sigma_1^{-1})^*(\varpi_1)$, $(\sigma_2^{-1})^*(\varpi_2)$ e $(\sigma_3^{-1})^*(w_3)$ induzem em \mathbb{S}^2 uma forma diferencial ϖ globalmente definida em \mathbb{S}^2 . Como $A_j, B_j, j = 0, 1, 2, 3$, são polinômios, ϖ é analítica. De

$$\varpi_1(x, 0)[dx; dy] = A_3(x, 0) dy^3 \quad \text{e} \quad \varpi_2(x, 0)[dx; dy] = B_3(x, 0) dy^3,$$

temos $\varpi_1(x, 0)[dx; 0] = \varpi_2(x, 0)[dx; 0] = 0$, para todo x de modo que \mathbb{S}^1 é invariante

pelas três folheações de ϖ . □

Definição 2.26. *Chamaremos de compatificação de w , que denotaremos por $\pi(w)$, à restrição de ϖ ao disco \mathbb{S}_+^2 .*

Note que, considerando-se a notação da Proposição 2.25, um ponto $p = \sigma_i^{-1}(x_p, 0) \in \mathbb{S}^1$, $i = 1$ ou $i = 2$ é uma singularidade de ϖ se, e só se, $A_3(x_p, 0) = 0$ ou $B_3(x_p, 0) = 0$.

Usaremos a notação apresentada na Proposição 2.25 em todas as definições e resultados que seguem.

Definição 2.27. *A toda singularidade de ϖ pertencente a \mathbb{S}^1 chamaremos de singularidade de w no infinito (ou singularidade infinita de w).*

Lembrando que $\mathbb{S}^1 = \sigma_1^{-1}(\mathbb{R}_0^2) \cup \sigma_2^{-1}(\mathbb{R}_0^2)$ vemos que para estudar as singularidades de w no infinito (equivalente às de ϖ em \mathbb{S}^1) podemos usar as mudanças de coordenadas:

$$\begin{aligned} \text{(M1)} \quad & u = \frac{1}{y}, \quad v = \frac{x}{y}, \quad du = -\frac{1}{y^2} dy \quad \text{e} \quad dv = \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy; \\ \text{(M2)} \quad & u = \frac{x}{y}, \quad v = \frac{1}{y}, \quad du = \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy \quad \text{e} \quad dv = -\frac{1}{y^2} dy. \end{aligned}$$

Lema 2.28. *Os polinômios $A_j, B_j, j = 0, 1, 2, 3$ da Proposição 2.25 satisfazem a seguinte relação:*

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{A_2(3x^2 - 1) + 2x A_3}{(x^2 + 1)^2}, \quad A_1 = -\frac{2x A_2 + A_3}{x^2 + 1}, \\ B_0 &= -\frac{B_2(3x^2 - 1) + 2x B_3}{(x^2 + 1)^2}, \quad B_1 = -\frac{2x B_2 + B_3}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Demonstração. De $P_1(x, y) = -A_0(x, y)$ e $Q_2(x, y) = -B_0(x, y)$ obtemos que

$$Q_1(x, y) = x A_0(x, y) + A_1(x, y) \quad \text{e} \quad P_2(x, y) = x B_0(x, y) - B_1(x, y).$$

Daí, tem-se:

$$\begin{aligned} A_2(x, y) &= -(x^2 + 1) A_0(x, y) - 2x A_1(x, y), \\ A_3(x, y) &= 2x(x^2 + 1) A_0(x, y) + (3x^2 - 1) A_1(x, y), \\ B_2(x, y) &= (x^2 + 1) B_0(x, y) - 2x B_1(x, y), \\ B_3(x, y) &= -2x(x^2 + 1) B_0(x, y) + (3x^2 - 1) B_1(x, y). \end{aligned}$$

Das equações acima obtemos o resultado. □

2.5.1 Caso $m = n$

No caso $m = n$, em (2-17), temos:

$$\begin{aligned} P_1(x, y) &= a_n(1, x) + y a_{n-1}(1, x) + \dots + y^{n-1} a_1(1, x), \\ Q_1(x, y) &= b_n(1, x) + y b_{n-1}(1, x) + \dots + y^{n-1} b_1(1, x), \\ P_2(x, y) &= a_n(x, 1) + y a_{n-1}(x, 1) + \dots + y^{n-1} a_1(x, 1), \\ Q_2(x, y) &= b_n(x, 1) + y b_{n-1}(x, 1) + \dots + y^{n-1} b_1(x, 1). \end{aligned}$$

Lema 2.29. *Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+1}}, 0, \frac{1}{\sqrt{x_0^2+1}}\right) \in \sigma_1^{-1}(\mathbb{R}_0)$ com $A_3(x_0, 0) = 0$ e $A_2(x_0, 0) \neq 0$. Em uma vizinhança de $(x_0, 0)$ a equação diferencial*

$$\varpi_1 = A_3 dy^3 + 3y A_2 dx dy^2 + 3y^2 A_1 dx^2 dy + y^3 A_0 dx^3 = 0$$

pode ser escrita na forma

$$(A_3(x, y) dy + y f(x, y) dx) (dy^2 + y g(x, y) dx dy + y^2 h(x, y) dx^2) = 0,$$

onde f, g e h são funções de classe C^∞ e $f(x_0, 0) = 3 A_2(x_0, 0)$.

Demonstração. Temos:

$$\varpi_1 = (A_3(x, y) dy + y f(x, y) dx) (dy^2 + y g(x, y) dx dy + y^2 h(x, y) dx^2),$$

se, e somente se:

$$\begin{aligned} 3 A_2(x, y) &= f(x, y) + A_3(x, y) g(x, y), \\ 3 A_1(x, y) &= f(x, y) g(x, y) + A_3(x, y) h(x, y), \\ A_0(x, y) &= f(x, y) h(x, y). \end{aligned} \tag{2-18}$$

Seja $\Psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\Psi((x, y), (r, s, t)) = (s A_3(x, y) + r - 3 A_2(x, y), t A_3(x, y) + r s - 3 A_1(x, y), r t - A_0(x, y)).$$

Sejam, $r_0 = 3 A_2(x_0, 0)$, $s_0 = -\frac{2x_0}{x_0^2+1}$ e $t_0 = \frac{1}{3} \frac{3x_0^2-1}{(x_0^2+1)^2}$. Como $A_3(x_0, 0) = 0$, utilizando o Lema 2.28, temos:

$$\begin{aligned} s_0 A_3(x_0, 0) + r_0 - 3 A_2(x_0, 0) &= 0, \\ t_0 A_3(x_0, 0) + r_0 s_0 - 3 A_1(x_0, 0) &= 3 A_2(x_0, 0) \left(-\frac{2x_0}{x_0^2+1}\right) - 3 A_1(x_0, 0) = 0, \\ r_0 t_0 - A_0(x_0, 0) &= 3 A_2(x_0, 0) \frac{3x_0^2-1}{3(x_0^2+1)^2} - A_0(x_0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\Psi((x_0, 0), (r_0, s_0, t_0)) = (0, 0, 0).$$

Como,

$$D_2\Psi((x_0, 0), (r_0, s_0, t_0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_0 & r_0 & 0 \\ t_0 & 0 & r_0 \end{pmatrix},$$

temos $\det(\Psi((x_0, 0), (r_0, s_0, t_0))) = r_0^2 = 9A_2(x_0, 0)^2 \neq 0$. Daí, do Teorema da Função Implícita, existem uma vizinhança V de $(x_0, 0)$ em \mathbb{R}^2 e funções f, g, h definidas em V satisfazendo (2-18). \square

Lema 2.30. *Se no lema anterior considerarmos $\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+1}}, 0, \frac{1}{\sqrt{x_0^2+1}}\right) \in \sigma_2^{-1}(\mathbb{R}_0)$ com $B_3(x_0, 0) = 0$ e $B_2(x_0, 0) \neq 0$, temos que, em uma vizinhança de $(x_0, 0)$,*

$$\varpi_2(x, y) = (B_3(x, y) dy + y f(x, y) dx)(dy^2 + y g(x, y) dx dy + y^2 h(x, y) dx^2) = 0,$$

onde f, g e h são funções de classe C^∞ , com $f(x_0, 0) = 3B_2(x_0, 0)$.

Demonstração. A prova é *mutatis mutandis* à do Lema 2.29. \square

Teorema 2.31. *Suponhamos $m = n$ e consideremos $(x_0, 0)$ uma singularidade de w no infinito. Se $\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+1}}, 0, \frac{1}{\sqrt{x_0^2+1}}\right) \in \sigma_1^{-1}(\mathbb{R}_0)$, $A_2(x_0, 0) \neq 0$ e $\frac{\partial A_3}{\partial x}(x_0, 0) \neq 0$, (respectivamente $\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+1}}, 0, \frac{1}{\sqrt{x_0^2+1}}\right) \in \sigma_2^{-1}(\mathbb{R}_0)$ e, $B_2(x_0, 0) \neq 0$ e $\frac{\partial B_3}{\partial x}(x_0, 0) \neq 0$), então:*

- (i) *se $\frac{\partial A_3}{\partial x}(x_0, 0) A_2(x_0, 0) < 0$ (respectivamente $\frac{\partial B_3}{\partial x}(x_0, 0) B_2(x_0, 0) < 0$) então $(x_0, 0)$ é um nó-regular¹ em $(U_1 \cup V_1) \cap (\mathbb{S}_+^2 \cup \mathbb{S}^1)$ (respectivamente em $(U_2 \cup V_2) \cap (\mathbb{S}_+^2 \cup \mathbb{S}^1)$), conforme Figura 2.29(a).*
- (ii) *se $\frac{\partial A_3}{\partial x}(x_0, 0) A_2(x_0, 0) > 0$ (respectivamente $\frac{\partial B_3}{\partial x}(x_0, 0) B_2(x_0, 0) > 0$) então $(x_0, 0)$ é uma sela-regular² em $(U_1 \cup V_1) \cap (\mathbb{S}_+^2 \cup \mathbb{S}^1)$ (respectivamente em $(U_2 \cup V_2) \cap (\mathbb{S}_+^2 \cup \mathbb{S}^1)$), conforme Figura 2.29(b).*

Demonstração. Do Lema 2.29, as folheações de w próximo a $(x_0, 0)$ é a união da folheação de

$$w_1 = A_3(x, y) dy + y f(x, y) dx$$

¹Uma das folheações é topologicamente equivalente a um nó e as outras folheações são curvas regulares

²Uma das folheações é topologicamente equivalente a uma sela e as outras folheações são curvas regulares

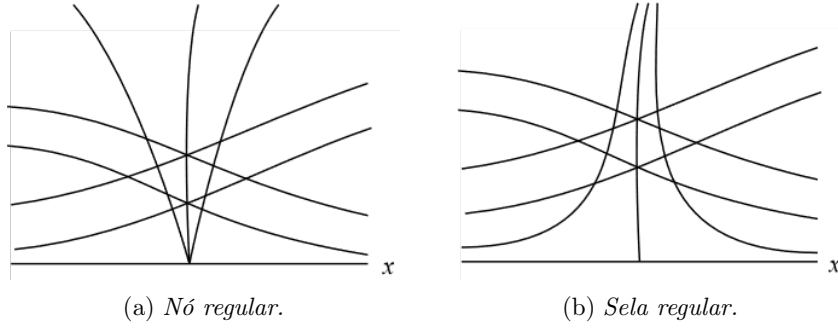


Figura 2.29: Configuração genérica de w próximo a uma singularidade infinita.

com as duas de

$$w_2 = dy^2 + y g(x, y) dx dy + y^2 h(x, y) dx^2.$$

O ponto $(x_0, 0)$ é uma singularidade de w_1 e sua classificação é dada pelo sinal do determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial x}(x_0, 0) & \frac{\partial A_3}{\partial y}(x_0, 0) \\ 0 & -f(x_0, 0) \end{vmatrix} = -f(x_0, 0) \frac{\partial A_3}{\partial x}(x_0, 0) = -3 \frac{\partial A_3}{\partial x}(x_0, 0) A_2(x_0, 0).$$

Será um nó se $\frac{\partial A_3}{\partial x}(x_0, 0) A_2(x_0, 0) < 0$ e sela se $\frac{\partial A_3}{\partial x}(x_0, 0) A_2(x_0, 0) > 0$.

Com relação as folheações de w_2 , dado $y \in \mathbb{R}$ suficientemente próximo de zero, $w_2(x_0, y)[dx; dy] = 0$ se, e somente se,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3 A_1(x_0, y) - \sqrt{\Delta(y)}}{6 A_2(x_0, y)} y \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{3 A_1(x_0, y) + \sqrt{\Delta(y)}}{6 A_2(x_0, y)} y,$$

onde $\Delta(y) = g(x_0, y)^2 - 4 h(x_0, y)$. Pelo Lema 2.28, temos:

$$\Delta(0) = s_0^2 - 4 t_0 = \frac{4}{3(x_0^2 + 1)^2} > 0.$$

Daí, para uma vizinhança suficientemente pequena de $(x_0, 0)$, temos $\Delta(y) > 0$ e portanto, no ponto (x_0, y) as folheações de w_2 possuem duas direções distintas e próximas da linha horizontal.

Consequentemente, um esboço das soluções é o da Figura 2.29 conforme o sinal de $\frac{\partial A_3}{\partial x}(x_0, 0) A_2(x_0, 0)$. \square

Corolário 2.32. Se em (2-17), os polinômios a e b forem de grau um, então, a configuração genérica global de w é uma entre as da Figura 2.30.

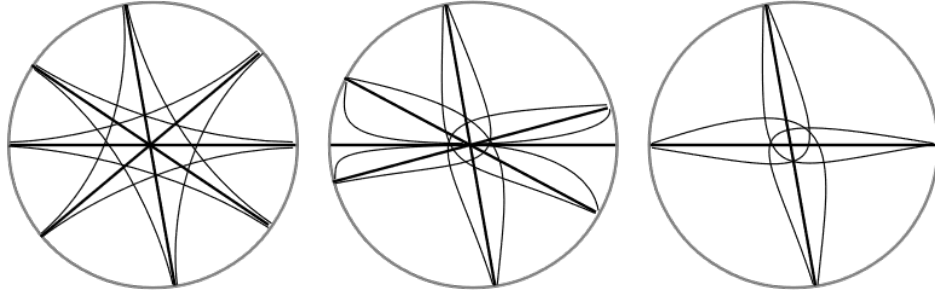


Figura 2.30: Configuração genérica global de $w = 0$ para o caso em que a e b são polinômios de grau um.

Demonstração. No caso em que a e b , possuem grau um, temos:

$$A_3(x, y) = x[(x^2 - 3)(A + Bx) + 3x^2 - 1] = \varphi(x),$$

onde φ é a aplicação da Seção 2.2.2. Ou seja, a cada $(0, 0, p_0)$ do campo de Lie-Cartan, temos em correspondência uma singularidade $(p_0, 0)$ no infinito e vice-versa. Vimos, na Seção 2.2.2, que uma singularidade $(0, 0, p)$ do campo de Lie-Cartan é uma sela se $\Lambda(p) < 0$ e nó se $\Lambda(p) > 0$, onde

$$\Lambda(p) = -\varphi'(p) (\varphi'(p) + L_v(0, 0, p)) = \frac{1}{3} \frac{\partial A_3}{\partial x}(p, 0) A_2(p, 0).$$

Logo,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial x}(p_0, 0) & \frac{\partial A_3}{\partial y}(p_0, 0) \\ 0 & -f(p_0, 0) \end{vmatrix} = -\Lambda(p_0).$$

Desse modo, se $(0, 0, p_0)$ é uma sela para LC , no infinito, $(p_0, 0)$ é um nó regular e, se $(0, 0, p_0)$ é um nó para LC , no infinito, $(p_0, 0)$ é uma sela regular. Com isso, do Teorema 2.31 e do Teoremas 2.12 segue o resultado. \square

2.6 Estabilidade Estrutural

Consideremos a família de formas diferenciais

$$w_t = \text{Im}[e^{it} (a + ib) (du + i dv)^3],$$

onde a e b são funções de classe C^∞ . Note que

$$w_t = w + (a du^3 - 3b du^2 dv - 3a du dv^2 + b dv^3) t + \varpi_t,$$

onde w é a forma diferencial de (2-4), $\varpi_t = r_1 du^3 - 3r_2 du^2 dv - 3r_1 du dv^2 + r_2 dv^3$ e:

$$r_1 = \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} t^{2n-1} \right) a - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} t^{2n} \right) b,$$

$$r_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} t^{2n} \right) a + \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} t^{2n-1} \right) b.$$

Assim, para ε suficientemente próximo de zero, se

$$w_\varepsilon = c_0 du^3 + c_1 du^2 dv + c_2 du dv^2 + c_3 dv^3,$$

e

$$w + (a du^3 - 3b du^2 dv - 3a du dv^2 + b dv^3) \varepsilon = d_0 du^3 + d_1 du^2 dv + d_2 du dv^2 + d_3 dv^3,$$

então, c_j está C^1 próxima de d_j , para $j = 0, 1, 2, 3$.

Definição 2.33. Dada w como em (2-4) chamaremos de bissetriz de w à forma:

$$w^* = a du^3 - 3b du^2 dv - 3a du dv^2 + b dv^3. \quad (2-19)$$

Se

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

então,

$$w^*(u, v, R_{\frac{\pi}{6}}[du : dv]) = w.$$

Ou seja, em cada ponto regular as folheações de $w^* = 0$ e $w = 0$ se intersectam formando ângulo de $\frac{\pi}{6}$ rad. Veja que w^* e w possuem as mesmas singularidades.

Lema 2.34. Seja $\gamma : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma solução regular de $w = 0$ parametrizada pelo comprimento de arco s . Sejam $\Sigma_1 = \{\gamma(0) + \lambda n(0); \lambda \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)\} \equiv (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ e $\Sigma_2 \equiv (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$, seções transversais a γ em $\gamma(0)$ e $\gamma(l)$ respectivamente, de forma que a aplicação de primeiro retorno $\pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ de w esteja bem definida, e consideremos

$$w_\varepsilon = w + \varepsilon w^*. \quad (2-20)$$

Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que Σ_1 e Σ_2 são seções transversais de w_ε para todo $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Diminuindo ε_1 se necessário, a aplicação de Poincaré $\pi_\varepsilon : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ de w_ε está bem definida para todo $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Desse modo podemos definir a aplicação

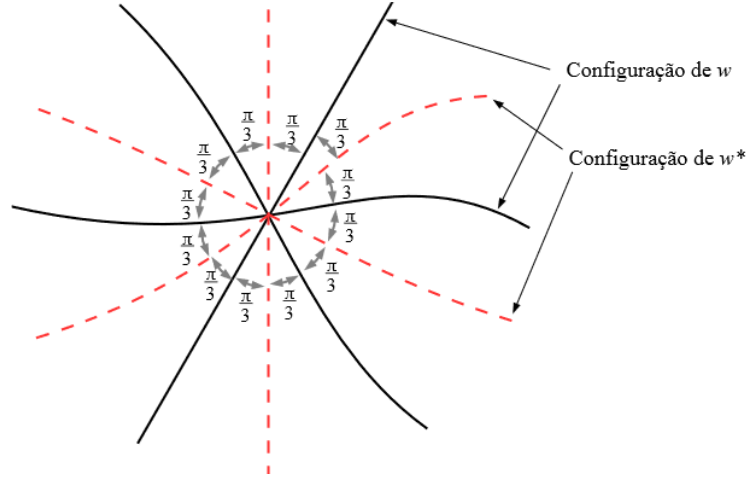


Figura 2.31: Folheações de $w = 0$ e $w^* = 0$ próximo a um ponto regular.

$\Pi : \Sigma_1 \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \Sigma_2$ dada por $\Pi(\lambda_0, \varepsilon) = \pi_\varepsilon(\lambda_0)$. Então,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon}(0, 0) < 0.$$

Demonstração. Aplicando a mudança de coordenadas Φ de (2-14) em (2-20), obtemos:

$$-A_3 d\lambda^3 - 3A_2 d\lambda^2 ds + 3A_1 d\lambda ds^2 + A_0 ds^3 = 0, \quad (2-21)$$

onde

$$\begin{aligned} A_3 &= F - \varepsilon G, & A_2 &= (1 - k\lambda)(G + \varepsilon F), \\ A_1 &= (1 - k\lambda)^2(F - \varepsilon G), & A_0 &= (1 - k\lambda)^3(G + \varepsilon F) \end{aligned}$$

e as funções F e G são as mesmas de (2-15), sendo que, agora, $\lambda = \lambda(s, \lambda_0, \varepsilon)$. De (2-21), temos

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[-A_3 \left(\frac{d}{ds} \lambda \right)^3 - 3A_2 \left(\frac{d}{ds} \lambda \right)^2 + 3A_1 \frac{d}{ds} \lambda + A_0 \right] = 0.$$

Avaliando a equação acima em $\lambda_0 = 0$ e $\varepsilon = 0$, obtemos

$$3F(\gamma(s)) \frac{d}{ds} \left(\frac{d\lambda}{d\varepsilon} \right) - 3k(s)G(\gamma(s)) \frac{d\lambda}{d\varepsilon} + (G_v(\gamma(s))x' - G_u(\gamma(s))y') \frac{d\lambda}{d\varepsilon} + F(\gamma(s)) = 0.$$

Como, $G(\gamma(s)) = 0$ e $F(\gamma(s)) \neq 0$, para todo $s \in [0, l]$, temos

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{d\lambda}{d\varepsilon} \right) + \frac{G_v(\gamma(s))x' - G_u(\gamma(s))y'}{3F(\gamma(s))} \frac{d\lambda}{d\varepsilon} = -\frac{1}{3}.$$

Seja $z : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $z(s) = \frac{d\lambda}{d\varepsilon}(s, 0, 0)$. Como $\lambda(0, 0, \varepsilon) = 0$

qualquer que seja ε , temos $z(0) = 0$. Consideremos, então o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} z' = -\frac{G_v(\gamma(s))x' - G_u(\gamma(s))y'}{3F(\gamma(s))} z - \frac{1}{3} \\ z(0) = 0 \end{cases}.$$

Como $\Pi(0, \varepsilon) = \lambda(l, 0, \varepsilon)$, resolvendo o problema acima, obtemos:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon}(0, 0) = -\frac{1}{3} \left(\int_0^l \exp \left(-\frac{1}{3} \int_0^s \frac{R(t)}{F(\gamma(t))} dt \right) ds \right) \exp \left(-\frac{1}{3} \int_0^l \frac{R(s)}{F(\gamma(s))} ds \right) < 0,$$

onde, $R(t) = G_v(\gamma(t))x' - G_u(\gamma(t))y'$, $t \in [0, l]$. □

Proposição 2.35. *Sejam $w = 0$ como em (2-4), com a e b suaves, e γ uma solução periódica regular isolada. Existe uma vizinhança V de γ e um número $\delta > 0$ tais que, para todo $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$ a forma diferencial cúbica $w_\varepsilon = w + \varepsilon w^*$, possui um número finito de órbitas periódicas em V . Além disto, o conjunto dos números ε para os quais w_ε possui alguma solução periódica não hiperbólica tem medida nula.*

A Proposição 2.35 é um resultado análogo ao Lema 2.6 de [7] só que para binárias cúbicas. A prova dessa proposição é a mesma do referido lema de [7].

Linhas de Laguerre

Por volta do ano 1800 surge o interesse em compreender quando uma curva é super osculada pelo seu círculo osculador em todos os seus pontos. Um dos pioneiros desse estudo foi Jule de La Gournerie (1814 – 1883) e outro Edmond Nicolas Laguerre (1834 – 1886). O segundo conseguiu provar, no ano de 1875 em [29], que uma curva é super osculada pelo seu círculo osculador em todos os pontos se, e somente se, satisfizer a equação diferencial apresentada na Proposição 3.2. Isso fez com que essas curvas fossem batizadas de linhas de Laguerre.

Nas três primeiras seções deste capítulo apresentamos as definições e resultados fundamentais para os estudos nas seções e capítulos posteriores. Na quarta seção apresentamos um estudo de singularidades da equação diferencial (3-2).

3.1 Definições e resultados importantes

Definição 3.1. *Sejam M uma superfície de classe C^6 no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 , $p \in M$, $v \in T_pM$ e π o plano normal a M que contém v . Seja c a curva formada pela intersecção de π com M . Caso c seja super osculada pelo seu círculo osculador em p dizemos que v é uma direção de Laguerre. Dizemos que uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ é uma linha de Laguerre se $\gamma'(s)$ for uma direção de Laguerre qualquer que seja $s \in I$.*

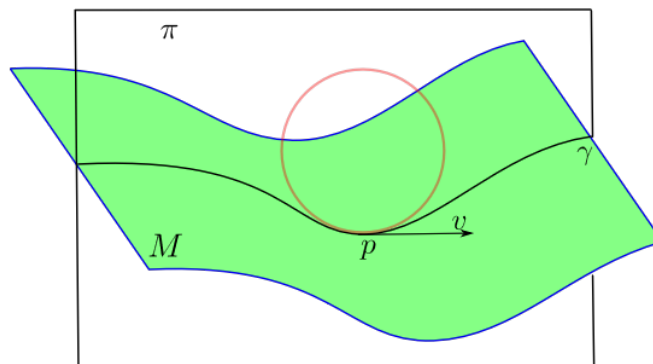


Figura 3.1: Ilustração da Definição 3.1.

Proposição 3.2. (Laguerre, [29]) Uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ parametrizada por comprimento de arco é de Laguerre se, e somente se, satisfaz à equação

$$k'_n(s) - 2k_g(s)\tau_g(s) = 0, \quad (3-1)$$

onde $k_n(s)$ é a curvatura normal no ponto $p = \gamma(s)$ e na direção $v = \gamma'(s)$, $k_g(s)$ e $\tau_g(s)$ são, respectivamente, a curvatura geodésica e a torção geodésica de γ em $p = \gamma(s)$ e $k'_n = \frac{dk_n}{ds}$

Proposição 3.3. (Teorema de Laguerre, [41] - p. 193) Para qualquer curva γ em M parametrizada por comprimento de arco, com o mesmo vetor tangente $\gamma'(0) \in T_pM$,

$$k'_n(s) - 2k_g(s)\tau_g(s)$$

tem o mesmo valor em $s = 0$.

Proposição 3.4. (G. G. Arsan e A. Özdeğer, [5]) Numa carta local (u, v) a equação diferencial das linhas de Laguerre pode ser escrita na forma

$$A_0 du^3 + 3A_1 du^2 dv + 3A_2 du dv^2 + A_3 dv^3 = 0, \quad (3-2)$$

onde

$$A_0 = e_u - 2(f\Gamma_{11}^2 + e\Gamma_{11}^1),$$

$$A_1 = e_v - 2(f\Gamma_{12}^2 + e\Gamma_{12}^1),$$

$$A_2 = g_u - 2(f\Gamma_{12}^1 + g\Gamma_{12}^2),$$

$$A_3 = g_v - 2(f\Gamma_{22}^1 + g\Gamma_{22}^2),$$

sendo e, f, g os coeficientes da segunda forma fundamental e Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel.

Demonstração. Consideremos uma curva de Laguerre $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, parametrizada pelo comprimento de arco s , com $c(0) = p$ e $c'(0) \in T_pM$. Numa carta local (u, v) a torção geodésica é dada por:

$$\tau_g = \frac{(Fg - Gf) dv^2 + (Eg - Ge) du dv + (Ef - Fe) du^2}{\sqrt{EG - F^2}}$$

e curvatura geodésica é

$$k_g = \frac{[\Gamma_{11}^2 du^3 + du v'' - u'' dv + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) du^2 dv + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) dv^2 du - \Gamma_{22}^1 dv^3]}{\sqrt{EG - F^2}},$$

visto que,

$$E du^2 + G dv^2 + 2F du dv = 1.$$

Do triedro de Darboux, a curvatura normal no ponto $c(s)$ e na direção $c'(s)$ é

$$k_n(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = \langle c''(s), N(s) \rangle.$$

Desse modo,

$$k'_n = \langle c''', N \rangle + \langle c'', N' \rangle. \quad (3-3)$$

Aplicando as equações de Gauss e fazendo

$$f_u = e_v - e \Gamma_{12}^1 + f (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) + g \Gamma_{11}^2 \quad \text{e} \quad f_v = g_u + e \Gamma_{22}^1 - f (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2) - g \Gamma_{12}^2,$$

devido as equações de Codazzi–Mainardi, tem-se

$$\begin{aligned} \langle c''', N \rangle = & (e \Gamma_{11}^1 + f \Gamma_{11}^2 + e_u) (u')^3 + 3 (f \Gamma_{11}^1 + g \Gamma_{11}^2 + e_v) (u')^2 v' + \\ & + 3 (e \Gamma_{22}^1 + f \Gamma_{22}^2 + g_u) u' (v')^2 + (f \Gamma_{22}^1 + g \Gamma_{22}^2 + g_v) (v')^3 + \\ & + 3 (f u'' v' + g v' v'' + e u' u'' + f u' v'') \end{aligned} \quad (3-4)$$

e

$$\begin{aligned} \langle c'', N' \rangle = & -(e \Gamma_{11}^1 + f \Gamma_{11}^2) (u')^3 - [g \Gamma_{11}^2 + 2e \Gamma_{12}^1 + f (\Gamma_{11}^1 + 2\Gamma_{12}^2)] (u')^2 v' - \\ & [2g \Gamma_{12}^2 + e \Gamma_{22}^1 + f (2\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2)] u' (v')^2 - [f \Gamma_{22}^1 + g \Gamma_{22}^2] (v')^3 - \\ & (f v' + e u') u'' - (g v' + f u') v''. \end{aligned} \quad (3-5)$$

Lembrando que,

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = 1,$$

e que $\langle c', c'' \rangle = 0$, temos

$$k'_n = (\langle c''', N \rangle + \langle c'', N' \rangle) (E du^2 + 2F du dv + G dv^2) - 2 \langle c', c'' \rangle \langle c'', N \rangle. \quad (3-6)$$

Usando (3-4), (3-5) e (3-6) em (3-3), obtemos o resultado. \square

Corolário 3.5. (G. G. Arsan and A. Özdeğer, [5]) *Em uma carta principal a equação diferencial das Linhas de Laguerre tem a forma:*

$$E \left(\frac{\partial k_1}{\partial u} du^3 + 3 \frac{\partial k_1}{\partial v} du^2 dv \right) + G \left(3 \frac{\partial k_2}{\partial u} du dv^2 + \frac{\partial k_2}{\partial v} dv^3 \right) = 0.$$

Demonstração. Em uma carta principal $f = F = 0$, de modo que $k_1 = \frac{e}{E}$ e $k_2 = \frac{g}{G}$.

Além disso,

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{G E_u - 2 F F_u + F E_v}{2(EG - F^2)} = \frac{E_u}{2E}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{G E_v - F G_u}{2(EG - F^2)} = \frac{E_v}{2E},$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{E G_u - F E_v}{2(EG - F^2)} = \frac{G_u}{2G} \quad e \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{E G_v - 2 F F_v + F G_u}{2(EG - F^2)} = \frac{G_v}{2G}.$$

Dessa forma:

$$A_0 = e_u - 2e \Gamma_{11}^1 = E \frac{\partial k_1}{\partial u},$$

$$A_1 = e_v - 2e \Gamma_{12}^1 = E \frac{\partial k_1}{\partial v},$$

$$A_2 = g_u - 2g \Gamma_{12}^2 = G \frac{\partial k_2}{\partial u},$$

$$A_3 = g_v - 2g \Gamma_{22}^2 = G \frac{\partial k_2}{\partial v}.$$

Disto segue o resultado. \square

Corolário 3.6. *Seja M uma superfície parametrizada pelo gráfico $(u, v, h(u, v))$, onde $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma função de classe C^6 . Então, na carta (u, v) ,*

$$A_0 = \frac{h_{uuu}(h_u^2 + h_v^2 + 1) - 3h_{uu}(h_u h_{uu} + h_v h_{uv})}{(h_u^2 + h_v^2 + 1)^{3/2}},$$

$$A_1 = \frac{h_{uuv}(h_u^2 + h_v^2 + 1) - 3h_u h_{uu} h_{uv} - h_v h_{uu} h_{vv} - 2h_v h_{uv}^2}{(h_u^2 + h_v^2 + 1)^{3/2}},$$

$$A_2 = \frac{h_{uvv}(h_u^2 + h_v^2 + 1) - 3h_v h_{uv} h_{vv} - h_u h_{uu} h_{vv} - 2h_u h_{uv}^2}{(h_u^2 + h_v^2 + 1)^{3/2}},$$

$$A_3 = \frac{h_{vvv}(h_u^2 + h_v^2 + 1) - 3h_{vv}(h_u h_{uv} + h_v h_{vv})}{(h_u^2 + h_v^2 + 1)^{3/2}}.$$

Demonstração. Os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental são:

$$E = 1 + h_u^2, \quad F = h_u h_v, \quad G(u, v) = 1 + h_v^2,$$

$$e = \frac{h_{uu}}{\sqrt{h_u^2 + h_v^2 + 1}}, \quad f = \frac{h_{uv}}{\sqrt{h_u^2 + h_v^2 + 1}}, \quad g = \frac{h_{vv}}{\sqrt{h_u^2 + h_v^2 + 1}}.$$

respectivamente. Aplicando a Proposição 3.4, conclui-se a prova. \square

Corolário 3.7. *Seja M uma superfície parametrizada pelo gráfico $(u, v, h(u, v))$, onde*

$$h(u, v) = \frac{1}{2}(k_1 u^2 + k_2 v^2) + \frac{1}{6}(a u^3 + 3b_1 u^2 v + 3b u v^2 + c v^3) + O(4).$$

Então, $p \in \mathbb{P}^1$ é uma direção de Laguerre na origem se, e somente se,

$$a p^3 + 3b_1 p^2 + 3b p + c = 0 \quad \text{ou} \quad a + 3b_1 p + 3b p^2 + c p^3 = 0.$$

Demonstração. Do Corolário 3.6, temos

$$A_3(0, 0) = c, A_2(0, 0) = b, A_1(0, 0) = b_1 \text{ e } A_0(0, 0) = a.$$

Desse modo p é uma direção de Laquerre na origem se, e só se,

$$ap^3 + 3b_1p^2 + 3bp + c = 0 \text{ ou } a + 3b_1p + 3bp^2 + cp^3 = 0.$$

□

3.2 Configuração próximo a curva discriminante

Seja $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$L(u, v, p) = A_0(u, v) + 3A_1(u, v)p + 3A_2(u, v)p^2 + A_3(u, v)p^3.$$

Assim, a equação (3.4) é equivalente á equação diferencial implícita $L(u, v, p) = 0$. Lembremos que

$$\Sigma_L = \{(u, v, p) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}); L(u, v, p) = 0 \text{ e } L_p(u, v, p) = 0\}$$

e que $\Gamma_L = \pi(\Sigma_L)$. Dado um ponto $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, fixado arbitrariamente, $L(u_0, v_0, p) = 0$, é uma equação polinomial de grau três em p . Daí segue da Proposição 1.12 que o conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_L$ é formado por dois subconjuntos disjuntos de \mathbb{R}^2 e que, em um destes subconjuntos cada ponto possui três direções distintas tangentes as linhas de Laguerre e no outro somente uma direção. Analisaremos, nesta seção, o comportamento das linhas de Laguerre em pontos da curva discriminante, ou seja na curva de transição de uma para três direções. Discutiremos o comportamento das linhas de Laguerre próximo a uma direção tangente a Γ_L que seja uma solução tripla de $L(u_0, v_0, p) = 0$, uma solução dupla e uma solução simples.

Podemos supor que o ponto de Γ_L onde ocorre essa tangência seja $(0, 0, p_0)$. Faremos isto em todos os resultados desta seção.

Consideremos uma carta de Monge local (u, v) como no Corolário 3.7. Assim,

$$L(0, 0, p_0) = cp_0^3 + 3bp_0^2 + 3b_1p_0 + a = 0 \tag{3-7}$$

ou

$$L(0, 0, p_0) = c + 3bp_0 + 3b_1p_0^2 + ap_0^3 = 0. \tag{3-8}$$

Usaremos (3-7).

Proposição 3.8. *Caso a tangência seja tripla e $L_u(0, 0, p_0) L_{ppp}(0, 0, p_0) \rho \neq 0$, onde*

$$\rho = L_u(0, 0, p_0)L_{vp}(0, 0, p_0) - L_v(0, 0, p_0)L_{up}(0, 0, p_0),$$

a configuração próximo a origem é homeomorfa a uma das apresentadas na Figura 3.2.

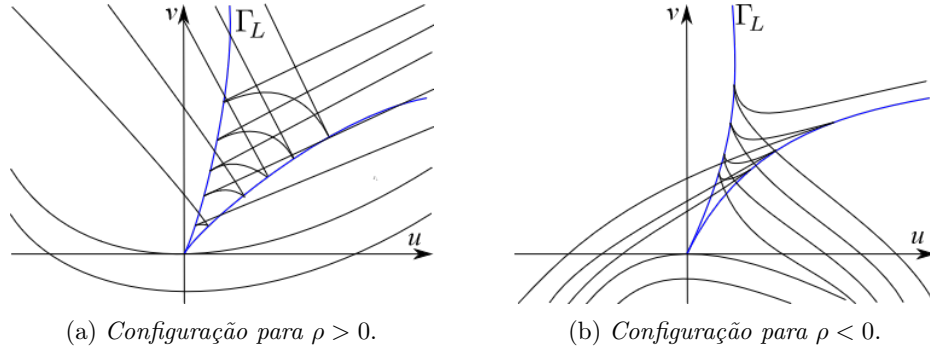


Figura 3.2: Configuração genérica das linhas de Laguerre numa vizinhança da origem, caso $L(0, 0, p) = 0$ tenha uma raiz tripla tangente à curva discriminante.

Demonstração. Suponhamos que $p = 0$ seja essa direção tripla, i.e., seja raiz tripla de (3-7). Assim, devemos ter $a = b_1 = b = 0$. Do Teorema 1.80, segue o resultado. \square

Proposição 3.9. *Caso, em um ponto da curva discriminante, haja uma direção tangente e uma direção transversal raiz dupla de 3-7, a configuração local é a apresentada na Figura 3.3.*

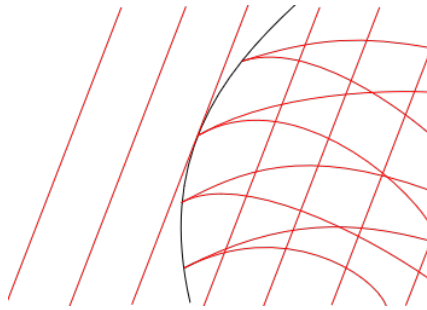


Figura 3.3: Configuração genérica das linhas de Laguerre numa vizinhança de um ponto em que há uma solução de $L(0, 0, p) = 0$ tangente à curva discriminante e uma solução dupla transversal.

Demonstração. Da Proposição 1.12, devemos ter $L(0, 0, 0) = L_p(0, 0, 0) = 0$ e $L_{pp}(0, 0, 0) \neq 0$. Daí, do Teorema 1.81, segue que as curvas integrais, de duas

folheações são difeomorfas a cúspides, que naturalmente se tratam de direções transversais à curva discriminante, raízes dupla de (3-7). Desse modo as curvas integrais próximas a um ponto da tangência simples é homeomorfa a da Figura 3.3. \square

Proposição 3.10. *Se em um ponto da curva discriminante houver uma direção transversal raiz simples de (3-7) e uma tangente raiz dupla, há uma vizinhança do mesmo em que as curvas integrais são homeomorfas a uma das configurações apresentadas na Figura 3.4.*

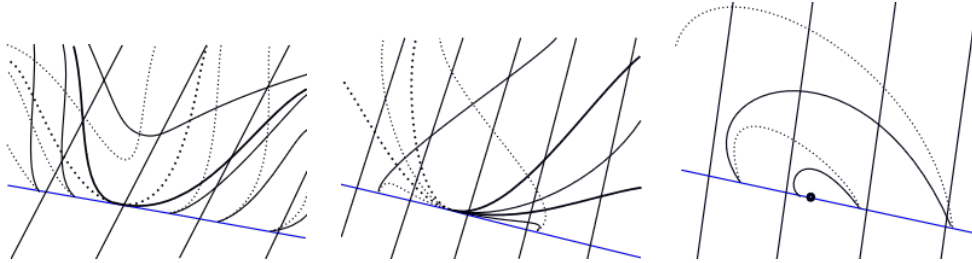


Figura 3.4: Configuração genérica das linhas de Laguerre numa vizinhança de um ponto qua há uma direção tangente à curva discriminante que seja raiz dupla da equação $L(0, 0, p) = 0$.

Demonstração. Para termos uma raiz dupla de (3-7) tangente à curva discriminante, o plano de contato deve ser tangente à superfície de Lie-Cartan neste ponto. Logo o resultado segue do Teorema 1.82 e da Proposição 1.83. \square

3.3 Configuração próximo a um ponto singular

Chamaremos de singularidade de Laguerre às singularidades da equação (3-2), i.e, aos pontos (\bar{u}, \bar{v}) tais que $A_j(\bar{u}, \bar{v}) = 0$ para $j = 0, 1, 2, 3$. Por questão de simplificação suporemos sempre $\bar{u} = \bar{v} = 0$. Genericamente, a pré-imagem $\pi^{-1}(0, 0)$ pode conter quatro, duas ou nenhuma singularidade do campo de Lie-Cartan.

O estudo que desenvolvemos trata de um caso particular que é o caso em que a singularidade é composta por duas ou quatro singularidades do campo de Lie-Cartan, sendo uma delas a origem. Tal simplificação foi feita dado o grau de dificuldade devido ao número de parâmetros.

3.3.1 Resultados preliminares

Proposição 3.11. *Seja M uma superfície de classe C^r , $r \geq 6$. Suponhamos $(0, 0)$ uma singularidade da equação diferencial das linhas de Laguerre em M . Se*

$(u, v) \rightarrow (u, v, h(u, v))$ for uma parametrização local da superfície M em $(0, 0)$ com

$$h(u, v) = \frac{1}{2}(k_1(0, 0)u^2 + k_2(0, 0)v^2) + h_1(u, v),$$

onde $k_1(u, v) \leq k_2(u, v)$ são as curvaturas principais e $h_1(0, 0) = (h_1)_u(0, 0) = (h_1)_v(0, 0) = 0$. Então, em $(0, 0)$,

$$(k_1)_u = (k_1)_v = (k_2)_u = (k_2)_v = h_{uuu} = h_{uuv} = h_{uvv} = h_{vvv} = 0$$

e

$$\begin{aligned} h_{uuuu} &= (k_1)_{uu} + 3k_1^3, & h_{uuuv} &= (k_1)_{uv}, \\ h_{uuuv} &= (k_1)_{vv} + k_1k_2^2 = (k_2)_{uu} + k_1^2k_2, & h_{uuvv} &= (k_2)_{uv}, \\ h_{vvvv} &= (k_2)_{vv} + 3k_2^3, & h_{uuuu} &= (k_1)_{uuu}, \\ h_{uuuv} &= (k_1)_{uuv}, & h_{uuuv} &= (k_1)_{uvv} = (k_2)_{uuu}, \\ h_{uuvv} &= (k_1)_{vvv} = (k_2)_{uuv}, & h_{uuvv} &= (k_2)_{uvv}. \\ h_{vvvv} &= (k_2)_{vvv}, \end{aligned}$$

Demonstração. Segue de $k_1 = H - \sqrt{H^2 - K}$ e $k_2 = H + \sqrt{H^2 - K}$, onde H é a função curvatura média e K a Gaussiana. \square

Corolário 3.12. *Os coeficientes da equação diferencial das linhas de Laguerre, numa carta na origem, são:*

$$\begin{aligned} A_3(u, v) &= (k_2)_{uv}u + (k_2)_{vv}v + \frac{1}{2}((k_1)_{vvv}u^2 + 2k_{uuv}uv + (k_2)_{vvv}v^2) + h.o.t, \\ A_2(u, v) &= ((k_1)_{vv} - k_1^2k_2 + k_1k_2^2)u + (k_2)_{uv}v + \\ &\quad + \frac{1}{2}((k_1)_{uuv}u^2 + 2(k_1)_{vvv}uv + (k_2)_{uuv}v^2) + h.o.t, \\ A_1(u, v) &= (k_1)_{uv}u + (k_1)_{vv}v + \frac{1}{2}((k_1)_{uuv}u^2 + 2(k_1)_{uuv}uv + (k_1)_{vvv}v^2) + h.o.t, \\ A_0(u, v) &= (k_1)_{uu}u + (k_1)_{uv}v + \frac{1}{2}((k_1)_{uuu}u^2 + 2(k_1)_{uuv}uv + (k_1)_{uuv}v^2) + h.o.t. \end{aligned}$$

Demonstração. Segue da Proposição 3.4 e da Proposição 3.11. \square

É importante observar que, dada uma singularidade de Laguerre, pode existir uma vizinhança V_0 dessa singularidade tal que $\Gamma_F \cap V_0 = \{(0, 0)\}$ ou pode ser que, para qualquer vizinhança V a intersecção $\Gamma_F \cap V$ seja composta por dois ou quatro arcos que se intersejam na origem. Como o método que será utilizado é o método de levantamento de Lie-Cartan, precisaremos analisar sob quais hipóteses a equação

$$\varphi(p) = L_u(0, 0, p) + pL_v(0, 0, p) = 0, \quad (3-9)$$

tem duas, quatro ou nenhuma solução real. Dessa forma a diversidade de tipos de configuração próximo a uma singularidade depende da combinação da forma do

conjunto $\Gamma_F \cap V$ com o número de raízes da equação (3-9). Para entender melhor isto, lembremos que se $(0, 0, p_0)$ é uma singularidade do campo de Lie-Cartan, então $(0, 0, p_0) \in \Sigma_L$ e, numa vizinhança deste ponto, Σ_L pode ser um ponto isolado ou um arco de curva regular (caso genérico) intersecando o eixo $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ em $(0, 0, p_0)$. O motivo pelo qual aparece número par de arcos será esclarecido na Proposição 3.14.

Lema 3.13. *Seja $(0, 0, p_0)$ uma singularidade do campo de Lie-Cartan. Se $\Gamma_L = (u(t), v(t))$, com $t \in [p_0 - \varepsilon, p_0 + \varepsilon]$, $u(p_0) = v(p_0) = 0$ é a uma parametrização da projeção do arco da curva Σ_L por $(0, 0, p_0)$ e se:*

- (i) $\rho(p_0) = 0$, então a imagem de Γ_L se resume ao ponto $(0, 0)$,
- (ii) $\rho(p_0) \neq 0$, então a imagem de Γ_L é um arco de curva,

onde

$$\rho(t) = L_u(u(t), v(t), t)L_{vp}(u(t), v(t), t) - L_v(u(t), v(t), t)L_{up}(u(t), v(t), t).$$

Demonstração. Da igualdade $L(u(t), v(t), t) = L_p(u(t), v(t), t) = 0$, temos o sistema:

$$\begin{cases} L_u(0, 0, p_0) u'(p_0) + L_v(0, 0, p_0) v'(p_0) = -L_p(0, 0, p_0) \\ L_{up}(0, 0, p_0) u'(p_0) + L_{vp}(0, 0, p_0) v'(p_0) = -L_{pp}(0, 0, p_0) \end{cases} \quad (3-10)$$

Como,

$$\rho(t) = \begin{vmatrix} L_u(u(t), v(t), t) & L_v(u(t), v(t), t) \\ L_{up}(u(t), v(t), t) & L_{vp}(u(t), v(t), t) \end{vmatrix},$$

se $\rho(p_0) = 0$ o sistema (3-10) é impossível ou indeterminado e a projeção se resume a $\pi(0, 0, p_0) = (0, 0)$ e, se $\rho(p_0) \neq 0$ o sistema (3-10) possui solução única e teremos uma curva. \square

Proposição 3.14. *Numa vizinhança V da origem, suficientemente pequena, genericamente, $\Gamma_L \cap V$ é homeomorfo a um dos conjuntos da Figura 3.5.*

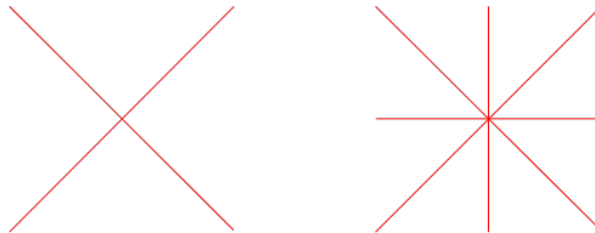


Figura 3.5: Conjunto $\Gamma_L \cap V$.

Demonstração. Do Corolário 3.12

$$\rho(p_0) = d_4 p_0^4 + d_3 p_0^3 + d_2 p_0^2 + d_1 p_0 + d_0 ,$$

onde

$$\begin{aligned} d_4 &= [3k_1k_2^2 - 3k_1^2k_2 + 3(k_1)_{vv}](k_2)_{vv} - 3(k_2)_{uv}^2, \\ d_3 &= 6[(k_1)_{uv}(k_2)_{vv} - (k_1)_{vv}(k_2)_{uv}], \\ d_2 &= 6(k_1)_{uv}(k_2)_{uv} - 9(k_1)_{vv}^2 + 9k_1k_2(k_1 - k_2)(k_1)_{vv} + 3(k_1)_{uu}(k_2)_{vv}, \\ d_1 &= (6k_1^2k_2 - 6k_1k_2^2 - 6(k_1)_{vv})(k_1)_{uv} + 6(k_1)_{uu}(k_2)_{uv}, \\ d_0 &= 3[(k_1)_{uu}(k_1)_{vv} - (k_1)_{uv}^2]. \end{aligned}$$

Como $\rho(p) = 0$ tem no máximo quatro raízes reais (um número finito), genericamente, $\rho(p_0) \neq 0$ para $(0, 0; p_0)$ uma singularidade do campo LC (que também são em número finito). Como o campo de LC tem, duas, quatro ou nenhuma singularidade singularidade, a Proposição está provada. \square

Proposição 3.15. *Seja $t \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ a direção da reta tangente a um arco da curva discriminante pela origem e seja α_j a parte linear de A_j onde $A_j, j = 0, 1, 2, 3$ são os coeficientes de*

$$L = A_3 dv^3 + 3A_2 du dv^2 + 3A_2 du^2 dv + A_0 du^3,$$

então

$$\delta_0 = \alpha_0^2 \alpha_3^2 - 6\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + 4\alpha_0 \alpha_2^3 + 4\alpha_1^3 \alpha_3 - 3\alpha_1^2 \alpha_2^2$$

vale zero no ponto $(1, t)$. A recíproca também é verdadeira, isto é, se $\delta(0, t) = 0$, então t é a direção de um arco da curva discriminante pela origem.

Demonstração. Da Seção 1.2.2, a equação $L = 0$ é equivalente a

$$z^3 + 3\beta z + \gamma = 0,$$

onde

$$\beta = 9A_1A_3 - 9A_2^2 \text{ e } \gamma = 27A_0A_3^2 - 81A_1A_2A_3 + 54A_2^3.$$

Assim, o discriminante da equação $L = 0$ é

$$\delta = 4\beta^3 + \gamma^2 = 720A_3^2\delta_1,$$

onde

$$\delta_1 = A_0^2A_3^2 - 6A_0A_1A_2A_3 + 4A_0A_2^3 + 4A_1^3A_3 - 3A_1^2A_2^2.$$

Agora, observemos que a reta de equação $v = tu$ é tangente à curva discriminante na origem. O resultado segue de

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\delta_1(u, tu)}{u^4} = \delta_0(1, t)$$

e de que para $u = 0$ a reta $v = tu$ tangencia a curva discriminante. \square

3.3.2 Caso em que o campo de Lie-Cartan tem singularidade

Do Corolário 3.12 e de (3-9) temos que as singularidades do campo de Lie-Cartan são os pontos $(0, 0, \bar{p})$, onde \bar{p} é uma solução da equação

$$\varphi(p) = (k_2)_{vv}p^4 + 4(k_2)_{uv}p^3 + 3(2(k_1)_{vv} + k_1k_2^2 - k_1^2k_2)p^2 + 4(k_1)_{uv}p + (k_1)_{uu} = 0. \quad (3-11)$$

Como (3-11) é de grau 4, se ela possui uma raiz real, ou essa raiz é dupla ou ela possui mais uma raiz real. Suporemos que uma dessas é $p = 0$, o que equivale a fazer $(k_1)_{uu} = 0$. Fazendo isto, (3-11) toma a forma $p\varphi_1(p) = 0$, onde

$$\varphi_1(p) = (k_2)_{vv}p^3 + 4(k_2)_{uv}p^2 + 3(2(k_1)_{vv} + k_1k_2^2 - k_1^2k_2)p + 4(k_1)_{uv}. \quad (3-12)$$

Lema 3.16. *Caso $(k_2)_{vv} \neq 0$,*

$$k_{2vv} (2(k_1)_{vv} + k_1k_2^2 - k_1^2k_2) - \frac{16}{9}(k_2)_{uv}^2 > 0,$$

o campo de Lie-Cartan possui no máximo duas singularidades.

Demonstração. Para o campo de Lie-Cartan ter exatamente duas singularidades é necessário e suficiente que $\varphi_1(p) = 0$ possua uma única raiz real. Aplicando a mudança de coordenadas da seção 1.2.2 vemos que p é uma solução de $\varphi_1(p) = 0$ se, e somente se, $z = 3(k_2)_{vv}p + 4(k_2)_{uv}$ é solução da equação:

$$z^3 + 3Hz + G = 0, \quad (3-13)$$

onde

$$\begin{aligned} H &= (k_2)_{vv} (2(k_1)_{vv} + k_1k_2^2 - k_1^2k_2) - \frac{16}{9}(k_2)_{uv}^2, \\ G &= 4(k_1)_{uv}(k_2)_{vv}^2 + 4(k_2)_{uv}(k_1^2k_2 - k_1k_2^2 - 2(k_1)_{vv})(k_2)_{vv} + \frac{128}{27}(k_2)_{uv}^3. \end{aligned}$$

Da Tabela 1.1 no Capítulo 1, segue que (3-13) tem somente uma raiz real z_0 . Logo, LC tem duas singularidades $(0, 0, 0)$ e $(0, 0, p_0)$, onde $p_0 = \frac{z_0 - 4(k_2)_{uv}}{3(k_2)_{vv}}$. \square

Lema 3.17. *A singularidade $(0, 0, 0)$ é uma sela hiperbólica.*

Demonstração. A matriz jacobiana do campo de Lie-Cartan em $(0, 0, 0)$ é

$$JLC(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 3(k_1)_{uv} & 3(k_1)_{vv} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -(k_1)_{uuu} & -(k_1)_{uuv} & -4(k_1)_{uv} \end{bmatrix},$$

de modo que os autovalores de $JLC(0, 0, 0)$ são $\lambda_1 = 3(k_1)_{uv}$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = -4(k_1)_{uv}$. Como $\lambda_1\lambda_3 < 0$, se trata de uma sela. \square

Lema 3.18. *Sejam,*

$$\begin{aligned}\lambda_1(p) &= -3(k_2)_{vv}p^2 - 8(k_2)_{uv}p - 6(k_1)_{vv} + 3k_1^2k_2 - 3k_1k_2^2, \\ \lambda_2(p) &= 3(k_2)_{vv}p^2 + 8(k_2)_{uv}p + 6(k_1)_{vv} - 5k_1^2k_2 + 5k_1k_2^2.\end{aligned}$$

Se $(0, 0, \bar{p})$, com $\bar{p} \neq 0$, é uma singularidade de LC , então, ela será uma sela hiperbólica se $\lambda_1(\bar{p})\lambda_2(\bar{p}) < 0$ e um nó caso $\lambda_1(\bar{p})\lambda_2(\bar{p}) > 0$.

Demonstração. Como $\varphi_1(\bar{p}) = 0$,

$$(k_1)_{uv} = -\frac{1}{4}(k_2)_{vv}\bar{p}^3 - (k_2)_{uv}\bar{p}^2 + \frac{3}{4}(k_1^2k_2 - k_1k_2^2 - 2(k_1)_{vv})\bar{p}.$$

Substituindo o valor de $(k_1)_{uv}$ na matriz jacobina $JLC(0, 0, \bar{p})$, obtemos:

$$JLC(0, 0, \bar{p}) = \begin{pmatrix} M & \theta \\ \Theta & \bar{p}\lambda_1(\bar{p}) \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned}M &= \begin{bmatrix} (\frac{3}{2}(k_1)_{vv} - \frac{15}{4}k_1^2k_2 + \frac{15}{4}k_1k_2^2)\bar{p} - \frac{3}{4}(k_2)_{vv}\bar{p}^3 & 3(k_2)_{vv}\bar{p}^2 + 6(k_2)_{uv}\bar{p} + 3(k_1)_{vv} \\ \frac{3}{4}\bar{p}^2(2(k_1)_{vv} - 5k_1^2k_2 + 5k_1k_2^2 - (k_2)_{vv}\bar{p}^2) & 3\bar{p}((k_2)_{vv}\bar{p}^2 + 2(k_2)_{uv}\bar{p} + (k_1)_{vv}) \end{bmatrix}, \\ \theta &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta^T = \begin{bmatrix} -(k_2)_{uv}\bar{p}^4 - 4(k_1)_{vvv}\bar{p}^3 - 6(k_1)_{uvv}\bar{p}^2 - 4(k_1)_{uvv}\bar{p} - (k_1)_{uuu} \\ -(k_2)_{vvv}\bar{p}^4 - 4(k_2)_{uvv}\bar{p}^3 - 6(k_1)_{vvv}\bar{p}^2 - 4(k_1)_{uvv}\bar{p} - (k_1)_{uuu} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Como os autovalores de M são 0 e $\frac{3}{4}\bar{p}\lambda_2(\bar{p})$, se $\lambda_1(\bar{p})\lambda_2(\bar{p}) < 0$ a singularidade é uma sela hiperbólica e caso $\lambda_1(\bar{p})\lambda_2(\bar{p}) > 0$ um nó. \square

3.3.3 Caso particular

Nesta seção analisamos o caso particular em que uma das singularidades é $(0, 0, 0)$ e outra está no infinito (de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$). Isto equivale a fazer $(k_1)_{uu} = (k_2)_{vv} = 0$, de modo que suporemos isto como hipótese em todos os resultados seguintes desta seção.

Lema 3.19. *A singularidade no infinito é genericamente uma sela.*

Demonstração. Na carta (u, v, q) , $q = \frac{du}{dv}$, a jacobiana do campo de Lie-Cartan, em

$(0, 0, 0)$ é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3((k_1)_{vv} + k_1 k_2^2 - k_1^2 k_2) & 3(k_2)_{uv} & 0 \\ 0 & 0 & -4(k_2)_{uv} \end{bmatrix}.$$

Como,

$$\begin{vmatrix} 3(k_2)_{uv} & 0 \\ 0 & -4(k_2)_{uv} \end{vmatrix} = -12(k_2)_{uv}^2 \leq 0,$$

a singularidade no infinito é genericamente uma sela. \square

É importante observar que, os Lemas acima não garantem que, dada uma superfície qualquer uma singularidade do seu campo LC tenha que ter duas selas. Isto ocorreu dadas as particularidades que fizemos $((k_1)_{uu} = (k_2)_{vv} = 0)$.

Proposição 3.20. *Suponhamos que $(k_2)_{uv} \neq 0$ e que o campo LC tenha quatro singularidades distintas: $(0, 0, p_1)$, $(0, 0, p_2)$, $(0, 0, p_3)$ e $(0, 0, p_4)$, onde $p_1 = 0$ e $(0, 0, p_2)$ é a singularidade no infinito. Sejam*

$$\sigma_1 = \frac{3k_1 k_2 (k_1 - k_2) - 6(k_1)_{vv}}{8(k_2)_{uv}} \quad e \quad \sigma_2 = \frac{5k_1 k_2 (k_1 - k_2) - 6(k_1)_{vv}}{8(k_2)_{uv}}.$$

Para $j = 3, 4$, se p_j estiver entre σ_1 e σ_2 então $(0, 0, p_j)$ será um nó e, caso p_j não pertença ao intervalo fechado de extremos σ_1 e σ_2 a singularidade $(0, 0, p_j)$ será uma sela.

Demonstração. Como $(k_2)_{vv} = 0$, se $\varphi(p) = 0$, temos

$$\lambda_1(p)\lambda_2(p) = [3k_1 k_2 (k_1 - k_2) - 8(k_2)_{uv} p - 6(k_1)_{vv}][8(k_2)_{uv} p - 5k_1 k_2 (k_1 - k_2) + 6(k_1)_{vv}].$$

Logo, $\lambda_1(\sigma_j)\lambda_2(\sigma_j) = 0$ e o resultado segue da análise do sinal de uma polinomial quadrática. \square

Da Proposição 3.20, vemos que, com as hipóteses impostas podemos ter um ou dois nós.

A seguir apresentamos alguns exemplos nos quais a origem é uma singularidade da equação diferencial das linhas de Laguerre. Ou seja, $(k_1)_u = (k_1)_v = (k_2)_u = (k_2)_v = 0$.

Exemplo 3.21. *Para $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\sqrt{21}$, $(k_1)_{vv} = 0$, $(k_2)_{uv} = \frac{1}{8}$, $(k_1)_{uv} = \frac{1}{8}$ e as demais derivadas de ordem superior de k_1 e k_2 valendo zero na origem, a equação diferencial das linhas de Laguerre é*

$$v du^3 + 3u du^2 dv + (u + 3v) du dv^2 + u dv^3 = 0.$$

Como

$$\varphi_1(p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{8}p + \frac{1}{2}$$

não possui zeros, as singularidades do campo LC são somente a origem e a no infinito. Como,

$$\delta_0 = \frac{11}{12288} - \frac{13}{13824}t - \frac{5}{3072}t^2 + \frac{1}{1024}t^3 + \frac{1}{1024}t^4$$

as direções tangentes à curva discriminante na origem são:

$$t_1 \approx 0,7244 \quad e \quad t_2 \approx 0,7962.$$

A configuração próximo a origem é a apresentada na Figura 3.6.

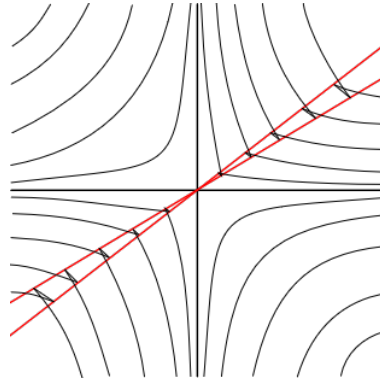


Figura 3.6: Configuração do Exemplo 3.21.

Exemplo 3.22. Se, na origem, $k_1 = -1$, $k_2 = (k_1)_{uv} = (k_1)_{vv} = (k_2)_{uv} = 1$ e demais derivadas de k_1 e k_2 são iguais a, então, a equação diferencial das linhas de Laguerre é

$$v du^3 + 3(u+v) du^2 dv - 3(u-v) du dv^2 + u dv^3 = 0.$$

Como

$$\varphi_1(p) = 4p^2 + 4$$

não possui zeros, as singularidades do campo LC são somente a origem e a do infinito. Como,

$$\delta_0 = t^4 - 14t^3 + 31t^2 + 14t + 1,$$

as direções tangentes à curva Γ_L na origem são:

$$t_1 \approx -0,9017, \quad t_2 \approx 11,0902, \quad t_3 \approx -0,3028, \quad t_4 \approx 3,3028.$$

A configuração próximo a origem é a apresentada na Figura 3.7.

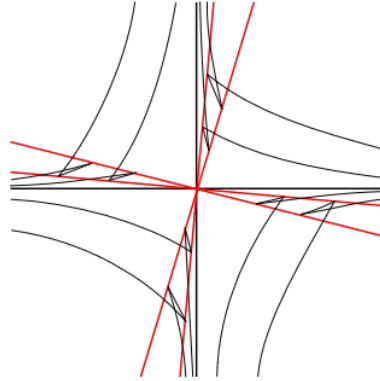


Figura 3.7: Configuração do Exemplo 3.22.

Exemplo 3.23. Para $k_1 = 2\sqrt[3]{2}$, $k_2 = 4\sqrt[3]{2}$, $(k_1)_{vv} = 8$, $(k_1)_{uv} = 41$, $(k_2)_{uv} = 8$ e as demais derivadas de k_1 e k_2 nulas na origem, temos a seguinte equação diferencial para as linhas de Laguerre:

$$41v du^3 + (123u - 24v) du^2 dv - (120u - 24v) du dv^2 + 8u dv^3 = 0.$$

Como

$$\varphi_1(p) = 32p^2 - 144p + 164$$

não possui zeros, as singularidades do campo LC são somente duas.

De

$$\delta_0 = 71680t^4 - 901120t^3 + 3492352t^2 - 2183168t - 5863328,$$

temos que as direções tangentes à curva discriminante na origem são: $t_1 \approx -0,9330$ e $t_2 \approx 2,7886$. A configuração próximo a origem é a da Figura 3.8.

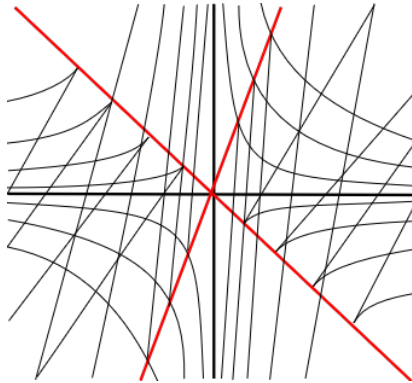


Figura 3.8: Configuração do Exemplo 3.23.

Exemplo 3.24. Fazendo $k_1 = -1$, $k_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{129}$, $(k_1)_{vv} = -8$, $(k_2)_{uv} = 8$, $(k_1)_{uv} = 39$ e demais derivadas de k_1 e k_2 nulas na origem, em (3.12), obtemos:

$$39v du^3 + (117u - 24v) du^2 dv - (120u - 24v) du dv^2 + 8u dv^3 = 0.$$

De

$$\varphi_1(p) = 32p^2 - 144p + 156,$$

segue que o campo de Lie-Cartan tem mais duas singularidades: $(0, 0; p_3)$ e $(0, 0; p_4)$, onde $p_3 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{3}$ e $p_4 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{3}$. Como,

$$\lambda_1(p_3)\lambda_1(p_3) = -192(4 + \sqrt{3})\sqrt{3} < 0 \quad \text{e} \quad \lambda_1(p_4)\lambda_1(p_4) = -192(-4 + \sqrt{3})\sqrt{3} > 0,$$

segue que $(0, 0, p_3)$ é um sela e $(0, 0, p_4)$ um nó. A configuração próximo a origem é a da Figura 3.9.

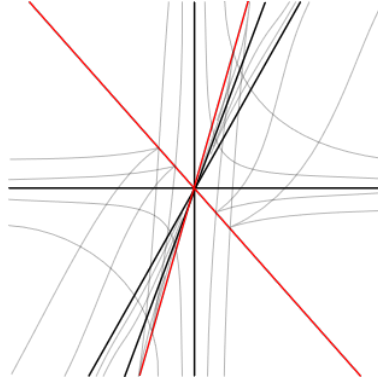


Figura 3.9: Configuração do Exemplo 3.24.

Exemplo 3.25. Para $k_1 = -4$, $k_2 = -2$, $(k_1)_{vv} = -4$, $(k_2)_{uv} = -4$ e demais derivadas de k_1 e k_2 valendo zero, temos:

$$3v du^3 + (9u - 24v) du^2 dv + (72u + 24v) du dv^2 + 8u dv^3 = 0,$$

$$\varphi_1(p) = 16p^2 + 24p + 6,$$

$$\delta_0 = -384t^4 - 1024t^3 + 9504t^2 + 13824t - 918.$$

Logo, o campo de Lie-Cartan possui mais duas singularidades: $(0, 0, p_3)$ e $(0, 0, p_4)$ sendo $p_3 = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{3}$ e $p_4 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{3}$.

Resolvendo a equação $\delta_0 = 0$ obtemos que as direções tangentes à curva discriminante na origem, são:

$$t_1 \approx -5, 837888736, t_2 \approx -1, 420901758, t_3 \approx 0, 06364127813, t_4 \approx 4, 528482549.$$

Analisando o sinal de $\lambda_1(p_j)\lambda_2(p_j)$, $j = 3, 4$ vemos que $(0, 0, p_3)$ é um nó e $(0, 0, p_4)$ uma sela. A configuração próximo a origem é a apresentada na Figura 3.10.

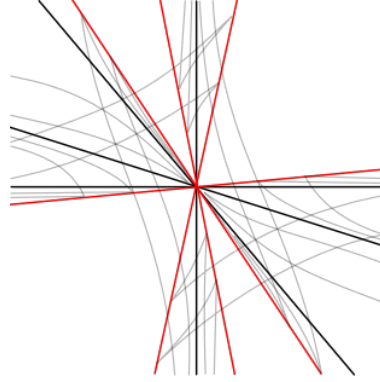


Figura 3.10: Configuração do Exemplo 3.25.

Exemplo 3.26. Para $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{1+\sqrt{33}}{2}$, $(k_1)_{vv} = -16$, $(k_2)_{uv} = 16$, $(k_1)_{uv} = \frac{33}{16}$ e as demais derivadas de k_1 e k_2 nulas, obtemos:

$$\left(\frac{99}{16}u - 48v\right) dv du^2 + (-24u + 48v) du dv^2 + 16 u dv^3 + \frac{33}{16}v du^3 = 0,$$

$$\varphi_1(p) = 64p^2 - 72p + \frac{33}{4},$$

$$\delta_0 = -162816 t^4 - 14848 t^3 - 7176 t^2 + 1914 t - \frac{16335}{64}.$$

Resolvendo $\varphi_1(p) = 0$ vemos que LC tem mais duas singularidades $(0, 0, p_3)$ e $(0, 0, p_4)$ onde $p_3 = \frac{9}{16} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ e $p_4 = \frac{9}{16} + \frac{\sqrt{3}}{4}$. Do sinal de $\lambda_1(p_j)\lambda_2(p_j)$, $j = 3, 4$ segue que são duas selas. Como $\delta_0 = 0$ não possui raiz real, a configuração próximo a origem é a da Figura 3.11.

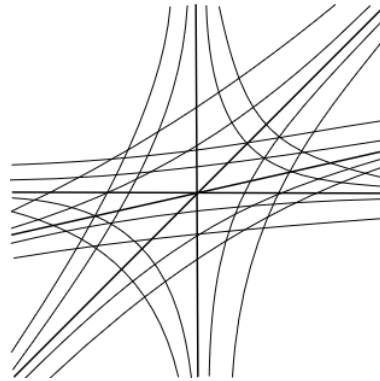


Figura 3.11: Configuração do Exemplo 3.26.

Estabilidade Estrutural e Genericidade para Linhas de Laguerre

Neste capítulo estudaremos a aplicação de Poincaré associada um arco compacto de uma dada folha das linhas de Laguerre, deduzimos uma expressão para a derivada desta aplicação. Estudamos órbitas fechadas regulares (sem intersecção com o conjunto crítico). Por fim, apresentamos um estudo da estabilidade estrutural das linhas de Laguerre para superfícies compactas e orientáveis.

4.1 Aplicação de Poincaré

Proposição 4.1. *Seja $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de classe C^k , com $k \geq 6$ e consideremos $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ uma linha de Laguerre fechada parametrizada pelo comprimento de arco u . Se existir uma vizinhança de $\gamma([0, l])$, em M , na qual M seja orientável, a expressão*

$$X(u, v) = \gamma(u) + v(N \wedge T)(u) + \left[\frac{1}{2}k_p(u)v^2 + \frac{1}{6}A(u)v^3 + B(u, v)v^3 + R(u, v) \right] N(u)$$

define uma parametrização numa vizinhança de γ em M , onde $A(0) = B(u, 0) = R(u, 0) = 0$ e $k_p(u) = k_n(\gamma(u), (N \wedge T)(u))$ é a curvatura normal no ponto $p = \gamma(u)$ e na direção $(N \wedge T)(u)$. Além disso, $A(u) = [2H_v + k_g(k_p - k_n) - \tau'_g](u)$, onde H é a curvatura média de M e $H_v = \frac{\partial H}{\partial v}$.

Demonstração. Existe uma vizinhança V_γ de γ em M tal que dado $p \in V_\gamma$ existem $u \in [0, l]$ e $v, w \in \mathbb{R}$ tais que

$$p = \gamma(u) + v(N \wedge T)(u) + wN(u).$$

Note que existe um aberto U em \mathbb{R}^2 tal que $\beta(u, v, w) = \gamma(u) + v(N \wedge T)(u) + wN(u)$, é um ponto em M para $(u, v, w) \in [0, l] \times U$. A aplicação $\beta : I \times U \rightarrow M$ que fica

assim definida é tal que

$$\begin{cases} \beta_u(u, 0, 0) = 1 \cdot T(u) + 0 \cdot (N \wedge T)(u) + 0 \cdot N(u) \\ \beta_v(u, 0, 0) = 0 \cdot T(u) + 1 \cdot (N \wedge T)(u) + 0 \cdot N(u) \\ \beta_w(u, 0, 0) = 0 \cdot T(u) + 0 \cdot (N \wedge T)(u) + 1 \cdot N(u) \end{cases}$$

Desse modo $\det(d\beta_{(u,0,0)}) = 1$ e portanto existe uma vizinhança $U_0 = (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ de $\{(0, 0)\}$, tal que $\beta|_{S_0}: S_0 \rightarrow \beta(S_0)$, é um difeomorfismo, onde $S_0 = [0, l] \times U_0$. Para cada $u \in [0, l]$ fixado arbitrariamente, o plano π_u gerado pelos vetores $N(u)$ e $(N \wedge T)(u)$ intersecta $\beta(S_0)$ formando uma curva γ_u . Como $\beta|_{S_0}: S_0 \rightarrow \beta(S_0)$ é um difeomorfismo, diminuindo ε se necessário, $\beta^{-1}(\gamma_u)$ é o gráfico de uma aplicação $w_{(u)}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$. Dessa forma podemos definir uma aplicação $w: U_0 \rightarrow \mathbb{R}$, pondo $w(u, v) = w_{(u)}(v)$ e, portanto, $\beta(u, v, w(u, v))$ é uma parametrização de uma vizinhança tubular de γ em M . Note que γ_u é tangente $(N \wedge T)(u)$ em $v = 0$ de modo que $\gamma_u(v) = \gamma(u) + v(N \wedge T)(u) + \left(\frac{\lambda(u)}{2}v^2 + O(3)\right)N(u)$. Sendo $k_n(\gamma(u), (N \wedge T)(u)) = k_p(u)$ a curvatura de γ_u em $v = 0$, temos que $\lambda(u) = k_p(u)$. Consequentemente,

$$w(u, v) = \frac{1}{2}k_p(u)v^2 + \frac{1}{6}A(u)v^3 + v^3B(u, v)$$

e portanto

$$\beta(u, v, w(u, v)) = \gamma(u) + v(N \wedge T)(u) + \left[\frac{1}{2}k_p(u)v^2 + \frac{1}{6}A(u)v^3 + v^3B(u, v)\right]N(u),$$

onde $A(0) = B(u, 0) = 0$.

Agora seja $X(u, v) = \beta(u, v, w(u, v))$. Daí

$$E(u, v) = \langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle = 1 - 2k_g(u)v + O(v^2),$$

$$F(u, v) = \langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle = O(v^2),$$

$$G(u, v) = \langle X_v(u, v), X_v(u, v) \rangle = 1 + O(v^2),$$

$$e(u, v) = \langle X_{uu}(u, v), N(u, v) \rangle = k_n(u) + (-k_n(u)k_g(u) - k_g(u)k_p(u) + \tau_g'(u))v + O(v^2),$$

$$f(u, v) = \langle X_{uv}(u, v), N(u, v) \rangle = \tau_g(u) + (k_g(u)\tau_g(u) + k_p'(u))v + O(v^2),$$

$$g(u, v) = \langle X_{vv}(u, v), N(u, v) \rangle = k_p(u) + (A(u) + 6B(u, 0))v + O(v^2) = k_p(u) + A(u)v + O(v^2),$$

onde $N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}$.

Finalmente, pela definição de curvatura média,

$$H = \frac{eG + Eg - 2fF}{2(EG - F^2)}.$$

Com alguns cálculos, obtemos

$$H_v(u, 0) = \frac{1}{2}(-k_g(u)k_p(u) + k_n(u)k_g(u) + \tau'_g(u) + A(u))$$

e daí,

$$A(u) = k_g(u)k_p(u) - k_n(u)k_g(u) - \tau'_g(u) + 2H_v(u, 0),$$

concluindo a demonstração. \square

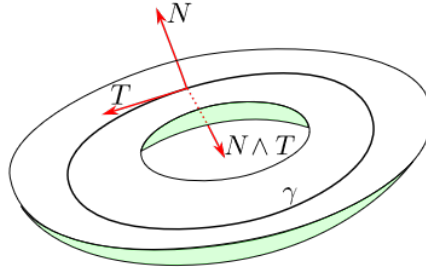


Figura 4.1: Ilustração da Proposição 4.1.

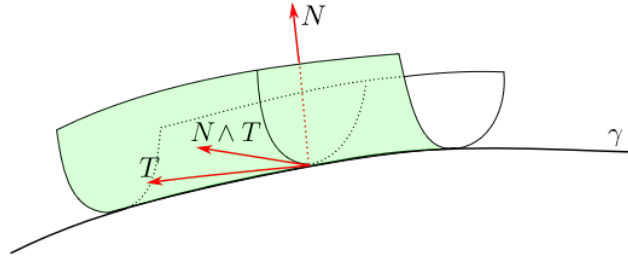


Figura 4.2: Ilustração da Proposição 4.1.

Lema 4.2. Seja $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ uma linha de Laguerre regular, então:

$$k_g(s)(k_n(s) - k_p(s)) + \tau'_g(s) \neq 0, \forall s \in [0, l].$$

Demonstração. Como, na parametrização da Proposição 4.1,

$$A_0(0, 0) = k'_n(s) - 2\tau_g(s)k_g(s) = 0,$$

temos

$$A_3(s, 0)dv^3 + 3A_2(s, 0)dsdv^2 + 3(k_g(s)(k_n(s) - k_p(s)) + \tau'_g(s))ds^2dv = 0.$$

Daí, se para algum $p = \gamma(s)$ tivéssemos $k_g(s)(k_n(s) - k_p(s)) + \tau'_g(s) = 0$, teríamos

$$A_3(s, 0) \left(\frac{dv}{ds} \right)^3 + 3 A_2(s, 0) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 0,$$

donde a direção tangente a γ em $(s, 0)$ seria uma solução dupla da equação de Laguerre. Daí, este ponto pertenceria ao conjunto crítico. Mas γ é uma curva regular e portanto isto não ocorre. \square

Teorema 4.3. *Sejam $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma imersão de classe C^k , com $k \geq 6$ e $\gamma : [s_1, s_2] \rightarrow M$ um arco de linha de Laguerre parametrizada pelo comprimento de arco u . Então a derivada primeira da aplicação de Poincaré associada a γ é dada por*

$$\pi'(0) = \frac{k_g(s_1)(k_n(s_1) - k_p(s_1)) + \tau'_g(s_1)}{k_g(s_2)(k_n(s_2) - k_p(s_2)) + \tau'_g(s_2)} \exp \left(\frac{1}{3} \int_{s_1}^{s_2} \frac{2\tau_g(s)K(s,0) + 4k_g(s)H_s(s,0)}{k_g(s)(k_n(s) - k_p(s)) + \tau'_g(s)} ds \right),$$

onde K é a curvatura Gaussiana, H é a curvatura média e $H_s = D_1 H(s, 0)$.

Demonstração. Em uma carta (u, v) os coeficientes da equação (3-2), são:

$$A_3(u, v) = A(u) + O(v),$$

$$A_2(u, v) = k'_p(u) + 2k_g(u)\tau_g(u) + O(v),$$

$$A_1(u, v) = \tau'_g(u) + k_g(u)(k_n(u) - k_p(u)) + O(v),$$

$$\begin{aligned} A_0(u, v) &= k'_n(u) - 2k_g(u)\tau_g(u) + \left(2\tau_g(u)^3 - 2k_p(u)k_n(u)\tau_g(u) - k'_g(u)k_p(u) - \right. \\ & k'_n(u)k_g(u) + k_n(u)k'_g(u) - 3k'_p(u)k_g(u) + \tau''_g(u) \left. \right) v + O(v^2), \\ &= -\left(2\tau_g(u)K(u, 0) + 4k_g(u)H_u(u, 0) - \frac{\partial A_1}{\partial u}(u, 0) \right) v + O(v^2). \end{aligned}$$

Derivando

$$A_3(u, v_0) \left(\frac{d}{du} v(u, v_0) \right)^3 + 3 A_2(u, v_0) \left(\frac{d}{du} v(u, v_0) \right)^2 + 3 A_1(u, v_0) \frac{d}{du} v(u, v_0) + A_0(u, v_0) = 0,$$

com relação a v_0 e aplicando em $v_0 = 0$, lembrando que $\frac{\partial v}{\partial u}(u, 0) = 0$, temos

$$3 A_1(u, 0) \frac{d}{du} \left(\frac{dv}{dv_0} \right) + \frac{\partial A_0}{\partial v}(u, 0) \frac{dv}{dv_0} = 0.$$

Ou seja,

$$\frac{1}{\frac{dv}{dv_0}} \frac{d}{du} \left(\frac{dv}{dv_0} \right) = - \frac{\frac{\partial A_0}{\partial v}(u, 0)}{3 A_1(u, 0)},$$

de modo que

$$\pi'(0) = \exp \left(\frac{1}{3} \int_{s_1}^{s_2} - \frac{\frac{\partial A_0}{\partial v}(s, 0)}{A_1(s, 0)} ds \right).$$

Como

$$K(s, 0) = k_n(s) k_p(s) - \tau_g(s)^2 \quad \text{e} \quad H_s(s, 0) = \frac{1}{2}(k'_n(s) + k'_p(s)),$$

temos

$$\frac{\partial A_0}{\partial v}(s, 0) = -2\tau_g(s) K(s, 0) - 4k_g(s) H_s(s, 0) + \frac{\partial A_1}{\partial s}(s, 0).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \pi'(0) &= \exp\left(\frac{1}{3} \int_{s_1}^{s_2} \frac{2\tau_g(s) K(s, 0) + 4k_g(s) H_s(s, 0)}{A_1(s, 0)} ds - \frac{1}{3} \ln |A_1(s, 0)| \Big|_{s_1}^{s_2}\right) \\ &= \frac{k_g(s_1)(k_n(s_1) - k_p(s_1)) + \tau'_g(s_1)}{k_g(s_2)(k_n(s_2) - k_p(s_2)) + \tau'_g(s_2)} \exp\left(\frac{1}{3} \int_{s_1}^{s_2} \frac{2\tau_g(s) K(s, 0) + 4k_g(s) H_s(s, 0)}{k_g(s)(k_n(s) - k_p(s)) + \tau'_g(s)} ds\right). \end{aligned}$$

□

Corolário 4.4. *Nas hipóteses da Proposição 4.3, se $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ for uma curva de Laguerre fechada parametrizada pelo comprimento de arco s , então a derivada primeira da aplicação de primeiro retorno de γ é dada por*

$$\pi'(0) = \exp\left(\frac{1}{3} \int_0^l \frac{2\tau_g(s) K(s, 0) + 4k_g(s) H_s(s, 0)}{k_g(s)(k_n(s) - k_p(s)) + \tau'_g(s)} ds\right),$$

onde K é a curvatura Gaussiana, H é a curvatura média e $H_s = D_1 H(s, 0)$.

Definição 4.5. *Uma solução periódica regular da equação diferencial de Laguerre será dita linha periódica hiperbólica de Laguerre se $\pi'(0) \neq 1$.*

Lema 4.6. *Seja $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ uma linha de Laguerre fechada parametrizada por comprimento de arco. Seja $X(u, v)$ a parametrização dada pela Proposição 4.1 e consideremos a deformação*

$$X_\epsilon(u, v) = X(u, v) + \frac{\epsilon}{2} a(u) v^2 \delta(v) N(u),$$

onde a e δ são funções C^∞ e δ tem suporte contido num intervalo $(-\xi, \xi)$ para $\xi > 0$ pequeno e tal que $\delta(v) = 1$, para $|v| < \frac{|\xi|}{2}$. Então, para ϵ suficientemente próximo de zero, γ é uma linha fechada de Laguerre para X_ϵ .

Demonstração. Seja M_ϵ a superfície deformada. De

$$X_\epsilon(u, 0) = X(u, 0) = \gamma(u),$$

segue que γ é um curva fechada em M_ϵ . Como, os coeficientes da equação diferencial

das linhas de Laguerre em M_ϵ , são:

$$\begin{aligned} A_0^\epsilon &= A_0 - (k_p \delta k'_g - 2\tau_g k_p \delta k_n + 3k_g k'_p \delta + 3k_g k_p \delta') \epsilon v + O(v^2), \\ A_1^\epsilon &= A_1 - k_g k_p \delta \epsilon + [(\tau_g^2 k_p \delta - 2k_p^2 k_n \delta - k_p k_n^2 \delta + 2k'_p \delta' + \delta'' k_p + \delta k''_p) \epsilon + O(\epsilon^2)] v \\ &\quad + O(v^2), \\ A_2^\epsilon &= A_2 + (k'_p \delta + k_p \delta') \epsilon + (2k_g k'_p \delta - 2\tau_g k_p \delta k_n + 2k_g k_p \delta' + k'_p \delta + k_p \delta') \epsilon v + O(v^2), \\ A_3^\epsilon &= A_3 - [3k_p \delta (\tau_g^2 + 3k_p^2) \epsilon + O(\epsilon^2)] v + O(v^2), \end{aligned}$$

temos:

$$\begin{aligned} A_0^\epsilon(\gamma(u)) &= A_0(\gamma(u)), \quad A_1^\epsilon(\gamma(u)) = A_1(\gamma(u)) - k_g k_p \epsilon, \\ A_2^\epsilon(\gamma(u)) &= A_2(\gamma(u)) + k'_p \epsilon, \quad A_3^\epsilon(\gamma(u)) = A_3(\gamma(u)), \end{aligned}$$

para cada $u \in [0, l]$. Logo, a linha $v = 0$ é solução da equação diferencial,

$$A_0^\epsilon du^3 + 3A_1^\epsilon du^2 dv + 3A_2^\epsilon du dv^2 + A_3^\epsilon dv^3 = 0.$$

Ou seja, γ é um linha de Laguerre fechada em M_ϵ . □

Lema 4.7. *Se a curva γ do Lema 4.6 é uma solução periódica, então a derivada da aplicação de primeiro retorno de γ em M_ϵ é dada por*

$$\pi'_\epsilon(0) = \exp \left(-\frac{1}{3} \int_0^l \frac{2[(k'_g - k_n \tau_g) \epsilon a - k_p k_n \tau_g + \tau_g^3 + k'_g k_p - k_n k'_g - 2k'_n k_g - \tau_g'']}{k_g (k_n - k_p) + \tau_g' - k_g a \epsilon} ds \right).$$

Demonstração. Da demonstração da Proposição 4.3, temos que

$$3A_1^\epsilon(s, 0) \frac{d}{ds} \left(\frac{dv}{dv_0} \right) = -\frac{\partial A_0^\epsilon}{\partial v}(s, 0) \frac{dv}{dv_0}.$$

Ou seja,

$$\frac{1}{\frac{dv}{dv_0}} \frac{d}{ds} \left(\frac{dv}{dv_0} \right) = -\frac{\frac{\partial A_0^\epsilon}{\partial v}(s, 0)}{3A_1^\epsilon(s, 0)}.$$

Assim,

$$\ln(\pi'_\epsilon(0)) = -\frac{1}{3} \int_0^l \frac{\frac{\partial A_0^\epsilon}{\partial v}(s, 0)}{A_1^\epsilon(s, 0)} ds = -\frac{1}{3} \int_0^l \left(\frac{\frac{\partial A_0^\epsilon}{\partial v}(s, 0) - 3 \frac{d}{ds} A_1^\epsilon(s, 0)}{A_1^\epsilon(s, 0)} + \frac{3 \frac{d}{ds} A_1^\epsilon(s, 0)}{A_1^\epsilon(s, 0)} \right) ds.$$

Como,

$$\frac{\partial A_0^\epsilon}{\partial v}(s, 0) - 3 \frac{d}{ds} A_1^\epsilon(s, 0) = 2[(k'_g - k_n \tau_g) \epsilon a - k_p k_n \tau_g + \tau_g^3 + k'_g k_p - k_n k'_g - 2k'_n k_g - \tau_g'']$$

e

$$A_1^\epsilon(s, 0) = k_g(s)(k_n(s) - k_p(s)) + \tau_g'(s) - k_g(s) a(s) \epsilon,$$

a prova está concluída. \square

Teorema 4.8. *Existe uma função a de classe C^3 tal que se γ for uma linha periódica hiperbólica de Laguerre em M , para $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno, γ é uma solução periódica hiperbólica de Laguerre em M_ϵ para todo $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ e, se γ não for hiperbólica γ é uma linha periódica hiperbólica de Laguerre em M_ϵ para todo $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ diferente de zero.*

Demonstração. Tomando

$$a = (\tau_g^2 - k_n^2 - 4k_g^2) k_g \tau_g + (k_g' - k_n \tau_g) \tau_g' - k_g \tau_g'',$$

temos

$$\frac{d}{d\epsilon} \pi_\epsilon'(0) \Big|_{\epsilon=0} = -\frac{\pi'(0)}{3} \int_0^l \frac{a^2}{[k_g(k_n - k_p) + \tau_g']^2} ds \neq 0.$$

Assim, se $\pi'(0) \neq 1$ existe $\epsilon_0 > 0$ para o qual, $\pi_\epsilon'(0) \neq 1$ sempre que $|\epsilon| < |\epsilon_0|$ e se $\pi'(0) = 1$, obtemos $\epsilon_0 > 0$ tal que $\pi_\epsilon'(0) \neq 1$ sempre que $0 < |\epsilon| < |\epsilon_0|$. \square

4.2 Estabilidade Estrutural

Consideremos uma superfície M de classe C^r , $r \geq 6$ no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Sejam \mathcal{L} , LC , Σ , \mathcal{LC} a superfície de Lie-Cartan, o campo de Lie-Cartan, conjunto crítico e o campo de direções tangente à \mathcal{L} , respectivamente, para as linhas de Laguerre em M .

Lembremos que o campo \mathcal{LC} é um campo de direções que não é globalmente orientável. Desse modo não faz sentido falar em ω -limite e α -limite para \mathcal{LC} , no entanto, o campo \mathcal{LC} determina uma folheação \mathcal{F} de dimensão um em $\mathcal{L} \setminus \mathcal{S}$, onde \mathcal{S} é o conjunto dos pontos singulares de \mathcal{LC} . Desse modo, podemos falar em conjunto limite como na definição seguinte.

Definição 4.9. *Dada uma folha F de \mathcal{F} se F for uma curva fechada diremos que o conjunto limite de F é $\Omega_F = F$. Caso F não seja fechada, $\Omega_F := \overline{F} \setminus F$. Chamaremos de conjunto limite de \mathcal{F} ao conjunto*

$$\Omega = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \Omega_F.$$

No que segue \mathcal{X}^r é o conjunto das superfícies compactas e orientáveis de classe C^r , com $r \geq 6$.

Definição 4.10. Consideremos $M_1, M_2 \in \mathcal{X}^r$ e sejam $\mathcal{L}_i, \Sigma_i, \mathcal{F}_i, \mathcal{S}_i$ a superfície de Lie-Cartan, o conjunto crítico, a folheação e o conjunto de singularidades do campo de direções, respectivamente, das linhas de Laguerre em $M_i, i = 1, 2$. Diremos que M_1 e M_2 possuem estruturas qualitativas de linhas de Laguerre topologicamente equivalentes se existir um homeomorfismo $h : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ tal que $h(\Sigma_1) = h(\Sigma_2), h(\mathcal{F}_1) = h(\mathcal{F}_2)$ e $h(\mathcal{S}_1) = h(\mathcal{S}_2)$. Chamaremos h de uma equivalência topológica de Laguerre entre M_1 e M_2 .

Definição 4.11. Diremos que $M \in \mathcal{X}^r$ é C^r -Laguerre estruturalmente estável se existir uma vizinhança \mathcal{V} de M em \mathcal{X}^r tal que, se $N \in \mathcal{V}$ existe uma equivalência topológica de Laguerre entre M e N .

4.2.1 Condições para estabilidade estrutural

Vimos, na Seção 1.5 que, dada uma carta $(u, v) : U \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$, o campo (vetorial) de Lie-Cartan é dado por

$$LC(u, v, p) = L_p(u, v, p) \frac{\partial}{\partial u} + p L_p(u, v, p) \frac{\partial}{\partial v} - (L_u + p L_v) \frac{\partial}{\partial p} \quad (4-1)$$

ou

$$LC(u, v, q) = q L_q(u, v, q) \frac{\partial}{\partial u} + L_q(u, v, q) \frac{\partial}{\partial v} - (q L_u + L_v) \frac{\partial}{\partial q}, \quad (4-2)$$

onde $dv - pdu = du - qdv = 0$ com $p, q \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Como este campo de vetores é de classe C^r o campo de linhas \mathcal{LC} é de classe C^r , pois $\mathcal{LC} = \mathbb{R} \cdot LC$.

Lema 4.12. Sejam $M \in \mathcal{X}^r, r \geq 6$ e \mathcal{L} a superfície de Lie-Cartan associada à equação diferencial das linhas de Laguerre de M . Então \mathcal{L} é compacta.

Demonstração. Como M é compacta existe uma cobertura finita $\{U_i; i = 1, \dots, n\}$ por abertos que são domínios de cartas $\varphi : U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$. Para cada $i = 1, \dots, n$ sejam $L_i(u, v, p) = 0$ a equação diferencial implícita das linhas de Laguerre em U_i e $\mathcal{L}_i = L_i^{-1}(0)$ a correspondente superfície de Lie-Cartan. Se \mathcal{L} é a superfície de Lie-Cartan para as linhas de Laguerre em M , então $\mathcal{L} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{L}_i$. Seja $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\pi(u, v, p) = (u, v)$ e consideremos as restrições $\pi_i = \pi|_{\mathcal{L}_i} : \mathcal{L}_i \rightarrow \varphi_i(U_i)$. Pela Proposição 1.65, cada π_i é uma aplicação própria e daí, cada composição $\varphi_i^{-1} \circ \pi_i : \pi_i^{-1}(\varphi_i(U_i)) \rightarrow U_i$ também é.

De $\mathcal{L} = \bigcup_{i=1}^n (\varphi_i^{-1} \circ \pi_i)^{-1}(U_i)$ segue que \mathcal{L} é compacta. \square

Chamaremos de elemento crítico de \mathcal{LC} a todo elemento de \mathcal{S} e a toda folha fechada de \mathcal{F} . Sejam F uma folha de \mathcal{F} e $x, y \in F$ pontos e consideremos

$\gamma : [0, 1] \rightarrow F$ um caminho contínuo tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Sejam \mathcal{D}_x e \mathcal{D}_y discos de dimensão um topologicamente transversais a \mathcal{F} centrados em x e y respectivamente. Da teoria de folheações, sabemos que existe uma aplicação $f_\gamma : V_x \rightarrow V_y$, que é a aplicação de holonomia associada a γ , de uma vizinhança V_x de x em \mathcal{D}_x em uma vizinhança $V_y = f_\gamma(V_x)$ de y em \mathcal{D}_y . A aplicação f_γ é um difeomorfismo de mesma classe que a do campo \mathcal{LC} (Veja [9], páginas de 60 à 64). Para cada $z \in V_x$ seja F_z a folha de \mathcal{F} tal que $z \in F_z \cap V_x$ e consideremos um caminho contínuo $\gamma_z : [0, 1] \rightarrow F_z$ tal que $\gamma_z(0) = z$ e $\gamma_z(1) = f_\gamma(z)$. Agora, observemos que $V = \bigcup_{z \in V_x} \gamma_z([0, 1])$ é uma vizinhança tubular de $\gamma([0, 1])$, em $\mathcal{L} \setminus \mathcal{S}$ e em V podemos orientar o campo \mathcal{LC} .

Seja U um aberto em $\mathcal{L} \setminus \mathcal{S}$ contendo V e tal que \mathcal{LC} possa ser orientado. Seja $\varphi_x : I \rightarrow \mathcal{L}$ a curva integral de LC , em U , por x . Desse modo $\gamma([0, 1]) \subset \varphi_x(I)$. Note que, se $\Pi : V_x \rightarrow V_y$ é a aplicação de Poincaré associada à φ_x e às secções V_x e V_y , então $\Pi(z) = f_\gamma(z)$ ou $\Pi(z) = f_\gamma^{-1}(z)$, $z \in V_x$. Disto decorre que Π é um difeomorfismo de mesma classe que o campo de Lie-Cartan. Caso F seja uma folha fechada, podemos considerar $V_y \subseteq V_x$, teremos $\gamma([0, 1]) = \varphi(I)$ e $\Pi : V_x \rightarrow V_x$ será a aplicação de primeiro retorno associada à φ_x .

Definição 4.13. *Sejam $M \in \mathcal{X}^r$ e F uma folha fechada de \mathcal{F} . Suponhamos que exista uma vizinhança tubular V de F em \mathcal{L} tal que \mathcal{LC} seja orientável em V . Diremos que F é hiperbólica se, dado $x \in F$, tivermos $|\Pi'(x)| \neq 1$.*

Consideremos os seguintes conjuntos:

- Σ_1^r : conjunto de todas as superfícies $M \in \mathcal{X}^r$ tais que todas as singularidades de \mathcal{LC} são hiperbólicas;
- Σ_2^r : conjunto de todas as superfícies $M \in \mathcal{X}^r$ tais que todas as órbitas fechadas de \mathcal{LC} são hiperbólicas;
- Σ_3^r : conjunto de todas as superfícies $M \in \mathcal{X}^r$ tais que os conjuntos limites de qualquer órbita de \mathcal{LC} é uma órbita fechada ou uma singularidade de LC ;
- Σ_4^r : conjunto de todas as superfícies $M \in \mathcal{X}^r$ tais que não há conexão de separatriz de sela de \mathcal{LC} ;
- Σ_5^r : conjunto de todas as superfícies $M \in \mathcal{X}^r$ tais que o conjunto crítico Σ_F seja uma curva regular, ou união de arcos de curvas regulares, sem auto-intersecção;
- Σ_6^r : conjunto de todas as superfícies $M \in \mathcal{X}^r$ tais que uma órbita fechada qualquer de \mathcal{LC} não intersesta o conjunto crítico Σ_F ou intersesta transversalmente.

Seja $\Sigma^r := \bigcap_{1 \leq i \leq 6} \Sigma_i^r$.

Definição 4.14. *Consideremos $M \in \mathcal{X}^r$. Diremos que M possui estrutura de Laguerre se $M \in \Sigma^r$ e \mathcal{LC} tem um número finito de elementos críticos.*

Denotaremos por \mathbb{L} ao conjunto de todas as superfícies em \mathcal{X}^r que possuem estrutura de Laguerre.

Definição 4.15. *Sejam $M \in \mathbb{L}$ e \mathcal{LC} o campo de direções para as linhas de Laguerre em M . Chamaremos de um conjunto de vizinhanças canônicas para \mathcal{LC} a todo conjunto de vizinhanças $\{V_1, \dots, V_k, V_{k+1}\}$ tal que:*

- (a) $\bigcup_{1 \leq i \leq k+1} V_i = \mathcal{L}$ e $V_i \cap V_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$;
- (b) Toda folha de \mathcal{F} intersecta transversalmente ∂V_j ;
- (c) Cada V_i contém uma única singularidade de \mathcal{LC} , para $1 \leq i \leq k$, e V_{k+1} contém todas as singularidades do tipo sela.

Para $1 \leq i \leq k$, cada conjunto $V_j \setminus \sigma_j$ será denominado uma região canônica. Note que, numa região canônica o campo \mathcal{LC} é topologicamente equivalente ao campo $\frac{\partial}{\partial u}$ ou ao $u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Veja Figura 4.3 para ilustração.

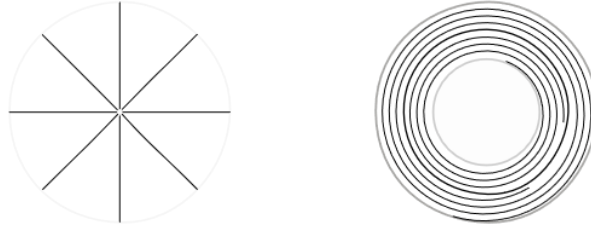


Figura 4.3: Ilustração de regiões canônicas.

Lema 4.16. *Seja $M \in \mathbb{L}$. Existe um conjunto de vizinhanças canônicas para \mathcal{LC} .*

Demonstração. As vizinhanças V_1, \dots, V_k são obtidas semelhantemente às vizinhanças de poço, fonte e órbitas periódicas para o caso de campos de vetores. Por fim é só considerar $V_{k+1} = \mathcal{L} \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq k} V_j$. \square

Definição 4.17. *Sejam $M \in \mathcal{X}^r$ e $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão. Dizemos que uma sequência de superfícies $M_n \in \mathcal{X}^r$ converge no sentido C^r para M se dadas imersões $\alpha_n : M_n \rightarrow \mathbb{R}^3$, a sequência $\{\alpha_n\}$ converge para α na topologia C^r .*

Lema 4.18. *Sejam $M \in \mathcal{X}^r$ e $M_n \in \mathcal{X}^r$ uma sequência de superfícies convergindo para M no sentido C^r , $r \geq 6$. Se $L(u, v, p) = 0$ é a equação diferencial implícita das linhas de Laguerre em M e, $L_n(u, v, p) = 0$ é a de M_n , então $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para L na topologia C^{r-3} .*

Demonstração. Sejam E, F, G, e, f, g os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental para M e sejam $E_n, F_n, G_n, e_n, f_n, g_n$ os respectivos coeficientes para M_n . Então, $E_n \rightarrow E$, $F_n \rightarrow F$, $G_n \rightarrow G$ na topologia C^{r-1} e $e_n \rightarrow e$, $f_n \rightarrow$

$f, g_n \rightarrow g$ na topologia C^{r-2} . Segue da Proposição 3.4 que $L = A_3 p^3 + 3A_2 p^2 + 3A_1 p + A_0$ e $L_n = {}^n A_3 p^3 + 3 {}^n A_2 p^2 + 3 {}^n A_1 p + {}^n A_0$ e que ${}^n A_j \rightarrow A_j$ na topologia C^{r-3} . Logo, $L_n \rightarrow L$ na topologia C^{r-3} . \square

Teorema 4.19. *Dada $M \in \mathbb{L}$ com $r \geq 6$, existe uma vizinhança \mathcal{V} de M em \mathcal{X}^r tal que $\mathcal{V} \subset \mathbb{L}^r$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{S} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_r, \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_s\}$ o conjunto dos elementos críticos de \mathcal{LC} onde $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ são singularidades do tipo foco ou nó, $\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_r$ são órbitas periódicas e $\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_s$ são selas. Consideremos $V_1, \dots, V_k, V_{k+1}, \dots, V_r$ onde, para $i = 1, \dots, k$, cada V_i é um disco topológico de dimensão dois com fronteira suave em \mathcal{L} e para $i = k+1, \dots, r$ os V_i são vizinhanças tubulares para as órbitas $\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_r$, tais que $\sigma_i \in V_i$, $V_j \cap V_k = \emptyset$ caso $j \neq k$ e \mathcal{LC} é transversal a ∂V_i . Note que as singularidades do tipo sela estão todas em $R = \mathcal{L} \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq r} V_i$. Sejam $s_{1i}, s_{2i}, s_{3i}, s_{4i}$ as separatrizes da sela σ_i . Como não há conexão de separatrizes de sela o conjunto limite de s_{ji} contém um elemento $\sigma_{m_j} \in \{\sigma_1, \dots, \sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_r\}$ e daí, s_{ji} intersecta ∂V_{m_j} , transversalmente, em um ponto p_{im_j} .

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ uma parametrização de M . Para cada $\varepsilon \in [0, 1]$ consideremos uma sequência de superfícies $M_{n,\varepsilon}$ parametrizadas por $X_{n,\varepsilon} = X + \varepsilon \varphi_n N$, onde N é o normal unitário positivo para M e $\varphi_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞ , com $X_{n,\varepsilon}$ convergindo para X na topologia C^r . Assim, se $\mathcal{L}_{n,\varepsilon}$ é a superfície de Lie-Cartan para $M_{n,\varepsilon}$ temos que $\mathcal{L}_{n,\varepsilon}$ converge para \mathcal{L} no sentido que, $L_{n,\varepsilon} \rightarrow L$ no sentido do Lema 4.18. Assim, para n suficientemente grande, existem, em $\mathcal{L}_{n,\varepsilon}$ vizinhanças ${}^n V_1, \dots, {}^n V_k, {}^n V_{k+1}, \dots, {}^n V_r$ onde cada ${}^n V_j$ contém um único elemento crítico de $\mathcal{LC}_{n,\varepsilon}$ que é do mesmo tipo que σ_j e ${}^n R = \mathcal{L}_{n,\varepsilon} \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq r} {}^n V_i$ contém exatamente $s - r$ elementos críticos de $\mathcal{LC}_{n,\varepsilon}$ e são todos singularidades do tipo sela. Sejam ${}^n \sigma_{r+1}, \dots, {}^n \sigma_s$ estas selas. Aumentando n e diminuindo o valor de $\varepsilon > 0$, se necessário, cada ${}^n s_{ji}$ intersecta transversalmente $\partial({}^n V_{m_j})$ (fronteira de ${}^n V_{m_j}$) e portanto, para n suficientemente grande o conjunto limite de ${}^n \gamma_{ji}$ contém ${}^n \sigma_{m_j} \in \{{}^n \sigma_1, \dots, {}^n \sigma_k, {}^n \sigma_{k+1}, \dots, {}^n \sigma_r\}$ de modo que $\mathcal{LC}_{n,\varepsilon}$ não possui conexões de selas. Disto temos que $M_{n,\varepsilon} \in \Sigma_1^r \cap \Sigma_2^r \cap \Sigma_3^r \cap \Sigma_4^r$. Do Teorema 1.66 segue que, aumentando n se necessário, temos $M_{n,\varepsilon} \in \Sigma_5$. Por fim, caso alguma órbita fechada σ_j de LC intersecte o conjunto crítico Σ_L , isto ocorrerá transversalmente e, como $L_{n,\varepsilon} \rightarrow L$, C^{r-3} , a órbita fechada ${}^n \sigma_j$ intersecta $\Sigma_{L_{n,\varepsilon}}$ transversalmente o que mostra que $M_{n,\varepsilon} \in \Sigma_6^r$, para n suficientemente grande. Logo, existe a vizinhança \mathcal{V} afirma no teorema. \square

Teorema 4.20. *Se $M \in \mathbb{L}$, $r \geq 6$, então M é C^r -Laguerre estruturalmente estável.*

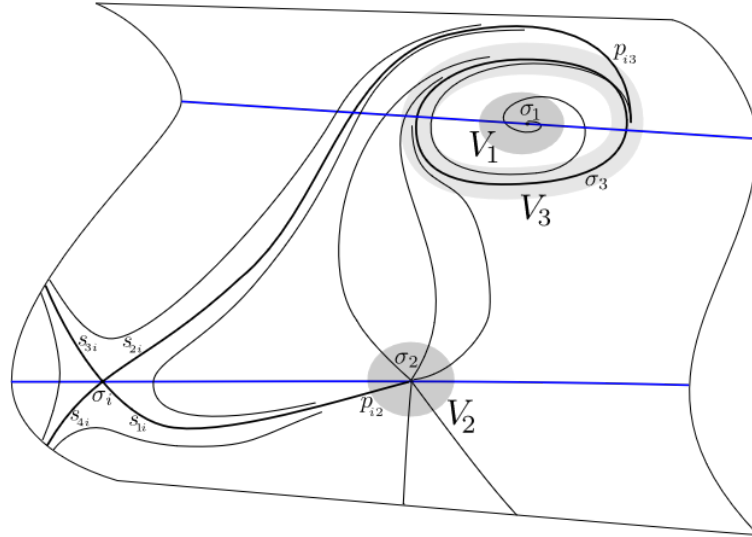


Figura 4.4: Ilustração dos Teoremas 4.19 e 4.20.

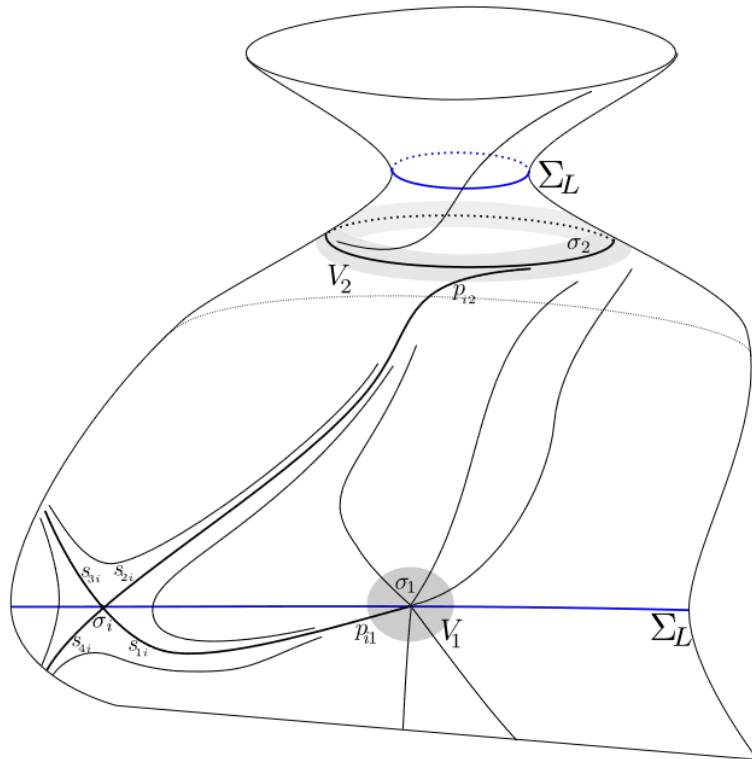


Figura 4.5: Ilustração dos Teoremas 4.19 e 4.20.

Demonstração. Consideremos os dados da demonstração do Teorema 4.19 com as mesmas notações. Vamos mostrar que, para n suficientemente grande existe um homeomorfismo $h_n : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_{n,\varepsilon}$ que é uma equivalência topológica de Laguerre entre M e $M_{n,\varepsilon}$. Da Proposição 1.66, cada componente conexa de Σ_L é a imagem de uma curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathcal{L}$. Sabemos também que, $\mathcal{S} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k, \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_s\} \subset \Sigma_L$ e que, dado $j = k + 1, \dots, r$, σ_j pode ou não intersectar Σ_L . Seja n_0 tal que,

para $n \geq n_0$, tenhamos $M_{n,\varepsilon} \in \mathbb{L}^r$ e $\mathcal{LC}_{n,\varepsilon}$ tenha o mesmo número de elementos críticos que \mathcal{LC} e do mesmo tipo. Dado $i = 1, \dots, k$, diminuindo V_i , se necessário, $\Sigma_L \cap V_i$ contém exatamente dois pontos q_{i1}, q_{i2} e, aumentando n_0 e diminuindo nV_i , se for preciso, teremos também ${}^n\Sigma_L \cap {}^nV_i = \{{}^nq_{1i}, {}^nq_{2i}\}$. Começemos definindo $h_n(p_{im_j}) = {}^np_{im_j}$, $h_n(q_{ji}) = {}^nq_{ji}$ e $h_n(\sigma_j) = {}^n\sigma_j$ se $1 \leq j \leq k$ ou $r+1 \leq j \leq s$.

O restante da demonstração será dividido em dois casos: o caso em que nenhuma órbita fechada intersecta Σ_L e o caso em que ocorre pelo menos uma tal intersecção.

Consideremos o primeiro destes casos. Como, neste caso, não há intersecção entre Σ_L e alguma órbita fechada, podemos supor que $V_i \cap \Sigma_L = \emptyset$, para $i = k+1, \dots, r$. Do Teorema 4.19, cada vizinhança V_i é homeomorfa à nV_i , $i = 1, \dots, r$. Dessa forma podemos estender h_n , em cada V_i , $i = 1, \dots, k$ a um homeomorfismo de V_i em nV_i tal que $h_n(V_i \cap \Sigma_L) = {}^nV_i \cap {}^n\Sigma_L$ e que leva as curvas integrais de \mathcal{LC} em V_i nas de $\mathcal{LC}_{n,\varepsilon}$ em nV_i e ainda podemos definir h_n em V_i para $i = k+1, \dots, r$ de modo que leve curvas integrais de \mathcal{LC} em curvas integrais de $\mathcal{LC}_{n,\varepsilon}$. A extensão de h_n à R e consequentemente a toda \mathcal{L} , é feita de forma análoga a de campos de vetores feita em [37].

Vamos agora ao segundo caso. Consideremos uma órbita fechada σ_i tal que $\sigma_i \cap \Sigma_L \neq \emptyset$. Como $M \in \mathbb{L}^r$, estas curvas se intersectam transversalmente e possuem um número finito de pontos de intersecção a_1, \dots, a_l . Podemos diminuir a vizinhança V_i de modo que a intersecção de Σ_L com a fronteira de V_i sejam $2l$ pontos b_1, \dots, b_{2l} . O mesmo procedimento podemos fazer para cada nV_i , com $n > n_0$, afim de que o número de intersecções sejam iguais e teremos, assim, $\{{}^na_1, \dots, {}^na_l, {}^nb_1, \dots, {}^nb_{2l}\}$, tais que ${}^na_j \rightarrow a_j$, $j = 1, \dots, l$. Definimos h_n em V_i fazendo $h_n(a_j) = {}^na_j$ e $h_n(b_j) = {}^nb_j$ e, em seguida estendendo a um homeomorfismo de V_i em nV_i satisfazendo $h_n(V_i \cap \Sigma_L) = {}^nV_i \cap {}^n\Sigma_L$ e que leva as curvas integrais de \mathcal{LC} em V_i nas de $\mathcal{LC}_{n,\varepsilon}$ em nV_i . Realizamos este procedimento com cada órbita fechada que possua intersecção não vazia com Σ_L e, nas demais regiões canônicas o procedimento é o mesmo feito na primeira parte. A extensão de h_n a R é feita da mesma forma que na primeira parte. \square

4.3 Equação variacional

Nesta seção desenvolvemos um estudo com vista em trabalhos futuros de investigação se \mathbb{L} é denso em \mathcal{X}^r .

Consideremos uma superfície M de classe C^r , $r \geq 6$ em \mathbb{R}^3 . Seja $X : I \times I \rightarrow M$ uma parametrização local de M , onde $I =]-1, 1[$, tal que as curvas v constante sejam solução da equação diferencial das linhas de Laguerre de M . Sejam

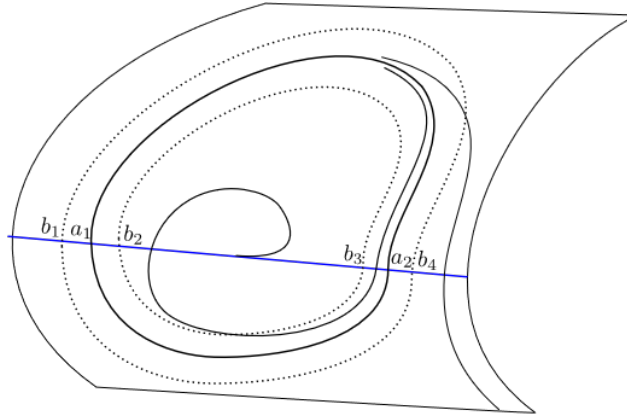


Figura 4.6: Ilustração do Teorema 4.20.

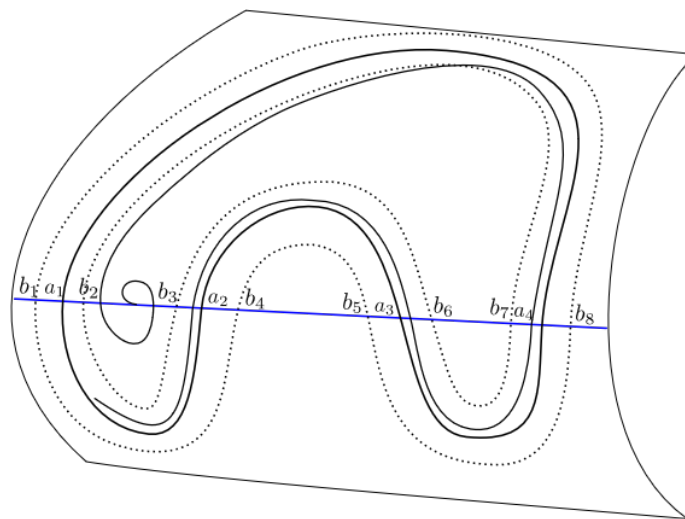


Figura 4.7: Ilustração do Teorema 4.20.

$E_1, F_1, G_1, e_1, f_1, g_1$ os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental de M na parametrização X . Escolhendo $X = X(u, v)$ de modo que $\langle X_u, X_v \rangle = 0$, temos $F_1 = 0$. Da Proposição 3.4, afim de $v = v_0$, para cada v_0 , ser uma solução da

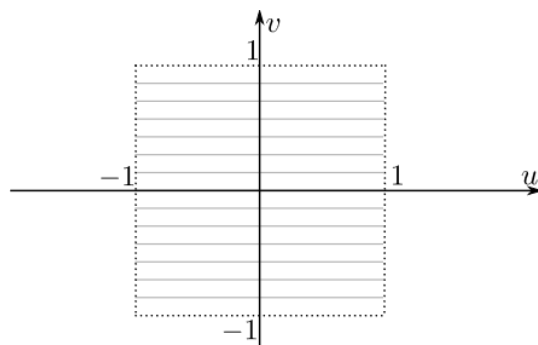


Figura 4.8: Soluções $v = v_0$ na carta (u, v) .

equação diferencial das linhas de Laguerre na carta (u, v) dada por X^{-1} , deveremos

ter

$$(e_1)_u - 2(f_1\Gamma_{11}^2 + e_1\Gamma_{11}^1) = 0. \quad (4-3)$$

A equação diferencial das linhas de Laguerre na carta (u, v) é

$$w = dv(A_3 dv^2 + 3 A_2 dv du + 3 A_1 du^2) = 0, \quad (4-4)$$

onde:

$$\begin{aligned} A_3 &= (g_1)_v + \frac{f_1(G_1)_u}{E_1} - \frac{g_1(G_1)_v}{G_1}, \\ A_2 &= (g_1)_u - \frac{f_1(E_1)_v}{E_1} - \frac{g_1(G_1)_u}{G_1}, \\ A_1 &= (e_1)_v - \frac{e_1(E_1)_v}{E_1} - \frac{f_1(G_1)_u}{G_1}. \end{aligned}$$

A superfície de Lie-Cartan \mathcal{L} é dada por

$$L = p(A_3 p^2 + 3 A_2 p + A_1) = 0$$

e o campo de lie-Cartan LC é dado por

$$\begin{aligned} u' &= 3 A_3 p^2 + 6 A_2 p + A_1, \\ v' &= p(3 A_3 p^2 + 6 A_2 p + A_1), \\ p' &= -p \left[\frac{\partial A_3}{\partial v} p^3 + \left(3 \frac{\partial A_2}{\partial v} + \frac{\partial A_3}{\partial u} \right) p^2 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial v} + 3 \frac{\partial A_2}{\partial u} \right) p + \frac{\partial A_1}{\partial u} \right]. \end{aligned}$$

Sejam $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suave tal que $\varphi(-1, v) = 0$ e $Y : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$Y(u, v) = X(u, v) + \varepsilon \varphi(u, v) N_1(u, v),$$

onde $N_1 = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$ é o normal unitário em $X(U)$ e ε é um número real. Note que, para $\varepsilon \approx 0$, $Y(U)$ é uma superfície de classe C^r em \mathbb{R}^3 .

Proposição 4.21. *Caso $\langle X_u, X_v \rangle = 0$ e $(e_1)_u = 2(f_1\Gamma_{11}^2 + e_1\Gamma_{11}^1)$ os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental de $M_\varepsilon = Y(U)$ são:*

$$\begin{aligned} E_2 &= E_1 - 2 e_1 \varphi \varepsilon + \left[\left(\frac{e_1^2}{E_1} + \frac{f_1^2}{G_1} \right) \varphi^2 + \varphi_u^2 \right] \varepsilon^2, \\ F_2 &= -2 f_1 \varphi \varepsilon + \left[\frac{f_1(E_1 g_1 + G_1 e_1)}{E_1 G_1} \varphi^2 + \varphi_u \varphi_v \right] \varepsilon^2, \\ G_2 &= G_1 - 2 g_1 \varphi \varepsilon + \left(\frac{E_1 g_1^2 + G_1 f_1^2}{E_1 G_1} \varphi^2 + \varphi_v^2 \right) \varepsilon^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{1}{\|Y_u \wedge Y_v\|} \left\{ \frac{[E_1 G_1 e_1 + (E_1 G_1 \varphi_{uu} - E_1 f_1^2 \varphi - G_1 e_1^2 \varphi) \varepsilon][E_1 G_1 - (E_1 g_1 + G_1 e_1) \varphi \varepsilon + (e_1 g_1 - f_1^2) \varphi^2 \varepsilon^2]}{(E_1 G_1)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &\quad - \frac{[E_1 (E_1)_u G_1 + (E_1 (E_1)_v f_1 \varphi - 4 E_1 G_1 e_1 \varphi_u - (E_1)_u G_1 e_1 \varphi) \varepsilon][G_1 \varphi_u - (\varphi_u - \varphi_v) f_1 \varphi \varepsilon]}{2 (E_1 G_1)^{\frac{3}{2}}} \varepsilon \\ &\quad \left. + \frac{[E_1 (E_1)_v G_1 + (4 E_1 G_1 f_1 \varphi_u + 2 E_1 G_1 (f_1)_u \varphi - E_1 (G_1)_u f_1 \varphi - (E_1)_v G_1 e_1 \varphi) \varepsilon][E_1 \varphi_v + (f_1 \varphi_u - e_1 \varphi_v) \varphi \varepsilon]}{2 (E_1 G_1)^{\frac{3}{2}}} \varepsilon \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2 &= \frac{1}{\|Y_u \wedge Y_v\|} \left\{ \frac{[E_1 G_1 f_1 + (E_1 G_1 \varphi_{uv} - E_1 f_1 g_1 \varphi - G_1 e_1 f_1 \varphi) \varepsilon][E_1 G_1 - (E_1 g_1 + G_1 e_1) \varphi \varepsilon + (e_1 g_1 - f_1^2) \varphi^2 \varepsilon^2]}{(E_1 G_1)^{\frac{3}{2}}} \right. \\
&\quad - \frac{[E_1 G_1 (G_1)_u + (E_1 (G_1)_v f_1 \varphi - 2 E_1 G_1 f_1 \varphi_v - 2 E_1 G_1 (f_1)_v \varphi - 2 E_1 G_1 g_1 \varphi_u - G_1 (G_1)_u e_1 \varphi) \varepsilon][E_1 \varphi_v + (f_1 \varphi_u - e_1 \varphi_v) \varphi \varepsilon]}{2 (E_1 G_1)^{\frac{3}{2}}} \varepsilon \\
&\quad \left. - \frac{[E_1 (E_1)_v G_1 + (E_1 (G_1)_u f_1 \varphi + (E_1)_v G_1 e_1 \varphi - 2 E_1 G_1 e_1 \varphi_v - 2 E_1 G_1 (e_1)_v \varphi - 2 E_1 G_1 f_1 \varphi_u) \varepsilon][G_1 \varphi_u - (\varphi_u - \varphi_v) f_1 \varphi \varepsilon]}{2 (E_1 G_1)^{\frac{3}{2}}} \varepsilon \right\}, \\
g_2 &= \frac{1}{\|Y_u \wedge Y_v\|} \left\{ \frac{[E_1 G_1 g_1 + (E_1 G_1 \varphi_{vv} - E_1 g_1^2 \varphi - G_1 f_1^2 \varphi) \varepsilon][E_1 G_1 - (E_1 g_1 + G_1 e_1) \varphi \varepsilon + (e_1 g_1 - f_1^2) \varphi^2 \varepsilon^2]}{(E_1 G_1)^{\frac{3}{2}}} \right. \\
&\quad - \frac{[E_1 G_1 (G_1)_v + (E_1 (G_1)_v g_1 \varphi - 4 E_1 G_1 g_1 \varphi_v - 2 E_1 G_1 (g_1)_v \varphi - G_1 (G_1)_u f_1 \varphi) \varepsilon][E_1 \varphi_v + (f_1 \varphi_u - e_1 \varphi_v) \varphi \varepsilon]}{2 (E_1 G_1)^{\frac{3}{2}}} \varepsilon \\
&\quad \left. + \frac{[E_1 G_1 (G_1)_u + (4 E_1 G_1 f_1 \varphi_v + 2 E_1 G_1 (f_1)_v \varphi - E_1 (G_1)_u g_1 \varphi - (E_1)_v G_1 f_1 \varphi) \varepsilon][G_1 \varphi_u - (\varphi_u - \varphi_v) f_1 \varphi \varepsilon]}{2 (E_1 G_1)^{\frac{3}{2}}} \varepsilon \right\}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Temos:

$$\begin{aligned}
Y_u &= X_u + \varepsilon \varphi_u N_1 + \varepsilon \varphi (N_1)_u, \\
Y_v &= X_v + \varepsilon \varphi_v N_1 + \varepsilon \varphi (N_1)_v, \\
Y_{uu} &= X_{uu} + \varepsilon \varphi_{uu} N_1 + 2 \varepsilon \varphi_u (N_1)_u + \varepsilon \varphi (N_1)_{uu}, \\
Y_{uv} &= X_{uv} + \varepsilon \varphi_{uv} N_1 + \varepsilon \varphi_u (N_1)_v + \varepsilon \varphi_v (N_1)_u + \varepsilon \varphi (N_1)_{uv}, \\
Y_{vv} &= X_{vv} + \varepsilon \varphi_{vv} N_1 + 2 \varepsilon \varphi_v (N_1)_v + \varepsilon \varphi (N_1)_{vv}.
\end{aligned}$$

Aplicando as equações de Gauss, temos

$$\begin{aligned}
Y_u &= \left(1 - \varepsilon \varphi \frac{e_1}{E_1}\right) X_u - \varepsilon \varphi \frac{f_1}{G_1} X_v + \varepsilon \varphi_u N_1, \\
Y_v &= -\varepsilon \varphi \frac{f_1}{E_1} X_u + \left(1 - \varepsilon \varphi \frac{g_1}{G_1}\right) X_v + \varepsilon \varphi_v N_1.
\end{aligned} \tag{4-5}$$

Daí

$$\begin{aligned}
Y_u \wedge Y_v &= \left(1 - \varepsilon \varphi \frac{g_1 E_1 + G_1 g_1}{E_1 G_1} + \varepsilon^2 \varphi^2 \frac{g_1^2 - f_1^2}{E_1 G_1}\right) X_u \wedge X_v \\
&\quad + \left(\varepsilon \varphi \varphi_v + \varepsilon^2 \varphi^2 \frac{f_1 \varphi_u - g_1 \varphi_v}{E_1}\right) X_u \wedge N_1 \\
&\quad + \left(-\varepsilon \varphi \varphi_u + \varepsilon^2 \varphi^2 \frac{g_1 \varphi_u - f_1 \varphi_v}{G_1}\right) X_v \wedge N_1.
\end{aligned}$$

Como,

$$X_u \wedge N_1 = \frac{X_u \wedge (X_u \wedge X_v)}{\|X_u \wedge X_v\|} = \frac{\langle X_u, X_v \rangle X_u - \langle X_u, X_u \rangle X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = -\frac{E_1 X_v}{\sqrt{E_1 G_1}}$$

e

$$X_v \wedge N_1 = \frac{X_v \wedge (X_u \wedge X_v)}{\|X_u \wedge X_v\|} = \frac{\langle X_v, X_v \rangle X_u - \langle X_v, X_u \rangle X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = \frac{G_1 X_u}{\sqrt{E_1 G_1}},$$

temos

$$\begin{aligned}
Y_u \wedge Y_v &= \left(1 - \varepsilon \varphi \frac{g_1 E_1 + G_1 g_1}{E_1 G_1} + \varepsilon^2 \varphi^2 \frac{g_1^2 - f_1^2}{E_1 G_1}\right) X_u \wedge X_v - \frac{\varepsilon \varphi \varphi_u G_1 - \varepsilon^2 \varphi^2 (g_1 \varphi_u - f_1 \varphi_v)}{\sqrt{E_1 G_1}} X_u \\
&\quad - \frac{\varepsilon \varphi \varphi_v E_1 + \varepsilon^2 \varphi^2 (f_1 \varphi_u - g_1 \varphi_v)}{\sqrt{E_1 G_1}} X_v.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|Y_u \wedge Y_v\|^2 = \left(1 - \varepsilon \varphi g_1 \frac{E_1 + G_1}{E_1 G_1} + \varepsilon^2 \varphi^2 \frac{g_1^2 - f_1^2}{E_1 G_1}\right)^2 E_1 G_1 + \frac{\left[-\varepsilon \varphi \varphi_u G_1 + \varepsilon^2 \varphi^2 (\varphi_u g_1 - \varphi_v f_1)\right]^2}{G_1} - \frac{\left[\varepsilon \varphi \varphi_v E_1 + \varepsilon^2 \varphi^2 (\varphi_u f_1 - \varphi_v g_1)\right]^2}{E_1}.$$

O restante da prova segue de

$$\begin{aligned} E_2 &= \langle Y_u, Y_u \rangle, \quad F_2 = \langle Y_u, Y_v \rangle, \quad G_2 = \langle Y_v, Y_v \rangle, \\ e_2 &= \langle Y_{uu}, N_2 \rangle, \quad f_2 = \langle Y_{uv}, N_2 \rangle, \quad g_2 = \langle Y_{vv}, N_2 \rangle, \end{aligned}$$

onde

$$N_2 = \frac{Y_u \wedge Y_v}{\|Y_u \wedge Y_v\|}.$$

□

Proposição 4.22. *A equação diferencial das linhas de Laguerre em M_ε é*

$$w + B_3 dv^3 + 3 B_2 du dv^2 + 3 B_1 du^2 dv + B_0 du^3 = 0 \quad (4-6)$$

e a superfície de Lie-Cartan \mathcal{L}_ε associada a (4-6) é dada por

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \{(u, v, p) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}); L^\varepsilon(u, v, p) = L(u, v, p) + Q(u, v, p, \varepsilon) = 0\},$$

onde

$$Q(u, v, p, \varepsilon) = B_3 p^3 + 3 B_2 p^2 + 3 B_1 p + B_0,$$

w é a forma diferencial da equação (4-4) e

$$\begin{aligned} B_3 &= \frac{1}{2E_1^2 G_1^2} \left\{ 2G_1 f_1 [2E_1 G_1 (f_1)_v - 2E_1 G_1 (g_1)_u + E_1 (G_1)_u g_1 - E_1 (G_1)_v f_1 \right. \\ &\quad + (E_1)_v G_1 f_1 + G_1 (G_1)_u e_1] \varphi - G_1 [4E_1 G_1 f_1 g_1 + E_1 (G_1)_u (G_1)_v \\ &\quad + 2(E_1)_v G_1 (G_1)_u] \varphi_u + E_1 [2E_1 G_1 g_1^2 + 6G_1^2 f_1^2 + 2E_1 (G_1)_v^2 - G_1 (G_1)_u^2] \varphi_v \\ &\quad \left. + 3E_1 G_1^2 (G_1)_u \varphi_{uv} - 3E_1^2 G_1 (G_1)_v \varphi_{vv} \right\} \varepsilon + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 = & \frac{1}{2E_1G_1^2} \left\{ 2G_1f_1 [E_1(E_1)_vg_1 - 2E_1G_1(e_1)_v + 2E_1G_1(f_1)_u + E_1(G_1)_uf_1 \right. \\
& - (E_1)_uG_1f_1 + (E_1)_vG_1e_1] \varphi - G_1 [2E_1^2g_1^2 - 2E_1G_1f_1^2 - E_1(G_1)_u^2 \\
& - (E_1)_uG_1(G_1)_u + (E_1)_v^2G_1] \varphi_u - E_1 [4G_1^2e_1f_1 + 2E_1(G_1)_u(G_1)_v \\
& + (E_1)_vG_1(G_1)_u] \varphi_v - E_1G_1^2(G_1)_u\varphi_{uu} + E_1G_1 [E_1(G_1)_v + 2(E_1)_vG_1] \varphi_{uv} \\
& \left. + 2E_1^2G_1(G_1)_u\varphi_{vv} \right\} \varepsilon + O(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1 = & \frac{1}{2E_1^2G_1^2} \left\{ 2E_1f_1 [2E_1G_1(g_1)_u - 2E_1G_1(f_1)_v - E_1(G_1)_ug_1 + E_1(G_1)_vf_1 \right. \\
& - (E_1)_vG_1f_1 - G_1(G_1)_ue_1] \varphi + G_1 [4E_1^2f_1g_1 + E_1(E_1)_v(G_1)_u \\
& + 2(E_1)_u(E_1)_vG_1] \varphi_u - E_1 [2E_1G_1f_1^2 - 2G_1^2e_1^2 + E_1(E_1)_v(G_1)_v - E_1(G_1)_u^2 \\
& + (E_1)_v^2G_1] \varphi_v - 2E_1(E_1)_vG_1^2\varphi_{uu} - E_1G_1 [2E_1(G_1)_u + (E_1)_uG_1] \varphi_{uv} \\
& \left. + E_1^2(E_1)_vG_1\varphi_{vv} \right\} \varepsilon + O(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_0 = & \frac{1}{2E_1^2G_1^2} \left\{ 2E_1f_1 [E_1(E_1)_vg_1 - 2E_1G_1(e_1)_v + 2E_1G_1(f_1)_u + E_1(G_1)_uf_1 \right. \\
& - (E_1)_uG_1f_1 + (E_1)_vG_1e_1] \varphi + G_1 [6E_1^2f_1^2 + 2E_1G_1e_1^2 - E_1(E_1)_v^2 \\
& + 2(E_1)_u^2G_1] \varphi_u - E_1 [4E_1G_1e_1f_1 + 2E_1(E_1)_v(G_1)_u + (E_1)_u(E_1)_vG_1] \varphi_v \\
& \left. - 3E_1(E_1)_uG_1^2\varphi_{uu} + 3E_1^2(E_1)_vG_1\varphi_{vv} \right\} \varepsilon + O(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Demonstração. Seja $C_3 dv^3 + 3C_2 du dv^2 + 3C_1 du^2 dv + C_0 du^3 = 0$ a equação diferencial das linhas de Laguerre em M_ε . Aplicando-se a Proposição 4.21, obtem-se

$$C_3 = A_3 + B_3, C_2 = A_2 + B_2, C_1 = A_1 + B_1, C_0 = B_0 = A_0 + B_0.$$

□

Corolário 4.23. *Se LC é o campo de Lie-Cartan de (4.4) e LC_ε o de (4.6), estendidos a todo o $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, tem-se*

$$LC_\varepsilon = LC + (Q_p, pQ_p, -(Q_u + pQ_v)).$$

Demonstração. Segue imediatamente da Proposição 4.22. □

Dado $v_0 \in I =]-1, 1[$ seja $\Gamma_{v_0} = \{X(u, v_0); u \in I\}$ a curva de Laguerre em M correspondente ao segmento $v = v_0$ e seja $\Gamma_{v_0}^\varepsilon$ a folha em M_ε proveniente de Γ_{v_0} após a deformação de M . Notemos que, dado $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente próximo de zero, existe $\delta \in]0, 1[$ e uma função

$$\nu : I \times]-\delta, \delta[\times]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\longrightarrow I$$

tal que

$$\Gamma_{v_0}^\varepsilon = \{Y(u, \nu(u, v_0, \varepsilon)); u \in]-\delta, \delta[\}.$$

Da equação (4-6), a aplicação $u \rightarrow \nu(u, v_0, \varepsilon)$ satisfaz ao seguinte problema de

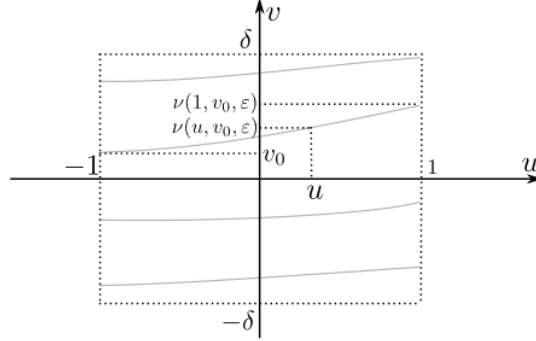


Figura 4.9: Ilustração da aplicação ν .

valor inicial:

$$\begin{cases} C_3(u, \nu, \varepsilon) \left(\frac{d\nu}{du}\right)^3 + 3C_2(u, \nu, \varepsilon) \left(\frac{d\nu}{du}\right)^2 + 3C_1(u, \nu, \varepsilon) \frac{d\nu}{du} + C_0(u, \nu, \varepsilon) = 0 \\ \nu(-1, v_0, \varepsilon) = v_0 \end{cases}, \quad (4-7)$$

sendo $C_j = A_j + B_j$, $j = 0, 1, 2, 3$.

Derivando a equação em (4-7) com relação a ε temos

$$\begin{aligned} & (D_2C_3 \frac{d\nu}{d\varepsilon} + D_3C_3) \left(\frac{d\nu}{du}\right)^3 + 3C_3 \left(\frac{d\nu}{du}\right)^2 \frac{d}{d\varepsilon} \frac{d\nu}{du} + 3(D_2C_2 \frac{d\nu}{d\varepsilon} + D_3C_2) \left(\frac{d\nu}{du}\right)^2 \\ & + 6C_2 \frac{d\nu}{du} \frac{d}{d\varepsilon} \frac{d\nu}{du} + 3(D_2C_1 \frac{d\nu}{d\varepsilon} + D_3C_1) \frac{d\nu}{du} + 3C_1 \frac{d}{d\varepsilon} \frac{d\nu}{du} + D_2C_0 \frac{d\nu}{d\varepsilon} + D_3C_0 = 0. \end{aligned} \quad (4-8)$$

Como $\frac{d}{d\varepsilon} \frac{d\nu}{du} = \frac{d}{du} \frac{d\nu}{d\varepsilon}$, segue que

$$\begin{aligned} & (D_2C_3 \frac{d\nu}{d\varepsilon} + D_3C_3) \left(\frac{d\nu}{du}\right)^3 + 3C_3 \left(\frac{d\nu}{du}\right)^2 \frac{d}{du} \frac{d\nu}{d\varepsilon} + 3(D_2C_2 \frac{d\nu}{d\varepsilon} + D_3C_2) \left(\frac{d\nu}{du}\right)^2 \\ & + 6C_2 \frac{d\nu}{du} \frac{d}{du} \frac{d\nu}{d\varepsilon} + 3(D_2C_1 \frac{d\nu}{d\varepsilon} + D_3C_1) \frac{d\nu}{du} + 3C_1 \frac{d}{du} \frac{d\nu}{d\varepsilon} + D_2C_0 \frac{d\nu}{d\varepsilon} + D_3C_0 = 0. \end{aligned} \quad (4-9)$$

Como $\frac{d\nu}{du}(u, v_0, \nu(u, 0), 0) = D_2B_0(u, \nu(u, v_0, 0), 0) = 0$, $C_j(u, \nu(u, v_0, 0), 0) = A_j(u, \nu(u, v_0, 0))$ e $D_3C_0 = \frac{d}{d\varepsilon}B_0$, avaliando (4-9) em $\varepsilon = 0$, temos

$$3A_1 \frac{d}{du} \frac{d\nu}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{d}{d\varepsilon} B_0 \Big|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (4-10)$$

Dessa forma $\nu_\varepsilon = \frac{d\nu}{d\varepsilon}$ satisfaz ao seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} 3A_1 \frac{d\nu_\varepsilon}{du} + \frac{d}{d\varepsilon} B_0 \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \\ \nu_\varepsilon(-1, v_0) = 0 \end{cases}. \quad (4-11)$$

É importante observar que

$$A_1(u, 0) = \left(\frac{G_1 E_1 G_1 (e_1)_v - E_1 (G_1)_u f_1 - (E_1)_v G_1 e_1}{E_1 G_1} \right) (u, 0) \neq 0$$

para todo $u \in [-1, 1]$ visto que, se $A(u_0, 0) = 0$ para algum $u_0 \in [-1, 1]$ o ponto $(u_0, 0)$ pertenceria a curva discriminante. Logo,

$$\begin{aligned} \left. \frac{dv}{d\varepsilon} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ v=v_0}} &= -\frac{1}{9} \int_{-1}^u \frac{f_1(E_1(E_1)_v g_1 - 2E_1 G_1 (e_1)_v + 2E_1 G_1 (f_1)_u + E_1 (G_1)_u f_1 - (E_1)_u G_1 f_1 + (E_1)_v G_1 e_1)}{G_1 (E_1 G_1 (e_1)_v - E_1 (G_1)_u f_1 - (E_1)_v G_1 e_1)} \varphi \, du \\ &\quad - \frac{1}{18} \int_{-1}^u \frac{6E_1^2 f_1^2 + 2E_1 G_1 e_1^2 - E_1 (E_1)_v^2 + 2(E_1)_u^2 G_1}{E_1 (E_1 G_1 (e_1)_v - E_1 (G_1)_u f_1 - (E_1)_v G_1 e_1)} \varphi_u \, du \\ &\quad + \frac{1}{18} \int_{-1}^u \frac{4E_1 G_1 e_1 f_1 + 2E_1 (E_1)_v (G_1)_u + (E_1)_u (E_1)_v G_1}{G_1 (E_1 G_1 (e_1)_v - E_1 (G_1)_u f_1 - (E_1)_v G_1 e_1)} \varphi_v \, du \\ &\quad + \frac{1}{6} \int_{-1}^u \frac{(E_1)_u G_1 \varphi_{uu} - E_1 (E_1)_v \varphi_{uv}}{E_1 G_1 (e_1)_v - E_1 (G_1)_u f_1 - (E_1)_v G_1 e_1} \, du. \end{aligned}$$

Lema 4.24. *Existe uma função $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ cujo suporte está contido em $U = I \times I$, $I = [-1, 1]$ tal que se $\varepsilon_0 > 0$ for suficientemente pequeno, para todo $\varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, $M_\varepsilon = (X + \varepsilon \varphi N_1)(U)$ é uma superfície de classe C^r e o arco de linha de Laguerre $\Gamma_{v_0}^\varepsilon$, que passa pelo ponto $(-1, v_0)$ e encontra o segmento $\{1\} \times I$ é tal que $\varepsilon \rightarrow \nu(1, v_0, \varepsilon)$ é estritamente crescente.*

Demonstração. Seja $\mu : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ uma função suave identicamente igual a um numa vizinhança de zero e com suporte contido em I . Como $A_1(u, 0) \neq 0$, existe $\varepsilon_0 > 0$ para o qual $A_1(u, v)$, possui o mesmo sinal para $(u, v) \in I \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Além disto, existe um número real λ tal que

$$- \int_{-1}^1 \lambda \mu(u) \frac{E_1 (E_1)_v}{E_1 G_1 (e_1)_v - E_1 (G_1)_u f_1 - (E_1)_v G_1 e_1} \, du = \delta > 0.$$

Diminuindo ε_0 se necessário, M_ε é uma superfície suave. Tomemos $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(u, v) = \lambda \mu(u) \mu(v)$. Daí $\left. \frac{dv}{d\varepsilon} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ u=1 \\ v=v_0}} = -\frac{1}{6} \delta > 0$. Logo, para $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno, $\nu(1, v_0, \varepsilon)$ é estritamente crescente. \square

Este lema tem relevância para o estudo de recorrências e da densidade de \mathbb{L}^r em \mathcal{X}^r .

Exemplos de linhas de Laguerre

Neste capítulo fazemos a descrição qualitativa das linhas de Laguerre nas superfícies de revolução, nas superfícies regradas e nas quádricas.

5.1 Linhas de Laguerre em superfícies de revolução

Consideremos uma curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ contida no plano xz . Seja

$$\gamma(u) = (a(u), 0, b(u))$$

e suponhamos $a(u) > 0$ para todo $u \in I$. A superfície obtida pela rotação de γ em torno do eixo z pode ser coberta por duas parametrizações cada uma dada por

$$X(u, v) = (a(u) \cos(v), a(u) \sin(v), b(u)), \quad (5-1)$$

com $u \in I$ e $v \in (0, 2\pi)$. A esta classe de superfícies chamamos de “superfícies de revolução.”

Lema 5.1. *A equação das linhas de Laguerre numa superfície de revolução, no sistema de coordenadas definido por (5-1), é*

$$du [(a'(u)^2 + b'(u)^2) k_1'(u) du^2 + 3a(u)^2 k_2'(u) dv^2] = 0, \quad (5-2)$$

onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais.

Demonstração. Os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental, são:

$$E(u, v) = a'(u)^2 + b'(u)^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = a(u)^2,$$

$$e(u, v) = \frac{b''(u)a'(u) - a''(u)b'(u)}{\sqrt{(a'(u))^2 + (b'(u))^2}}, \quad f(u, v) = 0, \quad g(u, v) = \frac{a(u)b'(u)}{\sqrt{(a'(u))^2 + (b'(u))^2}}.$$

Como,

$$k_1(u, v) = \frac{e(u, v)}{E(u, v)} = k_1(u) \quad \text{e} \quad k_2(u, v) = \frac{g(u, v)}{G(u, v)} = k_2(u),$$

a equação das linhas de Laguerre de uma superfície de revolução é

$$E \frac{\partial k_1}{\partial u} du^3 + 3G \frac{\partial k_2}{\partial u} du dv^3 = 0.$$

Ou seja,

$$du [(a'(u)^2 + b'(u)^2) k_1'(u) du^2 + 3a(u)^2 k_2'(u) dv^2] = 0.$$

□

Admitindo γ parametrizada por comprimento de arco a equação (5-2) fica como segue:

$$du [k_1'(u) du^2 + 3a(u)^2 k_2'(u) dv^2] = 0. \quad (5-3)$$

Corolário 5.2. *Uma das folheações das linhas de Laguerre em uma superfície de revolução, satisfazendo $k_1'(u) k_2(u) + k_1(u) k_2'(u) \neq 0$, são as curvas de nível da curvatura Gaussiana.*

Demonstração. Da demonstração do Lema 5.1, temos:

$$K(u, v) = k_1(u) k_2(u).$$

Assim,

$$K_u(u, v) = k_1'(u) k_2(u) + k_1(u) k_2'(u) \quad \text{e} \quad K_v = 0.$$

De modo que, a equação das curvas de nível da curvatura Gaussiana é dada por

$$K_u du + K_v dv = (k_1'(u) k_2(u) + k_1(u) k_2'(u)) du = 0.$$

De (5-2) e da equação acima segue o resultado. □

Lema 5.3. *Consideremos $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^r , com $r \geq 4$. Sejam $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ com $u_0 \neq u_1$. Suponhamos que $f(u)g(u) < 0$ qualquer que seja u entre u_0 e u_1 , $f(u_0) \neq 0$, $g(u_0) = 0$, $g'(u_0) \neq 0$ e, $f(u_1) = 0$, $f'(u_1) \neq 0$ e $g(u_1) \neq 0$. Então, dado $v_0 \in \mathbb{R}$ qualquer, a solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} f(u) \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + g(u) \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0 \\ u(0) = u_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases} \quad (5-4)$$

é dada por

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 + \frac{1}{4} \operatorname{sng}(g'(u_0)) g'(u_0) t^2 + O(t^4), \\ v(t) &= v_0 + \sqrt{\operatorname{sng}(f(u_0)) f(u_0)} t + \frac{1}{24} \frac{f'(u_0) g'(u_0)}{\sqrt{\operatorname{sng}(f(u_0)) f(u_0)}} t^3 + O(t^5), \end{aligned}$$

onde $\operatorname{sng}(x) = \text{ sinal de } x$, e a solução do problema

$$\begin{cases} f(u) \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + g(u) \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0 \\ u(0) = u_1 \\ v(0) = v_0 \end{cases} \quad (5-5)$$

por

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1 - \frac{g(u_1)}{f'(u_1)} t^2 + O(t^4), \\ v(t) &= v_0 - \frac{2}{3} \frac{g(u_1)}{f'(u_1)} t^3 + O(t^5). \end{aligned}$$

Demonstração. Para (5-4), consideraremos o caso $f(u_0) < 0$. O outro caso é evidentemente análogo. Agora, basta ver que, se u e v são tais que $\frac{du}{dt} = \sqrt{g(u(t))}$ e $\frac{dv}{dt} = \sqrt{-f(u(t))}$, então

$$f(u) \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + g(u) \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0.$$

Calculando as derivadas em u_0 o resultado segue trivialmente.

Para a solução de (5-5), consideraremos o sistema de equações

$$\begin{cases} L(u, v, p) = f(u) + g(u) p^2 = 0 \\ dv - p du = 0 \end{cases}. \quad (5-6)$$

O campo de Lie-Cartan LC associado a (5-6) é dado por

$$LC(u, v, p) = (2g(u)p, 2g(u)p^2, -f'(u) - g'(u)p^2).$$

Como $f'(u_1) \neq 0$, LC não possui singularidade em (u_1, v_0, p) qualquer que seja $p \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$. Além disso, de $L_u(u_1, v_0, 0) = f'(u_1) \neq 0$, pelo Teorema da Função Implícita, $u = u(p)$, numa vizinhança de $(u_1, v_0, 0)$ e $u'(p) = -\frac{L_p(u(p), v, p)}{L_u(u(p), v, p)}$. Dessa forma,

$$u(p) = -\frac{g(u_1)}{f'(u_1)} p^2 + O(p^4).$$

Agora, como $u = u(p)$ satisfaz a equação diferencial (5-7), de $dv = p du$, temos

$$\frac{dv}{dp} = -\frac{p L_p(u(p), v, p)}{L_u(u(p), v, p)}.$$

Resolvendo o problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dp} = -\frac{p L_p(u(p), v, p)}{L_u(u(p), v, p)}, \quad v(0) = v_0,$$

obtemos

$$v(p) = v_0 - \frac{2}{3} \frac{g(u_1)}{f'(u_1)} p^3 + O(p^5),$$

concluindo a prova. \square

Teorema 5.4. *Em uma superfície de revolução a descrição qualitativa das linhas de Laguerre é a seguinte:*

- (i) *Uma família de curvas paralelas ($u=cte$);*
- (ii) *As outras duas famílias são definidas no cilindro $\mathcal{C} = \{(u, v) : k'_1(u) k'_2(u) < 0\}$;*
- (iii) *Para $(u, v) \in \partial\mathcal{C}$, temos um comportamento tangencial caso $k'_1(u) \neq 0, k'_2(u) = 0$ e $k''_2(u) \neq 0$ ou temos um tipo cúspide caso $k'_2(u) \neq 0, k'_1(u) = 0$ e $k''_1(u) \neq 0$.*

Demonstração. O item (i) é imediato. Para provar os demais itens precisamos analisar a equação

$$k'_1(u) du^2 + 3a(u)^2 k'_2(u) dv^2 = 0. \quad (5-7)$$

Uma breve análise nos permite ver que, para $u(t)$ não constante, (5-7) tem solução se e somente se, $k'_1(u) k'_2(u) < 0$, o que comprova o segundo item.

Agora, consideremos $u_0 \in \partial\mathcal{C}$ tal que $k'_1(u_0) \neq 0, k'_2(u_0) = 0$ e $k''_2(u_0) \neq 0$. Pelo Lema 5.3 o P.V.I.

$$\begin{cases} k'_1(u) \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 3a(u)^2 k'_2(u) \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0 \\ u(0) = u_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

tem solução

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 + \frac{3}{4} a(u_0)^2 \operatorname{sgn}(k''_2(u_0)) k''_2(u_0) t^2 + O(t^4), \\ v(t) &= v_0 + \sqrt{\operatorname{sgn}(k'_1(u_0)) k'_1(u_0)} t - \frac{1}{8} \frac{a(u_0)^2 k'_1(u_0) k''_2(u_0)}{\sqrt{\operatorname{sgn}(k'_1(u_0)) k'_1(u_0)}} t^3 + O(t^5). \end{aligned}$$

Ou seja, temos um comportamento tangencial.

Por fim, consideremos $u_1 \in \mathbb{R}$ tal que $k'_2(u_1) \neq 0, k'_1(u_1) = 0$ e $k''_1(u_1) \neq 0$.

Aplicando o Lema 5.3 ao problema

$$\begin{cases} k_1'(u) \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 3a(u)^2 k_2'(u) \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0 \\ u(0) = u_1 \\ v(0) = v_0 \end{cases},$$

obtemos

$$u(t) = u_1 - 3 \frac{a(u_1)^2 k_2'(u_1)}{k_1''(u_1)} t^2 + O(t^4)$$

$$v(t) = v_0 - 2 \frac{a(u_1)^2 k_2'(u_1)}{k_1''(u_1)} t^3 + O(t^5).$$

Ou seja, (u_1, v_0) é um ponto de cúspide. □

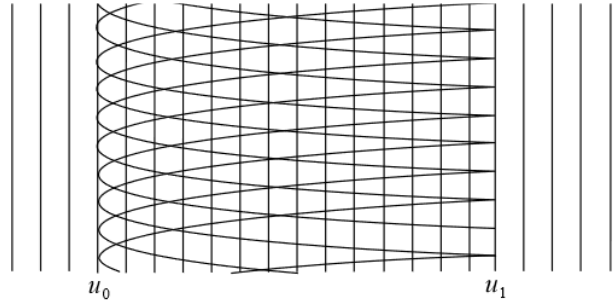


Figura 5.1: Ilustração do Teorema 5.4.

Exemplo 5.5. Consideremos o toro de revolução

$$T(u, v) = \left((R + r \cos(u)) \sin(v), (R + r \cos(u)) \cos(v), r \sin(u) \right),$$

onde $R > r > 0$. Note que $a(u) = R + r \cos(u)$ e $b(u) = r \sin(u)$.

Os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental são respectivamente:

$$E(u, v) = r^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = (R + r \cos(u))^2$$

e

$$e(u, v) = -r, \quad f(u, v) = 0, \quad g(u, v) = -(R + r \cos(u)) \cos(u).$$

Desse modo as curvaturas principais são:

$$k_1(u, v) = -\frac{1}{r} \quad e \quad k_2(u, v) = -\frac{\cos(u)}{R + r \cos(u)}.$$

Consequentemente a equação das linhas de Laguerre é

$$3(R + r \cos(u))^2 \frac{d}{du} \left(-\frac{\cos(u)}{R + r \cos(u)} \right) du dv^2 = 0$$

que é equivalente a

$$\operatorname{sen}(u) du dv^2 = 0.$$

Note que $u(t) = u_0$ (u_0 constante) é raiz simples e $v(t) = v_0$ (v_0 constante) é solução dupla da equação acima. De modo que, num toro de revolução, todas as linhas de Laguerre são órbitas fechadas. Além disso, esta equação possui duas linhas de singularidades: $(0, v)$ e (π, v) . A união destas linhas de singularidades é a curva discriminante, i.e., a curva discriminante do toro de revolução é $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, onde

$$\Gamma_1 = \left\{ ((R - r) \operatorname{sen}(v), (R - r) \cos(v), 0); v \in [0, 2\pi] \right\}$$

e

$$\Gamma_2 = \left\{ ((R + r) \operatorname{sen}(v), (R + r) \cos(v), 0); v \in [0, 2\pi] \right\}.$$

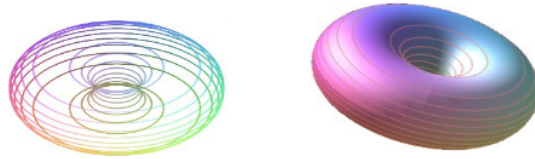


Figura 5.2: Curvas u constante no toro de revolução.

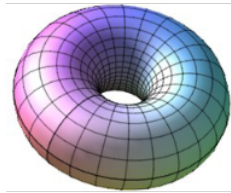


Figura 5.3: Linhas de Laguerre no toro de revolução.

5.2 Linhas de Laguerre em superfícies regradas

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva diferenciável e seja $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ uma aplicação diferenciável que a cada $u \in I$ associa um vetor não nulo $\eta(u)$. Consideremos a família de retas r_u formados por pontos $p(v) = \gamma(u) + v\eta(u)$, $v \in \mathbb{R}$. O conjunto formado pela união de todas as r_u é uma superfície S de uma classe especial que passamos a definir:

Definição 5.6. Chamamos de superfície regradada a toda superfície S que admite uma parametrização da forma

$$X(u, v) = \gamma(u) + v\eta(u), (u, v) \in I \times \mathbb{R}, \quad (5-8)$$

onde I é um intervalo aberto da reta e , $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ são aplicações diferenciáveis.

Cada reta r_u é chamada uma geratriz e a curva α de uma diretriz de S .

Proposição 5.7. *A equação das linhas de Laguerre em uma superfície regradada tem a forma*

$$du \{[e_u - 2(\Gamma_{11}^1 + f\Gamma_{11}^2)] du^2 + 3[e_v - 2(e\Gamma_{12}^1 + f\Gamma_{12}^2)] du dv - 6f\Gamma_{12}^1 dv^2\} = 0. \quad (5-9)$$

Demonstração. Basta observar que $X_{vv} = 0$ e que, portanto, $g = \langle X_{vv}, N \rangle = 0$, onde N é a aplicação normal de Gauss da superfície. Em seguida é só aplicar a Proposição 3.4. \square

Corolário 5.8. *Numa superfície regradada as geratrizes são linhas de Laguerre.*

Demonstração. Segue da equação (5-9) que as retas u constante são linhas de Laguerre numa superfície regradada. \square

Exemplo 5.9. *(Cilindro) Quando o traço de γ está contido em um plano π e η é uma direção fixa não paralela a π , chamamos S de cilindro. Digamos que $\eta(u) = p$, $u \in I$. Daí,*

$$X(u, v) = \gamma(u) + vp.$$

Assim, um cilindro é uma superfície regradada.

Exemplo 5.10. *(Cone) Sejam π um plano em \mathbb{R}^3 e P um ponto não pertencente a π . Consideremos $\gamma : I \rightarrow \pi$ e $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ dada por:*

$$\eta(u) = P - \gamma(u), \quad u \in I.$$

A superfície regradada C , parametrizada por

$$X(u, v) = \gamma(u) + v\eta(u), \quad (u, v) \in I \times \mathbb{R},$$

é denominada cone. Como podemos, sempre, tomar $P = (0, 0, 0)$, podemos reescrever a parametrização do cone como segue:

$$X(u, v) = v\gamma(u), \quad (u, v) \in I \times \mathbb{R}. \quad (5-10)$$

Proposição 5.11. *A equação diferencial das linhas de Laguerre num cilindro é*

$$\left(e_u - e \frac{G E_u - 2 F F_u}{E G - F^2} \right) du^3 = 0. \quad (5-11)$$

Ou seja, num cilindro S qualquer, fora do conjunto de pontos singulares as únicas direções de Laguerre são as das geratrizes.

Demonstração. Consideremos $\gamma(u) = (x(u), y(u), 0)$ e $\eta(u) = (a, b, c)$ não paralelo ao plano xy . Assim, $f = g = 0$. Daí

$$\begin{aligned} A_3 &= g_v - 2(f\Gamma_{22}^1 + g\Gamma_{22}^2) = 0, \\ A_2 &= g_u - 2(f\Gamma_{12}^1 + g\Gamma_{12}^2) = 0, \\ A_1 &= e_v - 2(e\Gamma_{12}^1 + f\Gamma_{12}^2) = e_v - 2e\Gamma_{12}^1, \\ A_0 &= e_u - 2(e\Gamma_{11}^1 + f\Gamma_{11}^2) = e_u - 2e\Gamma_{11}^1. \end{aligned}$$

Como, $X_u = \gamma'$ não depende de v e $X_v = (0, 0, 0)$, temos

$$e_v = G_u = E_v = 0.$$

Desse modo, temos

$$\begin{aligned} A_1 &= e_v - 2e \frac{G E_v - F G_u}{2(E G - F^2)} = 0, \\ A_0 &= e_u - 2e \frac{G E_u - 2 F F_u + F E_v}{2(E G - F^2)} = e_u - 2e \frac{G E_u - 2 F F_u}{2(E G - F^2)}. \end{aligned}$$

O resultado segue da Proposição 3.4. \square

Corolário 5.12. *Em um cilindro reto a equação (5-11) tem a forma*

$$k_1'(u) du^3 = 0, \quad (5-12)$$

onde $k_1(u) = k_1(u, v) = \frac{e(u, v)}{E(u, v)}$ é a curvatura normal na direção $\gamma'(u)$.

Demonstração. Em um cilindro reto,

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = \langle \gamma', p \rangle = 0.$$

Daí,

$$e_u - e \frac{G E_u - 2 F F_u}{E G - F^2} = e_u - e \frac{E_u}{E} = E \frac{e_u E - e E_u}{E^2} = E \frac{d}{du} \left(\frac{e}{E} \right) = E k_1'.$$

Como $E = \|\gamma'\|^2 > 0$, segue que a equação diferencial das linhas de Laguerre em um cilindro reto é (5-12). \square

Do corolário acima, vemos que, as geratrizes em que k_1' muda de sinal, num cilindro reto, são linhas de singularidade da equação diferencial das linhas de Laguerre.

Proposição 5.13. *A equação diferencial das linhas de Laguerre em um cone é*

$$du^2 \left\{ (e_u - 2e\Gamma_{11}^1) du + 3(e_v - 2e\Gamma_{12}^1) dv \right\} = 0. \quad (5-13)$$

Demonstração. De (5-10), temos

$$X_{uv} = \gamma' \quad \text{e} \quad X_{vv} = 0.$$

Daí

$$f = \langle X_{uv}, N \rangle = 0 \quad \text{e} \quad g = \langle X_{vv}, N \rangle = 0.$$

Assim

$$\begin{aligned} A_0 &= e_u - 2(e\Gamma_{11}^1 + f\Gamma_{11}^2) = e_u - 2e\Gamma_{11}^1, \\ A_1 &= e_v - 2(e\Gamma_{12}^1 + f\Gamma_{12}^2) = e_v - 2e\Gamma_{12}^1, \\ A_2 &= g_u - 2(f\Gamma_{12}^1 + g\Gamma_{12}^2) = 0, \\ A_3 &= g_v - 2(f\Gamma_{22}^1 + g\Gamma_{22}^2) = 0. \end{aligned}$$

Então, pela Proposição 3.4, a equação das linhas de Laguerre num cone é (5-13). \square

5.3 Linhas de Laguerre nas superfícies quádricas

O conjunto dos pontos do \mathbb{R}^3 que satisfazem a equação de segundo grau em $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$a_9 x^2 + a_8 y^2 + a_7 z^2 + a_6 xy + a_5 xz + a_4 yz + a_3 x + a_2 y + a_1 z + a_0 = 0,$$

com coeficientes a_j reais onde pelo menos um dos coeficientes de grau dois é não nulo, pode ser um ponto, o vazio ou uma superfície quádrica. Nesta seção analisaremos a configuração das linhas de Laguerre em superfícies quádricas e mostraremos que, com exceção do cone circular; nos cilindros e no cone as linhas de Laguerre são as linhas assintóticas e que nas demais quádricas a equação das linhas de Laguerre em uma carta local (u, v) , tem a forma

$$(e du^2 + 2f du dv + g dv^2)(K_u du + K_v dv) = 0,$$

onde K é a curvatura Gaussiana e, K_u e K_v são as derivadas de K com relação a u e v respectivamente.

5.3.1 Linhas de Laguerre no parabolóide

Consideremos o parabolóide parametrizado por

$$X(u, v) = (u, v, a u^2 + b v^2), \quad (5-14)$$

onde a, b são constantes não nulas e $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Caso, $ab > 0$ temos o parabolóide elíptico e caso $ab < 0$ o hiperbólico.

Lema 5.14. *A equação diferencial das curvas de níveis da curvatura Gaussiana em um parabolóide qualquer, é*

$$a^2 u du + b^2 v dv = 0.$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} e &= \frac{2a}{\sqrt{4(a^2u^2+b^2v^2)+1}}, & f &= 0, & g &= \frac{2b}{\sqrt{4(a^2u^2+b^2v^2)+1}}, \\ E &= 4a^2u^2 + 1, & F &= 4abuv, & G &= 4b^2v^2 + 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$K = \frac{4ab}{(4a^2u^2 + 4b^2v^2 + 1)^2}$$

e daí

$$K_u(u, v) = -\frac{64a^3bu}{(4a^2u^2 + 4b^2v^2 + 1)^2} \quad \text{e} \quad K_v(u, v) = -\frac{64ab^3v}{(4a^2u^2 + 4b^2v^2 + 1)^2},$$

de modo que, a equação diferencial das curvas de níveis da \mathcal{K} é

$$-\frac{64ab}{(4a^2u^2 + 4b^2v^2 + 1)^2} (a^2 u du + b^2 v dv) = 0$$

que equivale a

$$a^2 u du + b^2 v dv = 0.$$

□

Proposição 5.15. *A equação diferencial das linhas de Laguerre num parabolóide parametrizado por (5-14) é*

$$(e du^2 + 2f du dv + g dv^2)(a^2 u du + b^2 v dv) = 0. \quad (5-15)$$

Demonstração. Aplicando o Corolário 3.6, obtemos:

$$\begin{aligned} A_0(u, v) &= -\frac{24a^3u}{(4a^2u^2+4b^2v^2+1)^{3/2}}, \\ A_1(u, v) &= -\frac{8ab^2v}{(4a^2u^2+4b^2v^2+1)^{3/2}}, \\ A_2(u, v) &= -\frac{8a^2bu}{(4a^2u^2+4b^2v^2+1)^{3/2}}, \\ A_3(u, v) &= -\frac{24b^3v}{(4a^2u^2+4b^2v^2+1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Logo, a equação das linhas de Laguerre num parabolóide qualquer é

$$-\frac{24}{(4a^2u^2+4b^2v^2+1)^{3/2}}(a^3u\,du^3+a\,b^2v\,du^2dv+a^2b\,u\,du\,dv^2+b^3v\,dv^3)=0$$

de onde, aplicando o Lema 5.14, obtemos (5-15) sem muita dificuldade. \square

Proposição 5.16. *As linhas de Laguerre no parabolóide elíptico consiste de uma única folheação correspondente à família de curvas fechadas dadas por*

$$\gamma_c(t) = \left(\sqrt{c}ab \cos(t), \sqrt{c}a^2 \sin(t), a^2b^2c(a^2 \cos^2(t) + \sin^2(t)) \right), \quad (5-16)$$

onde $t \in \mathbb{R}$ e o parâmetro c é real não negativo (Ver Figura 5.4).

Demonstração. Como, no parabolóide elíptico, todos os pontos são elípticos, igualdade

$$e\,du^2+2f\,du\,dv+g\,dv^2=0,$$

somente se verifica se $du = dv = 0$. Já a equação

$$a^2u\,du+b^2v\,dv=0, \quad (5-17)$$

tem por solução as elipses dadas por

$$\tilde{\gamma}_c(t) = \left(\sqrt{c}ab \cos(t), \sqrt{c}a^2 \sin(t) \right),$$

onde c é um parâmetro real não negativo. Como,

$$X(\tilde{\gamma}_c(t)) = \left(\sqrt{c}ab \cos(t), \sqrt{c}a^2 \sin(t), a^2b^2c(a^2 \cos^2(t) + \sin^2(t)) \right) = \gamma_c(t),$$

a prova está concluída. \square

Da Proposição 5.16 segue que as curvas de Laguerre no parabolóide elíptico são exatamente as curvas de nível da curvatura Gaussiana.

Proposição 5.17. *As linhas de Laguerre de um parabolóide hiperbólico, além de conterem as curvas γ_c dadas em (5-16) ainda possui mais duas folheações formadas*

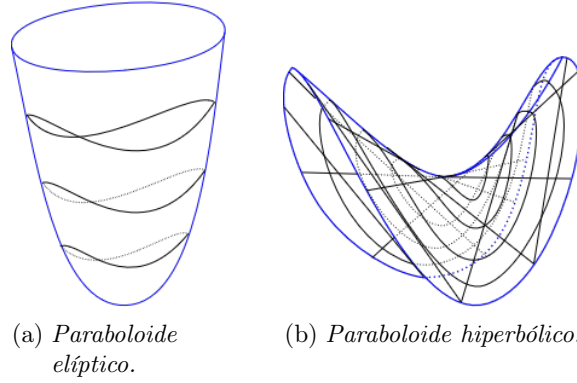


Figura 5.4: *Linhas de Laguerre em um paraboloides.*

pelas retas dadas por

$$r_d^\pm(t) = \left(t, d \pm \sqrt{-\frac{a}{b}} t, b d^2 \pm 2 b d \sqrt{-\frac{a}{b}} t \right), \quad (5-18)$$

onde $t \in \mathbb{R}$ e o parâmetro d é um real qualquer.

Demonstração. Como $ab < 0$, a equação (5.3.1) tem por solução as retas

$$\tilde{r}_d^\pm(t) = \left(t, d \pm \sqrt{-\frac{a}{b}} t \right),$$

com d real qualquer. Temos

$$\begin{aligned} X(\tilde{r}_d^\pm(t)) &= \left(t, d \pm \sqrt{-\frac{a}{b}} t, a t^2 + b \left(d \pm \sqrt{-\frac{a}{b}} t \right)^2 \right) \\ &= \left(t, d \pm \sqrt{-\frac{a}{b}} t, b d^2 \pm 2 b d \sqrt{-\frac{a}{b}} t \right). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$X(\tilde{r}_d^\pm(t)) = r_d^\pm(t),$$

qualquer que seja t real e isso conclui a prova. \square

Da proposição acima segue que, no paraboloides hiperbólicas temos três folheações das linhas de Laguerre, a saber: uma família de órbitas fechadas que são as curvas de níveis da curvatura Gaussiana e mais as geratrizes que são as linhas assintóticas.

5.3.2 Linhas de Laguerre no hiperboloide

Temos o hiperboloide de uma folha, cuja equação na forma canônica é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e o hiperboloide de duas folhas que pode ser escrito, na forma canônica, como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Consideremos as parametrizações

$$X^\pm(u, v) = \left(u, v, \pm c \sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - 1} \right), \quad (u, v) \in U, \quad (5-19)$$

onde $U = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - 1 > 0 \right\}$, para o hiperboloide de uma folha e as parametrizações

$$Y^\pm(u, v) = \left(u, v, \pm c \sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + 1} \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad (5-20)$$

para o de duas folhas.

Em todos os resultados desta seção utilizamos as parametrizações dadas por (5-19) e (5-20).

Lema 5.18. *A equação diferencial das curvas de nível da curvatura Gaussiana num hiperboloide qualquer é*

$$b^4(a^2 + c^2) u du + a^4(b^2 + c^2) v dv = 0. \quad (5-21)$$

Demonstração. Seja, K^i a curvatura Gaussiana do hiperboloide de i folhas $i = 1, 2$, e sejam

$$w_G^i = K_u^i du + K_v^i dv = 0, \quad i = 1, 2,$$

as respectivas equações de suas curvas de nível. Como

$$K^1 = -\frac{a^6 b^6 c^2 (a^2 + c^2) u}{[b^4 (a^2 + c^2) u^2 + a^4 (b^2 + c^2) v^2 - a^4 b^4]^2} \quad \text{e} \quad K^2 = \frac{a^6 b^6 c^2}{[b^4 (a^2 + c^2) u^2 + a^4 (b^2 + c^2) v^2 + a^4 b^4]^2},$$

temos

$$\begin{aligned} K_u^1 &= \frac{4 a^6 b^{10} c^2 (a^2 + c^2) u}{[b^4 (a^2 + c^2) u^2 + a^4 (b^2 + c^2) v^2 - a^4 b^4]^3}, & K_v^1 &= \frac{4 a^{10} b^6 c^2 (b^2 + c^2) v}{[b^4 (a^2 + c^2) u^2 + a^4 (b^2 + c^2) v^2 - a^4 b^4]^3}, \\ K_u^2 &= -\frac{4 a^6 b^{10} c^2 (a^2 + c^2) u}{[b^4 (a^2 + c^2) u^2 + a^4 (b^2 + c^2) v^2 + a^4 b^4]^3}, & K_v^2 &= -\frac{4 a^{10} b^6 c^2 (b^2 + c^2) v}{[b^4 (a^2 + c^2) u^2 + a^4 (b^2 + c^2) v^2 + a^4 b^4]^3}. \end{aligned}$$

Dai

$$w_G^1 = \frac{4a^6 b^6 c^2}{[b^4(a^2+c^2)u^2 + a^4(b^2+c^2)v^2 - a^4 b^4]^3} [b^4(a^2+c^2)u du + a^4(b^2+c^2)v dv],$$

$$w_G^2 = -\frac{4a^6 b^6 c^2}{[b^4(a^2+c^2)u^2 + a^4(b^2+c^2)v^2 + a^4 b^4]^3} [b^4(a^2+c^2)u du + a^4(b^2+c^2)v dv].$$

Logo, $w_G^i = 0$ se, e somente se,

$$b^4(a^2+c^2)u du + a^4(b^2+c^2)v dv = 0.$$

□

Proposição 5.19. (Odenal, B, [35]) *As curvas de nível da curvatura Gaussiana no hiperboloide de uma folha, para $a > b > 0$ e $c > 0$ possui duas singularidades tipo sela em $(0, \pm b, 0)$ e dois centros em $(\pm a, 0, 0)$. As duas selas estão conectadas por suas separatrizes que são as curvas de nível $K_b = K(0, \pm b, 0) = -\frac{a^2}{b^2 c^2}$ onde K atinge seu mínimo.*

Para uma prova da Proposição 5.19 pode-se consultar [35]. Para uma ilustração veja a Figura 5.5.

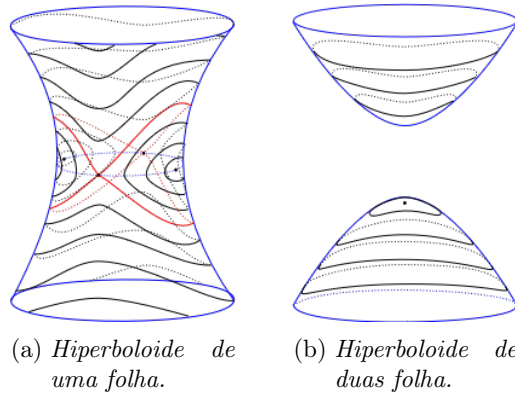


Figura 5.5: Curvas de nível da curvatura Gaussiana no hiperboloide.

Proposição 5.20. *As curvas de nível da curvatura Gaussiana no hiperboloide de duas folhas, possui duas singularidades do tipo centro em $(0, 0, \pm c)$ correspondentes a pontos de máximo da K . Todas as órbitas regulares são curvas fechadas circundando os dois centros.*

Demonstração. Do Lema 5.18 segue que a projeção das curvas de nível da curvatura Gaussiana no plano uv é a família de elipses $b^4(a^2+c^2)u^2 + a^4(b^2+c^2)v^2 = k$, onde k é um parâmetro real. Disto segue a Proposição. □

Proposição 5.21. *As curvas de nível da curvatura Gaussiana no hiperboloide de revolução, de uma folha possui uma linha de singularidades que é o círculo*

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

e todas as curvas regulares são círculos. O hiperboloide de revolução de duas folhas, possui as mesmas duas singularidades do caso $a > b$ com a única diferença que, no de revolução, as órbitas da $w_G = 0$ são círculos.

Demonstração. Fazendo $b = a$ em (5-21) obtemos

$$a^4(a^2 + c^2)(u du + v dv) = 0.$$

Assim, as órbitas regulares no de uma folha são intersecção do hiperboloide com a família de cilindros C_r , tal que

$$C_1^r = \{(u, v, z) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 = r^2\},$$

com $r > a$, e no de duas folhas com $r > 0$. Como o círculo

$$u^2 + v^2 = a^2$$

está contido na fronteira de U não é possível detectar a linha de singularidade no de uma folha, através da parametrização (5-19). Parametrizando o de uma folha por

$$X(u, v) = (a \cosh(u) \cos(v), b \cosh(u) \sin(v), c \sinh(u)), (u, v) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi),$$

a equação diferencial das curvas de nível da K toma a forma

$$\sinh(u) du = 0,$$

e portanto, $u = 0$ é uma singularidade de $w_G = 0$. Como, $X(0, v) = (a \cos(v), a \sin(v), 0)$ segue que o círculo de raio a é uma linha de singularidades. \square

Proposição 5.22. *A equação das linhas de Laguerre num hiperboloide é*

$$II^i w_G^i = 0, i = 1, 2,$$

onde II^i é a segunda forma fundamental, $w_G^i = K_u^i du + K_v^i dv$ e K^i é a curvatura Gaussiana do hiperboloide de i folhas.

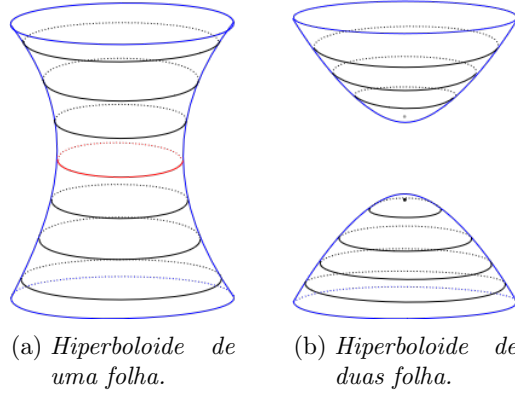


Figura 5.6: *Curvas de nível da K num hiperboloide de revolução.*

Demonstração. Temos

$$II^1 = \pm c \sqrt{\left[b^4(a^2 + c^2)u^2 + a^4(b^2 + c^2)v^2 - a^4 b^4 \right] \left(\frac{v^2}{b^2} + \frac{u^2}{a^2} - 1 \right)} w_1,$$

$$II^2 = \pm c \sqrt{\left[b^4(a^2 + c^2)u^2 + a^4(b^2 + c^2)v^2 + a^4 b^4 \right] \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + 1 \right)} w_2,$$

onde

$$w_1 = (b^2 - v^2) du^2 + 2uv du dv + (a^2 - u^2) dv^2,$$

$$w_2 = (b^2 + v^2) du^2 - 2uv du dv + (a^2 + u^2) dv^2.$$

Aplicando o Corolário 3.6, obtemos que, para o hiperboloide de uma folha a equação diferencial das linhas de Laguerre é

$$\left[a^4 b^4 - b^4 (a^2 + c^2) u^2 - a^4 (b^2 + c^2) v^2 \right] w_1 w_G^1 = 0 \quad (5-22)$$

e para o de duas folhas

$$\left[a^4 b^4 + b^4 (a^2 + c^2) u^2 + a^4 (b^2 + c^2) v^2 \right] w_2 w_G^2 = 0. \quad (5-23)$$

Como, $II^1 w_G^1 = 0$ equivale a (5-22) e $II^2 w_G^2 = 0$ equivale a (5-23) a prova está concluída. \square

Corolário 5.23. *As linhas de Laguerre num hiperboloide de duas folhas possui somente uma folheação que são as curvas de nível da K e no de uma folha possuem três folheações: uma formada pelas curvas de nível da curvatura Gaussiana e duas pelas linhas assintóticas.*

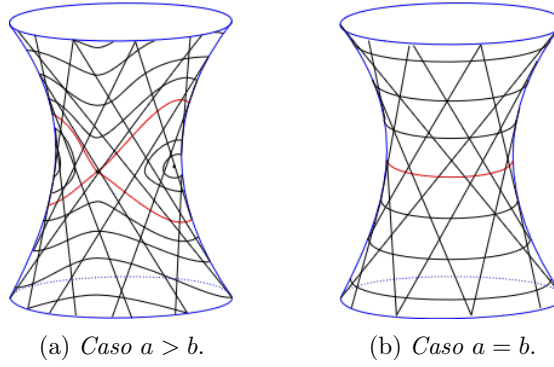


Figura 5.7: Linhas de Laguerre no hiperbolóide de uma folha.

5.3.3 Linhas de Laguerre no elipsoide

O elipsoide é a quádrica cuja equação cartesiana é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Quando um elipsoide tem dois eixos do mesmo tamanho e um diferente ele é chamado de biaxial e quando tem três eixos de tamanhos distintos o chamamos de triaxial ou escaleno.

Proposição 5.24. *As linhas de Laguerre no elipsoide biaxial são círculos fechados com centro no eixo diferente. Além disso o círculo de maior raio é uma linha de singularidades da equação diferencial das linhas de Laguerre.*

Demonstração. O elipsoide

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

pode ser parametrizado por

$$X(u, v) = \left(r \cos(u) \cos(v), r \cos(u) \sin(v), c \sin(u) \right),$$

com $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $v \in (0, 2\pi)$. Pelo Lema 5.1, a equação das linhas de Laguerre, nesta parametrização, é

$$du \left((a'(u)^2 + b'(u)^2) k_1'(u) du^2 + 3 a(u)^2 k_2'(u) dv^2 \right) = 0,$$

onde

$$a(u) = r \cos(u), \quad b(u) = c \sin(u), \quad k_1(u) = \frac{e(u, v)}{E(u, v)} \quad \text{e} \quad k_2(u) = \frac{g(u, v)}{G(u, v)}.$$

Como

$$e(u, v) = \frac{rc}{\sqrt{(c^2-r^2)\cos^2(u)+r^2}}, \quad E(u, v) = (c^2 - r^2) \cos^2(u) + r^2,$$

$$g(u, v) = \frac{rc \cos^2(u)}{\sqrt{(c^2-r^2)\cos^2(u)+r^2}}, \quad G(u, v) = \cos(u)^2 r^2,$$

segue que

$$a'(u)^2 + b'(u)^2 k_1'(u) du^2 + 3 a(u)^2 k_2'(u) dv^2 = \frac{3rc(c^2-r^2)\cos(u)\sin(u)}{(r^2\sin^2(u)+c^2\cos^2(u))^{\frac{3}{2}}} (du^2 + \cos^2(u) dv^2).$$

Como

$$du^2 + \cos^2(u) dv^2$$

não se anula, a equação diferencial das Linhas de Laguerre equivale a

$$\sin(u) du = 0. \quad (5-24)$$

Consequentemente, as linhas de Laguerre, no elipsoide biaxial, são os círculo correspondentes aos seguimentos u constante, sendo $u = 0$ uma linha de singularidade. \square

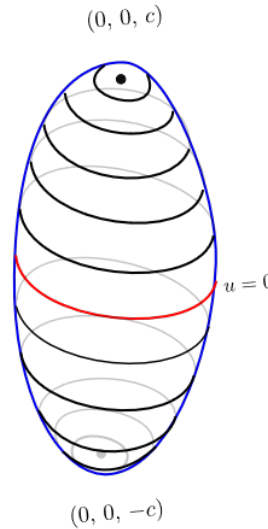


Figura 5.8: Linhas de Laguerre em um elipsoide biaxial.

Passaremos a analisar, agora, o elipsoide triaxial

$$\mathbb{E}_{a,b,c} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\},$$

com $a > b > c > 0$. Sabemos que, $\mathbb{E}_{a,b,c}$ pode ser parametrizado por

$$X(u, v) = \left(\pm \sqrt{\frac{M(u, v, a^2)}{W(a, b, c)}}, \pm \sqrt{\frac{M(u, v, b^2)}{W(b, a, c)}}, \pm \sqrt{\frac{M(u, v, c^2)}{W(c, a, b)}} \right), \quad (5-25)$$

com

$$M(u, v, w) = w(w-u)(w-v), \quad W(r, s, t) = (r^2-s^2)(r^2-t^2), \quad u \in (c^2, b^2) \quad \text{e} \quad v \in (b^2, a^2).$$

Lema 5.25. *Na parametrização (5-25), a equação diferencial das curvas de nível da curvatura Gaussiana em $\mathbb{E}_{a,b,c}$ é*

$$v du + u dv = 0,$$

e

$$II = \pm \frac{abc}{4\sqrt{uv}h(u)h(v)} (h(u) dv^2 - h(v) du^2),$$

onde

$$h(t) = (a^2 - t)(b^2 - t)(c^2 - t).$$

Demonstração. Os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental são

$$E(u, v) = \frac{1}{4} \frac{(u-v)u}{h(u)}, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = -\frac{1}{4} \frac{(u-v)v}{h(v)},$$

$$e(u, v) = \pm \frac{1}{4} \frac{abc(u-v)}{h(u)\sqrt{uv}}, \quad f(u, v) = 0, \quad g(u, v) = \pm \frac{1}{4} \frac{abc(v-u)}{h(v)\sqrt{uv}}.$$

Assim,

$$K(u, v) = \frac{e(u, v)g(u, v)}{E(u, v)G(u, v)} = \frac{a^2 b^2 c^2}{u^2 v^2}.$$

Daí

$$K_u = -\frac{2a^2 b^2 c^2}{u^3 v^2} \quad \text{e} \quad K_v = -\frac{2a^2 b^2 c^2}{u^2 v^3}.$$

e portanto

$$w_G = 0 \Leftrightarrow v du + u dv = 0.$$

Por fim,

$$II = e du^2 + 2f du dv + g dv^2 = \pm \frac{abc}{4\sqrt{uv}h(u)h(v)} (h(u) dv^2 - h(v) du^2),$$

concluindo a prova. \square

Proposição 5.26. *As linhas de Laguerre em $\mathbb{E}_{a,b,c}$ são as curvas de nível da curvatura Gaussiana.*

Demonstração. Da demonstração do Lema 5.25, temos

$$k_1(u, v) = \frac{e(u, v)}{E(u, v)} = \frac{abc}{u\sqrt{uv}} \quad \text{e} \quad k_2(u, v) = \frac{abc}{v\sqrt{uv}}.$$

Pela Corolário 3.5, a equação diferencial das linhas de Laguerre é

$$E \left(\frac{\partial k_1}{\partial u} du^3 + 3 \frac{\partial k_1}{\partial v} du^2 dv \right) + G \left(3 \frac{\partial k_2}{\partial u} du dv^2 + \frac{\partial k_2}{\partial v} dv^3 \right) = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} E \left(\frac{\partial k_1}{\partial u} du^3 + 3 \frac{\partial k_1}{\partial v} du^2 dv \right) &= \frac{1}{4} \frac{(u-v)u}{h(u)} \left(-\frac{3}{2} \frac{abc}{u^2 \sqrt{uv}} du^3 - \frac{3}{2} \frac{abc}{uv \sqrt{uv}} du^2 dv \right) \\ &= -\frac{3}{8} \frac{abc(u-v)}{\sqrt{uv}} \frac{du^2}{h(u)} \left(\frac{1}{u} du + \frac{1}{v} dv \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G \left(3 \frac{\partial k_2}{\partial u} du dv^2 + \frac{\partial k_2}{\partial v} dv^3 \right) &= -\frac{1}{4} \frac{(u-v)v}{h(v)} \left(-\frac{3}{2} \frac{abc}{uv \sqrt{uv}} du dv^2 - \frac{3}{2} \frac{abc}{v^2 \sqrt{uv}} dv^3 \right) \\ &= \frac{3}{8} \frac{abc(u-v)}{\sqrt{uv}} \frac{dv^2}{h(v)} \left(\frac{1}{u} du + \frac{1}{v} dv \right), \end{aligned}$$

a equação diferencial das linhas de Laguerre pode ser escrita como

$$\frac{3}{8} \frac{abc(u-v)}{\sqrt{uv}} \left(\frac{dv^2}{h(v)} - \frac{du^2}{h(u)} \right) \left(\frac{1}{u} du + \frac{1}{v} dv \right) = 0.$$

Ou, equivalentemente,

$$\frac{1}{4} \frac{abc(u-v)}{h(u)h(v)\sqrt{uv}} (h(u)dv^2 - h(v)du^2) (vdu + u dv) = 0.$$

Como

$$\frac{1}{4} \frac{abc(u-v)}{h(u)h(v)\sqrt{uv}} (h(u)dv^2 - h(v)du^2) = II$$

não se anula em nenhum ponto de $\mathbb{E}_{a,b,c}$, segue que a equação diferencial das linhas de Laguerre equivale a

$$w_G = 0,$$

como queríamos mostrar. \square

Proposição 5.27. *A equação diferencial das linhas de Laguerre no $\mathbb{E}_{a,b,c}$ possui duas singularidades do tipo sela e quatro do tipo centro.*

Demonstração. Consideremos as parametrizações

$$X^\pm(y, z) = \left(\pm a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}, y, z \right), \quad \text{com} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1,$$

$$Y^\pm(x, z) = \left(x, \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}, z \right), \text{ com } \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1,$$

$$Z^\pm(x, y) = \left(x, y, \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right), \text{ com } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1.$$

A equação diferencial das curvas de nível da curvatura Gaussiana na parametrização X^\pm é

$$w_x = (b^2 - a^2) c^4 y dy + (c^2 - a^2) b^4 z dz = 0$$

na parametrização Y^\pm é

$$w_y = (a^2 - b^2) c^4 x dx + (c^2 - b^2) a^4 z dz = 0$$

e na parametrização Z^\pm é

$$w_z = (a^2 - c^2) b^4 x dx + (b^2 - c^2) a^4 y dy = 0.$$

Agora observemos que, w_x e w_z possuem cada uma, uma singularidade do tipo centro que resultam em quatro centros no elipsoide. Já w_y possui uma singularidade do tipo sela que resulta em duas selas no elipsoide. \square

Corolário 5.28. *As curvas integrais das linhas de Laguerre em um elipsoide triaxial são as da Figura 5.9.*

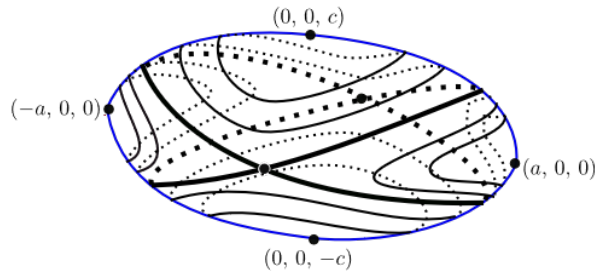


Figura 5.9: Linhas de Laguerre em um elipsoide triaxial.

Demonstração. Da demonstração da Proposição 5.27,

$$X^\pm(0, 0) = (\pm a, 0, 0) \text{ e } Z^\pm(0, 0) = (0, 0, \pm c)$$

são singularidades do tipo centro e,

$$Y^\pm(0, 0) = (0, \pm b, 0)$$

são selas. O restante da prova segue por simetria. \square

5.3.4 Linhas de Laguerre nos Cilindros

Existem quatro tipos de cilindros que são quádricas: o cilindro parabólico, o elíptico, o circular e o hiperbólico. Suas equações cartesianas são

$$y = a x^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x^2 + y^2 = r^2 \text{ e } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

respectivamente, sendo $a b \neq 0, r > 0$.

Podemos parametrizar

(i) o parabólico por

$$X(u, v) = (u, a u^2, v), (u, v) \in \mathbb{R}^2;$$

(ii) o elíptico por

$$X(u, v) = (a \cos(u), b \sen(u), v), (u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R};$$

(iii) o circular por

$$X(u, v) = (r \cos(u), r \sen(u), v), (u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R};$$

(iv) o hiperbólico por

$$X_-(u, v) = (-a \cosh(u), b \sinh(u), v), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

$$X_+(u, v) = (a \cosh(u), b \sinh(u), v), (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Como se tratam de cilindros retos, pelo Corolário 5.12, a equação diferencial das linhas de Laguerre em qualquer dos cilindros acima é

$$k_1'(u) du^3 = 0,$$

onde $k_1 = \frac{e}{E}$.

No cilindro parabólico

$$k_1'(u) = \frac{40a^3u}{(4a^2u^2 + 1)^{3/2}}$$

e, portanto, há uma linha de singularidades da equação diferencial que é $u = 0$.

No cilindro elíptico

$$k_1(u) = \frac{5ab(a^2 - b^2) \cos(u) \sen(u)}{(a^2 \sen^2(u) + b^2 \cos^2(u))^{3/2}}.$$

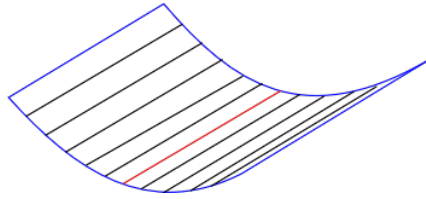


Figura 5.10: *Linhas de Laguerre num cilindro parabólico.*

Logo, a equação diferencial das linhas de Laguerre, no cilindro elíptico, possui quatro linhas de singularidades que são as retas: $u = 0$, $u = \pm \frac{\pi}{2}$ e $u = \pi$.

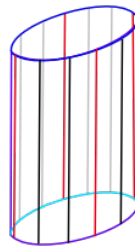


Figura 5.11: *Linhas de Laguerre num cilindro elíptico.*

No cilindro circular

$$k'_1 = 0$$

e daí toda direção é direção de Laguerre no cilindro circular.

No cilindro hiperbólico

$$k'_1(u) = -\frac{5ab(a^2 + b^2) \cosh(u) \sinh(u)}{(a^2 (\cosh(u))^2 + b^2 (\cosh(u))^2 - a^2)^{3/2}}.$$

Então a equação diferencial possui uma linha de singularidades, $u = 0$.

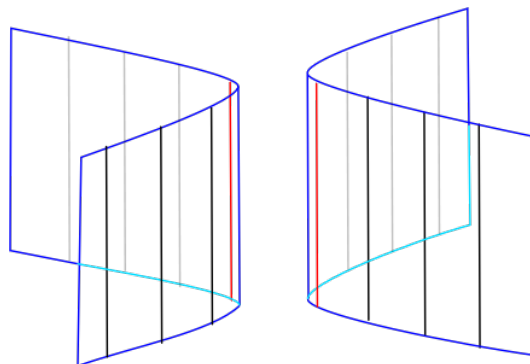


Figura 5.12: *Linhas de Laguerre num cilindro hiperbólico.*

5.3.5 Linhas de Laguerre nos Cones

Só existem dois cones que são quádricas: o cone circular e o elíptico com parametrizações

$$X(u, v) = (r v \cos(u), r v \sin(u), v) \quad \text{e} \quad Y(u, v) = (a v \cos(u), b v \sin(u), v),$$

respectivamente, para $(u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$, sendo $a > b > 0$. Da Proposição 5.13 a equação diferencial das linhas de Laguerre em qualquer deles é

$$du^2 \left\{ (e_u - 2e\Gamma_{11}^1) du + 3(e_v - 2e\Gamma_{12}^1) dv \right\} = 0.$$

No cone elíptico

$$\begin{aligned} e_u - 2e\Gamma_{11}^1 &= -\frac{3ab(a^2-b^2)v^2 \cos(u) \sin(u)}{((\cos^2(u)-b^2-1)a^2-b^2 \cos^2(u)) \sqrt{-v^2((\cos^2(u)-b^2-1)a^2-b^2 \cos^2(u))}}, \\ e_v - 2e\Gamma_{12}^1 &= \frac{abv}{\sqrt{-v^2((\cos^2(u)-b^2-1)a^2-b^2 \cos^2(u))}}. \end{aligned} \quad (5-26)$$

Assim, no cone elíptico,

$$(e_u - 2e\Gamma_{11}^1) du + 3(e_v - 2e\Gamma_{12}^1) dv = 0$$

equivale a

$$-\frac{3ab(a^2-b^2)v \cos(u) \sin(u)}{((\cos^2(u)-b^2-1)a^2-b^2 \cos^2(u))} du + ab dv = 0.$$

Resolvendo a equação acima, obtemos

$$v = \frac{c}{(2(\cos(2u)-1-2b^2)a^2-2b^2 \cos(2u)-2b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Como,

$$2(\cos(2u)-1-2b^2)a^2-2b^2 \cos(2u)-2b^2 < 0,$$

as linhas de Laguerre no cone elíptico são somente as geratrizes.

Fazendo $a = b = r$, em (5-26), obtemos

$$\begin{aligned} e_u - 2e\Gamma_{11}^1 &= 0 \\ e_v - 2e\Gamma_{12}^1 &= \frac{v}{\sqrt{v^2(r^2+1)}}. \end{aligned}$$

Então, a equação diferencial das linhas de Laguerre no cone circular é

$$v du^2 dv = 0.$$

Dessa forma, as linhas de Laguerre, no cone circular, são as geratrizes e os círculos

$$X(u, v_0) = (r v_0 \cos(u), r v_0 \sin(u), v_0), \quad u \in (0, 2\pi)$$

para cada $v_0 \neq 0$, fixo.

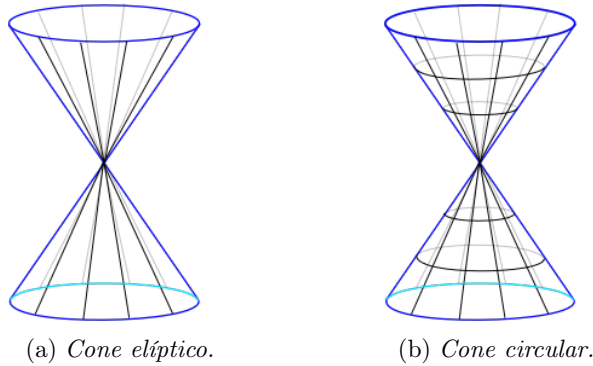


Figura 5.13: Linhas de Laguerre em um cone quádrico.

5.3.6 A equação diferencial das linhas de Laguerre em uma quádrica

Reunindo todos os resultados obtidos nas seções anteriores sobre quádricas obtemos o Teorema 5.29 a seguir.

Teorema 5.29. *Com exceção do cone circular, a equação das linhas de Laguerre numa quádrica, em uma carta local (u, v) , tem uma das seguintes formas:*

- (i) $(e du^2 + 2f du dv + g dv^2)(K_u du + K_v dv) = 0;$
- (ii) $e du^2 + 2f du dv + g dv^2 = 0;$
- (iv) $K_u du + K_v dv = 0;$

onde e, f e g são os coeficientes da segunda forma fundamental e, K_u e K_v são as derivadas da curvatura Gaussiana com relação a u e v respectivamente.

5.4 Problema inverso para linhas de Laguerre

O problema inverso para linhas de Laguerre é o seguinte: “Dada uma curva γ em \mathbb{R}^3 existe uma superfície M em \mathbb{R}^3 tendo γ como linha de Laguerre?”

O teorema seguinte nos diz que existe uma superfície regrada que tem esta curva como linha de Laguerre.

Teorema 5.30. *Seja γ uma curva regular de \mathbb{R}^3 parametrizada por comprimento de arco, com curvatura $k > 0$, torção τ e triedro de Frenet $\{t, n, b\}$. Então γ é uma curva regular de Laguerre da superfície M parametrizada por*

$$X(u, v) = \gamma(u) + v (\cos(a(u)) n(u) + \sin(a(u)) b(u)) \quad (5-27)$$

se, e só se, $a(u)$ satisfizer a equação diferencial

$$-3k(u) \cos(a(u)) a'(u) + 2k(u) \tau(u) \cos(a(u)) - k'(u) \sin(a(u)) = 0$$

e

$$a''(u) - \tau'(u) - k^2(u) \cos(a(u)) \sin(a(u)) \neq 0.$$

Demonstração. Seja N a aplicação normal de Gauss de X . Daí

$$N(u, 0) = -\sin(a(u)) n(u) + \cos(a(u)) b(u).$$

Os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental, em pontos de γ , são:

$$E(u, 0) = 1, F(u, 0) = 0, G(u, 0) = 1,$$

$$e(u, 0) = -k(u) \sin(a(u)), f(u, 0) = a'(u) - \tau(u) \text{ e } g(u, 0) = 0,$$

respectivamente. Com alguns cálculos obtemos

$$A_0(u, 0) = -3k(u) \cos(a(u)) a'(u) + 2k(u) \tau(u) \cos(a(u)) - k'(u) \sin(a(u))$$

e

$$A_1(u, 0) = a''(u) - \tau'(u) - k^2(u) \cos(a(u)) \sin(a(u)).$$

Sabemos que $A_0(u, 0) = 2k'_n(u) - 2\tau_g(u)k_g(u)$ de modo que γ será uma linha de Laguerre de (5-27) se, e só se, $a(u)$ satisfizer a equação

$$-3k(u) \cos(a(u)) a'(u) + 2k(u) \tau(u) \cos(a(u)) - k'(u) \sin(a(u)) = 0.$$

Por fim, a condição de regularidade é $A_1(u, 0) \neq 0$. □

Contribuições e perspectivas de trabalhos futuros

As contribuições deste trabalho são:

- Prova do Teorema [1.66](#).
- Descrição do comportamento qualitativo genérico local para as equações da forma

$$\text{Im}[(a + ib)(du + idv)^3] = 0.$$

- Classificação das singularidades, genéricas, no infinito para as equações da forma

$$\text{Im}[(a + ib)(du + idv)^3] = 0.$$

- A classificação global da configuração de equações da forma

$$\text{Im}[(a + ib)(du + idv)^3] = 0,$$

para o caso particular em que $a(u, v) = a_1u + a_2v$, $b(u, v) = b_1u + b_2v$ sendo $a_j, b_j \in \mathbb{R}$.

- Dedução de uma expressão para a derivada da aplicação de primeiro retorno para um arco de uma órbita e para uma órbita fechada, tanto para as equações da forma $\text{Im}[(a + ib)(du + idv)^3] = 0$, como para as equações diferenciais das linhas de Laguerre.
- Estudo das singularidades da equação diferencial das linhas de Laguerre para o caso particular em que o campo de Lie-Cartan possui duas ou quatro singularidades, sendo uma para $p = 0$ e a outra no infinito.
- Prova de que o conjunto de superfícies \mathbb{L}^r da Definição [4.14](#) é aberto no conjunto \mathcal{X}^r das superfícies compactas e orientáveis.
- Prova de que todo elemento de \mathbb{L}^r é C^r -Laguerre estruturalmente estável.
- Descrição das linhas de Laguerre em superfícies de revolução, em superfícies regradas e em superfícies quádricas.

Perspectivas futuras:

- Classificação global da configuração de equações da forma

$$\operatorname{Im}[(a + ib)(du + idv)^3] = 0.$$

- Estudar órbitas regulares periódicas no infinito das equações

$$\operatorname{Im}[(a + ib)(du + idv)^3] = 0.$$

- Investigar quais problemas da Geometria, da Mecânica ou de outra área da ciência, estão relacionados com a equação $\operatorname{Im}[(a + ib)(du + idv)^3] = 0$.
- Classificação completa das singularidades das equações das linhas de Laguerre.
- Estudo de recorrências para linhas de Laguerre.
- Responder a questão: O conjunto \mathbb{L} é denso no conjunto \mathcal{X}^r ?
- Responder a questão: Todo elemento de \mathcal{X}^r , C^r -Laguerre estruturalmente estável, pertence à \mathbb{L} ?

Bibliografia

- [1] AGAFONOV, S. I. **On implicit odes with hexagonal web of solutions.** *J. Geom. Anal.*, 19:481–508, 2009.
- [2] AGAFONOV, S. I. **Note on generic singularities of planar flat 3-webs.** *Manuscripta Math.*, 154:185–193, 2017.
- [3] ALENCAR, H.; SANTOS, W.; NETO, G. S. **Geometria diferencial de curvas no \mathbb{R}^2 .** SBM, 2020.
- [4] ARNOLD, V. I. **Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations.** Springer-Verlag, second edition, 1988.
- [5] ARSAN, G. G.; ÖZDEĞER, A. **Surfaces on which the Laguerre lines are preserved under inversion.** *Buletinul Stiintific al Universitatii Politehnica din Timisoara*, 44:7–14, 1999.
- [6] BANCHOFF, T.; THOM, R. **Sur les points paraboliques d'une surface: erratum et complements.** *C. R. Acad. Sc. Paris, Serie A*, 291:503–505, 1981.
- [7] BELISÁRIO, H. L. D. S. **Equações diferenciais binárias no plano. 2016. 100 f. Tese (Doutorado em Matemática).** Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2016.
- [8] BRUCE, J. L. **A note on first order differential equations of degree greater than one and wavefront evolution.** *Bull. London Math. Soc.*, 16:139–144, 1984.
- [9] CAMACHO, C. E LINS NETO, A. **Introdução à teoria das folheações.** IMPA, 1977.
- [10] CARMO, M. P. D. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.** Sociedade Brasileira de Matemática, 2008.
- [11] CARMO, M. P. D. **Geometria Riemanniana.** IMPA, 2008.
- [12] CHERTOVSKIĖ, R. A.; REMIZOV, A. O. **On pleated singular points of first-order implicit differential equations.** *Dyn Control Syst.*, 20:197–206, 2014.

- [13] CHICONE, C. **Ordinary Differential Equations with Applications**. Springer, second edition, 2005.
- [14] CIBRARIO, M. **Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto**. *Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, LXV:889–906, 1932.
- [15] DALTON, J. P. **Cubic and quartic equations: on the graphical discrimination of the cubic and of the quartic**. *The Mathematical Gazette*, 17:189–196, 1933.
- [16] DARA, L. **Singularités génériques des équations différentielles multiformes**. *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 6:95–128, 1975.
- [17] DAVYDOV, A. A. **Normal form of a differential equation, not solvable for the derivative, in a neighborhood of a singular point**. *Funktsional. Anal. i Prilozhen*, 19:1–10, 1985.
- [18] DAVYDOV, A. A. **Implicit first-order differential equations**. In: *Qualitative theory of control systems*, volume 141, p. 5–17. Translations of mathematical monographs, 1994.
- [19] DOERING, C. I.; LOPES, A. O. **Equações Diferenciais Ordinárias**. IMPA, 2008.
- [20] DUMORTIER, F.; LLIBRE, J.; ARTÉS, J. C. **Qualitative Theory of Planar Differential Systems**. Springer-Verlag, 2006.
- [21] FUKUI, T.; NUÑO-BALLESTEROS, J. J. **Isolated singularities of binary differential equations of degree n** . *Publ. Mat.*, 56:65–89, 2012.
- [22] GARCIA, R. A.; GUTIERREZ, C.; SOTOMAYOR, J. **Structural stability of asymptotic lines on surfaces immersed in \mathbb{R}^3** . *Bull. Sci. math*, 123:599–622, 1999.
- [23] GARCIA, R. A.; GUTIERREZ, C.; SOTOMAYOR, J. **Lines of principal curvature around umbilics and Whitney umbrellas**. *Tohoku Math. J.*, 52:163–172, 2000.
- [24] GARCIA, R. A.; SOTOMAYOR, J. **Differential Equation of Classical Geometry, a Qualitative Theory**. 27^o Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [25] GUILHERMIN, V.; POLLACK, A. **Differential Topology**. Prentice Hall, 1974.

- [26] GUIÑEZ, V. **Positive quadratic differential forms and foliations with singularities on surface.** *Transactions of the American Mathematical Society*, 309(2):477–502, 1988.
- [27] GUIÑEZ, V. **Nonorientable polynomial foliations on the plane.** *Journal of Differential Equations*, 87:391–411, 1990.
- [28] GUTIERREZ, C.; SOTOMAYOR, J. **Lines of curvature and umbilical points on surfaces.** Brazilian 18th Math. Coll., IMPA, 1991.
- [29] LAGUERRE, E. **Sur un théorème de géométrie.** *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, p. 41–42, 1875.
- [30] LIMA, E. L. **Elementos de topologia geral.** IMPA, 1970.
- [31] LIMA, E. L. **A equação do terceiro grau.** *Matemática Universitária*, 5:9–23, 1987.
- [32] LIMA, E. L. **Variedades Diferenciais.** IMPA, 2007.
- [33] MELO, W. **Topologia das Variedades.** SBM, 2019.
- [34] NAKAI, I. **Webs and singularities.** *Journal of Singularities*, 9:151–167, 2014.
- [35] ODEHNAL, B. **Curvature functions on a one-sheeted hyperboloid.** 16th *International Conference on Geometry and Graphics*, 2014.
- [36] ÖZDEĞER, A. **Surfaces on which the laguerre lines form an hexagonal three-web.** *Instambul Tek. Üniv*, 1969.
- [37] PALIS JR, J.; MELO, W. **Introdução aos sistemas dinâmicos.** Projeto Euclides, IMPA, CNPq, 1977.
- [38] PERKO, L. **Differential equations and dynamical systems.** Springer-Verlag, third edition, 2001.
- [39] SEMIN, F. **Sur la fonction de direction de Laguerre.** *Instambul Univ. Fen Fak. Mec. Seri A*, 47:67–71, 1982.
- [40] SOTOMAYOR, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias.** IMPA, 1979.
- [41] SPIVAK, M. **A Comprehensive Introduction to Differential Geometry**, volume I, III. Publish of Perish, Berkeley, California, third edition, 1999.
- [42] THOM, R. **Sur les équations différentielles multiformes et leurs intégrales singulières.** *Bull Braz Math Soc*, 3:1–11, 1972.

-
- [43] WEATHERBURN, C. E. **Differential geometry of three dimensions**, volume I. Cambridge at the university press, 1955.
- [44] WHITNEY, W. **On singularities of mappings of euclidean spaces. i. mappings of the plane into the plane.** *Mathematics Department, Princeton University*, 62(3):374–410, 1955.