



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FANG CHOU LEE

**Influência da Dispersão de Quarta Ordem na Formação de Estados
Localizados e na Quebra Espontânea de Simetria**

GOIÂNIA

2026



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE FÍSICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

☐ Dissertação ☒ Tese ☐ Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Fang Chou Lee

3. Título do trabalho

Influência da dispersão de quarta ordem na formação de estados localizados e na quebra espontânea de simetria

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM ☐ NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Fang Chou Lee, Discente**, em 10/09/2026, às 09:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ardiley Torres Avelar, Professor do Magistério Superior**, em 11/09/2026, às 09:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **6514617** e o código CRC **20F1ABB2**.

FANG CHOU LEE

**Influência da Dispersão de Quarta Ordem na Formação de Estados
Localizados e na Quebra Espontânea de Simetria**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás, como requisito para obtenção do título de Doutor em Física.

Área de concentração: Física

Linha de pesquisa: Óptica Quântica e Informação Quântica

Orientador: Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar

Coorientador: Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso

GOIÂNIA

2026

Lee, Fang Chou

Influência da Dispersão de Quarta Ordem na Formação de Estados Localizados e na Quebra Espontânea de Simetria [manuscrito] / Fang Chou Lee. - 2026.

98 f.:

Orientador: Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar ; co-orientador: Dr. Wesley Bueno Cardoso

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Física (IF), Programa de Pós-Graduação em Física, Goiânia, 2026.

Bibliografia.

Inclui: lista de figuras.

1. Equação de Schrödinger Não Linear Generalizada; Dispersão de Quarta Ordem; Estados Localizados; Quebra Espontânea de Simetria; Estabilidade Dinâmica; Método Splitstep Fourier..

I. Avelar, Ardiley Torres , orient. II. Cardoso, Wesley Bueno , co-orient. III. Título.

CDU 53



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE FÍSICA

ATA DE DEFESA DE TESE

Ata Nº 89 da sessão de Defesa de Tese de Fang Chou Lee que confere o título de Doutor em Física, na área de concentração em Física.

Aos 21 dias do mês de agosto de 2026, a partir das 14h00min, por meio de videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Tese intitulada “Influência da dispersão de quarta ordem na formação de estados localizados e na quebra espontânea de simetria”. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Ardiley Torres Avelar (IF/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Bruno Martins Miranda (IFG / Jataí), membro titular externo; Professor Doutor Luciano Calaça Alves (IFG / Goiânia), membro titular externo; Professor Doutor Salviano de Araújo Leão (IF/UFG), membro titular externo; e Professor Doutor Guilherme Luiz Zanin (IF/UFG), membro titular interno. Durante a arguição, os membros da banca não fizeram sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Tese, tendo sido o candidato aprovado pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Ardiley Torres Avelar, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos 21 dias do mês de agosto de 2026.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Sem sugestão.



Documento assinado eletronicamente por **Ardiley Torres Avelar, Professor do Magistério Superior**, em 21/08/2026, às 18:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Salviano De Araujo Leao, Professor do Magistério Superior**, em 21/08/2026, às 18:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Guilherme Luiz Zanin, Professor(a) do Magistério Superior**, em 21/08/2026, às 18:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Luciano Calaça Alves, Usuário Externo**, em 21/08/2026, às 18:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Bruno Martins Miranda, Usuário Externo**, em 21/08/2026, às 18:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site

[https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0)

[acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **6406666** e o código CRC **DD67DB4C**.

Referência: Processo nº 23070.038891/2026-96

SEI nº 6406666

Dedico este trabalho aos meus pais, pelo amor, pelos ensinamentos e pelo exemplo de perseverança que sempre iluminaram minha caminhada. À minha família, pelo apoio incondicional, pelo incentivo constante e pela compreensão em todos os momentos desta jornada acadêmica.

"A jornada de mil milhas começa com um único passo."

— Lao Tsé

Agradecimentos

Concluir um doutorado representa muito mais do que a finalização de uma pesquisa científica. É o resultado de uma longa trajetória de aprendizado, desafios, perseverança e do apoio de muitas pessoas, às quais expresso minha sincera gratidão.

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, pela vida, pela força e pela sabedoria concedidas ao longo desta caminhada.

Aos meus pais e à minha família, manifesto minha profunda gratidão pelo amor, pelo incentivo, pela compreensão e pelo apoio incondicional em todos os momentos. Sem esse alicerce, esta conquista não teria sido possível.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar, agradeço pela orientação, confiança, paciência e pelos valiosos ensinamentos científicos compartilhados durante todo o desenvolvimento desta pesquisa.

Ao meu coorientador, Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso, agradeço pelas discussões, sugestões e valiosas contribuições que enriqueceram este trabalho.

Agradeço aos professores e colegas do Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Goiás, pela convivência, pelas discussões acadêmicas e pelo ambiente de aprendizado proporcionado ao longo do curso.

À Universidade Federal de Goiás e ao Instituto de Física, agradeço pela infraestrutura e pelo ambiente acadêmico que possibilitaram o desenvolvimento desta pesquisa.

Por fim, agradeço a todos aqueles que, de alguma forma, fizeram parte desta jornada e contribuíram para que este trabalho se tornasse realidade.

Resumo

Esta tese investiga a influência da dispersão de quarta ordem na formação de estados localizados e na quebra espontânea de simetria em sistemas descritos pela Equação de Schrödinger Não Linear Generalizada. Inicialmente, foi analisado um modelo contendo dispersão de segunda e quarta ordem, na ausência de potencial externo e não linearidade defocalizante espacialmente modulada, com o objetivo de determinar a existência e a estabilidade de estados estacionários fundamentais e excitados. Em seguida, foi estudado um sistema com potencial de poço duplo e não linearidade atrativa, visando compreender a influência da dispersão de quarta ordem sobre os diagramas de bifurcação e o fenômeno de quebra espontânea de simetria. As soluções estacionárias foram obtidas por meio do método de propagação em tempo imaginário, empregando o procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt para a obtenção dos estados excitados, enquanto a estabilidade dinâmica foi investigada por propagação em tempo real utilizando o método Split-Step Fourier. Os resultados mostram que a dispersão de quarta ordem modifica significativamente as propriedades dos estados localizados, influenciando sua amplitude, largura espacial e regiões de estabilidade. Além disso, verificou-se que esse termo altera o comportamento dos diagramas de bifurcação, deslocando os limiares para a ocorrência da quebra espontânea de simetria e favorecendo a estabilização de soluções em determinados regimes de parâmetros. Esses resultados contribuem para uma melhor compreensão dos efeitos da dispersão de alta ordem em sistemas ópticos não lineares e podem contribuir para o desenvolvimento de dispositivos fotônicos baseados no controle de estados localizados e de fenômenos de quebra de simetria.

Palavras-chave: equação de Schrödinger não linear generalizada; dispersão de quarta ordem; estados localizados; quebra espontânea de simetria; estabilidade dinâmica; método Split-Step Fourier.

Abstract

This thesis investigates the role of fourth-order dispersion in the formation of localized states and spontaneous symmetry breaking in systems described by the Generalized Nonlinear Schrödinger Equation. Initially, a model including second- and fourth-order dispersion, in the absence of an external potential, and a spatially modulated defocusing nonlinearity was analyzed to determine the existence and dynamical stability of fundamental and excited stationary states. Subsequently, a double-well potential with attractive nonlinearity was considered to examine the influence of fourth-order dispersion on bifurcation diagrams and the spontaneous symmetry-breaking phenomenon. Stationary solutions were obtained using the imaginary-time propagation method, while excited states were obtained using the Gram–Schmidt orthogonalization procedure. Their dynamical stability was investigated by real-time propagation using the Split-Step Fourier method. The results show that fourth-order dispersion significantly modifies the properties of localized states, affecting their peak amplitude, spatial width, and stability regions. Furthermore, it alters the bifurcation structure by shifting the thresholds for spontaneous symmetry breaking and promoting the stabilization of localized solutions within specific parameter regimes. These findings contribute to a deeper understanding of higher-order dispersion effects in nonlinear optical systems and may provide valuable insights for the design of photonic devices based on the control of localized states and symmetry-breaking phenomena.

Keywords: Generalized Nonlinear Schrödinger Equation; fourth-order dispersion; localized states; spontaneous symmetry breaking; dynamical stability; Split-Step Fourier method.

Lista de Figuras

- 4.1 Perfis localizados estacionários $|\psi(x)|^2$ calculados para $\beta_2 = -1$ e diferentes valores do coeficiente de dispersão de quarta ordem: $\beta_4 = 0$ (linha sólida laranja), $\beta_4 = 1$ (linha tracejada azul) e $\beta_4 = 10$ (linha tracejada e pontilhada preta). Cada painel corresponde a uma solução distinta: (a) modo fundamental ($n = 0$); (b) modo com 1 nó; (c) modo com 2 nós; (d) modo com 3 nós; e (e) modo com 4 nós. Os painéis ilustram como o aumento de β_4 modifica a estrutura espacial e o grau de localização de cada modo. 44
- 4.2 Perfis localizados estacionários $|\psi(x)|^2$ calculados para $\beta_2 = 0$ e diferentes valores do coeficiente de dispersão de quarta ordem: $\beta_4 = 0.1$ (linha sólida laranja), $\beta_4 = 1$ (linha tracejada azul) e $\beta_4 = 10$ (linha tracejada e pontilhada preta). Cada painel corresponde a uma solução distinta: (a) modo fundamental ($n = 0$); (b) modo com 1 nó; (c) modo com 2 nós; (d) modo com 3 nós; e (e) modo com 4 nós. 45
- 4.3 Perfis localizados estacionários $|\psi(x)|^2$ calculados para $\beta_2 = +1$ e diferentes valores do coeficiente de dispersão de quarta ordem: $\beta_4 = 0$ (linha sólida laranja), $\beta_4 = 1$ (linha tracejada azul) e $\beta_4 = 10$ (linha tracejada e pontilhada preta). Cada painel corresponde a uma solução distinta: (a) modo fundamental ($n = 0$); (b) modo com 1 nó; (c) modo com 2 nós; (d) modo com 3 nós; e (e) modo com 4 nós. 46
- 4.4 (a) Amplitude máxima $\max(|\psi_n|^2)$ e (b) variância espacial em função do coeficiente de dispersão de quarta ordem β_4 , para modos localizados com número crescente de nós $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Cada curva corresponde a um modo nodal diferente: $n = 0$ (linha pontilhada preta), $n = 1$ (linha vermelho tracejada com pontos duplos), $n = 2$ (linha verde tracejada e pontilhada), $n = 3$ (linha azul tracejada) e $n = 4$ (linha contínua ciano). Em ambos os casos usamos $\beta_2 = -1$. 48

- 4.5 (a) Amplitude máxima $\max(\psi_n|^2)$ e (b) variância espacial em função do coeficiente de dispersão de quarta ordem β_4 , para modos localizados com número crescente de nós $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Cada curva corresponde a um modo nodal diferente: $n = 0$ (linha pontilhada preta), $n = 1$ (linha vermelha tracejada com pontos duplos), $n = 2$ (linha verde tracejada e pontilhada), $n = 3$ (linha azul tracejada) e $n = 4$ (linha contínua ciano). Em ambos os casos usamos $\beta_2 = 0$. . 49
- 4.6 (a) Amplitude máxima $\max(|\psi_n|^2)$ e (b) variância espacial em função do coeficiente de dispersão de quarta ordem β_4 , para modos localizados com número crescente de nós $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Cada curva corresponde a um modo nodal diferente: $n = 0$ (linha pontilhada preta), $n = 1$ (linha vermelha tracejada com pontos duplos), $n = 2$ (linha verde tracejada e pontilhada), $n = 3$ (linha azul tracejada) e $n = 4$ (linha contínua ciano). Em ambos os casos usamos $\beta_2 = +1$. 49
- 4.7 A constante de propagação μ em função de (a) β_4 e (b) N . Os resultados obtidos a partir da Eq. 4.1 são representados por losangos (amarelo), triângulos invertidos (azul), triângulos (verde), círculos (vermelho) e quadrados (magenta), correspondentes aos estados $\psi_n(x, t)$, com $n = 0, 1, 2, 3$ e 4 , respectivamente. Os demais parâmetros são: (a) $N = 1$ e (b) $\beta_4 = 1$ 51
- 4.8 O mesmo da Fig. 4.7, porém para $\beta_2 = 0$ 51
- 4.9 O mesmo das Figs. 4.7 e 4.8, porém para $\beta_2 = 1$ 52
- 4.10 Simulação numérica direta dos modos localizados sob uma perturbação aleatória de 5% na amplitude. Os painéis (a)–(e) mostram a evolução espaço-temporal da densidade $|\psi_n(x, t)|^2$ para modos com $n = 0, 1, 2, 3$ e 4 nós, respectivamente. Os parâmetros utilizados em todas as simulações são $\beta_2 = -1$ (Caso I) e $\beta_4 = 1$. 55
- 4.11 Simulação numérica direta dos modos localizados sob uma perturbação aleatória de 5% na amplitude. Os painéis (a)–(e) mostram a evolução espaço-temporal da densidade $|\psi_2(x, t)|^2$ para modos com $n = 0, 1, 2, 3$ e 4 nós, respectivamente. Os parâmetros utilizados em todas as simulações são $\beta_2 = 0$ (Caso II) e $\beta_4 = 1$. 56
- 4.12 Simulação numérica direta dos modos localizados sob uma perturbação aleatória de 5% na amplitude. Os painéis (a)–(e) mostram a evolução espaço-temporal da densidade $|\psi_n(x, t)|^2$ para modos com $n = 0, 1, 2, 3$ e 4 nós, respectivamente. Os parâmetros utilizados em todas as simulações são $\beta_2 = +1$ (Caso III) e $\beta_4 = 1$. 57

5.1	Diagrama de bifurcação do parâmetro de assimetria η em função da potência total P para o regime padrão ($\beta_2 = -1$, $\beta_4 = 0$, $g = -1$, $V_0 = 2$) Os ramos representam os estados assimétricos estáveis que emergem de uma bifurcação supercrítica do tipo forquilha (pitchfork) no limiar crítico $P_c \approx 0.45$	66
5.2	Diagramas de bifurcação da taxa de assimetria η em função da potência P para $g = -1$ e diferentes valores β_2 : (a) $\beta_2 = -1$, (b) $\beta_2 = 0$ e (c) $\beta_2 = 1$. A inclusão da dispersão de quarta ordem desloca o limiar de bifurcação no caso (a) e induz a quebra espontânea de simetria nos casos (b) e (c), onde ela está ausente no modelo padrão.	68
5.3	Potência crítica para a quebra de simetria P_c em função da não linearidade g para $\beta_4 = 2$ e diferentes valores de β_2 : (a) $\beta_2 = -1$, (b) $\beta_2 = 0$ e (c) $\beta_2 = 1$. Em todos os casos, P_c aumenta quando $g \rightarrow 0^-$, indicando que uma não linearidade atrativa mais fraca requer maior potência para desencadear a bifurcação de quebra de simetria. A dependência em relação a β_2 reflete regimes distintos resultantes da interação entre a dispersão de segunda ordem, a dispersão de quarta ordem e a não linearidade.	71
5.4	Taxa de assimetria η em função da dispersão de quarta ordem β_4 para $P = 1$ e $g = -1$, considerando (a) $\beta_2 = -1$, (b) $\beta_2 = 0$ e (c) $\beta_2 = 1$. Em todos os casos, o aumento de β_4 conduz a uma transição de estados assimétricos para estados simétricos, destacando o papel estabilizador da dispersão de quarta ordem. . . .	73
5.5	Diagrama de fase no plano (P, β_4) mostrando o valor crítico do parâmetro de dispersão de quarta ordem β_{4c} , correspondente à transição entre estados simétricos e assimétricos, para $g = -1$ e $\beta_2 = -1$ (quadrados), $\beta_2 = 0$ (círculos) e $\beta_2 = 1$ (triângulos). A curva $\beta_{4c}(P)$ separa as soluções simétricas (região acima da curva) das assimétricas (região abaixo da curva), com o limiar crítico aumentando com a potência.	75
5.6	Parâmetro crítico de dispersão de quarta ordem β_{4c} em função do coeficiente de não linearidade g para $\beta_2 = -1$ e dois valores de potência, a saber $P = 1$ e $P = 2$. O caso de maior potência apresenta valores mais elevados de β_{4c} , indicando que uma dispersão mais forte é necessária para suprimir a autolocalização e restaurar a simetria.	77

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Óptica não linear e o desenvolvimento das fibras ópticas	1
1.2	Sólitons e a equação de Schrödinger não linear	2
1.3	Sistemas integráveis e não integráveis	3
1.4	Avanços recentes em óptica não linear e na equação de Schrödinger não linear generalizada	4
1.5	Quebra espontânea de simetria	9
1.6	Objetivos e organização da tese	10
2	Formulação Teórica do Modelo	12
2.1	Polarização linear e não linear	14
2.2	Equação de onda no domínio da frequência	16
2.3	Aproximação da envoltória lentamente variável	18
2.4	Polarização não linear efetiva	20
2.5	Separação de variáveis e modos da fibra	21
2.6	Expansão da constante de propagação	23
2.7	Equação de propagação	25
2.8	Forma final do modelo	27
3	Métodos Numéricos	29
3.1	Introdução	29
3.2	Discretização espacial e método espectral de Fourier	30
3.3	Método de propagação em tempo imaginário	31
3.4	Estados excitados e ortogonalização	32
3.5	Método Split-Step Fourier	33

3.6	Análise de estabilidade	33
3.7	Escolha dos parâmetros numéricos	34
4	Estados Localizados em Meios com Não Linearidade Inhomogênea	38
4.1	Introdução	38
4.2	Modelo matemático	39
4.3	Existência das soluções localizadas	41
4.4	Perfis estacionários	43
4.5	Influência da dispersão de quarta ordem sobre a localização das soluções	47
4.6	Constante de propagação das soluções estacionárias	51
4.7	Estabilidade dinâmica das soluções estacionárias	53
4.8	Conclusões	58
5	Quebra Espontânea de Simetria em Potencial de Poço Duplo	60
5.1	Introdução	60
5.2	Modelo matemático	61
5.3	Procedimento numérico e construção dos diagramas de bifurcação	64
5.4	Quebra espontânea de simetria na equação de Schrödinger não linear convencional	65
5.5	Influência da dispersão de quarta ordem nos diagramas de bifurcação	67
5.6	Dependência da potência crítica com a intensidade da não linearidade	70
5.7	Controle da quebra de simetria pela dispersão de quarta ordem	73
5.8	Diagrama de fase no plano (P, β_4)	75
5.9	Dependência do parâmetro crítico β_{4c} com a não linearidade	76
5.10	Comentários finais	77
6	Conclusões e Perspectivas	80

Capítulo 1

Introdução

1.1 Óptica não linear e o desenvolvimento das fibras ópticas

A óptica não linear consolidou-se, nas últimas décadas, como uma das áreas mais importantes da Física moderna, impulsionada pelo desenvolvimento dos lasers de alta potência e pelos avanços na tecnologia de fibras ópticas. Esses progressos revolucionaram as telecomunicações, viabilizando a transmissão de informações em altas velocidades e por longas distâncias com baixas perdas, além de impulsionarem aplicações em sensores ópticos, processamento de sinais, fotônica integrada e diversas outras tecnologias baseadas na propagação da luz. Nesse contexto, as fibras ópticas passaram a desempenhar não apenas um papel tecnológico, mas também científico, consolidando-se como uma das principais plataformas para o estudo da interação entre a radiação eletromagnética e os meios materiais.

Do ponto de vista teórico, a propagação da luz em fibras ópticas é descrita pelas equações de Maxwell, que constituem o fundamento da teoria clássica do eletromagnetismo, conforme apresentado por Jackson e Haus [1, 2]. Em meios dielétricos submetidos a campos ópticos de baixa intensidade, a resposta do material pode ser considerada linear, de modo que a polarização elétrica é proporcional ao campo elétrico aplicado. Entretanto, quando a intensidade luminosa aumenta, como ocorre em sistemas laser de alta potência ou na propagação de pulsos ultracurtos, essa aproximação deixa de ser válida. Nessa situação, a polarização do meio passa a depender também de potências superiores do campo elétrico, caracterizando o regime da óptica não linear.

Os principais fundamentos desse regime foram estabelecidos e sistematizados por Shen [3], Boyd [4] e Butcher e Cotter [5], cujas obras descrevem de forma abrangente os mecanis-

mos físicos responsáveis pelos efeitos não lineares observados em meios dielétricos. Entre esses fenômenos destacam-se a automodulação de fase, a mistura de quatro ondas, o espalhamento Raman estimulado e a instabilidade modulacional, todos resultantes da resposta não linear do meio ao campo eletromagnético incidente. Em fibras ópticas, tais efeitos tornam-se particularmente relevantes devido ao forte confinamento espacial da luz, que aumenta significativamente a interação entre o campo óptico e o material, permitindo a observação de fenômenos não lineares mesmo para potências relativamente moderadas.

O desenvolvimento da teoria da propagação de pulsos em fibras ópticas mostrou que a dinâmica desses sistemas pode ser descrita por uma equação de envelope obtida a partir das equações de Maxwell sob a aproximação da envoltória lentamente variante. Como demonstrado por Agrawal [6], essa aproximação conduz à Equação de Schrödinger Não Linear (ESNL), internacionalmente conhecida como *Nonlinear Schrödinger Equation* (NLSE). Ao reunir, em uma única equação, os principais mecanismos responsáveis pela evolução de pulsos ópticos em meios não lineares, a ESNL tornou-se um dos modelos matemáticos mais importantes da óptica moderna, servindo como base para a investigação de uma ampla variedade de fenômenos físicos em fibras ópticas e em outros sistemas não lineares.

1.2 Sólitons e a equação de Schrödinger não linear

O estudo de ondas localizadas capazes de se propagar preservando sua forma constitui um dos temas mais importantes da Física Não Linear. As primeiras observações desse comportamento remontam aos trabalhos de Korteweg e de Vries [7], que investigaram a propagação de ondas em canais rasos. Décadas mais tarde, Zabusky e Kruskal [8] demonstraram numericamente que determinadas ondas não lineares permaneciam estáveis mesmo após sucessivas colisões, introduzindo o termo *sóliton* para caracterizar esse comportamento singular.

Na óptica não linear, o conceito de sóliton adquiriu importância fundamental após o trabalho pioneiro de Hasegawa e Tappert [9], que demonstrou teoricamente a possibilidade de propagação de pulsos ópticos sem alteração significativa de sua forma em fibras ópticas. Poucos anos depois, Mollenauer, Stolen e Gordon [10] confirmaram experimentalmente essa previsão, consolidando os sólitons ópticos como um dos fenômenos mais importantes da fotônica moderna e abrindo novas perspectivas para aplicações em sistemas de comunicação óptica.

A descrição matemática da propagação desses pulsos é fornecida pela ESNL, que re-

presenta o modelo fundamental para o estudo da dinâmica de pulsos ópticos em meios Kerr. Nessa equação, a dispersão de segunda ordem tende a promover o alargamento temporal do pulso, enquanto a não linearidade Kerr induz uma modulação de fase capaz de compensar esse espalhamento. Quando esses dois mecanismos se equilibram, formam-se estruturas localizadas que podem propagar-se por longas distâncias preservando, em primeira aproximação, sua forma e velocidade.

A descrição matemática desses pulsos é realizada pela ESNL padrão:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \gamma|\psi|^2\psi = 0,$$

onde β_2 representa a dispersão de segunda ordem, γ descreve a não linearidade Kerr e $\psi(x, t)$ representa o envelope complexo do pulso óptico [6].

Além de seu papel na óptica não linear, a ESNL tornou-se um modelo matemático de grande relevância em diversas áreas da Física, incluindo hidrodinâmica, física de plasmas, condensados de Bose–Einstein [6, 9–11] e sistemas de ondas não lineares. Sua ampla aplicabilidade estimulou o desenvolvimento de inúmeros métodos analíticos e numéricos para investigar a existência, estabilidade e dinâmica de soluções localizadas, consolidando a ESNL como um dos modelos mais importantes da Física Matemática contemporânea.

1.3 Sistemas integráveis e não integráveis

Um dos aspectos mais importantes da ESNL padrão é sua integrabilidade matemática. Em termos gerais, um sistema integrável admite um número infinito de quantidades conservadas e pode ser resolvido por métodos analíticos que permitem descrever com precisão a evolução de suas soluções. Essa característica explica o grande interesse despertado pela ESNL desde sua introdução, tanto do ponto de vista matemático quanto em aplicações físicas.

O desenvolvimento da teoria dos sistemas integráveis levou ao surgimento de diversos métodos analíticos capazes de obter soluções exatas para equações não lineares. Entre os mais importantes destacam-se o método da transformada do espalhamento inverso, desenvolvido por Gardner, Greene, Kruskal e Miura [12], a formulação do par de Lax proposta por Lax [13], o método bilinear introduzido por Hirota [14] e o formalismo AKNS, desenvolvido por Ablowitz, Kaup, Newell e Segur [15]. Esses métodos permitiram a obtenção de soluções multi-sóliton e contribuíram significativamente para a compreensão das propriedades fundamentais das equa-

ções não lineares integráveis.

Entretanto, os sistemas físicos observados experimentalmente raramente permanecem perfeitamente integráveis. A propagação de pulsos ópticos em fibras reais é influenciada por diversos mecanismos adicionais, como dispersão de ordem superior, perdas dissipativas, não homogeneidades espaciais, saturação não linear, espalhamento Raman e efeitos associados a pulsos ultracurtos. A presença desses mecanismos rompe a integrabilidade da equação, tornando inviável, na maioria dos casos, a obtenção de soluções analíticas exatas.

Nessas situações, a investigação das soluções passa a depender de métodos aproximados e de técnicas numéricas. Nesse contexto, destacam-se os métodos variacionais desenvolvidos por Anderson [16], o critério de estabilidade proposto por Vakhitov e Kolokolov [17] para estados localizados e diversos métodos numéricos clássicos apresentados por Hartree [18], Fox e Goodwin [19] e Keller [20]. Uma visão abrangente dessas técnicas é apresentada por Yang [11], cuja obra constitui uma das principais referências para o estudo de equações diferenciais não lineares.

A distinção entre sistemas integráveis e não integráveis possui importância fundamental para esta tese. Enquanto a ESNL padrão pertence à primeira classe, a inclusão de mecanismos físicos adicionais, como a dispersão de quarta ordem, conduz naturalmente a modelos não integráveis, nos quais a existência, a estabilidade e a dinâmica das soluções localizadas passam a depender essencialmente de métodos numéricos. Essa mudança de paradigma motiva o estudo desenvolvido nos capítulos seguintes.

1.4 Avanços recentes em óptica não linear e na equação de Schrödinger não linear generalizada

Nas últimas décadas, a óptica não linear passou por uma evolução significativa, impulsionada tanto pelos avanços tecnológicos na fabricação de fibras ópticas e dispositivos fotônicos quanto pela crescente necessidade de descrever fenômenos que extrapolam o domínio de validade da ESNL. O desenvolvimento de lasers ultrarrápidos, a obtenção de pulsos ópticos com duração cada vez menor e o projeto de fibras ópticas com propriedades dispersivas cuidadosamente controladas evidenciaram que diversos efeitos físicos anteriormente desprezados passam a desempenhar papel importante na dinâmica de propagação da luz. Como consequência, tornou-se necessária a incorporação de novos mecanismos físicos ao modelo clássico, condu-

zindo ao desenvolvimento da Equação de Schrödinger Não Linear Generalizada (Generalized Nonlinear Schrödinger Equation, GNLSE), atualmente considerada um dos principais modelos matemáticos da óptica não linear moderna [3–6].

A formulação da GNLSE permitiu incorporar diferentes efeitos físicos associados à propagação de pulsos ultracurtos, incluindo dispersão de ordem superior, espalhamento Raman, auto-inclinação temporal (*self-steepening*), autoenrijecimento espectral e outras contribuições não lineares responsáveis por ampliar significativamente o domínio de validade da ESNL. Os trabalhos pioneiros de Kodama e Hasegawa, Blow e Wood, bem como Cavalcanti e colaboradores, estabeleceram as bases para essa generalização ao demonstrarem que a inclusão desses mecanismos torna possível descrever regimes de propagação inacessíveis ao modelo convencional [6, 21–23].

Nesse contexto, diversas linhas de pesquisa passaram a se desenvolver de forma paralela, destacando-se os estudos envolvendo dispersão de ordem superior, formação de estados localizados em meios com não linearidade espacialmente modulada, sólitons puramente quárticos (*pure-quartic solitons*) e mecanismos de quebra espontânea de simetria. Embora essas áreas tenham evoluído de maneira relativamente independente, todas compartilham um objetivo comum: compreender como diferentes mecanismos físicos modificam o equilíbrio entre dispersão, não linearidade e confinamento responsável pela existência e estabilidade de estruturas localizadas.

Os primeiros avanços na generalização da ESNL concentraram-se na descrição da propagação de pulsos ópticos em regimes nos quais a duração temporal torna-se suficientemente pequena para que efeitos de ordem superior não possam mais ser negligenciados. Nessas condições, termos associados à dispersão de ordem superior e a diferentes mecanismos não lineares passam a exercer influência significativa sobre a evolução dos pulsos ópticos, exigindo uma reformulação do modelo convencional. Os trabalhos desenvolvidos por Kodama e Hasegawa, Blow e Wood e Cavalcanti e colaboradores estabeleceram os fundamentos da GNLSE e demonstraram que a incorporação desses efeitos amplia consideravelmente a capacidade descritiva da teoria [21–23].

Desde então, a GNLSE consolidou-se como uma ferramenta fundamental para o estudo de sistemas ópticos complexos, sendo amplamente empregada na investigação de fibras ópticas especiais, guias de onda integrados, cristais fotônicos e outros meios não lineares. A flexibilidade desse modelo permitiu explorar novos regimes físicos, favorecendo o desenvolvimento de

diversas linhas de pesquisa relacionadas à propagação não linear da luz, ao controle da dispersão e à formação de estados localizados [4, 6, 11].

Entre os diversos mecanismos incorporados à GNLSE, a dispersão de quarta ordem ocupa atualmente uma posição de destaque. Entretanto, sua importância não foi reconhecida imediatamente. Nos primeiros modelos, esse termo era frequentemente tratado como uma pequena correção aos efeitos produzidos pela dispersão de segunda ordem, sendo considerado relevante apenas em situações particulares. À medida que novas fibras ópticas, guias de onda fotônicos e dispositivos com dispersão projetada passaram a ser desenvolvidos, tornou-se evidente que, em determinados regimes de propagação, a contribuição da dispersão de quarta ordem deixa de representar um efeito secundário e passa a influenciar diretamente a dinâmica dos pulsos ópticos.

Os fundamentos teóricos dessa linha de pesquisa foram estabelecidos pelos trabalhos pioneiros de Karpman e colaboradores, que investigaram sistematicamente a influência dos termos dispersivos de ordem superior sobre a propagação de pulsos não lineares. Esses estudos demonstraram que a inclusão da dispersão de quarta ordem modifica significativamente a estrutura das soluções, altera suas condições de estabilidade e produz novos regimes de propagação que não podem ser descritos pela ESNL convencional. Além disso, verificou-se que a interação entre a dispersão de segunda ordem, a dispersão de quarta ordem e a não linearidade Kerr pode originar uma rica variedade de comportamentos dinâmicos, estabelecendo as bases para investigações posteriores sobre estados localizados governados por efeitos dispersivos de ordem superior [24–30].

A partir desses resultados pioneiros, diversos pesquisadores ampliaram significativamente o escopo dessas investigações. Estudos posteriores passaram a analisar diferentes regimes de propagação, novas configurações experimentais e distintas formas de interação entre os mecanismos dispersivos e não lineares presentes na GNLSE. Como consequência, verificou-se que a dispersão de quarta ordem pode modificar profundamente as propriedades dos estados localizados, influenciando sua largura espacial, amplitude, estabilidade e dinâmica de interação. Esses resultados evidenciaram que os efeitos dispersivos de ordem superior não representam apenas correções quantitativas ao modelo convencional, mas podem produzir novos regimes físicos caracterizados por soluções inexistentes na ESNL clássica [31–39].

O crescente interesse por esse tema foi impulsionado pelo avanço das técnicas de fabricação de fibras ópticas e guias de onda, que possibilitaram o controle preciso das propriedades

dispersivas do meio. Tornando-se possível reduzir significativamente a contribuição da dispersão de segunda ordem, fazendo com que a dispersão de quarta ordem passasse a desempenhar papel dominante na propagação dos pulsos ópticos. Esse cenário ampliou o campo de aplicação da GNLSE e motivou o desenvolvimento de novos estudos teóricos e experimentais sobre os efeitos de mecanismos dispersivos de ordem superior.

Um marco importante nessa evolução ocorreu em 2016, quando Blanco-Redondo *et al.* [40] demonstraram experimentalmente a existência dos pure-quartic solitons. Nesse regime, o equilíbrio responsável pela formação dos estados localizados é estabelecido predominantemente pela dispersão de quarta ordem em conjunto com a não linearidade Kerr, diferentemente dos solitons convencionais, cuja formação é governada principalmente pela dispersão anômala de segunda ordem.

A demonstração experimental dos *pure-quartic solitons* representou uma mudança de paradigma na óptica não linear, pois evidenciou que a dispersão de quarta ordem não deve ser interpretada apenas como um termo corretivo da GNLSE, mas como um mecanismo físico capaz de governar diretamente a formação e a propagação de estruturas localizadas. Esse resultado estimulou o desenvolvimento de novas pesquisas dedicadas ao estudo de sistemas nos quais a dispersão de quarta ordem exerce papel predominante, motivando investigações sobre estabilidade, dinâmica não linear, propagação em guias de onda fotônicos e diferentes aplicações em plataformas ópticas modernas [41–46].

Além de ampliar significativamente a compreensão sobre os mecanismos responsáveis pela formação de estados localizados, esses trabalhos evidenciaram que a interação entre dispersão de quarta ordem e diferentes tipos de não linearidade constitui um campo fértil para novas investigações. Entretanto, a maior parte dessas pesquisas concentrou-se em meios homogêneos ou em sistemas descritos por não linearidades convencionais. Permanecia, portanto, uma questão importante: como a dispersão de quarta ordem modifica a formação e a estabilidade de estados localizados quando a não linearidade varia espacialmente?

Essa pergunta conduz naturalmente à primeira linha de pesquisa discutida nesta tese: os meios com não linearidade defocalizante espacialmente modulada, inaugurados pelo trabalho pioneiro de Borovkova *et al.* [47].

Enquanto a primeira linha de pesquisa discutida nesta seção, dedicada aos efeitos da dispersão de ordem superior e, em particular, da dispersão de quarta ordem, evoluía rapidamente, outra importante linha de investigação transformava a compreensão dos mecanismos

responsáveis pela formação de estados localizados em sistemas não lineares. Nesse contexto, destacam-se os sólitons brilhantes, que correspondem a estruturas localizadas caracterizadas por um máximo de intensidade sobre um fundo de intensidade nula ou muito reduzida e que podem manter sua forma devido ao equilíbrio entre os mecanismos de espalhamento e a resposta não linear do meio. Durante muitas décadas, predominou a interpretação de que esses estados somente poderiam existir em meios focalizantes, nos quais a não linearidade favorece a concentração da função de onda e pode compensar os efeitos da dispersão ou da difração. Sob essa perspectiva, meios defocalizantes eram tradicionalmente associados ao espalhamento espacial da energia, sendo considerados incapazes de sustentar estados localizados brilhantes na ausência de potenciais externos.

Essa interpretação começou a ser modificada de forma decisiva com o trabalho pioneiro de Borovkova *et al.* [47]. Nesse estudo, os autores demonstraram que uma não linearidade defocalizante cuja intensidade aumenta suficientemente rápido com a coordenada espacial pode atuar como um mecanismo efetivo de confinamento. Em vez de favorecer a expansão do campo, a modulação espacial da não linearidade cria uma barreira não linear que restringe a propagação para regiões afastadas do centro do sistema, permitindo a formação de estados localizados brilhantes mesmo na ausência de potenciais lineares externos.

Esse resultado representou uma mudança conceitual importante na teoria dos sólitons. Até então, o confinamento era geralmente associado à ação de potenciais externos ou à presença de uma não linearidade focalizante. O trabalho de Borovkova mostrou que a própria distribuição espacial da não linearidade pode exercer o papel de mecanismo de confinamento, ampliando significativamente as possibilidades de engenharia de estados localizados em meios não lineares. Essa nova perspectiva despertou grande interesse da comunidade científica, inaugurando uma linha de pesquisa dedicada ao estudo de sistemas com não linearidades espacialmente moduladas.

Paralelamente ao desenvolvimento internacional dessas pesquisas, o Grupo de Óptica Não Linear do Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás vem contribuindo continuamente para o avanço dos estudos envolvendo a GNLSE. Nos últimos anos, o grupo investigou diferentes problemas relacionados à propagação não linear da luz, incluindo dispersão de ordem superior, difração fracionária, estados localizados em meios com não linearidade espacialmente modulada e mecanismos de quebra espontânea de simetria, estabelecendo uma linha de pesquisa contínua sobre sistemas não lineares governados por efeitos dispersivos de ordem

superior [48–50].

Dando continuidade a essa linha de pesquisa, como parte do desenvolvimento desta tese, foi publicado recentemente um trabalho de nossa autoria no qual investigamos a influência da dispersão de quarta ordem sobre estados localizados sustentados por uma não linearidade defocalizante espacialmente crescente [51]. Nesse estudo, demonstramos que a inclusão do termo dispersivo de quarta ordem modifica significativamente as propriedades estruturais das soluções, alterando sua amplitude, largura espacial, espectro de autovalores e estabilidade dinâmica. Esses resultados evidenciaram que a interação entre a dispersão de quarta ordem e a não linearidade espacialmente modulada produz efeitos que não podem ser compreendidos a partir da análise isolada de cada um desses mecanismos. Os resultados desse trabalho constituem a base da investigação apresentada no Capítulo 4 desta tese, no qual o problema é discutido de forma mais detalhada, incluindo a formulação do modelo, os procedimentos numéricos empregados e uma análise ampliada das propriedades e da estabilidade dos estados localizados.

1.5 Quebra espontânea de simetria

Além das modificações introduzidas pela dispersão de alta ordem, outro tema que tem despertado grande interesse na Física Não Linear é a quebra espontânea de simetria (*Spontaneous Symmetry Breaking* – SSB). De maneira geral, esse fenômeno ocorre quando um sistema governado por equações simétricas admite soluções inicialmente simétricas que, ao ultrapassar determinado limiar de controle, tornam-se instáveis e evoluem para estados assimétricos. A quebra espontânea de simetria constitui um mecanismo fundamental em diversas áreas da Física, estando presente em sistemas que vão desde a física de partículas até a matéria condensada e a óptica não linear.

No contexto de sistemas macroscópicos quânticos, Smerzi *et al.* [52] demonstraram teoricamente que condensados de Bose–Einstein confinados em potenciais de poço duplo podem apresentar transições entre regimes de tunelamento coerente e autoaprisionamento induzido pela não linearidade. Alguns anos mais tarde, Albiez *et al.* [53] observaram experimentalmente esse fenômeno, confirmando que a interação não linear é capaz de romper a simetria originalmente imposta pelo potencial externo.

Esses resultados estimularam uma intensa atividade de pesquisa em diferentes sistemas descritos por equações do tipo ESNL. Em particular, Malomed e colaboradores [54, 55] mos-

traram que a competição entre dispersão, não linearidade e potencial externo pode originar diagramas de bifurcação complexos, múltiplos estados estacionários e diferentes mecanismos de quebra espontânea de simetria. Desde então, o fenômeno passou a ser investigado em fibras ópticas, guias de onda acoplados, meios espacialmente modulados e diversos outros sistemas não lineares.

Apesar dos avanços obtidos nas últimas décadas, a influência da dispersão de quarta ordem sobre os processos de quebra espontânea de simetria ainda permanece relativamente pouco explorada. Em particular, ainda não está completamente esclarecido como esse mecanismo dispersivo modifica os diagramas de bifurcação, a estabilidade dos estados assimétricos e a transição entre soluções simétricas e assimétricas. Essas questões constituem uma das principais motivações do presente trabalho e serão investigadas detalhadamente no Capítulo 5.

1.6 Objetivos e organização da tese

A revisão apresentada nas seções anteriores evidencia que a inclusão de mecanismos dispersivos de ordem superior amplia significativamente o escopo da ESNL, permitindo descrever fenômenos que não podem ser explicados pela formulação convencional. Embora diversos trabalhos tenham investigado a influência da dispersão de quarta ordem em diferentes contextos, permanecem em aberto questões relacionadas à existência, à estabilidade e às propriedades espectrais de estados localizados, bem como ao papel desempenhado por esse mecanismo em processos de bifurcação e quebra espontânea de simetria.

Inserida nesse contexto, esta tese tem como objetivo investigar a influência da dispersão de quarta ordem em dois problemas distintos, porém complementares, descritos pela GNLSE. No primeiro problema, analisa-se a existência, as propriedades físicas e a estabilidade dinâmica de estados estacionários em um meio com não linearidade defocalizante espacialmente modulada. No segundo, estuda-se como a dispersão de quarta ordem modifica os diagramas de bifurcação associados à quebra espontânea de simetria em um potencial de poço duplo, enfatizando sua influência sobre a emergência de estados assimétricos e sobre a estabilidade das diferentes famílias de soluções.

Além de contribuir para a compreensão dos efeitos produzidos pela dispersão de quarta ordem em sistemas não integráveis, este trabalho busca estabelecer uma conexão entre dois temas atualmente relevantes na óptica não linear: o estudo de estados localizados em meios

espacialmente modulados e os processos de quebra espontânea de simetria em potenciais externos. Dessa forma, pretende-se ampliar o entendimento dos mecanismos físicos responsáveis pela formação, estabilidade e evolução dessas estruturas em sistemas governados pela Equação de Schrödinger Não Linear Generalizada.

Esta tese está organizada da seguinte forma. No Capítulo 2 é apresentada a formulação teórica do modelo, partindo das equações de Maxwell até a obtenção da Equação de Schrödinger Não Linear Generalizada. O Capítulo 3 descreve os métodos numéricos empregados na obtenção das soluções estacionárias e na análise de sua estabilidade dinâmica. No Capítulo 4 são apresentados os resultados referentes à influência da dispersão de quarta ordem sobre estados estacionários em um meio com não linearidade espacialmente modulada. O Capítulo 5 é dedicado ao estudo da quebra espontânea de simetria em um potencial de poço duplo, enfatizando os efeitos introduzidos pela dispersão de quarta ordem sobre os diagramas de bifurcação e a estabilidade das soluções. Finalmente, o Capítulo 6 reúne as principais conclusões do trabalho e apresenta algumas perspectivas para pesquisas futuras.

Capítulo 2

Formulação Teórica do Modelo

Neste capítulo é desenvolvida a formulação teórica que conduz à equação de Schrödinger não linear generalizada (GNLSE) empregada ao longo desta tese. O objetivo é descrever a propagação de pulsos ópticos em meios dielétricos não lineares, incorporando tanto a dispersão cromática quanto os efeitos não lineares responsáveis pela formação de estados localizados.

Na formulação convencional da Equação de Schrödinger Não Linear, a dispersão cromática é descrita predominantemente pelo termo de segunda ordem, associado ao coeficiente (β_2). Essa aproximação é adequada para uma ampla classe de fenômenos em fibras ópticas convencionais, nas quais a contribuição da dispersão de segunda ordem é significativamente maior do que a dos termos dispersivos de ordem superior. Entretanto, o desenvolvimento de plataformas fotônicas com propriedades dispersivas cuidadosamente projetadas, como fibras de cristal fotônico, fibras com dispersão achatada (*dispersion-flattened fibers*) e guias de onda integrados, tornou possível modificar o perfil de dispersão do meio e operar em regiões espectrais nas quais (β_2) assume valores muito pequenos ou pode até se anular. Nessas condições, os termos de ordem superior, normalmente tratados como pequenas correções, passam a exercer uma influência relativamente maior sobre a evolução do pulso. Em particular, quando a contribuição de segunda ordem é suficientemente reduzida e as demais contribuições relevantes são controladas, a dispersão de quarta ordem, associada ao coeficiente (β_4), pode tornar-se um dos principais mecanismos responsáveis pelo espalhamento dispersivo. Dessa forma, sua inclusão na GNLSE torna-se necessária para descrever adequadamente a dinâmica do sistema.

A dedução apresentada neste capítulo parte das equações de Maxwell, que fornecem a descrição fundamental da propagação do campo eletromagnético em meios materiais. A partir delas, obtém-se a equação de onda e, mediante aproximações adequadas ao regime de propa-

gação em fibras ópticas, passa-se da descrição do campo eletromagnético completo para uma equação que governa apenas a evolução de sua envoltória. Nesse processo, emprega-se a aproximação da envoltória lentamente variante (SVEA), que permite separar as rápidas oscilações da onda portadora da evolução mais lenta da amplitude e da fase do pulso. Em seguida, a dependência da constante de propagação (β_ω) com a frequência é expandida em série de Taylor em torno da frequência central (ω_0), permitindo identificar separadamente os diferentes mecanismos dispersivos, representados pelos coeficientes ($\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \dots$). Essa sequência de aproximações conduz à Equação de Schrödinger Não Linear Generalizada utilizada neste trabalho. Ao longo da dedução, são também discutidos o significado físico das aproximações adotadas e as condições em que elas permanecem válidas, estabelecendo a conexão entre o modelo matemático e os sistemas ópticos que motivam os estudos desenvolvidos nos capítulos seguintes.

A propagação de pulsos ópticos em fibras dielétricas constitui um problema eletromagnético cuja descrição fundamental é fornecida pelas equações de Maxwell. Essas equações estabelecem as relações entre os campos elétrico e magnético e a resposta eletromagnética do meio material, constituindo o ponto de partida para a obtenção da equação de Schrödinger não linear generalizada utilizada nesta tese. No Sistema Internacional de Unidades, as equações de Maxwell são escritas em meios materiais, como [1, 56]:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.4)$$

onde os vetores de campo $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ representam o campo elétrico e o campo magnético, respectivamente. As densidades de fluxo de deslocamento elétrico e magnético são denotadas por $\mathbf{D}$ e $\mathbf{H}$. As fontes externas são a densidade de corrente $\mathbf{J}$ e a densidade de carga ρ_f .

As Eqs. 2.1, 2.2, 2.3, and 2.4 mostram que a propagação de ondas eletromagnéticas resulta da interação entre os campos elétrico e magnético e a resposta do meio material. No contexto da óptica não linear, essa resposta é descrita principalmente pela polarização elétrica

induzida pelo campo óptico incidente. É justamente essa polarização que incorpora tanto os efeitos lineares associados ao índice de refração quanto os efeitos não lineares responsáveis por fenômenos como automodulação de fase, formação de sólitons e geração de estados localizados.

A relação entre $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ e $(\mathbf{D}, \mathbf{B})$ é dada por:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}, \quad (2.6)$$

onde $\mathbf{P}$ é a polarização elétrica (dipolo elétrico por unidade de volume) e $\mathbf{M}$ é a magnetização (momento de dipolo magnético por unidade de volume). A decomposição acima evidencia que as propriedades eletromagnéticas do material estão incorporadas nas grandezas $\mathbf{P}$ e $\mathbf{M}$. Em fibras ópticas de sílica, utilizadas na maioria das aplicações em óptica não linear, a resposta magnética é desprezível, permitindo considerar $\mathbf{M} = 0$. Consequentemente, toda a interação entre o pulso óptico e o meio passa a ser descrita pela polarização elétrica, que desempenhará papel central na obtenção da equação de propagação. Além disso, em materiais dielétricos isolantes, não existem cargas livres ($\rho = 0$) nem correntes de condução ($\mathbf{J} = 0$). Essas hipóteses refletem as condições experimentais normalmente encontradas em fibras ópticas dielétricas operando em regime transparente, onde os mecanismos dominantes da propagação decorrem exclusivamente da interação entre o campo eletromagnético e a polarização induzida do material.

Ao se tomar o rotacional da Eq. (2.1) e usar as Eqs. (2.2), (2.5) e (2.6), é possível eliminar $\mathbf{B}$ e $\mathbf{D}$ em favor de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{P}$ [1, 56], resultando:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (2.7)$$

A equação de onda obtida acima representa a propagação do campo elétrico em um meio dielétrico polarizável. Diferentemente da equação de onda no vácuo, o termo envolvendo a polarização elétrica mostra que a evolução do pulso depende diretamente da resposta microscópica do material ao campo eletromagnético incidente. Dessa forma, todas as propriedades ópticas do meio, incluindo dispersão e não linearidade, passam a estar incorporadas na polarização elétrica $\mathbf{P}$.

2.1 Polarização linear e não linear

A polarização elétrica $\mathbf{P}$ é induzida pelo campo elétrico aplicado $\mathbf{E}$. Em regime não linear, pode ser expandida como série de potências:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\chi^{(1)}\mathbf{E} + \chi^{(2)}\mathbf{E}^2 + \chi^{(3)}\mathbf{E}^3 + \dots),$$

onde $\chi^{(1)}$ é a susceptibilidade linear (resposta proporcional ao campo, óptica usual), $\chi^{(2)}$ segunda ordem (onde gera efeitos como geração de segundo harmônico, só aparece em materiais sem centro de simetria), $\chi^{(3)}$ é a terceira ordem, responsável por efeitos não lineares em meios centrossimétricos (como o vidro de sílica).

Para a sílica, que é um material centro-simétrico [6], $\chi^{(2)} = 0$. Assim, a contribuição não linear dominante provém de $\chi^{(3)}$. Portanto, podemos separar a polarização como:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t), \quad (2.8)$$

onde $\mathbf{P}_L$ representa a polarização linear e $\mathbf{P}_{NL}$ representa a contribuição não linear.

Como a resposta de um meio dielétrico não é instantânea, as susceptibilidades devem ser tratadas como funções de resposta temporal [3–5]. Assim:

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(1)}(t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt', \quad (2.9)$$

A susceptibilidade elétrica linear χ^1 caracteriza a resposta do material em baixas intensidades ópticas. Experimentalmente, ela está diretamente relacionada ao índice de refração e às propriedades dispersivas do meio. É essa dependência da resposta linear com a frequência que dará origem, posteriormente, aos coeficientes de dispersão presentes na equação de Schrödinger não linear.

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_3 \times \chi^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) : \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_2) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_3), \quad (2.10)$$

onde $:$ representa o produto tensorial.

Em fibras ópticas de sílica, a susceptibilidade elétrica de segunda ordem pode ser desprezada devido à simetria aproximadamente centrossimétrica do material. Nessas condições, a resposta não linear dominante é descrita pela susceptibilidade de terceira ordem $\chi^{(3)}$, responsável pelo efeito Kerr. Esse efeito corresponde à dependência do índice de refração do material com a intensidade da própria luz, podendo ser expresso, em sua forma mais simples, como $n = n_0 + n_2 I$, onde n_0 é o índice de refração linear, n_2 é o coeficiente de índice não linear e I representa a intensidade óptica. Assim, regiões do campo com diferentes intensidades experimentam índices de refração ligeiramente diferentes, produzindo alterações na fase da onda durante sua propagação. O efeito Kerr constitui, portanto, a origem física da não linearidade cúbica representada pelo termo $\gamma |\psi|^2 \psi$ na ESNL.

As equações (2.7), (2.8), (2.9) e (2.10) fornecem um formalismo geral para o estudo dos efeitos não lineares de terceira ordem em fibras ópticas. Devido à sua complexidade, é necessário fazer várias aproximações simplificadoras.

2.2 Equação de onda no domínio da frequência

Inicialmente vamos discutir sobre a noção básica de óptica linear, com isso logo entramos em óptica não linear. No regime linear, a polarização é proporcional ao campo elétrico aplicado: $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E}$, aplicando em (2.5), chega-se $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$, onde $\epsilon = 1 + \chi^{(1)}$ que é a permissividade relativa ou constante dielétrica relativa do meio.

Em meios não magnéticos onde $\mu = \mu_0$, a relação entre a permissividade relativa ϵ e o índice de refração n é: .

$$n^2 = \epsilon = 1 + \chi^{(1)}. \quad (2.11)$$

Podemos tomar o rotacional da Eq. (2.1) e substituir pela Eq. (2.2), chega-se

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}, \text{ substituindo } \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \text{ e } v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}}, \text{ agora com a definição original } n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} \text{ obtém-se a equação (2.11).}$$

Em física óptica pode ocorrer o fenômeno de absorção de onda eletromagnética pelo próprio material com tal relação:

$$\epsilon(\omega) = \left(n(\omega) + i \frac{\alpha(\omega)c}{2\omega} \right)^2, \quad (2.12)$$

onde α é a constante de absorção. De fato, num meio absorvedor, o índice de refração não é real, é complexo: $\tilde{n}(\omega) = n(\omega) + i\kappa(\omega)$, onde $n(\omega)$ é parte real e $\kappa(\omega)$ é o coeficiente de extinção. Para uma onda plana $\mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$ cuja intensidade decai no espaço com $I(z) = I_0 e^{-\alpha z}$, onde α é o coeficiente de absorção do material e em geral depende da frequência ω da onda. Com $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} \frac{c}{v} = \frac{\omega}{c} \tilde{n}$, $\mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} = E_0 e^{i \frac{\omega}{c} n z} e^{-\frac{\omega}{c} \kappa z} e^{-i\omega t} = E_0 e^{i(\frac{\omega}{c} n z - \omega t)} e^{-\frac{\omega}{c} \kappa z}$, sabemos que $I \propto |E|^2$, então chega-se $\alpha = 2 \frac{\omega}{c} \kappa$, isolando κ , $\kappa(\omega) = \frac{\alpha(\omega)c}{2\omega}$, então $\tilde{n}(\omega) = n(\omega) + i \frac{\alpha(\omega)c}{2\omega}$. Com (2.11) obtém-se (2.12).

Agora precisamos introduzir a noção de convolução da física matemática. Dadas duas funções $f(x)$ e $g(x)$, definimos a convolução de f com g por:

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p) g(x-p) dp,$$

então podemos demonstrar que

$$F(f * g) = \sqrt{2\pi} F(f) F(g), \quad (2.13)$$

onde F é operador de transformada de Fourier.

De fato, considere $x-p=q$ e aplique a transformada de Fourier em (2.13), então $F(f * g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(p)g(x-p)dp e^{-i\omega t} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(p)g(q)dp e^{-i\omega(p+q)} dq dp$, assim chegamos a $\sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(p) e^{-i\omega p} dp \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(p)g(q)dp e^{-i\omega q} dq$, concluímos a demonstração da Eq. (2.13).

Em uma das principais simplificações, a polarização não linear $\mathbf{P}_{NL}$ na Eq. (2.8) é tratada como uma pequena perturbação da polarização total induzida. Isso é justificado porque os efeitos não lineares são relativamente fracos em fibras de sílica. O primeiro passo, portanto, consiste em resolver a Eq. (2.7) com $\mathbf{P}_{NL} = \mathbf{0}$. Como a Eq. (2.7) torna-se então linear em $\mathbf{E}$, é útil escrevê-la no domínio da frequência como:

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.14)$$

onde $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ é a transformada de Fourier de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ definida como:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t) dt. \quad (2.15)$$

De fato, aplicamos a transformada de Fourier em (2.7) considerando a equação (2.9) e (2.13) chegamos em (2.14). A constante dielétrica dependente da frequência que aparece na Eq. (2.14) é definida como:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}^{(1)}(\omega) \quad (2.16)$$

onde $\tilde{\chi}^{(1)}$ é a transformada de Fourier de $\chi^{(1)}$. Da Eq. (2.12) e (2.16) n e α estão relacionados a $\chi^{(1)}$ pelas relações

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \text{Re}[\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)], \quad (2.17)$$

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{nc} \text{Im}[\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)]. \quad (2.18)$$

Duas simplificações adicionais podem ser feitas antes de resolver a Eq. (2.14). Primeiro, devido às baixas perdas ópticas em fibras na região de comprimento de onda de interesse, a parte imaginária de $\varepsilon(\omega)$ é pequena em comparação com a parte real. Assim, podemos substituir $\varepsilon(\omega)$ por $n^2(\omega)$ na discussão a seguir sobre os modos da fibra e incluir a perda da fibra mais tarde de forma perturbativa. Segundo, como $n(\omega)$ frequentemente é independente das coordenadas espaciais tanto no núcleo quanto no revestimento de fibras de índice em degrau, pode-se usar:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}, \quad (2.19)$$

onde se utilizou a relação $\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ a partir da Eq. (2.3). Com essas simplificações, a

Eq. (2.14) assume a forma da equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega) \tilde{\mathbf{E}} = 0. \quad (2.20)$$

As aproximações introduzidas nesta etapa permanecem válidas enquanto a resposta do material puder ser considerada instantânea e isotrópica. Para pulsos extremamente curtos, com duração da ordem de poucos femtossegundos, efeitos adicionais, como a resposta Raman retardada e termos não instantâneos da polarização, podem tornar-se relevantes, exigindo modelos mais completos.

Até este ponto, foi obtida uma equação geral para a propagação do campo óptico em um meio dielétrico linear. Entretanto, essa formulação ainda envolve o campo eletromagnético completo, cuja solução permanece excessivamente complexa para aplicações em fibras ópticas. Na próxima seção será introduzida a representação em termos da envoltória complexa do pulso, etapa que permitirá separar a rápida oscilação da portadora da evolução lenta da amplitude óptica e conduzirá naturalmente ao modelo utilizado neste trabalho.

2.3 Aproximação da envoltória lentamente variável

A partir da década de 1960 o estudo da maioria dos efeitos não lineares em fibras ópticas envolve o uso de pulsos curtos, com larguras variando de aproximadamente 10 ns a 10 fs. Quando esses pulsos ópticos se propagam dentro de uma fibra, tanto os efeitos dispersivos quanto os não lineares influenciam suas formas e espectros. Daqui para frente derivamos uma equação básica que governa a propagação de pulsos ópticos em fibras não lineares e dispersivas. O ponto de partida é a equação de onda (2.7). Utilizando as Eqs. (2.8) e (2.19), ela pode ser escrita na forma:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_L}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2}, \quad (2.21)$$

onde as partes linear e não linear da polarização induzida estão relacionadas ao campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ por meio das Eqs. (2.9) e (2.10), respectivamente.

Embora a equação de onda obtida descreva completamente a propagação do campo eletromagnético, sua resolução direta torna-se extremamente complexa quando se pretende analisar pulsos ópticos propagando-se por longas distâncias em fibras. Uma maneira eficiente de simplificar esse problema consiste em separar a rápida oscilação da onda portadora da lenta evolução espacial e temporal de sua amplitude. Essa ideia conduz à aproximação da envoltória lentamente variante (*Slowly Varying Envelope Approximation*, SVEA), amplamente empregada na óptica não linear e que constitui a base para a dedução da equação de Schrödinger não linear.

É necessário fazer várias suposições simplificadoras antes de resolver a Eq. (2.21). Primeiro, P_{NL} é tratado como uma pequena perturbação em relação a P_L . Isso é justificado porque, na prática, as mudanças não lineares no índice de refração são menores que 10^{-6} . Segundo, assume-se que o campo óptico mantém sua polarização ao longo do comprimento da fibra, de modo que uma abordagem escalar é válida. Isso não é exatamente o caso — a menos que se usem fibras de manutenção de polarização — mas a aproximação funciona muito bem na prática. Terceiro, assume-se que o campo óptico é quase monocromático, ou seja, em óptica de pulsos ultracurtos e propagação em fibras, o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ é composto de uma oscilação rápida na frequência central ω_0 modulada por uma envoltória complexa lentamente variante $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, isso ocorre porque a fonte que gera luz (laser, modulador etc.) opera em torno de uma frequência ω_0 , mas a amplitude do campo, devido a dispersão e efeitos não lineares, varia mais lentamente no tempo e no espaço.

Na aproximação da envoltória lentamente variável adotada aqui, é útil separar a parte que varia rapidamente do campo elétrico escrevendo-o na forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.}], \quad (2.22)$$

onde $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ é a envoltória complexa que contém a informação sobre amplitude e fase do pulso, mudando lentamente no tempo e no espaço, $\exp(-i\omega_0 t)$ é a oscilação rápida na frequência central e c.c. O conjugado complexo garante que $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ seja real.

Fisicamente, essa decomposição representa o campo óptico como o produto entre uma onda portadora, responsável pelas rápidas oscilações na escala do comprimento de onda, e uma envoltória complexa que descreve a modulação lenta da amplitude e da fase do pulso. Essa separação permite concentrar a análise na dinâmica da envoltória, que contém a informação relevante para os fenômenos de propagação em fibras ópticas.

Os componentes de polarização P_L e P_{NL} também podem ser expressos de forma semelhante, escrevendo

$$P_L(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [P_L(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.}], \quad (2.23)$$

$$P_{NL}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [P_{NL}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.}]. \quad (2.24)$$

O componente linear P_L pode ser obtido substituindo a Eq. (2.23) na Eq. (2.9) e é

$$P_L(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(1)}(t - t') E(\mathbf{r}, t') \exp[i\omega_0(t - t')] dt' \quad (2.25)$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2\pi} \int \chi^{(1)}(\omega) \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) \exp[-i(\omega - \omega_0)] d\omega, \quad (2.26)$$

onde $\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega)$ é a transformada de Fourier de $E(\mathbf{r}, t)$ e é definida como na Eq. (2.15), o componente não linear $P_{NL}(\mathbf{r}, t)$ é obtido substituindo a Eq. (2.24) na Eq. (2.10).

2.4 Polarização não linear efetiva

Uma simplificação considerável ocorre se assumirmos que a resposta não linear é instantânea, de modo que a dependência temporal de $\chi^{(3)}$ na Eq. (2.10) é dada pelo produto de três funções delta na forma $\delta(t - t_1)$. A Eq. 2.10 então se reduz a

$$\mathbf{P}_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \chi^{(3)} : \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_2) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_3). \quad (2.27)$$

A suposição de resposta não linear instantânea equivale a desprezar a contribuição das vibrações moleculares para $\chi^{(3)}$ (o efeito Raman). Em geral, tanto os elétrons quanto os núcleos respondem ao campo óptico de maneira não linear. A resposta dos núcleos é intrinsecamente mais lenta em comparação com a resposta eletrônica. Para fibras de sílica, a resposta vibracional ou Raman ocorre em uma escala de tempo de 60–70 fs. Assim, a Eq. (2.27) é aproximadamente válida para larguras de pulso superiores a 1 ps.

Quando a Eq. (2.22) é substituída na Eq. (2.27), a polarização não linear $\mathbf{P}_{\text{NL}}(r, t)$ passa a ter um termo oscilando na frequência ω e outro termo oscilando na terceira harmônica, ou seja, na frequência $3\omega_0$. Este último termo exige casamento de fase (*phase matching*) e, em geral, é desprezível em fibras ópticas. Fazendo uso da Eq. (2.24), $\mathbf{P}_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t)$ é dada por:

$$\mathbf{P}_{\text{NL}} \approx \epsilon_0 \epsilon_{\text{NL}} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.28)$$

onde a contribuição não linear para a constante dielétrica é definida como

$$\epsilon_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \frac{3}{4} \chi^{(3)} |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (2.29)$$

De fato, a partir de Eq. (2.22),

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{NL}} &= \mathbf{E}^3 = \epsilon_0 \chi^{(3)} \left(\frac{1}{2} [\mathbf{E} e^{-i\omega_0 t} + \mathbf{E}^* e^{i\omega_0 t}] \right)^3 = \frac{1}{8} \epsilon_0 \chi^{(3)} [\mathbf{E} e^{-i\omega_0 t} + \mathbf{E}^* e^{i\omega_0 t}]^3 \\ \mathbf{P}_{\text{NL}} &= \frac{1}{8} \epsilon_0 \chi^{(3)} (\mathbf{E}^3 e^{-3i\omega_0 t} + 3\mathbf{E}^2 \mathbf{E}^* e^{-i\omega_0 t} + 3\mathbf{E} (\mathbf{E}^*)^2 e^{i\omega_0 t} + (\mathbf{E}^*)^3 e^{3i\omega_0 t}) \\ &\approx \frac{1}{8} \epsilon_0 \chi^{(3)} (3\mathbf{E}^2 \mathbf{E}^* e^{-i\omega_0 t} + 3\mathbf{E} (\mathbf{E}^*)^2 e^{i\omega_0 t}) \\ &= \frac{3}{4} \epsilon_0 \chi^{(3)} |\mathbf{E}|^2 \frac{1}{2} (\mathbf{E} e^{-i\omega_0 t} + \mathbf{E}^* e^{i\omega_0 t}) \\ \epsilon_0 \epsilon_{\text{NL}} \mathbf{E} &= \frac{3}{4} \epsilon_0 \chi^{(3)} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E} \end{aligned}$$

onde chegamos resultado de Eq.(2.29).

2.5 Separação de variáveis e modos da fibra

Para obter a equação de onda para a amplitude lentamente variável $E(\mathbf{r}, t)$, é mais conveniente trabalhar no domínio de Fourier. Isso, em geral, não é possível, pois a Eq. (2.21) é não linear devido à dependência da intensidade de ϵ_{NL} . Em uma abordagem, ϵ_{NL} é tratado como constante durante a dedução da equação de propagação [2]. Essa abordagem é justificada em razão da aproximação da envoltória lentamente variável e da natureza perturbativa de P_{NL} . Substituindo as Eqs. (2.22), (2.23) e (2.24) na Eq. (2.21), a transformada de Fourier $\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0)$, definida como

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\mathbf{r}, t) \exp[i(\omega - \omega_0)t] dt, \quad (2.30)$$

satisfaz a equação de Helmholtz

$$\nabla^2 \tilde{E} + \epsilon(\omega) k_0^2 \tilde{E} = 0, \quad (2.31)$$

onde $k_0 = \frac{\omega}{c}$ e além disso,

$$\epsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}(\omega) + \epsilon_{\text{NL}} \quad (2.32)$$

é a constante dielétrica cuja parte não linear ϵ_{NL} é dada pela Eq. (2.29). A presença de um termo dependente do tempo pode parecer estranha em um tratamento no domínio da frequência. Seu uso, porém, pode ser justificado para um pulso cuja envoltória varia relativamente devagar em comparação com um ciclo óptico — ou seja, cuja largura espectral é uma pequena fração da sua frequência portadora.

De maneira semelhante à Eq. (2.12), a constante dielétrica pode ser usada para definir o índice de refração $\tilde{n}$ e o coeficiente de absorção $\tilde{\alpha}$. No entanto, tanto $\tilde{n}$ quanto $\tilde{\alpha}$ passam a depender da intensidade devido a ϵ_{NL} . É comum introduzir

$$\epsilon = (\tilde{n} + i \frac{\tilde{\alpha}}{2k_0})^2 \quad (2.33)$$

onde $\tilde{n}$ é o índice de refração efetivo (linear + não linear), $\tilde{\alpha}$ é o coeficiente de absorção (linear + não linear). Por isso podemos definir

$$\tilde{n} = n + \bar{n}_2 |E|^2, \quad (2.34)$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \alpha_2 |E|^2. \quad (2.35)$$

Substituímos na Eq. (2.33)

$$\epsilon = (n + \bar{n}_2 |E|^2 + i \frac{\alpha + \alpha_2 |E|^2}{2k_0})^2. \quad (2.36)$$

Expandimos isso até ordem linear em $|E|^2$ e assumimos não linearidades fracas:

$$\varepsilon \approx n^2 + 2n\bar{n}_2|E|^2 + in\frac{\alpha + \alpha_2|E|^2}{k_0} + \text{resto} \quad (2.37)$$

onde o resto são termos de ordem superior em $|E|^2$. Do outro lado, a permissividade é $\varepsilon = \varepsilon_L + \varepsilon_{NL}$, onde $\varepsilon_L = 1 + \chi^{(1)}$ e $\varepsilon_{NL} = \frac{3}{4}\chi^{(3)}|E|^2$. Como sabemos que $n^2 \approx \varepsilon_L$ e comparamos os termos proporcionais a $|E|^2$, $2n\bar{n}_2|E|^2 + in\frac{\alpha_2}{k_0}|E|^2 = \frac{3}{4}\chi^{(3)}|E|^2$. A susceptibilidade $\chi^{(3)}$ é complexa, $\chi^{(3)} = \text{Re}(\chi^{(3)}) + i\text{Im}(\chi^{(3)})$, então igualando as partes reais e imaginária, $2n\bar{n}_2 = \frac{3}{4}\text{Re}(\chi^{(3)})$ e $n\frac{\alpha_2}{k_0} = \frac{3}{4}\text{Im}(\chi^{(3)})$. Assim concluímos duas relações:

$$\bar{n}_2 = \frac{3}{8n}\text{Re}(\chi^{(3)}), \quad (2.38)$$

$$\alpha_2 = \frac{3\omega_0}{4nc}\text{Im}(\chi^{(3)}). \quad (2.39)$$

A Eq. (2.31) pode ser resolvida usando o método de separação de variáveis. Se admitirmos uma solução da forma

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = F(x, y) \tilde{\psi}(z, \omega - \omega_0) \exp(-i\beta_0 z), \quad (2.40)$$

onde $\tilde{\psi}(z, \omega)$ é uma função que varia lentamente com z e β_0 é o número de onda a ser determinado mais adiante. Substituindo a Eq 2.40 na equação de Helmholtz 2.31:

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon(\omega) \tilde{E} = 0,$$

chegamos

$$(F_{xx} + F_{yy})\tilde{\psi} + F(-\beta_0^2 \tilde{\psi} - 2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial z^2}) + k_0^2 \varepsilon(\omega) F \tilde{\psi} = 0,$$

agora, como F depende só de x, y e $\tilde{\psi}$ só de z , podemos separar essa equação em duas e admitimos uma constante de separação $\tilde{\beta}^2$ que representa o valor associado ao autovalor do modo na fibra

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + [k_0^2 \varepsilon(\omega) - \tilde{\beta}^2] F = 0. \quad (2.41)$$

A outra parte admitimos que $\tilde{\psi}(z)$ é lentamente variante, ou seja, $\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial z^2}$ é pequeno e pode ser desprezado, então:

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} + (\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2) \tilde{\psi} = 0. \quad (2.42)$$

A hipótese central da SVEA consiste em assumir que a envoltória varia muito mais lentamente ao longo da direção de propagação do que a própria onda portadora. Consequentemente, derivadas espaciais de segunda ordem da envoltória tornam-se significativamente menores que as derivadas de primeira ordem e podem ser desprezadas. Essa aproximação permanece válida

para pulsos contendo um número suficientemente grande de ciclos ópticos, situação encontrada na maior parte dos experimentos envolvendo fibras ópticas convencionais.

Entretanto, quando a duração temporal do pulso torna-se da ordem de poucos ciclos ópticos, a separação entre portadora e envoltória deixa de ser rigorosamente válida. Nesses casos, efeitos associados à auto-inclinação temporal (*self-steepening*), à resposta Raman retardada e a derivadas de ordem superior passam a desempenhar papel relevante, exigindo modelos mais completos do que a aproximação utilizada nesta tese.

2.6 Expansão da constante de propagação

A representação espectral do pulso permite analisar separadamente cada componente de frequência presente na envoltória óptica. Essa mudança de representação simplifica significativamente o tratamento da dispersão cromática, uma vez que a constante de propagação passa a depender explicitamente da frequência angular. A expansão dessa dependência em série de Taylor permitirá identificar, nas próximas seções, os diferentes coeficientes dispersivos responsáveis pela evolução temporal do pulso.

Quando há não linearidade fraca, a constante dielétrica $\varepsilon(\omega)$ pode ser expandida como $\varepsilon \approx (n + \Delta n)^2 \approx n^2 + 2n\Delta n$ e com a Eq. (2.37) podemos concluir que

$$\Delta n = \bar{n}_2 |E|^2 + i \frac{\tilde{\alpha}}{2k_0}. \quad (2.43)$$

Agora resolvemos a Eq. 2.41 que pode-se reescrever como: $(\nabla_{\perp}^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(x, y) - \tilde{\beta}^2)F = 0$, onde $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ é a laplaciana transversal, $\tilde{\beta}^2 = \beta^2 + 2\beta\Delta\beta$, $\tilde{n}(x, y) = n + \Delta n(x, y)$ e Δn é uma pequena perturbação. Queremos resolver isso usando teoria de perturbação de primeira ordem [57]. Sem a perturbação ($\Delta n = 0$) a equação fica $(\nabla_{\perp}^2 + k_0^2 n^2 - \beta^2)F^{(0)}(x, y) = 0$. Para fibra monomodo circular, a solução é conhecida como modo fundamental HE_{11} . Essa equação é a equação de Helmholtz 2D no plano transversal, e a sua solução depende da geometria da fibra que assumimos que seja fibra circularmente simétrica, usa-se coordenadas cilíndricas, então a equação será $\nabla_{\perp}^2 F^{(0)} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial F^{(0)}}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \theta^2}$. Assumimos separação de variáveis $F^{(0)}(r, \theta) = R(r)e^{im\theta}$, substituindo isso na equação de Helmholtz: $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{dR}{dr}) - \frac{m^2}{r^2} R + \gamma^2 R = 0$. Essa é equação de Bessel, a solução geral é: $R(r) = AJ_m(\gamma r) + BY_m(\gamma r)$. A forma do modo transversal $F(x, y)$ permanece a mesma na primeira ordem, ou seja, $F(x, y) \approx F^{(0)}(x, y)$, apenas o autovalor é corrigido por:

$$\tilde{\beta}(\omega) = \beta(\omega) + \Delta\beta(\omega) \quad (2.44)$$

onde

$$\Delta\beta = \frac{\omega^2 n(\omega)}{c^2 \beta(\omega)} \frac{\iint_{-\infty}^{+\infty} \Delta n(\omega) |F(x, y)|^2 dx dy}{\iint_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^2 dx dy}. \quad (2.45)$$

Para entender o porquê de $\Delta\beta$, a teoria de perturbação de autovetores de primeira ordem nos diz que uma equação diferencial do tipo $LF = \lambda F$ sofre uma pequena perturbação $L \rightarrow L + \delta L$, o autovalor sofre uma correção de primeira ordem dada por

$$\Delta\lambda = \frac{\langle F | \delta L | F \rangle}{\langle F | F \rangle}$$

onde o produto interno no caso bidimensional é

$$\langle A | B \rangle = \iint A^*(x, y) B(x, y) dx dy. \quad (2.46)$$

Aplicando isso ao nosso caso onde o operador $L = \nabla_{\perp}^2 + k_0^2 \varepsilon(\omega)$, o autovalor é $\lambda = \tilde{\beta}$, a perturbação $\delta L = 2n\Delta n k_0^2$, portanto, a correção de autovetor $\Delta\tilde{\beta}$ é:

$$\Delta\tilde{\beta}^2 = \frac{\iint F^*(x, y) (2n\Delta n k_0^2) F(x, y) dx dy}{\iint |F(x, y)|^2 dx dy},$$

simplificando

$$\Delta\tilde{\beta}^2 = 2n k_0^2 \frac{\iint \Delta n |F(x, y)|^2 dx dy}{\iint |F(x, y)|^2 dx dy}. \quad (2.47)$$

Como a perturbação é pequena, podemos usar $\tilde{\beta} = \beta + \Delta\beta$, então $(\beta + \Delta\beta)^2 \approx \beta^2 + 2\beta\Delta\beta$. Logo $\Delta\tilde{\beta}^2 \approx 2\beta\Delta\beta$, substituindo na Eq. (2.47), e isole $\Delta\beta$, então chegamos na Eq. (2.45) onde $k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$.

Esta etapa completa a solução formal da Eq. (2.21) até a primeira ordem na perturbação $\mathbf{P}_{\text{NL}}$. Usando as Eqs. (2.22) e (2.40), o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ pode ser escrito como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} \{ F(x, y) \psi(z, t) \exp[i(\beta_0 z - \omega_0 t)] + \text{c.c.} \} \quad (2.48)$$

onde $\psi(z, t)$ é a envoltória do pulso que varia lentamente. A transformada de Fourier $\tilde{\psi}(z, \omega - \omega_0)$ de $\psi(z, t)$ satisfaz a Eq. (2.42), que pode ser escrita como

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} = i(\beta(\omega) + \Delta\beta(\omega) - \beta_0) \tilde{\psi}. \quad (2.49)$$

De fato, com a Eq. (2.42) assumindo que $\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2 \approx 2\beta_0(\tilde{\beta} - \beta_0)$. Mas como $\tilde{\beta} = \beta + \Delta\beta$, então obtemos a Eq. (2.49).

Neste ponto, podemos voltar ao domínio do tempo aplicando a transformada de Fourier inversa na Eq. (2.49) e obter a equação de propagação para $\psi(z, t)$.

A propagação de um pulso óptico em uma fibra é fortemente influenciada pela dependên-

cia da constante de propagação $\beta(\omega)$ com a frequência angular. Como diferentes componentes espectrais propagam-se com velocidades de fase distintas, ocorre uma redistribuição temporal do pulso durante sua evolução ao longo da fibra. Esse fenômeno é conhecido como dispersão cromática e constitui um dos principais mecanismos responsáveis pela dinâmica de pulsos ópticos.

No entanto, como a forma funcional exata de $\beta(\omega)$ raramente é conhecida, é útil expandir $\beta(\omega)$ em uma série de Taylor em torno da frequência portadora ω_0 como

$$\beta(\omega) = \beta_0 + (\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\beta_2 + \frac{1}{6}(\omega - \omega_0)^3\beta_3 + \frac{1}{24}(\omega - \omega_0)^4\beta_4 + \dots, \quad (2.50)$$

onde $\beta_0 = \beta(\omega_0)$ e outros parâmetros são definidos como

$$\beta_m = \left(\frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right)_{\omega=\omega_0}. \quad (2.51)$$

Uma expansão semelhante deve ser feita para $\Delta\beta(\omega)$, ou seja,

$$\Delta\beta(\omega) = \Delta\beta_0 + (\omega - \omega_0)\Delta\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\Delta\beta_2 + \frac{1}{6}(\omega - \omega_0)^3\Delta\beta_3 + \frac{1}{24}(\omega - \omega_0)^4\Delta\beta_4 + \dots \quad (2.52)$$

onde $\Delta\beta_n$ é definido de forma semelhante à Eq. (2.51).

2.7 Equação de propagação

O modelo físico considerado é até o termo quarto e de ordem superior na expansão (2.50) são desprezíveis que Andrea Blanco-Redondo justificou [40], podemos usar a aproximação $\Delta\beta \approx \Delta\beta_0$ na Eq. (2.52). Após essas simplificações na Eq. (2.52), aplicamos a transformada de Fourier inversa usando

$$\psi(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(z, \omega - \omega_0) \exp[-i(\omega - \omega_0)t] d\omega. \quad (2.53)$$

Durante a operação de transformada de Fourier, $\omega - \omega_0$ é substituído pelo operador diferencial $i(\partial/\partial t)$. A equação resultante para $\psi(z, t)$ torna-se

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial \psi}{\partial t} + i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3} - i \frac{\beta_4}{24} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} = i \Delta\beta_0 \psi. \quad (2.54)$$

O termo $\Delta\beta_0$ no lado direito da Eq. (2.54) é obtido a partir da Eq. (2.45) após se fixar $\omega = \omega_0$. Embora, em geral, Δn possa ser diferente nas regiões de núcleo e casca de uma fibra, ele é praticamente o mesmo em ambas as regiões na maioria das fibras práticas e pode

ser retirado da integral. Utilizando $\beta(\omega) \approx n(\omega)\omega/c$ e assumindo que $F(x,y)$ na Eq. (2.45) não varia muito ao longo da largura espectral do pulso, e $\Delta n = \bar{n}_2|E|^2$, a Eq. (2.54) assume a forma

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial \psi}{\partial t} + i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3} - i \frac{\beta_4}{24} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} + \frac{\alpha}{2} \psi = i \gamma(\omega_0) |\psi|^2 \psi, \quad (2.55)$$

onde o parâmetro não linear γ é definido como

$$\gamma(\omega_0) = \frac{\omega_0 \bar{n}_2}{c} \frac{\iint_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)|^4 dx dy}{\iint_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)|^2 dx dy}. \quad (2.56)$$

A amplitude do pulso ψ na Eq. (2.55) está em unidades de campo elétrico (V/m). Por razões práticas, é comum normalizar ψ de forma que $|\psi|^2$ represente a potência óptica. Para isso, introduz-se ψ' tal que $|\psi'|^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 n c \psi_m |\psi|^2$, onde $\psi_m = \iint |F(x,y)|^2 dx dy$ é a área do modo. É fácil verificar que ψ' também satisfaz a Eq. (2.55), desde que o parâmetro não linear γ seja redefinido como

$$\gamma(\omega_0) = \frac{\omega_0 n_2}{c A_{eff}}, \quad (2.57)$$

$$n_2 = \frac{2 \bar{n}_2}{\epsilon_0 n c}, \quad (2.58)$$

e a área efetiva do modo da fibra é definida como

$$\psi_{eff} = \frac{(\iint_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)|^2 dx dy)^2}{\iint_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)|^4 dx dy}. \quad (2.59)$$

O termo β_0 representa a constante de propagação avaliada na frequência central do pulso. Esse coeficiente determina apenas a fase global acumulada durante a propagação e, por não alterar a forma da envoltória, pode ser eliminado mediante uma transformação conveniente da variável de fase.

O coeficiente β_1 corresponde ao inverso da velocidade de grupo e descreve a velocidade com que a envoltória do pulso se propaga ao longo da fibra. Como o interesse deste trabalho está concentrado na evolução da forma do pulso, a contribuição de β_1 pode ser eliminada adotando-se um sistema de referência que se desloca com a velocidade de grupo.

O coeficiente β_2 caracteriza a dispersão de velocidade de grupo (Group Velocity Dispersion – GVD), responsável pelo alargamento ou compressão temporal do pulso. Quando $\beta_2 < 0$, o sistema encontra-se no regime de dispersão anômala, no qual a dispersão pode equilibrar a não linearidade Kerr, possibilitando a formação dos sólitons convencionais da ESNL. Para $\beta_2 > 0$, ocorre o regime de dispersão normal, no qual esse equilíbrio deixa de existir na formu-

lação clássica da equação. Como mostrado no Capítulo 4, ambos os regimes serão investigados nesta tese, juntamente com o caso particular $\beta_2 = 0$, no qual a dinâmica passa a ser governada predominantemente pela dispersão de quarta ordem.

O coeficiente β_3 representa a dispersão de terceira ordem, cujo efeito torna-se relevante para pulsos ultracurtos ou em regiões espectrais próximas ao ponto de dispersão nula. Embora desempenhe papel importante em diversos problemas envolvendo propagação óptica, esse termo não será considerado no modelo desenvolvido nesta tese, uma vez que o objetivo principal consiste em investigar especificamente os efeitos introduzidos pela dispersão de quarta ordem.

O coeficiente β_4 descreve a dispersão de quarta ordem e constitui o principal objeto de investigação deste trabalho. Em fibras ópticas convencionais sua contribuição é frequentemente muito menor que a dispersão de segunda ordem, razão pela qual costuma ser desprezada na dedução da ESNL padrão. Entretanto, essa aproximação deixa de ser válida quando o sistema opera nas proximidades do comprimento de onda de dispersão nula ou em plataformas fotônicas especialmente projetadas para reduzir a contribuição de β_2 , como fibras de cristal fotônico, fibras com dispersão achatada e determinados guias de onda integrados.

Nessas condições, a dispersão de quarta ordem passa a exercer influência significativa sobre a propagação dos pulsos ópticos, modificando sua largura espacial, estabilidade e propriedades espectrais. Além disso, esse termo permite a existência de novos regimes físicos, incluindo os sólitons puramente quárticos observados experimentalmente por Blanco-Redondo *et al.* [40]. Por esse motivo, o termo proporcional a β_4 será mantido explicitamente na dedução da Equação de Schrödinger Não Linear Generalizada utilizada ao longo desta tese.

2.8 Forma final do modelo

A equação de propagação obtida na seção anterior (2.55) descreve a evolução da envoltória do campo elétrico em função da distância de propagação z e do tempo retardado t . No entanto, para a análise de estados estacionários e propriedades estruturais das soluções, é conveniente reescrever essa equação em uma forma adimensional equivalente à equação de Schrödinger não linear.

Inicialmente, realiza-se a mudança para o referencial que se move com a velocidade de grupo, eliminando o termo de primeira ordem β_1 . Em seguida, desprezam-se os termos de terceira ordem, assumindo que seus efeitos são subdominantes no regime considerado.

Além disso, para estabelecer a conexão com o modelo utilizado nesta tese, introduzimos variáveis adimensionais por meio de escalas características de comprimento e tempo, juntamente com uma reescala apropriada da amplitude do campo. Além disso, realizamos a identificação formal entre as variáveis de propagação e evolução temporal:

$$z \rightarrow t, t \rightarrow x,$$

permitindo interpretar a dinâmica como uma equação de evolução temporal para uma função de onda espacial.

Adicionalmente, incorporamos efeitos de confinamento por meio de um potencial externo $V(x)$ e consideramos uma não linearidade espacialmente dependente $g(x)$, o que generaliza o modelo físico para incluir mecanismos de aprisionamento e modulação do meio.

Com essas transformações, obtemos a forma final do modelo estudado nesta tese:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \beta_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \beta_4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + V(x) \psi + g(x) |\psi|^2 \psi. \quad (2.60)$$

Essa equação descreve a dinâmica de estados localizados sob a ação combinada da dispersão de segunda e quarta ordem, de um potencial externo e de uma não linearidade espacialmente modulada.

A equação acima constitui o modelo fundamental adotado neste trabalho, incorporando simultaneamente efeitos de dispersão de segunda e quarta ordem, bem como a não linearidade cúbica do meio. Essa formulação permite investigar regimes em que a dispersão de ordem superior desempenha papel relevante na dinâmica de estados localizados.

Capítulo 3

Métodos Numéricos

3.1 Introdução

A equação de Schrödinger não linear generalizada estudada nesta tese incorpora simultaneamente dispersão de segunda e quarta ordem, potencial externo e não linearidade cúbica espacialmente dependente. A presença desses termos torna a obtenção de soluções analíticas extremamente restrita, sendo possível apenas para casos particulares ou sob hipóteses simplificadoras. Assim, a investigação das propriedades dos estados estacionários e de sua dinâmica requer o emprego de métodos numéricos apropriados.

Neste trabalho foram utilizados diferentes procedimentos numéricos, cada um destinado a uma etapa específica da investigação. A obtenção das soluções estacionárias foi realizada por meio do método de propagação em tempo imaginário, amplamente empregado em problemas envolvendo equações de Schrödinger devido à sua robustez e capacidade de convergir para estados de equilíbrio. Para a obtenção dos estados excitados, utilizou-se o procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt, impedindo que a evolução numérica convergisse repetidamente para o estado fundamental.

A discretização espacial foi realizada utilizando métodos espectrais baseados na Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform* – FFT). Essa escolha permite representar as derivadas espaciais com elevada precisão, especialmente o termo de quarta derivada presente na equação governante, além de reduzir significativamente o custo computacional quando comparada a métodos tradicionais de diferenças finitas.

Após a obtenção das soluções estacionárias, sua estabilidade foi investigada por meio da propagação em tempo real utilizando o método Split-Step Fourier. Nesse procedimento, peque-

nas perturbações aleatórias foram adicionadas às soluções estacionárias, permitindo avaliar sua robustez frente a perturbações e identificar possíveis mecanismos de instabilidade dinâmica.

As próximas seções apresentam detalhadamente cada um desses métodos, bem como as justificativas para sua utilização, os parâmetros numéricos adotados e os critérios empregados para garantir a convergência e a confiabilidade dos resultados apresentados nos Capítulos 4 e 5.

3.2 Discretização espacial e método espectral de Fourier

Para resolver numericamente a equação de Schrödinger não linear generalizada, é necessário discretizar o domínio espacial e calcular, de forma eficiente, as derivadas presentes na equação. Além disso, como o modelo estudado inclui um termo de quarta derivada, os métodos espectrais apresentam vantagem em relação aos métodos de diferenças finitas, pois reduzem os erros de discretização associados a operadores diferenciais de ordem elevada.

A Transformada de Fourier permite representar a função de onda no espaço dos números de onda, convertendo derivadas espaciais em operações algébricas. Dessa forma, o cálculo das derivadas deixa de ser realizado diretamente no espaço físico, tornando a implementação numérica mais simples e computacionalmente mais eficiente. A transformada direta e sua inversa são definidas, respectivamente, por

$$\hat{\psi}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \exp(-ikx) dx, \quad (3.1)$$

enquanto a transformada inversa é dada por

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(k) \exp(ikx) dk. \quad (3.2)$$

A principal vantagem dessa representação é que as derivadas espaciais podem ser escritas como multiplicações pelo número de onda k . Assim, a segunda e a quarta derivadas utilizadas neste trabalho tornam-se

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right] = -k^2 \hat{\psi}(k),$$

e

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^4\psi}{dx^4}\right] = k^4 \hat{\psi}(k),$$

simplificando significativamente a resolução da parte linear da equação.

O domínio computacional foi escolhido de modo que a função de onda apresentasse amplitude desprezível nas extremidades do intervalo considerado, minimizando a influência das condições de contorno sobre os resultados. Da mesma forma, a discretização espacial foi definida de forma a representar adequadamente todos os perfis estacionários analisados, garantindo a convergência das soluções sem aumentar desnecessariamente o custo computacional.

3.3 Método de propagação em tempo imaginário

A obtenção das soluções estacionárias foi realizada por meio do método de propagação em tempo imaginário (*Imaginary Time Propagation* – ITP), amplamente utilizado na resolução numérica da Equação de Schrödinger Não Linear. A principal vantagem desse método é transformar a busca por estados estacionários em um processo iterativo estável, permitindo determinar soluções localizadas sem resolver diretamente um problema de autovalores não linear.

Para isso, realiza-se a substituição da variável temporal real t pelo tempo imaginário τ , definida por

$$t \mapsto -i\tau.$$

Com essa transformação, a equação de evolução deixa de apresentar comportamento oscilatório e passa a descrever um processo semelhante à difusão. Como consequência, as componentes associadas aos estados de maior energia são progressivamente amortecidas durante a evolução numérica, favorecendo a convergência para um estado estacionário.

Aplicando essa transformação à Equação de Schrödinger Não Linear Generalizada, obtém-se

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\beta_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \beta_4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - V(x)\psi - g(x)|\psi|^2 \psi. \quad (3.3)$$

que passa a ser integrada iterativamente até que sejam satisfeitos os critérios de convergência adotados neste trabalho.

Durante esse processo, a norma da função de onda tende a diminuir continuamente. Para evitar que a solução evolua para a função nula, realizou-se a renormalização após cada passo de propagação em tempo imaginário, preservando a potência total da solução e garantindo a

estabilidade do processo iterativo.

A convergência foi considerada atingida quando a diferença entre duas iterações consecutivas tornou-se inferior ao critério de tolerância estabelecido. Esse procedimento assegura que as soluções utilizadas nos Capítulos 4 e 5 correspondam efetivamente a estados estacionários da equação estudada.

3.4 Estados excitados e ortogonalização

Embora o método de propagação em tempo imaginário seja bastante eficiente para a obtenção de soluções estacionárias, sua aplicação conduz naturalmente ao estado fundamental do sistema. Para determinar os estados excitados analisados no Capítulo 4, foi empregada a ortogonalização de Gram–Schmidt, procedimento que elimina, a cada iteração, as componentes da solução associadas aos estados previamente calculados. Dessa forma, a evolução numérica deixa de convergir para o estado fundamental e passa a ser direcionada para o próximo estado excitado, possibilitando a obtenção sucessiva dos diferentes modos.

Matematicamente, esse procedimento consiste em projetar a solução corrente sobre os estados já obtidos e subtrair essas projeções, impondo a condição de ortogonalidade entre as soluções. Após a ortogonalização, a função de onda é novamente normalizada e utilizada como condição inicial para a etapa seguinte da propagação em tempo imaginário.

Como condição inicial para cada modo, foram utilizadas funções do tipo Gauss–Hermite, uma vez que sua estrutura reproduz o número de nós esperado para cada estado excitado. Assim, adotaram-se as funções $\psi_0 = \exp(\frac{-x^2}{2})$, $\psi_1 = (x) \exp(\frac{-x^2}{2})$, $\psi_2 = (2x^2 - 1) \exp(\frac{-x^2}{2})$, $\psi_3 = (2x^3 - 3x) \exp(\frac{-x^2}{2})$, e $\psi_4 = (4x^4 - 12x^2 + 3) \exp(\frac{-x^2}{2})$, que serviram como aproximações iniciais para o estado fundamental e os quatro primeiros estados excitados. A combinação dessas condições iniciais com o procedimento de ortogonalização permitiu obter, de forma sistemática, soluções estacionárias com diferentes números de nós, tornando possível investigar a influência da dispersão de quarta ordem sobre cada uma das estruturas modais consideradas neste trabalho.

3.5 Método Split-Step Fourier

Após a obtenção das soluções estacionárias, sua estabilidade foi investigada por meio da propagação em tempo real utilizando o método Split-Step Fourier (SSF). Esse método foi escolhido por permitir a integração eficiente da GNLSE, separando a evolução dos termos lineares e não lineares da equação. Essa estratégia reduz o custo computacional e mantém elevada precisão numérica, sendo amplamente empregada em problemas envolvendo propagação de ondas não lineares.

A equação governante pode ser escrita como a soma de um operador linear, que reúne os termos de dispersão e o potencial externo, e de um operador não linear, associado ao termo cúbico da equação,

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{L}\psi + \hat{N}\psi.$$

Essa decomposição permite tratar cada operador no domínio em que sua implementação é mais eficiente. A evolução do operador linear é realizada no espaço espectral, onde as derivadas espaciais são representadas por multiplicações algébricas, enquanto o operador não linear é calculado diretamente no espaço físico, por depender apenas da amplitude local da função de onda.

Neste trabalho foi empregada a decomposição simétrica de Strang,

$$e^{(\hat{L}+\hat{N})\Delta t} \approx e^{\hat{L}\Delta t/2} e^{\hat{N}\Delta t} e^{\hat{L}\Delta t/2},$$

que proporciona maior precisão na integração temporal quando comparada à decomposição simples dos operadores. Esse procedimento foi utilizado em todas as simulações apresentadas nos Capítulos 4 e 5.

3.6 Análise de estabilidade

A estabilidade das soluções estacionárias foi investigada por meio da propagação em tempo real utilizando o método Split-Step Fourier. Para isso, cada solução obtida pelo método de propagação em tempo imaginário foi utilizada como condição inicial, sendo adicionada uma pequena perturbação aleatória à sua amplitude antes do início da evolução temporal. Esse procedimento permite avaliar a robustez das soluções frente a pequenas perturbações, simulando

imperfeições que podem ocorrer em situações físicas reais.

A condição inicial perturbada é escrita como

$$\psi(x, 0) = \phi(x) [1 + \varepsilon(x)],$$

em que $\phi(x)$ representa a solução estacionária obtida numericamente e $\varepsilon(x)$ corresponde a um ruído aleatório de baixa amplitude. Neste trabalho, foi utilizada uma perturbação de aproximadamente 5% da amplitude da solução, valor suficientemente pequeno para caracterizar uma perturbação linear sem modificar significativamente a estrutura inicial do estado estacionário.

Durante a evolução temporal, foram monitoradas a forma do perfil, sua amplitude e a distribuição espacial da função de onda. As soluções que preservaram essas características ao longo da propagação, mantendo praticamente inalterada sua estrutura localizada, foram classificadas como dinamicamente estáveis. Em contrapartida, soluções que apresentaram crescimento das perturbações, deformação do perfil ou perda da localização espacial foram consideradas dinamicamente instáveis.

Esse procedimento foi aplicado a todas as soluções apresentadas no Capítulo 4, permitindo identificar as regiões de estabilidade e instabilidade em função dos parâmetros físicos considerados. Dessa forma, a análise em tempo real complementa os resultados obtidos pela propagação em tempo imaginário, verificando se os estados estacionários encontrados permanecem fisicamente robustos quando submetidos a pequenas perturbações externas.

3.7 Escolha dos parâmetros numéricos

Os parâmetros numéricos utilizados nas simulações foram definidos de modo a garantir uma resolução adequada das soluções estacionárias e a confiabilidade dos resultados apresentados nos capítulos seguintes. Como os Capítulos 4 e 5 abordam problemas físicos distintos, foram empregadas discretizações espaciais diferentes, adequadas às características e às varreduras paramétricas realizadas em cada caso. Em ambos os problemas, o domínio computacional foi escolhido suficientemente amplo para que as soluções permanecessem localizadas na região central e apresentassem amplitude reduzida nas proximidades das fronteiras. O método Split-Step Fourier foi utilizado para realizar a propagação, enquanto as soluções estacionárias foram obtidas por propagação em tempo imaginário, com renormalização da função de onda após cada passo.

Para as simulações referentes aos estados localizados em meios com não linearidade defocalizante espacialmente inhomogênea, discutidas no Capítulo 4, foi utilizado o domínio espacial $x \in [-10, 10]$, discretizado em $N_x = 512$ pontos. Essa escolha corresponde a um passo espacial

$$\Delta x = 51220 = 0.0390625, \quad (3.4)$$

aproximadamente igual a 0.04, valor utilizado na descrição numérica do trabalho publicado que constitui a base desse capítulo. O passo de propagação em tempo imaginário foi fixado em $\Delta\tau = 0.001$, enquanto o mesmo valor, $\Delta t = 0.001$, foi empregado nas simulações em tempo real. O processo iterativo foi considerado convergido quando a diferença entre duas soluções consecutivas satisfaz o critério $\|\psi^{(m+1)} - \psi^{(m)}\| < 10^{-12}$. O artigo correspondente informa explicitamente o passo temporal $dt = 0.001$, o passo espacial aproximado $dx = 0.04$ e o incremento $\Delta\beta_4 = 0.1$.

Nesse primeiro conjunto de simulações, considerou-se o perfil de não linearidade defocalizante $g(x) = \cosh^2(x)$, na ausência de potencial externo. Foram investigados os três regimes de dispersão de segunda ordem, $\beta_2 = -1, 0$ e $+1$, correspondentes, respectivamente, aos regimes anômalo, puramente quártico e normal. A dispersão de quarta ordem foi variada com incremento $\Delta\beta_4 = 0.1$, sendo analisada principalmente no intervalo $0 \leq \beta_4 \leq 10$. No regime puramente quártico, $\beta_2 = 0$, as análises foram iniciadas em $\beta_4 = 0.1$, uma vez que a escolha simultânea $\beta_2 = \beta_4 = 0$ eliminaria os mecanismos dispersivos lineares do modelo. Foram calculados o estado fundamental e os quatro primeiros estados excitados, correspondentes a $n = 0, 1, 2, 3, 4$, utilizando-se $N = 1$ como potência de referência para a comparação das propriedades estruturais.

Os estados excitados foram obtidos mediante a aplicação do procedimento de ortogonalização de Gram–Schmidt durante a propagação em tempo imaginário, evitando a convergência para estados de menor ordem. Para investigar a estabilidade dinâmica, as soluções estacionárias foram utilizadas como condições iniciais para a propagação em tempo real e submetidas a uma perturbação aleatória de aproximadamente 5% em sua amplitude. As evoluções foram acompanhadas por tempos de até $t = 10^5$. Além das simulações realizadas com potência de referência $N = 1$, a influência da potência sobre a estabilidade foi investigada no intervalo $0.1 \leq N \leq 10$, mantendo-se $\beta_4 = 1$.

Para as simulações referentes à quebra espontânea de simetria em um potencial de poço

duplo, apresentadas no Capítulo 5, foi mantido o domínio $x \in [-10, 10]$, porém utilizando-se $N_x = 256$ pontos, o que corresponde ao passo espacial

$$\Delta x = \frac{20}{256} = 0.078125.$$

O passo de propagação em tempo imaginário foi fixado em $\Delta\tau = 0.001$, com um limite máximo de 10^6 iterações. Nesse caso, a convergência foi determinada pela diferença máxima ponto a ponto entre duas iterações consecutivas, adotando-se o critério

$$\max_x \left| U^{(m+1)}(x) - U^{(m)}(x) \right| < 10^{-14}.$$

Após cada passo de propagação, a solução foi renormalizada de modo a preservar a potência total especificada para cada simulação.

O potencial externo utilizado nesse segundo problema foi definido pela superposição de dois poços idênticos,

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(x+x_0)} - \frac{V_0}{\cosh^2(x-x_0)},$$

com $V_0 = 2$ e $x_0 = 2$, parâmetros mantidos fixos nas análises apresentadas. Foram considerados os regimes $\beta_2 = -1, 0$ e $+1$, bem como diferentes valores do coeficiente não linear g , com particular atenção ao regime atrativo $g = -1$. A potência P e a dispersão de quarta ordem β_4 foram utilizadas como parâmetros de controle na construção dos diagramas de bifurcação e na determinação dos limiares associados à quebra espontânea de simetria.

Para permitir a obtenção dos ramos assimétricos, a propagação em tempo imaginário foi inicializada com uma função gaussiana ligeiramente deslocada em relação ao centro,

$$U(x, 0) = \exp[-(x \pm \sigma)^2],$$

utilizando-se $\sigma = \Delta x = 0.078125$. Esse pequeno deslocamento quebra apenas a simetria da condição inicial e permite ao procedimento numérico explorar soluções preferencialmente localizadas em cada um dos poços, sem modificar a simetria do potencial externo. Essa estratégia corresponde à utilizada no trabalho que fundamenta o Capítulo 5.

Na análise do modelo convencional, correspondente a $\beta_4 = 0$, foram investigadas diferentes combinações de β_2 , g e potência. Para $\beta_2 = -1$ e $g = -1$, foi identificado o limiar

$P_c \simeq 0.45$ associado à bifurcação supercrítica do tipo pitchfork. Para avaliar diretamente a influência da dispersão de quarta ordem, foram comparados, entre outros casos, $\beta_4 = 0$ e $\beta_4 = 2$ para $\beta_2 = -1, 0, +1$ e $g = -1$. A dependência da potência crítica com a não linearidade foi calculada para $\beta_4 = 1$, enquanto as análises do parâmetro de assimetria em função de β_4 foram realizadas, em particular, para $P = 1$ e $g = -1$. Também foram determinados os valores críticos β_{4c} no plano (P, β_4) para $\beta_2 = -1, 0, +1$ e $g = -1$, além da dependência de β_{4c} com g para $\beta_2 = -1$, comparando-se as potências $P = 1$ e $P = 2$.

De forma geral, a escolha do domínio, da resolução espacial, dos passos de propagação e dos critérios de convergência buscou assegurar que os resultados não fossem determinados por efeitos de discretização ou pela proximidade das fronteiras computacionais. A utilização de malhas distintas nos dois problemas reflete as diferentes necessidades das respectivas varreduras numéricas, enquanto os critérios rigorosos de convergência e a renormalização a cada passo garantem a obtenção consistente dos estados estacionários utilizados nas análises posteriores.

Capítulo 4

Estados Localizados em Meios com Não Linearidade Inhomogênea

4.1 Introdução

O estudo de estados localizados constitui uma das áreas mais importantes da óptica não linear, pois essas estruturas resultam do equilíbrio entre os efeitos dispersivos e a resposta não linear do meio. Conforme discutido no Capítulo 1, um avanço importante nessa área ocorreu com o trabalho pioneiro de Borovkova *et al.* [47], que demonstrou que uma não linearidade defocalizante espacialmente crescente pode atuar como um mecanismo efetivo de confinamento. Esse resultado mostrou que estados localizados brilhantes podem existir mesmo na ausência de potenciais externos, desde que a intensidade da não linearidade aumente suficientemente rápido com a coordenada espacial.

Esse trabalho inaugurou uma nova linha de pesquisa dedicada ao estudo de meios com não linearidade espacialmente modulada, ampliando significativamente a compreensão dos mecanismos responsáveis pela formação de estados autoaprisionados. Diversos estudos posteriores confirmaram que a modulação espacial da não linearidade constitui uma estratégia eficiente para controlar a existência, as propriedades estruturais e a estabilidade de estados localizados em diferentes sistemas físicos. Entretanto, a maior parte dessas investigações foi desenvolvida considerando a equação de Schrödinger não linear convencional, na qual apenas a dispersão de segunda ordem é levada em consideração.

Por outro lado, o desenvolvimento da equação de Schrödinger não linear generalizada evidenciou que a inclusão da dispersão de quarta ordem pode modificar significativamente a for-

mação, a propagação e a estabilidade de estruturas localizadas, especialmente em regimes nos quais a dispersão de segunda ordem deixa de ser dominante. Embora diversos trabalhos tenham investigado esse mecanismo em meios homogêneos e em sistemas ópticos convencionais, sua influência sobre estados localizados sustentados por não linearidades espacialmente moduladas permanece relativamente pouco explorada. Essa lacuna motiva a investigação desenvolvida neste capítulo.

Nesse contexto, considera-se um modelo unidimensional descrito pela equação de Schrödinger não linear generalizada contendo dispersão de segunda e quarta ordem, na ausência de potencial externo e com uma não linearidade defocalizante espacialmente crescente. O objetivo é compreender como a dispersão de quarta ordem modifica a existência, as propriedades estruturais e a estabilidade dinâmica dos estados localizados, bem como investigar sua influência sobre a constante de propagação e sobre os diferentes modos estacionários do sistema.

Os resultados apresentados neste capítulo correspondem ao primeiro estudo desenvolvido no âmbito desta tese e ampliam o trabalho recentemente publicado pelo Grupo de Óptica Não Linear do Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás [51]. Em comparação com o artigo, a presente tese apresenta uma discussão mais abrangente da fundamentação física do problema, detalha os procedimentos numéricos empregados e amplia a análise dos resultados, oferecendo uma compreensão mais completa do papel desempenhado pela dispersão de quarta ordem em meios com não linearidade espacialmente modulada.

Por fim, este capítulo está organizado da seguinte forma. Na Seção 4.2 é apresentado o modelo matemático utilizado nas simulações. Em seguida, discutem-se as condições de existência das soluções estacionárias e seus perfis espaciais para diferentes regimes de dispersão. Posteriormente, analisa-se a influência da dispersão de quarta ordem sobre a localização das soluções, a constante de propagação e a estabilidade dinâmica dos diferentes estados localizados. Finalmente, são apresentadas as principais conclusões obtidas.

4.2 Modelo matemático

Para investigar a influência da dispersão de quarta ordem na formação de estados localizados em meios com não linearidade espacialmente inhomogênea, considera-se uma versão particular da equação de Schrödinger não linear generalizada apresentada no Capítulo 2. Neste caso, o potencial externo é omitido, de modo que o mecanismo responsável pelo confinamento

das soluções decorre exclusivamente da modulação espacial da não linearidade. O modelo adotado é dado por

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \beta_2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \beta_4 \frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} + g(x)|\psi|^2\psi,$$

onde $\psi(x,t)$ representa a função de onda complexa, enquanto os coeficientes β_2 e β_4 correspondem, respectivamente, às dispersões de segunda e quarta ordem.

Ao contrário do modelo estudado no capítulo seguinte, neste problema não há um potencial externo responsável pelo aprisionamento das soluções. Toda a dinâmica de confinamento resulta da distribuição espacial da não linearidade, cuja intensidade depende explicitamente da posição. Neste trabalho considera-se o perfil

$$g(x) = \cosh^2(x),$$

que descreve um meio defocalizante espacialmente inhomogêneo.

A escolha desse perfil não é arbitrária. Como a função $\cosh(x)$ cresce exponencialmente para grandes valores de $|x|$, a intensidade da não linearidade aumenta continuamente à medida que a distância em relação à origem cresce. Consequentemente, regiões afastadas do centro tornam-se energeticamente desfavoráveis para a permanência da função de onda, produzindo um mecanismo efetivo de confinamento não linear.

Esse comportamento difere significativamente daquele observado em meios homogêneos. Em uma não linearidade uniforme, o confinamento das soluções normalmente depende da presença de um potencial externo ou de uma não linearidade focalizante. No presente modelo, entretanto, o próprio crescimento espacial da resposta não linear é suficiente para sustentar estados localizados, mesmo na ausência de qualquer potencial de aprisionamento.

Outro aspecto relevante deste estudo consiste na presença simultânea dos termos dispersivos de segunda e quarta ordem. Enquanto a dispersão convencional de segunda ordem determina a tendência básica de espalhamento das soluções, o termo de quarta ordem introduz uma nova escala espacial na dinâmica do sistema. A interação entre esses dois mecanismos dispersivos modifica o equilíbrio entre espalhamento linear e confinamento não linear, podendo alterar significativamente a forma, a largura e a estabilidade das soluções estacionárias.

Ao longo deste capítulo serão considerados três regimes distintos para o coeficiente de dispersão de segunda ordem:

- $\beta_2 = -1$, correspondente ao regime de dispersão anômala;
- $\beta_2 = 0$, caracterizando o regime puramente quártico;
- $\beta_2 = +1$ correspondente ao regime de dispersão normal.

Essa divisão permite investigar separadamente como a dispersão de quarta ordem atua quando combinada com diferentes mecanismos dispersivos, possibilitando uma comparação direta entre os três regimes físicos considerados.

Para determinar as soluções estacionárias, procura-se uma solução da forma

$$\psi(x, t) = \phi(x)e^{-i\mu t},$$

em que $\phi(x)$ representa o perfil espacial da solução e μ é a constante de propagação (ou potencial químico, dependendo do contexto físico considerado). Substituindo essa expressão na equação dinâmica, obtém-se a equação estacionária

$$\mu\phi = \beta_2 \frac{d^2\phi}{dx^2} + \beta_4 \frac{d^4\phi}{dx^4} + g(x)\phi^3, \quad (4.1)$$

que será resolvida numericamente utilizando o método de propagação em tempo imaginário descrito no Capítulo 3.

As soluções obtidas permitirão investigar não apenas sua existência, mas também a influência da dispersão de quarta ordem sobre suas propriedades estruturais e sua estabilidade dinâmica.

4.3 Existência das soluções localizadas

Antes de analisar as propriedades das soluções estacionárias, é necessário determinar os intervalos de parâmetros para os quais estados localizados podem efetivamente existir. Em particular, este trabalho busca compreender como o sinal e a intensidade da dispersão de quarta ordem influenciam a formação dessas estruturas em um meio com não linearidade espacialmente inhomogênea.

Com esse objetivo, foram realizadas simulações numéricas considerando valores positivos e negativos do coeficiente de dispersão de quarta ordem, mantendo fixos os demais parâmetros do modelo. Para cada conjunto de parâmetros, o método de propagação em tempo

imaginário foi inicializado com diferentes condições iniciais, incluindo funções gaussianas e perfis correspondentes aos estados excitados descritos no Capítulo 3. Essa estratégia teve como finalidade verificar se a convergência das soluções dependia da escolha da condição inicial ou se representava uma característica intrínseca do sistema.

Os resultados mostraram que soluções estacionárias localizadas são obtidas apenas quando o coeficiente de dispersão de quarta ordem satisfaz a condição

$$\beta_4 \geq 0.$$

Em contraste, para todos os valores negativos investigados, o algoritmo numérico não apresentou convergência para nenhum estado estacionário localizado, independentemente da condição inicial utilizada ou do número de iterações realizadas. Esse comportamento foi observado de maneira consistente nos três regimes de dispersão de segunda ordem considerados neste trabalho.

Embora a ausência de convergência numérica, por si só, não constitua uma demonstração matemática da inexistência de soluções, ela fornece uma forte evidência de que estados estacionários localizados não são sustentados pelo sistema quando a dispersão de quarta ordem assume valores negativos. Consequentemente, toda a análise apresentada nas próximas seções será restrita ao intervalo $\beta_4 \geq 0$, no qual soluções fisicamente relevantes puderam ser obtidas.

Uma interpretação física desse resultado pode ser construída analisando o papel desempenhado pelo termo dispersivo de quarta ordem na equação governante. Para valores positivos de β_4 , esse termo contribui para o equilíbrio entre os mecanismos dispersivos e o confinamento imposto pela não linearidade espacialmente dependente, permitindo a formação de estados estacionários. Entretanto, quando $\beta_4 < 0$, essa contribuição modifica profundamente esse equilíbrio, favorecendo a perda de confinamento das soluções durante a evolução numérica.

Como consequência, a função de onda tende a espalhar-se continuamente ao longo do domínio computacional, impedindo a formação de perfis estacionários localizados. Esse comportamento sugere que a dispersão quártica negativa atua como um mecanismo desfavorável à existência de estados ligados nesse tipo de meio, mesmo na presença da não linearidade crescente $g(x) = \cosh^2(x)$.

O resultado obtido nesta etapa estabelece uma restrição importante para o restante do capítulo. A partir desse ponto, todas as análises serão desenvolvidas exclusivamente para valores não negativos de β_4 , investigando como sua intensidade influencia as propriedades estruturais e

a estabilidade das soluções estacionárias.

4.4 Perfis estacionários

Após estabelecer o intervalo de valores de β_4 para os quais existem soluções localizadas, passa-se à análise de suas propriedades estruturais. Nesta seção são comparados os perfis estacionários obtidos para diferentes regimes de dispersão de segunda ordem, buscando compreender de que maneira a dispersão de quarta ordem modifica a forma espacial das soluções.

As soluções estacionárias foram calculadas para cinco modos distintos, correspondentes ao estado fundamental ($n = 0$) e aos quatro primeiros estados excitados ($n = 1, 2, 3, 4$). Em todos os casos, a potência total foi mantida constante ($N = 1$), permitindo comparar diretamente as alterações produzidas exclusivamente pela variação do coeficiente de dispersão de quarta ordem.

Para evidenciar a influência desse parâmetro, foram selecionados valores representativos de β_4 em cada regime dispersivo. Nos casos em que $\beta_2 = -1$ e $\beta_2 = 1$, consideraram-se os valores $\beta_4 = 0, 1$ e 10 , enquanto no regime puramente quártico ($\beta_2 = 0$) utilizaram-se $\beta_4 = 0.1, 1$ e 10 , uma vez que a ausência completa da dispersão de quarta ordem eliminaria todos os mecanismos dispersivos lineares do modelo.

As Figs. 4.1, 4.2 e 4.3 apresentam os perfis estacionários obtidos para os três regimes de dispersão considerados.

Observa-se inicialmente que, independentemente do regime dispersivo, o aumento da dispersão de quarta ordem modifica significativamente a distribuição espacial das soluções. Em todos os modos analisados ocorre uma redução gradual da amplitude máxima acompanhada por um aumento da largura espacial, indicando que a dispersão quártica tende a favorecer o espalhamento da função de onda.

Embora essa tendência geral seja comum aos três regimes, existem diferenças importantes na forma como ela se manifesta. No regime de dispersão anômala ($\beta_2 = -1$), o aumento de β_4 produz uma redução praticamente monotônica da localização das soluções. Todos os modos preservam sua estrutura nodal, porém tornam-se progressivamente mais largos e apresentam menor amplitude de pico.

Quando a dispersão de segunda ordem é removida ($\beta_2 = 0$), o termo de quarta ordem passa a ser o único responsável pela dinâmica dispersiva do sistema. Apesar dessa diferença fundamental, observa-se um comportamento qualitativamente semelhante ao caso anterior: o

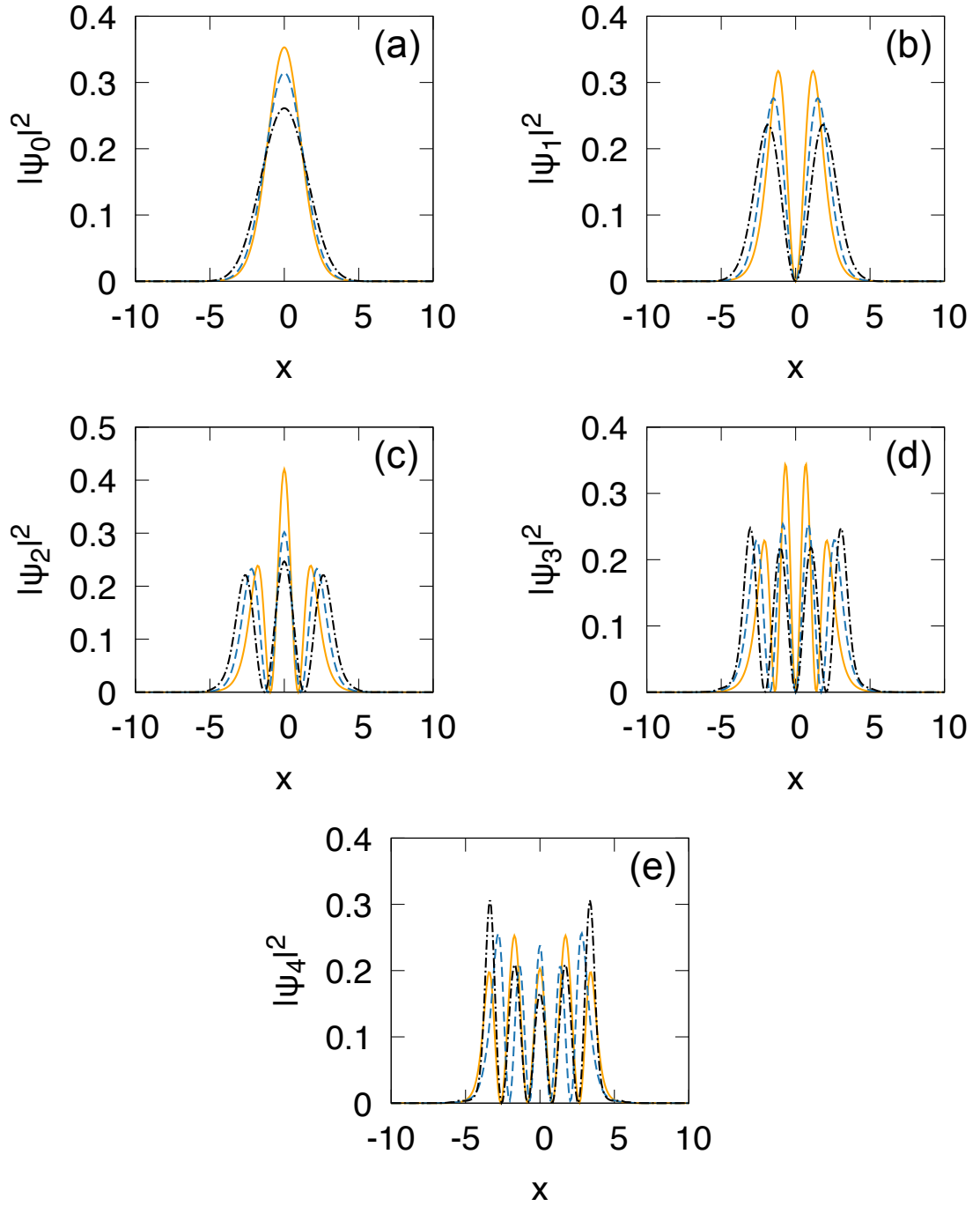


Figura 4.1: Perfis localizados estacionários $|\psi(x)|^2$ calculados para $\beta_2 = -1$ e diferentes valores do coeficiente de dispersão de quarta ordem: $\beta_4 = 0$ (linha sólida laranja), $\beta_4 = 1$ (linha tracejada azul) e $\beta_4 = 10$ (linha tracejada e pontilhada preta). Cada painel corresponde a uma solução distinta: (a) modo fundamental ($n = 0$); (b) modo com 1 nó; (c) modo com 2 nós; (d) modo com 3 nós; e (e) modo com 4 nós. Os painéis ilustram como o aumento de β_4 modifica a estrutura espacial e o grau de localização de cada modo.

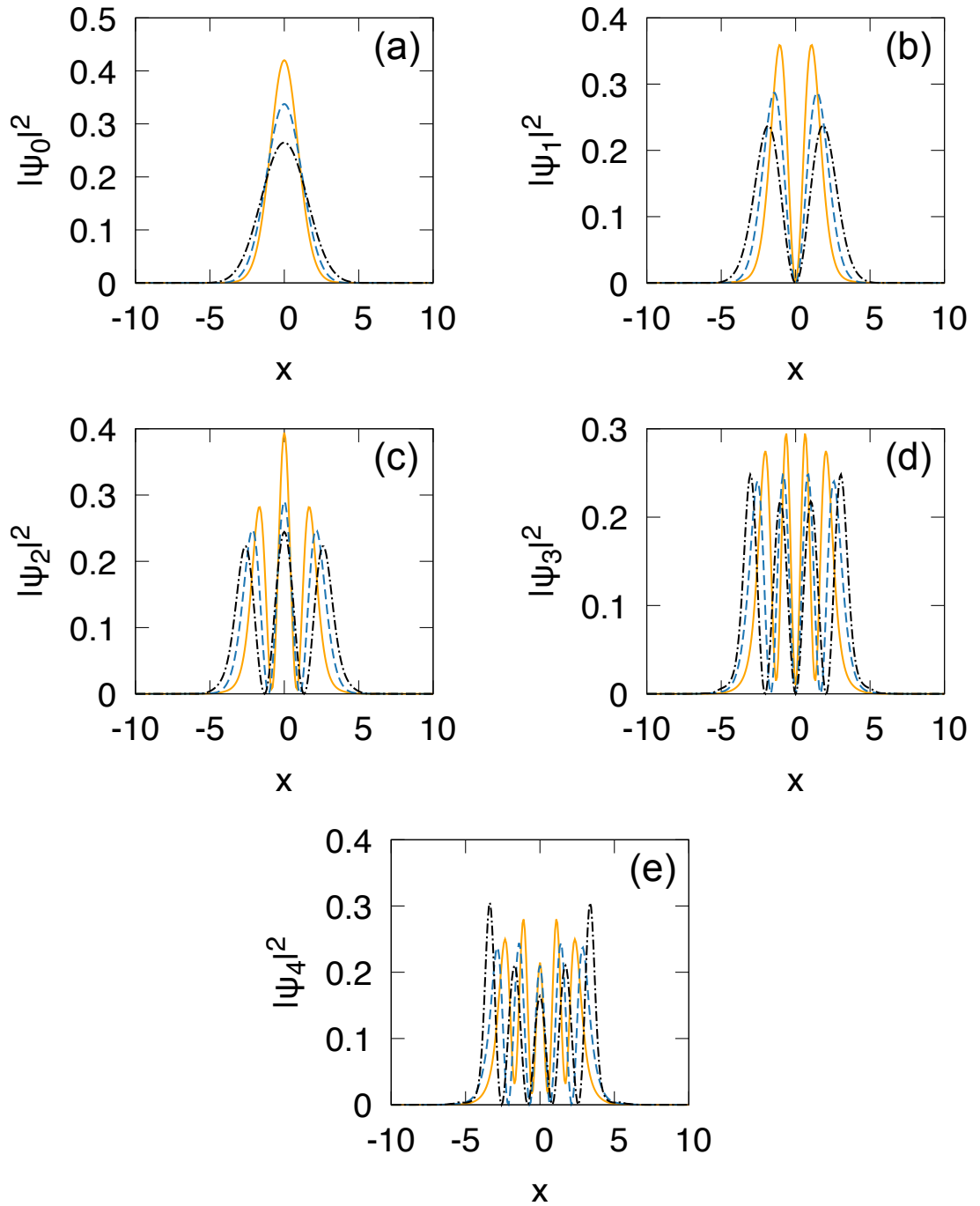


Figura 4.2: Perfis localizados estacionários $|\psi(x)|^2$ calculados para $\beta_2 = 0$ e diferentes valores do coeficiente de dispersão de quarta ordem: $\beta_4 = 0.1$ (linha sólida laranja), $\beta_4 = 1$ (linha tracejada azul) e $\beta_4 = 10$ (linha tracejada e pontilhada preta). Cada painel corresponde a uma solução distinta: (a) modo fundamental ($n = 0$); (b) modo com 1 nó; (c) modo com 2 nós; (d) modo com 3 nós; e (e) modo com 4 nós.

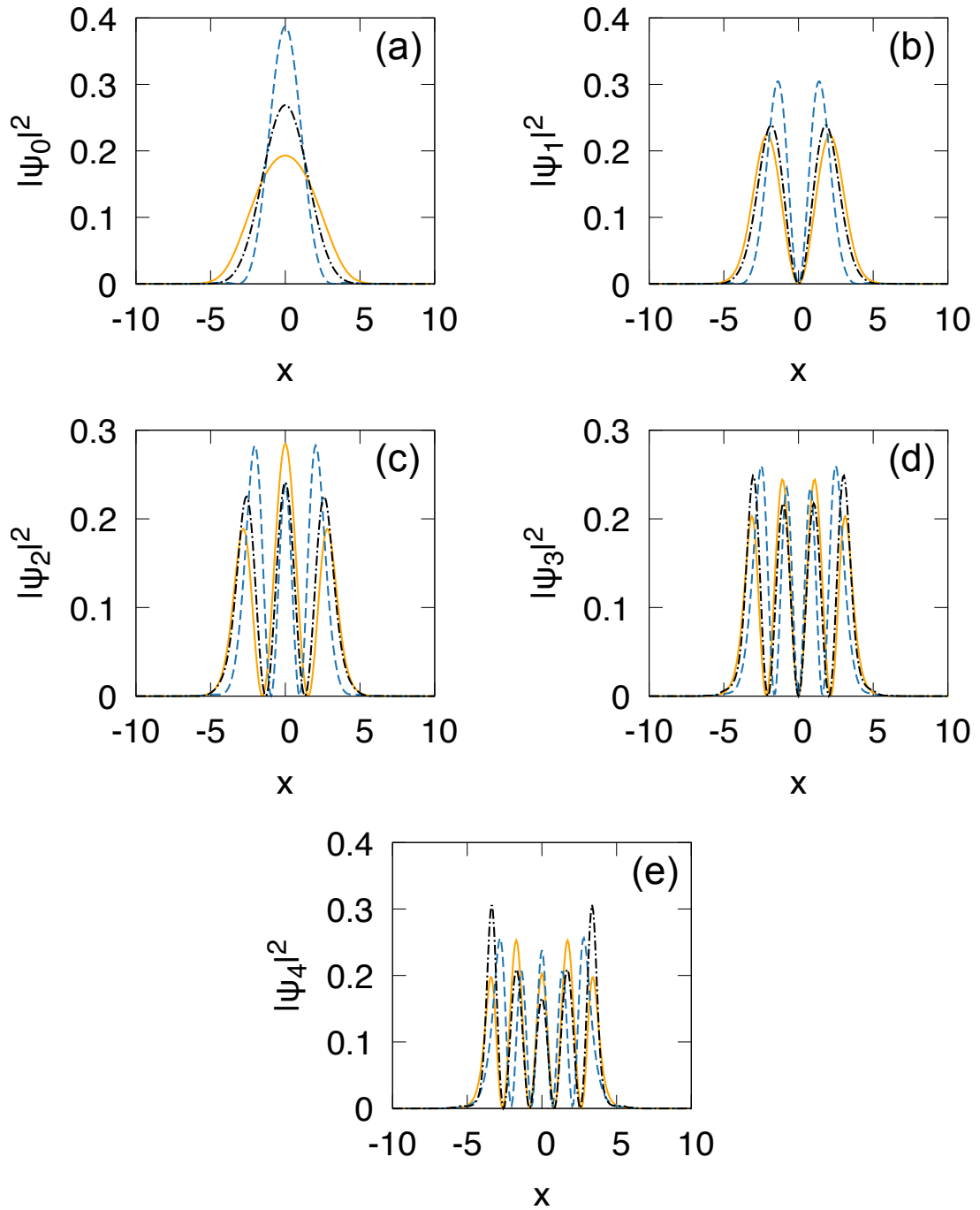


Figura 4.3: Perfis localizados estacionários $|\psi(x)|^2$ calculados para $\beta_2 = +1$ e diferentes valores do coeficiente de dispersão de quarta ordem: $\beta_4 = 0$ (linha sólida laranja), $\beta_4 = 1$ (linha tracejada azul) e $\beta_4 = 10$ (linha tracejada e pontilhada preta). Cada painel corresponde a uma solução distinta: (a) modo fundamental ($n = 0$); (b) modo com 1 nó; (c) modo com 2 nós; (d) modo com 3 nós; e (e) modo com 4 nós.

crescimento de β_4 promove a diminuição da amplitude das soluções e aumenta sua extensão espacial. Entretanto, como toda a dispersão do sistema passa a depender exclusivamente do termo quártico, essas modificações tornam-se mais pronunciadas.

O comportamento mais interessante ocorre no regime de dispersão normal ($\beta_2 = +1$). Diferentemente dos casos anteriores, as alterações produzidas por β_4 deixam de ser monotônicas. Para valores pequenos e intermediários da dispersão de quarta ordem, observa-se inicialmente um aumento do confinamento espacial das soluções, acompanhado por um crescimento da amplitude máxima. Somente para valores mais elevados de β_4 a tendência de deslocalização passa a predominar, produzindo novamente perfis mais largos e menos intensos.

Esse resultado evidencia uma competição direta entre os mecanismos dispersivos de segunda e quarta ordem. Enquanto no regime anômalo ambos contribuem de maneira semelhante para a dinâmica do sistema, na dispersão normal ocorre uma interação mais complexa entre esses dois termos, originando um comportamento não monotônico que não aparece nos demais casos.

Outro aspecto importante observado nas três figuras é a preservação da estrutura topológica das soluções. Em todos os regimes, o número de nós permanece inalterado à medida que β_4 varia, indicando que a dispersão de quarta ordem modifica principalmente as propriedades quantitativas dos perfis, como largura e amplitude, sem alterar sua classificação modal.

Os resultados apresentados nesta seção mostram que a dispersão de quarta ordem influencia significativamente a geometria das soluções estacionárias. Entretanto, a inspeção visual dos perfis não permite quantificar essas modificações de forma precisa. Para isso, torna-se necessário analisar grandezas capazes de caracterizar objetivamente o grau de localização das soluções. Essa análise será realizada na próxima seção por meio do estudo da amplitude máxima e da variância espacial.

4.5 Influência da dispersão de quarta ordem sobre a localização das soluções

A análise qualitativa dos perfis estacionários mostrou que a dispersão de quarta ordem modifica significativamente a forma espacial das soluções localizadas. Entretanto, para caracterizar essas alterações de maneira objetiva, torna-se necessário utilizar grandezas quantitativas capazes de descrever o grau de confinamento das soluções.

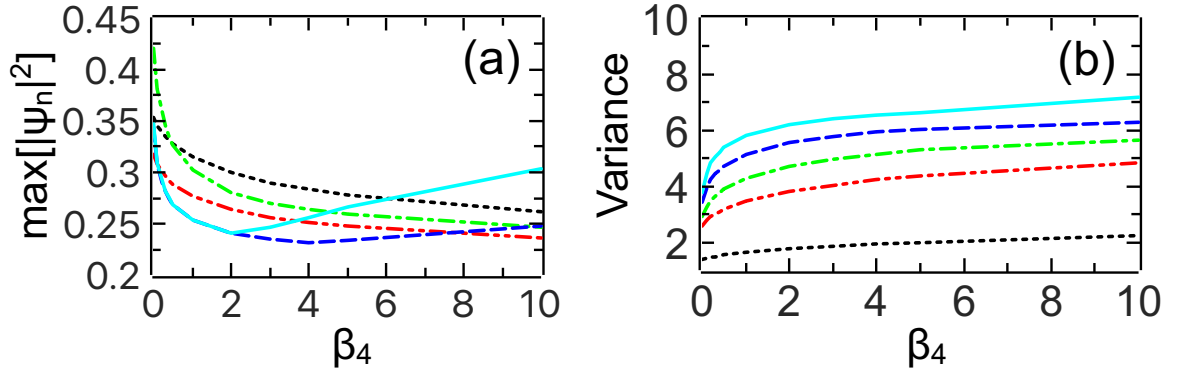


Figura 4.4: (a) Amplitude máxima $\max(|\psi_n|^2)$ e (b) variância espacial em função do coeficiente de dispersão de quarta ordem β_4 , para modos localizados com número crescente de nós $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Cada curva corresponde a um modo nodal diferente: $n = 0$ (linha pontilhada preta), $n = 1$ (linha vermelho tracejada com pontos duplos), $n = 2$ (linha verde tracejada e pontilhada), $n = 3$ (linha azul tracejada) e $n = 4$ (linha contínua ciano). Em ambos os casos usamos $\beta_2 = -1$.

Neste trabalho, a influência da dispersão de quarta ordem é avaliada por meio da amplitude máxima da função de onda e da variância espacial,

$$\sigma^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\phi(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x)|^2 dx},$$

que fornece uma medida direta da largura efetiva da solução. Enquanto a amplitude máxima indica o grau de concentração da função de onda na região central, a variância permite quantificar sua extensão espacial. A análise simultânea dessas duas grandezas fornece uma descrição mais completa dos efeitos produzidos pela dispersão de quarta ordem.

As Figs. 4.4, 4.5 e 4.6 apresentam, respectivamente, a evolução da amplitude máxima e da variância para os diferentes modos estacionários obtidos nos três regimes dispersivos considerados.

Observa-se inicialmente que o comportamento da amplitude depende diretamente do regime de dispersão de segunda ordem.

No regime de dispersão anômala ($\beta_2 = -1$), o aumento de β_4 provoca uma redução gradual da amplitude máxima em todos os modos estacionários. Esse comportamento é acompanhado por um aumento correspondente da variância espacial, indicando que as soluções tornam-se progressivamente menos localizadas à medida que a dispersão de quarta ordem se intensifica.

Esse resultado está de acordo com a interpretação física discutida anteriormente. O fortalecimento da dispersão quartica aumenta a tendência ao espalhamento espacial da função

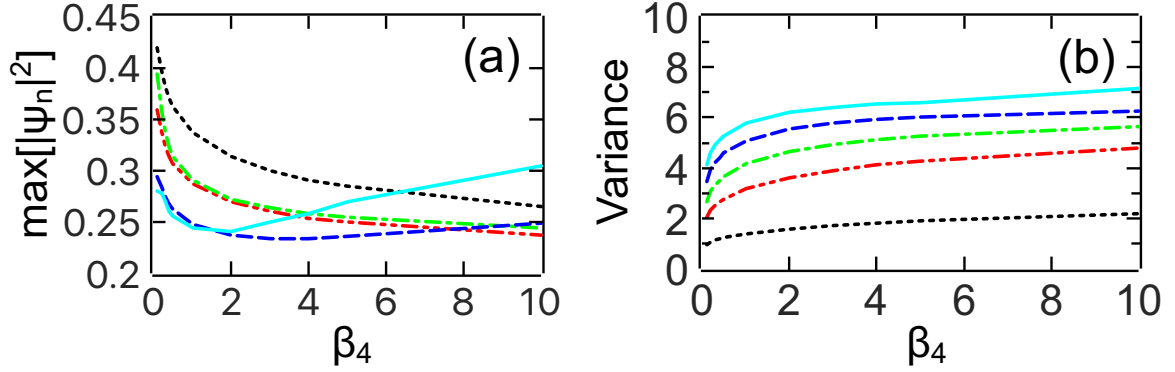


Figura 4.5: (a) Amplitude máxima $\max(|\psi_n|^2)$ e (b) variância espacial em função do coeficiente de dispersão de quarta ordem β_4 , para modos localizados com número crescente de nós $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Cada curva corresponde a um modo nodal diferente: $n = 0$ (linha pontilhada preta), $n = 1$ (linha vermelha tracejada com pontos duplos), $n = 2$ (linha verde tracejada e pontilhada), $n = 3$ (linha azul tracejada) e $n = 4$ (linha contínua ciano). Em ambos os casos usamos $\beta_2 = 0$.

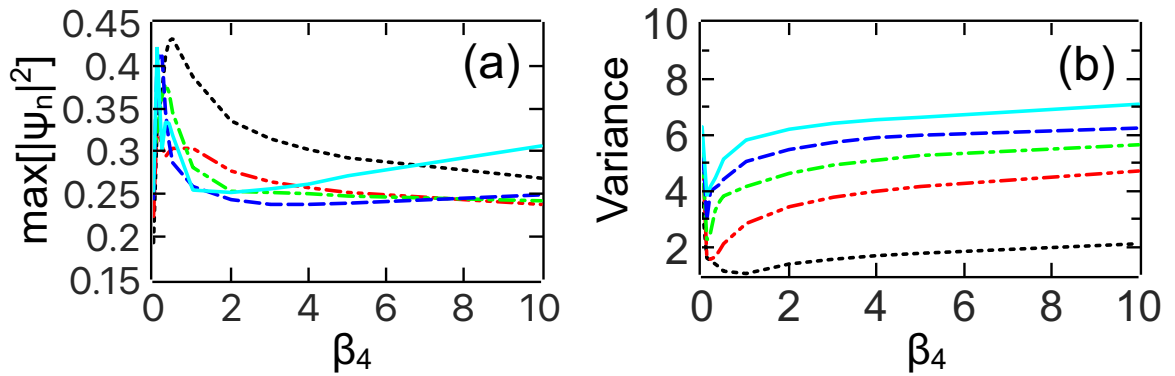


Figura 4.6: (a) Amplitude máxima $\max(|\psi_n|^2)$ e (b) variância espacial em função do coeficiente de dispersão de quarta ordem β_4 , para modos localizados com número crescente de nós $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Cada curva corresponde a um modo nodal diferente: $n = 0$ (linha pontilhada preta), $n = 1$ (linha vermelha tracejada com pontos duplos), $n = 2$ (linha verde tracejada e pontilhada), $n = 3$ (linha azul tracejada) e $n = 4$ (linha contínua ciano). Em ambos os casos usamos $\beta_2 = +1$.

de onda, reduzindo a concentração de energia na região central e produzindo perfis mais largos.

O mesmo comportamento geral é observado no regime puramente quártico ($\beta_2 = 0$). Embora a dispersão de quarta ordem seja agora o único mecanismo dispersivo presente no sistema, verifica-se novamente uma diminuição monotônica da amplitude acompanhada pelo crescimento da variância. A ausência da dispersão de segunda ordem torna essa dependência ainda mais evidente, uma vez que todas as modificações estruturais passam a ser determinadas exclusivamente pelo coeficiente β_4 .

Em contraste, o regime de dispersão normal ($\beta_2 = +1$) apresenta uma resposta significativamente diferente. Para pequenos valores de β_4 , observa-se inicialmente um aumento da amplitude máxima das soluções, acompanhado por uma redução da variância espacial. Isso indica que a introdução de uma pequena contribuição de dispersão quartica favorece um maior confinamento da função de onda.

Entretanto, esse comportamento não se mantém para valores elevados de β_4 . À medida que a intensidade da dispersão de quarta ordem continua aumentando, a amplitude passa a diminuir e a variância volta a crescer, reproduzindo a tendência observada nos demais regimes. Como consequência, tanto a amplitude quanto a largura das soluções apresentam uma dependência não monotônica em relação ao coeficiente de dispersão de quarta ordem.

Essa diferença evidencia que o comportamento do sistema não depende apenas da intensidade de β_4 , mas também da forma como esse termo interage com a dispersão de segunda ordem. Nos regimes anômalo e puramente quártico, os mecanismos dispersivos atuam de maneira relativamente uniforme, produzindo uma evolução monotônica das propriedades estruturais das soluções. Já no regime de dispersão normal, ocorre uma competição entre os termos de segunda e quarta ordem, originando uma resposta mais complexa e resultando em um ponto de máximo confinamento para valores intermediários de β_4 .

Outro aspecto importante observado nas três figuras é que os diferentes estados excitados respondem de maneira qualitativamente semelhante às variações da dispersão de quarta ordem. Embora apresentem amplitudes e larguras distintas, todos preservam a mesma tendência geral dentro de cada regime dispersivo. Isso indica que o efeito de β_4 constitui uma propriedade global do modelo e não uma característica específica de um determinado modo estacionário.

Os resultados apresentados nesta seção demonstram que a dispersão de quarta ordem controla diretamente o grau de localização das soluções estacionárias. Contudo, as modificações observadas na forma espacial das soluções também afetam sua constante de propagação, cuja

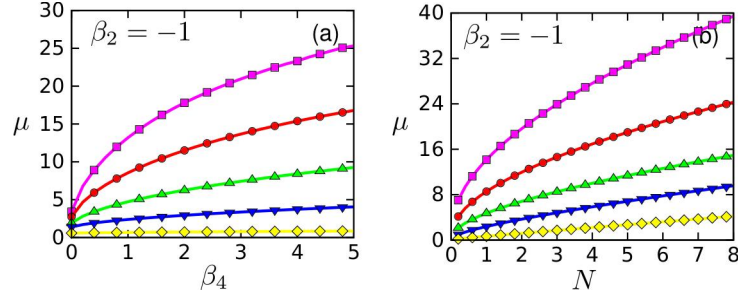


Figura 4.7: A constante de propagação μ em função de (a) β_4 e (b) N . Os resultados obtidos a partir da Eq. 4.1 são representados por losangos (amarelo), triângulos invertidos (azul), triângulos (verde), círculos (vermelho) e quadrados (magenta), correspondentes aos estados $\psi_n(x,t)$, com $n = 0, 1, 2, 3$ e 4 , respectivamente. Os demais parâmetros são: (a) $N = 1$ e (b) $\beta_4 = 1$.

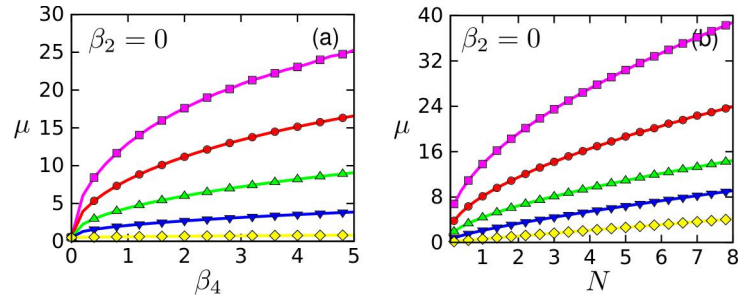


Figura 4.8: O mesmo da Fig. 4.7, porém para $\beta_2 = 0$.

dependência com o coeficiente β_4 será analisada na próxima seção.

4.6 Constante de propagação das soluções estacionárias

Além das alterações observadas na forma espacial das soluções, a dispersão de quarta ordem também modifica a constante de propagação associada aos estados estacionários. Essa grandeza desempenha papel fundamental na caracterização espectral das soluções, uma vez que determina a fase acumulada durante a propagação e está diretamente relacionada ao equilíbrio entre os mecanismos dispersivos e não lineares presentes no sistema.

Após a obtenção dos perfis estacionários, calculou-se a constante de propagação μ para diferentes valores do coeficiente de dispersão de quarta ordem, considerando os cinco modos analisados neste trabalho. Os resultados correspondentes aos três regimes dispersivos são apresentados nas Figs 4.7, 4.8 e 4.9.

As curvas mostram que a dependência de μ em relação à dispersão de quarta ordem varia significativamente conforme o regime determinado pelo coeficiente β_2 .

No regime de dispersão anômala ($\beta_2 = -1$), observa-se que a constante de propagação

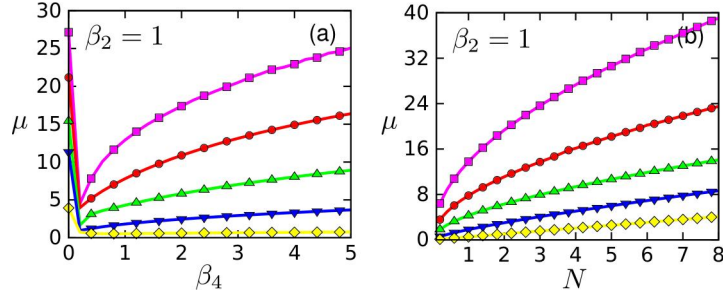


Figura 4.9: O mesmo das Figs. 4.7 e 4.8, porém para $\beta_2 = 1$.

aumenta continuamente com o crescimento de β_4 . Esse comportamento ocorre para todos os estados estacionários considerados, indicando que o fortalecimento da dispersão quartica altera progressivamente o equilíbrio entre os termos lineares e não lineares da equação governante.

Esse aumento de μ acompanha as modificações estruturais discutidas na seção anterior. À medida que a dispersão de quarta ordem modifica a estrutura espacial das soluções, torna-se necessário um novo valor da constante de propagação para satisfazer a condição de equilíbrio da equação estacionária.

No regime puramente quártico ($\beta_2 = 0$), verifica-se uma tendência semelhante. A constante de propagação também cresce monotonicamente com o aumento de β_4 , embora a taxa de crescimento apresente diferenças quantitativas em relação ao caso anterior. Como toda a dispersão do sistema é determinada exclusivamente pelo termo de quarta ordem, pequenas variações desse coeficiente produzem alterações mais pronunciadas na estrutura espectral das soluções.

Em contraste, o comportamento observado para o regime de dispersão normal ($\beta_2 = +1$) é significativamente diferente. Nesse caso, a constante de propagação apresenta uma evolução não monotônica, refletindo a mesma competição entre os termos dispersivos que já havia sido identificada na análise da amplitude e da variância.

Para valores reduzidos de β_4 , observa-se inicialmente uma rápida variação de μ , associada ao aumento do confinamento espacial das soluções. Entretanto, à medida que a dispersão quartica continua aumentando, essa tendência torna-se gradualmente menos intensa, indicando que o sistema passa a um novo regime dominado pelos efeitos de espalhamento induzidos pelo termo de quarta ordem.

Essa diferença evidencia novamente que a resposta do sistema depende não apenas da intensidade da dispersão quartica, mas também da maneira como ela interage com a dispersão convencional de segunda ordem. Nos regimes $\beta_2 = -1$ e $\beta_2 = 0$, os efeitos produzidos por β_4 manifestam-se de forma essencialmente monotônica. Já para $\beta_2 = +1$, a competição entre os

dois mecanismos dispersivos produz uma resposta mais rica, caracterizada por uma dependência não linear da constante de propagação.

Outro aspecto relevante observado nas três figuras é que todos os estados estacionários preservam a mesma tendência qualitativa de evolução de μ . As diferenças entre os diversos modos aparecem principalmente nos valores absolutos da constante de propagação, enquanto a influência exercida pela dispersão de quarta ordem permanece consistente em toda a família de soluções.

Além da dependência da constante de propagação com o coeficiente de dispersão de quarta ordem, também foi analisada sua variação em função da potência total N , conforme mostrado nas Figs. 4.7(b), 4.8(b) e 4.9(b). Em todos os regimes dispersivos considerados, observa-se que a constante de propagação cresce monotonicamente com o aumento da potência para todos os estados estacionários. Esse comportamento indica que soluções mais energéticas requerem valores mais elevados de μ para satisfazer a condição de equilíbrio da equação estacionária. Embora os diferentes modos apresentem valores absolutos distintos de μ , a tendência qualitativa permanece praticamente inalterada, evidenciando que a dependência da constante de propagação com a potência é uma característica comum de toda a família de soluções.

Os resultados apresentados nesta seção mostram que a dispersão de quarta ordem modifica simultaneamente as propriedades espaciais e espectrais das soluções estacionárias. Entretanto, para que essas soluções possuam relevância física, é necessário verificar se permanecem estáveis quando submetidas a pequenas perturbações. Essa análise será realizada na próxima seção por meio de simulações em tempo real.

4.7 Estabilidade dinâmica das soluções estacionárias

A obtenção de soluções estacionárias constitui apenas a primeira etapa da análise. Para que essas soluções possuam relevância física, é necessário verificar se elas permanecem preservadas quando submetidas a pequenas perturbações. Em sistemas descritos pela equação de Schrödinger não linear, estados matematicamente bem definidos nem sempre correspondem a configurações observáveis experimentalmente, uma vez que perturbações inevitáveis podem provocar sua deformação ou mesmo sua completa destruição durante a evolução temporal.

Com o objetivo de investigar esse aspecto, foram realizadas simulações em tempo real utilizando como condição inicial as soluções estacionárias obtidas pelo método de propagação

em tempo imaginário. Para testar a robustez dessas soluções, adicionou-se uma perturbação aleatória correspondente a 5% da amplitude da função de onda. A evolução temporal foi então acompanhada durante um intervalo suficientemente longo para identificar possíveis processos de instabilidade.

As Figuras 4.10, 4.11 e 4.12 apresentam exemplos da evolução temporal dos diferentes modos estacionários para os três regimes dispersivos considerados.

Observa-se inicialmente que os estados fundamentais ($n = 0$) permanecem praticamente inalterados durante toda a propagação, independentemente do valor de β_2 . Mesmo após a introdução da perturbação inicial, a distribuição espacial da função de onda conserva sua forma original, apresentando apenas pequenas oscilações em torno da configuração estacionária. Esse comportamento caracteriza a estabilidade dinâmica dessas soluções.

Resultado semelhante é observado para o primeiro estado excitado ($n = 1$). Embora esse modo possua uma estrutura espacial mais complexa devido à presença de um nó central, sua evolução temporal também permanece limitada a pequenas oscilações, sem qualquer evidência de crescimento das perturbações introduzidas inicialmente. Isso indica que o primeiro estado excitado também pertence ao conjunto de soluções dinamicamente estáveis do sistema.

O comportamento dos modos superiores difere significativamente daquele observado para os dois primeiros estados. As simulações mostram que os estados correspondentes a ($n \geq 2$) desenvolvem instabilidades durante a evolução temporal, perdendo gradualmente sua estrutura inicial. Dependendo do regime dispersivo considerado, essas instabilidades manifestam-se através da deformação progressiva do perfil espacial, da emissão de pequenas oscilações ou da reorganização da solução para estados de menor energia.

Esse comportamento pode ser compreendido considerando a estrutura nodal dos diferentes modos estacionários. À medida que o número de nós aumenta, a solução passa a apresentar maior energia interna e torna-se mais sensível à amplificação de perturbações numéricas ou físicas. Como consequência, estados altamente excitados tendem a perder estabilidade mais facilmente do que os modos de menor ordem.

Outro aspecto importante revelado pelas simulações é que a introdução da dispersão de quarta ordem modifica quantitativamente a dinâmica da evolução temporal, mas não altera a hierarquia de estabilidade dos modos estacionários. Em todos os regimes analisados, o estado fundamental permanece estável, enquanto os modos de ordem superior apresentam comportamento instável. Isso indica que a dispersão de quarta ordem influencia principalmente a forma

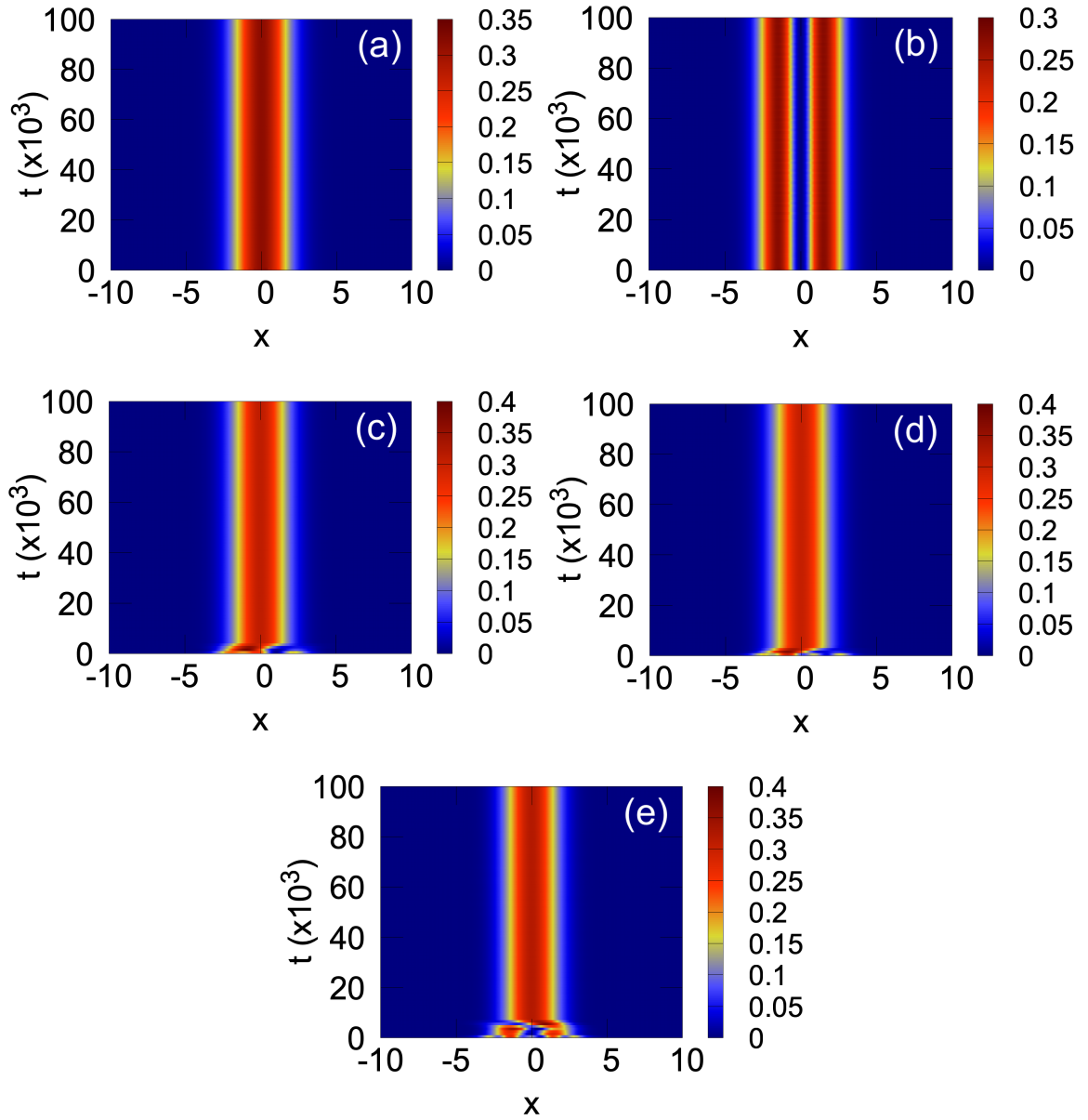


Figura 4.10: Simulação numérica direta dos modos localizados sob uma perturbação aleatória de 5% na amplitude. Os painéis (a)–(e) mostram a evolução espaço-temporal da densidade $|\psi_n(x,t)|^2$ para modos com $n = 0, 1, 2, 3$ e 4 nós, respectivamente. Os parâmetros utilizados em todas as simulações são $\beta_2 = -1$ (Caso I) e $\beta_4 = 1$.

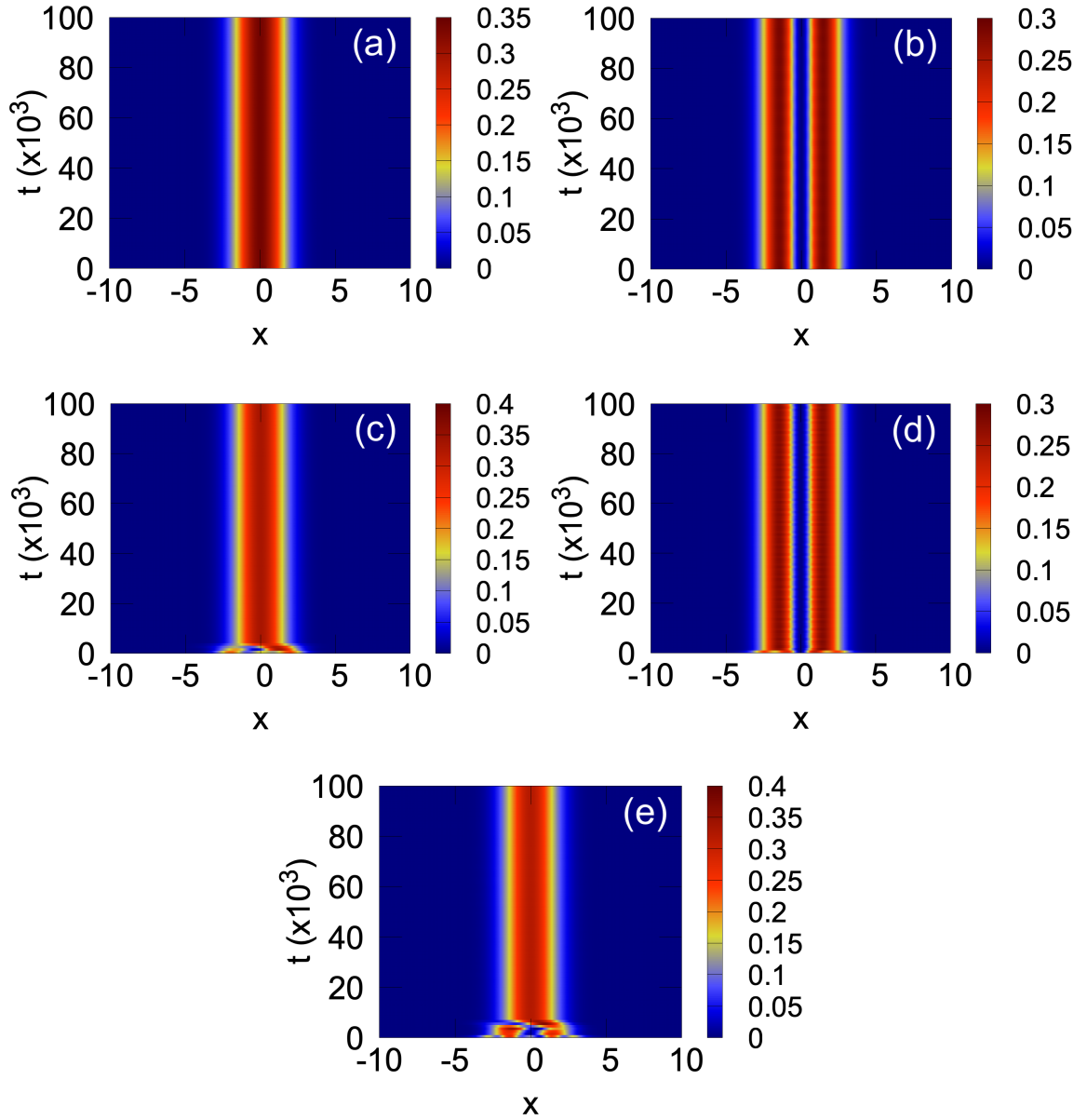


Figura 4.11: Simulação numérica direta dos modos localizados sob uma perturbação aleatória de 5% na amplitude. Os painéis (a)–(e) mostram a evolução espaço-temporal da densidade $|\psi_2(x,t)|^2$ para modos com $n = 0, 1, 2, 3$ e 4 nós, respectivamente. Os parâmetros utilizados em todas as simulações são $\beta_2 = 0$ (Caso II) e $\beta_4 = 1$.

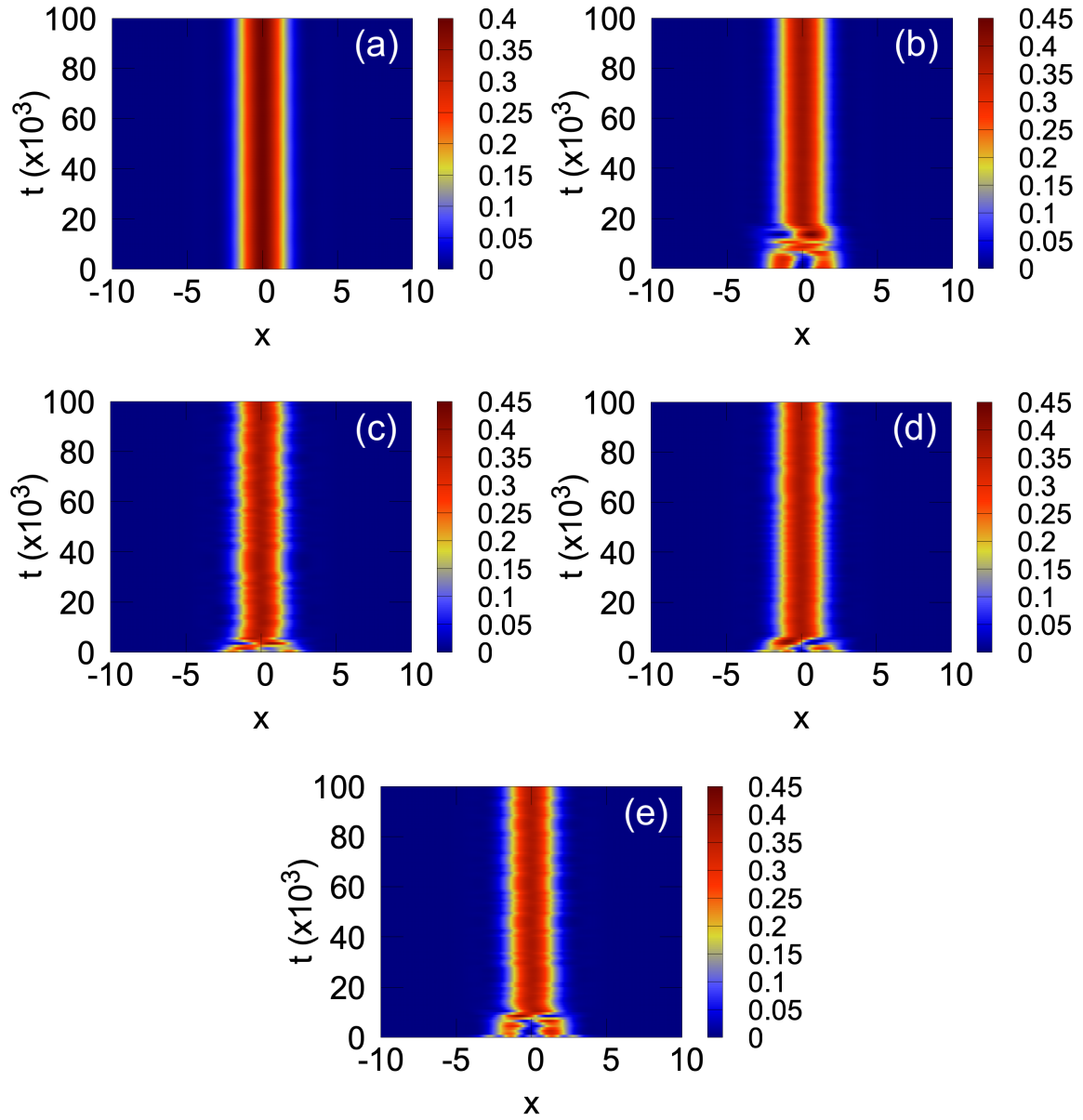


Figura 4.12: Simulação numérica direta dos modos localizados sob uma perturbação aleatória de 5% na amplitude. Os painéis (a)–(e) mostram a evolução espaço-temporal da densidade $|\psi_n(x,t)|^2$ para modos com $n = 0, 1, 2, 3$ e 4 nós, respectivamente. Os parâmetros utilizados em todas as simulações são $\beta_2 = +1$ (Caso III) e $\beta_4 = 1$.

das soluções e seus parâmetros espectrais, preservando, entretanto, a organização global da estabilidade dinâmica do sistema.

Comparando os três regimes dispersivos, verifica-se que o comportamento qualitativo permanece praticamente inalterado. Apesar das diferenças observadas na amplitude, largura espacial e constante de propagação, a estabilidade dinâmica segue o mesmo padrão geral, sugerindo que essa propriedade está mais fortemente relacionada à estrutura modal das soluções do que ao valor específico dos coeficientes dispersivos.

Os resultados obtidos nesta seção demonstram que apenas o primeiro modo apresenta robustez suficiente para serem considerados candidatos viáveis à observação física. Os estados excitados, embora matematicamente existentes, apresentam instabilidades que limitam sua persistência durante a evolução temporal.

4.8 Conclusões

Neste capítulo foi investigada a influência da dispersão de quarta ordem sobre a formação e as propriedades de estados localizados em uma equação de Schrödinger não linear generalizada com não linearidade espacialmente inhomogênea. Diferentemente dos modelos convencionais, nos quais o confinamento das soluções depende da presença de um potencial externo ou de uma não linearidade focalizante, o modelo considerado utiliza uma não linearidade defocalizante cuja intensidade cresce espacialmente de acordo com o perfil $g(x) = \cosh^2(x)$. Essa configuração permite a existência de estados localizados sustentados exclusivamente pela modulação espacial da resposta não linear.

Inicialmente foi analisada a existência de soluções estacionárias para diferentes valores do coeficiente de dispersão de quarta ordem. As simulações numéricas mostraram que estados localizados foram obtidos apenas para $\beta_4 \geq 0$. Para valores negativos desse parâmetro, o método de propagação em tempo imaginário não convergiu para soluções estacionárias, indicando que, nas condições investigadas, a dispersão quártica negativa não favorece a formação de estados ligados.

A análise dos perfis estacionários mostrou que a dispersão de quarta ordem modifica significativamente a geometria das soluções. Em todos os regimes dispersivos considerados, verificou-se que o aumento de β_4 altera a distribuição espacial da função de onda, embora a intensidade dessas modificações dependa da contribuição da dispersão de segunda ordem. Nos

regimes de dispersão anômala ($\beta_2 = -1$) e puramente quártico ($\beta_2 = 0$), observou-se uma tendência monotônica de redução da amplitude máxima acompanhada pelo aumento da largura espacial das soluções. Em contraste, para o regime de dispersão normal ($\beta_2 = 1$), essa evolução apresentou comportamento não monotônico, evidenciando a competição entre os mecanismos dispersivos de segunda e quarta ordem.

Essas alterações estruturais também se refletiram na constante de propagação das soluções estacionárias. Verificou-se que a dispersão de quarta ordem modifica o equilíbrio entre os termos lineares e não lineares da equação governante, produzindo mudanças sistemáticas na estrutura espectral do sistema. Mais uma vez, o regime de dispersão normal apresentou comportamento distinto dos demais, reforçando a importância da interação entre os diferentes mecanismos dispersivos presentes na equação.

A estabilidade dinâmica das soluções foi investigada por meio de simulações em tempo real utilizando perfis perturbados como condição inicial. Os resultados mostraram que o estado fundamental permanece estável durante toda a evolução temporal, enquanto os modos excitados desenvolveram instabilidades que conduziram à perda gradual de sua estrutura espacial. Esse comportamento foi observado nos três regimes dispersivos analisados, indicando que a estabilidade está fortemente relacionada à estrutura modal das soluções e apenas secundariamente aos valores específicos dos coeficientes de dispersão.

De maneira geral, os resultados apresentados neste capítulo demonstram que a dispersão de quarta ordem exerce influência significativa sobre a existência, a localização, a estrutura espectral e a estabilidade das soluções estacionárias em meios com não linearidade espacialmente inhomogênea. Esses efeitos evidenciam que contribuições dispersivas de ordem superior não devem ser tratadas apenas como correções perturbativas da equação de Schrödinger não linear convencional, mas como mecanismos capazes de modificar qualitativamente as propriedades dos estados localizados.

Os resultados obtidos estabelecem a base para a investigação desenvolvida no capítulo seguinte. Uma vez compreendido o papel da dispersão de quarta ordem na formação e estabilidade das soluções estacionárias, torna-se natural analisar como esses mesmos efeitos influenciam fenômenos coletivos mais complexos. No Capítulo 5, essa questão será abordada através do estudo da quebra espontânea de simetria em um sistema submetido a um potencial simétrico do tipo duplo-poço, permitindo avaliar como a dispersão de quarta ordem modifica os mecanismos de bifurcação e a formação de estados assimétricos.

Capítulo 5

Quebra Espontânea de Simetria em Potencial de Poço Duplo

5.1 Introdução

Conforme discutido na Seção 1.5, a quebra espontânea de simetria constitui um dos fenômenos mais importantes em sistemas descritos pela equação de Schrödinger não linear. Embora esse processo tenha sido amplamente investigado em potenciais de poço duplo e em diferentes sistemas ópticos e de matéria condensada [52–55], a influência específica da dispersão de quarta ordem sobre os diagramas de bifurcação e sobre a estabilidade das soluções permanece relativamente pouco explorada.

A presença da dispersão de quarta ordem modifica o equilíbrio entre dispersão, não linearidade e confinamento, podendo alterar significativamente as condições necessárias para o surgimento de estados assimétricos. Em consequência, espera-se que esse mecanismo influencie tanto o limiar crítico para a quebra espontânea de simetria quanto a estabilidade das diferentes famílias de soluções estacionárias. A compreensão desses efeitos é importante não apenas do ponto de vista fundamental, mas também para o desenvolvimento de estratégias de controle de estados localizados em sistemas ópticos não lineares.

Motivado por essas questões, este capítulo investiga sistematicamente a influência da dispersão de quarta ordem sobre a quebra espontânea de simetria em um sistema descrito pela equação de Schrödinger não linear generalizada contendo um potencial de poço duplo. São analisados os diagramas de bifurcação, a potência crítica para a transição entre estados simétricos e assimétricos, a dependência dos limiares críticos com os parâmetros do sistema e o papel

desempenhado pela dispersão de quarta ordem na estabilidade das soluções.

Os resultados apresentados neste capítulo constituem a segunda parte desta tese e complementam naturalmente o estudo desenvolvido no Capítulo 4. Enquanto o capítulo anterior analisou a influência da dispersão de quarta ordem na formação e na estabilidade de estados localizados em meios com não linearidade espacialmente modulada, o presente capítulo investiga como esse mesmo mecanismo dispersivo modifica os processos de quebra espontânea de simetria em potencial de poço duplo. Dessa forma, obtém-se uma visão mais abrangente do papel desempenhado pela dispersão de quarta ordem em diferentes problemas governados pela equação de Schrödinger não linear generalizada.

Por fim, este capítulo está organizado da seguinte forma. Inicialmente, apresenta-se o modelo matemático utilizado para descrever o sistema. Em seguida, são discutidos o procedimento numérico empregado na construção dos diagramas de bifurcação e os resultados obtidos para diferentes regimes de dispersão e não linearidade. Finalmente, analisam-se os efeitos da dispersão de quarta ordem sobre os limiares de quebra espontânea de simetria e sobre a estabilidade das soluções.

5.2 Modelo matemático

Com o objetivo de investigar a influência da dispersão de quarta ordem sobre os mecanismos de quebra espontânea de simetria, considera-se neste capítulo uma versão generalizada da equação de Schrödinger não linear unidimensional. O modelo adotado inclui simultaneamente os termos dispersivos de segunda e quarta ordem, além de um potencial externo simétrico e de uma não linearidade cúbica do tipo Kerr. A dinâmica do sistema é descrita pela equação

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \beta_2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \beta_4\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} + V(x)\psi + g(x)|\psi|^2\psi, \quad (5.1)$$

onde $\psi(x,t)$ representa a função de onda complexa do sistema, $V(x)$ corresponde ao potencial externo, g é o coeficiente de não linearidade cúbica, enquanto β_2 e β_4 representam os coeficientes associados à dispersão de segunda e quarta ordem, respectivamente.

O termo proporcional a β_2 corresponde à contribuição dispersiva presente na equação de Schrödinger não linear convencional. Dependendo do seu sinal, esse termo pode favorecer ou dificultar os processos de localização espacial. Já o termo associado a β_4 representa os efeitos de dispersão de quarta ordem, cuja influência torna-se relevante em situações nas quais

os mecanismos dispersivos convencionais não são suficientes para descrever adequadamente a dinâmica do sistema.

A contribuição não linear $g(x)|\psi|^2\psi$ descreve uma interação cúbica local do tipo Kerr. Quando $g < 0$, a não linearidade é atrativa e favorece a concentração espacial da função de onda. Em contraste, quando $g > 0$, a interação torna-se repulsiva, dificultando os processos de auto-localização. Como a quebra espontânea de simetria resulta da competição entre confinamento externo e efeitos não lineares, o regime atrativo desempenha papel fundamental na análise desenvolvida neste trabalho.

Para possibilitar a formação de estados simétricos e assimétricos, considera-se um potencial externo do tipo duplo-poço simétrico dado por

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(x+x_0)} - \frac{V_0}{\cosh^2(x-x_0)}.$$

Esse potencial é formado pela superposição de dois poços idênticos localizados em $x = \pm x_0$. O parâmetro V_0 controla a profundidade dos poços, enquanto x_0 determina a distância entre seus centros. Ao longo deste capítulo são adotados os valores $V_0 = 2$, e $x_0 = 2$, os quais produzem uma configuração adequada para a investigação dos fenômenos de bifurcação e quebra espontânea de simetria.

O potencial de poço duplo adotado neste trabalho representa uma idealização teórica amplamente empregada na literatura para descrever sistemas de confinamento simétricos. Embora sua forma analítica seja expressa por funções do tipo sech^2 , perfis de potencial com características equivalentes podem ser obtidos experimentalmente em diferentes sistemas físicos, como condensados de Bose–Einstein confinados por armadilhas ópticas ou magnéticas e estruturas ópticas constituídas por guias de onda acoplados ou redes fotônicas. Nesses sistemas, a engenharia do potencial de confinamento permite produzir dois mínimos de energia espacialmente separados, reproduzindo de maneira aproximada a configuração de poço duplo considerada neste modelo. A escolha desse potencial deve-se não apenas à sua relevância física, mas também às suas propriedades matemáticas, que possibilitam descrever de forma suave e controlada a dinâmica dos estados localizados e dos processos de quebra espontânea de simetria.

A escolha de um potencial duplo-poço é particularmente interessante porque ele permite a coexistência de diferentes configurações estacionárias. Em baixas potências, a solução fundamental tende a distribuir-se de forma aproximadamente uniforme entre os dois poços, preservando a simetria espacial do sistema. Entretanto, à medida que a intensidade dos efeitos

não lineares aumenta, essa configuração pode tornar-se instável, favorecendo a concentração da função de onda em apenas um dos poços. Nesse caso, apesar de a equação governante permanecer simétrica, as soluções deixam de apresentar essa mesma propriedade, caracterizando a ocorrência da quebra espontânea de simetria.

As soluções estacionárias são procuradas na forma:

$$\psi(x, t) = \phi(x)e^{-i\mu t},$$

onde $\phi(x)$ representa o perfil espacial estacionário e μ corresponde ao parâmetro de propagação associado à solução. Substituindo essa expressão na equação dinâmica obtém-se a equação estacionária:

$$\mu\phi = \beta_2 \frac{d^2\phi}{dx^2} + \beta_4 \frac{d^4\phi}{dx^4} + \cosh^2(x)\phi^3.$$

A determinação numérica dessas soluções será realizada por meio do método de propagação em tempo imaginário, descrito no Capítulo 3. Esse procedimento permite calcular tanto estados simétricos quanto estados assimétricos, possibilitando a construção dos diagramas de bifurcação que serão apresentados nas seções seguintes.

Para quantificar o grau de assimetria das soluções obtidas, introduz-se o parâmetro

$$\eta = \frac{P_R - P_L}{P_R + P_L},$$

em que P_R e P_L representam as potências localizadas nas regiões direita e esquerda do domínio espacial, respectivamente,

$$P_R = \int_0^{+\infty} |\phi(x)|^2 dx,$$

$$P_L = \int_{-\infty}^0 |\phi(x)|^2 dx.$$

A potência total da solução é definida por

$$P = P_R + P_L = \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x)|^2 dx.$$

Por construção, $\eta = 0$ corresponde a estados perfeitamente simétricos, enquanto valores não nulos de η indicam soluções espacialmente assimétricas. Dessa forma, o parâmetro η

atua como um parâmetro de ordem capaz de identificar o surgimento da quebra espontânea de simetria e determinar os limiares críticos associados às bifurcações observadas no sistema.

5.3 Procedimento numérico e construção dos diagramas de bifurcação

Para investigar a ocorrência de quebra espontânea de simetria, foram calculadas soluções estacionárias da Eq. (5.1) para diferentes valores dos parâmetros dispersivos e não lineares. A obtenção dessas soluções foi realizada por meio do método de propagação em tempo imaginário, descrito detalhadamente no Capítulo 3. Esse procedimento permite que componentes associadas a estados excitados sejam progressivamente eliminadas durante a evolução numérica, conduzindo o sistema a soluções estacionárias estáveis.

A discretização espacial foi realizada em um domínio suficientemente grande para evitar efeitos de contorno sobre as soluções localizadas. Em todas as simulações, utilizou-se uma malha uniforme, garantindo consistência entre os diferentes resultados apresentados ao longo da tese.

Como o objetivo principal deste capítulo consiste em analisar a quebra espontânea de simetria, tornou-se necessário calcular não apenas estados simétricos, mas também estados assimétricos. Para isso, as iterações foram inicializadas utilizando perfis gaussianos ligeiramente deslocados em relação ao centro do potencial. Esse deslocamento introduz uma pequena perturbação inicial que permite ao algoritmo convergir para soluções preferencialmente localizadas em um dos poços quando tais estados existem.

Mais especificamente, foi utilizado um perfil inicial da forma

$$U(x, 0) = \exp(-(x - \sigma)^2), \quad (5.2)$$

onde o parâmetro σ desloca o centro da função inicial. Neste trabalho consideramos $\sigma = \Delta x$, corresponde ao valor da discretização na direção x . Esse pequeno deslocamento permite a exploração de soluções preferencialmente localizadas em qualquer um dos poços do potencial de poço duplo e facilita a identificação de estados com quebra de simetria.

Após a obtenção das soluções estacionárias, calculou-se o parâmetro de assimetria η , definido na seção anterior. A dependência desse parâmetro em relação à potência total da solu-

ção foi utilizada para construir os diagramas de bifurcação apresentados nas próximas seções. Esses diagramas constituem uma ferramenta fundamental para a identificação da quebra espontânea de simetria. O valor da potência no qual esses ramos surgem define a potência crítica P_c , associada ao limiar de quebra espontânea de simetria.

A partir dessa metodologia, foi possível analisar sistematicamente a influência da dispersão de quarta ordem sobre a estrutura das bifurcações. Em particular, investigou-se como diferentes combinações dos coeficientes β_2 e β_4 modificam a potência crítica, a existência de estados assimétricos e a extensão das regiões de estabilidade. Os resultados obtidos são apresentados e discutidos nas seções seguintes.

5.4 Quebra espontânea de simetria na equação de Schrödinger não linear convencional

Antes de analisar os efeitos produzidos pela dispersão de quarta ordem, é conveniente examinar o comportamento do sistema na ausência desse termo. Nesse caso, a Eq. (5.1) reduz-se à equação de Schrödinger não linear convencional, na qual a dinâmica resulta exclusivamente da competição entre a dispersão de segunda ordem, o potencial externo e a não linearidade cúbica.

O estudo desse regime fornece uma referência importante para a compreensão dos resultados apresentados posteriormente, permitindo identificar quais características do sistema já estão presentes na dinâmica convencional e quais surgem exclusivamente devido à introdução da dispersão de quarta ordem.

Para essa análise foram considerados os parâmetros $\beta_2 = -1$, $g = -1$, $V_0 = 2$ e $x_0 = 2$, correspondendo a um regime de dispersão anômala combinado com uma não linearidade atrativa. Nessas condições, tanto o mecanismo dispersivo quanto a interação não linear favorecem a formação de estados localizados dentro do potencial duplo-poço.

A Fig. 5.1 apresenta o diagrama de bifurcação obtido para esse conjunto de parâmetros. O gráfico mostra a evolução do parâmetro de assimetria η em função da potência total P da solução.

Observa-se que, para baixos valores de potência, a única solução existente corresponde a um estado simétrico caracterizado por $\eta = 0$. Nessa situação, a função de onda distribui-se aproximadamente de forma equilibrada entre os dois poços do potencial, preservando a simetria

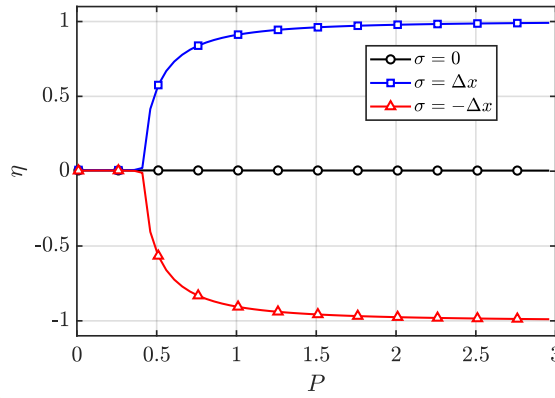


Figura 5.1: Diagrama de bifurcação do parâmetro de assimetria η em função da potência total P para o regime padrão ($\beta_2 = -1$, $\beta_4 = 0$, $g = -1$, $V_0 = 2$). Os ramos representam os estados assimétricos estáveis que emergem de uma bifurcação supercrítica do tipo forquilha (pitchfork) no limiar crítico $P_c \approx 0.45$.

espacial do sistema.

À medida que a potência aumenta, os efeitos não lineares tornam-se progressivamente mais importantes. Como consequência, a distribuição simétrica da solução deixa de representar a configuração energeticamente mais favorável. Quando a potência atinge um valor crítico, ocorre uma mudança qualitativa na estrutura das soluções estacionárias: o ramo simétrico perde estabilidade e surgem dois novos ramos assimétricos equivalentes.

Esse comportamento caracteriza uma bifurcação do tipo pitchfork, um dos mecanismos mais conhecidos de quebra espontânea de simetria em sistemas não lineares. A partir desse ponto crítico, o sistema passa a admitir duas soluções estáveis fisicamente equivalentes. Em uma delas, a maior parte da potência encontra-se concentrada no poço esquerdo, enquanto na outra ocorre a concentração predominante no poço direito.

É importante destacar que a assimetria observada não está associada a qualquer modificação do potencial externo, que permanece rigorosamente simétrico durante toda a análise. A quebra de simetria surge exclusivamente devido aos efeitos não lineares presentes no sistema. Em outras palavras, embora a equação governante possua invariância sob reflexão espacial, as soluções estáveis deixam de apresentar essa propriedade acima da potência crítica.

Fisicamente, esse fenômeno pode ser interpretado como uma competição entre dois mecanismos distintos. O potencial duplo-poço tende a distribuir a função de onda igualmente entre as duas regiões de confinamento, preservando a simetria do sistema. Por outro lado, a não linearidade atrativa favorece a concentração da potência em uma região espacial cada vez menor. Para baixas potências, o confinamento imposto pelo potencial predomina e a solução permanece

simétrica. Entretanto, acima de determinado limiar, os efeitos não lineares tornam-se suficientemente intensos para romper esse equilíbrio, conduzindo à formação de estados assimétricos.

O valor da potência correspondente ao surgimento dos ramos assimétricos define a potência crítica de bifurcação P_c . Para os parâmetros considerados, observa-se que esse limiar ocorre em torno de $P_c \approx 0.45$, valor que será utilizado como referência nas análises subsequentes envolvendo a dispersão de quarta ordem.

A identificação desse comportamento é particularmente importante porque estabelece o cenário básico de quebra espontânea de simetria presente na ESNL convencional. A partir dessa referência torna-se possível investigar de que forma a introdução da dispersão de quarta ordem modifica a posição do ponto crítico, altera a estabilidade das soluções e amplia as regiões de existência dos estados assimétricos.

5.5 Influência da dispersão de quarta ordem nos diagramas de bifurcação

Uma vez estabelecido o comportamento do sistema na ausência da dispersão de quarta ordem, passa-se agora à análise dos efeitos produzidos pela introdução do coeficiente β_4 . O objetivo desta etapa consiste em determinar como os mecanismos de bifurcação são modificados quando contribuições dispersivas de ordem superior passam a atuar simultaneamente com a dispersão convencional de segunda ordem.

Para isso, foram construídos diagramas de bifurcação para diferentes combinações dos parâmetros dispersivos, mantendo-se a não linearidade atrativa ($g = -1$) e o potencial duplo-poço fixo. Os resultados obtidos são apresentados na Fig. 5.2, onde são comparados os diagramas correspondentes à ESNL convencional ($\beta_4 = 0$) com aqueles obtidos na presença da dispersão de quarta ordem ($\beta_4 = 2$).

A Fig. 5.2(a) apresenta os resultados para o regime de dispersão anômala ($\beta_2 = -1$). Conforme discutido na seção anterior, a quebra espontânea de simetria já está presente mesmo quando $\beta_4 = 0$. Entretanto, observa-se que a introdução da dispersão de quarta ordem desloca o ponto de bifurcação para valores maiores da potência total.

Esse resultado indica que a presença de β_4 dificulta o aparecimento dos estados assimétricos. Em outras palavras, a dispersão de quarta ordem atua como um mecanismo estabilizador da configuração simétrica, exigindo uma intensidade não linear mais elevada para que a quebra

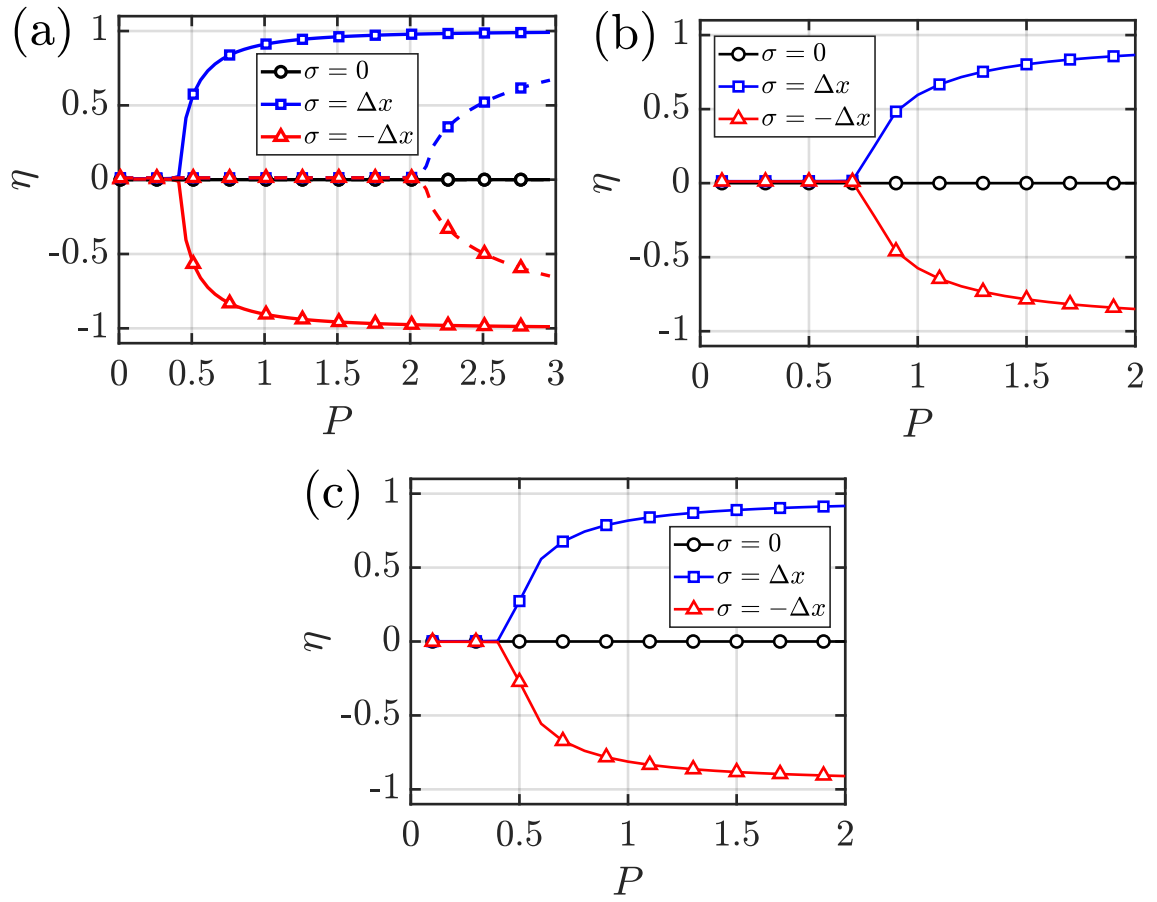


Figura 5.2: Diagramas de bifurcação da taxa de assimetria η em função da potência P para $g = -1$ e diferentes valores β_2 : (a) $\beta_2 = -1$, (b) $\beta_2 = 0$ e (c) $\beta_2 = 1$. A inclusão da dispersão de quarta ordem desloca o limiar de bifurcação no caso (a) e induz a quebra espontânea de simetria nos casos (b) e (c), onde ela está ausente no modelo padrão.

de simetria ocorra. Embora a estrutura global da bifurcação permaneça do tipo pitchfork, o valor da potência crítica aumenta significativamente.

Fisicamente, esse comportamento pode ser compreendido observando-se que o termo de quarta ordem introduz um mecanismo adicional de espalhamento espacial da solução. Como consequência, torna-se mais difícil para a não linearidade concentrar a função de onda em apenas um dos poços, retardando o processo de localização responsável pela quebra espontânea de simetria.

Uma situação bastante distinta é observada nos casos $\beta_2 = 0$ e $\beta_2 = 1$, apresentados nas Fig. 5.2(b) e 5.2(c). Na ausência da dispersão de quarta ordem, não são observadas bifurcações dentro da faixa de potências analisada. As soluções permanecem simétricas para todos os valores considerados, indicando que a interação entre o potencial duplo-poço e a não linearidade não é suficiente para provocar a quebra espontânea de simetria.

Entretanto, quando o termo dispersivo de quarta ordem é introduzido, o cenário muda drasticamente. Em ambos os casos surgem novos ramos assimétricos acima de uma determinada potência crítica, caracterizando a ocorrência de bifurcações que não existem na versão convencional do modelo.

Esse resultado demonstra que a dispersão de quarta ordem não atua apenas como uma correção quantitativa da dinâmica. Pelo contrário, ela modifica qualitativamente a estrutura das soluções estacionárias, permitindo o aparecimento de estados assimétricos em regiões do espaço de parâmetros onde a ESNL convencional prevê apenas soluções simétricas.

Particularmente interessante é o caso $\beta_2 = 0$, no qual a dispersão de quarta ordem passa a ser o único mecanismo dispersivo presente no sistema. Nessa situação, a quebra espontânea de simetria observada na Fig. 5.2(b) constitui uma consequência direta dos efeitos associados à dispersão quartica. Esse resultado evidencia que mecanismos de bifurcação podem surgir mesmo na ausência completa da dispersão convencional de segunda ordem.

Por outro lado, para $\beta_2 = 1$, a dispersão de segunda ordem atua em um regime distinto daquele observado para $\beta_2 = -1$. Ainda assim, a presença de β_4 torna possível o surgimento de estados assimétricos, mostrando que a dispersão de quarta ordem amplia significativamente a região de existência da quebra espontânea de simetria.

De forma geral, os resultados da Fig. 5.2 revelam dois efeitos fundamentais produzidos pela dispersão de quarta ordem. O primeiro consiste no deslocamento dos limiares críticos de bifurcação quando a quebra espontânea de simetria já existe na dinâmica convencional. O

segundo, ainda mais relevante, corresponde ao aparecimento de novos regimes de bifurcação em situações nas quais nenhuma quebra de simetria seria observada na ausência de β_4 .

Essas observações indicam que a dispersão de quarta ordem exerce influência direta sobre o equilíbrio entre confinamento linear e auto-localização não linear. Como consequência, a inclusão desse termo amplia significativamente o conjunto de parâmetros para os quais estados assimétricos podem existir, tornando-se um mecanismo eficiente de controle dos processos de quebra espontânea de simetria.

5.6 Dependência da potência crítica com a intensidade da não linearidade

Os diagramas de bifurcação apresentados na seção anterior demonstram que a dispersão de quarta ordem modifica significativamente o surgimento dos estados assimétricos. Entretanto, para compreender de forma mais quantitativa esse efeito, é necessário analisar como a potência crítica de bifurcação depende da intensidade da não linearidade presente no sistema.

Com esse objetivo, foi calculado o valor da potência crítica P_c para diferentes valores do coeficiente não linear g , mantendo-se $\beta_4 = 2$ fixo. Os resultados obtidos para os três regimes dispersivos considerados são apresentados na Fig. 5.3.

Observa-se inicialmente que, para todos os regimes analisados, a potência crítica aumenta à medida que o módulo da não linearidade diminui. Em outras palavras, quanto mais fraca se torna a interação atrativa, maior deve ser a potência total da solução para que ocorra a quebra espontânea de simetria.

Esse comportamento possui uma interpretação física direta. A origem da quebra espontânea de simetria está associada à capacidade da não linearidade atrativa de concentrar a função de onda em uma das regiões do potencial duplo-poço. Quando a intensidade da interação é elevada, esse processo ocorre com relativa facilidade, permitindo o aparecimento de estados assimétricos mesmo para potências moderadas. Por outro lado, quando a não linearidade se aproxima de zero, sua capacidade de promover auto-localização torna-se progressivamente menor, exigindo uma quantidade cada vez maior de potência para produzir o mesmo efeito.

Esse resultado pode ser observado claramente nas três curvas da Fig. 5.3. Em todos os casos, verifica-se um crescimento monótono de P_c conforme g aproxima-se de zero pelo lado negativo. Tal comportamento evidencia que a intensidade da não linearidade constitui um dos

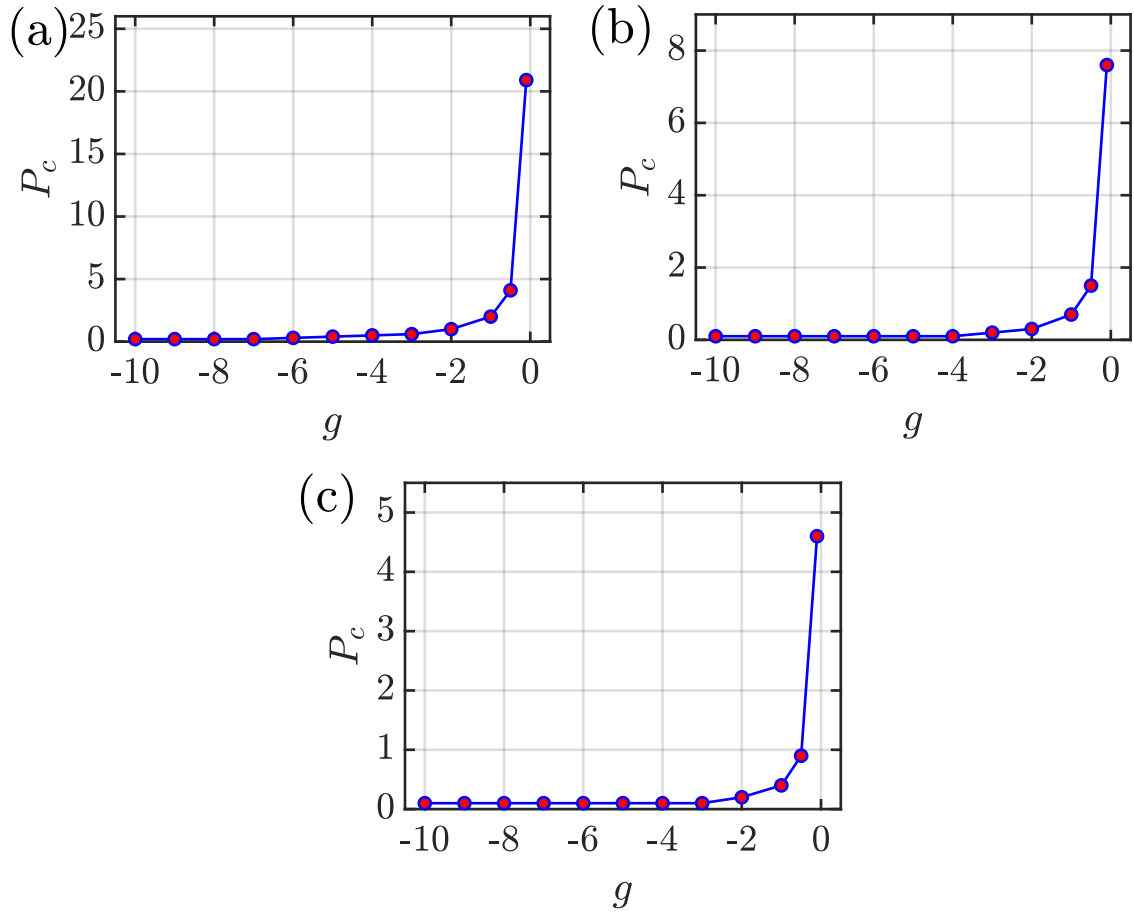


Figura 5.3: Potência crítica para a quebra de simetria P_c em função da não linearidade g para $\beta_4 = 2$ e diferentes valores de β_2 : (a) $\beta_2 = -1$, (b) $\beta_2 = 0$ e (c) $\beta_2 = 1$. Em todos os casos, P_c aumenta quando $g \rightarrow 0^-$, indicando que uma não linearidade atrativa mais fraca requer maior potência para desencadear a bifurcação de quebra de simetria. A dependência em relação a β_2 reflete regimes distintos resultantes da interação entre a dispersão de segunda ordem, a dispersão de quarta ordem e a não linearidade.

parâmetros fundamentais responsáveis pela determinação do limiar de bifurcação.

Embora essa tendência geral seja comum aos três regimes dispersivos, diferenças quantitativas importantes podem ser observadas entre eles. Essas diferenças refletem a influência da dispersão de segunda ordem sobre o equilíbrio entre confinamento linear e auto-localização não linear.

No caso $\beta_2 = -1$, a quebra espontânea de simetria já está presente mesmo na ausência da dispersão de quarta ordem. A introdução de β_4 modifica os valores da potência crítica, mas preserva a estrutura geral do mecanismo de bifurcação. Consequentemente, a curva $P_c(g)$ apresenta uma evolução relativamente suave ao longo do intervalo considerado.

Já para os casos $\beta_2 = 0$ e $\beta_2 = 1$, a situação é distinta. Conforme discutido anteriormente, a quebra espontânea de simetria nesses regimes surge apenas devido à presença da dispersão de quarta ordem. Como resultado, a dependência entre P_c e g torna-se uma manifestação direta da competição entre a dispersão quartica e os efeitos não lineares. Pequenas variações na intensidade da interação atrativa produzem mudanças significativas na potência necessária para o aparecimento dos estados assimétricos.

Outro aspecto importante revelado pela Fig. 5.3 é que não existe um valor universal para a potência crítica. Pelo contrário, o limiar de bifurcação depende simultaneamente dos coeficientes dispersivos e da intensidade da não linearidade. Isso evidencia que a quebra espontânea de simetria não é determinada por um único mecanismo físico, mas resulta do equilíbrio entre diferentes contribuições presentes na equação governante.

De maneira geral, os resultados obtidos mostram que a dispersão de quarta ordem amplia consideravelmente a região do espaço de parâmetros na qual a quebra espontânea de simetria pode ocorrer. Além disso, demonstram que o valor da potência crítica pode ser ajustado por meio da intensidade da não linearidade, fornecendo um possível mecanismo de controle para a transição entre estados simétricos e assimétricos.

A análise realizada nesta seção estabelece uma visão global da influência da não linearidade sobre o processo de bifurcação. Entretanto, ainda permanece a questão de como a própria dispersão de quarta ordem afeta diretamente a assimetria das soluções. Essa questão será investigada na próxima seção, através da análise da evolução do parâmetro de assimetria em função de β_4

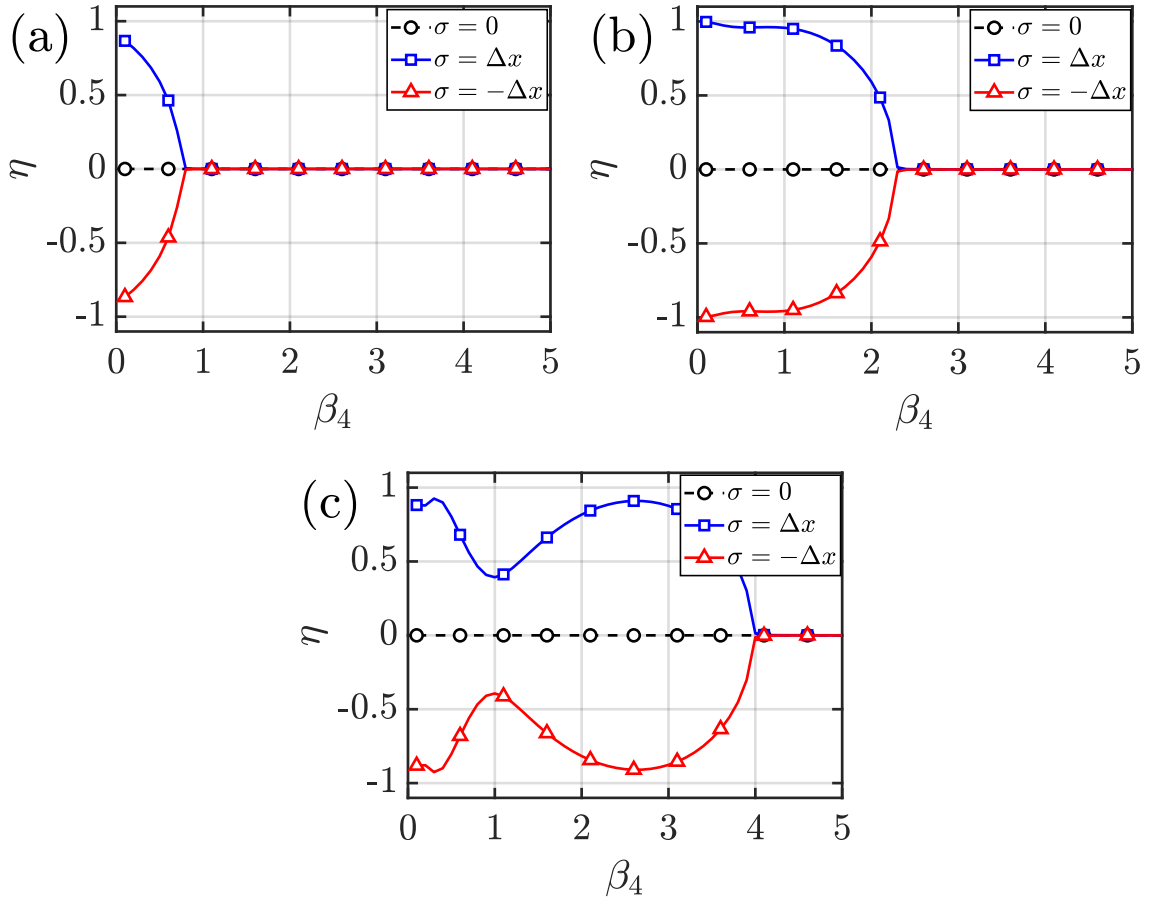


Figura 5.4: Taxa de assimetria η em função da dispersão de quarta ordem β_4 para $P = 1$ e $g = -1$, considerando (a) $\beta_2 = -1$, (b) $\beta_2 = 0$ e (c) $\beta_2 = 1$. Em todos os casos, o aumento de β_4 conduz a uma transição de estados assimétricos para estados simétricos, destacando o papel estabilizador da dispersão de quarta ordem.

5.7 Controle da quebra de simetria pela dispersão de quarta ordem

Nas seções anteriores foi demonstrado que a dispersão de quarta ordem modifica significativamente os diagramas de bifurcação e os valores da potência crítica associados à quebra espontânea de simetria. Entretanto, permanece a questão de como a própria intensidade da dispersão quartica influencia diretamente o grau de assimetria das soluções estacionárias.

Para responder a essa questão, foi analisada a evolução do parâmetro de assimetria η em função do coeficiente de dispersão de quarta ordem β_4 , mantendo-se a potência total fixa em $P = 1$ e considerando o regime atrativo $g = -1$. Os resultados obtidos para diferentes valores de β_2 são apresentados na Fig. 5.4.

A Fig. 5.4 revela que a dispersão de quarta ordem exerce influência direta sobre a

simetria das soluções estacionárias. Dependendo do regime dispersivo considerado, variações em β_4 podem tanto favorecer quanto suprimir a formação de estados assimétricos.

Inicialmente, considera-se o caso $\beta_2 = -1$, mostrado na Fig. 5.4(a). Nesse regime, a quebra espontânea de simetria já existe na ausência da dispersão quartica, conforme discutido anteriormente. Observa-se, contudo, que o aumento de β_4 provoca uma redução gradual do parâmetro de assimetria. Isso significa que a dispersão de quarta ordem tende a restaurar parcialmente a distribuição equilibrada da solução entre os dois poços.

Fisicamente, esse comportamento está associado ao aumento da tendência dispersiva induzida pelo termo de quarta ordem. À medida que β_4 cresce, torna-se mais difícil manter a concentração da função de onda em apenas uma das regiões do potencial, reduzindo progressivamente a assimetria observada.

Nos casos $\beta_2 = 0$ e $\beta_2 = 1$, apresentados nas Fig. 5.4(b) e 5.4(c), observa-se um comportamento qualitativamente diferente. Nesses regimes, a dispersão de quarta ordem é justamente o mecanismo responsável pelo aparecimento dos estados assimétricos. Consequentemente, existe uma faixa de valores de β_4 para a qual o parâmetro de assimetria torna-se diferente de zero, indicando a existência da quebra espontânea de simetria.

Esse resultado é particularmente relevante porque demonstra que a dispersão quartica pode atuar como um verdadeiro parâmetro de controle da bifurcação. Enquanto nos modelos convencionais a transição entre estados simétricos e assimétricos é normalmente controlada pela potência ou pela intensidade da não linearidade, no presente sistema a própria dispersão de quarta ordem torna-se capaz de induzir ou eliminar a quebra de simetria.

Outra característica importante observada na Fig. 5.4 é a existência de valores críticos de β_4 que delimitam regiões distintas de comportamento. Dependendo do regime considerado, pequenas variações desse coeficiente podem provocar mudanças abruptas na estrutura das soluções estacionárias, conduzindo o sistema entre estados simétricos e assimétricos.

Sob o ponto de vista físico, esse resultado evidencia que a dispersão de quarta ordem não deve ser interpretada apenas como uma correção de alta ordem à dinâmica convencional. Pelo contrário, ela participa ativamente do mecanismo responsável pela formação dos estados localizados, alterando a competição entre confinamento linear, dispersão e auto-localização não linear.

Os resultados obtidos nesta seção reforçam a conclusão de que a dispersão quartica amplia significativamente o espaço de parâmetros no qual a quebra espontânea de simetria pode

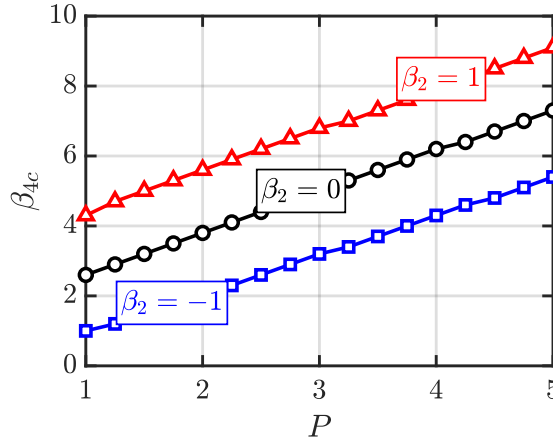


Figura 5.5: Diagrama de fase no plano (P, β_4) mostrando o valor crítico do parâmetro de dispersão de quarta ordem β_{4c} , correspondente à transição entre estados simétricos e assimétricos, para $g = -1$ e $\beta_2 = -1$ (quadrados), $\beta_2 = 0$ (círculos) e $\beta_2 = 1$ (triângulos). A curva $\beta_{4c}(P)$ separa as soluções simétricas (região acima da curva) das assimétricas (região abaixo da curva), com o limiar crítico aumentando com a potência.

ocorrer. Além disso, mostram que sua intensidade pode ser utilizada como uma ferramenta adicional para controlar a transição entre diferentes estados estacionários, o que pode ser relevante em aplicações envolvendo estruturas fotônicas e outros sistemas descritos por equações de Schrödinger generalizadas.

De maneira geral, a análise apresentada até este ponto demonstra que a inclusão da dispersão de quarta ordem modifica profundamente a estrutura das bifurcações e os mecanismos de estabilidade do sistema. Na próxima seção, esses resultados serão sintetizados para estabelecer as principais conclusões obtidas neste estudo.

5.8 Diagrama de fase no plano (P, β_4)

A análise apresentada na seção anterior mostrou que o aumento da dispersão de quarta ordem pode induzir uma transição entre estados assimétricos e simétricos. Entretanto, para obter uma descrição mais completa desse fenômeno, torna-se conveniente determinar os valores críticos de β_4 responsáveis por essa transição para diferentes níveis de potência.

Com esse objetivo, foi calculado o valor crítico β_4 correspondente ao desaparecimento da assimetria das soluções estacionárias. Os resultados obtidos são apresentados na Fig. 5.5, na forma de diagramas de fase construídos no plano (P, β_4) para diferentes valores de β_2 .

Observa-se que, para todos os regimes analisados, o valor crítico β_{4c} aumenta monotonicamente com a potência total da solução. Isso significa que estados de maior potência exigem

valores mais elevados de dispersão de quarta ordem para que a simetria espacial seja restaurada.

Esse comportamento evidencia a competição existente entre dois mecanismos físicos distintos. Por um lado, a não linearidade atrativa favorece a auto-localização da função de onda, promovendo o surgimento de estados assimétricos. Por outro, a dispersão de quarta ordem atua no sentido oposto, aumentando o espalhamento espacial da solução e favorecendo configurações mais simétricas.

Como consequência, quanto maior a potência da solução, mais intensa se torna a tendência à auto-localização, tornando necessário um valor maior de β_4 para compensar esse efeito.

As curvas $\beta_{4c}(P)$ definem, portanto, uma fronteira bem definida entre duas regiões dinâmicas distintas. Acima dessa fronteira predominam estados aproximadamente simétricos, enquanto abaixo dela observam-se soluções assimétricas associadas à quebra espontânea de simetria. Dessa forma, o diagrama de fase fornece uma visão global das condições necessárias para a ocorrência das transições estudadas neste capítulo.

5.9 Dependência do parâmetro crítico β_{4c} com a não linearidade

Embora o diagrama de fase apresentado anteriormente descreva a influência da potência sobre a transição de simetria, ainda é importante compreender como a intensidade da interação não linear afeta o valor crítico de dispersão necessário para restaurar a simetria do sistema.

Para essa finalidade, fixou-se o regime $\beta_2 = -1$ e calculou-se o valor crítico β_{4c} para diferentes intensidades da não linearidade atrativa. Os resultados correspondentes às potências $P = 1$ e $P = 2$ são apresentados na Fig. 5.6.

Observa-se inicialmente que, para um mesmo valor de g , a curva correspondente a $P = 2$ apresenta valores de β_{4c} sistematicamente superiores aos obtidos para $P = 1$. Esse resultado confirma a tendência observada na Fig. 5.5: soluções mais energéticas apresentam maior capacidade de auto-localização e, conseqüentemente, exigem uma dispersão de quarta ordem mais intensa para restaurar a simetria espacial.

Outro aspecto relevante é a diminuição progressiva de β_{4c} à medida que g se aproxima de zero. Nesse regime, a interação atrativa torna-se cada vez mais fraca, reduzindo a tendência à formação de estados assimétricos. Como consequência, valores menores de dispersão de quarta ordem tornam-se suficientes para eliminar a quebra de simetria.

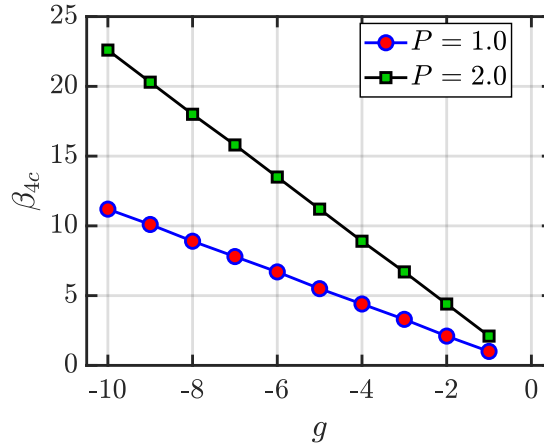


Figura 5.6: Parâmetro crítico de dispersão de quarta ordem β_{4c} em função do coeficiente de não linearidade g para $\beta_2 = -1$ e dois valores de potência, a saber $P = 1$ e $P = 2$. O caso de maior potência apresenta valores mais elevados de β_{4c} , indicando que uma dispersão mais forte é necessária para suprimir a autolocalização e restaurar a simetria.

Por outro lado, quando o módulo de g aumenta, a auto-localização torna-se mais intensa. Nessa situação, a dispersão de quarta ordem precisa atuar de maneira mais forte para contrabalançar os efeitos da não linearidade, produzindo o aumento observado em β_{4c} .

Os resultados da Fig. 5.6 demonstram que a transição entre estados simétricos e assimétricos não depende exclusivamente da potência ou da dispersão de quarta ordem. Pelo contrário, ela é determinada pelo equilíbrio simultâneo entre potência, intensidade da não linearidade e efeitos dispersivos de ordem superior. A combinação desses fatores define os limiares críticos observados ao longo deste estudo e estabelece β_4 como um parâmetro efetivo para o controle da quebra espontânea de simetria.

5.10 Comentários finais

Neste capítulo foi realizada uma investigação sistemática dos efeitos da dispersão de quarta ordem sobre a quebra espontânea de simetria em uma equação de Schrödinger não linear submetida a um potencial simétrico do tipo duplo-poço. A análise foi conduzida através da obtenção de soluções estacionárias e da construção de diagramas de bifurcação que permitiram identificar os regimes de existência de estados simétricos e assimétricos.

Inicialmente foi estudado o caso correspondente à equação convencional, na ausência da dispersão de quarta ordem. Os resultados mostraram que a quebra espontânea de simetria ocorre apenas para um conjunto restrito de parâmetros, caracterizado pela combinação de dispersão

anômala e não linearidade atrativa. Nesse regime, observou-se uma bifurcação do tipo pitchfork, na qual o estado simétrico perde estabilidade acima de uma potência crítica e dá origem a dois estados assimétricos equivalentes.

A inclusão da dispersão de quarta ordem alterou significativamente esse cenário. Em regimes onde a quebra espontânea de simetria já estava presente, verificou-se um deslocamento da potência crítica para valores mais elevados, indicando que a dispersão quartica tende a estabilizar os estados simétricos. Além disso, foram identificados novos regimes de bifurcação para combinações de parâmetros que não apresentavam quebra de simetria na equação convencional. Esse resultado evidencia que os efeitos dispersivos de ordem superior modificam qualitativamente a estrutura das soluções estacionárias.

A análise da dependência da potência crítica com a intensidade da não linearidade mostrou que a redução do módulo de g exige valores progressivamente maiores de potência para induzir a quebra espontânea de simetria. Tal comportamento demonstra que a formação dos estados assimétricos depende diretamente da capacidade da interação não linear promover processos de auto-localização espacial.

Posteriormente foi investigada a influência direta do coeficiente de dispersão de quarta ordem sobre o parâmetro de assimetria. Observou-se que o aumento de β_4 conduz gradualmente à restauração da simetria espacial, reduzindo a assimetria das soluções até o desaparecimento completo dos estados localizados em um único poço. Esse resultado permitiu identificar a dispersão de quarta ordem como um mecanismo efetivo de controle das transições de simetria.

A construção dos diagramas de fase no plano (P, β_4) forneceu uma descrição global dessas transições. Verificou-se que existe um valor crítico β_{4c} que separa claramente as regiões simétrica e assimétrica do espaço de parâmetros. Além disso, observou-se que esse valor crítico cresce monotonicamente com a potência da solução, indicando que estados mais energéticos necessitam de dispersão mais intensa para que a simetria seja restaurada.

Por fim, a análise da dependência de β_{4c} em relação ao coeficiente não linear revelou que os limiares críticos resultam da competição entre três mecanismos fundamentais: auto-localização induzida pela não linearidade, confinamento imposto pelo potencial externo e espalhamento associado à dispersão de quarta ordem. O aumento da potência ou da intensidade da não linearidade favorece estados assimétricos, enquanto o crescimento de β_4 atua no sentido oposto, promovendo a restauração da simetria.

De forma geral, os resultados apresentados demonstram que a dispersão de quarta ordem

não deve ser interpretada apenas como uma correção perturbativa da dinâmica convencional. Pelo contrário, ela desempenha papel ativo na determinação da estabilidade das soluções e dos mecanismos de bifurcação do sistema. A possibilidade de controlar a transição entre estados simétricos e assimétricos por meio da variação de β_4 sugere novas perspectivas para o estudo de processos de localização não linear em sistemas descritos por equações de Schrödinger generalizadas.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, investigamos a dinâmica de estados localizados em sistemas descritos por uma equação de Schrödinger não linear generalizada, incorporando simultaneamente termos de dispersão de segunda e quarta ordem, bem como diferentes mecanismos de confinamento, incluindo não linearidades espacialmente inhomogêneas e potenciais externos do tipo poço duplo.

Os resultados obtidos evidenciam que a dispersão de quarta ordem desempenha um papel fundamental na estrutura e estabilidade das soluções do sistema. Em particular, mostramos que a inclusão desse termo pode modificar de maneira significativa o equilíbrio entre dispersão e não linearidade, levando ao surgimento de novos regimes dinâmicos e estruturais.

No Capítulo 4, analisamos a existência e estabilidade de estados localizados em um meio com não linearidade defocalizante espacialmente dependente, descrita por um perfil do tipo $g(x) = \cosh^2(x)$. Demonstramos que a dispersão de quarta ordem atua como um mecanismo de controle da localização das soluções, promovendo deslocalização à medida que seu valor aumenta. Além disso, verificamos que soluções estacionárias não existem no regime $\beta_4 < 0$, indicando que a dispersão quártica negativa impede o confinamento da função de onda.

Ainda nesse contexto, identificamos que os estados fundamentais são robustamente estáveis em diferentes regimes de dispersão, enquanto estados excitados apresentam instabilidades dinâmicas, frequentemente decaindo para estados de menor energia. Esses resultados mostram que a interação entre dispersão de ordem superior e não linearidade inhomogênea gera uma dinâmica rica e altamente não trivial.

No Capítulo 5, investigamos a quebra espontânea de simetria em um sistema com potencial externo do tipo poço duplo. Os resultados mostraram que, na ausência de dispersão de

quarta ordem, a quebra de simetria ocorre apenas em regimes restritos do espaço de parâmetros. Entretanto, a inclusão do termo β_4 amplia significativamente esses regimes, permitindo o surgimento de bifurcações mesmo em situações onde elas não estavam presentes anteriormente.

Mostramos ainda que a dispersão de quarta ordem pode deslocar os pontos críticos de bifurcação e atuar como um mecanismo de controle da simetria das soluções. Em particular, identificamos a existência de valores críticos β_{4c} que determinam a transição entre estados simétricos e assimétricos, os quais dependem tanto da potência quanto da intensidade da não linearidade.

De maneira geral, os resultados desta tese evidenciam que a dispersão de quarta ordem não apenas introduz correções quantitativas, mas também altera qualitativamente o comportamento do sistema, influenciando a existência, estabilidade e dinâmica de estados localizados, bem como os processos de quebra de simetria.

Os resultados obtidos neste trabalho abrem diversas possibilidades para investigações futuras. Uma direção natural consiste em estender o modelo para dimensões superiores, onde a presença de dispersão de quarta ordem pode levar à formação de estruturas mais complexas, como vórtices e padrões bidimensionais.

Outra possibilidade é a inclusão de efeitos adicionais, como termos dissipativos ou não linearidades de ordem superior, que podem enriquecer ainda mais a dinâmica do sistema e aproximá-lo de situações experimentais realistas.

Também é de interesse investigar diferentes perfis de não linearidade inhomogênea, bem como potenciais externos mais complexos, a fim de compreender como diferentes mecanismos de confinamento interagem com a dispersão de ordem superior.

Do ponto de vista experimental, os resultados obtidos sugerem que sistemas com engenharia de dispersão, como fibras ópticas estruturadas e guias de onda fotônicos, constituem plataformas promissoras para a observação dos fenômenos aqui descritos.

Por fim, a análise detalhada dos mecanismos de estabilidade e das transições dinâmicas observadas neste trabalho pode contribuir para o desenvolvimento de novos dispositivos ópticos e sistemas de controle de propagação de ondas em meios não lineares.

Referências Bibliográficas

- [1] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 3 edition, 1998.
- [2] H. A. Haus. *Waves and Fields in Optoelectronics*. Prentice-Hall, 1984.
- [3] Y. R. Shen. *Principles of Nonlinear Optics*. Wiley, 1984.
- [4] R. W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Academic Press, 3 edition, 2008.
- [5] P. N. Butcher and D. Cotter. *The Elements of Nonlinear Optics*. Cambridge University Press, 1990.
- [6] G. P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, 5 edition, 2012.
- [7] D. J. Korteweg and G. de Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal. *Philosophical Magazine*, 39:422–443, 1895.
- [8] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal. Interaction of solitons in a collisionless plasma. *Physical Review Letters*, 15:240–243, 1965.
- [9] A. Hasegawa and D. Tappert. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. *Applied Physics Letters*, 23:142–144, 1973.
- [10] L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, and J. P. Gordon. Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers. *Optics Letters*, 6:147–149, 1980.
- [11] J. Yang. *Nonlinear Waves in Integrable and Nonintegrable Systems*. SIAM, 2010.
- [12] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura. Method for solving the korteweg–de vries equation. *Physical Review Letters*, 19:1095–1097, 1967.
- [13] P. D. Lax. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 21:467–490, 1968.

- [14] R. Hirota. Exact solution of the korteweg–de vries equation for multiple collisions of solitons. *Physical Review Letters*, 27:1192–1194, 1971.
- [15] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur. Nonlinear-evolution equations of physical significance. *Physical Review Letters*, 31:125–127, 1973.
- [16] D. Anderson. Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers. *Physical Review A*, 27:3135–3145, 1983.
- [17] N. G. Vakhitov and A. A. Kolokolov. Stationary solutions of the wave equation in a medium with nonlinearity saturation. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 16:783–789, 1973.
- [18] D. R. Hartree. The wave mechanics of an atom with a non-coulomb central field. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24:89–110, 1928.
- [19] L. Fox and E. T. Goodwin. The numerical solution of two-point boundary problems for ordinary differential equations. *Proceedings of the Royal Society A*, 200:541–560, 1950.
- [20] H. B. Keller. *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems*. SIAM, 1977.
- [21] Y. Kodama and A. Hasegawa. Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 23:510–524, 1987.
- [22] K. J. Blow and D. Wood. Theoretical description of transient stimulated raman scattering. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 25:2665–2673, 1989.
- [23] S. B. Cavalcanti, J. C. Cressoni, H. R. da Cruz, and A. S. Gouveia-Neto. Modulation instability near zero dispersion. *Physical Review A*, 43:6162–6165, 1991.
- [24] V. I. Karpman. Solitons of the fourth-order nonlinear schrödinger equation. *Physics Letters A*, 193:355–358, 1994.
- [25] V. I. Karpman. Stabilization of solitons by higher-order dispersion. *Physical Review E*, 53:R1336–R1339, 1996.
- [26] V. I. Karpman and A. G. Shagalov. Solitons in systems with higher-order dispersion. *Physics Letters A*, 228:59–65, 1997.

- [27] A. G. Shagalov. Modulational instability in dispersive systems. *Physics Letters A*, 239:41–46, 1998.
- [28] V. I. Karpman. Radiation by solitons due to higher-order dispersion. *Physics Letters A*, 248:359–364, 1998.
- [29] V. I. Karpman. Radiation of solitons in nonlinear dispersive systems. *Physical Review E*, 62:5678–5687, 2000.
- [30] V. I. Karpman and A. G. Shagalov. Stability of solitons in higher-order nonlinear schrödinger equations. *Physica D*, 144:194–210, 2000.
- [31] T. A. Davydova, A. I. Maimistov, and J. M. Soto-Crespo. Chirped solitons and higher-order effects. *Physica D*, 156:260–282, 2001.
- [32] A. Espinosa-Cerón and J. Fujioka. Embedded solitons and radiation. *Physica Scripta*, 67:314–319, 2003.
- [33] J. Tian and G. Li. Ultrashort soliton pulses in optical fibers. *Physica Scripta*, 71:507–510, 2005.
- [34] J. L. Zhang. Exact solutions of higher-order nonlinear schrödinger equation. *Physics Letters A*, 357:188–192, 2006.
- [35] C. G. L. Tiofack et al. Pulse trains in nonlinear fibers. *Physical Review E*, 80:066604, 2009.
- [36] R. X. Liu and B. Tian. Soliton solutions for a fourth-order nonlinear schrödinger equation. *Physica B*, 413:120–125, 2013.
- [37] A. Ankiewicz and N. Akhmediev. Higher-order nonlinear schrödinger equations and their solutions. *Physical Review E*, 89:012907, 2014.
- [38] J. T. Cole et al. Lattice solitons with higher-order dispersion. *Physical Review A*, 90:013815, 2014.
- [39] F. Yu and L. Li. Non-autonomous solitons in higher-order systems. *Physics Letters A*, 379:1314–1319, 2015.
- [40] A. Blanco-Redondo et al. Pure-quartic solitons. *Nature Communications*, 7:10427, 2016.

- [41] H. Triki and V. I. Kruglov. Dipole solitons in inhomogeneous dispersive media. *Physical Review E*, 101:042220, 2020.
- [42] R. I. Bandara et al. Multipulse solitons in quartic dispersion systems. *Physical Review A*, 103:063514, 2021.
- [43] H. Triki et al. Localized pulses in perturbed fokas–lenells equation. *Physics Letters A*, 421:127782, 2022.
- [44] H. Triki et al. Pure-quartic solitons with weak nonlocality. *Physics Letters A*, 459:128608, 2023.
- [45] A. Houwe et al. Modulation instability and bifurcation with higher-order dispersion. *Physics Letters A*, 488:129134, 2023.
- [46] J.-R. Zhang et al. Solitons in fourth-order schrödinger equation with pt symmetry. *Physica Scripta*, 98:085217, 2023.
- [47] O. V. Borovkova et al. Bright solitons from defocusing nonlinearities. *Physical Review E*, 84:035602, 2011.
- [48] Mateus C. P. dos Santos and Wesley B. Cardoso. Influence of fourth-order dispersion on the anderson localization. *Nonlinear Dynamics*, 101:611–618, 2020.
- [49] Bruno M. Miranda, Ardiley T. Avelar, and Wesley B. Cardoso. Coupling-induced localization in linearly coupled waveguides with spatially modulated nonlinearity. *Optical and Quantum Electronics*, 58(8):324, 2026.
- [50] Mateus C. P. dos Santos and Wesley B. Cardoso. Spontaneous symmetry breaking induced by nonlinear interaction in a coupler supported by fractional diffraction. *Physics Letters A*, 537:130311, 2025.
- [51] Fang C. Lee, Mateus C. P. dos Santos, Ardiley T. Avelar, and Wesley B. Cardoso. Influence of fourth-order dispersion on the formation of localized states in systems with inhomogeneous defocusing nonlinearity. *Chaos, Solitons & Fractals*, 202:117629, 2026.
- [52] A. Smerzi et al. Quantum tunneling between two weakly linked bose-einstein condensates. *Physical Review Letters*, 79:4950–4953, 1997.

- [53] M. Albiez et al. Direct observation of tunneling and nonlinear self-trapping. *Physical Review Letters*, 95:010402, 2005.
- [54] B. A. Malomed. Variational methods in nonlinear fiber optics and related fields. *Progress in Optics*, 43:71–193, 2002.
- [55] B. A. Malomed. Spontaneous symmetry breaking in nonlinear systems. *Physical Review E*, 88:062917, 2013.
- [56] P. Diament. *Wave Transmission and Fiber Optics*. Macmillan, 1990.
- [57] P. M. Morse and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, 1953.