

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE INFORMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA  
COMPUTAÇÃO

ROBSON MEDRADO DE OLIVEIRA

# **Coloração de Identificação Local em Algumas Classes de Grafos**

Goiânia  
2026



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE INFORMÁTICA

## TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

### 1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação     Tese     Outro\*: \_\_\_\_\_

\*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

### 2. Nome completo do autor

Robson Medrado de Oliveira

### 3. Título do trabalho

Coloração de identificação local em algumas classes de grafos

### 4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento  SIM     NÃO<sup>1</sup>

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

**Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.**



Documento assinado eletronicamente por **Marcia Rodrigues Cappelle Santana, Professora do Magistério Superior**, em 07/05/2026, às 14:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Robson Medrado De Oliveira, Discente**, em 07/05/2026, às 15:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **6180987** e o código CRC **9F9EF948**.

ROBSON MEDRADO DE OLIVEIRA

# Coloração de Identificação Local em Algumas Classes de Grafos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, do Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás (UFG), como requisito para obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação.

**Área de concentração:** Ciência da Computação.

**Linha de pesquisa:** Fundamentos de Computação.

**Orientadora:** Profa. Dra. Márcia Rodrigues Cappelle Santana

**Co-Orientador:** Prof. Dr. Hebert Coelho da Silva

Goiânia  
2026

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

de Oliveira, Robson Medrado  
Coloração de Identificação Local em Algumas Classes de Grafos  
[manuscrito] / Robson Medrado de Oliveira. - 2026.  
CXXVI, 126 f.: 2026

Orientadora: Prof(a). Dra. Márcia Rodrigues Cappelle Santana; co-orientador: Dr. Hebert Coelho da Silva

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Informática (INF), Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Goiânia, 2026.

Bibliografia.

Inclui: siglas, símbolos, gráfico, lista de figuras.

1. Lid-coloração. 2. Potência de Caminho. 3. Grafo Split. 4. Produto Corona. 5. Produto Cartesiano.

I. Santana, Márcia Rodrigues Cappelle, orient. II. da Silva, Hebert Coelho, co-orient. III. Título.

CDU 004



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE INFORMÁTICA

**ATA DE DEFESA DE TESE**

Ata nº 4 da sessão de Defesa de Tese de **Robson Medrado de Oliveira**, que confere o título de Doutor em Ciência da Computação, na área de concentração em Ciência da Computação.

Aos seis dias do mês de abril de dois mil e vinte e seis, a partir das nove horas, no laboratório 250 do INF, realizou-se a sessão pública de Defesa de Tese intitulada “**Coloração de identificação local em algumas classes de grafos**”. Os trabalhos foram instalados pela Orientadora, Professora Doutora Márcia Rodrigues Cappelle Santana (INF/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Hebert Coelho da Silva (INF/UFG), coordenador; Professor Doutor Julliano Rosa Nascimento (INF/UFG), membro titular interno; Professor Doutor Humberto José Longo (INF/UFG), membro titular interno; Professor Doutor Nicolás de Almeida Martins (IEDS/Unilab), membro titular externo; e Profa. Dra. Sheila Morais de Almeida (UTFPR), membra titular externa. A participação dos professores Nicolás de Almeida Martins e Sheila Morais de Almeida ocorreu por meio de videoconferência. Durante a arguição os membros da banca não fizeram sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Tese, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pela Professora Doutora Márcia Rodrigues Cappelle Santana, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos seis dias do mês de abril de dois mil e vinte e seis.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Marcia Rodrigues Cappelle Santana, Coordenadora de Pós-Graduação**, em 06/04/2026, às 11:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Julliano Rosa Nascimento, Professor do Magistério Superior**, em 06/04/2026, às 11:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Hebert Coelho Da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 06/04/2026, às 11:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Humberto Jose Longo, Professor do Magistério Superior**, em 06/04/2026, às 11:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Nicolas de Almeida Martins, Usuário Externo**, em 06/04/2026, às 11:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Sheila Moraes de Almeida, Usuário Externo**, em 06/04/2026, às 11:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Robson Medrado De Oliveira, Discente**, em 06/04/2026, às 11:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **6059065** e o código CRC **6408F6C5**.

---

**Referência:** Processo nº 23070.013553/2026-41

SEI nº 6059065

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

### **Robson Medrado de Oliveira**

É Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC, 2011), Especialista em Matemática pelo Instituto Federal de Goiás (IFG, 2016), Especialista em Educação em Astronomia pela Universidade Federal de Goiás (UFG, 2017) e Mestre em Modelagem e Otimização pela Universidade Federal de Goiás (UFG, 2020). Durante o mestrado, foi bolsista da FAPEG e desenvolveu pesquisa sobre identificação de danos estruturais em condutos forçados. Durante o doutorado, foi bolsista da CAPES e desenvolveu pesquisa teórica sobre coloração de identificação local em algumas classes de grafos.

Dedico este trabalho aos meus pais, José e Laudecy.

---

## Agradecimentos

---

Agradeço, primeiramente, a Deus, pelo dom da vida, por me amparar nos momentos de dificuldade e por me permitir chegar até aqui.

Aos meus pais, José e Laudecy, agradeço pelo apoio incondicional de sempre. Sou grato, também, pela compreensão diante de minha ausência em tantos momentos nos quais o Doutorado precisou ser prioridade. Aos meus irmãos, Rogério e Romário, agradeço igualmente pela compreensão e pelo apoio ao longo dessa caminhada.

À minha orientadora, Márcia Cappelle, expresso minha profunda gratidão pela confiança, pela paciência e por todo o cuidado dispensado a mim, especialmente na reta final deste trabalho. Obrigado, professora, por sempre respeitar o meu tempo e as minhas dificuldades, e por todas as horas de orientação, inclusive em finais de semana, feriados e períodos de férias.

Ao meu coorientador, Hebert Coelho, agradeço pelos ensinamentos, pelo tempo dedicado às nossas reuniões, pelas cobranças necessárias e também pelos incentivos ao longo desta trajetória.

A todos os professores que fizeram parte da minha trajetória acadêmica, expresso minha sincera gratidão pelos ensinamentos, pela dedicação e pelo incentivo ao longo da minha formação. Cada um, à sua maneira, contribuiu para que eu chegasse até este momento, deixando não apenas conhecimentos, mas também exemplos, conselhos e inspiração para a minha caminhada.

À minha esposa, Poliana, agradeço por ter acompanhado toda essa jornada, sempre me incentivando e contribuindo de inúmeras maneiras para que esta etapa fosse concluída.

Agradeço aos membros da banca examinadora, pela disponibilidade e pela honra de aceitarem o convite para participar da avaliação deste trabalho.

Agradeço, também, aos funcionários da Secretaria da Pós-Graduação do Instituto de Informática, pela prontidão e pelo suporte oferecido durante toda a realização do Doutorado.

Aos colegas da 250, agradeço pelos momentos de descontração e convivência, que tornaram essa caminhada mais leve.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

*Um matemático deve realizar pesquisas e encontrar novos resultados, e então o tempo decidirá o que é importante e o que não é!*

(Vadim G. Vizing)

---

## Resumo

---

de Oliveira, Robson Medrado. **Coloração de Identificação Local em Algumas Classes de Grafos**. Goiânia, 2026. 125p. Tese de Doutorado Programa de Pós graduação em Ciência da Computação, Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás.

Uma **coloração de identificação local** (lid-coloração) de um grafo é uma coloração própria tal que, para qualquer aresta  $uv$ , se  $u$  e  $v$  têm vizinhanças fechadas distintas, então os conjuntos de cores usados nos vértices das vizinhanças fechadas de  $u$  e  $v$  são distintos. O **número cromático de identificação local** (número lid-cromático) do grafo  $G$ , denotado por  $\chi_{lid}(G)$ , é o menor número de cores necessárias em qualquer lid-coloração de  $G$ . Estudamos a lid-coloração em grafos potência de caminho. Além disso, investigamos a lid-coloração em grafos *split* e em subclasses, como grafo *split* completo e grafo *split-comparabilidade*, obtemos valores exatos e limites para o número lid-cromático dessas classes. Além disso, mostramos que o problema de decidir se um grafo *split* admite uma lid-coloração com um número dado de cores é NP-completo. Na sequência, estudamos a lid-coloração no produto corona de grafos. Nesse contexto, além de resultados estruturais e de limites, mostramos que o problema de decidir a existência de uma lid-coloração em grafos obtidos pelo produto corona também é NP-completo. Determinamos, ainda, valores exatos do número lid-cromático do produto corona para diversas famílias, incluindo casos em que os fatores são caminhos, ciclos, grafos completos e complementos de grafos completos. Também estabelecemos limites inferiores e superiores para o número lid-cromático em casos mais gerais. Finalmente, estudamos o número lid-cromático do produto Cartesiano do grafo completo por caminho. Além disso, fornecemos limites inferiores e superiores para os grafos resultantes do produto Cartesiano entre o grafo completo e o ciclo, bem como entre dois grafos completos.

### Palavras-chave

Lid-coloração, Potência de caminho, Grafo *split*, Produto corona, Produto Cartesiano.

---

## Abstract

---

de Oliveira, Robson Medrado. **Locally identifying coloring in Some Graph Classes**. Goiânia, 2026. 125p. PhD. Thesis Programa de Pós graduação em Ciência da Computação, Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás.

**locally identifying coloring** (lid-coloring) of a graph is a proper coloring such that, for any edge  $uv$ , if  $u$  and  $v$  have distinct closed neighborhoods, then the sets of colors used on the vertices of the closed neighborhoods of  $u$  and  $v$  are distinct. The **locally identifying chromatic number** (lid-chromatic number) of a graph  $G$ , denoted by  $\chi_{lid}(G)$ , is the minimum number of colors required in any lid-coloring of  $G$ . We studied locally identifying colorings of powers of paths graphs. We investigate lid-colorings in split graphs and in subclasses such as complete split graphs and split-comparability graphs, obtaining exact values and bounds for the lid-chromatic number in these classes. In addition, we show that the problem of deciding whether a split graph admits a lid-coloring with a given number of colors is NP-complete. Next, we study lid-colorings in the corona product of graphs. In this context, besides structural results and bounds, we prove that the problem of deciding the existence of a lid-coloring in graphs obtained through the corona product is also NP-complete. We also determined exact values of the lid-chromatic number of the corona product for several families, including cases in which the factors are paths, cycles, complete graphs, and complements of complete graphs. We also establish lower and upper bounds for the lid-chromatic number in more general cases. Finally, we study the lid-chromatic number of the Cartesian product of a complete graph with a path. Moreover, we provide lower and upper bounds for graphs obtained from the Cartesian product between a complete graph and a cycle, as well as between two complete graphs.

### Keywords

Lid-coloring, Powers of paths, Split, Corona product, Cartesian product.

---

## Sumário

---

Lista de Figuras	13
1 Introdução	16
2 Conceitos preliminares	22
3 Coloração de identificação local em algumas classes de grafos	33
3.1 O problema da coloração de identificação local	33
3.2 Lid-coloração em caminhos e ciclos	34
3.3 Lid-coloração em grafos bipartidos	37
3.4 Lid-coloração em potência de caminho	41
4 Coloração de identificação local em grafos <i>split</i>	48
4.1 Complexidade da lid-coloração em grafos <i>split</i>	48
4.2 Lid-coloração em grafos <i>split</i> completos	54
4.3 Lid-coloração de $K_m \odot \overline{K_n}$	55
4.4 Lid-coloração em grafos <i>split</i> -comparabilidade	61
4.5 Resumo dos resultados do capítulo	71
5 Coloração de identificação local em produto corona	73
5.1 Trabalhos relacionados ao produto corona	73
5.2 Resultados preliminares	75
5.3 Complexidade da lid-coloração em grafos produto corona	76
5.4 Limites para $\chi_{lid}(G \odot H)$	82
5.5 Lid-coloração em produtos corona de grafos bipartidos	86
5.6 Sobre o problema da 4-lid-coloração no produto corona	89
5.7 Lid-coloração do produto corona quando os fatores são caminhos e ciclos	91
5.8 Lid-coloração de $K_m \odot K_n$	100
5.9 Resumo dos resultados do capítulo	108
6 Coloração de identificação local em produto Cartesiano	110
6.1 Trabalhos relacionados ao produto Cartesiano	110
6.2 Lid-coloração de $C_m \square P_n$ e $C_m \square C_n$	111
6.3 Lid-coloração de $K_m \square P_n$ , $K_m \square C_n$ e $K_m \square K_n$	112
6.4 Resumo dos resultados do capítulo	118
7 Considerações finais	120
Referências Bibliográficas	122

---

## Lista de Figuras

---

1.1	Coloração de vértices de $G$ .	18
1.2	Grafo $G$ com $\chi_{lid}(G) = 5$ .	19
2.1	Grafo e multigrafo.	22
2.2	Grafo $G$ e seu complemento $\overline{G}$ .	23
2.3	Formas distintas de representar o mesmo grafo planar.	24
2.4	Exemplo de hipergrafo.	24
2.5	Representação do grafo completo $K_n$ com $1 \leq n \leq 4$ .	25
2.6	Exemplos de grafos bipartidos completos.	26
2.7	Grafo bipartido convexo.	26
2.8	Grafo bipartido biconvexo.	26
2.9	Exemplos de grafo cordal e não cordal.	27
2.10	Grafo <i>split</i> .	27
2.11	Grafo <i>split-comparabilidade</i> .	28
2.12	Construção de uma 3-árvore.	28
2.13	Grafos $K_4$ , $P_2$ e o produto Cartesiano $K_4 \square P_2$ .	29
2.14	Grafos $K_4$ , $P_3$ e o corona $K_4 \odot P_3$ .	29
2.15	Grafo grade $P_4 \square P_6$ .	30
2.16	Hipercubo $Q_3$ .	30
2.17	Os grafos $G_1$ e $G_2$ são isomorfos.	31
2.18	Lid-coloração forte de $G$ .	31
2.19	Boa lid-coloração e lid-coloração forte do ciclo $C_7$ .	32
3.1	Grafo $G$ com $\chi_{lid}(G) = 3$ .	34
3.2	Lid-coloração de $P_9$ .	35
3.3	Lid-coloração de $P_{11}$ .	35
3.4	Lid-coloração de $P_{10}$ .	35
3.5	Lid-coloração de $P_{12}$ .	36
3.6	Grafo $C_4$ e $C_8$ com $\chi_{lid}(C_4) = \chi_{lid}(C_8) = 3$ .	36
3.7	Grafo $C_6$ e $C_9$ com $\chi_{lid}(C_6) = \chi_{lid}(C_9) = 4$ .	37
3.8	Grafo $C_{11}$ com $\chi_{lid}(C_{11}) = 4$ .	37
3.9	Uma lid-coloração de um grafo bipartido $G$ obtida pela função $c(v) \equiv d(u, v) \pmod{4}$ , utilizando quatro cores.	39
3.10	Cores em que $c(v_i) = i$ na 3-árvore.	42
3.11	Lid-coloração da 3-árvore.	42
3.12	Cores em que $c(v_i) = i$ na 3-árvore.	43
3.13	Lid-coloração da 3-árvore.	43
3.14	Grafo potência de caminho $P_7^3$ .	43
3.15	Lid-coloração de $P_{11}^3$ .	45

3.16	Lid-coloração de $P_8^3$ .	46
3.17	Lid-coloração de $P_4$ .	46
3.18	Lid-coloração de $P_n$ para valores pares de $n$ .	47
3.19	Lid-coloração de $P_n$ para valores ímpares de $n$ .	47
4.1	Construção para o Teorema 4.3.	50
4.2	Lid-coloração do grafo <i>split</i> completo.	55
4.3	Lid-coloração de $K_8 \odot K_1$ .	58
4.4	Lid-coloração de $K_7 \odot \overline{K_3}$ .	58
4.5	Lid-coloração de $K_7 \odot \overline{K_3}$ .	59
4.6	Grafo $K_8 \odot \overline{K_2}$ , $\chi_{lid}(K_8 \odot \overline{K_2}) = 12 \neq 8 + \log_2 8 = 11$ .	59
4.7	Diagrama geral de um grafo <i>split</i> -comparabilidade. As arestas da clique $K$ foram omitidas para melhor visualização.	62
4.8	Representação do conjunto $\mathcal{T}$ no grafo <i>split</i> -comparabilidade.	63
4.9	Um grafo $G$ com dois vértices gêmeos falsos cuja remoção de um deles produz um grafo $G'$ com número lid-cromático maior.	64
4.10	Split aninhado em que $\chi_{lid}(G) = 6 + 6 = 12$ .	66
4.11	Split-comparabilidade em que $ S_p  =  S_q $ , com $\chi_{lid}(G) = 8 + 4 = 12$ .	68
4.12	Split-comparabilidade em que $ S_p  >  S_q $ , com $\chi_{lid}(G) = 10 + 5 = 15$ .	69
4.13	Grafo $G$ para o caso em que a remoção de um vértice na clique $K$ não reduz o seu número lid-cromático.	70
4.14	Grafo $G$ para o caso em que a remoção de um vértice na clique $K$ reduz o seu número lid-cromático.	71
5.1	Grafo $G'$ construído para o Teorema 5.3. A figura apresenta um exemplo da construção correspondente a uma aresta $uv \in E(G)$ .	78
5.2	$\chi_{lid}(P_4 \odot C_4) \leq 2 + 4(3) - 1 = 13$ .	83
5.3	$\chi_{lid}(P_4 \odot C_4) \leq 4 + 3 = 7$ .	84
5.4	Lid-coloração do grafo coroa $P_6 \odot K_{3,3}$ .	87
5.5	Lid-coloração do grafo coroa $C_6 \odot \overline{P_4}$ .	88
5.6	Lid-coloração do grafo coroa $P \odot P_1$ .	90
5.7	Uma 5-lid-coloração do grafo $G \odot P_1$ .	90
5.8	Lid-coloração do grafo coroa $P_6 \odot P_4$ .	91
5.9	Lid-coloração do grafo coroa $P_6 \odot P_4$ .	92
5.10	Lid-coloração do grafo coroa $P_6 \odot C_6$ .	92
5.11	Lid-coloração do grafo coroa $C_5 \odot P_1$ .	94
5.12	Lid-coloração do grafo coroa $C_5 \odot P_2$ .	94
5.13	Lid-coloração do grafo coroa $P_4 \odot C_9$ .	96
5.14	Lid-coloração do grafo coroa $P_4 \odot C_{11}$ .	96
5.15	Lid-coloração do grafo coroa $C_6 \odot C_5$ .	97
5.16	Lid-coloração do grafo coroa $C_6 \odot C_7$ .	98
5.17	Lid-coloração do grafo coroa $C_5 \odot C_4$ .	99
5.18	Lid-coloração do grafo coroa $C_5 \odot C_7$ .	99
5.19	Abaixo da linha estão os valores de $n$ em função de $m$ e, acima, os valores e limites de $\chi_{lid}(K_m \odot K_n)$ , onde $t = \left\lceil \frac{\sqrt{8m-7}-1}{2} \right\rceil$ .	101
5.20	Esquema da lid-coloração de $K_m \odot K_n$ .	102
5.21	Grafo $K_5 \odot K_3$ , $\chi_{lid}(K_5 \odot K_3) = 5 + \lceil \log_2 5 \rceil = 8$ .	105

5.22	Grafo $K_5 \odot K_6$ , $\chi_{lid}(K_5 \odot K_6) = n + 3 = 9$ .	108
6.1	Lid-coloração de $K_m \square P_n$ .	113
6.2	Lid-coloração de $K_6 \square P_5$ .	113
6.3	Lid-coloração de $K_m \square C_n$ , com $n$ par e $n$ ímpar.	117
6.4	Lid-coloração para $K_5 \square C_4$ com $\lceil \frac{5m-2}{3} \rceil = 8$ cores.	117
6.5	Lid-coloração para $K_5 \square C_6$ com $2m - 1 = 9$ cores.	117
6.6	Lid-coloração de $K_m \square K_n$ .	118
6.7	Lid-coloração para $K_4 \square K_4$ com $m + \log_2 m = 6$ cores.	118

## Introdução

---

A história do famoso Teorema das Quatro Cores remonta ao século XIX e envolve uma série de desenvolvimentos fascinantes na teoria dos grafos. Uma das narrativas mais detalhadas sobre a origem e evolução desse teorema pode ser encontrada em Chartrand e Zhang [11]. Neste livro, os autores traçam uma jornada que nos leva aos primórdios do estudo dos grafos e à resolução de um dos problemas mais intrigantes da matemática.

Segundo esses autores, tudo iniciou em 1852, quando Francis Guthrie (1831-1899), recém-formado no University College London, observou que o mapa dos condados da Inglaterra poderia ser colorido com quatro cores de forma a garantir que condados vizinhos tivessem cores diferentes.

Francis Guthrie deparou-se com mapas nos quais três cores não eram suficientes para essa tarefa, mas ele conjecturou que quatro cores seriam o bastante para todos os mapas e buscou fundamentar essa hipótese com uma prova. Tal problema ficou conhecido como o “Problema das Quatro Cores”, isto é, “Quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa no plano com a condição de que regiões adjacentes (que tenham uma linha de fronteira) não sejam coloridas com a mesma cor?”. Francis Guthrie compartilhou essa prova com seu irmão mais novo, Frederick, que estava estudando na época sob a tutela do renomado Augustus De Morgan. No entanto, Francis não estava completamente satisfeito com a validade da prova que havia apresentado. Com autorização de Francis, Frederick mostrou o conteúdo que Francis havia escrito a De Morgan em 23 de outubro de 1852. De Morgan reagiu de forma positiva, considerando a ideia algo inovador.

Passados 28 anos, durante um encontro ocorrido em 1878 na London Mathematical Society, sob a liderança de Henry Smith do Exeter College, Oxford, houve um ressurgimento do interesse em relação ao Problema das Quatro Cores. Entre os estudantes presentes no encontro estava Percy John Heawood. No dia 13 de junho de 1878, Cayley levantou a questão de saber se esse problema já havia sido solucionado. Durante o encontro, encontrava-se um matemático amador brilhante conhecido como Alfred Bray Kempe.

Apenas um ano após o encontro, em 17 de julho de 1879, Kempe fez um

anúncio na revista *Nature* no qual afirmava ter solucionado o problema e demonstrado que todos os mapas poderiam ser coloridos com quatro cores ou menos. Kempe (1849-1922) havia concluído seus estudos na Universidade de Cambridge em 1872, tendo se aprofundado na matemática sob a orientação de Cayley. Foi Cayley quem incentivou Kempe a compartilhar sua descoberta, o que ocorreu em 1879, quando ele publicou seu achado no segundo volume do *American Journal of Mathematics*. Kempe foi honrado por sua conquista ao ser eleito membro da Royal Society em 1881 e ao atuar como seu tesoureiro por vários anos. Ele também publicou duas melhorias em sua prova, sendo que uma delas despertou o interesse do matemático Peter Guthrie Tait (1831–1901), que apresentou suas próprias soluções para o Problema das Quatro Cores.

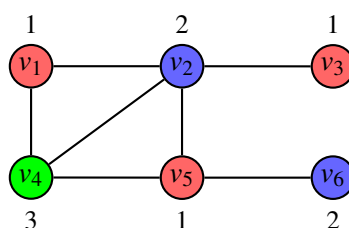
Um marco subsequente na trajetória do Problema das Quatro Cores teve a participação do matemático britânico Percy John Heawood. Heawood (1861–1955) realizou seus estudos na Universidade de Oxford e foi membro do corpo docente do Durham College por mais de cinquenta anos. Em 1890, Heawood publicou um artigo intitulado “Teorema de coloração de mapas”, no qual identificou uma “deficiência” na célebre solução proposta por Kempe para o Problema das Quatro Cores, apresentando um contraexemplo à prova de Kempe. Kempe admitiu a validade das observações de Heawood, reconhecendo o desafio que isso representava. De forma proativa, informou a London Mathematical Society sobre as contribuições de Heawood e reconheceu sua própria incapacidade de retificar o equívoco presente em seu trabalho inicial. Por outro lado, Heawood também enfrentou dificuldades ao tentar corrigir o erro de Kempe. Curiosamente, o enigma proposto pelo Problema das Quatro Cores cativou Heawood de tal maneira que ele se dedicou a ele incansavelmente ao longo de sua vida.

A Conjectura das Quatro Cores, que postula a possibilidade de colorir todo mapa utilizando quatro cores ou menos, recebeu ampla notoriedade. A convicção em sua veracidade era compartilhada por muitos. O caso apresentado por Heawood não constituía uma refutação direta à Conjectura das Quatro Cores, mas sim um desafio à técnica empregada por Kempe. De fato, não era uma tarefa tão árdua demonstrar que o mapa desenvolvido por Heawood admitia uma coloração com apenas quatro cores. Apesar do insucesso do método de Kempe, Heawood soube aproveitar essa abordagem para estabelecer que a coloração de qualquer mapa era viável com cinco cores ou menos. Por outro lado, a existência de mapas que demandassem exatamente cinco cores, se de fato existissem, permaneceu uma incógnita, revelada somente 86 anos depois da refutação da prova apresentada por Kemp. Apesar de várias tentativas ao longo dos anos, a conjectura só foi finalmente demonstrada em 1976 por Appel e Haken [1]. Para assegurar a solidez da prova de Appel e Haken, Robertson *et al.* [37] apresentaram em 1997 uma abordagem mais simplificada, baseada nas mesmas ideias e apoiada pelo uso de computadores.

Tal problema pode ser modelado por um grafo, que é uma representação abstrata

de um conjunto de objetos e das relações existentes entre eles. Problemas de coloração estão entre os mais estudados em teoria dos grafos. O interesse por esse tipo de problema foi iniciado com o Teorema das Quatro Cores. Desde então, surgiram diversas variantes do problema de coloração em grafos. Dentre essas variantes, podemos mencionar a *coloração de vértices*, a *coloração de arestas*, a *coloração de identificação local*, a *coloração gulosa*, a *coloração total*, etc.

O problema de **coloração de vértices** consiste em atribuir cores aos vértices de um grafo de tal forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes. Essa coloração é chamada de **coloração própria**. O número mínimo de cores necessárias para colorir um grafo  $G$  é seu **número cromático**, denotado por  $\chi(G)$ . A função  $c : V \rightarrow \mathbb{N}$  associa a cada vértice  $v \in V(G)$  uma cor  $c(v) \in \mathbb{N}$ . Na Figura 1.1, apresentamos um grafo  $G$  e sua coloração mínima de vértices, ou seja,  $\chi(G) = 3$ . Em caso de indisponibilidade de cores, cada cor é representada por um número natural. Na Figura 1.1, a cor vermelha é associada ao número 1, a cor azul ao número 2, e a cor verde ao número 3.

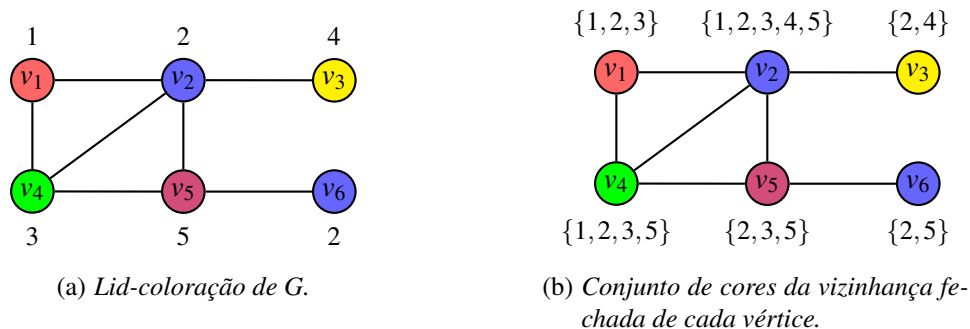


**Figura 1.1:** Coloração de vértices de  $G$ .

A tarefa de colorir os vértices de um grafo é, em princípio, uma tarefa simples, no entanto, encontrar uma coloração própria com o menor número possível de cores é, em geral, uma tarefa desafiadora. O método de força bruta, que consiste em considerar todas as combinações possíveis, pode ser aplicado, mas sua aplicação torna-se altamente insatisfatória à medida que o tamanho do grafo aumenta, tornando-se rapidamente impraticável [14].

Uma **coloração de identificação local** (lid-coloração) de um grafo é uma coloração própria tal que, para qualquer aresta  $uv$ , se  $u$  e  $v$  têm vizinhanças fechadas distintas, então os conjuntos de cores usados nos vértices das vizinhanças fechadas de  $u$  e  $v$  são distintos, isto é, cada vértice do grafo será identificado localmente, o que justifica o nome de coloração de identificação local. O **número cromático de identificação local** (número lid-cromático) do grafo  $G$ , denotado por  $\chi_{lid}(G)$ , é o menor número de cores necessárias em qualquer lid-coloração de  $G$ . Na Figura 1.2(a), apresentamos uma coloração de identificação local do grafo  $G$ , e na Figura 1.2(b), além da coloração, apresentamos os conjuntos de cores das vizinhanças fechadas de cada vértice, neste caso, todos distintos. Observa-se que a coloração de identificação local do grafo  $G$  apresentada é mínima, ou seja,  $\chi_{lid}(G) = 5$ . Note que o grafo da Figura 1.2 tem  $\chi(G) = 3$  (vide Figura 1.1), porém

$\chi_{lid}(G) = 5$ . Observe que como a lid-coloração é uma coloração própria, para qualquer grafo  $G$ , é válido que  $\chi(G) \leq \chi_{lid}(G)$ . O grafo completo satisfaz a igualdade.



**Figura 1.2:** Grafo  $G$  com  $\chi_{lid}(G) = 5$ .

A lid-coloração foi introduzida na literatura em 2012, por Esperet *et al.* [16]. Eles propuseram diversos limites para o parâmetro  $\chi_{lid}(G)$  em várias famílias distintas de grafos, abrangendo desde grafos planares até subclasses de grafos perfeitos, bem como grafos com grau máximo limitado. Um resultado importante apresentado foi a demonstração de que, para qualquer grafo bipartido  $G$ , tem-se  $\chi_{lid}(G) \leq 4$ . Além disso, foi estabelecido que decidir se um grafo bipartido é 3-lid-colorível é um problema NP-completo, enquanto, por outro lado, é possível decidir em tempo linear se uma árvore é 3-lid-colorível. Esperet *et al.* [16] também conjecturaram que, para qualquer grafo cordal  $G$ ,  $\chi_{lid}(G) \leq 2\chi(G)$ . Eles verificaram a conjectura para subclasses de grafos cordais, como grafos de intervalos, grafos *split* e cografos. Recentemente, Bhyravarapu, Kumari e Reddy [8] demonstraram que a conjectura é válida para grafos blocos, que constituem uma subclasse de grafos cordais.

Para o caso em que  $G$  é um grafo planar, Gonçalves, Parreau e Pinlou [19] demonstraram que  $\chi_{lid}(G) \leq 1280$ . Eles também estabeleceram que, para qualquer classe de grafos com expansão limitada, o número lid-cromático é limitado, fornecendo, assim, um limite superior explícito para o número lid-cromático de grafos planares. Essa conclusão responde a uma questão apresentada em Esperet *et al.* [16], que indagava se  $\chi_{lid}(G)$  é limitado para a classe de grafos planares. Martins e Sampaio [26] obtiveram algoritmos de tempo linear para calcular o número lid-cromático em algumas classes de grafos com poucos  $P_4$ 's, como cografos, grafos  $P_4$ -esparsos e  $(q, q-4)$ -grafos. Além disso, mostraram que, dado um grafo  $G$  com  $n$  vértices, o número lid-cromático  $\chi_{lid}(G)$  é  $O(n^{1-\epsilon})$ -inaproximável em tempo polinomial para qualquer  $\epsilon > 0$ , a menos que  $P = NP$ .

Recentemente, Bhyravarapu, Kumari e Reddy [8] forneceram uma caracterização completa dos grafos cujo número lid-cromático igual a  $n$ , onde  $n$  é o número de vértices do grafo. Além disso, eles demonstraram que o número lid-cromático, quando restrito a grafos bipartidos biconvexos, pode ser calculado em tempo linear. Bhyravarapu, Kumari e Reddy [7] apresentaram limites superiores para os produtos Cartesiano e direto

de dois grafos, em função do número cromático dos fatores. Adicionalmente, eles determinaram o número lid-cromático dos produtos Cartesiano e direto em que os fatores são ciclos e caminhos.

Pavithra e Reji [35] estudaram a lid-coloração do produto forte de grafos, obtendo resultados gerais e valores exatos para algumas classes de grafos. Em particular, estabeleceram o limite superior  $\chi_{lid}(G \boxtimes H) \leq \chi_{lid}(G)\chi_{lid}(H)$ , mostraram que  $G \boxtimes H$  não é 4-lid-colorível quando os fatores não são isomorfos a  $K_2$ , e provaram que, se  $G$  e  $H$  são grafos bipartidos conexos 3-lid-coloríveis, então  $\chi_{lid}(G \boxtimes H) = 6$ . Além disso, determinaram valores exatos e limites para  $\chi_{lid}(P_m \boxtimes P_n)$  e  $\chi_{lid}(P_m \boxtimes C_n)$ .

Após revisar a literatura disponível, constatamos uma escassez de estudos abordando a lid-coloração, possivelmente devido à dificuldade do problema e também por ser um tema relativamente recente. Diante desse cenário, decidimos direcionar nossa pesquisa para essa área, reconhecendo a relevância e o desafio que esse problema representa.

Ao conjecturar que  $\chi_{lid}(G) \leq 2\chi(G)$  para qualquer grafo cordal  $G$ , Esperet *et al.* [16] apresentaram o grafo potência de caminho como um exemplo de grafo cordal que satisfaz tal conjectura. Além disso, eles demonstraram o caso em que a igualdade é alcançada. Assim, iniciamos nosso estudo investigando o número lid-cromático no grafo potência de caminho para os casos não estudados. Como o grafo *split* também é um grafo cordal, Esperet *et al.* [16] provaram que ele satisfaz a conjectura apresentada. Em nosso trabalho, determinamos o número lid-cromático para casos específicos de grafos *split*. Além disso, mostramos que o problema de decidir se um grafo *split* admite uma  $\ell$ -lid-coloração é um problema NP-completo.

No que diz respeito à lid-coloração no produto entre dois grafos, observamos a ausência de trabalhos abordando o produto corona. Por isso, investigamos também a lid-coloração nesse contexto. Para o produto corona, apresentamos o número lid-cromático para o caso em que os fatores são caminhos, ciclos, grafo completo e o complemento de um grafo completo. Além disso, fornecemos limites inferiores e superiores para alguns casos. Apresentamos limites superiores justos para o produto corona de dois grafos quaisquer. Além disso, mostramos que o problema de decidir se um grafo produto corona admite uma  $\ell$ -lid-coloração é um problema NP-completo, com  $\ell \geq 5$ .

Esperet *et al.* [16] demonstraram que o número lid-cromático do grafo resultante do produto Cartesiano entre dois grafos bipartidos é três. Assim, em nosso estudo, consideramos o produto Cartesiano em que um dos fatores é o grafo completo, ou seja, pelo menos um dos dois grafos é diferente de um grafo bipartido. Nesse sentido, mostramos o número lid-cromático do produto do grafo completo por caminho. Além disso, fornecemos limites inferiores e superiores para os grafos resultantes do produto Cartesiano entre o grafo completo e o ciclo, bem como entre dois grafos completos.

Ressaltamos que parte dos resultados desta tese foi divulgada em periódicos

---

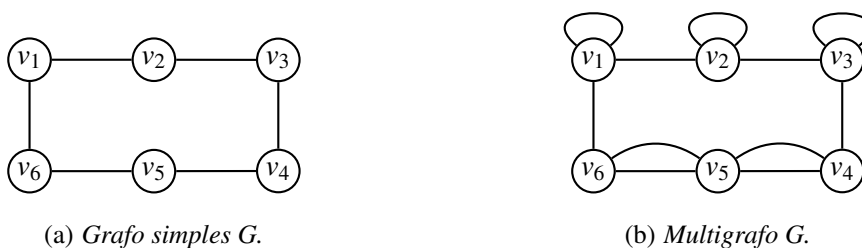
científicos e em anais de eventos, além de ter sido apresentada em congressos. Um artigo contendo resultados sobre a *lid*-coloração de potências de caminhos e de grafos *split* completos, conforme detalhado nos Capítulos 3 e 4, foi publicado na revista *Matemática Contemporânea* [28]. Um resumo expandido envolvendo o produto Cartesiano, tratado no Capítulo 6, foi apresentado no *VIII Encontro de Teoria da Computação* [30]. Os resultados referentes à *lid*-coloração do produto corona de ciclos e caminhos, estudados no Capítulo 5, foram apresentados no *IX Encontro de Teoria da Computação* [31]. Além disso, um artigo reunindo resultados sobre a *lid*-coloração do produto corona quando ambos os fatores são grafos completos, assim como resultados de complexidade associados a esse produto, foi apresentado no *LVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional* [29]. Atualmente, esse trabalho encontra-se em processo de ampliação para posterior submissão a uma revista da área. Por fim, encontra-se em revisão, um artigo submetido em outubro de 2025, contendo os resultados de NP-completude para grafos *split* e os resultados sobre grafos *split*-comparabilidade desenvolvidos no Capítulo 4 [32].

O restante deste texto organiza-se em seis capítulos. No Capítulo 2, apresentamos conceitos preliminares de teoria dos grafos e as notações utilizadas ao longo do trabalho. No Capítulo 3, revisamos resultados da literatura sobre os grafos caminho e ciclo, potência de caminho e os grafos bipartidos; em seguida, expomos nossos resultados sobre potência de caminho. No Capítulo 4, desenvolvemos resultados de *lid*-coloração em grafos *split*. Na sequência, no Capítulo 5, reunimos nossos resultados sobre a *lid*-coloração no produto corona. No Capítulo 6, apresentamos resultados para o produto Cartesiano. Por fim, no Capítulo 7, trazemos as considerações finais, destacamos os principais resultados obtidos e possíveis direções para trabalhos futuros.

## Conceitos preliminares

Neste capítulo, são apresentadas definições e notações fundamentais para a compreensão desta tese. Os conceitos aqui expostos seguem a terminologia adotada por Bondy e Murty [9], Chartrand [11] e Diestel [15]. Outras definições serão gradualmente introduzidas nos capítulos subsequentes, quando apropriado.

Um **grafo**  $G$  é um **terna ordenada**  $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ , onde  $V(G)$  é um conjunto não vazio de **vértices**,  $E(G)$  é um conjunto de **arestas**, disjunto de  $V(G)$ , e  $\psi_G : E(G) \rightarrow \{\{u, v\} : u, v \in V(G)\}$  é uma função de incidência que associa a cada aresta  $e \in E(G)$  um par não ordenado de vértices de  $G$ . Se  $\psi_G(e) = uv$ , então dizemos que a aresta  $e$  **liga** os vértices  $u$  e  $v$ , e os vértices  $u$  e  $v$  são chamados de **extremidades** de  $e$ . Além disso, **vértice universal** é um vértice adjacente a todos os outros vértices do grafo. Duas arestas são adjacentes se compartilham uma mesma extremidade. Se uma aresta possui extremidades iguais, ela é um **laço**, enquanto que se duas arestas distintas possuírem duas extremidades iguais, são chamadas de **multiarestas**. Grafos que possuem laços e multiarestas são denominados **multigrafos**. Dizemos que um grafo é **finito** se os seus conjuntos de vértices e arestas são finitos. Um grafo é chamado de **nulo** quando não possui vértices nem arestas e é considerado **vazio** quando possui um conjunto de vértices, mas não contém arestas. Um grafo que não possui laços nem multiarestas é denominado **grafo simples**. Nesse caso, o grafo é representado pelo par ordenado  $G = (V, E)$ , onde  $V$  denota o conjunto de vértices e  $E$  o conjunto de arestas. A Figura 4.14(a) apresenta um grafo simples, enquanto que na Figura 4.14(b) é exibido um multigrafo.



**Figura 2.1:** Grafo e multigrafo.

A partir de agora, toda vez que mencionarmos o termo grafo, estaremos nos

referindo a um grafo simples, não nulo e finito. O **complemento** de um grafo  $G = (V, E)$  é o grafo  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  tal que  $uv \in \bar{E}$  se, e somente se,  $uv \notin E$ . Na Figura 2.2(a) apresentamos um grafo  $G$ , enquanto que na Figura 2.2(b) exibimos o seu complemento  $\bar{G}$ . Observa-se que todos os pares de vértices adjacentes em  $G$  não são adjacentes em  $\bar{G}$ , e vice-versa.



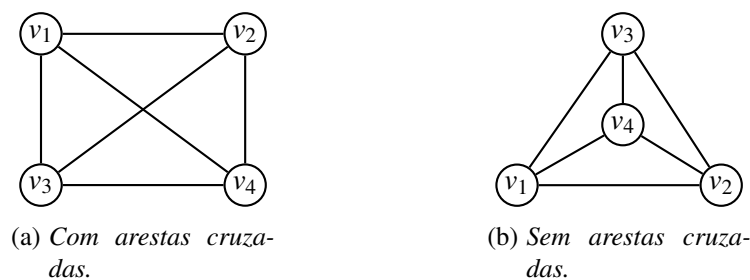
**Figura 2.2:** Grafo  $G$  e seu complemento  $\bar{G}$ .

Em um grafo  $G$ , o **grau** de um vértice  $v$  é o número de arestas incidentes a  $v$  e é denotado por  $d_G(v)$ . O grau máximo de  $G$  é representado por  $\Delta(G) = \max\{d_G(v), v \in V(G)\}$  e, de forma análoga, o grau mínimo do grafo  $G$  é denotado por  $\delta(G) = \min\{d_G(v), v \in V(G)\}$ . Quando não houver ambiguidade em relação ao grafo em questão, o grau de um vértice  $v$  é denotado simplesmente por  $d(v)$ . Se  $\Delta(G) = \delta(G) = k$ , então  $G$  é denominado de  **$k$ -regular**. Um grafo 3-regular é também chamado de **grafo cúbico**. Na Figura 2.3, temos um exemplo de um grafo cúbico com duas representações distintas.

Para qualquer vértice  $u$ , denotamos por  $N_G(u)$  sua **vizinhança aberta**, que consiste no conjunto de vértices adjacentes a  $u$ . O conjunto  $N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$  representa a **vizinhança fechada** de  $u$ . Observe que na Figura 2.3, temos  $N_G(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$ , que é a vizinhança aberta, enquanto que  $N_G[v_1] = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  é a vizinhança fechada do vértice  $v_1$ . Dois vértices,  $u$  e  $v$ , são denominados **gêmeos verdadeiros** se  $N[u] = N[v]$  e **gêmeos falsos** se  $N(u) = N(v)$ . Dizemos que um grafo  $G$  é **livre de gêmeos verdadeiros** se não possui dois vértices distintos que sejam gêmeos verdadeiros, e que  $G$  é **livre de gêmeos falsos** se não possui dois vértices distintos que sejam gêmeos falsos. Considerando o conjunto  $S \subseteq V(G)$ , denotamos  $N_G[S]$  como a união das vizinhanças fechadas dos vértices de  $S$ , isto é,  $N_G[S] = \bigcup_{u \in S} N_G[u]$ . Não havendo ambiguidade, escrevemos  $N[u]$  ou  $N[S]$  em vez de  $N_G[u]$  ou  $N_G[S]$ .

Um grafo é denominado **planar** se puder ser representado em um plano de tal forma que não haja cruzamento de suas arestas, exceto nas extremidades.

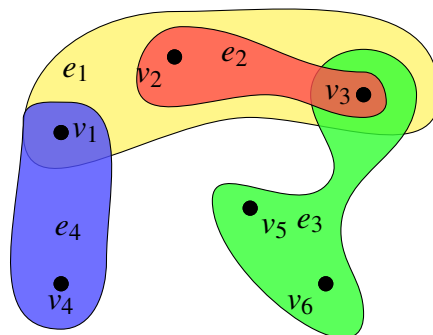
Na Figura 2.3, apresentamos duas formas distintas de desenhar o mesmo grafo. Observe que tanto na Figura 2.3(a) como na Figura 2.3(b), o conjunto  $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$  é o mesmo, porém na Figura 2.3(b) não há cruzamento de arestas, exceto nas extremidades. Portanto, esse grafo é planar.



**Figura 2.3:** Formas distintas de representar o mesmo grafo planar.

Um grafo  $H$  é um **subgrafo** de  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ . Se  $H$  contém todas as arestas  $uv \in E(G)$  para todo  $u, v \in V(H)$ , então  $H$  é um **subgrafo induzido** de  $G$ , denotado por  $G[V(H)]$ . Dizemos que  $V(H)$  induz ou gera  $H$  em  $G$ .

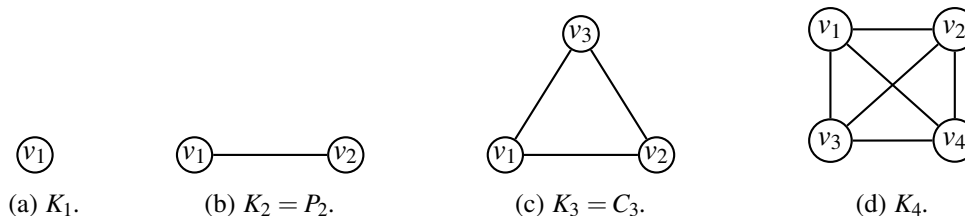
Denomina-se **passeio** em  $G$  uma sequência de vértices  $(v_0, v_1, \dots, v_k)$  tal que  $v_{i-1}v_i \in E(G)$  para todo  $1 \leq i \leq k$ . Quando todos os vértices da sequência são distintos, o passeio é chamado de **caminho**. Um grafo com  $n$  vértices que é um caminho é chamado de **grafo caminho** e é denotado por  $P_n$ . O **comprimento** de um caminho é o número de arestas que o compõem. Na Figura 2.5(b), apresentamos o caminho  $P_2$ . A **distância entre dois vértices**  $u$  e  $v$  em um grafo  $G$  é o comprimento do menor caminho que os conecta em  $G$  e é denotada por  $d_G(u, v)$ , ou simplesmente  $d(u, v)$ . Denominamos de **diâmetro** e denotamos por  $diam(G)$  a maior distância existente entre dois vértices quaisquer de um grafo  $G$ . Um **passeio fechado** é aquele que começa e termina no mesmo vértice, isto é  $v_0 = v_k$ . Observe que se o passeio fechado incluir todos os vértices de forma distinta, exceto  $v_0$  e  $v_k$ , então é denominado **ciclo**. Um grafo que é um ciclo com  $n$  vértices ( $n \geq 3$ ) é chamado de **grafo ciclo** e é denotado por  $C_n$ . Na Figura 2.5(c), é ilustrado o ciclo  $C_3$ . Um **hipergrafo**  $H = (V, E)$  é um par onde  $V$  é o conjunto de vértices do hipergrafo e  $E \subseteq 2^V$  é chamado de **hiperarestas** do hipergrafo  $H$ . Diferente dos grafos tradicionais, onde cada aresta conecta exatamente dois vértices, em um hipergrafo, cada aresta pode conectar um número arbitrário de vértices. Na Figura 2.4, apresentamos um hipergrafo em que  $e_1, e_2, e_3$  e  $e_4$  são as hiperarestas.



**Figura 2.4:** Exemplo de hipergrafo.

Chamamos de **cintura** a cardinalidade do menor ciclo em um grafo  $G$ , representada por  $g(G)$ . No caso em que o grafo é acíclico, ou seja, não possui ciclo, definimos  $g(G) = \infty$ . Um grafo é considerado **conexo** se, para todo par de vértices distintos em  $G$ , existe um caminho entre eles; caso contrário, é **desconexo**. Uma **árvore** é um grafo conexo e acíclico. Denotamos o conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  como  $[n]$ . Dados  $a, b \in \mathbb{Z}$ , com  $a < b$ , denominamos o **intervalo fechado**  $[a, b] = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \leq x \leq b\}$ .

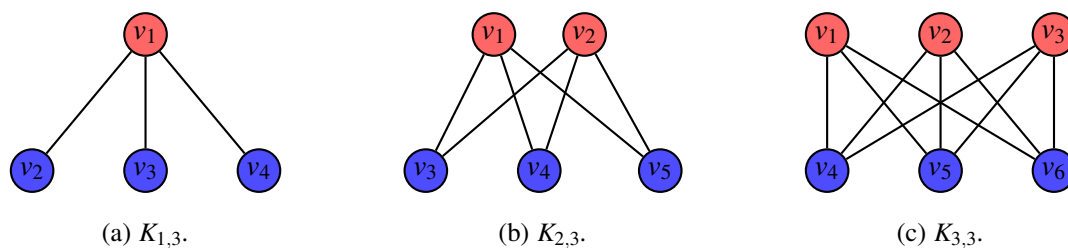
Um grafo que possui arestas entre qualquer par de vértices é denominado **grafo completo**. Um grafo completo com  $n$  vértices é representado por  $K_n$ . Um grafo que não possui nenhuma aresta é chamado de **grafo vazio**. Um **triângulo** em um grafo  $G$  é um subgrafo de  $G$  isomorfo ao grafo completo  $K_3$ . Um grafo  $G$  é dito **livre de triângulos** se não contém triângulos como subgrafos. Na Figura 2.5, apresentamos os grafos completos  $K_n$  com  $1 \leq n \leq 4$ .



**Figura 2.5:** Representação do grafo completo  $K_n$  com  $1 \leq n \leq 4$ .

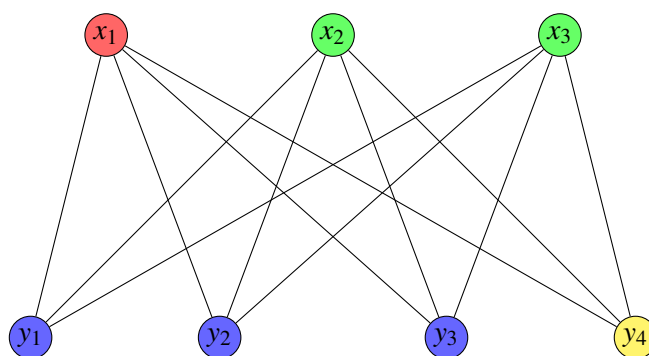
Se  $G$  é um grafo com  $n$  vértices, denotamos a sua **ordem** por  $n(G)$  ou simplesmente  $n$ , representando o número total de vértices em  $G$ . Observa-se que se  $n(G) = 1$ , então o grafo é chamado de **trivial**. Na Figura 2.5(a), observe que  $n(K_1) = 1$ , assim o grafo  $K_1$  é um grafo trivial.

Um grafo é **bipartido** se os seus vértices podem ser particionados em dois conjuntos disjuntos  $X$  e  $Y$  tais que toda aresta possui um extremo em  $X$  e outro em  $Y$ . A bipartição  $(X, Y)$  é chamada de **partição** do grafo, onde  $X$  e  $Y$  são as suas **partes**. Um grafo é bipartido se, e somente se, não contém ciclo ímpar. Um grafo é **bipartido completo** quando cada vértice do conjunto  $X$  é adjacente a todos os vértices do conjunto  $Y$ . O grafo bipartido completo com  $m$  vértices na parte  $X$  e  $n$  vértices na parte  $Y$  é denotado por  $K_{m,n}$ . O grafo bipartido completo  $K_{1,n}$  é chamado de grafo **estrela** e possui  $n + 1$  vértices. Na Figura 2.6 apresentamos alguns exemplos de grafos bipartidos completos. Em cada grafo, destacamos uma das partes com a cor vermelha e a outra com a cor azul.



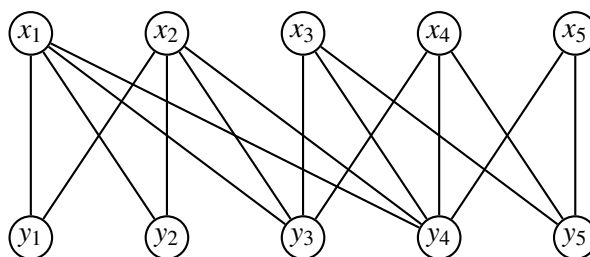
**Figura 2.6:** Exemplos de grafos bipartidos completos.

Um grafo bipartido  $G = (X \cup Y, E)$  é **convexo** se existe uma ordenação dos vértices de  $Y$ ,  $y_1, y_2, \dots, y_{|Y|}$ , tal que para cada vértice  $v \in X$ , os vértices em  $N(v)$  são consecutivos nessa ordenação. Na Figura 2.7, mostramos um grafo bipartido convexo.



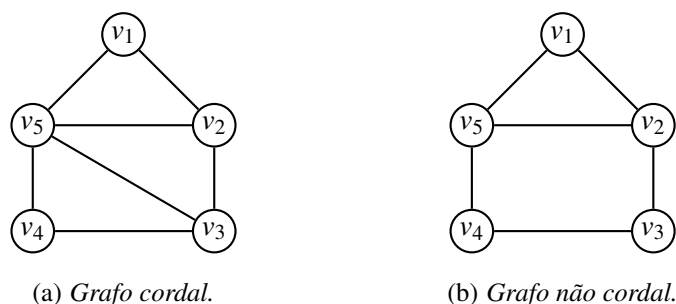
**Figura 2.7:** Grafo bipartido convexo.

Um grafo bipartido  $G = (X \cup Y, E)$  é **biconvexo** se existem ordenações  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{|X|}\}$  e  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{|Y|}\}$  tais que para cada vértice  $v \in X$ ,  $N(v) \subseteq Y$  são consecutivos na ordenação de  $Y$ , e para cada vértice  $u \in Y$ , os vértices  $N(u) \subseteq X$  são consecutivos na ordenação de  $X$ . Na Figura 2.8, apresentamos um exemplo de um grafo biconvexo.



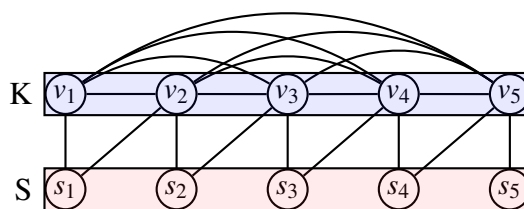
**Figura 2.8:** Grafo bipartido biconvexo.

Seja  $G$  um grafo e  $C$  um ciclo em  $G$ . Uma **corda** de  $G$  é uma aresta entre dois vértices não consecutivos de  $C$ . Um grafo é dito **cordal** quando todo ciclo de tamanho maior que três possui pelo menos uma corda. O grafo representado na Figura 2.9(a) é um grafo cordal, pois não possui ciclos de tamanho maior do que três sem cordas. Já o grafo apresentado na Figura 2.9(b) não é cordal, uma vez que possui um ciclo de tamanho quatro que não possui cordas, representado pelos vértices  $v_2, v_3, v_4$  e  $v_5$ .



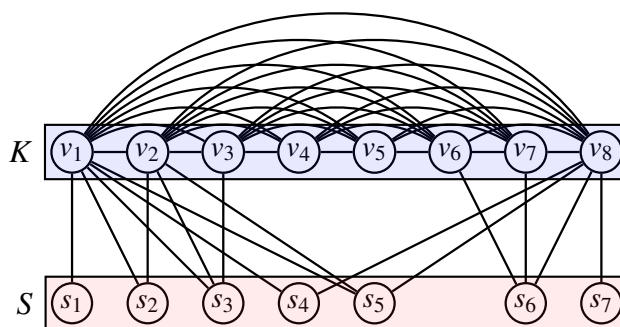
**Figura 2.9:** Exemplos de grafo cordal e não cordal.

Definimos uma **clique** como um conjunto de vértices que induzem um grafo completo. O número de vértices na maior clique de  $G$  é chamado de **número de clique** de  $G$ , denotado por  $\omega(G)$ . Um **conjunto independente** de um grafo  $G$  é um conjunto de vértices que induzem um grafo vazio. O grafo *split*  $G = (K \cup S, E)$  é um grafo cujo conjunto de vértices pode ser particionado em uma clique  $K$  de tamanho  $|K| = k$  e um conjunto independente  $S$  de tamanho  $|S| = s$ . Um exemplo de grafo *split* é apresentado na Figura 2.10.



**Figura 2.10:** Grafo *split*.

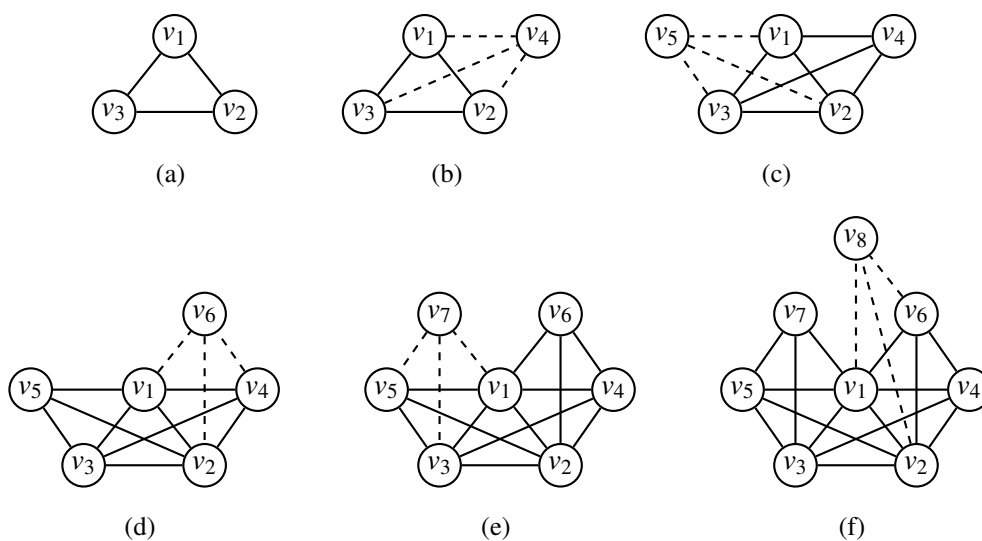
Uma **orientação transitiva** das arestas de um grafo  $G$  é uma atribuição de orientação a cada aresta de  $G$  tal que, para quaisquer vértices  $u, v, w \in V(G)$ , se as arestas  $uv$  e  $vw$  pertencem a  $G$  e são orientadas como  $(u, v)$  e  $(v, w)$ , então a aresta  $uw$  também pertence a  $G$  e é orientada como  $(u, w)$ . Um grafo  $G$  é denominado **grafo de comparabilidade** se admite uma orientação transitiva de suas arestas. Dizemos que  $G$  é um grafo **split-comparabilidade** se  $G$  pertence simultaneamente às classes dos grafos *split* e dos grafos de comparabilidade. A Figura 2.11 apresenta um exemplo de grafo *split-comparabilidade*.



**Figura 2.11:** Grafo split-comparabilidade.

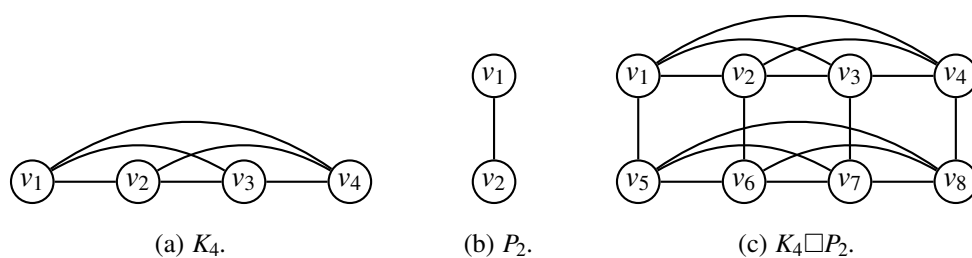
Seja  $G$  um grafo e seja  $k \geq 1$  um inteiro. A  $k$ -ésima potência de  $G$ , denotada por  $G^k$ , é o grafo tal que  $V(G^k) = V(G)$  e dois vértices distintos  $u, v \in V(G)$  são adjacentes em  $G^k$  se, e somente se,  $1 \leq d_G(u, v) \leq k$ .

Uma  $k$ -árvore é um grafo cujos vértices podem ser ordenados como  $v_1, v_2, \dots, v_n$  de tal modo que os vértices de  $v_1$  até  $v_{k+1}$  induzem uma clique de tamanho  $k + 1$ , e para cada  $k + 2 \leq i \leq n$ , os vizinhos de  $v_i$  em  $\{v_j \mid j < i\}$  induzem uma clique de tamanho  $k$ . Por definição, para todo  $k + 1 \leq i \leq n$ , o grafo  $G_i$  induzido por  $\{v_j \mid j \leq i\}$  é uma  $k$ -árvore, e toda clique de tamanho  $k$  em uma  $k$ -árvore está contida em uma clique de tamanho  $k + 1$ . Na Figura 2.12, apresentamos a construção de uma 3-árvore. A construção foi realizada com base na definição. Adiciona-se um vértice adjacente aos vértices de uma clique de tamanho 3 do grafo da Figura 2.12(a), resultando em uma clique de tamanho 4 representada pela Figura 2.12(b). Em cada etapa, três arestas são inseridas, indicadas em pontilhado apenas para destacar o processo de construção do grafo. Note que a cada passo, uma nova clique de tamanho 4 é formada. Os rótulos dos vértices representam a sequência de inserções.



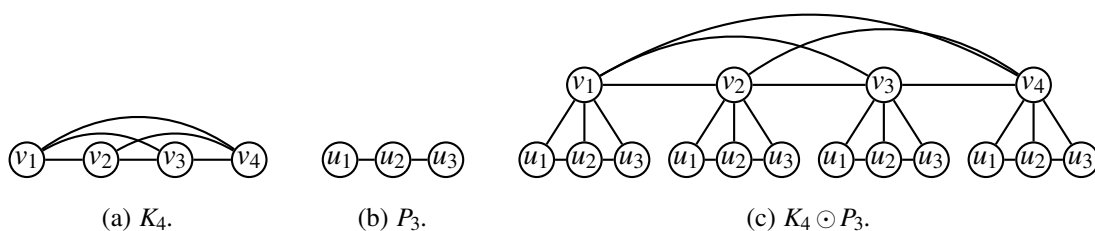
**Figura 2.12:** Construção de uma 3-árvore.

Sejam  $G$  e  $H$  grafos com  $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  e  $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ . O **produto Cartesiano** de  $G$  e  $H$ , denotado por  $G \square H$ , é o grafo com conjunto de vértices  $V(G) \times V(H)$ , e dois vértices  $(u_i, v_j)$  e  $(u_h, v_k)$  de  $G \square H$  são adjacentes se  $(v_j, v_k) \in E(H)$  e  $i = h$ , ou se  $(u_i, u_h) \in E(G)$  e  $j = k$ . Um exemplo de produto Cartesiano é exibido na Figura 2.13.



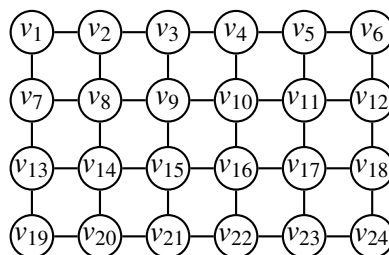
**Figura 2.13:** Grafos  $K_4$ ,  $P_2$  e o produto Cartesiano  $K_4 \square P_2$ .

O **produto corona**  $G \odot H$  de dois grafos  $G$  e  $H$  é definido como o grafo obtido a partir de  $G$  e  $H$  ao tomar uma cópia de  $G$  e  $|V(G)|$  cópias de  $H$  e, em seguida, ligar todos os vértices da  $i$ -ésima cópia de  $H$  com o  $i$ -ésimo vértice de  $G$ . Assim, se  $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  e  $V(H) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , então  $V(G \odot H) = V(G) \cup V(H_1) \cup V(H_2) \cup \dots \cup V(H_n)$ , onde  $V(H_i) = \{a_{ij} \mid 1 \leq j \leq m\}$  é o conjunto de vértices da  $i$ -ésima cópia de  $H$ , e  $E(G \odot H) = E(G) \cup \{x_i a_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{a_{ij} a_{ik} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j < k \leq m, \text{ sempre que } a_j a_k \in E(H)\}$ . O grafo produto corona  $K_4 \odot P_3$  é apresentado na Figura 2.14.



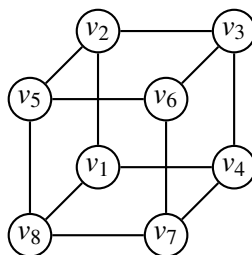
**Figura 2.14:** Grafos  $K_4$ ,  $P_3$  e o corona  $K_4 \odot P_3$ .

Um grafo  $G$  é chamado de **grafo grade** se seus vértices podem ser dispostos em uma matriz  $m \times n$  (com  $m$  linhas e  $n$  colunas) de modo que cada vértice está conectado aos seus vizinhos adjacentes horizontais e verticais. O grafo grade pode ser obtido através do produto Cartesiano de  $P_m$  por  $P_n$ . O grafo grade  $P_m \square P_n$  possui  $m \cdot n$  vértices e  $2m \cdot n - m - n$  arestas. Na Figura 2.15, apresentamos o grafo grade  $P_4 \square P_6$ .



**Figura 2.15:** Grafo grade  $P_4 \square P_6$ .

Um **hipercubo de dimensão  $n$** , também conhecido como  $n$ -cubo, é um grafo que pode ser definido recursivamente da seguinte forma: um hipercubo de dimensão 0,  $Q_0$ , consiste em um único vértice. Um hipercubo de dimensão  $n$ ,  $Q_n$ , é formado a partir de dois hipercubos de dimensão  $n - 1$ ,  $Q_{n-1}$ , conectando cada vértice de um  $Q_{n-1}$  a cada vértice correspondente do outro  $Q_{n-1}$  com uma aresta. Formalmente, o hipercubo de dimensão  $n$ ,  $Q_n$ , pode ser construído como o produto cartesiano de  $n$  grafos completos  $K_2$ . O número de vértices em  $Q_n$  é  $2^n$  e o número de arestas é  $n \cdot 2^{n-1}$ . Na Figura 2.16 está ilustrado um hipercubo de dimensão 3.

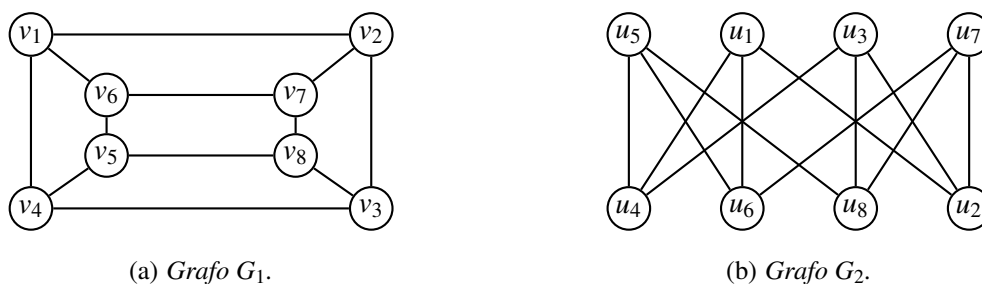


**Figura 2.16:** Hipercubo  $Q_3$ .

Uma **coloração de vértices própria** é uma atribuição de cores aos vértices de um grafo de forma que vértices adjacentes não compartilhem a mesma cor. Uma  **$k$ -coloração** de um grafo  $G$  é uma coloração de vértices que utiliza um conjunto de  $k$  cores. Um grafo é  **$k$ -colorível** se existe uma  $k$ -coloração de vértices de  $G$ . Além disso, dada uma coloração  $c : V \rightarrow \mathbb{N}$ , definimos  $c(S)$  como o conjunto de cores atribuídas aos vértices em  $S$ .

No decorrer do texto, utilizaremos a seguinte notação: dada uma sequência  $M$  de cores,  $(M)^x$  indica que a sequência  $M$  será repetida  $x$  vezes. Se  $x = *$ , significa que a sequência  $M$  pode ser repetida zero ou mais vezes. Se  $x = op$ , então a sequência é opcional, no caso em que a sequência opcional aparecer mais de uma vez, apenas uma delas será usada. Além disso  $(M) = (M)^1$ .

Um **isomorfismo** de um grafo  $G_1$  para um grafo  $G_2$  é uma bijeção  $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  entre os conjuntos de vértices de  $G_1$  e  $G_2$ , tal que quaisquer dois vértices  $u$  e  $v$  são adjacentes em  $G_1$  se, e somente se,  $f(u)$  e  $f(v)$  são adjacentes em  $G_2$ . Nesse caso, dizemos que  $G_1$  é **isomorfo** a  $G_2$  e denotamos por  $G_1 \cong G_2$ . Um exemplo de grafos isomorfos pode ser visualizado na Figura 2.17.

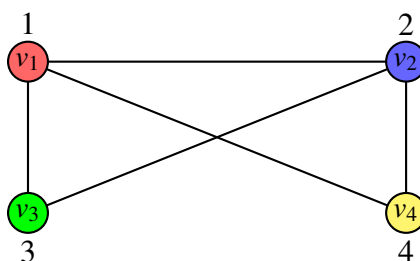


**Figura 2.17:** Os grafos  $G_1$  e  $G_2$  são isomorfos.

Observe que  $G_1 \cong G_2$ , pois existe uma função bijetora  $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  tal que  $f(v_i) = u_i$ , com  $1 \leq i \leq 8$  preservando todas as arestas e não arestas do grafo  $G_1$ . Por exemplo,  $N[v_1] = \{v_1, v_2, v_4, v_6\}$  em  $G_1$  e  $N[f(v_1)] = \{f(v_1), f(v_2), f(v_4), f(v_6)\}$  em  $G_2$ , onde  $f$  é a função bijetora que estabelece o isomorfismo entre  $G_1$  e  $G_2$ . O mesmo padrão ocorre com os demais vértices.

Dizemos que os inteiros  $a$  e  $b$  são **congruentes** módulo  $m$  se possuem o mesmo resto quando divididos por  $m$ . Denotamos tal relação por  $a \equiv b \pmod{m}$ . A **diferença simétrica** de dois conjuntos  $A$  e  $B$  é o conjunto de elementos que estão em qualquer um dos conjuntos, mas não em sua interseção. A diferença simétrica entre dois conjuntos  $A$  e  $B$  é denotada por  $A \Delta B$ .

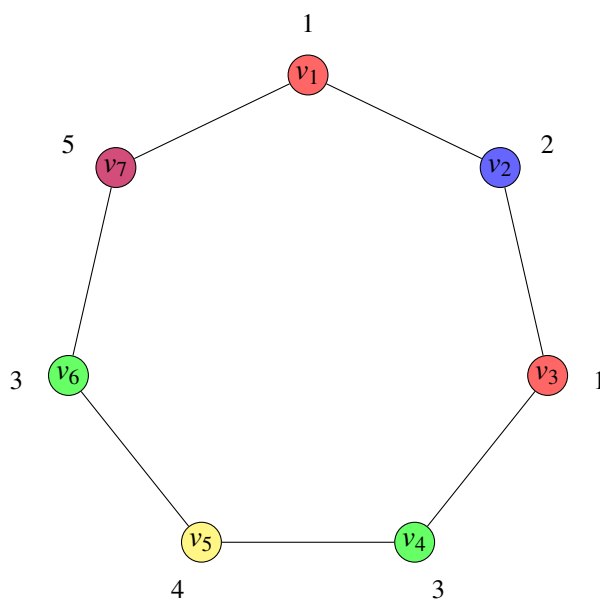
Esperet et al. [16] introduziram o conceito de **coloração de identificação local forte** (lid-coloração forte). Seja  $G$  um grafo e  $c$  uma lid-coloração de  $G$  utilizando as cores  $[k]$ . Dizemos que  $c$  é uma lid-coloração forte de  $G$  se, para todo vértice  $v \in V(G)$  tal que  $N[v] \neq V(G)$ , temos  $c(N[v]) \neq [k]$ . Em outras palavras, para todo vértice  $v \in V(G)$ , se  $c(N[v]) = [k]$ , então  $v$  é um vértice universal. O menor inteiro  $k$  tal que  $G$  admite uma lid-coloração forte com  $k$  cores é chamado de **número lid-cromático forte** (ou número slid-cromático) de  $G$ , sendo denotado por  $\chi_{slid}(G)$ . A Figura 2.18 ilustra uma lid-coloração forte do grafo  $G$ . Note que  $c(N[v_1]) = c(N[v_2]) = [4]$ , onde  $v_1$  e  $v_2$  são vértices universais.



**Figura 2.18:** Lid-coloração forte de  $G$ .

Pavithra e Reji [34] definiram uma **boa coloração de identificação local** (boa lid-coloração). Seja  $G$  um grafo e seja  $c$  uma  $k$ -lid-coloração de  $G$ . Dizemos que  $c$  é uma boa  $k$ -lid-coloração se, para todo vértice  $v \in V(G)$ , tem-se  $c(N[v]) \neq [k]$ . Em particular,

em grafos sem vértices universais, as noções de boa lid-coloração e lid-coloração forte coincidem. Figura 2.19 apresenta uma boa lid-coloração do ciclo  $C_7$ . Note que, para todo vértice  $v \in V(C_7)$ , tem-se  $c(N[v]) \neq [5]$ . Assim, a coloração exibida também constitui uma lid-coloração forte.



**Figura 2.19:** Boa lid-coloração e lid-coloração forte do ciclo  $C_7$ .

---

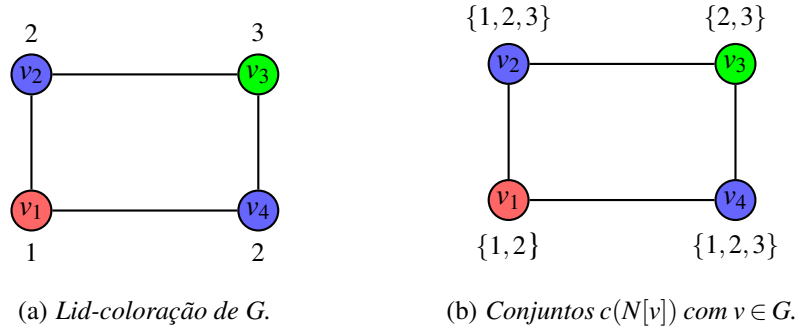
## Coloração de identificação local em algumas classes de grafos

---

Neste capítulo, reunimos resultados conhecidos sobre lid-coloração em grafos caminhos, ciclos, grafos bipartidos e potência de caminho, além de apresentarmos nossos próprios resultados para essa última classe. Inicialmente, na Seção 3.1, introduzimos formalmente o problema da lid-coloração. Em seguida, na Seção 3.2, apresentamos resultados obtidos por Esperet et al. [16] e Foucaud et al. [17] para caminhos e ciclos, respectivamente. Na Seção 3.3, discutimos resultados de Esperet et al. [16] e de Bhyravarapu, Kumari e Reddy [7] relacionados a grafos bipartidos. Por fim, na Seção 3.4, abordamos alguns resultados apresentados por Esperet et al. [16] para grafos cordais, em particular para  $k$ -árvores. Nessa mesma seção, estudamos a lid-coloração em potência de caminho, que constituem um caso particular de  $k$ -árvore, e apresentamos nossos novos resultados para essa classe de grafos.

### 3.1 O problema da coloração de identificação local

Em 2012, Esperet et al. [16] introduziram o problema da coloração de identificação local (lid-coloração). Definiram a lid-coloração como uma coloração  $c$  de vértices de um grafo  $G$  satisfazendo as seguintes condições: i)  $c$  é uma coloração própria de  $G$ , ou seja, não há dois vértices adjacentes com a mesma cor, e ii) para cada par de vértices adjacentes  $u$  e  $v$ , se  $N[u] \neq N[v]$ , então  $c(N[u]) \neq c(N[v])$ . O número cromático de identificação local do grafo  $G$ , denotado por  $\chi_{lid}(G)$ , é o menor número de cores necessárias para se obter uma lid-coloração de  $G$ . Uma  **$k$ -lid-coloração** de um grafo  $G$  é uma lid-coloração de vértices que utiliza  $k$  cores, sendo que um grafo é  **$k$ -lid-colorível** se existe uma  $k$ -lid-coloração de vértices de  $G$ . Na Figura 3.1(a), apresentamos uma lid-coloração de  $G$ , e na Figura 3.1(b), além da coloração, apresentamos os conjuntos de cores das vizinhanças fechadas de cada vértice. Note que os vértices  $v_2$  e  $v_4$  possuem o mesmo conjunto de cores em suas respectivas vizinhanças fechadas, porém  $v_2$  e  $v_4$  não são adjacentes.



**Figura 3.1:** Grafo  $G$  com  $\chi_{lid}(G) = 3$ .

Esperet et al. [16] propuseram uma variedade de limites para o parâmetro  $\chi_{lid}(G)$  em diversas famílias distintas de grafos, que incluem desde grafos planares até subclasses de grafos perfeitos, além de grafos com grau máximo limitado. Demonstraram que  $\chi_{lid}(G) \leq 4$  para qualquer grafo bipartido  $G$ . Estabeleceram também que decidir se um grafo bipartido é 3-lid-colorível é um problema NP-completo, enquanto que é possível decidir em tempo linear se uma árvore é 3-lid-colorível. Esses resultados podem ser vistos na Seção 3.3. Além disso, Esperet et al. [16] conjecturaram que, para qualquer grafo cordal  $G$ , tem-se  $\chi_{lid}(G) \leq 2\chi(G)$ . Eles verificaram a conjectura para subclasses de grafos cordais, como grafos de intervalos, grafos split e cografos. Alguns desses resultados podem ser vistos nas Seções 3.4 e 4.1.

Esperet et al. [16] mostraram que o produto Cartesiano resultante de dois grafos bipartidos  $G$  e  $H$  é 3-lid-colorível. Bhyravarapu, Kumari e Reddy [7] demonstraram que, mesmo ao restringir-se aos grafos bipartidos biconvexos, é possível calcular o número lid-cromático em tempo polinomial. Ambos os resultados são apresentados na Seção 3.3.

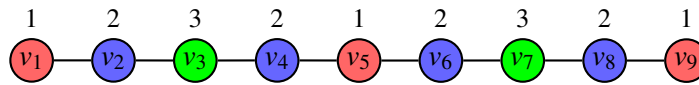
## 3.2 Lid-coloração em caminhos e ciclos

Para caminhos, o problema de determinar o número lid-cromático pode ser deduzido dos resultados apresentados por Esperet et al. [16]. O resultado para o número lid-cromático do grafo caminho é exposto no Teorema 3.1.

**Teorema 3.1** [16] *Para um número inteiro positivo  $n$ , onde  $n \geq 2$ , temos:*

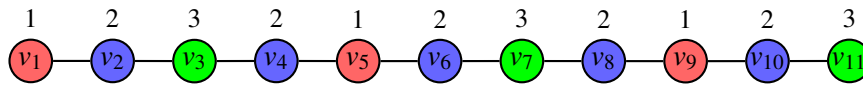
$$\chi_{lid}(P_n) = \begin{cases} 2, & \text{se } n = 2, \\ 3, & \text{se } n \text{ é ímpar}, \\ 4, & \text{se } n \text{ é par e } n \neq 2. \end{cases}$$

Utilizamos a seguinte notação: dada uma sequência  $M$  de cores,  $(M)^*$  indica que a sequência  $M$  pode ser repetida zero ou mais vezes. Do Teorema 3.1, sabemos que  $\chi_{lid}(P_2) = 2$ , o que representa um caso trivial em que  $\chi_{lid}(P_2) = \chi(P_2)$ . Além disso, o Teorema 3.1 estabelece que  $\chi_{lid}(P_n) = 3$  se  $n$  é ímpar. Note que para o caso em que  $n = 3$ , o grafo  $P_3$  será lid-colorido com a sequência de cores (123). Na Figura 3.2, apresentamos uma lid-coloração para o caminho  $P_9$ . Utilizamos a sequência de cores (12321)(2321)\* para colorir os vértices do caminho  $P_9$ . Essa mesma sequência de cores (12321)(2321)\* pode ser empregada para colorir os vértices de qualquer caminho  $P_{4k+1}$ , onde  $k$  é um número inteiro positivo.



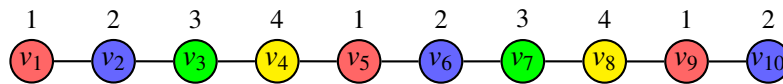
**Figura 3.2:** Lid-coloração de  $P_9$ .

Na Figura 3.3 apresentamos uma lid-coloração para o caminho  $P_{11}$ . Empregamos a sequência de cores (1232)\*(123) para colorir os vértices deste caminho. Essa mesma sequência de cores (1232)\*(123) pode ser utilizada para colorir os vértices de qualquer caminho  $P_{4k+3}$ , onde  $k$  é um número inteiro positivo.



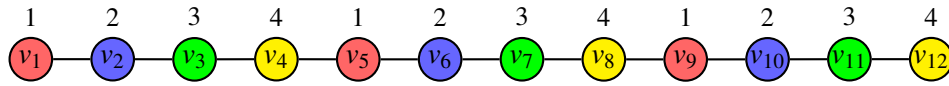
**Figura 3.3:** Lid-coloração de  $P_{11}$ .

Por fim, conforme estabelecido no Teorema 3.1, temos que  $\chi_{lid}(P_n) = 4$  se  $n$  é par e diferente de 2. Na Figura 3.4, apresentamos uma lid-coloração para colorir os vértices de  $P_{10}$ . Nesse caso, utilizamos a sequência de cores (1234)\*(12) para colorir os vértices do caminho  $P_{10}$ . Essa mesma sequência de cores (1234)\*(12) pode ser empregada para colorir os vértices de qualquer caminho  $P_{4k+2}$ , onde  $k$  é um número inteiro positivo.



**Figura 3.4:** Lid-coloração de  $P_{10}$ .

Na Figura 3.5, apresentamos uma lid-coloração para os vértices do caminho  $P_{12}$ . Nesse caso, utilizamos a sequência de cores (1234)\* para colorir os vértices do caminho  $P_{12}$ . Observa-se que a coloração (1234)\* pode ser aplicada aos vértices de qualquer caminho  $P_{4k}$ , onde  $k$  é um número inteiro positivo.



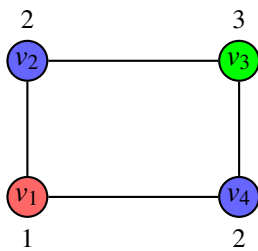
**Figura 3.5:** Lid-coloração de  $P_{12}$ .

A lid-coloração não é hereditária, isto é, um subgrafo induzido de um grafo  $G$  pode ter número lid-cromático maior que  $G$ . Por exemplo, na Figura 3.3  $\chi_{lid}(P_{11}) = 3$  enquanto que na Figura 3.4  $\chi_{lid}(P_{10}) = 4$ . No que se refere ao grafo ciclo, Foucaud et al. [17] propuseram uma lid-coloração para estes grafos. Esse resultado é apresentado no Teorema 3.2.

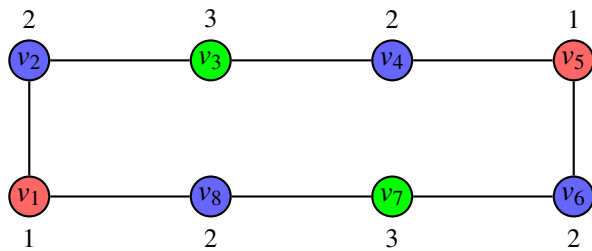
**Teorema 3.2** [17] Para um número inteiro positivo  $n$ , onde  $n \geq 4$ , temos:

$$\chi_{lid}(C_n) = \begin{cases} 3, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 5, & \text{se } n = 5 \text{ ou } n = 7, \\ 4, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pelo Teorema 3.2, sabemos que  $\chi_{lid}(C_n) = 3$  sempre que  $n \equiv 0 \pmod{4}$ . Na Figura 3.6, apresentamos uma lid-coloração dos ciclos  $C_4$  e  $C_8$ . Para esses ciclos, utilizamos a sequência (1232)\* para colorir os vértices de  $C_n$ . Observe que, de modo geral, essa mesma sequência pode ser empregada para qualquer ciclo  $C_n$  tal que  $n \equiv 0 \pmod{4}$ . Além disso, a coloração obtida é própria. Ademais, para quaisquer vértices adjacentes  $v_i, v_z \in V(C_n)$ , tem-se  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_z])$ . Portanto, a coloração apresentada é uma lid-coloração. Consequentemente,  $\chi_{lid}(C_4) = \chi_{lid}(C_8) = 3$ .



(a) Lid-coloração de  $C_4$ .

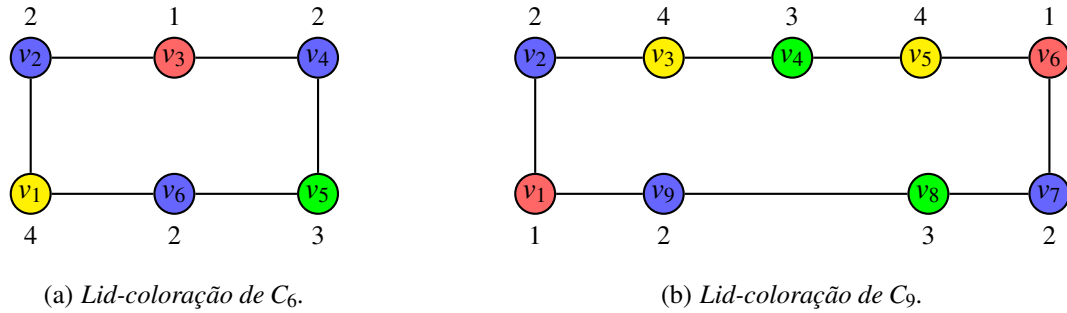


(b) Lid-coloração de  $C_8$ .

**Figura 3.6:** Grafo  $C_4$  e  $C_8$  com  $\chi_{lid}(C_4) = \chi_{lid}(C_8) = 3$ .

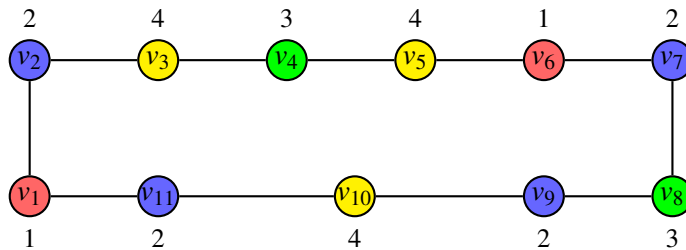
De forma análoga ao exemplo anterior, pelo Teorema 3.2, temos que  $\chi_{lid}(C_n) = 4$  para todo  $n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}$ , exceto quando  $n = 5$  ou  $n = 7$ . Na Figura 3.7, apresentamos uma lid-coloração dos ciclos  $C_6$  e  $C_9$ . Utilizamos a sequência (421232) para colorir os vértices de  $C_6$  e a sequência (124341232) para colorir os vértices de  $C_9$ . De modo geral, para ciclos pares  $C_{2k}$ , com  $k \geq 3$ , pode-se utilizar a sequência (42)(1232)\*.

Analogamente, para ciclos ímpares  $C_{2k+1}$ , com  $k \geq 4$ , pode-se utilizar a sequência  $(124341232)(42)(1232)^*$ . Observe que, em ambos os casos, a coloração obtida é própria e, para quaisquer vértices adjacentes  $v_i, v_z \in V(C_n)$ , tem-se  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_z])$ . Portanto, a coloração apresentada é uma lid-coloração. Consequentemente,  $\chi_{lid}(C_6) = \chi_{lid}(C_9) = 4$ .



**Figura 3.7:** Grafo  $C_6$  e  $C_9$  com  $\chi_{lid}(C_6) = \chi_{lid}(C_9) = 4$ .

Por fim, conforme estabelecido pelo Teorema 3.2, temos que  $\chi_{lid}(C_n) = 4$  quando  $n \equiv 3 \pmod{4}$ . Na Figura 3.8, apresentamos uma lid-coloração para colorir os vértices do grafo  $C_{11}$ , onde a sequência de cores  $(124341232)(42)$  é utilizada. Da mesma forma como feito anteriormente, podemos concluir que  $\chi_{lid}(C_{11}) = 4$ .



**Figura 3.8:** Grafo  $C_{11}$  com  $\chi_{lid}(C_{11}) = 4$ .

É importante destacar que as colorações apresentadas tanto para os grafos caminhos quanto para os grafos ciclos serão posteriormente utilizadas.

### 3.3 Lid-coloração em grafos bipartidos

Esta seção é dedicada aos grafos bipartidos. Apresentamos resultados existentes sobre a lid-coloração em grafos bipartidos. No Lema 3.3, Esperet *et al.* [16] caracterizaram grafos nos quais o número lid-cromático é limitado superiormente por 3.

**Lema 3.3** [16] *Se um grafo conexo  $G$  satisfaz  $\chi_{lid}(G) \leq 3$ , então  $G$  é um triângulo ou um grafo bipartido.*

No Lema 3.4, os mesmos autores propõem uma lid-coloração para o caso em que  $G$  é um grafo bipartido 3-lid-colorível.

**Lema 3.4** [16] *Seja  $G$  um grafo bipartido conexo com pelo menos três vértices que admite uma 3-lid-coloração, com bipartição  $(U, V)$ , e seja  $c$  uma 3-lid-coloração de  $G$  utilizando as cores 1, 2, 3. Então  $G$  possui um vértice  $u$  tal que  $c(N[u]) = \{1, 2, 3\}$  e, se  $u \in U$ , então  $c(U) = \{c(u)\}$  e  $c(V) = \{1, 2, 3\} \setminus \{c(u)\}$ .*

Como corolário, os autores conseguiram uma descrição precisa de árvores com 3-lid-coloração. Isso pode ser observado no Corolário 3.5.

**Corolário 3.5** [16] *Uma árvore  $T$  com pelo menos 3 vértices é 3-lid-colorível se, e somente se, a distância entre cada duas folhas é par.*

Esperet *et al.* [16] demonstraram no Teorema 3.6 que o produto Cartesiano de  $G$  por  $H$ , onde  $G$  e  $H$  são grafos bipartidos, é 3-lid-colorível.

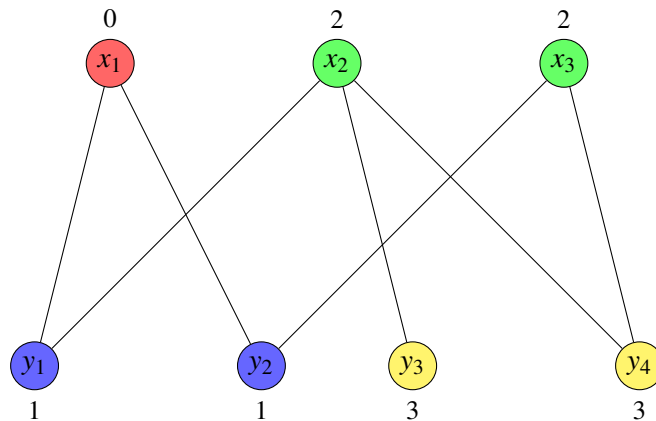
**Teorema 3.6** [16] *Se  $G$  e  $H$  são grafos bipartidos sem vértices isolados, então  $G \square H$  é 3-lid-colorível.*

Como corolário do Teorema 3.6, eles concluíram que hipercubos e grades em qualquer dimensão são 3-lid-coloríveis. A seguir, apresentamos resultados de grafos bipartidos que não podem ser 3-lid-coloríveis. No Teorema 3.7, Esperet *et al.* [16] mostram que o número lid-cromático de qualquer grafo bipartido  $G$  é limitado superiormente por 4.

**Teorema 3.7** [16] *Se  $G$  é um grafo bipartido, então  $\chi_{lid}(G) \leq 4$ .*

*Prova.* Podemos assumir que  $G$  é um grafo conexo com pelo menos cinco vértices. Então existe um vértice  $u$  de  $G$  que não é adjacente a um vértice de grau um. Para qualquer vértice  $v$  de  $G$ , definimos  $c(v)$  como o elemento de  $\{0, 1, 2, 3\}$  congruente com  $d(u, v)$  módulo 4. Afirmamos que  $c$  é uma lid-coloração de  $G$ . Como  $G$  é bipartido,  $c$  é claramente uma coloração própria. Sejam  $v, w$  dois vértices adjacentes em  $G$ . Podemos supor que eles estão a uma distância  $k > 0$  e  $k + 1$  de  $u$ , respectivamente. Se  $k = 0$ , então  $v = u$  e  $w$  tem um vizinho a uma distância dois de  $u$ , então  $c(N[v]) = \{0, 1\}$  e  $c(N[w]) = \{0, 1, 2\}$ . Se  $k > 1$ , então  $(k - 1) \pmod 4$  está em  $c(N[v])$  mas não em  $c(N[w])$ , então  $c(N[v]) \neq c(N[w])$ .  $\square$

Para ilustrar a construção descrita na prova do Teorema 3.7, considere o grafo bipartido  $G$  representado na Figura 3.9. Sejam  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  e  $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$  as duas partes da bipartição. Escolhemos  $u = x_1$  e definimos  $c(v) \equiv d(u, v) \pmod 4$ . Nesse caso, obtemos  $c(x_1) = 0$ ,  $c(y_1) = c(y_2) = 1$ ,  $c(x_2) = c(x_3) = 2$  e  $c(y_3) = c(y_4) = 3$ . Além disso, pode-se verificar que, para quaisquer vértices adjacentes  $v$  e  $w$  de  $G$ , temos  $c(N[v]) \neq c(N[w])$ , de modo que  $c$  é uma lid-coloração de  $G$ .



**Figura 3.9:** Uma lid-coloração de um grafo bipartido  $G$  obtida pela função  $c(v) \equiv d(u, v) \pmod{4}$ , utilizando quatro cores.

Um de nossos objetivos neste trabalho é estudar a complexidade computacional dos problemas abordados ao longo do texto. Antes de introduzirmos o problema da  $\ell$ -lid-coloração, recordamos o clássico problema da  $\ell$ -coloração em grafos, que consiste em decidir se é possível colorir os vértices de um grafo utilizando no máximo  $\ell$  cores, de modo que vértices adjacentes recebam cores distintas. Esse problema pode ser formulado como o seguinte problema de decisão.

$\ell$ -COLORAÇÃO

**Instância:** Um grafo  $G$  e um inteiro positivo  $\ell$ .

**Questão:** O grafo  $G$  admite uma  $\ell$ -coloração própria, isto é, existe uma função  $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, \ell\}$  tal que, para quaisquer vértices adjacentes  $u, v \in V(G)$ , vale  $c(u) \neq c(v)$ ?

Uma variação natural desse problema é a  $\ell$ -lid-coloração, na qual, além de exigir que a coloração seja própria, impõe-se também uma condição adicional sobre os conjuntos de cores nas vizinhanças fechadas de vértices adjacentes. Mais precisamente, temos o seguinte problema de decisão.

$\ell$ -LID-COLORAÇÃO

**Instância:** Um grafo  $G$  e um inteiro positivo  $\ell$ .

**Questão:** O grafo  $G$  admite uma  $\ell$ -lid-coloração, isto é, existe uma coloração própria  $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, \ell\}$  tal que, para quaisquer vértices adjacentes  $u, v \in V(G)$  com  $N[u] \neq N[v]$ , vale  $c(N[u]) \neq c(N[v])$ ?

Esperet *et al.* [16] demonstraram no Teorema 3.8 que decidir se um grafo bipartido é 3-lid-colorível é um problema NP-completo.

**Teorema 3.8** [16] *Para qualquer inteiro fixo  $g$ , decidir se um grafo bipartido com cintura pelo menos  $g$  e grau máximo 3 é 3-lid-colorível é um problema NP-completo.*

Os autores apresentam uma redução polinomial a partir do problema de 2-coloração de hipergrafos 3-uniformes, que é conhecido por ser NP-completo. Mais precisamente, eles mostram que decidir se um grafo bipartido admite uma 3-lid-coloração é NP-completo ao transformar uma instância de um hipergrafo 3-uniforme em um grafo bipartido com grau máximo 3 e cintura arbitrariamente grande, preservando a existência de uma coloração válida.

Uma implicação imediata do Teorema 3.8 é que é possível verificar em tempo polinomial se um grafo planar  $G$  com grau máximo três é 3-lid-colorível.

Uma vez que a lid-coloração é NP-completa em grafos bipartidos, Bhyravarapu, Kumari e Reddy [8] demonstraram no Teorema 3.9 que o número lid-cromático, quando restrito aos grafos bipartidos biconvexos, pode ser calculado em tempo polinomial.

**Teorema 3.9** [8] *Se  $G = (X \cup Y, E)$  é um grafo bipartido biconvexo conexo com pelo menos três vértices, então:*

$$\chi_{lid}(G) = \begin{cases} 4, & \text{se } Z \cap X \neq \emptyset \text{ e } Z \cap Y \neq \emptyset, \\ 3, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde  $Z = \{x \in X \cup Y \mid d_G(x) = 1\}$ .

Foi provado por Burstein [10] e Penaud [36] que todo hipergrafo planar no qual todas as hiperarestas têm tamanho pelo menos três é 2-colorível. Thomassen [39] demonstrou que, para qualquer  $k \geq 4$ , qualquer hipergrafo  $k$ -regular  $k$ -uniforme é 2-colorível. Como consequência, Esperet *et al.* [16] obtiveram os dois resultados seguintes.

**Teorema 3.10** [16] *Seja  $G$  um grafo planar bipartido com bipartição  $\{U, V\}$  tal que todos os vértices em  $U$  ou todos os vértices em  $V$  tenham grau pelo menos três. Então  $G$  é 3-lid-colorível.*

**Teorema 3.11** [16] *Para  $k \geq 4$ , um grafo  $k$ -regular é 3-lid-colorível se, e somente se, for bipartido.*

Uma vez que grafos bipartidos possuem número lid-cromático limitado, surge naturalmente a questão de saber se  $\chi_{lid}$  é limitado superiormente por uma função do número cromático usual. No entanto, Esperet *et al.* [16] mostraram que isso não é verdade. Para ilustrar esse fato, os autores consideraram o grafo  $G$  obtido a partir de uma clique com  $n$  vértices pela subdivisão de cada aresta exatamente duas vezes. Nesse caso, temos  $\chi_{lid}(G) = n$ , pois dois vértices da clique inicial não podem receber a mesma cor no grafo

subdividido, enquanto  $G$  é 3-colorível. Esse exemplo também mostra que, se as arestas de um grafo  $G$  são particionadas em dois conjuntos  $E_1$  e  $E_2$ , e os subgrafos de  $G$  induzidos por  $E_1$  e  $E_2$  possuem número lid-cromático limitado, então  $\chi_{lid}(G)$  não é necessariamente limitado.

Nesse contexto, Esperet *et al.* [16] propuseram uma conjectura que relaciona  $\chi_{lid}$  e  $\chi$  para grafos cordais. Na próxima seção, estudamos a lid-coloração em potência de caminho, que constituem um exemplo de grafos cordais.

### 3.4 Lid-coloração em potência de caminho

Sobre grafos cordais, Esperet *et al.* [16] conjecturaram que todo grafo cordal  $G$  possui  $\chi_{lid} \leq 2\chi(G)$ . A seguir, apresentamos alguns exemplos que satisfazem esse limite, juntamente com alguns desses resultados.

**Teorema 3.12** [16] *Se  $G$  é uma  $k$ -árvore, então  $\chi_{lid}(G) \leq 2k + 2$ .*

*Prova.* Considere que as cores são números inteiros módulo  $2k + 2$ . Em particular, isso implica que a função de inteiros  $x \mapsto x + k + 1$  é uma involução, ou seja, é uma função que é igual à sua inversa. Sejam  $v_1, v_2, \dots, v_n$  os  $n$  vértices de  $G$  ordenados conforme definido acima.

Construímos a seguinte coloração  $c$  de  $G$  de forma iterativa para  $1 \leq i \leq n$ . Se  $i \leq k + 1$ , então definimos  $c(v_i) = i$ . Suponha que  $i \geq k + 2$ . Por definição, para todo  $k + 1 \leq i \leq n$ , o grafo  $G_i$  induzido por  $\{v_j \mid j \leq i\}$  é uma  $k$ -árvore. Seja  $C$  a vizinhança de  $v_i$  em  $G_i$ . Como  $G_{i-1}$  é uma  $k$ -árvore, a clique  $C$  está contida em uma  $(k + 1)$ -clique  $C'$  de  $G_{i-1}$ . Seja  $v_j = C' \setminus C$ . Definimos  $c(v_i) = c(v_j) + k + 1$  (pode haver várias opções para  $C'$  e, portanto, para  $j$ ).

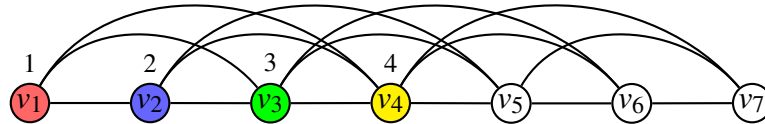
Resta provar agora que  $c$  é uma lid-coloração. Ao longo do procedimento, as duas propriedades a seguir permanecem trivialmente satisfeitas: (i)  $c$  é uma coloração própria de  $G$ , e (ii) nenhum vértice colorível com  $i$  tem um vizinho colorível  $i + k + 1$ .

Considere uma aresta  $v_i v_j$  de  $G$  onde  $N[v_i] \neq N[v_j]$ . Podemos assumir, sem perda de generalidade, que existem vizinhos de  $v_i$  que não são adjacentes a  $v_j$ . Se  $i$  e  $j$  são ambos menores ou iguais a  $k + 1$ , considere o índice mínimo  $l$  tal que  $v_l$  seja um vizinho de  $v_i$  que não é adjacente a  $v_j$ . Pela definição de  $c$  e pela minimalidade de  $l$ , temos  $c(v_j) = c(v_l) + k + 1$ .

Caso contrário, assumimos que  $j > i$  e  $j > k + 1$ . Seja  $C$  a vizinhança de  $v_j$  em  $G_j$ . Pela definição de  $c$ , existe uma  $(k + 1)$ -clique  $C'$  em  $G_{j-1}$  que contém  $C$  e tal que  $c(v_j) = c(v_l) + k + 1$ , onde  $C' \setminus C = \{v_l\}$ .

Em ambos os casos, temos  $c(v_i) \in c(N[v_i])$  enquanto  $c(v_i) \notin c(N[v_j])$  devido à Propriedade (ii). Portanto,  $c$  é uma lid-coloração de  $G$ .  $\square$

A seguir, aplicamos a coloração  $c$  construída no Teorema 3.12 para colorir o grafo 3-árvore. Sabemos que para  $i \leq k + 1$ , temos  $i \leq 4$ . Portanto, temos  $c(v_1) = 1$ ,  $c(v_2) = 2$ ,  $c(v_3) = 3$  e  $c(v_4) = 4$ . Observe a Figura 3.10.



**Figura 3.10:** Cores em que  $c(v_i) = i$  na 3-árvore.

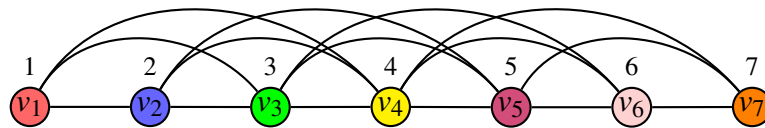
Resta colorir os vértices em que  $i \geq k + 2$ , ou seja,  $i \geq 5$ . Portanto, precisamos colorir os vértices  $v_5$ ,  $v_6$  e  $v_7$ .

Para colorir o vértice  $v_5$ , consideramos  $C = \{v_2, v_3, v_4\}$  como a vizinhança de  $v_5$  em  $G_5$ , e  $C' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  como a 4-clique em  $G_4$ . Seja  $\{v_j\} = C' \setminus C = \{v_1\}$ . Portanto, a cor de  $v_5$  é  $c(v_5) = c(v_1) + 3 + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$ .

Da mesma forma, para colorir o vértice  $v_6$ , consideramos  $C = \{v_3, v_4, v_5\}$  como a vizinhança de  $v_6$  em  $G_6$ , e  $C' = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$  como a 4-clique em  $G_5$ . Seja  $\{v_j\} = C' \setminus C = \{v_2\}$ . Portanto, a cor de  $v_6$  é  $c(v_6) = c(v_2) + 3 + 1 = 2 + 3 + 1 = 6$ .

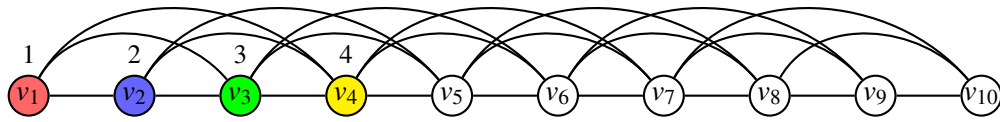
Finalmente, para colorir o vértice  $v_7$ , consideramos  $C = \{v_4, v_5, v_6\}$  como a vizinhança de  $v_7$  em  $G_7$ , e  $C' = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$  como a 4-clique em  $G_6$ . Seja  $\{v_j\} = C' \setminus C = \{v_3\}$ . Portanto, a cor de  $v_7$  é  $c(v_7) = c(v_3) + 3 + 1 = 3 + 3 + 1 = 7$ .

Na Figura 3.11, apresentamos a coloração  $c$  da 3-árvore. Observe que o número lid-cromático da 3-árvore é menor que oito, satisfazendo o resultado anterior.



**Figura 3.11:** Lid-coloração da 3-árvore.

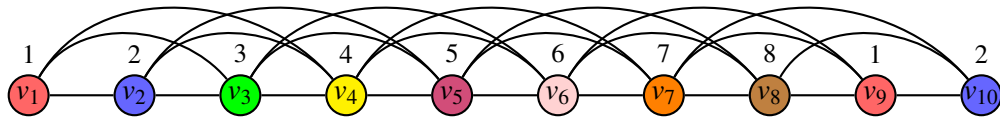
A seguir, aplicamos a coloração  $c$  construída no Teorema 3.12 para colorir uma 3-árvore com 10 vértices. Como  $k = 3$ , temos  $2k + 2 = 8$ ; portanto, as cores são consideradas módulo 8. Inicialmente, para  $i \leq k + 1 = 4$ , definimos  $c(v_1) = 1$ ,  $c(v_2) = 2$ ,  $c(v_3) = 3$  e  $c(v_4) = 4$ . Observe a Figura 3.12.



**Figura 3.12:** Cores em que  $c(v_i) = i$  na 3-árvore.

Resta colorir os vértices  $v_5, v_6, \dots, v_{10}$ . Em cada passo, consideramos a vizinhança  $C$  do novo vértice no grafo já construído e uma 4-clique  $C'$  que contém  $C$ . O único vértice de  $C' \setminus C$  determina a cor do novo vértice pela regra  $c(v_i) = c(v_j) + k + 1 = c(v_j) + 4 \pmod{8}$ . Para  $v_5$ , temos  $C = \{v_2, v_3, v_4\}$  e  $C' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ . Logo,  $C' \setminus C = \{v_1\}$  e, portanto,  $c(v_5) = c(v_1) + 4 = 1 + 4 = 5$ .

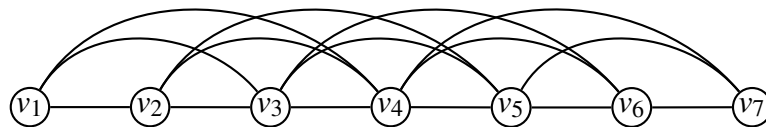
Para  $v_6$ , temos  $C = \{v_3, v_4, v_5\}$  e  $C' = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ . Logo,  $C' \setminus C = \{v_2\}$  e, portanto,  $c(v_6) = c(v_2) + 4 = 2 + 4 = 6$ . Para  $v_7$ , temos  $C = \{v_4, v_5, v_6\}$  e  $C' = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$ . Logo,  $C' \setminus C = \{v_3\}$  e, portanto,  $c(v_7) = c(v_3) + 4 = 3 + 4 = 7$ . Para  $v_8$ , temos  $C = \{v_5, v_6, v_7\}$  e  $C' = \{v_4, v_5, v_6, v_7\}$ . Logo,  $C' \setminus C = \{v_4\}$  e, portanto,  $c(v_8) = c(v_4) + 4 = 4 + 4 = 8$ . Para  $v_9$ , temos  $C = \{v_6, v_7, v_8\}$  e  $C' = \{v_5, v_6, v_7, v_8\}$ . Logo,  $C' \setminus C = \{v_5\}$  e, como as cores são tomadas módulo 8, segue que  $c(v_9) = c(v_5) + 4 = 5 + 4 = 9 \equiv 1 \pmod{8}$ . Assim, escrevemos  $c(v_9) = 1$ . Por fim, para  $v_{10}$ , temos  $C = \{v_7, v_8, v_9\}$  e  $C' = \{v_6, v_7, v_8, v_9\}$ . Logo,  $C' \setminus C = \{v_6\}$  e, como as cores são tomadas módulo 8, obtemos  $c(v_{10}) = c(v_6) + 4 = 6 + 4 = 10 \equiv 2 \pmod{8}$ . Assim, escrevemos  $c(v_{10}) = 2$ . Na Figura 3.13 apresentamos um exemplo de uma 3-árvore com uma 8-lid-coloração.



**Figura 3.13:** Lid-coloração da 3-árvore.

Se  $G$  é uma  $k$ -árvore com pelo menos  $k + 1$  vértices, então  $\chi(G) = k + 1$  [12]. Pelo Teorema 3.12, temos  $\chi_{lid}(G) \leq 2k + 2$ . Assim,  $\chi_{lid}(G) \leq 2\chi(G)$ , o que implica que  $k$ -árvores satisfazem a conjectura proposta por Esperet *et al.* [16].

Uma potência de caminho é um grafo  $P_n^k$  onde  $V(P_n^k) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e existe uma aresta  $v_i v_j$  se, e somente se,  $|i - j| \leq k$ ,  $1 \leq i, j < n$ . Na Figura 3.14, apresentamos uma potência de caminho  $P_7^3$ .



**Figura 3.14:** Grafo potência de caminho  $P_7^3$ .

O grafo  $P_n^k$  é uma  $k$ -árvore, onde sua construção ocorre a partir de uma clique formada pelos vértices  $v_1, \dots, v_{k+1}$  adicionando, a cada passo  $k+2 \leq i \leq n$ , um vértice  $v_i$  adjacente a  $v_{i-k}, \dots, v_{i-1}$ . Observa-se que, se todo grafo  $P_n^k$  é uma  $k$ -árvore, então, a partir do Teorema 3.12, pode-se chegar no seguinte resultado.

**Corolário 3.13** [16] *Se  $G$  é uma potência de caminho  $P_n^k$ , então  $\chi_{lid}(G) \leq 2k+2$ .*

A igualdade foi apresentada no Corolário 3.13 por Esperet *et. al* [16] para o caso em que  $n = 2k+2$ . No Lema 3.14, mostramos que são necessárias  $2k+1$  cores para colorir os  $2k+1$  primeiros vértices de  $P_n^k$ . Por simetria, a mesma quantidade de  $2k+1$  cores é necessária também para os últimos vértices de  $P_n^k$ .

**Lema 3.14** [28] *Se  $G$  é uma potência de caminho  $P_n^k$  com  $k \geq 1$  e  $n \geq 2k+1$ , então  $|c(v_1, \dots, v_{2k+1})| = 2k+1$ .*

*Prova.* Seja  $c$  uma lid-coloração de  $P_n^k$ . Sem perda de generalidade, vamos assumir que  $c(v_i) = i$  para cada  $1 \leq i \leq k+1$ . Observamos que para qualquer  $1 \leq i \leq k$ , a diferença simétrica  $N[v_i] \Delta N[v_{i+1}] = \{v_{i+k+1}\}$ . Além disso,  $N[v_i] = \{v_1, \dots, v_{i+k}\}$ , e portanto  $c(N[v_i])$  contém as cores de 1 até  $k+1$ . Consequentemente, temos que  $c(v_i) > k+1$  sempre que  $k+2 \leq i \leq 2k+1$ . Portanto,  $|c(v_1, \dots, v_{2k+1})| = 2k+1$ .  $\square$

A partir do Teorema 3.12 e do Lema 3.14, temos os seguintes limites para  $\chi_{lid}(P_n^k)$ .

**Corolário 3.15** [28] *Se  $G$  é uma potência de caminho  $P_n^k$  com  $k \geq 1$  e  $n \geq 2k+1$ , então  $2k+1 \leq \chi_{lid}(G) \leq 2k+2$ .*

Apresentamos valores para  $n$  tal que  $\chi_{lid}(P_n^k) = 2k+1$  no Teorema 3.16 e para  $\chi_{lid}(P_n^k) = 2k+2$  no Teorema 3.17.

**Teorema 3.16** [28] *Para  $k \geq 1$ ,  $n \geq 2k+1$ , e  $n \equiv k \pmod{k+1}$ , temos  $\chi_{lid}(P_n^k) = 2k+1$ .*

*Prova.* Pelo Corolário 3.15, temos  $\chi_{lid}(P_n^k) \geq 2k+1$ . Agora precisamos mostrar que  $\chi_{lid}(P_n^k) \leq 2k+1$ . Construímos uma lid-coloração  $c$  com essa cardinalidade:  $c(v_i) = k+1$  se  $i \equiv 0 \pmod{2k+2}$ , e  $c(v_i) = i \pmod{2k+2}$ , caso contrário.

É fácil ver que  $c$  é uma coloração própria de  $P_n^k$ . Para mostrar que para cada par de vértices adjacentes  $v_i$  e  $v_j$ ,  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_j])$ , apresentamos o conjunto  $c(N[v_i])$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Se  $1 \leq i \leq k-1$ , temos  $c(N[v_i]) = [k+i]$ . Se  $k \leq i \leq n-k+1$ , temos os conjuntos a seguir:

$$c(N[v_i]) = \begin{cases} [2k+1], & \text{se } c(v_i) = k+1, \\ [2k+1] \setminus \{j-1\}, & \text{se } c(v_i) = k+j, 2 \leq j \leq k+1, \\ [2k+1] \setminus \{j+k+1\}, & \text{se } c(v_i) = j, 1 \leq j \leq k. \end{cases}$$

Para  $n-k+1 \leq i \leq n$ , temos os conjuntos a seguir:

$$c(N[v_i]) = \begin{cases} [k+1] \cup [c(v_i)+k+2, 2k+1], & \text{se } c(v_i) \leq k, \\ [c(v_i)-k, 2k+1], & \text{se } c(v_i) > k. \end{cases}$$

Uma vez que existem conjuntos distintos de cores para vértices com cores diferentes,  $c$  é uma lid-coloração.  $\square$

Aplicamos a coloração  $c$  obtida no resultado anterior ao grafo  $P_{11}^3$ . Utilizando a relação  $c(v_i) \equiv i \pmod{2k+2}$ , obtemos a coloração  $c(v_1) = 1, c(v_2) = 2, c(v_3) = 3, c(v_4) = 4, c(v_5) = 5, c(v_6) = 6, c(v_7) = 7, c(v_8) = 1, c(v_9) = 2$  e  $c(v_{10}) = 3$ . Sabemos que  $c(v_i) = k+1$  se  $i \equiv 0 \pmod{2k+2}$ , logo,  $c(v_8) = 4$ . A coloração resultante está ilustrada na Figura 3.15. Portanto,  $\chi_{lid}(P_{11}^3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ .

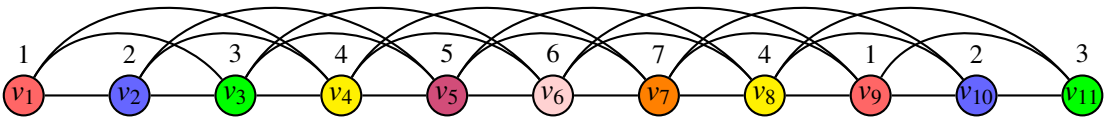


Figura 3.15: Lid-coloração de  $P_{11}^3$ .

**Teorema 3.17** [28] Para  $k \geq 1$  e  $2k+2 \leq n \leq 3k+1$ , temos que  $\chi_{lid}(P_n^k) = 2k+2$ .

*Prova.* Do Corolário 3.15, temos  $\chi_{lid}(P_n^k) \leq 2k+2$ . Agora, mostramos que  $\chi_{lid}(P_n^k) \geq 2k+2$ . Suponha por contradição que  $\chi_{lid}(P_n^k) = 2k+1$ , pelo Lema 3.14,  $|c(v_1, \dots, v_{2k+1})| = 2k+1$ . De forma simétrica,  $|c(v_{n-2k}, \dots, v_n)| = 2k+1$ . Portanto,  $c(N[v_{k+1}]) = c(N[v_{n-k}]) = [2k+1]$ . Uma vez que  $n \leq 3k+1$ , temos  $n-k-(k+1) \leq 3k+1-k-(k+1) \leq k$ , o que implica que  $v_{k+1}$  e  $v_{n-k}$  são adjacentes, o que contradiz a lid-coloração. Assim, concluímos que  $\chi_{lid}(P_n^k) \geq 2k+2$ .  $\square$

A seguir, aplicamos a coloração  $c$  estabelecida no Teorema 3.12 ao grafo  $P_8^3$ . Como  $i$  é limitado por  $k+1$ , que é igual a 4 no nosso caso, temos que  $c(v_1) = 1, c(v_2) = 2, c(v_3) = 3$  e  $c(v_4) = 4$ .

Resta agora a coloração dos vértices com  $i \geq k+2$ , ou seja,  $i \geq 5$ . Assim, precisamos atribuir cores aos vértices  $v_5, v_6, v_7$  e  $v_8$ . Para colorir o vértice  $v_5$ , consideramos  $C = \{v_2, v_3, v_4\}$  como a vizinhança de  $v_5$  em  $G_5$ , e  $C' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  como a 4-clique em  $G_4$ . Seja  $\{v_j\} = C' \setminus C = \{v_1\}$ . Assim, a cor de  $v_5$  é  $c(v_5) = c(v_1) + 3 + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$ .

Seguindo a mesma abordagem, para colorir o vértice  $v_6$ , analisamos  $C = \{v_3, v_4, v_5\}$  como a vizinhança de  $v_6$  em  $G_6$  e  $C' = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$  como a 4-clique em  $G_5$ . Tomando  $\{v_j\} = C' \setminus C = \{v_2\}$ , atribuímos a cor  $c(v_6) = c(v_2) + 3 + 1 = 2 + 3 + 1 = 6$ . Já para colorir o vértice  $v_7$ , observamos  $C = \{v_4, v_5, v_6\}$  como a vizinhança de  $v_7$  em  $G_7$  e  $C' = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$  como a 4-clique em  $G_6$ . Seja  $\{v_j\} = C' \setminus C = \{v_3\}$ . Logo, a cor de  $v_7$  é  $c(v_7) = c(v_3) + 3 + 1 = 3 + 3 + 1 = 7$ .

Agora, passamos à coloração do vértice  $v_8$ , considerando  $C = \{v_5, v_6, v_7\}$  como a vizinhança de  $v_8$  em  $G_8$ , e  $C' = \{v_4, v_5, v_6, v_7\}$  como a 4-clique em  $G_7$ . Seja  $\{v_j\} = C' \setminus C = \{v_4\}$ . Assim, a cor de  $v_8$  é  $c(v_8) = c(v_4) + 3 + 1 = 4 + 3 + 1 = 8$ . Na Figura 3.16, apresentamos a coloração  $c$  resultante. Portanto,  $\chi_{lid}(P_8^3) = 2 \cdot 3 + 2 = 8$ .

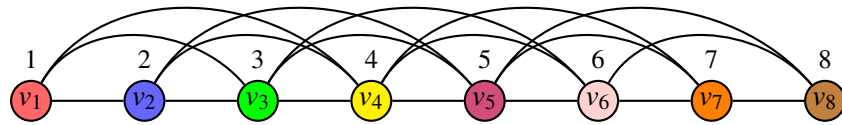


Figura 3.16: Lid-coloração de  $P_8^3$ .

Para fecharmos a classe de potência de caminho, resta-nos demonstrar a Conjectura 1.

**Conjectura 1** [28] Para  $k \geq 1$ ,  $n \geq 3k + 3$ , e  $n \equiv 0, 1, \dots, k - 1 \pmod{k + 1}$ ,  $\chi_{lid}(P_n^k) = 2k + 2$ .

Note que podemos representar  $P_n$  como  $P_n^1$ , ou seja, o grafo  $P_n$  é uma potência de caminho com  $k = 1$ . Dessa forma, podemos aplicar os resultados anteriormente obtidos para encontrar uma lid-coloração de  $P_n$ . A seguir, apresentamos as lid-colorações mínimas para  $P_4, P_6, P_8$  (caso em que  $n$  é par) e  $P_5, P_7$  (quando  $n$  é ímpar).

Pelos Teoremas 3.1 e 3.17, temos que  $\chi_{lid}(P_4) = 4$ . Portanto,  $c(v_1) = 1$ ,  $c(v_2) = 2$ ,  $c(v_3) = 3$  e  $c(v_4) = 4$ , como mostrado na Figura 3.17.

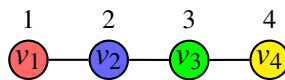
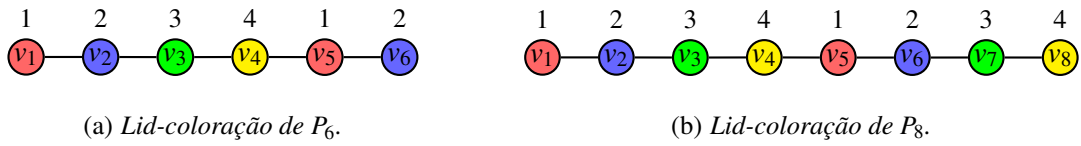


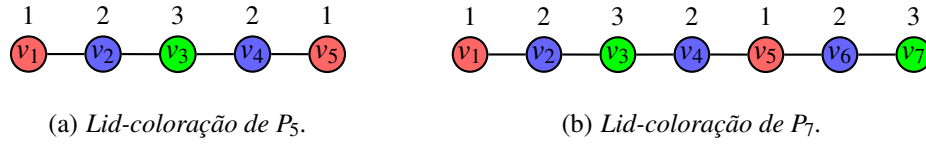
Figura 3.17: Lid-coloração de  $P_4$ .

Pelo Teorema 3.1, temos que  $\chi_{lid}(P_n) = 4$  para  $n$  par e  $n > 2$ . Assim, por simetria, podemos repetir a mesma sequência de cores para colorir qualquer  $P_n$  nessas condições. Esse fato pode ser observado na Figura 3.18.



**Figura 3.18:** Lid-coloração de  $P_n$  para valores pares de  $n$ .

Pelos Teoremas 3.1 e 3.16, temos que  $\chi_{\text{lid}}(P_n) = 3$ , se  $n$  é ímpar. Uma lid-coloração  $c$  pode ser construída tomando  $c(v_i) = k + 1$  se  $i \equiv 0 \pmod{2k + 2}$  e  $c(v_i) \equiv i \pmod{2k + 2}$  caso contrário. A seguir, aplicamos a lid-coloração  $c$  para colorir os grafos  $P_5$  e  $P_7$ . Para colorir o grafo  $P_5$ , temos  $c(v_1) = 1, c(v_2) = 2, c(v_3) = 3, c(v_4) = 2$  e  $c(v_5) = 1$ . Para colorir  $P_7$ , temos  $c(v_1) = 1, c(v_2) = 2, c(v_3) = 3, c(v_4) = 2, c(v_5) = 1, c(v_6) = 2$  e  $c(v_7) = 3$ , conforme apresentado na Figura 3.19.



**Figura 3.19:** Lid-coloração de  $P_n$  para valores ímpares de  $n$ .

---

## Coloração de identificação local em grafos *split*

---

Neste capítulo, investigamos a lid-coloração em grafos *split* e em subclasses de particular interesse, com ênfase tanto em aspectos estruturais quanto computacionais. Inicialmente, na Seção 4.1, estudamos o problema em grafos *split* gerais. Nessa seção, apresentamos limites básicos para o número lid-cromático e provamos que o problema de decidir se um grafo *split* admite uma lid-coloração com no máximo  $p$  cores é *NP*-completo. Na Seção 4.2, apresentamos uma lid-coloração para o grafo *split* completo. Na Seção 4.3, estudamos os grafos *split-corona*, isto é, grafos da forma  $K_m \odot \overline{K}_n$ . Nessa parte, determinamos valores exatos para o número lid-cromático em casos específicos, como  $K_m \odot K_1$  e  $K_m \odot \overline{K}_2$ , além de estabelecermos o valor exato de  $\chi_{lid}(K_m \odot \overline{K}_n)$  quando  $n \geq \log_2 m$  e limites gerais para os demais casos. Na Seção 4.4, estudamos a lid-coloração em grafos *split-comparabilidade*. Explorando a decomposição estrutural dessa classe, estabelecemos lemas sobre classes de gêmeos falsos e sobre a preservação do número lid-cromático sob remoção desses vértices. Em seguida, obtemos valores exatos de  $\chi_{lid}(G)$  sob restrições estruturais específicas, particularmente no caso em que  $S_t = \emptyset$ , distinguindo as situações em que  $K_t$  é vazio ou não. Também analisamos o efeito da remoção de gêmeos verdadeiros na clique  $K$ , mostrando que, sob hipóteses adequadas, essa operação reduz o número lid-cromático em uma unidade. Por fim, na Seção 4.5, reunimos os principais resultados obtidos neste capítulo.

### 4.1 Complexidade da lid-coloração em grafos *split*

Nesta seção, investigamos a complexidade computacional de determinar o número lid-cromático de grafos *split*. Pela Proposição 4.1 e pelo Teorema 4.2, o número lid-cromático de um grafo *split*  $G$  satisfaz os limites  $|K| + 1 \leq \chi_{lid}(G) \leq 2|K| - 1$ . Uma observação fundamental é que a coloração do conjunto independente  $S \subseteq G$  desempenha um papel central na obtenção do número lid-cromático de um grafo *split*. O grafo *split* é um grafo cordal, onde o tamanho máximo da clique e seu número cromático são iguais.

**Proposição 4.1** *Seja  $G = (K \cup S, E)$  um grafo *split* conexo com  $S \neq \emptyset$ . Então,  $\chi_{lid}(G) \geq |K| + 1$ .*

*Prova.* Se  $|K| = 1$ , como  $S \neq \emptyset$  e  $G$  é conexo, o resultado segue diretamente. Assim, assumamos  $|K| \geq 2$ . Suponha, por contradição, que  $\chi_{lid}(G) = |K|$ . Primeiro, considere que existam dois vértices em  $K$ , digamos  $v_i$  e  $v_z$ , que não são gêmeos verdadeiros. Então, pelo menos um desses dois vértices possui algum vizinho em  $S$ . No entanto,  $c(N[v_i]) = c(N[v_z]) = [k]$ , o que leva a uma contradição. Agora, considere que todos os vértices de  $K$  sejam mutuamente gêmeos verdadeiros. Nesse caso, como  $G$  é conexo, todo vértice de  $S$  é adjacente a cada vértice em  $K$ . Para  $a \in S$ , segue que  $c(a) \in K$ , e, portanto,  $c$  não é uma coloração própria.  $\square$

**Teorema 4.2** [16] *Seja  $G = (K \cup S, E)$  um grafo *split*. Se  $\omega(G) \geq 3$  ou se  $G$  for uma estrela, então  $\chi_{lid}(G) \leq 2\omega - 1$ .*

Relembramos como  $p$ -LID-COLORAÇÃO o problema de decisão que, dado um grafo  $G$  e um inteiro positivo  $p$ , consiste em determinar se  $\chi_{lid}(G) \leq p$ . Até onde sabemos, a complexidade de  $p$ -LID-COLORAÇÃO para grafos cordais permanece em aberto. No Teorema 4.3, provamos um resultado mais forte:  $p$ -LID-COLORAÇÃO para grafos *split* é NP-completo.

**Teorema 4.3** *O problema  $p$ -LID-COLORAÇÃO é NP-completo em grafos *split*.*

*Prova.* A pertinência a NP já foi estabelecida em [16]. Para demonstrar a dificuldade, realizamos uma redução a partir do problema 3-COLORAÇÃO. Dado um grafo  $G = (V, E)$ , com  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ , uma instância do problema 3-COLORAÇÃO, construímos um grafo *split*  $H = (V(H), E(H))$  pelos seguintes passos. Seja  $L = (V(L), E(L))$  o grafo de Levi (ou grafo bipartido de incidência) de  $G$ , obtido por  $V(L) = V \cup E$  e  $v_i e_j \in E(L)$  se, e somente se,  $v_i \in e_j$ , para  $i \in [n], j \in [m]$ . O grafo  $H$  é obtido a partir de  $L$  pela adição dos seguintes conjuntos de vértices, para todo  $j \in [m]$  e  $\ell \in [3]$ :

$$\{e_0\}, X_0 = \{x_j\}, Y_0 = \{y_0^\ell\}, \mathcal{Y}_1 = \{y_j\}, X_j = \{x_j^\ell\}, Y_j = \{y_j^\ell\}.$$

Além disso, para todo subconjunto de 2 elementos  $\{a, b\} \subseteq [m]$  e todo subconjunto de 3 elementos  $\{a, b, c\} \subseteq [m]$ , adicionamos a  $V(H)$  os conjuntos de vértices que denominamos *gadgets de combinação*:

$$\mathcal{Y}_2 = \{y_{\{a,b\}}\}, \mathcal{Y}_{\{a,b\}} = \{y_{\{a,b\}}^\ell : \ell \in [3]\}, \mathcal{Y}_3 = \{y_{\{a,b,c\}}\}.$$

Para os elementos em  $E(H)$ , além das arestas em  $E(L)$ , definimos a *split* partição do grafo  $H$  como um clique  $K$  (adicionamos as arestas de forma correspondente) e um conjunto independente  $S$ , dados por:

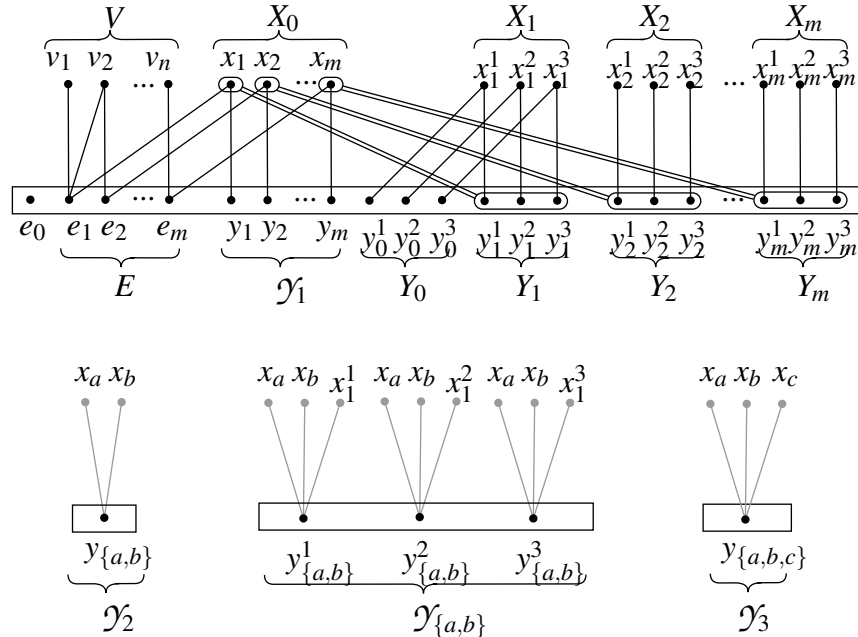
$$K = \{e_0\} \cup E \cup \left( \bigcup_{\ell \in [3]} \mathcal{Y}_\ell \right) \cup \left( \bigcup_{j \in [m] \cup \{0\}} Y_j \right) \cup \left( \bigcup_{\{a,b\} \subseteq [m], a \neq b} \mathcal{Y}_{\{a,b\}} \right),$$

$$S = V \cup \left( \bigcup_{j \in [m] \cup \{0\}} X_j \right).$$

Para as adjacências restantes, adicionamos a  $E(H)$  os seguintes conjuntos de arestas, para todo  $j \in [m]$ ,  $\ell \in [3]$ , subconjunto de 2 elementos  $\{a,b\} \subseteq [m]$  e subconjunto de 3-elementos  $\{a,b,c\} \subseteq [m]$ :

- $\{e_j x_j, x_j y_j\}$ ,
- $\{x_1^\ell y_0^\ell, x_j^\ell y_j^\ell, x_j y_j^\ell\}$ ,
- $\{x_a y_{\{a,b\}}, x_b y_{\{a,b\}}\}$ ,
- $\{x_a y_{\{a,b\}}^\ell, x_b y_{\{a,b\}}^\ell, x_1^\ell y_{\{a,b\}}^\ell\}$ ,
- $\{x_a y_{\{a,b,c\}}, x_b y_{\{a,b,c\}}, x_c y_{\{a,b,c\}}\}$ .

Um esboço do grafo *split* construído é apresentado na Figura 4.1. Os retângulos agrupam os vértices que pertencem à clique  $K$ . As arestas duplas representam todas as possíveis arestas entre dois conjuntos de vértices em uma elipse. Vértices e arestas em cinza ilustram conexões entre os *gadgets de combinação*.



**Figura 4.1:** Construção para o Teorema 4.3.

Primeiro, fazemos algumas observações sobre a construção. Pela definição dos conjuntos que compõem a clique  $K$ , temos

$$\begin{aligned} |K| &= |\{e_0\}| + |E| + \left| \left( \bigcup_{\ell \in [3]} \mathcal{Y}_\ell \right) \right| + \left| \left( \bigcup_{j \in [m] \cup \{0\}} Y_j \right) \right| + \left| \left( \bigcup_{\{a,b\} \subseteq [m], a \neq b} \mathcal{Y}_{\{a,b\}} \right) \right| \\ &= 1 + m + \left( m + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} \right) + (3m + 3) + 3 \binom{m}{2} \\ &= \frac{24 + 18m + 12m^2 + m(m-1)(m-2)}{6} \\ &= \frac{m^3 + 9m^2 + 20m + 24}{6}. \end{aligned}$$

A partir de agora, pela construção  $p = |K| + m + 3$ . Portanto,

$$p = \frac{m^3 + 9m^2 + 20m + 24}{6} + m + 3 = \frac{m^3 + 9m^2 + 26m + 42}{6}.$$

Assim,  $|K| = O(m^3)$  e  $p = O(m^3)$ . É fácil verificar que  $H$  é um grafo *split*, pois sua construção fornece uma partição  $V(H) = K \cup S$ , em que  $K$  induz uma clique e  $S$  induz um conjunto independente. Além disso, como  $K$  induz uma clique, a adição das arestas entre todos os pares de vértices de  $K$  exige  $\binom{|K|}{2} = O(|K|^2) = O(m^6)$  operações. As demais arestas da construção envolvem conjuntos de tamanho polinomial em  $m$  e, portanto, também podem ser adicionadas em tempo polinomial limitado por  $O(m^6)$ . Consequentemente,  $H$  pode ser construído em tempo  $O(m^6)$ .

Mostramos que  $G$  possui uma 3-coloração se, e somente se,  $H$  possui uma  $p$ -lid-coloração.

Pela construção,  $K$  é uma clique máxima de  $H$ , logo  $\chi_{lid}(H) \geq \chi(H) \geq |K|$ . Além disso, sabemos que  $p - |K| = m + 3$ . Primeiro, suponha que  $G$  possui uma 3-coloração  $c_G : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ . Definimos uma  $p$ -lid-coloração  $c : V(H) \rightarrow [p]$  dada por:

- $c(v_i) = c_G(v)$ , para todo  $i \in [n]$ ;
- $c(x_j) = j + 3$ , para todo  $j \in [m]$ ;
- $c(x_j^\ell) = \ell$ , para todo  $j \in [m]$ ,  $\ell \in [3]$ ;
- $c(K) = \{m + 4, \dots, p\}$ .

Para mostrar que  $c$  é uma  $p$ -lid-coloração de  $H$ , observamos primeiro que, para quaisquer vértices  $u \in V(K)$  e  $w \in V(S)$ , tem-se  $|c(N[u])| > |c(N[w])|$ . Para  $u, w \in V(K)$ , podemos verificar que  $c(N[u]) \neq c(N[w])$ , considerando os seguintes conjuntos de cores, para todo  $j \in [m]$ ,  $\ell \in [3]$ , subconjunto de 2 elementos  $\{a, b\} \subseteq [m]$  e subconjunto de 3-elementos  $\{a, b, c\} \subseteq [m]$ :

- $c(N_H[e_0]) = c(K)$ ;
- $c(N_H[e_j]) = c(K) \cup c(\{x_j, v_i, v_{i'}\})$ , onde  $e_j = \{v_i, v_{i'}\} \in E(G)$ ;
- $c(N_H[y_j]) = c(K) \cup c(x_j)$ ;

- $c(N_H[y_0^\ell]) = c(K) \cup c(x_1^\ell)$ ;
- $c(N_H[y_j^\ell]) = c(K) \cup c(\{x_j^\ell, x_j\})$ ;
- $c(N_H[y_{\{a,b\}}]) = c(K) \cup c(\{x_a, x_b\})$ ;
- $c(N_H[y_{\{a,b\}}^\ell]) = c(K) \cup c(\{x_a, x_b, x_1^\ell\})$ ;
- $c(N_H[y_{\{a,b,c\}}]) = c(K) \cup c(\{x_a, x_b, x_c\})$ .

Para a recíproca, seja  $c : V(H) \rightarrow [p]$  uma  $p$ -lid-coloração de  $H$ . Como  $K$  é uma clique, podemos assumir que todos os vértices de  $K$  recebem cores distintas. Além disso, dado que  $p - |K| = m + 3$ , definimos o conjunto de cores disponíveis para  $S$  como  $\{1, \dots, m + 3\}$ . Primeiro, provamos algumas afirmações úteis. A Afirmação 1 mostra que as cores dos vértices em  $X_j$ ,  $j \in [m] \cup \{0\}$ , são todas distintas e, em seguida, a Afirmação 2 mostra que, se  $u$  é um vértice em  $X_0$ , então todos os vértices em  $X_1 \cup \dots \cup X_m$  têm cores diferentes de  $c(u)$ .

**Afirmação 1** *Seja  $X \in \{X_0, \dots, X_m\}$ . Para todos  $u, v \in X$ , tem-se  $c(u) \neq c(v)$ .*

*Prova (da Afirmação 1).* Considere primeiro  $X \in \{X_1, \dots, X_m\}$ . Seja  $u = x_j, v = x_{j'} \in X$ , para algum par  $j, j' \in [m]$ . A construção de  $H$  implica que  $N_H[y_j] = K \cup \{x_j\}$  bem como  $N_H[y_{j'}] = K \cup \{x_{j'}\}$ . Como  $c$  é uma lid-coloração de  $H$ , temos que  $c(N_H[y_j]) \neq c(N_H[y_{j'}])$ , o que implica  $c(u) \neq c(v)$ . Agora considere  $X = X_0$ . Seja  $u = x_j^\ell, v = x_{j'}^{\ell'} \in X$ , para algum par  $\ell, \ell' \in [3]$ . A construção fornece  $N_H[y_j^\ell] = K \cup \{x_j^\ell, x_j\}$  e  $N_H[y_{j'}^{\ell'}] = K \cup \{x_{j'}^{\ell'}, x_{j'}\}$ . Como  $c$  é uma lid-coloração de  $H$ , temos que  $c(N_H[y_j^\ell]) \neq c(N_H[y_{j'}^{\ell'}])$ , o que implica  $c(u) \neq c(v)$ . ■

Em seguida, mostramos que, se  $u$  é um vértice em  $X_0$ , então todos os vértices em  $X_1 \cup \dots \cup X_m$  possuem cores diferentes de  $c(u)$ .

**Afirmação 2** *Seja  $u \in X_0$ . Para todo  $v \in \bigcup_{j \in [m]} X_j$ , tem-se  $c(u) \neq c(v)$ .*

*Prova (da Afirmação 2).* Seja  $u = x_j \in X_0$  e  $v = x_{j'}^\ell$ , para alguns  $j, j' \in [m]$  e  $\ell \in [3]$ . Suponha, por contradição, que  $c(u) = c(v) = \alpha$ . Se  $j = j'$ , a construção implica que  $N_H[y_j] = K \cup \{x_j\} \subseteq N_H[y_{j'}^\ell] = K \cup \{x_j, x_{j'}^\ell\}$ . Dado que  $c(x_j) = c(x_{j'}^\ell) = \alpha$ , obtemos que  $c(N_H[y_j]) = c(K) \cup \{\alpha\} = c(N_H[y_{j'}^\ell])$ , o que é uma contradição.

Caso contrário, a construção implica que  $N_H[y_j] = K \cup \{x_j\} \subseteq N_H[y_{j'}^\ell] = K \cup \{x_{j'}, x_{j'}^\ell\}$ . Assim,  $c(N_H[y_j]) = c(K) \cup \{\alpha\}$  e  $c(N_H[y_{j'}^\ell]) = c(K) \cup \{c(x_{j'}), \alpha\}$ . Do parágrafo anterior sabemos que  $c(x_{j'}) \neq c(x_{j'}^\ell)$ , seja  $c(x_{j'}) = \beta$ , com  $\beta \neq \alpha$ . Consequentemente,  $c(N_H[y_{j'}^\ell]) = c(K) \cup \{\alpha, \beta\} = c(N_H[y_{\{j,j'\}}])$  (recorde que o *combination gadget*  $\mathcal{Y}_2$  contém vértices  $y_S$  para todo subconjunto de dois elementos de  $[m]$ ). ■

As Afirmações 1 e 2 implicam que as cores dos vértices em  $X_0 \cup X_1$  são todas distintas. Assim,  $|c(X_0 \cup X_1)| = m + 3$ . O mesmo vale para  $X_0 \cup X_2, \dots, X_0 \cup X_m$ . Agora, mostramos que uma cor de um vértice em  $K$  não aparece entre os vértices em  $S$ .

**Afirmção 3** *Seja  $v \in S$ . Então  $c(v) \in [p] \setminus c(K)$ .*

*Prova (da Afirmção 3).* Suponha, por contradição, que  $c(v) = \alpha \in c(K)$ . Dividimos a prova de acordo com a posição de  $v$  na partição  $S = (X_1 \cup \dots \cup X_m) \cup X_0 \cup V$ .

**Caso 1.**  $v = x_j^\ell \in X_1 \cup \dots \cup X_m$ , para algum  $j \in [m]$ ,  $\ell \in [3]$ . Pela construção, temos que  $N_H[y_j^\ell] = K \cup \{x_j, x_j^\ell\}$  e  $N_H[y_j] = K \cup \{x_j\}$ . Recorde que  $c(x_j^\ell) = \alpha \in c(K)$ . Então,  $c(N_H[y_j^\ell]) = c(N_H[y_j]) = c(K) \cup \{c(x_j)\}$ , uma contradição.

**Caso 2.**  $v = x_j \in X_0$ , para algum  $j \in [m]$ . Sabemos que  $N_H[y_j] = K \cup \{x_j\}$  e  $N_H[e_0] = K$ . Portanto,  $c(N_H[y_j]) = c(N_H[e_0]) = c(K) \cup \{\alpha\} = c(K)$ , uma contradição.

**Caso 3.**  $v = v_i \in V$ , para algum  $i \in [n]$ . Considere  $i' \in [n]$  e  $j \in [m]$  tais que  $e_j = v_i v_{i'} \in E$ . Revisitando a construção, temos  $N_H[e_j] = K \cup \{v_i, v_{i'}, x_j\}$ . Lembre-se também de que  $c(v_i) = \alpha \in c(K)$ . Então,  $c(N_H[e_j]) = c(K) \cup \{\alpha, c(v_{i'}), c(x_j)\} = c(K) \cup \{c(v_{i'}), c(x_j)\}$ . Já sabemos pelo Caso (2) que  $c(x_j) \notin c(K)$ . Assim, se  $c(v_{i'}) \in c(K)$ , então  $c(N_H[e_j]) = c(N_H[y_j]) = c(K) \cup \{c(x_j)\}$ , uma contradição. Caso contrário,  $c(N_H[e_j]) = c(K) \cup \{c(v_{i'}), c(x_j)\}$ . Recorde que  $c(v_{i'}), c(x_j) \in [p] \setminus c(K)$ . Se  $c(v_{i'}) = c(x_j) = \beta \notin c(K)$ , então  $c(N_H[e_j]) = c(K) \cup \{\beta\} = c(N_H[y_j])$ , novamente uma contradição. Agora, suponha que  $c(v_{i'}) = \beta_1$  e  $c(x_j) = \beta_2$ , com  $\beta_1, \beta_2$  distintos em  $[p] \setminus c(K)$ .

Recorde a definição do *gadget de combinação*  $\mathcal{Y}_2$ . O conjunto  $\mathcal{Y}_2$  contém os vértices  $y_{\{a,b\}}$  para todo subconjunto de dois elementos  $\{a,b\} \subseteq [m]$ , com adjacências dadas por  $N_H[y_{\{a,b\}}] = K \cup \{x_a, x_b\}$ . Recorde também que  $N_H[y_j^\ell] = K \cup \{x_j, x_j^\ell\}$ , para todo  $j \in [m], \ell \in [3]$ . Pelas Afirmções 1 e 2, temos que  $c(X_0 \cup X_1) = [p] \setminus c(K)$ . Assim, a construção de  $E(H)$  implica que existe  $j' \in [m]$  tal que  $c(x_{j'}) = \beta_1$ , o que implica  $c(N_H[e_j]) = c(K) \cup \{\beta_1, \beta_2\} = c(N_H[y_{\{j,j'\}}])$ , ou  $c(x_{j'}^\ell) = \beta_1$ , para algum  $\ell \in [3]$ , o que implica  $c(N_H[e_j]) = c(K) \cup \{\beta_1, \beta_2\} = c(N_H[y_{\{j,j'\}}^\ell])$ , uma contradição em ambos os casos. ■

Agora, mostramos que para um vértice  $u \in X$ , todos os vértices em  $V$  possuem cores diferentes de  $c(u)$ .

**Afirmção 4** *Seja  $u \in X_0$ . Para todo  $v \in V$ ,  $c(u) \neq c(v)$ .*

*Prova (da Afirmção 4).* Suponha, por contradição, que exista  $u = x_j \in X$  e  $v = v_i \in V$ , para algum  $i \in [n]$ ,  $j \in [m]$ , tal que  $c(x_j) = c(v_i) = \alpha$ . Seja  $j' \in [m]$  tal que  $e_{j'} = v_i v_{i'}$ , para algum  $i' \in [n]$ . Recorde que  $N_H[e_{j'}] = K \cup \{v_i, v_{i'}, x_{j'}\}$ . Considere que  $c(v_{i'}) = \beta$ ,  $c(x_{j'}) = \gamma$ . Sabemos pela Afirmção 3 que  $\alpha, \beta, \gamma \in [p] \setminus c(K)$ . A prova é dividida de acordo com o fato de  $\beta$  ou  $\gamma$  serem iguais a  $\alpha$ .

**Caso 1.**  $\alpha = \beta = \gamma$ . Nesse caso, temos que  $c(N_H[e_{j'}]) = c(K) \cup \{\alpha\}$ . Como  $c(x_j) = \alpha$ , obtemos que  $c(N_H[y_j]) = c(K) \cup \{\alpha\}$ , uma contradição.

**Caso 2.**  $\alpha = \beta, \alpha \neq \gamma$ . Temos que  $c(N_H[e_{j'}]) = c(K) \cup \{\alpha, \gamma\}$ . Como  $c(x_j) = \alpha$  e  $c(x_{j'}) = \gamma$ , a definição de  $\mathcal{Y}_2$  implica que  $c(N_H[y_{\{j,j'\}}]) = c(K) \cup \{\alpha, \gamma\}$ , uma contradição.

**Caso 3.**  $\alpha \neq \beta, \alpha = \gamma$ . Temos que  $c(N_H[e_{j'}]) = c(K) \cup \{\alpha, \beta\}$ . Se  $\beta \in c(X_0)$ , digamos  $c(x_{j''}) = \beta$ , então a definição de  $\mathcal{Y}_2$  implica que  $c(N_H[y_{\{j', j''\}}]) = c(K) \cup \{\alpha, \beta\}$ , uma contradição. Caso contrário, como as Afirmações 1 e 2 implicam que  $c(X_0 \cup X_j) = [p] \setminus c(K)$ , temos que  $\beta$  aparece em  $c(X_j)$ , de modo que existe  $\ell \in [3]$  tal que  $c(N_H[y_j^\ell]) = c(K) \cup \{\alpha, \beta\}$ , uma contradição.

Como  $c(x_j) = \alpha$  e  $c(x_{j'}) = \gamma$ , a definição de  $\mathcal{Y}_2$  implica que  $c(N_H[y_{\{j, j'\}}]) = c(K) \cup \{\alpha, \gamma\}$ , uma contradição.

**Caso 4.**  $\alpha \neq \beta, \alpha \neq \gamma$ . Nesse caso final, recorde que  $c(N_H[e_{j'}]) = c(K) \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$ . Temos que, se  $\beta \in c(X_0)$ , digamos  $c(x_{j''}) = \beta$ , então a definição de  $\mathcal{Y}_3$  implica que  $c(N_H[y_{\{j, j', j''\}}]) = c(K) \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$ , uma contradição. Caso contrário, seja  $\beta \in c(X_1)$ , digamos  $c(x_1^\ell) = \beta$ , para algum  $\ell \in [3]$ . A partir da definição de  $\mathcal{Y}_{\{j, j'\}}$  obtemos que  $c(N_H[y_{\{j, j'\}}^\ell]) = c(K) \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$ , uma contradição. ■

Pela Afirmção 4, temos que as cores dos vértices em  $V$  são distintas das cores dos vértices em  $X_0$ , então  $c(V) = [p] \setminus (c(K) \cup c(X_0))$  e  $|c(V)| = 3$ . Além disso, o Caso 3 da Afirmção 4 garante que, para quaisquer  $u, v \in V$ , se  $uv \in E$ , então  $c(u) \neq c(v)$ . Assim, a aplicação  $c_G : V(G) \rightarrow [p] \setminus (c(K) \cup c(X_0))$ , definida por  $c_G(v) = c(v)$  para todo  $v \in V$ , fornece uma 3-coloração válida de  $G$ , como desejado. □

Motivados por esse resultado de complexidade, determinamos o número lid-cromático para certas subclasses de grafos *split* nas próximas três seções.

## 4.2 Lid-coloração em grafos *split* completos

O grafo  $G$  é chamado de *split* completo se cada vértice da clique  $K$  for adjacente a todos os vértices do conjunto independente  $S$ . No Teorema 4.4, apresentamos o número lid-cromático para grafos *split* completos com  $|S| \geq 2$ . Sempre que necessário, omitiremos as arestas da clique e a representaremos por meio de um retângulo.

**Teorema 4.4** [28] *Seja  $G = (K \cup S, E)$  um grafo *split* completo. Se  $|S| \geq 2$ , então  $\chi_{lid}(G) = |K| + 2$ .*

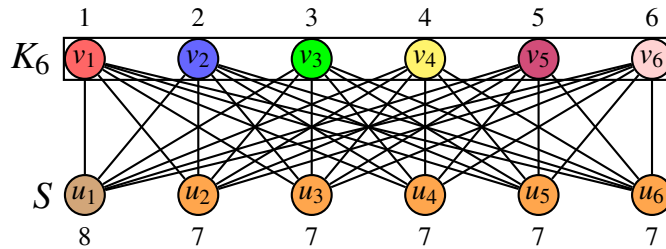
*Prova.* Suponha que  $|K| = k$  e  $|S| = s$ , represente os vértices de  $K$  por  $v_i$  com  $1 \leq i \leq k$  e os vértices de  $S$  por  $u_j$  com  $1 \leq j \leq s$ . Agora, vamos construir uma coloração  $c$  para o grafo  $G$  da seguinte forma:

- para  $1 \leq i \leq k$ ,  $c(v_i) = i$ ;
- $c(u_1) = k + 2$ ;
- para  $u_j \in S$ ,  $c(u_j) = k + 1$  com  $j \geq 2$ .

Observe que  $c$  é uma coloração própria de  $G$ . Como os vértices da clique  $K$  são universais, então resta verificar as vizinhanças  $v_i u_j$ . Assim, temos  $c(N[v_i]) = [k+2]$ , enquanto  $c(N[u_1]) = [k] \cup \{k+2\}$  e  $c(N[u_j]) = [k+1]$  para  $j \geq 2$ . Portanto,  $c(N[v_i]) \neq c(N[u_j])$ , o que implica que  $c$  é uma lid-coloração de  $G$ . Consequentemente,  $\chi_{lid}(G) \leq |K| + 2$ .

Como o grafo *split* completo possui uma clique de tamanho  $|K| + 1$ , então temos  $\chi_{lid}(G) \geq |K| + 1$ . Suponha que  $\chi_{lid}(G) = |K| + 1$ . Nesse caso, atribuímos a cor  $k+1$  ao vértice  $u_1$  mantendo a propriedade de coloração própria. No entanto,  $c(u_1) = k+1$  implica que  $c(N[v_i]) = c(N[u_j])$ , o que leva a uma contradição. Portanto, concluímos que  $\chi_{lid}(G) \geq |K| + 2$ . Assim, podemos afirmar que  $\chi_{lid}(G) = |K| + 2$ .  $\square$

Na Figura 4.2, aplicamos a coloração  $c$  conforme descrito no Teorema 4.4 para um grafo *split* completo. Para  $1 \leq i \leq k$ , temos  $c(v_i) = i$ , resultando em  $c(v_1) = 1$ ,  $c(v_2) = 2$ ,  $c(v_3) = 3$ ,  $c(v_4) = 4$ ,  $c(v_5) = 5$  e  $c(v_6) = 6$ . Além disso, para  $j \geq 2$ , temos  $c(u_j) = k+1$ , o que implica  $c(u_2) = 7$ ,  $c(u_3) = 7$ ,  $c(u_4) = 7$ ,  $c(u_5) = 7$ ,  $c(u_6) = 7$ , e  $c(u_1) = k+2 = 8$ . Portanto,  $\chi_{lid}(G) = |6| + 2 = 8$ .



**Figura 4.2:** Lid-coloração do grafo *split* completo.

Note que os vértices da clique  $K_6$  são gêmeos verdadeiros, ou seja,  $N[u] = N[v]$  implica  $c(N[u]) = c(N[v])$  para todo  $u, v \in K_6$ . Por outro lado, o conjunto independente não possui vértices gêmeos falsos, ou seja,  $N[u] \neq N[v]$  implica  $c(N[u]) \neq c(N[v])$  para todo  $u, v \in S$ .

### 4.3 Lid-coloração de $K_m \odot \overline{K_n}$

Nesta seção, apresentamos resultados sobre o número lid-cromático de grafos *split*-corona, isto é, grafos corona que também são *split*. Esses grafos são precisamente aqueles da forma  $K_m \odot \overline{K_n}$ , com  $m, n \geq 1$ .

Determinamos o número lid-cromático de  $K_m \odot \overline{K_2}$  e de  $K_m \odot \overline{K_n}$  para  $n \geq \log_2 m$ , e estabelecemos limites inferior e superior para o caso geral  $n < \log_2 m$ . Ao longo desta seção, assumimos  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  e  $V(H) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ . Em  $G \odot H$ , os

vértices da cópia de  $G$  são denotados por  $\{v_1^0, v_2^0, \dots, v_m^0\}$ , e para cada  $i \in [m]$ , escrevemos  $H^{(i)}$  para a cópia de  $H$  cujos vértices são adjacentes a  $v_i^0$ .

Em  $K_m \odot \overline{K_n}$ , com  $m \geq 2$ , o grafo  $K_m$  é livre de gêmeos verdadeiros. Assim, aplicamos um resultado de Oliveira *et al.* [28], que fornece um limite inferior para o número de cores de uma lid-coloração na vizinhança fechada de uma clique sem gêmeos verdadeiros.

**Proposição 4.5** [28] *Seja  $G$  um grafo contendo uma clique  $K$  sem vértices gêmeos verdadeiros, com  $|K| = m \geq 2$ . Se  $c$  é uma lid-coloração de  $G$ , então*

$$|c(N[K])| \geq m + \log_2 m.$$

*Prova.* Seja  $G$  um grafo livre de gêmeos verdadeiros contendo uma clique  $K$  de tamanho  $m \geq 2$  e  $K = \{v_1, \dots, v_m\}$ . Suponha que  $c$  seja uma lid-coloração de  $G$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $c(v_i) = i$  para  $i \in [m]$ . Seja  $S = N[K] \setminus K$ . Como  $G$  é um grafo livre de gêmeos verdadeiros, afirmamos que  $|S| \geq \log_2 m$ ; caso contrário,  $2^{|S|} < |K|$  e, como cada  $N[v_i] \setminus K$  é um subconjunto de  $S$ , isso implica que pelo menos dois vértices de  $K$  são gêmeos verdadeiros, contradizendo as hipóteses iniciais. Mostraremos que  $|c(S) \setminus [m]| \geq \log_2 m$ . Por contradição, suponha que  $|c(S) \setminus [m]| < \log_2 m$ . Sabemos que  $|\mathcal{P}(c(S))| = 2^{|c(S)|} \leq 2^{\lceil \log_2 m \rceil - 1} \leq m - 1$ . Como  $m - 1 \geq 1$ , isso implica que existem dois vértices, digamos  $u$  e  $v$ , em  $K$  tais que  $c(N[u]) = c(N[v])$ . Como  $u$  e  $v$  não são gêmeos verdadeiros,  $c$  não é uma lid-coloração de  $G$ . Portanto,  $c(N[K]) \geq m + \log_2 m$ .  $\square$

Observe que, como consequência da Proposição 4.5, temos o Corolário 4.6, o qual estabelece um limite inferior para o número lid-cromático de grafos livres de vértices gêmeos verdadeiros.

**Corolário 4.6** *Seja  $G$  um grafo sem vértices gêmeos verdadeiros e  $m = \omega(G) \geq 2$ . Então,  $\chi_{lid}(G) \geq m + \log_2 m$ .*

Antes de apresentarmos nossos resultados sobre  $\chi_{lid}(K_m \odot \overline{K_n})$ , mostramos condições suficientes para que uma coloração  $c$  em  $K_m \odot \overline{K_n}$  seja de identificação local.

**Lema 4.7** *Sejam  $m \geq 3$ ,  $n \geq 1$ ,  $G = K_m \odot \overline{K_n}$ ,  $X, Z \subseteq \mathbb{N}$  com  $X$  disjunto de  $Z$ , e seja  $c$  uma coloração própria de  $G$  tal que  $c(V(K_m)) = Z$ . Se, para todo  $i \in [m]$ ,*

- $A_1, \dots, A_m$  são subconjuntos distintos de  $X$  com  $|A_i| \leq n$ ;
- $c(V(\overline{K_n}^{(i)})) \cap X = A_i$ ,

*então  $c$  é uma lid-coloração de  $G$ .*

*Prova.* Sejam  $X, Z \subseteq \mathbb{N}$  como descrito, e seja  $c$  uma coloração própria de  $G$  tal que  $c(V(K_m)) = Z$ . Claramente,  $|Z| = m$ . Sejam  $x$  e  $y$  dois vértices adjacentes de  $G$ . Vamos mostrar que  $c(N[x]) \neq c(N[y])$ . Se  $x \in V(\overline{K_n}^{(i)})$  e  $y \in V(K_m)$ , então  $|c(N[x])| = 2$  e  $|c(N[y])| \geq 3$ . Portanto,  $c(N[x]) \neq c(N[y])$ . Suponha que  $x = v_i^0$  e  $y = v_j^0$  para  $i, j \in [m]$ . Pela segunda condição,  $c(V(\overline{K_n}^{(i)})) \cap X = A_i$  e  $c(V(\overline{K_n}^{(j)})) \cap X = A_j$ . Como, pela primeira condição,  $A_i \neq A_j$ , concluímos que  $c(N[x]) \neq c(N[y])$ . Portanto,  $c$  é uma lid-coloração de  $G$ .  $\square$

No Lema 4.7, o uso dos conjuntos  $A_i$  garante que quaisquer dois vértices de  $K_m$  em  $K_m \odot \overline{K_n}$  sejam identificados por  $c$ . Por exemplo, para a lid-coloração de  $K_4 \odot \overline{K_3}$ ,  $Z = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $X = \{5, 6\}$ . Podemos fazer  $A_1 = \{\emptyset\}$ ,  $A_2 = \{5\}$ ,  $A_3 = \{6\}$ , e  $A_4 = \{5, 6\}$ .

Na Proposição 4.9, apresentamos o número cromático do produto  $K_m \odot K_1$ . Para isso, no Lema 4.8, estabelecemos um limite inferior para grafos com características semelhantes ao grafo  $K_m \odot K_1$ .

**Lema 4.8** [28] *Seja  $G$  um grafo que contém uma clique  $K$  de tamanho  $k$ . Se, para todo vértice  $v \in K$ ,  $v$  é adjacente a apenas um vértice  $u$  que não pertence a  $K$ , e  $u$  não é adjacente a nenhum outro vértice em  $K$ , então temos  $\chi_{lid}(G) \geq 2k - 1$ .*

*Prova.* Considere  $|K| = k$ , onde os vértices de  $K$  são denotados por  $v_i$  com  $1 \leq i \leq k$ . De acordo com a hipótese, cada vértice  $v_i$  em  $K$  possui um vizinho  $u_i$ , com  $1 \leq i \leq k$ , que não pertence a  $K$  e não é adjacente a nenhum outro vértice em  $K$ . Denotamos por  $S = \bigcup_{i=1}^k \{u_i\}$ .

Agora, considere uma coloração  $c$  de  $G$  na qual, para  $1 \leq i \leq k$ ,  $c(v_i) = i$ . Vamos mostrar que para colorir os vértices de  $S$ , precisamos de pelo menos  $k - 1$  cores diferentes das cores em  $[k]$ . Suponha que pelo menos dois vértices em  $S$  sejam coloridos com duas cores distintas pertencentes a  $[k]$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $c(u_1) = 2$  e  $c(u_2) = 1$ , o que implica que  $c(N[v_1]) = c(N[v_2]) = [k]$ , o que é uma contradição. Portanto, concluímos que  $\chi_{lid}(G) \geq 2k - 1$ .  $\square$

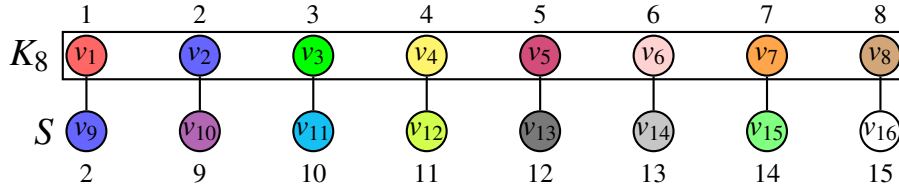
**Proposição 4.9** [28] *Seja o grafo split  $G = K_m \odot K_1$ , com  $m \geq 3$ . Se  $\omega(G) \geq 3$ , então  $\chi_{lid}(G) = 2\omega - 1$ .*

*Prova.* Observe que  $m = \omega(G)$ . De acordo com o Teorema 4.2, temos que  $\chi_{lid}(G) \leq 2\omega - 1$ . Além disso, pelo Lema 4.8, temos que  $\chi_{lid}(G) \geq 2\omega - 1$ . Portanto, concluímos que  $\chi_{lid}(G) = 2m - 1 = 2\omega - 1$ .  $\square$

Vale ressaltar que o número lid-cromático do grafo  $K_m \odot K_1$  satisfaz a igualdade do Teorema 4.2. Na Figura 4.3, apresentamos uma lid-coloração do grafo  $K_8 \odot K_1$  de

acordo com a coloração apresentada no Lema 4.8. Observa-se que, dado que  $K_8$  forma uma clique, temos  $c(v_i) = i$  para  $1 \leq i \leq 8$ . Assim, temos que  $c(v_1) = 1$ ,  $c(v_2) = 2$ ,  $c(v_3) = 3$ ,  $c(v_4) = 4$ ,  $c(v_5) = 5$ ,  $c(v_6) = 6$ ,  $c(v_7) = 7$  e  $c(v_8) = 8$ .

A coloração dos vértices nas cópias de  $K_1$  é dada por  $c(v_9) = 2$  e  $c(v_i) = i - 1$  para  $i \neq 9$ . Portanto, temos  $c(v_{10}) = 9$ ,  $c(v_{11}) = 10$ ,  $c(v_{12}) = 11$ ,  $c(v_{13}) = 12$ ,  $c(v_{14}) = 13$ ,  $c(v_{15}) = 14$  e  $c(v_{16}) = 15$ . Portanto,  $\chi_{lid}(K_8 \odot K_1) = 2 \cdot 8 - 1 = 15$ .



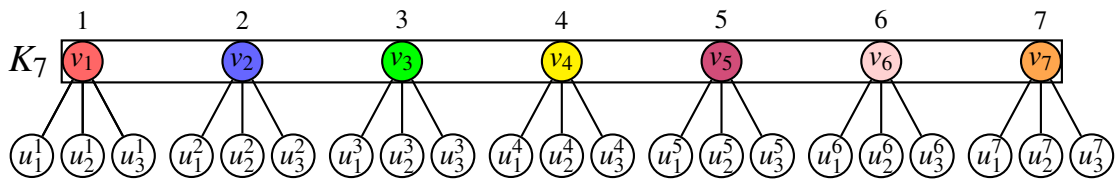
**Figura 4.3:** Lid-coloração de  $K_8 \odot K_1$ .

A seguir, no Teorema 4.10, apresentamos o número lid-cromático do grafo  $K_m \odot \overline{K_n}$  com  $m \geq 5$  e  $n \geq \log_2 m$ .

**Teorema 4.10** *Seja  $G = K_m \odot \overline{K_n}$  com  $n \geq \log_2 m$  e  $m \geq 5$ . Então,  $\chi_{lid}(G) = m + \lceil \log_2 m \rceil$ .*

*Prova.* Como  $K_m \odot \overline{K_n}$  contém uma clique de tamanho  $m$  sem vértices gêmeos verdadeiros, a Proposição 4.5 garante que  $\chi_{lid}(K_m \odot \overline{K_n}) \geq m + \lceil \log_2 m \rceil$ . Para o limite superior, construímos uma lid-coloração  $c$  para  $G$  com a cardinalidade descrita. Colorimos a clique propriamente definindo  $c(v_i^0) = i$  para todo  $i \in [m]$ . Seja  $x = \lceil \log_2 m \rceil$  e  $X = [m+x] \setminus [m]$ . Denotemos por  $\mathcal{X} = \mathcal{P}(X)$  o conjunto das partes de  $X$ . Para cada  $i \in [m]$ , seja  $A_i$  um subconjunto distinto de  $\mathcal{X}$ . Além disso, se  $A_i = \emptyset$ , então definimos  $c(V(\overline{K_n}^{(i)})) = j$ , com  $j \in [m]$  e  $i \neq j$ . Note que  $|\mathcal{X}| = 2^{\lceil \log_2 m \rceil} \geq m$ . Portanto, os vértices de  $\overline{K_n}^{(i)}$  devem ser coloridos propriamente com as cores de  $A_i$ . É fácil verificar que essa coloração é própria e, pelo Lema 4.7,  $c$  é uma lid-coloração de  $G$ . Logo,  $\chi_{lid}(K_m \odot \overline{K_n}) \leq m + \lceil \log_2 m \rceil$ .  $\square$

A seguir, aplicamos a coloração  $c$  conforme descrito no Teorema 4.10 para colorir o grafo  $K_7 \odot \overline{K_3}$ . Para  $i \in [7]$ ,  $c(v_i) = i$ , ou seja,  $c(v_1) = 1, c(v_2) = 2, c(v_3) = 3, c(v_4) = 4, c(v_5) = 5, c(v_6) = 6$  e  $c(v_7) = 7$ , como pode ser visto na Figura 4.4. Note que omitimos as arestas de  $K_7$ , representadas pelo retângulo, para maior clareza na visualização.



**Figura 4.4:** Lid-coloração de  $K_7 \odot \overline{K_3}$ .

Sejam  $\mathcal{R} = \{\overline{V(K_3^{(1)})}, \overline{V(K_3^{(2)})}, \overline{V(K_3^{(3)})}, \overline{V(K_3^{(4)})}, \overline{V(K_3^{(5)})}, \overline{V(K_3^{(6)})}, \overline{V(K_3^{(7)})}\}$ ,  $x = \lceil \log_2 7 \rceil = 3$ ,  $X = \{7 + 1, 7 + 2, 7 + 3\} = \{8, 9, 10\}$ , o conjunto de novas cores que serão utilizadas para colorir os vértices de  $\overline{K_3^{(i)}}$ , e  $\mathcal{X} = \{\emptyset, \{8\}, \{9\}, \{10\}, \{8, 9\}, \{8, 10\}, \{9, 10\}, \{8, 9, 10\}\}$  o conjunto ordenado das partes de  $X$ .

Utilizaremos a função  $q: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{X}$  para associar cada  $\overline{K_3^{(i)}}$  a um subconjunto de  $\mathcal{X}$ . Considere  $q(\overline{K_3^{(i)}}) = X_i$ . Portanto,  $q(\overline{V(K_3^{(1)})}) = \emptyset$ ,  $q(\overline{V(K_3^{(2)})}) = \{8\}$ ,  $q(\overline{V(K_3^{(3)})}) = \{9\}$ ,  $q(\overline{V(K_3^{(4)})}) = \{10\}$ ,  $q(\overline{V(K_3^{(5)})}) = \{8, 9\}$ ,  $q(\overline{V(K_3^{(6)})}) = \{8, 10\}$  e  $q(\overline{V(K_3^{(7)})}) = \{9, 10\}$ .

Para colorir os vértices de cada  $\overline{K_3^{(i)}}$  usaremos conjuntos de cores pertencentes a  $[7] \setminus \{i\} \cup \{X_i\}$ . É importante observar que não pode haver repetição dos subconjuntos  $X_i$  em cada  $\overline{K_3^{(i)}}$ , mas pode haver repetição de cores, desde que todas as cores de  $X_i$  precisem ser utilizadas em  $\overline{K_3^{(i)}}$ . Tal fato pode ser visto na Figura 4.5.

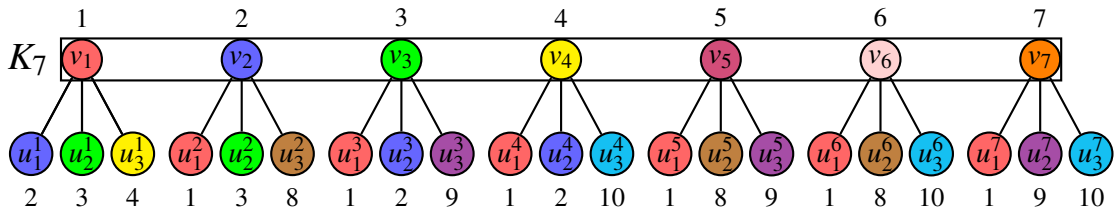


Figura 4.5: Lid-coloração de  $K_7 \odot \overline{K_3}$ .

Note que a coloração  $c$  é própria e, como para cada  $\overline{K_3^{(i)}}$  e  $\overline{K_3^{(z)}}$  com  $i \neq z$ , então  $c(N[\overline{K_3^{(i)}}]) \neq c(N[\overline{K_3^{(z)}}])$ , o que implica  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_z])$ . Portanto,  $\chi_{lid}(K_7 \odot \overline{K_3}) = 7 + \lceil \log_2 7 \rceil = 10$ .

Note que existem valores de  $n < \log_2 m$  para os quais o Teorema 4.10 não é válido. Na Figura 4.6, apresentamos o grafo  $K_8 \odot \overline{K_2}$  e sua correspondente lid-coloração, confirmando essa constatação.

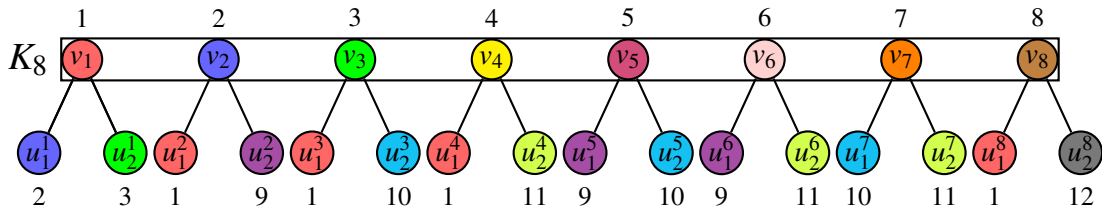


Figura 4.6: Grafo  $K_8 \odot \overline{K_2}$ ,  $\chi_{lid}(K_8 \odot \overline{K_2}) = 12 \neq 8 + \log_2 8 = 11$ .

A seguir, no Teorema 4.11, apresentamos o número lid-cromático do grafo  $K_m \odot \overline{K_2}$ .

**Teorema 4.11** *Seja  $G = K_m \odot \overline{K_2}$  com  $m \geq 5$ . Então,  $\chi_{lid}(G) = m + \left\lceil \frac{\sqrt{8m-7}-1}{2} \right\rceil$ .*

*Prova.* Para o limite superior, construímos uma lid-coloração  $c$  para  $G$  com a cardinalidade desejada. Para cada  $i \in [m]$ , atribuímos  $c(v_i^0) = i$ . Seja  $x = \left\lceil \frac{\sqrt{8m-7}-1}{2} \right\rceil$  e  $X = [m+x] \setminus [m]$ . Para cada  $i \in [m]$ , seja  $A_i$  um subconjunto distinto de  $\mathcal{P}(X)$  tal que  $|A_i| \leq 2$ . O número de subconjuntos de  $X$  de tamanho no máximo dois pode ser expresso como  $\sum_{i=0}^2 \binom{x}{i} = 1 + x + \frac{x(x-1)}{2} \geq m$ . Assim,  $\overline{K}_2^{(i)}$  deve ser propriamente colorido com as cores em  $A_i$ . É fácil verificar que a coloração  $c$  é própria e, pelo Lema 4.7,  $c$  é uma lid-coloração de  $G$ .

Para o limite inferior, suponha que  $c$  seja uma lid-coloração de  $G$  com a cardinalidade mínima. Sem perda de generalidade, assumamos que  $c(v_i^0) = i$  para todos  $i \in [m]$ . Se  $\overline{K}_2^{(i)}$  e  $\overline{K}_2^{(j)}$  recebem apenas cores de  $[m]$ , para  $i, j \in [m]$  com  $i \neq j$ , temos  $c(N[v_i^0]) = c(N[v_j^0]) = [m]$ . Portanto, cores adicionais estão sendo usadas para identificar todos os pares de vértices de  $K_m$  em  $G$ . Seja  $x \geq 1$  e  $X = [m+x] \setminus [m]$  o conjunto dessas cores. Como  $n = 2$ , subconjuntos de  $X$  de tamanho no máximo dois podem ser usados para colorir os vértices de cada  $\overline{K}_2^{(i)}$ . Assim, o número de conjuntos distintos de cores sobre o conjunto  $X$  de tamanho no máximo dois é representado pela seguinte expressão:

$$\sum_{i=0}^2 \binom{x}{i} \geq m. \quad (4-1)$$

Pode-se observar que o primeiro membro da inequação 4-1 representa a quantidade de subconjuntos de tamanho até dois pertencentes a  $\mathcal{Y}$ , necessários para colorir os vértices de cada  $\overline{K}_2^{(i)}$ , identificando assim cada vértice de  $K_m$ . Simplificando a inequação 4-1, obtemos:

$$\binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} \geq m \quad (4-2)$$

$$1 + x + \frac{x!}{2!(x-2)!} \geq m \quad (4-3)$$

$$1 + x + \frac{x(x-1)(x-2)!}{2(x-2)!} \geq m \quad (4-4)$$

$$x^2 + x + 2 - 2m \geq 0 \quad (4-5)$$

Resolvendo a Inequação 4-5, temos a seguinte solução:

$$x \geq \frac{-1 \pm \sqrt{8m-7}}{2} \quad (4-6)$$

$$x \geq \left\lceil \frac{-1 \pm \sqrt{8m-7}}{2} \right\rceil \quad (4-7)$$

Logo,  $\chi_{lid}(G) \geq m + \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{8m-7}}{2} \right\rceil$ . Portanto,  $\chi_{lid}(G) = m + \left\lceil \frac{\sqrt{8m-7}-1}{2} \right\rceil$ .  $\square$

Ressaltamos que o Teorema 4.11 não decorre do Teorema 4.10, uma vez que considera o caso particular  $n = 2$ , o qual, em geral, não satisfaz a condição  $n \geq \log_2 m$ . No entanto, para alguns valores de  $m$ , como  $m \in \{5, 6, 7\}$ , as expressões fornecidas por esses teoremas coincidem numericamente.

À medida que  $n$  aumenta, o grau da desigualdade também cresce, o que torna inviável obter uma solução exata para  $n \geq 4$ , tornando a abordagem algébrica impraticável, uma vez que não existe fórmula geral por radicais para polinômios de grau arbitrário. Assim, no Teorema 4.12, apresentamos limites inferior e superior para esses casos.

**Teorema 4.12** *Seja  $G = K_m \odot \overline{K_n}$  com  $n > 2$  e  $n < m$ . Então,  $m + \lceil \log_2 m \rceil \leq \chi_{lid}(G) \leq 2m - 1$ .*

*Prova.* Pelo Teorema 4.10, temos que  $\chi_{lid}(K_m \odot \overline{K_n}) \geq m + \lceil \log_2 m \rceil$ . Além disso, como  $K_m \odot \overline{K_n}$  é um grafo *split*, pelo Teorema 4.2, concluímos que  $\chi_{lid}(K_m \odot \overline{K_n}) \leq 2m - 1$ .  $\square$

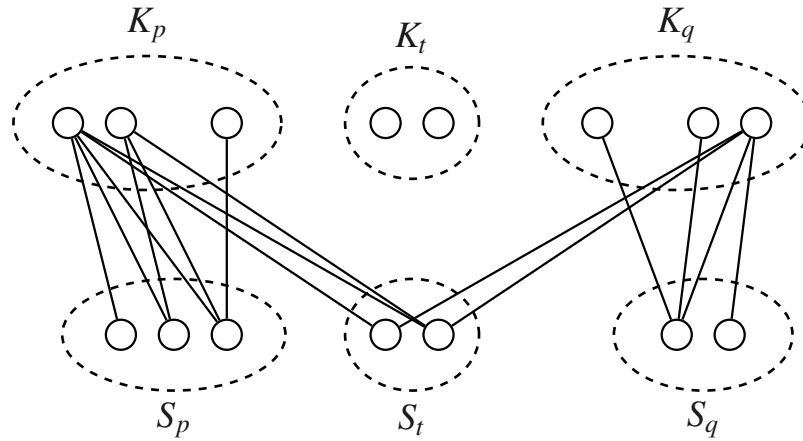
## 4.4 Lid-coloração em grafos *split*-comparabilidade

Passamos agora a considerar uma subclasse específica dos grafos *split*, os grafos *split*-comparabilidade. Nesse contexto, nossa análise concentra-se em determinar os valores exatos do número lid-cromático  $\chi_{lid}(G)$  sob diferentes condições estruturais.

Um grafo  $G$  é um grafo de comparabilidade se ele admitir uma orientação transitiva de suas arestas, isto é, uma orientação tal que, se existirem as arestas  $uv$  e  $vw$ , então também existe a aresta  $uw$ . Um grafo  $G$  é um grafo *split*-comparabilidade se ele for simultaneamente um grafo *split* e um grafo de comparabilidade. Ortiz e Villanueva [33] caracterizaram os grafos de *split*-comparabilidade da seguinte forma.

**Lema 4.13** [33] *Um grafo *split*  $G = (K \cup S, E)$  é um grafo de comparabilidade se, e somente se,  $K$  pode ser ordenado  $v_1 \prec v_2 \prec \dots \prec v_r$  e  $K_p = [v_1, v_p]$ ,  $K_q = [v_q, v_r]$  e  $K_t = K \setminus (K_p \cup K_q)$  tal que, para qualquer  $s \in S$ ,  $N(s)$  tem uma das seguintes formas:*

- i)  $[v_1, v_i]$ ,  $i \leq p$ ;
- ii)  $[v_j, v_r]$ ,  $q \leq j \leq r$ ;
- iii)  $[v_1, v_i] \cup [v_j, v_r]$ , para  $i \leq p$  e  $q \leq j \leq r$ .

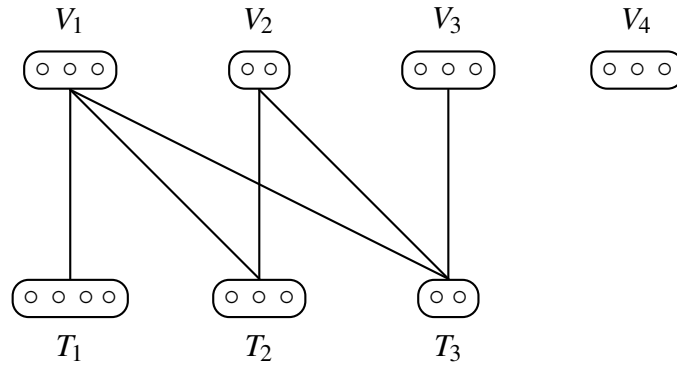


**Figura 4.7:** Diagrama geral de um grafo *split-comparabilidade*. As arestas da clique  $K$  foram omitidas para melhor visualização.

Considere um grafo *split-comparabilidade*  $G = [K, S]$ . Seja  $[K_p, K_t, K_q]$  uma partição de  $K$ , conforme definido no Lema 4.13. O subconjunto de vértices de  $S$  que não são adjacentes a vértices em  $K_p$  é denotado por  $S_q$ , e aqueles que não são adjacentes a  $K_q$  são denotados por  $S_p$ . Defina  $S_t = S \setminus (S_p \cup S_q)$ . Note que  $[K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$  é uma partição de  $V(G)$ . Assim, denotamos um grafo *split-comparabilidade* por  $G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$ . Um diagrama geral de um grafo *split-comparabilidade* é apresentado na Figura 4.7. Sem perda de generalidade, podemos assumir, a partir de agora, que  $|S_p| \geq |S_q|$ .

Além disso,  $|K| = k$ ,  $|S| = s$ ,  $|S_p| = w$  e  $|S_q| = z$ . Os vértices em  $K$  serão denotados por  $v_i$ , com  $i \in [k]$ , os vértices em  $S_p$  por  $a_\ell$ , com  $1 \leq \ell \leq w$ , e os vértices em  $S_q$  por  $b_f$ , com  $1 \leq f \leq z$ . Para maior clareza, os vértices em  $S$  são ordenados de acordo com seus graus, isto é,  $d(a_1) \leq d(a_2) \leq \dots \leq d(a_w)$  e  $d(b_1) \leq d(b_2) \leq \dots \leq d(b_z)$ . Assumimos que todo vértice  $v_i \in K$  tal que  $N[v_i] = [k]$  pertence ao conjunto  $K_t$ .

Seja  $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_\ell\}$ , com  $\ell \geq 1$ , uma partição de  $S_p$  ( $S_q$ ) tal que, para todo  $i \in [\ell]$ ,  $T_i$  é uma classe de gêmeos falsos de  $S_p$  ( $S_q$ ). Consideramos que, se  $a_i \in T_i$  e  $a_j \in T_j$  com  $i < j$ , então  $d(a_i) < d(a_j)$ . Veja a Figura 4.8 para um exemplo do conjunto  $\mathcal{T}$ . Note que, em um grafo *split-comparabilidade*  $G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$ , onde  $K_q = S_t = S_q = \emptyset$ ,  $K_p = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ ,  $K_t = V_4$  e  $S_p = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ . Os vértices em cada  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , são gêmeos verdadeiros, enquanto os vértices em cada  $T_i$  são gêmeos falsos. Uma aresta entre dois conjuntos indica que todo vértice de um conjunto é adjacente a todo vértice do outro (isto é, uma conexão bipartida completa). As arestas dentro da clique  $K$  são omitidas para maior clareza.



**Figura 4.8:** Representação do conjunto  $\mathcal{T}$  no grafo *split-comparabilidade*.

Se  $c$  é uma coloração de  $G = [K, S]$ , dizemos que uma cor  $x_i \in c(T_i)$  é **exclusiva** em  $\mathcal{T}$  se  $x_i \notin \cup_{i \neq j} c(T_j) \cup c(K)$ .

**Lema 4.14** *Seja  $G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$  um grafo *split-comparabilidade* com  $|K| \geq 3$  e  $S_t = \emptyset$ . Se  $c$  é uma lid-coloração de  $G$ , então, para todo  $i \in [\ell - 1]$ , existe uma cor  $x_i \in c(T_i)$  tal que  $x_i$  é exclusiva em  $\mathcal{T}$ .*

*Prova.* Por simetria, seja  $\mathcal{T}$  uma partição de  $S_p$ . Suponha, por contradição, que  $c(T_i) \setminus (\cup_{j \neq i} c(T_j) \cup c(K)) = \emptyset$ , tal que  $i$  seja mínimo. Isso implica que todos os vértices de  $c(T_i)$  possuem apenas cores no conjunto  $\cup_{j \neq i} c(T_j) \cup c(K)$ . Como  $i$  é mínimo,  $c(T_i) \setminus (\cup_{j > i} c(T_j) \cup c(K)) = \emptyset$ , isto é,  $(c(T_i) \setminus c(K)) \subseteq (\cup_{j > i} c(T_j) \setminus c(K))$ . Seja  $v_i \in N(T_i)$  e  $v_j \in N(T_{i+1})$ . Pela estrutura do grafo,  $N[v_i] \neq N[v_j]$  e  $N[v_j] \subseteq N[v_i]$ . Além disso,  $N_{S_p}[v_i] = \cup_{j \geq i} T_j$  e  $N_{S_p}[v_j] = \cup_{j > i} T_j$ . Como não existe cor exclusiva para  $T_i$ , obtemos  $c(N[v_i]) = c(N[v_{i+1}])$ , o que contradiz o fato de que  $c$  é uma lid-coloração de  $G$ . Portanto,  $c(T_i) \setminus (\cup_{j \neq i} c(T_j) \cup c(K)) \neq \emptyset$ .  $\square$

Dada uma ordenação  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , dizemos que as vizinhanças fechadas desses vértices são aninhadas se  $N[v_k] \subseteq N[v_{k-1}] \subseteq \dots \subseteq N[v_1]$ . O Lema 4.15 afirma que, em uma lid-coloração mínima, todos os vértices de uma mesma classe de gêmeos falsos  $T_i$  podem receber a mesma cor.

**Lema 4.15** *Seja  $G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$  um grafo *split-comparabilidade* com  $|K| \geq 3$  e  $S_t = \emptyset$ . Então, existe uma lid-coloração mínima  $c'$  de  $G$  tal que todos os vértices de cada classe  $T_i$ , com  $i \in [\ell]$ , recebem a mesma cor, isto é,  $c'(a) = x_i$  para todo  $a \in T_i$ .*

*Prova.* Por simetria, seja  $\mathcal{T}$  uma partição de  $S_p$ . Seja  $c$  uma lid-coloração mínima de  $G$ . Pelo Lema 4.14, para cada  $i \in [\ell - 1]$ , existe uma cor  $x_i \in c(T_i)$  que é exclusiva em  $\mathcal{T}$ . Seja  $c'$  uma lid-coloração de  $G'$  obtida a partir de  $c$ , tal que, para todo vértice  $a \in T_i$ , tem-se  $c'(a) = x_i$ . Se o conjunto  $c(T_\ell)$  contém uma cor exclusiva  $x_\ell$ , então  $c'(a) = x_\ell$

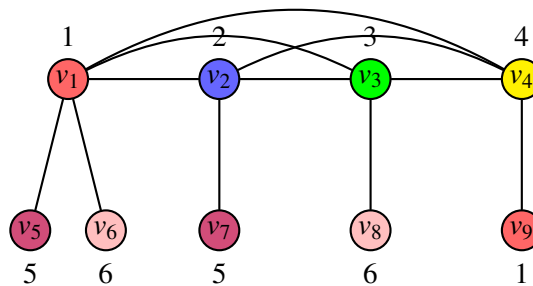
para todo  $a \in T_\ell$ ; caso contrário, escolha qualquer cor  $y \in c(T_\ell)$  e atribua  $c(a) = y$  para todo  $a \in T_\ell$ . As cores dos demais vértices de  $G$  permanecem as mesmas de  $c$ . Assim,  $|c'| \leq |c|$ . Sejam  $v_d, v_j \in K_p$ , com  $N[v_d] \neq N[v_j]$  e  $d < j$ . Como as vizinhanças em  $K_p$  são aninhadas, temos  $T_d \subseteq N_S(v_d)$  e  $T_j \subseteq N_S(v_j)$ . Como  $x_d \in c'(N_S(v_d))$  e  $x_d \notin c'(N_S(v_j))$ , segue que  $c'(N[v_d]) \neq c'(N[v_j])$ . Como  $c$  é uma lid-coloração mínima,  $|c'| \geq |c|$ , o que implica  $|c'| = |c|$ . Portanto,  $c'$  é uma lid-coloração mínima de  $G$ .  $\square$

No Lema 4.16 mostramos que, sob as hipóteses consideradas, a remoção de um vértice pertencente a uma classe de gêmeos falsos em  $S$  preserva o número lid-cromático.

**Lema 4.16** *Seja  $G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$  um grafo *split-comparabilidade* com  $|K| \geq 3$  e  $S_t = \emptyset$ . Se  $\chi_{lid}(G) = d$ , então, para qualquer par de gêmeos falsos  $u, w \in S$ , tem-se que  $\chi_{lid}(G - w) = d$ .*

*Prova.* Por simetria, suponha que  $u, w \in S_p$ . Seja  $G'$  o grafo obtido a partir de  $G$  após a remoção de  $w$ . Se  $u$  e  $w$  são gêmeos falsos em  $S_p$ , então  $u$  e  $w$  pertencem à mesma classe de equivalência, digamos  $T_i$ . Seja  $c$  uma lid-coloração de  $G$ . Pelo Lema 4.15, podemos assumir que  $c(u) = c(w)$ . Além disso, como  $c(u) = c(w)$  em  $G$ , segue que  $c(N_G[v]) = c'(N_{G'}[v])$  para todo vértice  $v \in K$ . Portanto,  $\chi_{lid}(G - w) = d$ .  $\square$

Podemos aplicar o Lema 4.16 sucessivamente a um grafo *split-comparabilidade*  $G$  com  $S_t = \emptyset$ , de modo a obter um grafo  $G'$  no qual não restam vértices gêmeos falsos em  $S$ . Assim, a partir deste ponto, podemos assumir que  $S$  é livre de gêmeos falsos. Contudo, vale destacar que a remoção de vértices gêmeos falsos em um grafo *split* geral não garante a preservação do número lid-cromático. Por exemplo, no grafo  $G$  ilustrado na Figura 4.9, os vértices  $v_5$  e  $v_6$  são gêmeos falsos. Enquanto  $\chi_{lid}(G) = 6$ , no grafo  $G'$  obtido pela remoção do vértice  $v_5$  tem-se  $\chi_{lid}(G') = 7$ .



**Figura 4.9:** Um grafo  $G$  com dois vértices gêmeos falsos cuja remoção de um deles produz um grafo  $G'$  com número lid-cromático maior.

Como consequência imediata dos Lemas 4.14 e 4.16, obtemos o seguinte corolário.

**Corolário 4.17** *Seja  $G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$  um grafo *split*-comparabilidade com  $|K| \geq 3$  e  $S_t = \emptyset$ . Então,  $\chi_{lid}(G) \geq |K| + |S_p| - 1$ .*

Sob certas restrições adicionais, aprimoramos o limite inferior apresentado no Corolário 4.17, conforme estabelecido no resultado a seguir.

**Lema 4.18** *Seja  $G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$  um grafo *split*-comparabilidade com  $|K| \geq 3$  e  $S_t = \emptyset$ . Se  $K = K_p$  ou  $K_t \neq \emptyset$ , então  $\chi_{lid}(G) \geq |K| + |S_p|$ .*

*Prova.* Pelo Corolário 4.17, tem-se que  $\chi_{lid}(G) \geq |K| + |S_p| - 1$ . Seja  $c$  uma lid-coloração de  $G$ . As  $|K|$  cores são utilizadas para colorir a clique  $K$ . Suponha, por contradição, que  $S_p$  possa ser colorido com apenas  $|S_p| - 1$  cores restantes. Pelo Lema 4.14, para todo  $i \in [w - 1]$ , o vértice  $a_i$  possui uma cor exclusiva em  $S_p$ . Assim, concluímos que  $c(a_w) \in c(K)$ . Se  $K_t \neq \emptyset$ , então  $c(N[v_j]) = c(K)$  para algum  $v_j \in K_t$ . Seja  $v_\ell \in N(a_w)$ . Nesse caso,  $N[v_\ell] = K \cup \{a_w\}$ , e portanto  $c(N[v_\ell]) = c(K) = c(N[v_j])$ , o que contradiz o fato de  $c$  ser uma lid-coloração. Se  $K = K_p$ , como  $c(a_w) \in c(K)$  e  $N(a_w) = K$ , segue que  $c$  não é uma coloração própria de  $G$ . Portanto,  $\chi_{lid}(G) \geq |K| + |S_p|$ .  $\square$

No Lema 4.19, mostramos que a atribuição de cores distintas aos vértices de  $S_p$ , sem reutilização de cores de  $K$ , é suficiente para garantir que quaisquer dois vértices de  $K_p$  sejam distinguidos pelos conjuntos de cores de suas vizinhanças fechadas.

**Lema 4.19** *Seja  $G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$  um grafo *split*-comparabilidade com  $|K| \geq 3$  e  $S_t = \emptyset$ . Seja  $c$  uma coloração de  $G$ . Se as cores no conjunto  $c(\{a_1, \dots, a_{w-1}\})$  são todas distintas e  $c(\{a_1, \dots, a_{w-1}\}) \cap K = \emptyset$ , então  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_j])$  para todos  $v_i, v_j \in K_p$ .*

*Prova.* Sejam  $v_i, v_j \in K_p$ . Os conjuntos  $N_{S_p}[v_i]$  e  $N_{S_p}[v_j]$  diferem em pelo menos um elemento. Como as cores atribuídas a  $S_p$  são distintas, temos  $|c(N[v_i])| \neq |c(N[v_j])|$ , o que implica  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_j])$ .  $\square$

Um grafo *split*  $G = [K, S]$  é chamado de ***split* aninhado** (também conhecido como **grafo de limiar**) se os vértices de  $K = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  estão ordenados de forma que suas vizinhanças fechadas sejam aninhadas, isto é,  $N[v_k] \subseteq N[v_{k-1}] \subseteq \dots \subseteq N[v_1]$ . Um grafo *split* aninhado é um grafo *split*-comparabilidade com conjunto  $S_t$  vazio e em que pelo menos um dos conjuntos  $S_p$  e  $S_q$  também é vazio. O conjunto  $K_t$  pode ou não ser vazio. Assim, analisamos inicialmente a lid-coloração de um grafo *split* aninhado  $G = [K_p, K_t, S_p]$ .

**Teorema 4.20** *Seja  $G = [K_p, K_t, S_p]$  um grafo *split* aninhado, com  $|K| \geq 3$ . Se  $S_p$  é livre de gêmeos falsos, então  $\chi_{lid}(G) = |K| + |S_p|$ .*

*Prova.* Como  $K_t \neq \emptyset$  ou, caso contrário,  $K = K_p$ , pelo Lema 4.18, podemos concluir que  $\chi_{lid}(G) \geq |K| + |S_p|$ . Resta provar que  $\chi_{lid}(G) \leq |K| + |S_p|$ . Para isso, construímos uma lid-coloração mínima  $c$  para o grafo  $G$  da seguinte forma:

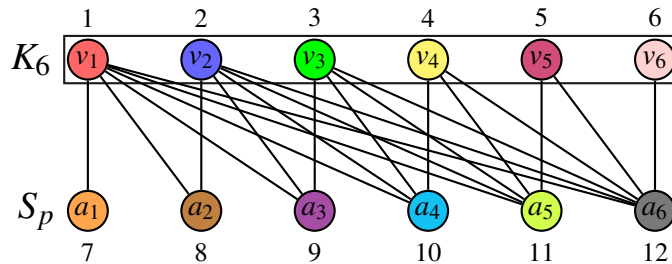
- $c(v_i) = i$ , para  $1 \leq i \leq k$ ;
- $c(a_\ell) = k + \ell$ , para  $1 \leq \ell \leq w$ .

Mostremos agora que  $c$  é, de fato, uma lid-coloração de  $G$ . Se  $S_p = \emptyset$ , então  $K_p = \emptyset$ ,  $K = K_t$ , e o resultado segue diretamente. Logo, daqui em diante, suponhamos  $S_p \neq \emptyset$ . Como as cores em  $c(S_p)$  são todas distintas e  $c(S_p) \cap K = \emptyset$ , pelo Lema 4.19, temos que  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_j])$  para todo  $v_i, v_j \in K_p$ .

Agora, suponha  $K_t \neq \emptyset$ , com  $v_i \in K_p$  e  $v_j \in K_t$ . Nesse caso,  $c(N[v_j]) = [k]$ . Como  $c(S_p) \cap c(K) = \emptyset$ , segue que  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_j])$  e, além disso, como  $v_j$  não é adjacente a nenhum vértice  $a_\ell \in S_p$ , concluímos também que  $c(N[v_i]) \neq c(N[a_\ell])$ .

Por fim, considere o caso  $K_t = \emptyset$ , com  $v_i \in K_p$  e  $a_\ell \in S_p$ . Se  $v_i$  e  $a_\ell$  não são gêmeos (nem verdadeiros nem falsos), então existe uma cor que distingue seus conjuntos de vizinhança fechada. Em particular, temos que  $c(v_p) \in c(N[v_i])$  e  $c(v_p) \notin c(N[a_\ell])$ . Logo,  $c(N[v_i]) \neq c(N[a_\ell])$ , e portanto  $c$  é uma lid-coloração de  $G$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

A seguir, aplicamos a coloração  $c$ , conforme descrito no Teorema 4.20, para colorir um exemplo de *split* aninhado. Para  $i \in [6]$ ,  $c(v_i) = i$ , ou seja,  $c(v_1) = 1$ ,  $c(v_2) = 2$ ,  $c(v_3) = 3$ ,  $c(v_4) = 4$ ,  $c(v_5) = 5$  e  $c(v_6) = 6$ . Já para  $a_\ell \in S_p$ , com  $1 \leq \ell \leq w$ , tem-se  $c(a_\ell) = k + \ell$ , isto é,  $c(a_1) = 7$ ,  $c(a_2) = 8$ ,  $c(a_3) = 9$ ,  $c(a_4) = 10$ ,  $c(a_5) = 11$  e  $c(a_6) = 12$ , como pode ser visto na Figura 4.10. Note que omitimos as arestas de  $K_7$ , representadas pelo retângulo, para maior clareza na visualização.



**Figura 4.10:** *Split* aninhado em que  $\chi_{lid}(G) = 6 + 6 = 12$ .

Em um grafo *split*-comparabilidade, o conjunto de cores atribuídas a cada parte  $S_p$  e  $S_q$  não pode ser igual. O Lema 4.21 explicita essa propriedade.

**Lema 4.21** *Seja  $G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$  um grafo *split*-comparabilidade com  $S_t = \emptyset$ ,  $S_p \neq \emptyset$  e  $S_q \neq \emptyset$ , e seja  $c$  uma lid-coloração de  $G$ . Então,  $c(S_p) \neq c(S_q)$ .*

*Prova.* Observe que  $N[v_1] = V(K) \cup V(S_p)$ , o que implica que  $c(N[v_1]) = c(K) \cup c(S_p)$ . De modo análogo,  $N[v_k] = V(K) \cup V(S_q)$  e, portanto,  $c(N[v_k]) = c(K) \cup c(S_q)$ . Como  $c$  é uma lid-coloração, temos que  $c(N[v_1]) \neq c(N[v_k])$ , e, conseqüentemente,  $c(S_p) \neq c(S_q)$ .  $\square$

Dividimos a análise do número lid-cromático de grafos *split*-comparabilidade em dois casos, a depender de  $K_t$  ser vazio ou não. O Teorema 4.22 fornece a caracterização exata desse valor para o primeiro caso.

**Teorema 4.22** *Seja  $G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$  um grafo *split*-comparabilidade com  $|K| \geq 3$ ,  $S_t = \emptyset$ ,  $S_p \neq \emptyset$ ,  $S_q \neq \emptyset$  e  $S$  é livre de gêmeos falsos. Se  $K_t = \emptyset$ , então*

$$\chi_{lid}(G) = \begin{cases} |K| + |S_p|, & \text{se } |S_p| - |S_q| \leq 1, \\ |K| + |S_p| - 1, & \text{se } |S_p| - |S_q| > 1. \end{cases}$$

*Prova.* Como  $K_p \cup S_p$  e  $K_q \cup S_q$  induzem grafos *split* aninhados e disjuntos, podemos aplicar o Corolário 4.17, o qual nos fornece a desigualdade  $\chi_{lid}(G) \geq |K| + |S_p| - 1$ . Para o caso em que  $|S_p| - |S_q| \leq 1$ , suponha, por contradição, que  $|S_p| - 1$  cores, além das  $k$  cores utilizadas em  $K$ , sejam suficientes para colorir os vértices de  $S$ . Pelo Lema 4.14, temos que a cor  $c(a_\ell)$  é exclusiva para  $1 \leq \ell \leq w - 1$  e a cor  $c(b_f)$  é exclusiva para  $1 \leq f \leq z - 1$ . Se as cores  $c(a_w)$  e  $c(b_z)$  não forem exclusivas em seus respectivos subgrafos aninhados, então  $c(a_w) \in [k]$  e  $c(b_z) \in [k]$ , o que implica  $c(N[v_p]) = c(N[v_q]) = [k]$ , contradizendo a lid-coloração de  $G$ . No caso em que  $|S_p| - |S_q| = 1$ , existe uma cor exclusiva utilizada em  $S_p$  que não é utilizada em  $S_q$ . Suponha que essa cor seja atribuída a  $b_z$ . Nesse caso,  $c(N[v_1]) = c(N[v_k])$ , o que contradiz a definição de uma lid-coloração. Portanto,  $\chi_{lid}(G) \geq |K| + |S_p|$ . Para provar o limite superior, construímos uma lid-coloração mínima  $c$  para o grafo  $G$  da seguinte forma:

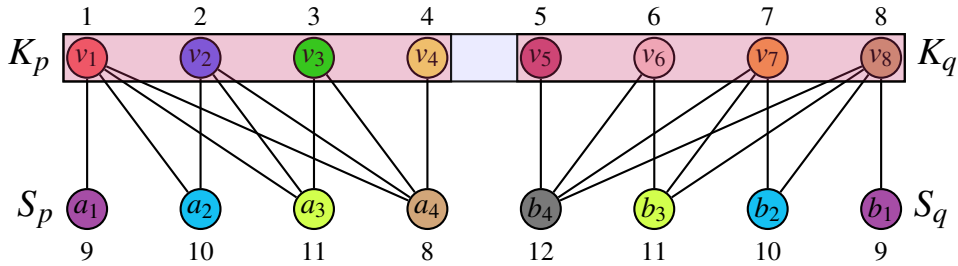
- $c(v_i) = i$ , para  $1 \leq i \leq k$ ;
- $c(b_f) = k + f$ , para  $1 \leq f \leq z$ ;
- $c(a_\ell) = k + \ell$ , para  $1 \leq \ell \leq w - 1$ ;
- $c(a_w) = k + w$ , se  $|S_p| - |S_q| = 1$ ; caso contrário,  $c(a_w) = k$ .

Mostramos agora que  $c$  é uma lid-coloração de  $G$ . Como  $S_p \neq \emptyset$  e  $S_q \neq \emptyset$ , a análise pode ser restrita aos vértices  $v_i, v_j \in K$ , quando  $N[v_i] \neq N[v_j]$ . Note também que todas as cores atribuídas aos vértices de  $S_p$  são distintas entre si, e o mesmo vale para os vértices de  $S_q$ . Além disso,  $a_w$  é o único vértice em  $S$  que pode receber uma cor de  $[k]$ . Assim, pelo Lema 4.19, temos que  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_j])$  para todos  $v_i, v_j \in K_p$ , bem como para todos  $v_i, v_j \in K_q$ .

Seja  $v_i \in K_p$  e  $v_j \in K_q$ . No caso em que  $|S_p| - |S_q| = 1$ , temos  $c(a_w) \in c(N[v_i])$ , mas  $c(a_w) \notin c(N[v_j])$ , logo  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_j])$ . No caso em que  $|S_p| - |S_q| = 0$ , temos

$c(b_z) \in c(N[v_j])$ , mas  $c(b_z) \notin c(N[v_i])$ , portanto  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_j])$ . Finalmente, no caso em que  $|S_p| - |S_q| > 1$ , se  $a_{w-1} \notin N[v_i]$ , então  $c(N[v_i]) = [k]$ , e temos  $c(b_z) \in c(N[v_j])$  e  $c(b_z) \notin c(N[v_i])$ . Caso contrário,  $c(a_{w-1}) \in N[v_i]$  e  $c(a_{w-1}) \notin N[v_j]$ , de modo que  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_j])$ . Assim, provamos que a coloração  $c$  é de fato uma lid-coloração.  $\square$

Na Figura 4.11 apresentamos um exemplo de grafo *split-comparabilidade*  $G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$  em que  $K_t = \emptyset$ ,  $S_t = \emptyset$  e  $|S_p| = |S_q|$ . Neste caso, como  $|S_p| - |S_q| = 0 \leq 1$ , segue pelo Teorema 4.22 que  $\chi_{lid}(G) = |K| + |S_p|$ . Na figura temos  $|K| = 8$  e  $|S_p| = 4$ , logo  $\chi_{lid}(G) = 8 + 4 = 12$ .



**Figura 4.11:** *Split-comparabilidade* em que  $|S_p| = |S_q|$ , com  $\chi_{lid}(G) = 8 + 4 = 12$ .

A seguir, consideramos o caso em que  $K_t \neq \emptyset$  e apresentamos um limite inferior para o número lid-cromático em grafos *split-comparabilidade* quando  $|S_p| = |S_q|$ , o qual requer ao menos uma cor adicional em comparação ao limite inferior estabelecido anteriormente.

**Lema 4.23** *Seja  $G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$  um grafo *split-comparabilidade* com  $|K| \geq 3$ ,  $S_t = \emptyset$ ,  $S_p \neq \emptyset$ ,  $S_q \neq \emptyset$ ,  $|S_p| = |S_q|$  e  $S$  é livre de gêmeos falsos. Se  $K_t \neq \emptyset$ , então  $\chi_{lid}(G) \geq |K| + |S_p| + 1$ .*

*Prova.* Como  $K_t \neq \emptyset$ , pelo Lema 4.18, tem-se que  $\chi_{lid}(G) \geq |K| + |S_p|$ . Suponha, por contradição, que  $|S_p|$  cores, além daquelas usadas em  $K$ , sejam suficientes para colorir os vértices de  $S$ . Se  $i < j$ , então  $c(N[v_j]) \subseteq c(N[v_i])$  e, portanto, se  $N[v_i] \neq N[v_j]$ , existe uma cor  $x \in c(N[v_i])$  tal que  $x \notin c(N[v_j])$ . Assim, além das cores em  $c(K)$ , são necessárias  $|S_p|$  cores para distinguir os vértices de  $K_p$ . De forma análoga, as mesmas  $|S_p|$  cores são necessárias para distinguir os vértices de  $K_q$ . No entanto,  $c(S_p) = c(S_q)$ , o que contradiz o Lema 4.21. Portanto,  $\chi_{lid}(G) \geq |K| + |S_p| + 1$ .  $\square$

Com o lema anterior, obtemos a caracterização exata do número lid-cromático dos grafos *split-comparabilidade* no caso em que  $K_t \neq \emptyset$ , apresentada a seguir no Teorema 4.24.

**Teorema 4.24** *Seja  $G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$  um grafo *split*-comparabilidade com  $|K| \geq 3$ ,  $S_t = \emptyset$  e  $S$  é livre de gêmeos falsos. Se  $K_t \neq \emptyset$ , então*

$$\chi_{lid}(G) = \begin{cases} |K| + |S_p|, & \text{se } |S_p| > |S_q|, \\ |K| + |S_p| + 1, & \text{se } |S_p| = |S_q|. \end{cases}$$

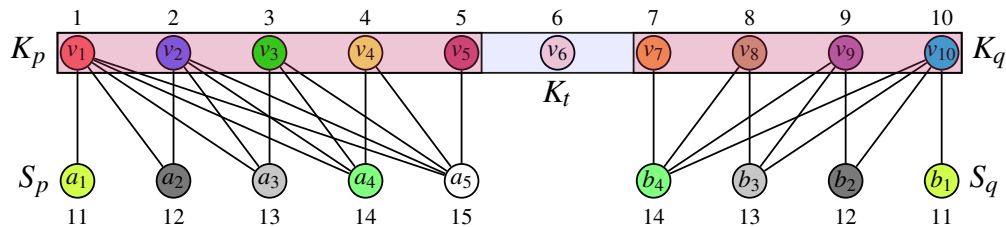
*Prova.* O subgrafo induzido por  $K_p \cup S_p \cup K_t$  é um *split* aninhado, assim como o subgrafo induzido por  $K_q \cup S_q \cup K_t$ . Pelo Lema 4.18, temos que  $\chi_{lid}(G) \geq |K| + |S_p|$ . Além disso, pelo Lema 4.23, se  $|S_p| = |S_q|$ , então  $\chi_{lid}(G) \geq |K| + |S_p| + 1$ . Para demonstrar os limites superiores, construímos uma lid-coloração mínima  $c$  de  $G$  da seguinte forma:

- $c(v_i) = i$ , para  $1 \leq i \leq k$ ;
- $c(a_\ell) = k + \ell$ , para  $1 \leq \ell \leq w$ ;
- $c(b_f) = k + f$ , para  $1 \leq f \leq z$ , se  $|S_p| > |S_q|$ ; caso contrário,  $c(b_f) = k + f + 1$ .

Mostremos agora que  $c$  é uma lid-coloração de  $G$ . Como  $S_p \neq \emptyset$  e  $S_q \neq \emptyset$ , a análise pode ser restringida aos vértices  $v_i, v_j \in K$ , quando  $N[v_i] \neq N[v_j]$ . Note também que todas as cores atribuídas aos vértices de  $S_p$  são distintas entre si, e o mesmo vale para as cores atribuídas aos vértices de  $S_q$ . Assim, pelo Lema 4.19, tem-se que  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_j])$  para todos  $v_i, v_j \in K_p$ , bem como para todos  $v_i, v_j \in K_q$ .

No caso em que  $v_i \in (K_p \cup K_q)$  e  $v_j \in K_t$ , temos  $c(N[v_j]) = [k]$ . Como  $c(S_p) \cap c(K) = \emptyset$ , segue que  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_j])$ . Seja  $v_i \in K_p$  e  $v_j \in K_q$ . Se  $|S_p| > |S_q|$ , então  $c(a_w) \in c(N[v_i])$ , mas  $c(a_w) \notin c(N[v_j])$ , logo  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_j])$ . Se  $|S_p| = |S_q|$ , então  $c(b_z) \in c(N[v_j])$ , mas  $c(b_z) \notin c(N[v_i])$ , o que novamente implica que  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_j])$ . Portanto,  $c$  é uma lid-coloração e o resultado está demonstrado.  $\square$

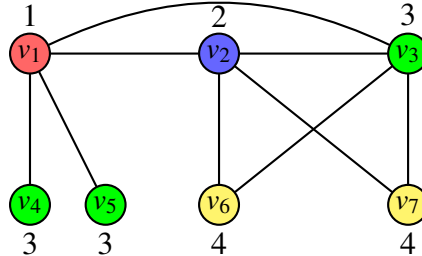
Na Figura 4.12, apresentamos um exemplo de grafo *split*-comparabilidade  $G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$  tal que  $S_t = \emptyset$ ,  $K_t \neq \emptyset$  e  $|S_p| > |S_q|$ . Pelo Teorema 4.24, segue que  $\chi_{lid}(G) = |K| + |S_p|$ . No grafo ilustrado, temos  $|K| = 10$  e  $|S_p| = 5$ . Portanto,  $\chi_{lid}(G) = 10 + 5 = 15$ .



**Figura 4.12:** *Split-comparabilidade em que  $|S_p| > |S_q|$ , com  $\chi_{lid}(G) = 10 + 5 = 15$ .*

Investigamos também o efeito da remoção de vértices gêmeos verdadeiros da clique  $K$ . Quando  $|K| \geq 4$ , a exclusão de um desses vértices reduz o número lid-cromático

do grafo exatamente em uma unidade. Por outro lado, para  $|K| \leq 3$ , esse comportamento não é garantido. Por exemplo, no grafo  $G$  ilustrado na Figura 4.13, os vértices  $v_2$  e  $v_3$  são gêmeos verdadeiros e  $\chi_{lid}(G) = 4$ . Após a remoção de  $v_2$ , o grafo resultante  $G'$  permanece com  $\chi_{lid}(G') = 4$ . O teorema a seguir estabelece formalmente esse resultado.

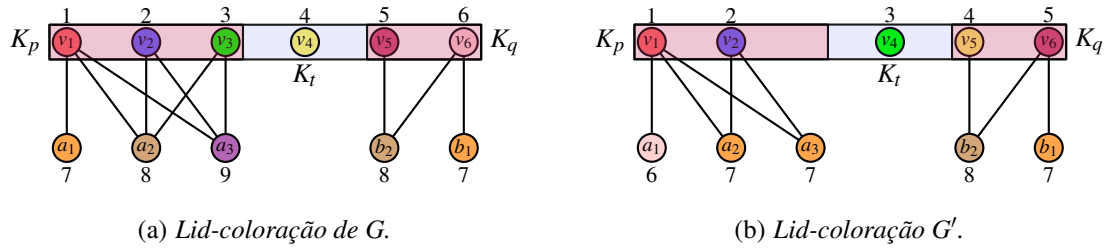


**Figura 4.13:** Grafo  $G$  para o caso em que a remoção de um vértice na clique  $K$  não reduz o seu número lid-cromático.

**Teorema 4.25** *Seja  $G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$  um grafo *split*-comparabilidade conexo, com  $|K| \geq 4$ ,  $S_t = \emptyset$ ,  $S_p \neq \emptyset$  e  $S_q \neq \emptyset$ . Se existirem  $u, w \in K$  tais que  $u$  e  $w$  sejam gêmeos verdadeiros, então  $\chi_{lid}(G - w) = \chi_{lid}(G) - 1$ .*

*Prova.* Seja  $G$  um grafo *split*-comparabilidade conexo conforme descrito. Se  $K_t = \emptyset$ , aplica-se o Teorema 4.22 para obter  $\chi_{lid}(G)$ ; caso contrário, utiliza-se o Teorema 4.24. Seja  $G' = [K'_p, K'_t, K'_q, S'_p, S'_t, S'_q]$  o grafo obtido de  $G$  pela remoção de  $w$ , onde  $K' = K'_p \cup K'_t \cup K'_q$ . Como  $w$  possui um gêmeo verdadeiro  $u$ , o grafo  $G'$  também é conexo, com  $|K'| \geq 3$ ,  $|S'_p| = |S_p|$  e  $|S'_q| = |S_q|$ . Além disso,  $K'_t = \emptyset$  se, e somente se,  $K_t = \emptyset$ . Assim, o mesmo teorema utilizado para determinar  $\chi_{lid}(G)$  pode ser aplicado para obter  $\chi_{lid}(G')$ . Como  $|K'| = |K| - 1$ , segue que  $\chi_{lid}(G') = \chi_{lid}(G) - 1$ .  $\square$

A Figura 4.14 apresenta um grafo *split*-comparabilidade  $G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$  que possui vértices gêmeos verdadeiros na clique  $K$ . Na subfigura (a) exibimos uma lid-coloração de  $G$ , na qual o vértice  $v_3$  possui um gêmeo verdadeiro em  $K$ . Na subfigura (b) mostramos o grafo obtido pela remoção do vértice  $v_3$ , juntamente com uma lid-coloração desse grafo. Observa-se que, nesse caso, o número lid-cromático diminui em uma unidade, isto é,  $\chi_{lid}(G') = \chi_{lid}(G) - 1$ , onde  $G'$  denota o grafo obtido a partir de  $G$  pela remoção de  $v_3$ , conforme estabelecido no Teorema 4.25.



**Figura 4.14:** Grafo  $G$  para o caso em que a remoção de um vértice na clique  $K$  reduz o seu número lid-cromático.

Em um grafo *split-comparabilidade* com  $S_t = \emptyset$ , sem gêmeos verdadeiros em  $K$  e sem gêmeos falsos em  $S$ , tem-se que  $|K_p| = |S_p|$ ,  $|K_q| = |S_q|$  e  $|K_t| \leq 1$ . Quando  $K_t = K_q = \emptyset$ , o número lid-cromático se aproxima do limite superior estabelecido no Teorema 4.2. O valor mínimo é alcançado, por exemplo, quando  $K_t = \emptyset$  e  $|S_p| - |S_q| = 1$ , caso em que  $\chi_{lid}(G) = |K| + \lfloor |K|/2 \rfloor$ .

## 4.5 Resumo dos resultados do capítulo

Neste capítulo, reunimos resultados sobre a lid-coloração em grafos *split* e em subclasses de *split*. Além de demonstrarmos a NP-completude do problema  $\ell$ -LID-COLORAÇÃO em grafos *split*, obtivemos valores exatos e limites para o número lid-cromático em grafos *split* completos, em grafos da forma  $K_m \odot \overline{K_n}$  e em grafos *split-comparabilidade*. Em especial, exploramos propriedades estruturais dessa última classe para determinar  $\chi_{lid}(G)$  em diferentes cenários, distinguindo os casos em que  $K_t$  é vazio ou não, bem como o efeito da remoção de vértices gêmeos falsos em  $S$  e gêmeos verdadeiros em  $K$ . A Tabela 4.1 sintetiza os principais resultados apresentados neste capítulo.

**Tabela 4.1:** Resumo dos principais resultados sobre lid-coloração em grafos *split*.

Classe / problema	Condição	$\chi_{lid}(G)$
<b>Grafos <i>split</i> gerais</b>		
$G = (K \cup S, E)$ <i>split</i> conexo	$S \neq \emptyset$	$\geq  K  + 1$
$G = (K \cup S, E)$ <i>split</i>	$\omega(G) \geq 3$ ou $G$ é uma estrela	$\leq 2\omega(G) - 1$
<b>Grafos <i>split</i> completos</b>		
$G = (K \cup S, E)$ <i>split</i> completo	$ S  \geq 2$	$=  K  + 2$
<b>Grafos <i>split-corona</i></b>		
$G = K_m \odot K_1$	$m \geq 3$	$= 2m - 1$
$G = K_m \odot \overline{K_n}$	$m \geq 5$ e $n \geq \log_2 m$	$= m + \lceil \log_2 m \rceil$
$G = K_m \odot \overline{K_2}$	$m \geq 5$	$= m + \frac{\sqrt{8m-7}-1}{2}$

Classe / problema	Condição	Resultado
$G = K_m \odot \overline{K_n}$	$n > 2$ e $n < m$	$\geq m + \lceil \log_2 m \rceil$
$G = K_m \odot \overline{K_n}$	$n > 2$ e $n < m$	$\leq 2m - 1$
<b>Grafos <i>split</i>-comparabilidade</b>		
$G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$	$ K  \geq 3$ e $S_t = \emptyset$	$\geq  K  +  S_p  - 1$
$G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$	$ K  \geq 3$ , $S_t = \emptyset$ e ( $K = K_p$ ou $K_t \neq \emptyset$ )	$\geq  K  +  S_p $
$G = [K_p, K_t, S_p]$ ( <i>split</i> aninhado)	$ K  \geq 3$ e $S_p$ livre de gêmeos falsos	$=  K  +  S_p $
$G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$ <i>split</i> -comparabilidade	$ K  \geq 3$ , $S_t = \emptyset$ , $S_p \neq \emptyset$ , $S_q \neq \emptyset$ , $S$ livre de gêmeos falsos e $K_t = \emptyset$	$= \begin{cases}  K  +  S_p , & \text{se }  S_p  -  S_q  \leq 1, \\  K  +  S_p  - 1, & \text{se }  S_p  -  S_q  > 1 \end{cases}$
$G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$ <i>split</i> -comparabilidade	$ K  \geq 3$ , $S_t = \emptyset$ , $S$ livre de gêmeos falsos e $K_t \neq \emptyset$	$= \begin{cases}  K  +  S_p , & \text{se }  S_p  >  S_q , \\  K  +  S_p  + 1, & \text{se }  S_p  =  S_q  \end{cases}$
$G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$ <i>split</i> -comparabilidade conexo	$ K  \geq 4$ , $S_t = \emptyset$ , $S_p \neq \emptyset$ , $S_q \neq \emptyset$ e existem $u, w \in K$ gêmeos verdadeiros	$\chi_{lid}(G - w) = \chi_{lid}(G) - 1$

---

## Coloração de identificação local em produto corona

---

Neste capítulo, estudamos a lid-coloração no produto corona de dois grafos  $G$  e  $H$ , de ordens  $m$  e  $n$ , respectivamente, denotado por  $G \odot H$ . Inicialmente, na Seção 5.1, apresentamos uma revisão de trabalhos da literatura relacionados ao produto corona e à lid-coloração nesse contexto. Na Seção 5.2, apresentamos dois resultados preliminares. O primeiro caracteriza quando o produto corona é livre de vértices gêmeos verdadeiros, e o segundo estabelece limites para o número lid-cromático quando um dos fatores é o grafo  $P_1$ . Além disso, na Seção 5.3, investigamos aspectos estruturais e computacionais do problema, mostrando que decidir se um grafo produto corona admite uma lid-coloração com no máximo  $\ell$  cores é um problema NP-completo. Na Seção 5.4, estabelecemos limites inferiores e superiores para o número lid-cromático desse produto. Na Seção 5.5, apresentamos resultados para o caso em que os fatores são grafos bipartidos. Na Seção 5.6, investigamos os grafos produto corona que são 4-lid-cromáticos, buscando uma caracterização dessa classe ou um reconhecimento polinomial. Em seguida, na Seção 5.7, analisamos o número lid-cromático quando os fatores são caminhos e/ou ciclos. Na Seção 5.8, determinamos o número lid-cromático do produto corona entre dois grafos completos. Em alguns casos, também obtemos limites inferiores e superiores para esse parâmetro. Finalmente, na Seção 5.9, reunimos os principais resultados obtidos neste capítulo.

### 5.1 Trabalhos relacionados ao produto corona

As operações entre grafos desempenham um papel importante tanto em estudos teóricos quanto em diversas aplicações, uma vez que grafos encontrados em várias modelagens podem ser obtidos por meio de diferentes operações. Dentre essas operações, destaca-se o produto entre grafos. Uma abordagem detalhada dos principais produtos pode ser encontrada em Hammack, Imrich e Klavžar [20]. Neste capítulo, daremos uma atenção especial ao produto corona entre dois grafos. A noção do produto corona entre dois grafos foi introduzida por Frucht e Harary [21].

A teoria dos grafos químicos é uma subárea da química matemática que utiliza várias ferramentas da teoria dos grafos para modelar fenômenos químicos de forma matemática. Além disso, as moléculas e os compostos moleculares são representados por grafos moleculares, nos quais os vértices correspondem aos átomos e as arestas representam as ligações químicas entre eles. Um índice topológico é um valor numérico que permanece inalterado sob transformações do grafo e está relacionado às propriedades físico-químicas de um grafo molecular. Esses índices são empregados para investigar as relações quantitativas entre a estrutura e a atividade, bem como entre a estrutura e a propriedade, a fim de prever diversas características de compostos químicos e suas atividades biológicas. Nilanjan [13] estudou alguns índices topológicos baseados na excentricidade, juntamente com suas respectivas versões polinomiais do produto corona entre dois grafos. Segundo este autor, os índices de algumas classes importantes de grafos moleculares de interesse químico são determinados especificando os componentes do produto corona.

Na literatura, encontramos vários estudos sobre a coloração do grafo produto corona. Com relação ao número cromático do produto corona entre dois grafos  $G$  e  $H$ , Yero, Kuziak e Aguilar [43] demonstraram que  $\chi(G \odot H) = \max\{\chi(G), \chi(H) + 1\}$ . Uma **coloração total** de um grafo é uma atribuição de cores a todos os seus elementos (vértices e arestas), garantindo que elementos adjacentes ou incidentes não recebam a mesma cor. A conjectura da coloração total afirma que, para qualquer grafo  $G$  com grau máximo  $\Delta$ ,  $\chi''(G) \leq \Delta + 2$ , onde  $\chi''(G)$  é o número cromático total de  $G$ . Mohan, Geetha e Somasundaram [27] investigaram a coloração total no produto corona de dois grafos  $G$  e  $H$ , considerando  $H$  como um ciclo, um grafo completo ou um grafo bipartido.

Uma **coloração total distintiva nos vértices adjacentes** (AVD-total) de um grafo simples  $G$  é uma coloração total própria de  $G$  tal que, para qualquer par de vértices adjacentes  $u$  e  $v$ , temos  $C(u) \neq C(v)$ , onde  $C(u)$  é o conjunto de cores atribuídas ao vértice  $u$  e às arestas incidentes em  $u$  para  $u \in V(G)$ . A conjectura da coloração AVD-total afirma que, para qualquer grafo  $G$  com grau máximo  $\Delta$ ,  $\chi_a''(G) \leq \Delta + 3$ , onde  $\chi_a''(G)$  é o número cromático AVD-total. Verma e Panda [40] demonstraram que para qualquer grafo  $G$  colorível AVD-total e qualquer grafo  $H$  colorível total com  $\Delta(H) \leq \Delta(G)$ , o produto corona  $G \odot H$  de  $G$  e  $H$  satisfaz a conjectura de coloração AVD-total. Também demonstraram que o grafo  $G \odot K_n$  admite uma coloração AVD-total usando  $(\Delta(G \odot K_n) + p)$  cores, se houver uma coloração AVD-total do grafo  $G$  usando  $(\Delta(G) + p)$  cores, onde  $p \in \{1, 2, 3\}$ . Além disso, mostraram que dado um grafo colorível total  $G$  e inteiros positivos  $r$  e  $p$  onde  $1 \leq p \leq 3$ , o produto corona generalizado  $G(r) = G \odot G \odot \dots \odot G$  ( $r + 1$  vezes) podem ser classificados de forma que  $\chi_a''(G(r)) = \Delta(G(r)) + p$ .

O número cromático de localização de um grafo combina dois conceitos, a coloração de vértices e a dimensão de partição. Baskoro e Purwasih [5] investigaram o

número cromático de localização para os produtos corona entre um grafo caminho e um grafo completo, entre um grafo completo de ordem  $m$  e o complemento de um grafo completo de ordem  $n$ , bem como entre dois grafos completos de ordens  $n$  e  $m$ . Aramugam *et al.* [3] estudaram a coloração local antimágica do produto corona, determinando o número cromático local antimágico para o produto corona de um grafo  $G$  por  $\overline{K_m}$ , quando  $G$  é um caminho, ciclo ou grafo completo.

## 5.2 Resultados preliminares

Assumimos que  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  e  $V(H) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ . Em  $G \odot H$ , denotamos os vértices da cópia de  $G$  como  $\{v_1^0, v_2^0, \dots, v_m^0\}$ . Para  $i \in [m]$ ,  $(H^{(i)})$  é a cópia de  $H$  cujos vértices são adjacentes a  $v_i$ , e os vértices de  $H^{(i)}$  são denotados por  $\{u_1^i, u_2^i, \dots, u_n^i\}$ .

A presença de vértices gêmeos verdadeiros pode afetar significativamente a lid-coloração do grafo. No contexto do produto corona de dois grafos  $G$  e  $H$ , surge a questão interessante de saber sob quais condições o grafo resultante será livre de vértices gêmeos verdadeiros. O Teorema 5.1 fornece uma resposta para essa questão.

**Teorema 5.1** *Sejam  $G$  e  $H$  dois grafos com  $m$  e  $n$  vértices, respectivamente, onde  $m, n \geq 2$  e  $G$  conexo. O grafo  $G \odot H$  é livre de vértices gêmeos verdadeiros se e somente se  $H$  é livre de gêmeos verdadeiros.*

*Prova.* Suponhamos que o grafo  $G \odot H$  seja livre de vértices gêmeos verdadeiros. Isso significa que para quaisquer dois vértices  $v$  e  $u$  em  $G \odot H$ , temos  $N[v] \neq N[u]$ . Observa-se que cada vértice  $v_i$  de  $G$  no grafo  $G \odot H$  é adjacente a todos os vértices de  $H^{(i)}$ . Assim, se dois vértices são gêmeos verdadeiros em  $H$ , eles também são gêmeos verdadeiros em  $G \odot H$ . Portanto, podemos concluir que  $H$  é livre de vértices gêmeos verdadeiros.

Suponhamos agora que o grafo  $H$  seja livre de vértices gêmeos verdadeiros. Isso significa que para quaisquer dois vértices  $v$  e  $u$  em  $H$ , temos  $N[v] \neq N[u]$ . Observe que os vértices de cada  $H^{(i)}$  são adjacentes ao vértice  $v_i$  no produto  $G \odot H$ . Assim, como  $H$  é livre de vértices gêmeos verdadeiros, o grafo  $G[H^{(i)}]$  também é livre de vértices gêmeos verdadeiros em  $G \odot H$ . Considere dois vértices distintos quaisquer  $v_i$  e  $v_z$  de  $G$  no produto  $G \odot H$ . Tomemos  $H^{(i)}$  e  $H^{(z)}$  no produto  $G \odot H$ . O grafo induzido pelos vértices  $V(H^{(i)}) \cup V(H^{(z)})$  é desconexo, ou seja, para quaisquer dois vértices arbitrários  $u_j^i \in H^{(i)}$  e  $u_j^z \in H^{(z)}$ , estes não são vizinhos no grafo  $G \odot H$ . Portanto,  $N[v_i] \neq N[v_z]$ , o que implica que  $v_i$  e  $v_z$  no grafo  $G \odot H$  não são vértices gêmeos verdadeiros. Além disso, como  $m \geq 2$  o vértice  $v_i$  possui pelo menos um vizinho em  $G$  no grafo  $G \odot H$ , isso implica que os vértices  $v_i$  em  $G$  não podem ser gêmeos verdadeiros dos vértices  $u_j^{(i)}$  em  $H^{(i)}$  no produto  $G \odot H$ . Logo, no produto  $G \odot H$ , não pode haver dois vértices gêmeos

verdadeiros. Portanto,  $G \odot H$  é livre de vértices gêmeos verdadeiros.  $\square$

O próximo resultado estabelece limites inferior e superior para o número lid-cromático do produto corona  $P_1 \odot H$ , relacionando-o diretamente com o número lid-cromático de  $H$ .

**Teorema 5.2** *Seja  $H$  um grafo conexo. Então,  $\chi_{lid}(H) + 1 \leq \chi_{lid}(P_1 \odot H) \leq \chi_{lid}(H) + 2$ .*

*Prova.* Denotemos por  $u \in P_1$  o vértice universal. Para o limite inferior, considere uma lid-coloração mínima  $c$  de  $H$ . Observe que, em uma coloração própria de  $P_1 \odot H$ , como  $u$  é adjacente a todos os vértices de  $H$ , a cor atribuída a  $u$  deve ser distinta de todas as cores utilizadas em  $H$ . Assim,  $\chi_{lid}(P_1 \odot H) \geq \chi_{lid}(H) + 1$ . Para o limite superior, seja  $c$  uma lid-coloração mínima de  $H$ , com  $\chi_{lid}(H) = k$  e cores em  $[k]$ . Definimos uma nova coloração  $c'$  de  $P_1 \odot H$  onde  $c'(v) = c(v)$  para todo  $v \in V(H)$  e  $c'(u) = \alpha$ , onde  $\alpha \notin [k]$ . Assim,  $c'$  é própria. Para todo  $v \in V(H)$ , vale  $N_{P_1 \odot H}[v] = N_H[v] \cup \{u\}$  e  $N_{P_1 \odot H}[u] = V(H) \cup \{u\}$ , e portanto  $c'(N_{P_1 \odot H}[v]) = c(N_H[v]) \cup \{\alpha\}$  e  $c'(N_{P_1 \odot H}[u]) = c(V(H)) \cup \{\alpha\}$ . Como  $c$  é uma lid-coloração de  $H$ , se  $v, w \in V(H)$  são adjacentes e  $N_H[v] \neq N_H[w]$ , então  $c(N_H[v]) \neq c(N_H[w])$ , o que implica  $c'(N_{P_1 \odot H}[v]) \neq c'(N_{P_1 \odot H}[w])$ , logo, todas as distinções exigidas entre os vértices de  $H$  permanecem válidas em  $P_1 \odot H$ . Por outro lado, se existe  $w \in V(H)$  tal que  $N_{P_1 \odot H}[u] \neq N_{P_1 \odot H}[w]$  e  $c'(N_{P_1 \odot H}[u]) = c'(N_{P_1 \odot H}[w])$ . Como  $N_{P_1 \odot H}[u] \neq N_{P_1 \odot H}[w]$ , segue que  $N_H[w] \neq V(H)$ , isto é,  $V(H) \setminus N_H[w] \neq \emptyset$ ; escolha  $x \in V(H) \setminus N_H[w]$  e modifique  $c'$  recolorindo apenas  $x$  com uma nova cor  $\beta \notin [k] \cup \{\alpha\}$ . Assim,  $\beta \in c'(N_{P_1 \odot H}[u])$  e  $\beta \notin c'(N_{P_1 \odot H}[w])$ , logo  $c'(N_{P_1 \odot H}[u]) \neq c'(N_{P_1 \odot H}[w])$ . Como  $\beta \notin [k] \cup \{\alpha\}$ , dados  $v, w \in V(H)$  adjacentes com  $N_H[v] \neq N_H[w]$ , continua válido que  $c(N_H[v]) \neq c(N_H[w])$ , e portanto obtemos uma lid-coloração de  $P_1 \odot H$  com  $k + 2$  cores; consequentemente,  $\chi_{lid}(P_1 \odot H) \leq k + 2 = \chi_{lid}(H) + 2$ .  $\square$

### 5.3 Complexidade da lid-coloração em grafos produto corona

Nesta seção investigamos a complexidade computacional do problema da lid-coloração em grafos produto corona. Mais precisamente, consideramos o seguinte problema de decisão: dado um grafo produto corona  $G \odot H$  e um inteiro  $\ell$ , é possível decidir em tempo polinomial se  $\chi_{lid}(G \odot H) \leq \ell$ ?

Martins e Sampaio [26] mostraram que, dado um grafo  $G'$  com  $n$  vértices, o número lid-cromático  $\chi_{lid}(G')$  é  $O(n^{1-\varepsilon})$ -inaproximável em tempo polinomial para qualquer  $\varepsilon > 0$ , a menos que  $P = NP$ . Em sua demonstração, os autores consideram um

grafo da forma  $G' = G \odot K_1$ , onde  $G$  é uma instância do problema clássico de coloração de grafos. Um ponto fundamental dessa construção é que  $\chi(G) \leq \chi_{lid}(G') \leq 2\chi(G)$ , ou seja, obtêm-se limites inferior e superior para  $\chi_{lid}(G')$ , sem determinar explicitamente o seu valor exato ao longo da prova. Motivados por esse resultado, apresentamos a seguir uma construção que estabelece a NP-completude do problema  $\ell$ -LID-COLORAÇÃO quando  $\ell$  é um inteiro fixo com  $\ell \geq 5$ , mesmo quando restrito à classe dos grafos produto corona.

**Teorema 5.3** [29] *Para todo  $\ell \geq 5$  fixo, o problema  $\ell$ -LID-COLORAÇÃO é NP-completo em grafos produto corona.*

*Prova.* É fácil ver que o problema pertence à classe NP. Para provar a NP-dificuldade, fazemos uma redução a partir de  $\ell$ -COLORAÇÃO, que é NP-completo [23]. A demonstração apresenta três construções, de acordo com alguns valores de  $\ell$ : (1)  $\ell = 2k - 1$ , para  $k \geq 3$ ; (2)  $\ell = 2k$ , para  $k \geq 4$ ; e (3)  $\ell = 6$ . Ao longo da prova, trataremos cada um desses casos conforme necessário. Quando o contexto for ambíguo, poderemos adicionar um subscrito (1), (2) ou (3) para especificar o caso considerado para  $\ell$ .

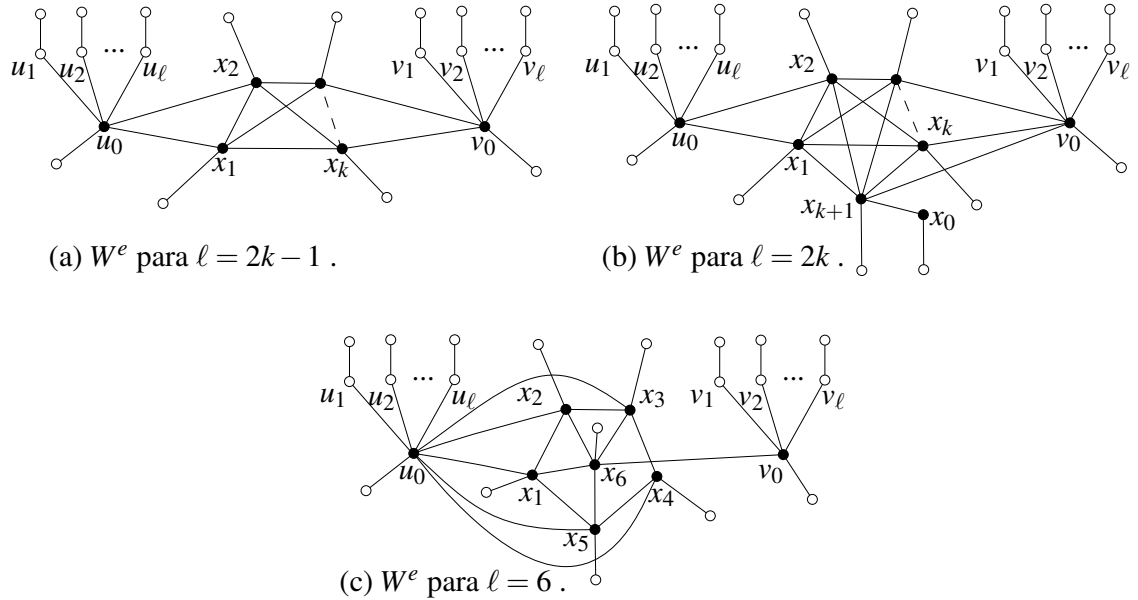
A partir de agora, fixamos um inteiro  $\ell \geq 5$ . Dada uma instância  $G$  do problema  $\ell$ -COLORAÇÃO, construímos um grafo  $H$  e, em seguida, consideramos o grafo produto corona  $G' = H \odot K_1$ . Pela própria definição da construção,  $G'$  pertence à classe dos grafos produto corona. Além disso,  $G'$  pode ser obtido em tempo polinomial no tamanho de  $G$ . De fato, para cada vértice  $v \in V(G)$ , a construção introduz um conjunto  $Y^v = \{v_0, v_1, \dots, v_\ell\}$ , com  $\ell + 1$  vértices. Como  $\ell$  é fixo, cada conjunto  $Y^v$  possui tamanho constante. Para cada aresta  $e = uv \in E(G)$ , adicionamos uma cópia do gadget  $W^e$ , cujo tamanho depende apenas de  $\ell$  e, portanto, também é constante. Assim, se  $|V(G)| = n$  e  $|E(G)| = m$ , então o número de vértices e arestas de  $H$  é limitado por uma função linear em  $n + m$ , com constantes dependendo apenas de  $\ell$ .

Por fim, ao construir  $G' = H \odot K_1$ , adicionamos exatamente um vértice pendente para cada vértice de  $H$ . Portanto, o número de vértices e arestas de  $G'$  continua sendo polinomial no tamanho de  $G$ . Consequentemente,  $G'$  pode ser construído em tempo polinomial. Inicialmente, descrevemos um *gadget* de aresta  $W^e$  que estará associado a cada  $e = uv \in E(G)$ .

**Caso 1.1.**  $\ell = 2k - 1$ . Para  $k \geq 3$ , o subgrafo  $W_{(1)}^e$  surge da união disjunta entre dois vértices  $u_0, v_0$  e uma clique  $X^e = \{x_1^e, x_2^e, \dots, x_k^e\}$ . Adiciona-se a  $W_{(1)}^e$  o conjunto de arestas  $\{u_0x_1^e, u_0x_2^e\} \cup \{v_0x_i^e : 3 \leq i \leq k\}$ . Veja um exemplo de  $W_{(1)}^e$  induzido pelos vértices em preto na Figura 5.1(a).

**Caso 1.2.**  $\ell = 2k$ . Para  $k \geq 4$ , o subgrafo  $W_{(2)}^e$  surge de  $W_{(1)}^e$  pela adição de um novo vértice  $x_{k+1}^e$  adjacente a todos os vértices em  $\{x_1^e, x_2^e, \dots, x_k^e, v_0\}$ . Além disso, adiciona-se um vértice pendente  $x_0^e$  ligado a  $x_{k+1}^e$ . Inclui-se  $x_{k+1}^e$  e  $x_0^e$  em  $X^e$ . Observe que  $X^e$  induz uma clique de ordem  $k + 1$  com um vértice pendente em exatamente um vértice. Um exemplo de  $W_{(2)}^e$  pode ser visto induzido pelos vértices em preto na Figura 5.1(b).

**Caso 1.3.**  $\ell = 6$ . O subgrafo  $W_{(3)}^e$  possui conjunto de vértices  $X^e \cup \{u_0, v_0\}$ , onde  $X^e = \{x_1^e, x_2^e, \dots, x_6^e\}$ . Adicionam-se a  $W_{(3)}^e$  as arestas necessárias para que  $X^e$  induza uma roda  $W_5$  com vértice central  $x_6^e$  e ciclo  $C_5 : x_1x_2x_3x_4x_5x_1$ . Incluem-se também em  $W_{(3)}^e$  as arestas  $\{u_0x_i^e : 1 \leq i \leq 5\} \cup \{v_0x_6^e\}$ . Um exemplo de  $W_{(3)}^e$  é ilustrado na Figura 5.1(c), induzido pelos vértices em preto.



**Figura 5.1:** Grafo  $G'$  construído para o Teorema 5.3. A figura apresenta um exemplo da construção correspondente a uma aresta  $uv \in E(G)$ .

Agora prosseguimos com a construção de  $H$ . Exceto pelos *gadgets* de aresta, o restante da construção é o mesmo para qualquer  $\ell \geq 5$ . Para cada  $v \in V(G)$ , adicione a  $H$  um conjunto de vértices  $Y^v = \{v_0, v_1, \dots, v_\ell\}$  e as arestas  $v_0v_i$ , para todo  $i \in [\ell]$ . Para cada  $e = uv \in E(G)$ , adicione a  $H$  um subgrafo  $W^{uv}$  identificando  $u$  com  $u_0$  e  $v$  com  $v_0$ . Para cada  $v \in V(H)$ , conectamos a  $v$  um vértice pendente  $v'$ . Isso completa a descrição de  $G' = H \odot K_1$ . A Figura 5.1 ilustra as construções de  $H$  quando  $G = P_2$ ; a Figura 5.1(a) mostra o caso  $\ell = 2k - 1$ , a Figura 5.1(b) mostra  $\ell = 2k$ , e a Figura 5.1(c) mostra  $\ell = 6$ . Os vértices em preto representam os *gadgets* de aresta, e os vértices em branco representam os vértices pendentes resultantes de  $H \odot K_1$ . Provaremos que  $G$  é  $\ell$ -colorível se, e somente se,  $G'$  é  $\ell$ -lid-colorível.

Para a suficiência, suponha que  $G$  seja  $\ell$ -colorível. Seja  $c_G : V(G) \rightarrow [\ell]$  uma  $\ell$ -coloração de  $G$ . Definimos  $c : V(G') \rightarrow [\ell]$  uma  $\ell$ -lid-coloração de  $G'$  da seguinte forma. Para cada vértice  $v \in V(G)$ , definimos  $c(v_0) = c_G(v)$  e atribuímos qualquer cor em  $[\ell] \setminus \{c_G(v)\}$  a  $c(v'_0)$ . Considere  $i \in [\ell]$ . Se  $i \neq c_G(v)$ , definimos  $c(v_i) = i$ ; caso contrário, escolhemos qualquer cor em  $[\ell] \setminus \{i\}$  para  $c(v_i)$ . Além disso, se  $i + 1 \neq c_G(v)$  (adição módulo  $\ell$ ), atribuímos  $c(v'_i) = i + 1$ ; caso contrário, escolhemos  $c(v'_i)$  em  $[\ell] \setminus \{i, i + 1\}$ .

Neste ponto, observe que  $c$  atribui cores diferentes a vértices adjacentes em  $Y^v$ , para todo  $v \in V(G)$ . Para cada  $i \in [\ell]$ , tem-se que  $|c(N_{G'}[v_i'])| = 2$ ,  $|c(N_{G'}[v_i])| = 3$  e  $|c(N_{G'}[v_0])| = \ell$ . Isso implica imediatamente que todo par de vértices adjacentes em  $Y^v$  possui códigos distintos. Prossequimos com a definição da coloração  $c$  no *gadget* de aresta, de acordo com os casos estabelecidos para  $\ell$ .

**Caso 2.1.**  $\ell = 2k - 1$ . Lembre que  $k \geq 3$ . Para cada  $e = uv \in E(G)$ , seja  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{k-2}, c_G(u), c_G(v)\}$  um subconjunto de  $[2k - 1]$  com  $k$  elementos. Definimos  $c(x_1^e) = a_1$ ,  $c(x_2^e) = c_G(v)$ ,  $c(x_3^e) = c_G(u)$  e, se  $k \geq 4$ ,  $c(x_i^e) = a_{i-2}$  para todo  $i \in \{4, \dots, k\}$ . Em seguida, seja  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{k-1}\} = [2k - 1] \setminus A$ . Atribuímos  $c(x_1^{e'}) = c_G(u)$  e  $c(x_i^{e'}) = b_{i-1}$  para todo  $i \in \{2, \dots, k\}$ . Observe que  $c$  atribui cores diferentes a vértices adjacentes em  $V(W_{(1)}^e)$ . Antes de prosseguir, mostramos que  $c$  identifica corretamente os vértices adjacentes do subgrafo  $W_{(1)}^e \setminus \{u_0, v_0\}$ . Dado que  $c_G(u) \neq c_G(v)$  e, pela definição de  $A$ , temos que  $A \subseteq c(N_{G'}[x_i^e])$ , para todo  $i \in [k]$ . Além disso, dado que  $c(x_1^{e'}) = c(u_0) = c_G(u) \in A$ , obtemos  $c(N_{G'}[x_1^{e'}]) = A$  e, pela definição de  $B$ , temos  $c(N_{G'}[x_i^{e'}]) = A \cup \{b_{i-1}\}$  para todo  $i \in \{2, \dots, k\}$ . Conseqüentemente,  $c(N_{G'}[x_i^e]) \neq c(N_{G'}[x_j^{e'}])$ , para todos  $i, j \in [k]$ . Para as arestas  $x_i^e x_i^{e'}$ ,  $i \in [k]$ , a conclusão  $c(N_{G'}[x_i^e]) \neq c(N_{G'}[x_i^{e'}])$  é trivial, pois  $|c(N_{G'}[x_i^e])| = 2$  e  $|A| = k \geq 3$ .

Seja  $e = uv \in E(G)$ . Pela construção,  $u_0 x_i^e, v_0 x_j^{e'} \in E(G')$ , para todo  $i \in [2]$  e  $j \in \{3, \dots, k\}$ . Basta mostrar que cada par de vértices  $u_0, x$  e  $v_0, x$ , para  $x \in X^e$ , possui códigos distintos. Como  $k \geq 3$ , tal conclusão é imediata, pois já sabemos que  $|c(N_{G'}[u_0])| = |c(N_{G'}[v_0])| = 2k - 1 = \ell$  e que  $|c(N_{G'}[x])|$  é  $k$  (se  $x = x_1^e$ ) ou  $k + 1$  (se  $x = x_i^e, i \in \{2, \dots, k\}$ ).

**Caso 2.2.**  $\ell = 2k$ . Lembre que  $k \geq 4$ . Prossequimos de modo semelhante ao Caso 2.1. Para cada  $e = uv \in E(G)$ , seja  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, c_G(u), c_G(v)\}$  um subconjunto de  $[2k]$  com  $(k + 1)$  elementos. Definimos  $c(x_1^e) = a_1$ ,  $c(x_2^e) = c_G(v)$ ,  $c(x_3^e) = c_G(u)$  e, (se  $k \geq 4$ )  $c(x_i^e) = a_{i-2}$ , para todo  $i \in \{4, \dots, k + 1\}$ . Em seguida, seja  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{k-1}\} = [2k] \setminus A$ . Atribuímos  $c(x_0^e) = b_{k-1}$ ,  $c(x_0^{e'}) = c(x_1^{e'}) = c_G(u)$  e  $c(x_i^{e'}) = b_{i-1}$ , para todo  $i \in \{2, \dots, k + 1\}$ .

É claro que  $c$  atribui cores diferentes a vértices adjacentes em  $V(W_{(2)}^e)$ . Isso pode ser visto observando que, se dois ou mais vértices recebem a mesma cor, então eles pertencem a um dos dois conjuntos independentes não triviais  $I_1 = \{x_3^e, x_0^{e'}, x_1^{e'}\}$  e  $I_2 = \{x_0^e, x_k^{e'}\}$ , pois  $c(I_1) = \{c_G(u)\}$  e  $c(I_2) = b_{k-1}$ . Mostramos que a função  $c$  restrita a  $W_2^e \setminus \{u_0, v_0\}$  é de fato uma lid-coloração.

Lembre que  $c_G$  é uma  $\ell$ -coloração e, portanto,  $c_G(u) \neq c_G(v)$ . Dadas as definições de  $c$ ,  $A$  e  $W_2^e$ , sabemos que  $c(N_{G'}[x_0^e]) = \{a_{k-1}, b_{k-1}, c_G(u)\}$ ,  $c(N_{G'}[x_1^e]) = A$ ,  $c(N_{G'}[x_i^e]) = A \cup \{b_{i-1}\}$ , para todo  $i \in \{2, \dots, k\}$ , e  $c(N_{G'}[x_{k+1}^e]) = A \cup \{b_{k-1}, b_k\}$ . Reunindo essas descrições de conjuntos e a cardinalidade  $|c(N_{G'}[x_i^{e'}])| = 2$ , para todo  $i \in [k + 1] \cup \{0\}$ , concluímos que, para quaisquer vértices adjacentes  $w, z \in V(W_2^e \setminus \{u_0, v_0\})$ ,

vale  $c(N_{G'}[w]) \neq c(N_{G'}[z])$ .

Finalmente, para a aresta  $e = uv \in E(G)$ , pela construção,  $u_0x_i^e, v_0x_j^e \in E(G')$ , para  $i \in [2]$  e  $j \in \{3, \dots, k+1\}$ . Dado que  $k \geq 4$ , como temos  $|c(N_{G'}[u_0])| = |c(N_{G'}[v_0])| = 2k$  e, para todo  $x \in X^e$ ,  $|c(N_{G'}[x])| \leq k+3$  (S4), os pares  $u_0, x$  e  $v_0, x$  possuem códigos distintos.

**Caso 2.3.**  $\ell = 6$ . Para cada  $e = uv \in E(G)$ , seja  $A = \{a_1, a_2, c_G(u), c_G(v)\} \subseteq [6]$ . Definimos  $c(x_1^e) = c(x_3^e) = c_G(v)$ ,  $c(x_2^e) = c(x_4^e) = a_1$ ,  $c(x_5^e) = a_2$  e  $c(x_6^e) = c_G(u)$ . Em seguida, seja  $B = \{b_1, b_2\} = [6] \setminus A$ . Atribuímos  $c(x_1^{e'}) = c(x_2^{e'}) = c(x_4^{e'}) = b_1$ ,  $c(x_3^{e'}) = c(x_5^{e'}) = c_G(u)$  e  $c(x_6^{e'}) = b_2$ . É fácil ver que  $c$  atribui cores diferentes a vértices adjacentes em  $V(W_{(3)}^e)$ . Para mostrar que  $c$  é uma 6-lid-coloração restrita a  $W_{(3)}^e \setminus \{u_0, v_0\}$ , observamos que  $c(N_{G'}[x_1^e]) = c(N_{G'}[x_4^e]) = A \cup \{b_1\}$ ,  $x_1^e x_4^e \notin E(G')$ ,  $c(N_{G'}[x_2^e]) = \{a_1, b_1, c_G(u), c_G(v)\}$ ,  $c(N_{G'}[x_3^e]) = \{a_1, c_G(u), c_G(v)\}$ ,  $c(N_{G'}[x_5^e]) = A$  e  $c(N_{G'}[x_6^e]) = A \cup \{b_2\}$ . Isso implica que vértices adjacentes de  $X^e$  têm códigos distintos. Além disso, para as arestas  $x_i^e x_i^{e'}$ ,  $i \in [6]$ , a conclusão  $c(N_{G'}[x_i^e]) \neq c(N_{G'}[x_i^{e'}])$  é direta, pois  $|c(N_{G'}[x_i^e])| = 2$  e  $|c(N_{G'}[x_i^{e'}])| \geq 3$ . Seja  $e = uv \in E(G)$ . A construção fornece  $u_0x_i^e, v_0x_6^e \in E(G')$  para todo  $i \in [5]$ . Como  $|c(N_{G'}[u_0])| = |c(N_{G'}[v_0])| = 6$  e  $|c(N_{G'}[x])| \leq 5$ , para todo  $x \in X^e$ , temos que  $u_0$  e  $x$  têm códigos diferentes, assim como  $v_0$  e  $x$ . Isso conclui a prova da suficiência.

Para a necessidade, suponha que  $G'$  seja  $\ell$ -lid-colorível. Seja  $c : V(G') \rightarrow [\ell]$  uma  $\ell$ -lid-coloração de  $G'$ . Afirmamos que  $c(u_0) \neq c(v_0)$ , para todo  $uv \in E(G)$ .

**Caso 3.1.**  $\ell = 2k - 1$ . Por contradição, seja  $e = uv \in E(G)$  tal que  $c(u_0) = c(v_0) = i$ . Pela construção,  $X^e$  é uma clique; então, como  $c$  é uma (lid-)coloração, devemos ter  $|c(X^e)| = k$  e  $i \notin c(X^e)$ . Seja  $j \in [k]$ . Isso implica que  $c(X^e) \cup \{i\} \subseteq c(N_{G'}[x_j^e])$ . Lembre que  $|c(X^e) \cup \{i\}| = k + 1$ . Assim, para colorir adequadamente os vértices em  $X^{e'} = \{x_1^{e'}, x_2^{e'}, \dots, x_k^{e'}\}$ , estão disponíveis  $|\ell \setminus (c(X^e) \cup \{i\})| = 2k - 1 - (k + 1) = k - 2$  cores. Pelo fator  $K_1$  da construção, temos que  $c(N_{G'}[x_j^e]) = c(X^e) \cup \{i\}$  ou  $c(N_{G'}[x_j^e]) = c(X^e) \cup \{i, p\}$ , para algum  $p \in [\ell] \setminus (c(X^e) \cup \{i\})$ . Então, temos no máximo  $k - 2 + 1 = k - 1$  subconjuntos distintos para identificar os  $k$  vértices em  $X$ , uma contradição. Dada a contradição anterior, concluímos que  $c(u_0) \neq c(v_0)$ , para todo  $uv \in E(G)$ . Definindo  $c_G(v) = c(v_0)$ , para todo  $v \in V(G)$ , obtemos uma  $(2k - 1)$ -coloração  $c_G$  para  $G$ .

**Caso 3.2.**  $\ell = 2k$ . Novamente, por contradição, seja  $e = uv \in E(G)$  tal que  $c(u) = c(v) = i$ . Pela construção,  $X^e \setminus \{x_0\}$  é uma clique, então devemos ter  $|c(X^e \setminus \{x_0\})| = k + 1$  e  $i \notin c(X^e)$ . Seja  $j \in [k + 1]$ . Isso implica que  $c(X^e \setminus \{x_0\}) \cup \{i\} \subseteq c(N_{G'}[x_j^e])$ . Lembre que  $|c(X^e \setminus \{x_0\}) \cup \{i\}| = k + 2$ . Assim, para colorir adequadamente os vértices em  $X^e \setminus \{x_0\}$ , estão disponíveis  $|\ell \setminus (c(X^e) \cup \{i\})| = 2k - (k + 2) = k - 2$  cores. Pela construção de  $X^e \setminus \{x_0\}$ , temos que, para alguns  $p, q \in [\ell] \setminus (c(X^e \setminus \{x_0\}) \cup \{i\})$  distintos, a cor da

vizinhança de  $x_j^e$  é uma dentre

$$c(N_{G'}[x_j^e]) = c(X^e \setminus \{x_0\}) \cup \{i\}, \quad (5-1)$$

$$c(N_{G'}[x_j^e]) = c(X^e \setminus \{x_0\}) \cup \{i, p\}, \quad (5-2)$$

$$c(N_{G'}[x_j^e]) = c(X^e \setminus \{x_0\}) \cup \{i, p, q\}, \text{ se } j = k + 1. \quad (5-3)$$

Então, exceto por  $x_{k+1}^e$ , os outros  $k$  vértices em  $X^e \setminus \{x_0\}$  devem ser identificados com os conjuntos  $c(X^e \setminus \{x_0\}) \cup \{i\}$  ou  $c(X^e \setminus \{x_0\}) \cup \{i, p\}$ . Mais precisamente, apenas um deve ser identificado com o conjunto  $c(X^e \setminus \{x_0\}) \cup \{i\}$ . Assim, temos  $k - 1$  vértices a serem identificados com  $c(X^e \setminus \{x_0\}) \cup \{i, p\}$ . Lembre que  $p \in [\ell] \setminus (c(X^e \setminus \{x_0\}) \cup \{i\})$ . Temos a cardinalidade  $|\ell \setminus (c(X^e \setminus \{x_0\}) \cup \{i\})| = 2k - ((k + 1) + 1) = k - 2$ . Portanto, há no máximo  $k - 2$  escolhas de  $p$ , levando a no máximo  $k - 2$  subconjuntos distintos do tipo  $c(X^e \setminus \{x_0\}) \cup \{i, p\}$  para identificar  $k - 1$  vértices em  $X^e \setminus \{x_0\}$ , uma contradição.

Dada a contradição anterior, concluímos que  $c(u_0) \neq c(v_0)$ , para todo  $uv \in E(G)$ . Definindo  $c_G(v) = c(v_0)$ , para todo  $v \in V(G)$ , obtemos uma  $2k$ -coloração para  $G$ .

**Caso 3.3.**  $\ell = 6$ . Para a contradição final, seja  $e = uv \in E(G)$  tal que  $c(u_0) = c(v_0) = i$ . Pela construção,  $X^e$  induz uma roda  $W_5$ . Sabemos que  $\chi(W_5) = 4$  e, como  $c(u_0) = i$ , o número de cores disponíveis para  $X^e$  é 5. Assim,  $4 \leq |c(X^e)| \leq 5$ . Fixemos  $c(x_6^e) = j$ ,  $c(x_1^e) = a_1$ ,  $c(x_2^e) = a_2$  e  $c(x_3^e) = a_3$ . Se  $|c(X^e)| = 4$ , digamos  $c(X^e \setminus \{x_6^e\}) = \{a_1, a_2, a_3\}$ , então  $c(x_4^e) \in \{a_1, a_2\}$  e  $c(x_5^e) \in \{a_2, a_3\}$ . Em qualquer dos casos, existem três vértices  $r, s, t \in \{x_1^e, x_2^e, x_3^e, x_6^e\}$  tais que  $c(N_{G'}[r]) = c(N_{G'}[s]) = c(N_{G'}[t]) = \{a_1, a_2, a_3, i, j\} = A$ . Seja  $B = \{b_1\} = [6] \setminus A$ . Observe que estão disponíveis dois códigos,  $A$  e  $A \cup \{b_1\}$ , para identificar três vértices  $r, s, t$ , o que é uma contradição. Agora, se  $|c(X^e)| = 5$ , seja  $c(X^e \setminus \{x_6^e\}) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ . Podemos supor que  $c(x_4^e) = a_4$  e  $c(x_5^e) = a_2$ . Temos  $c(N_{G'}[x_3^e]) = c(N_{G'}[x_4^e]) = \{a_2, a_3, a_4, i, j\}$  e  $c(N_{G'}[x_6^e]) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, i, j\}$ . Então não há cor disponível em  $[6]$  a ser atribuída a  $\{x_3^e, x_4^e\}$  para identificar  $x_3^e$  e  $x_4^e$ , o que é uma contradição.

Dadas as contradições anteriores, inferimos que  $c(u_0) \neq c(v_0)$ , para todo  $uv \in E(G)$ . Definindo  $c_G(v) = c(v_0)$ , para todo  $v \in V(G)$ , obtemos uma  $\ell$ -coloração  $c_G$  para  $G$ , o que conclui a prova.  $\square$

Motivados por esses resultados preliminares e de complexidade, nas seções seguintes determinamos o número lid-cromático para certas subclasses de grafos produto corona. Vamos definir uma função parcial de coloração da seguinte maneira. Seja  $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \dots, R_t\}$  tal que, para todo  $i \in [t]$ ,  $R_i$  é um conjunto de vértices, e seja  $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_s\}$ , tal que, para todo  $j \in [s]$ ,  $X_j$  é um conjunto de cores (possivelmente vazio) definidas sobre  $X = \{1, \dots, x\}$ . Além disso,  $|R_i| \geq |X_j|$  para todo par  $i, j$ . A função  $q : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{X}$  associa cada elemento de  $\mathcal{R}$  a um elemento de  $\mathcal{X}$  de forma que, se  $q(R_i) = X_j$ ,

então para toda cor  $y \in X_j$  existe um vértice  $v \in R_i$  com  $c(v) = y$ , e nenhum vértice de  $R_i$  pode ser colorido com alguma cor em  $X \setminus \{X_j\}$ . Note que a função é injetora. Vale destacar que ela não define como os vértices de  $R_i$  serão coloridos. No entanto, cada cor em  $X_j$  deve ser atribuída a algum vértice de  $R_i$ , o que é possível, pois  $|R_i| \geq |X_j|$ . Se  $|X_j| = 0$ , então nenhum vértice de  $R_i$  pode ser colorido com alguma cor de  $X$ . A aplicação da função  $q$  a um conjunto  $\mathcal{R}$  garante que  $c(R_i) \neq c(R_z)$ , para todo par  $i, z$  com  $i \neq z$ .

## 5.4 Limites para $\chi_{lid}(G \odot H)$

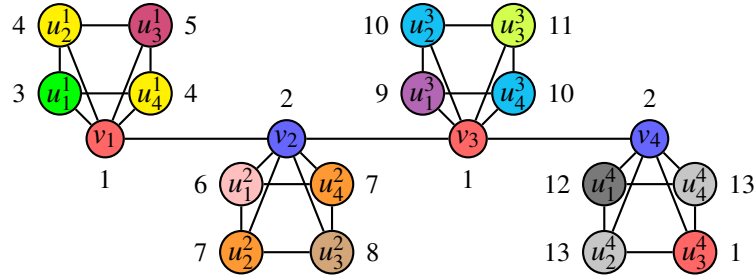
Nesta seção, estabelecemos alguns limites inferiores e superiores que serão utilizados nas seções seguintes. Em particular, no Teorema 5.6, obtemos um limite inferior para  $\chi_{lid}(G \odot H)$  em função de  $\chi_{lid}(H)$ , quando  $G$  é um grafo conexo.

Apresentaremos nos próximos resultados limites superiores para o número lid-cromático do produto corona considerando dois grafos arbitrários, ou seja, o produto corona de  $G \odot H$ . No Teorema 5.4, apresentamos o limite superior para o número lid-cromático do produto corona de  $G$  por  $H$  e mostramos que o limite é justo.

**Teorema 5.4** *Sejam  $G$  e  $H$  dois grafos conexos de ordens  $m$  e  $n$ , respectivamente, com  $m \geq 3$ . Então,  $\chi_{lid}(G \odot H) \leq \chi(G) + m \cdot (\chi_{lid}(H)) - 1$ .*

*Prova.* Sejam  $\chi(G) = k = k_0$  e  $\chi_{lid}(H) = k'$ . Vamos construir uma coloração  $c$  para o grafo  $G \odot H$  com a cardinalidade anunciada. Sejam  $k_i = k + i \cdot k'$  com  $1 \leq i \leq m$ ,  $c : V(G) \rightarrow [k]$  uma coloração própria de  $G$  e  $c : V(H^{(i)}) \rightarrow [k_i] \setminus [k_{i-1}]$  uma lid-coloração de  $H^{(i)}$ . Agora, no grafo  $H^{(m)}$ , substituímos a cor  $k + m \cdot k'$  pela cor 1 pertencente a  $[k]$ . É fácil perceber que  $c$  é uma coloração própria, pois  $c(v_i)$  é diferente de toda cor utilizada nos vértices de  $H^{(i)}$ . Observe que cada  $H^{(i)}$  com  $1 \leq i \leq m - 1$  possui pelo menos uma cor que é exclusiva daquele grafo. Logo, em  $G$ ,  $v_i$  será identificado por uma dessas cores. Do mesmo modo, dados  $v_i \in G$  e  $u_j^{(i)} \in H^{(i)}$  no produto  $G \odot H$ , existe pelo menos uma cor em  $V(G)$  que não foi utilizada em  $V(H^{(i)})$ , assim  $c(N[v_i]) \neq c(N[u_j^{(i)}])$ , o que implica que  $c$  é uma lid-coloração. Portanto,  $\chi_{lid}(G \odot H) \leq \chi(G) + m \cdot (\chi_{lid}(H)) - 1$ .  $\square$

Apresentamos na Figura 5.2 um exemplo da construção descrita no Teorema 5.4. Na figura, ilustramos uma lid-coloração do grafo  $G \odot H$  obtida ao colorir os vértices de  $G$  com  $[k]$  e cada cópia  $H^{(i)}$  com um conjunto disjunto de  $k'$  cores, conforme a construção da prova, realizando apenas na última cópia  $H^{(m)}$  a substituição da cor  $k + m \cdot k'$  pela cor 1.



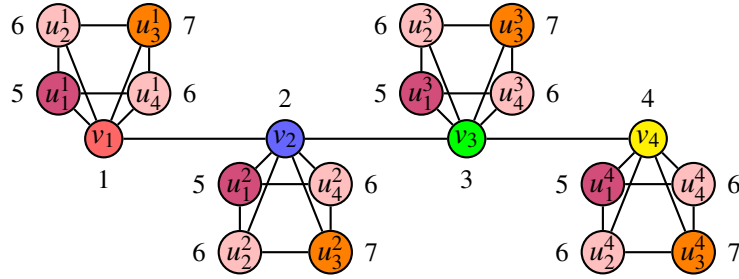
**Figura 5.2:**  $\chi_{lid}(P_4 \odot C_4) \leq 2 + 4(3) - 1 = 13$ .

O grafo  $K_m \odot K_1$  satisfaz a igualdade do Teorema 5.4. De fato, como  $\chi(K_m) = m$  e  $\chi_{lid}(K_1) = 1$ , segue que  $\chi_{lid}(K_m \odot K_1) = 2m - 1$ , conforme demonstrado na Proposição 4.9. Esse exemplo motiva o aprimoramento do limite do Teorema 5.4, obtido no Teorema 5.5, no qual apresentamos um limite superior mais preciso e mostramos que ele é justo. Observe ainda que o produto corona não é comutativo. Pavithra e Reji [34] estudaram a lid-coloração do produto corona de dois grafos e afirmaram que, para grafos conexos  $G$  e  $H$ , vale  $\chi_{lid}(G \odot H) \leq \chi_{lid}(G) + \chi_{lid}(H)$ . Entretanto, o exemplo  $K_m \odot K_1$  mostra que essa afirmação pode falhar. Assim, no próximo resultado estabelecemos uma versão correta desse limite ao acrescentar a hipótese de que  $G$  é livre de vértices gêmeos verdadeiros.

**Teorema 5.5** [29] *Sejam  $G$  e  $H$  dois grafos conexos de ordens  $m$  e  $n$ , respectivamente, com  $m \geq 3$ . Se o grafo  $G$  é livre de vértices gêmeos verdadeiros, então  $\chi_{lid}(G \odot H) \leq \chi_{lid}(G) + \chi_{lid}(H)$ .*

*Prova.* Sejam  $\chi_{lid}(G) = k'$  e  $\chi_{lid}(H) = k''$ . Vamos construir uma coloração  $c$  para o grafo  $G \odot H$  com a cardinalidade em questão. Para isso, considere  $c : V(G) \rightarrow [k']$  e  $c : V(H^{(i)}) \rightarrow [k' + k''] \setminus [k']$  como lid-colorações de  $G$  e  $H^{(i)}$ , com  $1 \leq i \leq m$ , respectivamente. Como  $G$  é livre de vértices gêmeos verdadeiros e está lid-colorido, para dois vértices adjacentes  $u$  e  $z$  em  $G$ , temos  $c(N[u]) \neq c(N[z])$ . Sejam  $v_u$  e  $v_z$  os vértices correspondentes a  $u$  e  $z$ , respectivamente, em  $G \odot H$ . Logo, temos que  $c(N[v_u]) = c(N[u]) \cup [k' + k''] \setminus [k']$  e  $c(N[v_z]) = c(N[z]) \cup [k' + k''] \setminus [k']$ , isto é,  $c(N[v_u]) \neq c(N[v_z])$ . Além disso, como nenhuma cor utilizada em  $V(G)$  é usada para colorir  $V(H^{(i)})$ , dados  $v_i \in G$  e  $u_j^{(i)} \in H^{(i)}$  no produto  $G \odot H$ , temos  $c(N[v_i]) \neq c(N[u_j^{(i)}])$ . Assim,  $c$  é uma lid-coloração de  $G \odot H$ . Portanto,  $\chi_{lid}(G \odot H) \leq \chi_{lid}(G) + \chi_{lid}(H)$ .  $\square$

Apresentamos na Figura 5.3 um exemplo da construção descrita no Teorema 5.5. Na figura ilustramos uma lid-coloração do grafo  $P_4 \odot C_4$ , obtida ao colorir os vértices de  $P_4$  com  $[4]$  e cada cópia  $C_4^{(i)}$  com um conjunto disjunto de três cores,  $[7] \setminus [4] = \{5, 6, 7\}$ , conforme a construção da prova. Assim, utilizamos 7 cores e obtemos  $\chi_{lid}(P_4 \odot C_4) \leq \chi_{lid}(P_4) + \chi_{lid}(C_4) = 4 + 3 = 7$ .



**Figura 5.3:**  $\chi_{lid}(P_4 \odot C_4) \leq 4 + 3 = 7$ .

Pelo Teorema 3.1, temos que  $\chi_{lid}(P_n) = 3$  quando  $n$  é ímpar. Além disso, pelo Teorema 3.2, sabemos que  $\chi_{lid}(C_m) = 3$  se  $m \equiv 0 \pmod{4}$ . Assim, temos que  $\chi_{lid}(P_n \odot C_m) = \chi_{lid}(P_n) + \chi_{lid}(C_m) = 6$ . Vale ressaltar que, no Teorema 5.18, demonstramos que  $\chi_{lid}(P_n \odot C_n) = 6$  com  $m \geq 2$ ,  $n \geq 3$  e  $n \neq 5, 7$ . Logo, o limite apresentado é justo.

**Teorema 5.6** [31] *Sejam  $G$  e  $H$  dois grafos com  $m$  e  $n$  vértices, respectivamente, onde  $G$  é conexo,  $m \geq 2$  e  $n \geq 1$ . Então,  $\chi_{lid}(G \odot H) \geq \chi_{lid}(H) + 2$ .*

*Prova.* Seja  $\chi_{lid}(H) = k$ , e seja  $c$  uma lid-coloração mínima de  $G \odot H$ . observe que, como todos os vértices de  $H^{(i)}$  são adjacentes a  $v_i$ , é necessário pelo menos uma nova cor diferentes das  $k$  cores. Suponhamos por contradição que  $\chi_{lid}(G \odot H) = k + 1$  e então, que cada cópia  $H^{(i)}$  é colorido com  $k$  cores em  $[k]$ . Sem perda de generalidade, assuma que  $c(v_i) = k + 1$ . Nesse caso, como  $G$  é conexo, tem-se  $c(N[v_i]) = [k + 1]$  para todo  $v_i$  em  $G$  no produto  $G \odot H$ . Seja  $v_j$  um vizinho de  $v_i$  em  $G$ . Logo,  $c(V(H^{(j)}) \cup \{v_j\}) = [k + 1]$ , o que implica em  $c(N[v_i]) = c(N[v_j]) = [k + 1]$ , o que contradiz que  $c$  é uma lid-coloração. Portanto,  $\chi_{lid}(G \odot H) \geq k + 2$ .  $\square$

O próximo resultado estabelece um limite inferior para o número lid-cromático do produto corona  $G \odot H$  quando o grafo  $H$  possui uma componente conexa isomorfa ao grafo  $K_n$ .

**Teorema 5.7** *Seja  $G$  um grafo conexo com  $m \geq 2$  vértices e seja  $H$  um grafo. Se  $H$  possui uma componente conexa isomorfa a  $K_n$ , para algum  $n \geq 1$ , então  $\chi_{lid}(G \odot H) \geq n + 3$ .*

*Prova.* Suponha, por contradição, que exista uma  $(n + 2)$ -lid-coloração  $c$  de  $G \odot H$  usando as cores  $[n + 2]$ . Para cada  $i \in [m]$ , seja  $H^{(i)}$  a cópia de  $H$  anexada a  $v_i$  e seja  $K_n^{(i)}$  a componente de  $H^{(i)}$  isomorfa a  $K_n$ . Como  $K_n^{(i)}$  é uma clique e todo vértice de  $K_n^{(i)}$  é adjacente a  $v_i$ , o subgrafo induzido por  $\{v_i\} \cup V(K_n^{(i)})$  é isomorfo a  $K_{n+1}$ ; logo, seus  $n + 1$  vértices recebem  $n + 1$  cores distintas. Assim, existe exatamente uma cor  $\alpha_i \in [n + 2]$  que não aparece em  $\{v_i\} \cup V(K_n^{(i)})$ . Como  $K_n^{(i)}$  é uma componente de  $H^{(i)}$ , para todo  $x \in V(K_n^{(i)})$  vale  $N[x] = \{v_i\} \cup V(K_n^{(i)})$ , e portanto  $c(N[x]) = [n + 2] \setminus \{\alpha_i\}$ . Como  $G$  é conexo e  $m \geq 2$ , o vértice  $v_i$  possui um vizinho em  $G$ , de modo que  $N[v_i] \neq N[x]$ ; além

disso,  $v_i$  é adjacente a  $x$ . Pela condição de lid-coloração, devemos ter  $c(N[v_i]) \neq c(N[x])$ . Entretanto, como  $N[x] \subseteq N[v_i]$ , segue que  $c(N[x]) \subseteq c(N[v_i])$ , e então necessariamente  $\alpha_i \in c(N[v_i])$ , isto é,  $c(N[v_i]) = [n+2]$  para todo  $i \in [m]$ . Tomando dois vértices adjacentes  $v_i, v_j \in V(G) \subseteq V(G \odot H)$ , obtemos  $c(N[v_i]) = c(N[v_j]) = [n+2]$ , o que contradiz a definição de lid-coloração. Portanto, não existe uma  $(n+2)$ -lid-coloração de  $G \odot H$ , e concluímos que  $\chi_{lid}(G \odot H) \geq n+3$ .  $\square$

Como consequência imediata do Teorema 5.7, obtemos o seguinte resultado para o caso particular em que o segundo fator do produto corona é um grafo completo.

**Corolário 5.8** *Seja  $G$  um grafo conexo com  $m \geq 2$  vértices e seja  $K_n$  o grafo completo com  $n \geq 1$  vértices. Então,  $\chi_{lid}(G \odot K_n) \geq n+3$ .*

*Prova.* Como  $K_n$  é conexo, ele possui uma componente conexa isomorfa a  $K_n$ . Assim, o resultado segue diretamente do Teorema 5.7.  $\square$

Aplicando novamente o Teorema 5.7, agora ao caso em que  $H = \overline{K_n}$ , obtemos o seguinte limite inferior para o número lid-cromático do produto corona.

**Corolário 5.9** *Seja  $G$  um grafo conexo com  $m \geq 2$  vértices e seja  $\overline{K_n}$  o complementar de  $K_n$ , com  $n \geq 1$  vértices. Então,  $\chi_{lid}(G \odot \overline{K_n}) \geq 4$ .*

*Prova.* O grafo  $\overline{K_n}$  é a união disjunta de  $n$  componentes conexas isomorfas a  $K_1$ . Aplicando o Teorema 5.7 com  $n = 1$ , obtemos  $\chi_{lid}(G \odot \overline{K_n}) \geq 1+3 = 4$ .  $\square$

No Teorema 5.10, estabelecemos um limite inferior para o número lid-cromático do grafo  $G \odot H$ , no caso em que  $H$  é livre de vértices gêmeos verdadeiros. Esse resultado será fundamental para a demonstração dos resultados apresentados nas seções seguintes.

**Teorema 5.10** [31] *Se  $G$  e  $H$  são grafos conexos com  $m$  e  $n$  vértices, respectivamente, onde  $m, n \geq 3$ , e  $H$  é livre de gêmeos verdadeiros, então  $\chi_{lid}(G \odot H) \geq 6$ .*

*Prova.* Do enunciado, sabemos que  $H$  é livre de vértices gêmeos verdadeiros. Assim, pelo Teorema 5.1 o grafo  $G \odot H$  também é livre de vértices gêmeos verdadeiros. Observe que cada vértice  $v_i$  de  $G$  está contido numa clique de tamanho 3, digamos  $C^{(i)}$ , livre de gêmeos verdadeiros, formada pelo vértice  $v_i$ , e dois vértices adjacentes de  $H^{(i)}$ , digamos  $u_1^i$  e  $u_2^i$ . Logo, pelo Corolário 4.6,  $\chi_{lid}(G \odot H) \geq 5$ . Suponhamos por contradição que  $\chi_{lid}(G \odot H) = 5$ . Pela Proposição 4.5,  $|c(N[C^{(i)}])| \geq 5$  e como  $v_i$  é adjacente a todos os vértices em  $N[C^{(i)}] \setminus \{v_i\}$ , concluímos que  $c(N[v_i]) = [5]$ , para todo  $i \in [m]$ , o que contradiz o fato de que  $c$  é uma lid-coloração de  $G \odot H$ . Portanto,  $\chi_{lid}(G \odot H) \geq 6$ .  $\square$

## 5.5 Lid-coloração em produtos corona de grafos bipartidos

Nesta seção, apresentamos alguns resultados sobre lid-coloração em produtos corona de grafos bipartidos e também analisamos o caso em que o produto é bipartido. Pelo Teorema 3.7, todo grafo bipartido  $G$  satisfaz  $\chi_{lid}(G) \leq 4$ . No Teorema 5.11, mostramos que o número lid-cromático do produto corona de dois grafos bipartidos conexos é 6.

**Teorema 5.11** [31] *Sejam  $G$  e  $H$  dois grafos bipartidos conexos com  $m$  e  $n$  vértices, respectivamente, onde  $m \geq 3$  e  $n \geq 4$ . Então,  $\chi_{lid}(G \odot H) = 6$ .*

*Prova.* Como  $H$  é bipartido e, portanto, livre de gêmeos verdadeiros, então segue que  $H$  não possui vértices gêmeos verdadeiros. Pelo Teorema 5.10, temos que  $\chi_{lid}(G \odot H) \geq 6$ . Para mostrar o limite superior, vamos construir uma lid-coloração mínima  $c$  para o grafo  $G \odot H$  com a cardinalidade 6. Como o grafo  $G$  é bipartido, consideramos as bipartições  $A$  e  $B$  de  $V(G)$ . Para cada  $i \in [m]$ , atribuímos  $c(v_i) = 5$  para  $v_i$  em  $A$  e  $c(v_i) = 6$  para  $v_i$  em  $B$ . Note que existe um vértice  $u \in H$  que não é adjacente a um vértice de grau um. Assim, para colorir os vértices de  $H^{(i)}$  adjacentes a  $v_i$  em que  $c(v_i) = 5$ , definimos  $c(u_j^i) = 1 + (d(u, u_j^i) \bmod 4)$  e no caso em que  $c(v_i) = 6$ ,  $c(u_j^i) = 2 + (d(u, u_j^i) \bmod 4)$ . Observe que  $c$  é uma coloração própria e cada  $H^{(i)}$  está lid-colorido. Além disso, a cor  $1 \in c(N[v_i])$  quando  $v_i \in A$ , mas  $1 \notin c(N[v_i])$  para  $v_i \in B$ . Isso implica que, para dois vértices adjacentes  $u$  e  $z$  em  $G$  no produto  $G \odot H$ , tem-se  $c(N[u]) \neq c(N[z])$ . Ainda,  $5 \leq |c(N[v_i])| \leq 6$  e para  $y \in V(H^{(i)})$ ,  $|c(N[y])| \leq 4$ , o que implica em  $c(N[v_i]) \neq c(N[y])$ . Portanto,  $c$  é uma lid-coloração de  $G \odot H$  e  $\chi_{lid}(G \odot H) \leq 6$ .  $\square$

Aplicamos na Figura 5.4 a construção utilizada na prova do Teorema 5.11. Na figura apresentamos uma lid-coloração do grafo  $P_6 \odot K_{3,3}$  obtida ao colorir os vértices do caminho  $P_6$  com as cores 5 e 6, de acordo com a bipartição de  $P_6$ . Para cada cópia  $K_{3,3}^{(i)}$ , escolhemos um vértice  $u$  e colorimos os vértices de acordo com as distâncias a  $u$ , conforme a regra descrita na prova do teorema. Dessa forma, cada cópia  $K_{3,3}^{(i)}$  utiliza apenas as cores  $\{1, 2, 3, 4\}$ , enquanto os vértices de  $P_6$  utilizam as cores  $\{5, 6\}$ , obtendo assim uma lid-coloração com 6 cores.

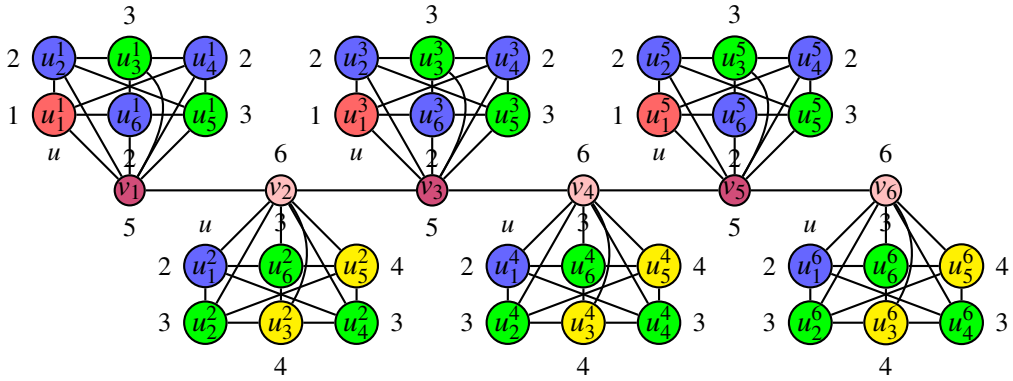


Figura 5.4: Lid-coloração do grafo corona  $P_6 \odot K_{3,3}$ .

Pavithra e Reji [34] obtiveram um resultado mais geral para o produto corona  $G \odot H$ , no caso em que  $G$  é bipartido e  $\chi_{lid}(H) = k$ . A abordagem utilizada pelos autores emprega técnicas distintas das nossas e caracteriza o valor de  $\chi_{lid}(G \odot H)$  em função da existência de uma boa  $k$ -lid-coloração do grafo  $H$ . O resultado correspondente é apresentado no Teorema 5.12.

**Teorema 5.12** [34] *Sejam  $G$  e  $H$  dois grafos conexos e suponha que  $\chi_{lid}(H) = k$ . Se  $G$  é bipartido, então*

$$\chi_{lid}(G \odot H) = \begin{cases} \chi_{lid}(H) + 2, & \text{se } H \text{ admite uma boa } k\text{-lid-coloração,} \\ \chi_{lid}(H) + 3, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A proposição a seguir caracteriza quando o produto corona de dois grafos é bipartido. Mostramos que essa propriedade ocorre exatamente quando o primeiro fator é bipartido e o segundo fator não possui arestas, isto é, quando ele é o complemento de um grafo completo.

**Proposição 5.13** *Sejam  $G$  e  $H$  grafos, com  $|V(G)| \geq 1$  e  $|V(H)| = n$ . Então,  $G \odot H$  é bipartido se, e somente se,  $G$  é bipartido e  $H = \overline{K_n}$ .*

*Prova.* ( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $G \odot H$  seja bipartido. Como todo subgrafo induzido de um grafo bipartido é bipartido, segue que  $G$  é bipartido (pois  $G$  é subgrafo induzido de  $G \odot H$ ). Além disso, mostraremos que  $H$  não possui arestas. Suponha, por contradição, que existam  $x_i, y_i \in V(H)$  com  $x_i y_i \in E(H)$ . Escolha um vértice  $v_i \in V(G)$  e considere a cópia  $H^{(i)}$  de  $H$  anexada a  $v_i$  no produto corona. Sejam  $x^{(v_i)}$  e  $y^{(v_i)}$  os vértices de  $H^{(i)}$  correspondentes a  $x_i$  e  $y_i$ . Então  $x^{(v_i)} y^{(v_i)} \in E(H^{(i)})$  e, pela definição do corona,  $v_i$  é adjacente a todos os vértices de  $H^{(i)}$ , em particular a  $x^{(v_i)}$  e  $y^{(v_i)}$ . Logo,  $v_i, x^{(v_i)}, y^{(v_i)}$  formam um triângulo em  $G \odot H$ , o que contradiz o fato de que grafos bipartidos não contêm ciclos ímpares. Portanto,  $E(H) = \emptyset$ , isto é,  $H = \overline{K_n}$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha agora que  $G$  seja bipartido, com bipartição  $(A, B)$ , e que  $H = \overline{K}_n$ . Para cada  $v_i \in V(G)$ , denote por  $H^{(i)}$  a cópia de  $H$  anexada a  $v_i$ , e observe que  $H^{(i)}$  é um conjunto independente. Defina

$$A' = A \cup \bigcup_{v_i \in B} V(H^{(i)}) \quad \text{e} \quad B' = B \cup \bigcup_{v_i \in A} V(H^{(i)}).$$

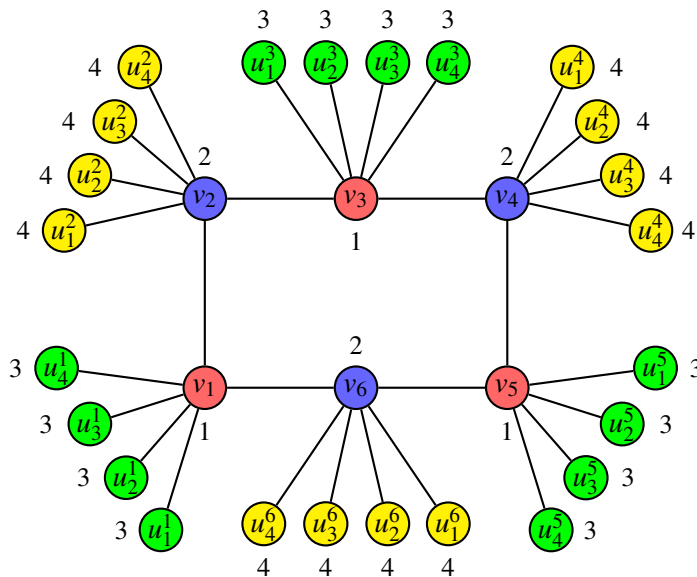
Como as arestas de  $G$  cruzam  $(A, B)$  e cada vértice de  $H^{(i)}$  é adjacente apenas a  $v_i$  (que está no lado oposto por construção), toda aresta de  $G \odot H$  tem uma extremidade em  $A'$  e a outra em  $B'$ . Logo,  $(A', B')$  é uma bipartição de  $G \odot H$ , e portanto  $G \odot H$  é bipartido.  $\square$

No próximo resultado, determinamos exatamente o número lid-cromático do produto corona entre um grafo bipartido conexo e o grafo  $\overline{K}_n$ .

**Teorema 5.14** *Seja  $G$  um grafo bipartido conexo com  $m \geq 2$  vértices. Então,  $\chi_{lid}(G \odot \overline{K}_n) = 4$ .*

*Prova.* Pelo Corolário 5.9, temos  $\chi_{lid}(G \odot \overline{K}_n) \geq 4$ . Além disso, como  $G$  é bipartido e  $H = \overline{K}_n$ , segue pela Proposição 5.13 que  $G \odot \overline{K}_n$  é bipartido. Logo, pelo Teorema 3.7, obtemos  $\chi_{lid}(G \odot \overline{K}_n) \leq 4$ . Portanto,  $\chi_{lid}(G \odot \overline{K}_n) = 4$ .  $\square$

A Figura 5.5 mostra a lid-coloração  $c$  para o grafo  $C_6 \odot \overline{P}_4$ . Observa-se que a coloração  $c$  é própria e para qualquer par de vértices  $v_i, v_z \in V(C_6 \odot \overline{P}_4)$  adjacentes, temos  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_z])$ , o que implica que  $c$  é uma lid-coloração. Portanto,  $\chi_{lid}(C_6 \odot \overline{P}_4) = 4$ .



**Figura 5.5:** Lid-coloração do grafo corona  $C_6 \odot \overline{P}_4$ .

## 5.6 Sobre o problema da 4-lid-coloração no produto corona

Com base no resultado de complexidade e nos resultados anteriores, passamos a investigar os grafos produto corona que são 4-lid-cromáticos. Nosso objetivo é determinar se os grafos produto corona que são 4-lid-cromáticos podem ser caracterizados, ou seja, se há um reconhecimento polinomial para estes grafos.

Inicialmente, levantamos as restrições para  $G$  e  $H$  que garantem que  $\chi_{lid}(G \odot H) \leq 4$ .

**Teorema 5.15** *Sejam  $G$  e  $H$  grafos tais que  $G$  é conexo com  $m \geq 2$  e  $n \geq 1$  vértices, respectivamente. Se  $\chi_{lid}(G \odot H) \leq 4$ , então  $G$  é livre de triângulos e  $H$  é isomorfo a  $\overline{K_n}$ .*

*Prova.* Se  $G$  possui triângulo, então  $G \odot \overline{K_n}$  possui uma clique de ordem três, livre de gêmeos verdadeiros, e pelo Corolário 4.6,  $\chi_{lid}(G \odot H) \geq 5$ . Logo, concluímos que se  $\chi_{lid}(G \odot H) \leq 4$ , então  $G$  é livre de triângulos. Por outro lado, se  $\chi_{lid}(H) \geq 3$ , pelo Teorema 5.6,  $\chi_{lid}(G \odot \overline{K_n}) \geq 5$ . Se  $\chi_{lid}(H) \leq 2$ , então  $H$  possui componentes com, no máximo, uma aresta. Se  $H$  possui uma componente com uma aresta, pelo Teorema 5.6,  $\chi_{lid}(G \odot H) \geq 5$ . Portanto, podemos concluir que se  $\chi_{lid}(G \odot H) \leq 4$ , então  $G$  é livre de triângulos e  $H$  não tem arestas, ou seja,  $H$  é isomorfo a  $\overline{K_n}$ , com  $n \geq 1$ .  $\square$

Os resultados anteriores indicam que a condição  $\chi(G) \leq 3$  parece ser necessária para que  $G \odot \overline{K_n}$  admita uma 4-lid-coloração, quando  $G$  é não bipartido e livre de triângulos. Isso nos leva à seguinte conjectura:

**Conjectura 2** *Seja  $G$  um grafo não bipartido e livre de triângulos. Se  $\chi_{lid}(G \odot \overline{K_n}) = 4$ , então  $\chi(G) \leq 3$ .*

Note que a condição  $\chi(G) \leq 3$  mostra que, entre os grafos não bipartidos e livres de triângulos, os únicos candidatos possíveis são os grafos 3-coloríveis. De fato, há grafos nessa classe para os quais  $\chi_{lid}(G \odot \overline{K_n}) = 4$ . Entre eles, estão os ciclos ímpares  $C_{2k+1}$ , com  $k > 1$ , e o grafo de Petersen. Em particular, se  $G \cong C_{2k+1}$ , com  $k > 1$ , então  $\chi_{lid}(G \odot \overline{K_n}) = 4$ . Além disso, o grafo de Petersen, por ser 3-colorível, também satisfaz  $\chi_{lid}(G \odot \overline{K_n}) = 4$ . Na Figura 5.6, apresentamos uma 4-lid-coloração para o grafo  $P \odot P_1$ , onde  $P$  denota o grafo de Petersen.

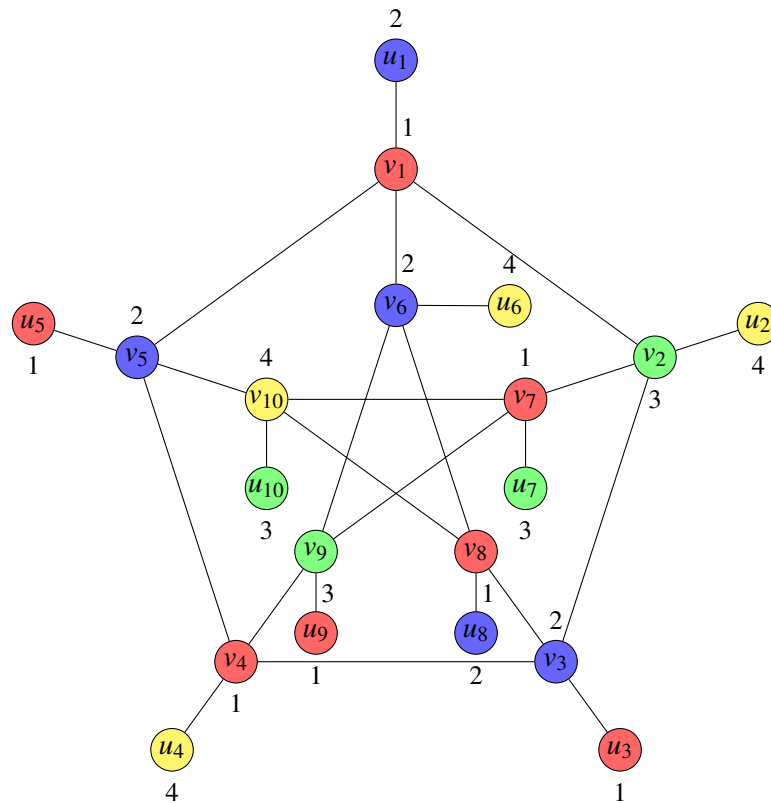


Figura 5.6: Lid-coloração do grafo corona  $P \odot P_1$ .

Por outro lado, a condição  $\chi(G) = 3$  não é suficiente para garantir que  $\chi_{lid}(G \odot \overline{K_n}) = 4$ . Na Figura 5.7, apresentamos uma 5-lid-coloração do grafo  $G \odot P_1$ . Note que o grafo base  $G$  é 3-colorível, isto é,  $\chi(G) = 3$ . Entretanto, o produto corona  $G \odot P_1$  não admite uma 4-lid-coloração, e, portanto,  $\chi_{lid}(G \odot P_1) = 5$ . Assim, este exemplo mostra que a 3-colorabilidade de  $G$ , embora seja uma condição necessária em alguns contextos, não é suficiente para assegurar a existência de uma 4-lid-coloração.

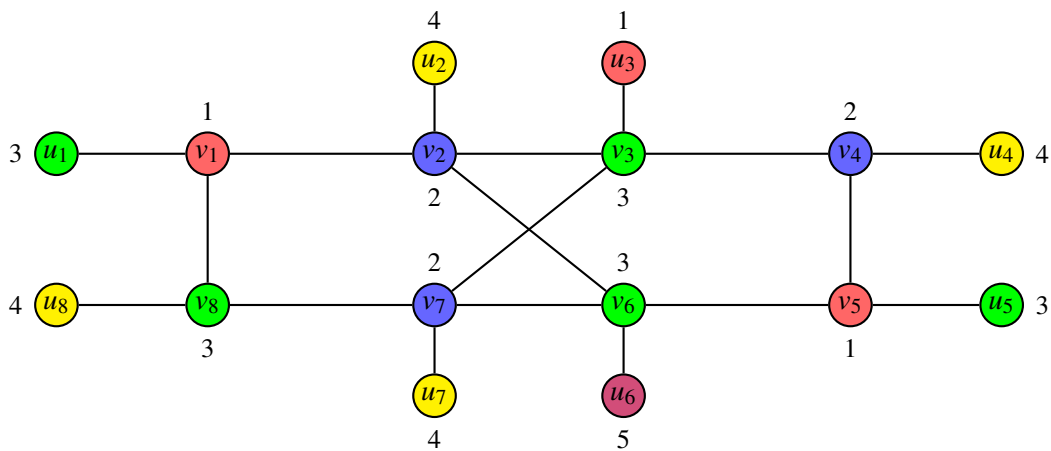


Figura 5.7: Uma 5-lid-coloração do grafo  $G \odot P_1$ .

Observe que o problema da 3-coloração de grafos consiste em decidir se um

grafo  $G$  admite uma coloração própria utilizando três cores. Esse problema é conhecido por ser NP-completo, conforme mostrado por Karp [23] em seu trabalho clássico sobre redutibilidade entre problemas combinatórios. No caso da 4-lid-coloração, o problema parece estar intimamente relacionado à 3-coloração do grafo  $G$ . De fato, os resultados obtidos indicam que a condição  $\chi_{lid}(G \odot \overline{K}_n) = 4$  impõe fortes restrições estruturais sobre  $G$ , em particular sugerindo que  $\chi(G) \leq 3$  quando  $G$  é não bipartido e livre de triângulos. Como o problema da 3-coloração é NP-completo, isso nos leva a conjecturar que, mesmo nesse caso mais restrito, o problema de decidir se  $\chi_{lid}(G \odot \overline{K}_n) = 4$  permanece computacionalmente intratável.

**Conjectura 3** *O problema 4-LID-COLORAÇÃO é NP-completo mesmo quando restrito à classe dos grafos produto corona.*

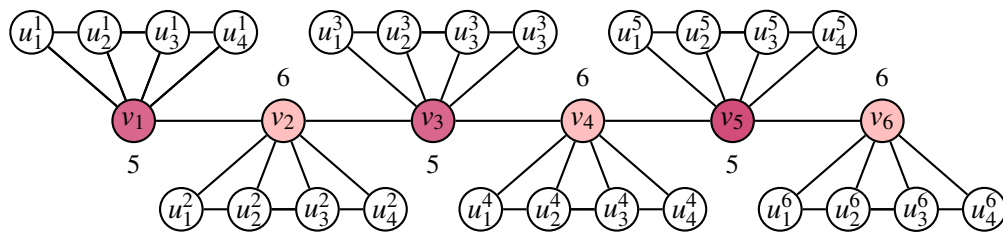
## 5.7 Lid-coloração do produto corona quando os fatores são caminhos e ciclos

Na seção anterior, estudamos a lid-coloração do produto corona  $G \odot H$  no caso em que  $G$  e  $H$  são grafos bipartidos. Nesta seção, voltamos nossa atenção para casos em que essa condição não é necessariamente satisfeita. Em particular, apresentamos valores exatos para o número lid-cromático de grafos da forma  $G \odot H$ , quando  $G$  e  $H$  pertencem às classes dos caminhos e dos ciclos.

Note que, como consequência imediata do Teorema 5.11, temos o Corolário 5.16, o qual estabelece o número lid-cromático do grafo  $P_m \odot P_n$ .

**Corolário 5.16** *Seja  $G = P_m \odot P_n$  com  $m \geq 3$  e  $n \geq 4$ . Então,  $\chi_{lid}(G) = 6$ .*

Aplicamos a coloração  $c$  conforme descrito no Teorema 5.11 para colorir os vértices do grafo  $P_6 \odot P_4$ . Como o grafo  $P_m$  é bipartido, podemos particionar seus vértices nas bipartições  $A$  e  $B$ . Para colorir os vértices de  $P_m$  para  $i \in [6]$ , atribuímos  $c(v_i) = 5$  para  $v_i \in A$  e  $c(v_i) = 6$  para  $v_i \in B$ . Portanto, temos  $c(v_1) = 5$ ,  $c(v_2) = 6$ ,  $c(v_3) = 5$ ,  $c(v_4) = 6$ ,  $c(v_5) = 5$  e  $c(v_6) = 6$ , conforme ilustrado na Figura 5.9.



**Figura 5.8:** Lid-coloração do grafo corona  $P_6 \odot P_4$ .

Na coloração dos vértices  $u_j^i \in P_4^{(i)}$  adjacentes a  $v_i$  em que  $c(v_i) = 5$ , temos  $c(u_j^i)$  recebe uma cor de  $\{1, 2, 3, 4\}$  congruentes a  $1 + d(u, v)$  módulo 4, já no caso em que  $c(v_i) = 6$  usaremos  $\{2, 3, 4, 5\}$  congruentes a  $2 + d(u, v)$  módulo 4. Essa coloração é ilustrada na Figura 5.9.

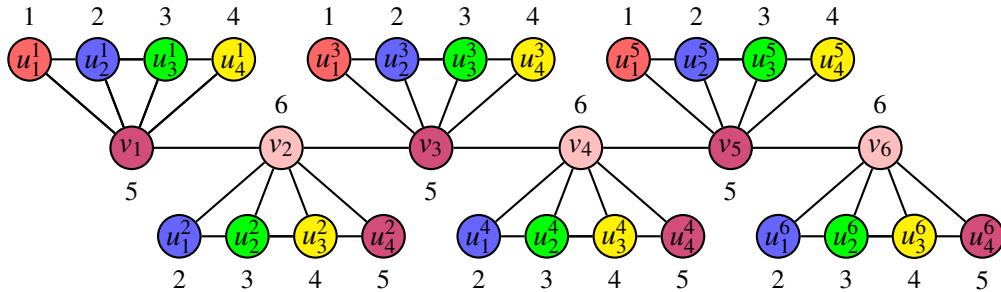


Figura 5.9: Lid-coloração do grafo corona  $P_6 \odot P_4$ .

Observa-se que todos os pares de vértices adjacentes têm cores distintas, estabelecendo assim que  $c$  é uma coloração própria de  $P_6 \odot P_4$ . Além disso, devido a  $c(N[v_i]) = [6]$  para  $v_i \in A$  e  $c(N[v_i]) = [2, 6]$  para  $v_i \in B$ , concluímos que  $c$  é uma lid-coloração de  $P_6 \odot P_4$ . Portanto,  $\chi_{lid}(P_6 \odot P_4) = 6$ .

Observe que o mesmo ocorre nos casos em que um dos fatores é um ciclo par, ou seja, um grafo bipartido. Por exemplo, aplicamos a lid-coloração  $c$  construída no Teorema 5.11 no caso em que  $n$  é par para colorir os vértices do grafo  $P_6 \odot C_6$ , conforme ilustrado na Figura 5.10. Destaca-se que a coloração é própria, ou seja, para quaisquer dois vértices  $v_i, v_z \in P_6 \odot C_6$  adjacentes, temos  $c(v_i) \neq c(v_z)$ . Como  $c([v_i]) = [6]$  para  $v_i \in A$  e  $c([v_i]) = [2, 6]$  para  $v_i \in B$ . Portanto,  $c$  é uma lid-coloração, concluindo que  $\chi_{lid}(P_6 \odot C_6) = 6$ .

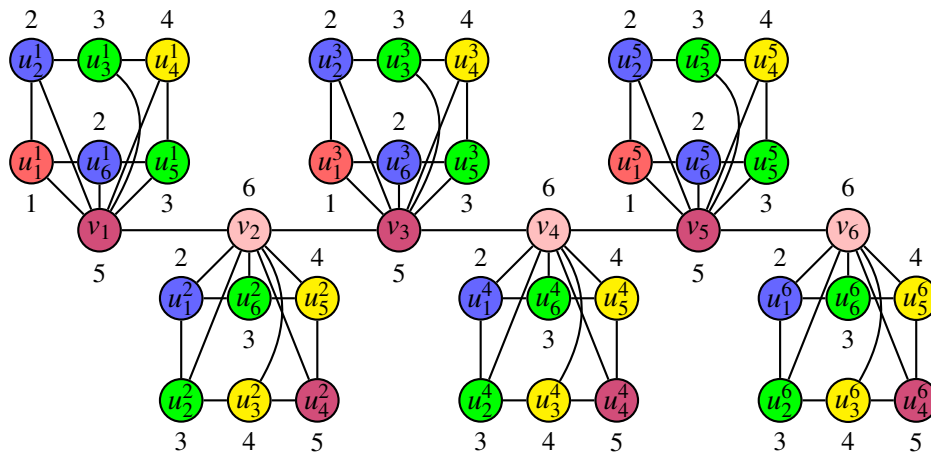


Figura 5.10: Lid-coloração do grafo corona  $P_6 \odot C_6$ .

A seguir determinamos o número lid-cromático do produto corona quando os fatores são ciclos e/ou caminhos. Inicialmente tratamos os casos em que  $H = P_n$  com

$n \leq 2$ . Em seguida, determinamos o valor de  $\chi_{lid}(G \odot H)$  para  $H \in \{P_n, C_n\}$  com  $n \geq 3$ . Utilizamos a seguinte notação: dada uma sequência  $M$  de cores,  $(M)^*$  indica que a sequência  $M$  pode ser repetida zero ou mais vezes,  $(M)^{op}$  indica que a sequência  $M$  é opcional, e  $(M_1 \cup M_2)$  indica que uma das sequências deve ser utilizada.

**Teorema 5.17** [31] *Seja  $G \in \{P_m, C_m\}$  com  $m \geq 2$ . Então,*

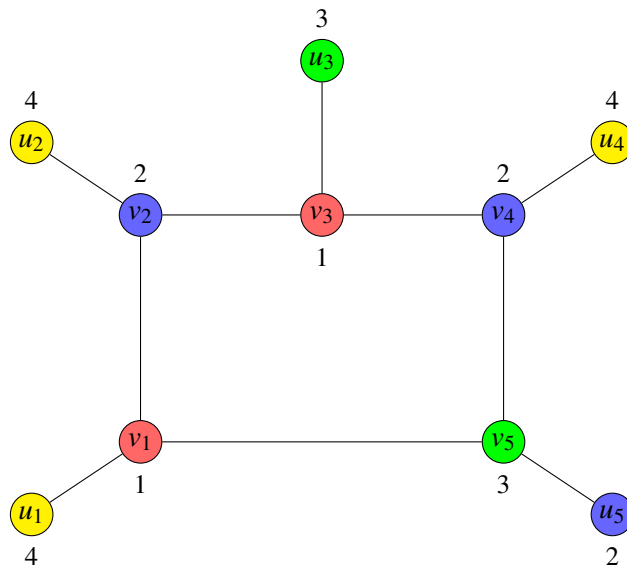
$$\chi_{lid}(G \odot P_n) = \begin{cases} 4, & \text{se } n = 1 \text{ e } G \not\cong C_3, \\ 5, & \text{se } n = 2. \end{cases}$$

*Prova.* Pelo Corolário 5.8, temos que  $\chi_{lid}(G \odot P_1) \geq 4$  e  $\chi_{lid}(G \odot P_2) \geq 5$ . Resta mostrar os limites superiores. Se  $G$  é um caminho ou um ciclo par em  $G \odot P_1$ , para  $1 \leq i \leq m$  definimos  $c(v_i) = 1$  quando  $i$  é ímpar e  $c(v_i) = 2$  quando  $i$  é par. Se  $G = C_{2k+1}$  em  $G \odot P_1$ , definimos  $c(v_i) = 1$  para  $i$  ímpar,  $c(v_i) = 2$  para  $i$  par com  $1 \leq i \leq m-1$  e  $c(v_m) = 3$ . Dividimos a coloração dos vértices de  $P_n^{(i)}$  em dois casos:

**Caso 1:** No caso em que  $n = 1$ , cada vértice  $v_i$  possui um único vértice adjacente  $u_i \in P_1^{(i)}$ . Definimos a seguinte regra:  $c(u_i) = 4$  se  $c(v_i) = 2$ ,  $c(u_i) = 2$  se  $c(v_i) = 3$ ,  $c(u_i) = 4$  se  $3 \in c(N[v_i])$ , e  $c(u_i) = 3$  caso contrário. Note que a coloração é própria. Observe que, em ambos os casos,  $|c(N[v_i])| > |c(N[u_i])|$ . Além disso, se  $G$  é caminho ou ciclo par, então  $c(N[v_i]) = [3]$  se  $i$  for ímpar e  $c(N[v_i]) = \{1, 2, 4\}$  se  $i$  for par, o que implica que, dados  $v_i, v_j \in V(G)$  adjacentes em  $G \odot P_1$ , temos  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_j])$ . Portanto,  $\chi_{lid}(G \odot P_1) = 4$ .

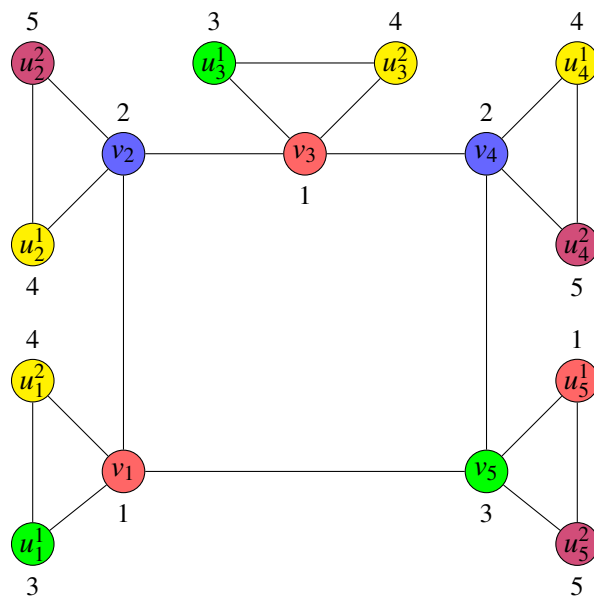
**Caso 2:** No caso em que  $n = 2$ , cada vértice  $v_i$  é adjacente aos dois vértices  $x_i, y_i \in P_2^{(i)}$ . Definimos a coloração das cópias conforme a paridade de  $i$ : usaremos a sequência (34) se  $i$  é ímpar e a sequência (45) se  $i$  é par. No caso em que  $G = C_{2k+1}$ , para  $i = m$  utilizamos a sequência (15). Note que a coloração é própria. Além disso, note que  $N[x_i] = N[y_i]$  e para todo  $i$ , vale  $|c(N[v_i])| > |c(N[x_i])|$ ,  $|c(N[v_i])| > |c(N[y_i])|$ . Agora, se  $G$  é caminho ou ciclo par, então  $c(N[v_i]) = [4]$  se  $i$  ímpar e  $c(N[v_i]) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  se  $i$  par. Assim, para vértices adjacentes  $v_i, v_j \in V(G)$  em  $G \odot P_2$ , obtemos  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_j])$ . No caso em que  $G = C_{2k+1}$ , para  $1 \leq i \leq m-2$ , os conjuntos são os mesmos do caso bipartido,  $c(N[v_{m-1}]) = [5]$  e  $c(N[v_m]) = \{1, 2, 3, 5\}$ . Portanto, para vértices adjacentes  $v_i, v_j \in V(G)$  em  $G \odot P_2$ , obtemos  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_j])$ . Portanto,  $\chi_{lid}(G \odot P_2) = 5$ .  $\square$

Aplicamos a lid-coloração  $c$  proveniente do Teorema 5.17, no **Caso 1**, para colorir os vértices do grafo  $C_5 \odot P_1$ , conforme ilustrado na Figura 5.11. Observa-se que  $c$  é uma coloração própria e que, para quaisquer vértices adjacentes  $v_i, v_z \in V(C_5 \odot P_1)$ , temos  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_z])$ . Assim,  $c$  é uma lid-coloração de  $C_5 \odot P_1$  e, conseqüentemente,  $\chi_{lid}(C_5 \odot P_1) = 4$ .



**Figura 5.11:** Lid-coloração do grafo corona  $C_5 \odot P_1$ .

Aplicamos a lid-coloração  $c$  descrita no Teorema 5.17, **Caso 2**, para colorir os vértices do grafo  $C_5 \odot P_2$ , conforme apresentado na Figura 5.12. É fácil verificar que a coloração  $c$  é própria e que, para todo par de vértices adjacentes  $v_i, v_z \in V(C_5 \odot P_2)$ , vale  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_z])$ . Portanto,  $c$  é uma lid-coloração de  $C_5 \odot P_5$ , o que implica que  $\chi_{lid}(C_5 \odot P_2) = 5$ .



**Figura 5.12:** Lid-coloração do grafo corona  $C_5 \odot P_2$ .

A seguir determinamos o número lid-cromático do produto corona quando ambos os fatores são caminhos ou ciclos com pelo menos três vértices. O resultado mostra que esse valor é sempre 6, exceto quando o segundo fator é um dos ciclos  $C_5$  ou  $C_7$ , caso em que são necessárias 7 cores.

**Teorema 5.18** [31] *Seja  $G \in \{P_m, C_m\}$  com  $m \geq 2$  e seja  $H \in \{P_n, C_n\}$  com  $n \geq 3$ . Então,*

$$\chi_{lid}(G \odot H) = \begin{cases} 7, & \text{se } H \in \{C_5, C_7\}, \\ 6, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Prova.* Se  $G$  e  $H$  são bipartidos, isto é, se nenhum deles é um ciclo ímpar, então o resultado segue do Teorema 5.11. Consideramos, portanto, os casos em que pelo menos um entre  $G$  e  $H$  é um ciclo ímpar. Os limites inferiores seguem do Teorema 5.10 e, quando  $H \in \{C_5, C_7\}$ , dos Teoremas 3.1, 3.2 e 5.6. Para os limites superiores, apresentamos lid-colorações mínimas  $c$  de  $G \odot H$  com 6 e 7 cores, conforme os casos descritos. Dividimos a prova em dois casos:

**Caso 1:**  $G$  é bipartido. Nesse caso,  $G$  é um caminho ou um ciclo par, e  $H$  é um ciclo ímpar. Para  $1 \leq i \leq m$ , definimos  $c(v_i) = 4$  se  $i$  é ímpar e  $c(v_i) = 5$  se  $i$  é par. Para colorir os vértices de cada  $H^{(i)}$ , consideramos dois subcasos:

**Subcaso 1.1:**  $H \notin \{C_5, C_7\}$ . Nesse caso, para obter uma coloração com 6 cores, distinguimos inicialmente o caso  $n = 3$ . Se  $H \in \{P_3, C_3\}$ , colorimos os vértices de  $H^{(i)}$  com a sequência (123) se  $i$  é ímpar e (126) se  $i$  é par. Nesses casos,  $c(N[v_i]) = [5]$  se  $i$  é ímpar e  $c(N[v_i]) = [6] \setminus \{3\}$  se  $i$  é par. Para  $n \geq 4$ , utilizamos a sequência  $(12d3d1232)^{op}(d2)^{op}(1232)^*$ , onde  $d = 4$  se  $i$  é ímpar e  $d = 6$  se  $i$  é par. Nesse caso,  $c(N[v_i]) = [5]$  se  $i$  é ímpar e  $c(N[v_i]) = [6]$  se  $i$  é par.

**Subcaso 1.2:**  $H \in \{C_5, C_7\}$ . Colorimos  $H^{(i)}$  com a sequência  $(13267)(63)^{op}$  se  $i$  é ímpar, e  $(13246)(43)^{op}$  se  $i$  é par, obtendo uma coloração com 7 cores. Temos  $c(N[v_i]) = [7]$  se  $i$  é ímpar e  $c(N[v_i]) = [6]$  se  $i$  é par.

**Caso 2:**  $G$  é um ciclo ímpar. Nesse caso,  $n$  pode ser par ou ímpar e  $H$  é um ciclo ou um caminho. Definimos  $c(v_i) = 4$  se  $i$  é ímpar e  $c(v_i) = 5$  se  $i$  é par, para  $1 \leq i \leq m-1$ , com  $c(v_m) = 1$ . Para colorir os vértices de cada  $H^{(i)}$ , consideramos dois subcasos:

**Subcaso 2.1:**  $H \notin \{C_5, C_7\}$ . Primeiro consideramos o caso  $n = 3$ . No caso em que  $G = C_{2k+1}$ , para  $1 \leq i \leq m-1$ , fazemos  $c(v_i) = 4$  se  $i$  é ímpar e  $c(v_i) = 5$  se  $i$  é par, e tomamos  $c(v_m) = 1$ . Para colorir os vértices de  $P_3^{(i)}$  ou  $C_3^{(i)}$ , usamos a sequência (123) se  $i$  é par e (126) se  $i$  é ímpar, para  $1 \leq i \leq m-1$ , e a sequência (356) para colorir os vértices de  $P_3^{(m)}$  ou  $C_3^{(m)}$ . Observe que  $c(N[v_i]) = [5]$  para  $i$  ímpar e  $c(N[v_i]) = [6] \setminus \{3\}$  para  $i$  par, para  $1 \leq i \leq m-1$ , e  $c(N[v_m]) = [6] \setminus \{2\}$ . Além disso,  $|c(N[v_i])| > |c(N[c_i])|$  para todo  $c_i \in \{x_i, y_i, z_i\}$ . Agora suponha  $n \geq 4$ . Nesse caso, para obter uma coloração com 6 cores, utilizamos a sequência  $(12d3)^*(d1232 \cup d2 \cup d1232d2)^{op}$  quando  $H \cong C_n$ , e a sequência  $(123d)^*(1 \cup 12 \cup 123)^{op}$  quando  $H \cong P_n$ , onde, para  $1 \leq i \leq m-1$ ,  $d = 4$  se  $i$  é par e  $d = 6$  se  $i$  é ímpar. Se  $H \cong C_n$ , então  $H^{(m)}$  é colorido com  $(2465)^*(62454 \cup 64 \cup 6245464)^{op}$ . Se  $H \cong P_n$ , então  $H^{(m)}$  é colorido com  $(2456)^*(2 \cup 24 \cup 245)^{op}$ . Para  $1 \leq i \leq m-1$ , temos  $c(N[v_i]) = [6]$  se  $i$  é ímpar e  $c(N[v_i]) = [5]$  se  $i$  é par. Além disso,  $c(N[v_m]) = [6] \setminus \{3\}$ .

**Subcaso 2.2:**  $H \in \{C_5, C_7\}$ . Colorimos  $G \odot H$  com 7 cores da seguinte forma. Para  $1 \leq i \leq m-1$ , colorimos os vértices de cada  $H^{(i)}$  com a sequência  $(13267)(63)^{op}$  se  $i$  é ímpar e  $(13246)(43)^{op}$  se  $i$  é par. Utilizamos a sequência  $(23457)(53)^{op}$  em  $H^{(m)}$ . Para  $1 \leq i \leq m-1$ , temos  $c(N[v_i]) = [7]$  se  $i$  é ímpar e  $c(N[v_i]) = [6]$  se  $i$  é par. Além disso,  $c(N[v_m]) = [7] \setminus \{6\}$ . Adicionalmente, em todos os casos, para  $u^{(i)} \in V(H^{(i)})$  temos  $|c(N[u^{(i)}])| \leq 4$ , enquanto  $|c(N[v_i])| \geq 5$ , o que implica que  $c(N[u^{(i)}]) \neq c(N[v_i])$ .  $\square$

Aplicamos a lid-coloração  $c$  descrita no Teorema 5.18, no **Subcaso 1.1** do **Caso 1**, para colorir os vértices do grafo  $P_4 \odot C_9$ , conforme ilustrado na Figura 5.13. Assim,  $\chi_{lid}(P_4 \odot C_9) = 6$ .

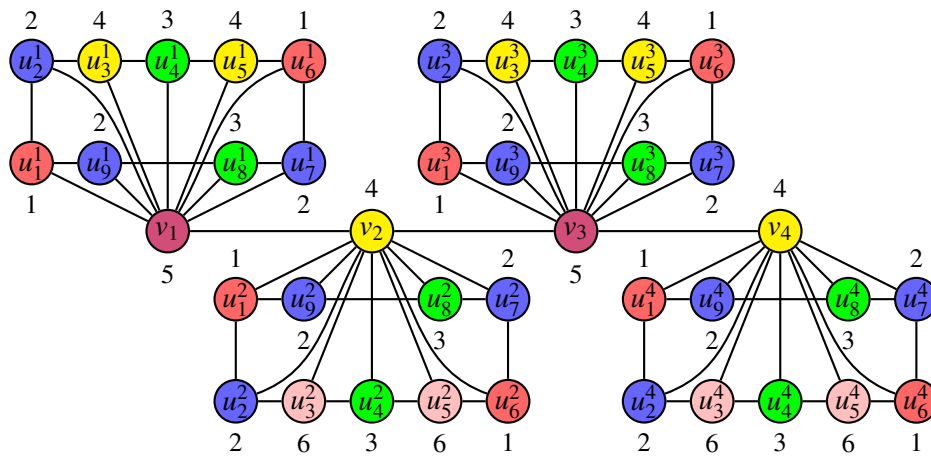


Figura 5.13: Lid-coloração do grafo corona  $P_4 \odot C_9$ .

De maneira análoga ao exemplo anterior, utilizamos a lid-coloração  $c$  descrita no Teorema 5.18, no **Subcaso 1.1** do **Caso 1**, para colorir os vértices do grafo  $P_4 \odot C_{11}$ , como ilustrado na Figura 5.14. Verifica-se que a coloração obtida satisfaz as condições de uma lid-coloração e, portanto, concluímos que  $\chi_{lid}(P_4 \odot C_{11}) = 6$ .

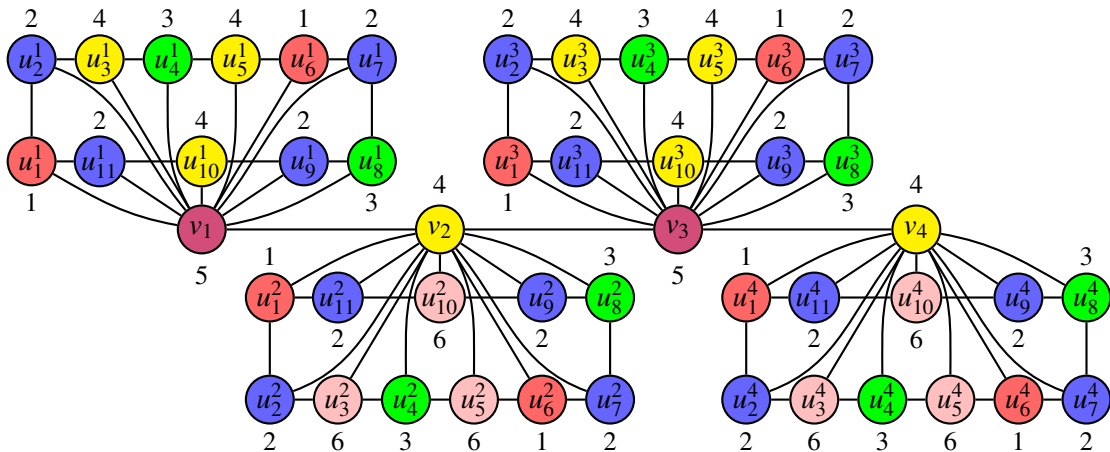
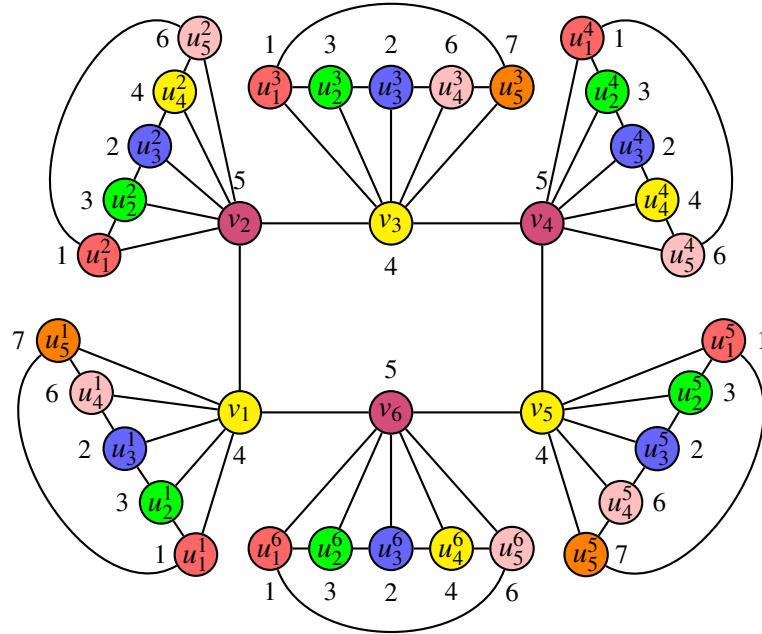


Figura 5.14: Lid-coloração do grafo corona  $P_4 \odot C_{11}$ .

Na Figura 5.15, apresentamos a lid-coloração  $c$  construída no Teorema 5.18, no **Subcaso 1.2** do **Caso 1**, para colorir os vértices do grafo  $C_5 \odot C_5$ . Note que a coloração  $c$  é própria e para qualquer par de vértices  $v_i, v_z \in C_5 \odot C_5$  adjacentes, temos  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_z])$ , o que implica que  $c$  é uma lid-coloração. Portanto,  $\chi_{lid}(C_5 \odot C_5) = 7$ .



**Figura 5.15:** Lid-coloração do grafo corona  $C_5 \odot C_5$ .

Na Figura 5.16, exibimos a lid-coloração  $c$  obtida a partir do Teorema 5.18, no **Subcaso 1.2** do **Caso 1**, aplicada ao grafo  $C_6 \odot C_7$ . Observa-se que  $c$  é uma coloração própria e que, para quaisquer vértices adjacentes  $v_i, v_z \in V(C_6 \odot C_7)$ , vale  $c(N[v_i]) \neq c(N[v_z])$ . Conseqüentemente,  $\chi_{lid}(C_6 \odot C_7) = 7$ .

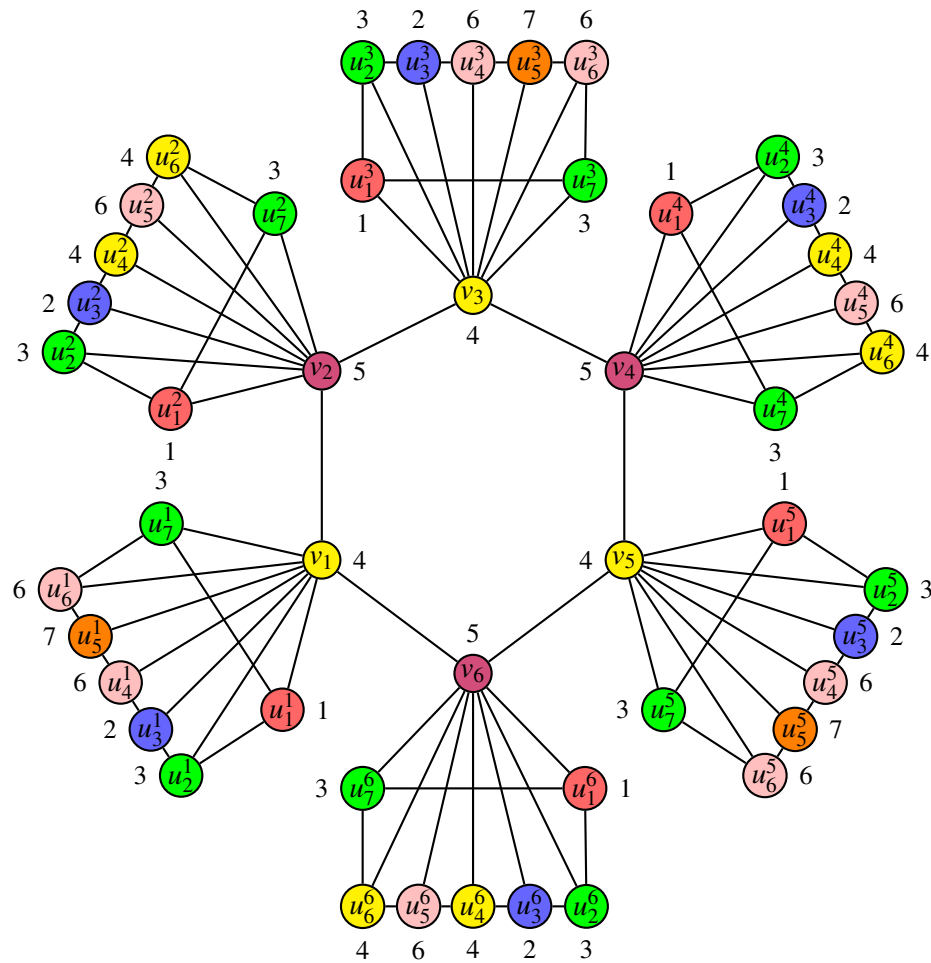


Figura 5.16: Lid-coloração do grafo corona  $C_6 \odot C_7$ .

Apresentamos na Figura 5.17 uma lid-coloração  $c$  do grafo  $C_5 \odot C_4$ , construída de acordo com o **Caso 2, Subcaso 2.1**, do Teorema 5.18, no qual  $G$  é um ciclo ímpar e  $H \cong C_n$ , com  $n \geq 4$  e  $H \notin \{C_5, C_7\}$ . Em particular,  $\chi_{\text{lid}}(C_5 \odot C_4) = 6$ .

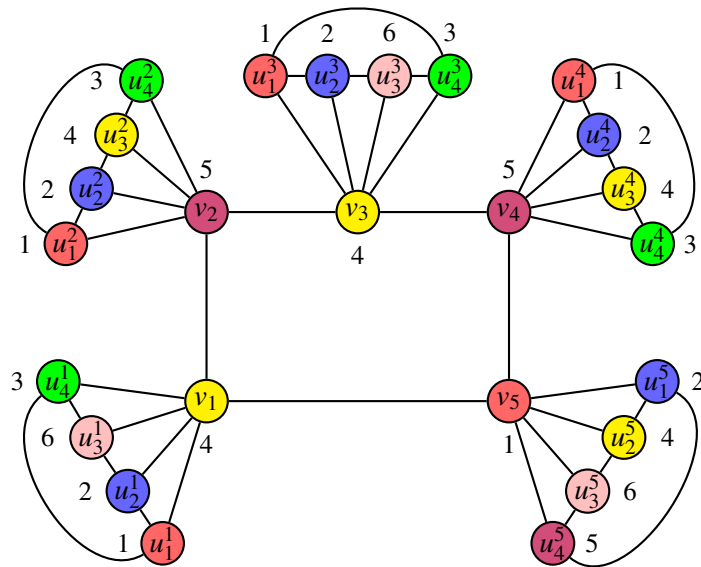


Figura 5.17: Lid-coloração do grafo corona  $C_5 \odot C_4$ .

Na Figura 5.18 uma lid-coloração  $c$  do grafo  $C_5 \odot C_7$ , construída de acordo com o Caso 2, Subcaso 2.2, do Teorema 5.18, no qual  $G$  é um ciclo ímpar e  $H \cong C_n$ , com  $n \geq 4$  e  $H \in \{C_5, C_7\}$ . Em particular,  $\chi_{\text{lid}}(C_5 \odot C_7) = 7$ .

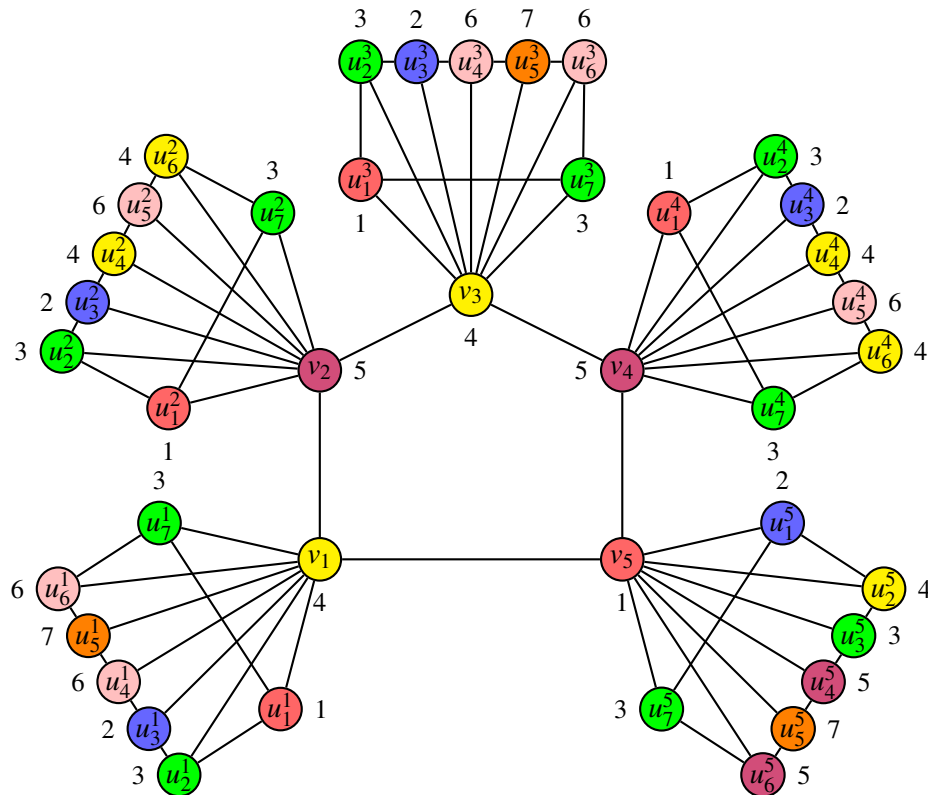


Figura 5.18: Lid-coloração do grafo corona  $C_5 \odot C_7$ .

Pavithra e Reji [34] também obtiveram, de forma independente, resultados para

o produto corona quando os fatores são caminhos e ciclos. No entanto, sua abordagem emprega técnicas distintas das nossas e descreve o valor de  $\chi_{lid}(G \odot H)$  em função da existência de uma boa  $k$ -lid-coloração do grafo  $H$ . Apresentamos, a seguir, alguns resultados obtidos pelos autores para a lid-coloração do produto corona em que os fatores são caminhos e ciclos.

**Teorema 5.19** [34] *Para inteiros positivos  $m, n \geq 2$ ,*

$$\chi_{lid}(P_m \odot P_n) = \begin{cases} 5, & \text{se } n = 2, \\ 6, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Teorema 5.20** [34] *Para inteiros positivos  $m \geq 2$  e  $n \geq 3$ ,*

$$\chi_{lid}(P_m \odot C_n) = \begin{cases} 7, & \text{se } n = 5 \text{ ou } 7, \\ 6, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Teorema 5.21** [34] *Seja  $\chi_{lid}(H) = k$ . Para um inteiro positivo  $m \geq 3$ ,*

$$\chi_{lid}(C_m \odot H) = \begin{cases} \chi_{lid}(H) + 2, & \text{se } H \text{ admite uma boa } k\text{-lid-coloração,} \\ \chi_{lid}(H) + 3, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Teorema 5.22** [34] *Para inteiros positivos  $m \geq 3$  e  $n \geq 2$ ,*

$$\chi_{lid}(C_m \odot P_n) = \begin{cases} 5, & \text{se } n = 2, \\ 6, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Teorema 5.23** [34] *Para inteiros positivos  $m, n \geq 3$ ,*

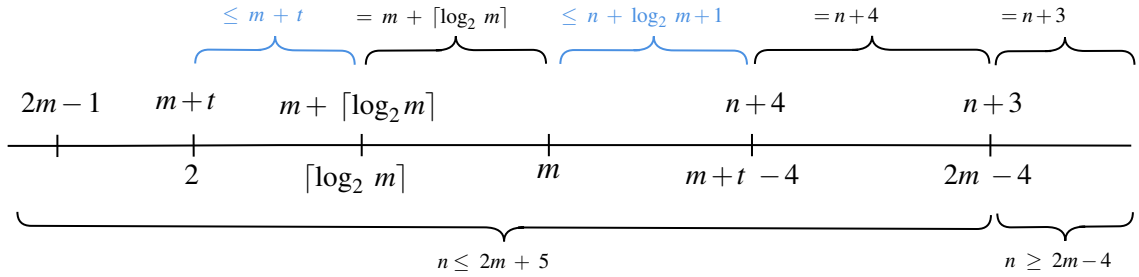
$$\chi_{lid}(C_m \odot C_n) = \begin{cases} 7, & \text{se } n = 5 \text{ ou } 7, \\ 6, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

## 5.8 Lid-coloração de $K_m \odot K_n$

Nesta seção, consideramos o número lid-cromático do produto corona dos grafos completos  $K_m$  e  $K_n$ . Como, para  $m \geq 2$ ,  $K_m$  possui vértices gêmeos verdadeiros, o limite superior do Teorema 5.5 não é aplicável a  $K_m \odot K_n$ . Pelo Teorema 5.1, se  $G$  e  $H$  são grafos conexos com  $G$  de ordem ao menos dois, então  $G \odot H$  é livre de gêmeos verdadeiros se, e somente se,  $H$  é livre de gêmeos verdadeiros. Assim, em  $K_m \odot K_n$ , se  $m, n \geq 2$ , a clique formada pelos  $m$  vértices de  $K_m$  é livre de gêmeos verdadeiros, e os vértices de cada cópia de  $K_n$  são gêmeos verdadeiros dois a dois. Portanto, uma lid-coloração  $c$  de  $K_m \odot K_n$

identifica pares de vértices adjacentes  $x, y$  quando ambos pertencem a  $K_m$ ; ou  $x = v_i^0$  e  $y \in V(K_n^{(i)})$ , para algum  $i \in [m]$ .

A Figura 5.19 resume nossos resultados para  $\chi_{lid}(K_m \odot K_n)$ . Abaixo da linha estão os valores de  $n$  em função de  $m$ . Acima da linha, apresentamos os valores exatos e os limites superiores para  $\chi_{lid}(K_m \odot K_n)$ . Observe que, em sua maioria, são valores exatos e, para dois intervalos (em azul), apresentamos apenas limites superiores. Nota-se também que  $\chi_{lid}(K_m \odot K_n)$  depende de  $\max\{n, m\}$ .



**Figura 5.19:** Abaixo da linha estão os valores de  $n$  em função de  $m$  e, acima, os valores e limites de  $\chi_{lid}(K_m \odot K_n)$ , onde  $t = \left\lceil \frac{\sqrt{8m-7}-1}{2} \right\rceil$ .

Antes de apresentarmos nossos resultados sobre  $\chi_{lid}(K_m \odot K_n)$ , mostramos condições necessárias e suficientes para que uma coloração  $c$  de  $K_m \odot K_n$  seja uma coloração de identificação local.

**Lema 5.24** [29] *Seja  $G = K_m \odot K_n$ , com  $m, n \geq 2$ . Se  $c$  é uma coloração de identificação local de  $G$  tal que  $c(V(K_m)) = Y$ , então  $|c(V(K_n^{(i)})) \cap Y| \leq m - 2$ , para todo  $i \in [m]$ .*

*Prova.* Suponha que  $c$  seja uma coloração de identificação local de  $G$ . É fácil ver que  $|c(V(K_n^{(i)})) \cap Y| \geq m - 1$ . Por contradição, suponha que  $|c(V(K_n^{(i)})) \cap Y| = m - 1$ . Seja  $u_j^i \in V(K_n^{(i)})$ . Assim,  $Y \subseteq c(N[u_j^i])$  e  $Y \subseteq c(N[v_i^0])$ . Como todo vizinho de  $u_j^i$  em  $K_n^{(i)}$  também é vizinho de  $v_i^0$ , podemos concluir que  $c(N[u_j^i]) = c(N[v_i^0])$ .  $\square$

Iniciamos apresentando, no Teorema 5.31, o número lid-cromático do produto corona entre os grafos  $K_m \odot K_m$ , ou seja, estamos considerando o caso especial em que  $n = m$ , com  $m \geq 5$ . É importante observar que no grafo  $K_m \odot K_n$ , com  $n \geq 2$ , todos os vértices de cada  $K_n^{(i)}$  são gêmeos verdadeiros entre si. Portanto, esses vértices não são identificados pela lid-coloração.

**Lema 5.25** [29] *Sejam  $m \geq 2$ ,  $n \geq 1$ ,  $G = K_m \odot K_n$ ,  $X, Y, Z \subseteq \mathbb{N}$  com  $X$  disjunto de  $Y \cup Z$ , e  $c$  uma coloração própria de  $G$  tal que  $c(V(K_m)) = Z$ . Se, para todo  $i \in [m]$ ,*

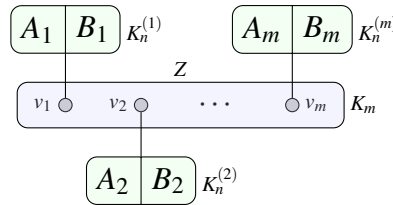
1.  $A_1, \dots, A_m$  são subconjuntos distintos de  $X$  com  $|A_i| \leq n$ ;

2.  $B_1, \dots, B_m$  são subconjuntos de  $Y \cup Z$  com  $|B_i| = n - |A_i|$  e  $|B_i \cap Z| \leq m - 2$ ; e
3.  $c(V(K_n^{(i)})) = A_i \cup B_i$ ,

então  $c$  é uma lid-coloração de  $G$ .

*Prova.* Sejam  $X, Y, Z \subseteq \mathbb{N}$  como descritos, e seja  $c$  uma coloração própria de  $G$  tal que  $c(V(K_m)) = Z$ . Claramente,  $|Z| = m$ . Suponha que as condições 1, 2 e 3 sejam satisfeitas. Sejam  $x$  e  $y$  dois vértices adjacentes de  $G$ . Mostramos que  $c(N[x]) \neq c(N[y])$ . Se  $x \in V(K_n^{(i)})$  e  $y \in V(K_m)$ , então  $y = v_i^0$  e, pela condição 3,  $c(N[x]) = A_i \cup B_i \cup \{c(y)\}$  e  $c(N[y]) = A_i \cup B_i \cup Z$ . Como  $|B_i \cap Z| \leq m - 2$ , tem-se  $B_i \cup \{c(y)\} \neq Z$ . Logo  $c(N[x]) \neq c(N[y])$ . Se  $x, y \in V(K_m)$ , assumamos que  $x = v_i^0$  e  $y = v_j^0$  para  $i, j \in [m]$ . Pela condição 3,  $c(V(K_n^{(i)})) = A_i \cup B_i$  e  $c(V(K_n^{(j)})) = A_j \cup B_j$ . Como, pela condição 1,  $A_i \neq A_j$ , concluímos que  $c(N[x]) \neq c(N[y])$ . Portanto,  $c$  é uma lid-coloração de  $G$ .  $\square$

A Figura 5.20 ilustra o esquema da lid-coloração descrito no Lema 5.25.



**Figura 5.20:** Esquema da lid-coloração de  $K_m \odot K_n$ .

No Lema 5.25, o uso dos conjuntos  $A_i$  garante que quaisquer dois vértices de  $K_m$  em  $K_m \odot K_n$  sejam identificados por  $c$ . Os conjuntos  $B_i$  reúnem cores que podem ser usadas para completar a coloração de cada cópia de  $K_n$ . A condição  $|B_i \cap Z| \leq m - 2$  assegura que  $v_i^0$  seja identificado com qualquer vértice de  $K_n^{(i)}$ , uma vez que  $Z \subseteq c(N[v_i^0])$ . Por exemplo, para uma lid-coloração de  $K_4 \odot K_3$ , tomamos  $Z = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $X = \{5, 6, 7\}$  e  $Y = \emptyset$ . Podemos definir  $A_1 = \{5\}$ ,  $A_2 = \{6\}$ ,  $A_3 = \{7\}$  e  $A_4 = \{5, 6\}$ , com  $B_1 = \{2, 3\}$ ,  $B_2 = \{1, 3\}$ ,  $B_3 = \{1, 2\}$  e  $B_4 = \{1\}$ .

**Teorema 5.26** [29] *Seja  $G = K_m \odot K_n$  com  $m, n \geq 2$ . Então,  $\chi_{lid}(G) \geq \max\{m + \log_2 m, n + 3\}$ .*

*Prova.* Pelo Corolário 4.6, concluímos que  $\chi_{lid}(K_m \odot K_n) \geq m + \log_2 m$ . Pelo Lema 5.24,  $|c(V(K_n^{(i)})) \cap c(V(K_m))| \leq m - 2$ ; portanto,  $\chi_{lid}(G) \geq n + 2$ . Suponha, por contradição, que  $\chi_{lid}(G) = n + 2$  e que  $c$  seja uma lid-coloração de  $G$  com essa cardinalidade. Em  $G$ , para  $i \in [m]$ , todos os vértices de  $K_n^{(i)}$  são adjacentes a  $v_i^0$ . Assim, para  $u_j^i \in V(K_n^{(i)})$ , tem-se  $|c(N[u_j^i])| = n + 1$  e, como os vértices  $u_j^i$  e  $v_i^0$  são identificados pela lid-coloração, concluímos que  $|c(N[v_i^0])| = n + 2$  para todo  $i \in [m]$ . Dado que  $m \geq 2$ ,  $c$  não é uma lid-coloração de  $G$ . Portanto,  $\chi_{lid}(G) \geq n + 3$ .  $\square$

Os próximos teoremas apresentam nossas igualdades e limites para  $\chi_{lid}(K_m \odot K_n)$ . Para  $1 \leq n < \lceil \log_2 m \rceil$ , o número mínimo  $x$  de cores adicionais em uma *lid*-coloração  $c$  de  $K_m \odot K_n$  — além das  $m$  cores usadas em  $K_m$  — é determinado pela solução da desigualdade  $\sum_{i=0}^n \binom{x}{i} \geq m$ ; isto é, depende de resolver uma desigualdade polinomial de grau  $n$ . Na prática, essa desigualdade frequentemente se torna intratável, o que inviabiliza o cálculo exato. Por isso, apresentamos valores exatos para  $\chi_{lid}(K_m \odot K_1)$  e  $\chi_{lid}(K_m \odot K_2)$  nos Teoremas 4.9 e 5.28, respectivamente, e um limite superior para os demais casos no Teorema 5.27.

**Teorema 5.27** [29] *Seja  $G = K_m \odot K_n$ , com  $m \geq 5$ . Se  $2 \leq n \leq \lceil \log_2 m \rceil - 1$ , então  $\chi_{lid}(G) \leq m + \left\lceil \frac{\sqrt{8m-7}-1}{2} \right\rceil$ .*

*Prova.* Definimos uma *lid*-coloração  $c$  para  $G$  com a cardinalidade desejada. Para cada  $i \in [m]$ , atribuímos  $c(v_i^0) = i$ . Seja  $x = \left\lceil \frac{\sqrt{8m-7}-1}{2} \right\rceil$  e  $X = [m+x] \setminus [m]$  (isto é,  $X = \{m+1, \dots, m+x\}$ ). Para cada  $i \in [m]$ , tome  $A_i$  como subconjuntos *distintos* de  $X$  com  $|A_i| \leq 2$ . Seja ainda  $B_i \subseteq [m] \setminus \{i\}$  tal que  $|B_i| = n - |A_i|$ . O número de subconjuntos de  $X$  com tamanho no máximo dois é  $\sum_{j=0}^2 \binom{x}{j} = 1 + x + \frac{x(x-1)}{2} \geq m$ , logo podemos escolher  $A_1, \dots, A_m$  distintos. Ademais, como  $n \leq \lceil \log_2 m \rceil - 1 \leq m - 2$  (para  $m \geq 5$ ), obtemos  $|B_i| = n - |A_i| \leq n \leq m - 2$ , e portanto  $|B_i \cap Z| = |B_i| \leq m - 2$ , onde  $Z = [m] = c(V(K_m))$ . Assim, cada  $K_n^{(i)}$  pode ser propriamente colorido com cores em  $A_i \cup B_i$ . É imediato verificar que  $c$  é própria e, pelo Lema 5.25,  $c$  é uma *lid*-coloração de  $G$ .  $\square$

**Teorema 5.28** [29] *Seja  $G = K_m \odot K_2$  com  $m \geq 5$ . Então,  $\chi_{lid}(G) = m + \left\lceil \frac{\sqrt{8m-7}-1}{2} \right\rceil$ .*

*Prova.* Pelo Teorema 5.27,  $\chi_{lid}(G) \leq m + \left\lceil \frac{\sqrt{8m-7}-1}{2} \right\rceil$ . Para o limite inferior, suponha que  $c$  seja uma *lid*-coloração de  $G$  com cardinalidade mínima. Sem perda de generalidade, assumamos que  $c(v_i^0) = i$  para todo  $i \in [m]$ . Se  $K_2^{(i)}$  e  $K_2^{(j)}$  recebem apenas cores de  $[m]$ , para  $i \neq j$ , então  $c(N[v_i^0]) = c(N[v_j^0]) = [m]$ . Portanto, cores adicionais estão sendo usadas para identificar todos os pares de vértices de  $K_m$  em  $G$ . Seja  $x \geq 1$  e  $X = [m+x] \setminus [m]$  o conjunto dessas cores adicionais. Como  $n = 2$ , subconjuntos de  $X$  de tamanho no máximo dois podem ser usados para colorir os vértices de cada  $K_2^{(i)}$ . Assim, o número de conjuntos distintos de cores sobre  $X$  de tamanho no máximo dois é

$$\sum_{i=0}^2 \binom{x}{i} = \binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} = 1 + x + \frac{x(x-1)}{2}.$$

Como cada cópia de  $K_n$  recebe um conjunto distinto de cores, segue que  $1 + x + \frac{x(x-1)}{2} \geq m$ , o que implica  $x^2 + x + 2 - 2m \geq 0$  e, portanto,  $x \geq \frac{\sqrt{8m-7}-1}{2}$ . Logo,  $\chi_{lid}(G) = m + \left\lceil \frac{\sqrt{8m-7}-1}{2} \right\rceil$ .  $\square$

No Teorema 5.29, apresentamos valores para  $n \leq m$  quando  $\chi_{\text{lid}}(K_m \odot K_n)$  assume o menor valor possível. Nesse caso, tem-se  $\sum_{i=0}^n \binom{x}{i} = 2^x$ , que é ao menos  $m$ . Observe que o limite superior para  $n$  inclui alguns casos com  $n = m$ . Contudo, para certos casos em que  $n = m$ , as cores em  $[m + \lceil \log_2 m \rceil]$  são insuficientes para uma lid-coloração de  $K_m \odot K_n$ . Por exemplo,  $K_8 \odot K_8$  não pode ser lid-colorido com 12 cores. Esses casos são contemplados pelo Teorema 5.30. No Teorema 5.31, resumimos os casos em que  $n = m$ .

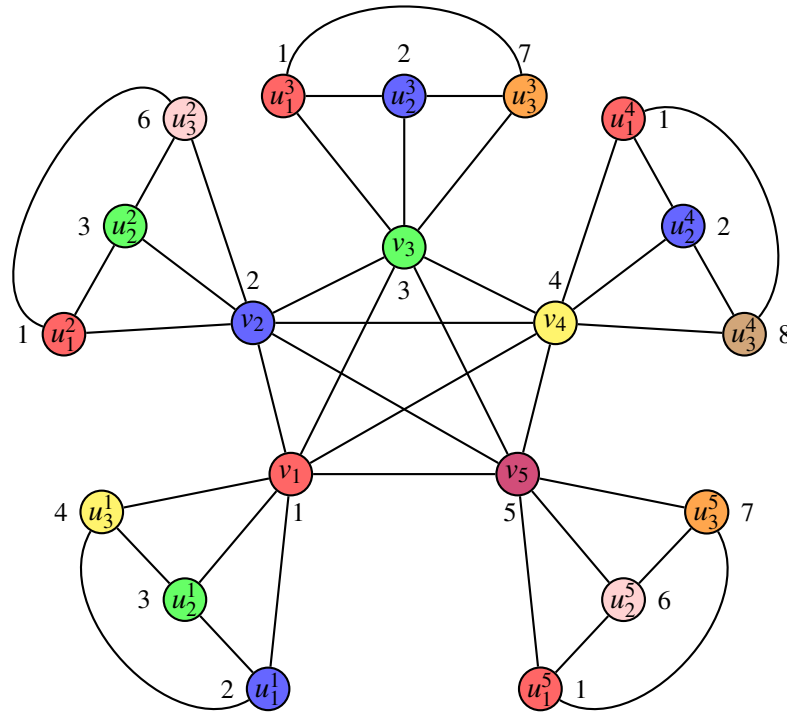
**Teorema 5.29** [29] *Seja  $G = K_m \odot K_n$ , com  $m \geq 5$ . Se  $\lceil \log_2 m \rceil \leq n \leq 2^{\lceil \log_2 m \rceil} - \lceil \log_2 m \rceil - 1$ , então  $\chi_{\text{lid}}(G) = m + \lceil \log_2 m \rceil$ .*

*Prova.* Pelo Teorema 5.26,  $\chi_{\text{lid}}(K_m \odot K_n) \geq m + \lceil \log_2 m \rceil$ . Definimos uma lid-coloração  $c$  para  $G$  com essa cardinalidade para obter o limite superior. Para cada  $i \in [m]$ , tome  $c(v_i^0) = i$ . Seja  $x = \lceil \log_2 m \rceil$  e  $X = [m+x] \setminus [m]$ . Note que  $2^x \geq m$  e, para todo  $A \in \mathcal{P}(X)$ , vale  $|A| \leq \lceil \log_2 m \rceil \leq n$ . Para cada  $i \in [m]$ , escolha  $A_i$  como conjuntos distintos de  $\mathcal{P}(X)$  e tome  $B_i \subseteq [m] \setminus \{i\}$  tal que: se  $n \leq m-2$ , então  $|B_i| = n - |A_i|$ ; se  $n = m-1$ , então  $|B_i| = n - |A_i|$  para  $|A_i| \geq 1$ ; e, se  $n = m$ , então  $|B_i| = n - |A_i|$  para  $|A_i| \geq 2$ . Além disso, impomos  $|B_i \cap [m]| \leq m-2$ .

Se  $n \leq m-2$ , todos os conjuntos de  $\mathcal{P}(X)$  podem ser usados para colorir as cópias de  $K_n$ . Se  $n = m-1$ , usamos apenas os conjuntos com tamanho ao menos 1. Se  $n = m$ , usamos apenas conjuntos com tamanho ao menos 2, isto é, exatamente  $2^{\lceil \log_2 m \rceil} - \lceil \log_2 m \rceil - 1$  desses conjuntos. Em todos os casos, há conjuntos distintos em  $\mathcal{P}(X)$  suficientes para colorir as  $m$  cópias de  $K_n$  e com tamanho no máximo  $n$ .

Colorimos propriamente os vértices de cada  $K_n^{(i)}$  com as cores em  $A_i \cup B_i$ . É imediato que  $c$  é própria e, pelo Lema 5.25,  $c$  é uma lid-coloração de  $G$ .  $\square$

Na Figura 5.21, apresentamos uma lid-coloração  $c$  construída de acordo com o Teorema 5.29 para o grafo  $K_5 \odot K_3$ . Para cada vértice  $v_i \in K_5$  tem-se  $c(v_i) = i$ , isto é,  $c(v_1) = 1$ ,  $c(v_2) = 2$ ,  $c(v_3) = 3$ ,  $c(v_4) = 4$  e  $c(v_5) = 5$ . Observe que  $\lceil \log_2 5 \rceil = 3$ . Assim, teremos  $2^3 = 8$  subconjuntos de cores que podem ser utilizados para colorir os vértices de cada  $K_3^{(i)}$ , identificando assim os vértices de  $K_5$ . Logo, teremos  $\mathcal{X} = \{\emptyset, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{6,7\}, \{6,8\}, \{7,8\}, \{6,7,8\}\}$ . Aplicamos a função  $q(K_3^{(i)}) = X_i$ . Assim, para colorir os vértices de cada  $K_3^{(i)}$  utilizaremos as cores  $X_i$  e completaremos o restante com cores pertencentes a  $[5] \setminus \{i\}$ . Em outras palavras, temos que a coloração  $c$  atribuída aos conjuntos de vértices  $V(K_3^{(i)})$  é dada por  $c(V(K_3^{(1)})) = [5] \setminus \{1\} = \{2,3,4\}$ ,  $c(V(K_3^{(2)})) = \{1,3,6\}$ ,  $c(V(K_3^{(3)})) = \{1,2,7\}$ ,  $c(V(K_3^{(4)})) = \{1,2,8\}$ ,  $c(V(K_3^{(5)})) = \{1,6,7\}$ . Observe que a coloração é própria, e temos  $c(N[v_1]) \neq c(N[v_2]) \neq c(N[v_3]) \neq c(N[v_4]) \neq c(N[v_5])$ , o que implica que  $c$  é uma lid-coloração. Portanto,  $\chi_{\text{lid}}(K_5 \odot K_3) = 5 + \lceil \log_2 5 \rceil = 8$ .



**Figura 5.21:** Grafo  $K_5 \odot K_3$ ,  $\chi_{lid}(K_5 \odot K_3) = 5 + \lceil \log_2 5 \rceil = 8$ .

**Teorema 5.30** [29] *Seja  $G = K_m \odot K_n$ , com  $m \geq 12$ . Se  $2^{\lceil \log_2 m \rceil} - \lceil \log_2 m \rceil \leq n \leq m + \left\lceil \frac{\sqrt{8m-7}-1}{2} \right\rceil - 4$ , então  $\chi_{lid}(K_m \odot K_n) \leq n + \lceil \log_2 m \rceil + 1$ .*

*Prova.* Definimos uma lid-coloração  $c$  para  $G$ . Para cada  $i \in [m]$ , atribuímos  $c(v_i^0) = i$ . Seja  $x = \lceil \log_2 m \rceil + 1$  e  $X = [m+x] \setminus [m]$ . O número de subconjuntos de  $X$  com tamanho ao menos dois é  $\sum_{i=2}^x \binom{x}{i} = 2^x - x - 1 = 2^{\lceil \log_2 m \rceil + 1} - (\lceil \log_2 m \rceil + 1) - 1 = 2 \cdot 2^{\lceil \log_2 m \rceil} - \lceil \log_2 m \rceil - 2 \geq m$ , pois  $m \geq 12$ . Para cada  $i \in [m]$ , tome  $A_i$  como um conjunto distinto em  $\mathcal{P}(X)$  com  $|A_i| \geq 2$ . Defina  $Y = [n+x] \setminus [m+x]$  e escolha  $B_i \subseteq ([m] \setminus \{i\}) \cup Y$  com  $|B_i| = n - |A_i|$ . Assim, cada  $K_n^{(i)}$  é propriamente colorido com as cores em  $A_i \cup B_i$ . É fácil verificar que  $c$  é própria e, pelo Lema 5.25,  $c$  é uma lid-coloração de  $G$ .  $\square$

**Teorema 5.31** [29] *Seja  $k \geq 4$  um inteiro. Se  $G = K_m \odot K_m$ , então*

$$\chi_{lid}(K_m \odot K_m) = \begin{cases} m + \lceil \log_2 m \rceil, & \text{se } 2^{k-1} + 1 \leq m \leq 2^k - k - 1, \\ m + \lceil \log_2 m \rceil + 1, & \text{se } 2^k - k \leq m \leq 2^k. \end{cases}$$

*Prova.* O primeiro caso segue do Teorema 5.29. O limite superior do segundo caso é apresentado no Teorema 5.30. Mostraremos o limite inferior. Pelo Teorema 5.26,  $\chi_{lid}(K_m \odot K_n) \leq m + \lceil \log_2 m \rceil$ . Suponhamos por contradição, que  $\chi_{lid}(K_m \odot K_m) = m + \lceil \log_2 m \rceil$ . Sem perda de generalidade, assumimos  $c(v_i^0) = i$ , para todo  $i \in [m]$ .

Além disso, precisamos de outras cores para identificar os vértices  $v_i^0$  par a par. Seja  $x = \lceil \log_2 m \rceil$  o número dessas novas cores, e seja  $X = [m+x] \setminus [m]$  esse conjunto de cores. Assim,  $m \leq |\mathcal{P}(X)| \leq m+k$ . Pelo Lema 5.24,  $|c(V(K_n^{(i)})) \cap [m]| \leq m-2$ . Logo,  $|c(V(K_n^{(i)})) \cap X| \geq 2$ , o que implica que apenas subconjuntos de tamanho ao menos dois de  $\mathcal{P}(X)$  podem ser usados para colorir uma cópia de  $K_n$ . Portanto, restam apenas  $2^{\lceil \log_2 m \rceil} - \lceil \log_2 m \rceil - 1$  tais conjuntos. Contudo,  $m \geq 2^{\lceil \log_2 m \rceil} - \lceil \log_2 m \rceil$ , o que contradiz que  $c$  é uma lid-coloração de  $G$ .  $\square$

Os Teoremas 5.32 e 5.33 cobrem os casos restantes de  $\chi_{lid}(K_m \odot K_n)$ .

**Teorema 5.32** [29] *Seja  $G = K_m \odot K_n$  com  $m \geq 8$ . Se  $m + \left\lceil \frac{\sqrt{8m-7}-1}{2} \right\rceil - 4 \leq n \leq 2m-5$ , então  $\chi_{lid}(G) = n+4$ .*

*Prova.* Pelo Teorema 5.26,  $\chi_{lid}(G) \geq n+3$ . Suponha, por contradição, que  $\chi_{lid}(G) = n+3$  e, portanto, existe uma lid-coloração  $c$  de  $K_m \odot K_n$  com essa cardinalidade. Sem perda de generalidade, tome  $c(v_i^0) = i$  para todo  $i \in [m]$ . Pelo Lema 5.24, para cada  $K_n^{(i)}$  vale  $|c(V(K_n^{(i)})) \cap [m]| \leq m-2$ . Assim, como  $n \geq m$ , em  $K_n^{(i)}$  usam-se  $n - (m-2) = n - m + 2$  cores fora de  $[m]$ . Como  $n \leq 2m-5$ , obtemos  $n - m + 2 \leq m-3$ . Restam, portanto,  $n+3-m$  cores para atribuir aos  $n - m + 2$  vértices de cada  $K_n^{(i)}$ , de modo a identificar par a par os  $m$  vértices de  $K_m$ . As combinações distintas de pelo menos  $n - m + 2$  cores dentre as  $n+3-m$  restantes totalizam  $n+4-m$  subconjuntos. Como  $n - m + 2 \leq m-3$ , segue  $n - m + 4 \leq m-1$ . Isto é, podemos obter no máximo  $m-1$  subconjuntos distintos com pelo menos  $n - m + 2$  elementos. Logo, existem  $i \neq j$  tais que  $c(N[v_i^0]) = c(N[v_j^0])$ , contradizendo que  $c$  é uma lid-coloração de  $G$ . Portanto, se  $m \leq n \leq 2m-5$  e  $m \geq 5$ , então  $\chi_{lid}(G) \geq n+4$ . Agora, mostramos que  $\chi_{lid}(G) \leq n+4$ . Definimos uma lid-coloração  $c$  para  $G$  com essa cardinalidade. Para cada  $i \in [m]$ , atribuímos  $c(v_i^0) = i$ . Pelo Lema 5.24, pode-se usar no máximo  $m-2$  cores de  $[m]$  em cada cópia de  $K_n$ . Seja  $X = [n+4] \setminus [m]$ . Então  $|X| = n - m + 4$ . Desse modo, é necessário dispor de pelo menos  $m$  subconjuntos de  $X$  com tamanho ao menos  $n - m + 2$ . Mostraremos que  $\binom{n-m+4}{n-m+2} + \binom{n-m+4}{n-m+3} + \binom{n-m+4}{n-m+4} \geq m$ . Simplificando a desigualdade, obtemos  $((n-m)^2 + 9(n-m))/2 + 11 \geq m$ , o que é verdadeiro para  $n \geq m + \frac{\sqrt{8m-7}-1}{2} - 4$ . Para cada  $i \in [m]$ , escolha  $A_i \subseteq X$  distintos com  $|A_i| \geq n - m + 2$ , e tome  $B_i \subseteq [m] \setminus \{i\}$  com  $|B_i| = n - |A_i|$  (note que  $|B_i| \leq m-2$ ). Então, cada  $K_n^{(i)}$  é propriamente colorido com cores em  $A_i \cup B_i$ . É fácil verificar que  $c$  é própria e, pelo Lema 5.25,  $c$  é uma lid-coloração de  $G$ .  $\square$

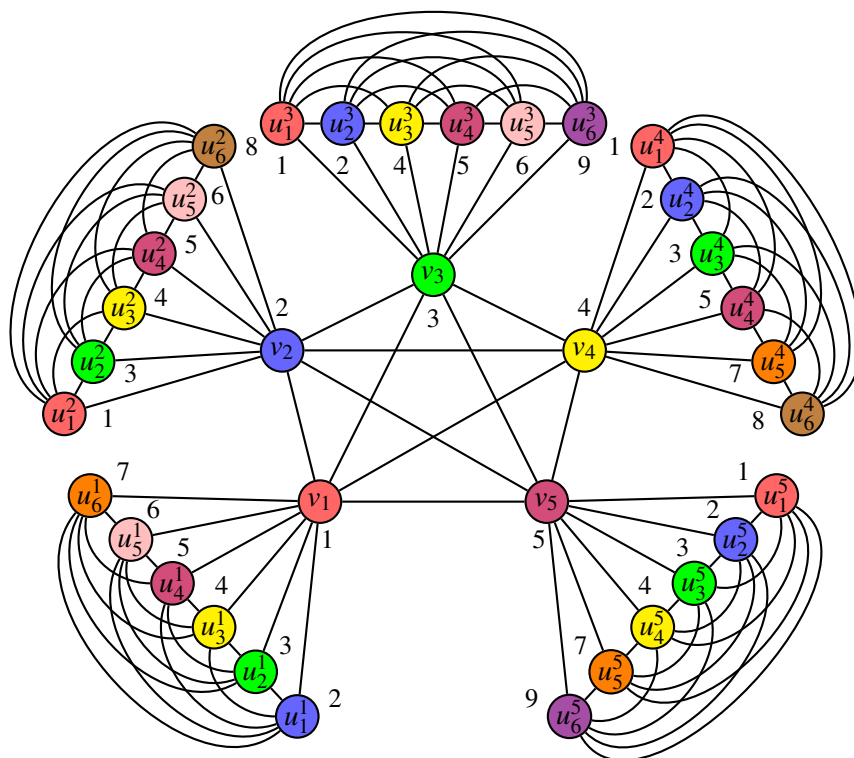
**Teorema 5.33** [29] *Seja  $G = K_m \odot K_n$  com  $n \geq 2m-4$  e  $m \geq 5$ . Então,  $\chi_{lid}(G) = n+3$ .*

*Prova.* Pelo Teorema 5.26,  $\chi_{lid}(G) \geq n+3$ . Resta mostrar que  $\chi_{lid}(G) \leq n+3$ . Definimos uma coloração  $c$  para  $G$  como segue. Para cada  $i \in [m]$ , atribuímos  $c(v_i^0) = i$ . Seja

$X = [n + 3] \setminus [m]$ . Para cada  $i \in [m]$ , seja  $A_i$  um subconjunto distinto de  $\mathcal{P}(X)$  tal que  $|A_i| \geq n - m + 2$ . Como  $|X| = n - m + 3$ , existem exatamente  $\binom{n-m+3}{n-m+2} + \binom{n-m+3}{n-m+3} = (n - m + 3) + 1 = n - m + 4$  subconjuntos de  $\mathcal{P}(X)$  com cardinalidade ao menos  $n - m + 2$ . Como  $n \geq 2m - 4$ , temos  $n - m + 4 \geq m$ ; logo, podemos escolher  $A_1, \dots, A_m$  todos distintos.

Agora, para cada  $i \in [m]$ , tome  $B_i \subseteq [m] \setminus \{i\}$  com  $|B_i| = n - |A_i|$ . Note que  $|B_i| = n - |A_i| \leq n - (n - m + 2) = m - 2$ , de modo que a restrição do Lema 5.24 é respeitada. Em seguida, colorimos cada  $K_n^{(i)}$  com as cores em  $A_i \cup B_i$ . É imediato verificar que  $c$  é própria e, pelo Lema 5.25,  $c$  é uma lid-coloração de  $G$ . Logo,  $\chi_{\text{lid}}(G) \leq n + 3$ . Portanto,  $\chi_{\text{lid}}(G) = n + 3$ .  $\square$

Na Figura 5.22, apresentamos uma lid-coloração  $c$  construída de acordo com o Teorema 5.33 para o grafo  $K_6 \odot K_5$ . Para cada vértice  $v_i \in K_5$  tem-se  $c(v_i) = i$ , isto é,  $c(v_1) = 1, c(v_2) = 2, c(v_3) = 3, c(v_4) = 4$  e  $c(v_5) = 5$ . Observe que  $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 11 \geq 5$ . Assim, teremos 11 subconjuntos de cores que podem ser utilizados para colorir os vértices de cada  $K_6^{(i)}$  identificando assim os vértices de  $K_5$ . Logo, teremos  $\mathcal{X} = \{\{6, 7\}, \{6, 8\}, \{6, 9\}, \{7, 8\}, \{7, 9\}, \{8, 9\}, \{6, 7, 8\}, \{6, 7, 9\}, \{6, 8, 9\}, \{7, 8, 9\}, \{6, 7, 8, 9\}\}$ . Aplicamos a função  $q(K_6^{(i)}) = X_i$ . Assim, para colorir os vértices de cada  $K_6^{(i)}$  utilizaremos as cores  $X_i$  e completaremos o restante com cores pertencentes a  $[m] \setminus \{i\}$ . Em outras palavras, temos que a coloração  $c$  atribuída aos conjuntos de vértices  $V(K_6^{(i)})$  é dada por  $c(V(K_6^{(1)})) = [5] \setminus \{1\} \cup [6, 7] = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $c(V(K_6^{(2)})) = [5] \setminus \{2\} \cup [6, 8] = \{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$ ,  $c(V(K_6^{(3)})) = [5] \setminus \{3\} \cup [6, 9] = \{1, 2, 4, 5, 6, 9\}$ ,  $c(V(K_6^{(4)})) = [5] \setminus \{4\} \cup [7, 8] = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ , e  $c(V(K_6^{(5)})) = [5] \setminus \{5\} \cup [7, 9] = \{1, 2, 3, 4, 7, 9\}$ . Observe que a coloração é própria, e temos  $c(N[v_1]) \neq c(N[v_2]) \neq c(N[v_3]) \neq c(N[v_4]) \neq c(N[v_5])$ , o que implica que  $c$  é uma lid-coloração. Portanto,  $\chi_{\text{lid}}(K_5 \odot K_6) = 6 + 3 = 9$ .



**Figura 5.22:** Grafo  $K_5 \odot K_6$ ,  $\chi_{lid}(K_5 \odot K_6) = n + 3 = 9$ .

Encerramos apresentando o limite superior para  $\chi_{lid}(K_m \odot K_n)$ , quando  $m \geq 12$ .

**Corolário 5.34** [29] *Seja  $G = K_m \odot K_n$  com  $m \geq 12$ . Então,  $\chi_{lid}(G) \leq \max\{2m - 1, n + 3\}$ .*

## 5.9 Resumo dos resultados do capítulo

Neste capítulo, reunimos os principais resultados sobre a lid-coloração em produtos corona de grafos. Estabelecemos resultados preliminares importantes, como a caracterização de quando o produto corona é livre de vértices gêmeos verdadeiros e limites para o número lid-cromático no caso em que um dos fatores é o grafo  $P_1$ . Também investigamos aspectos computacionais do problema, mostrando que, para todo inteiro fixo  $\ell \geq 5$ , o problema  $\ell$ -LID-COLORAÇÃO é NP-completo mesmo quando restrito à classe dos grafos produto corona. Em seguida, obtivemos limites inferiores e superiores para  $\chi_{lid}(G \odot H)$  em termos de parâmetros de  $G$  e  $H$ , bem como resultados exatos em subclasses específicas, como produtos corona de grafos bipartidos, caminhos, ciclos e grafos completos. Em particular, determinamos o número lid-cromático em vários casos das famílias  $G \odot H$ , com  $G, H \in \{P_n, C_n\}$ , e apresentamos valores exatos e limites para

$\chi_{lid}(K_m \odot K_n)$ . A Tabela 5.1 sintetiza os principais resultados desenvolvidos ao longo deste capítulo.

**Tabela 5.1:** Resultados conhecidos para a lid-coloração de produtos corona.

Classe	Condição	$\chi_{lid}(P)$
<b>Resultados gerais</b>		
$P = P_1 \odot H$	$H$ conexo	$\geq \chi_{lid}(H) + 1$
$P = P_1 \odot H$	$H$ conexo	$\leq \chi_{lid}(H) + 2$
$P = G \odot H$	$m \geq 2, n \geq 1$ e $G$ conexo	$\geq \chi_{lid}(H) + 2$
$P = G \odot H$	$m \geq 2, n \geq 3$ e $H$ livre de gêmeos verdadeiros	$\geq 6$
$P = G \odot H$	$m \geq 3, G$ e $H$ conexos	$\leq \chi(G) + m \cdot \chi_{lid}(H) - 1$
$P = G \odot H$	$m \geq 3, G$ e $H$ conexos, e $G$ livre de gêmeos verdadeiros	$\leq \chi_{lid}(G) + \chi_{lid}(H)$
$P = G \odot H$	$m \geq 2, G$ conexo e $H$ possui uma componente $K_n$	$\geq n + 3$
$P = G \odot K_n$	$m \geq 2, n \geq 1$ e $G$ conexo	$\geq n + 3$
$P = G \odot \overline{K_n}$	$m \geq 2, n \geq 1$ e $G$ conexo	$\geq 4$
<b>Casos para caminhos e ciclos</b>		
$P = G \odot P_1$	$m \geq 2, G \in \{P_m, C_m\}$ e $G \not\cong C_3$	$= 4$
$P = C_3 \odot P_1$		$= 5$
$P = G \odot P_2$	$m \geq 2$	$= 5$
$P = G \odot P_3$	$m \geq 2$	$= 6$
$P = G \odot C_3$	$m \geq 2$	$= 6$
$P = G \odot H$	$m \geq 2, n \geq 3$ e $G, H$ bipartidos	$= 6$
$P = G \odot H$	$m \geq 3, n \geq 4$ e $H \notin \{C_5, C_7\}$	$= 6$
$P = G \odot H$	$m \geq 3, n \geq 4$ e $H \in \{C_5, C_7\}$	$= 7$
<b>Casos para produtos do tipo <math>K_m \odot K_n</math></b>		
$P = K_m \odot K_1$	$m \geq 2$	$= 2m - 1$
$P = K_m \odot K_2$	$m \geq 5$	$= m + \left\lceil \frac{\sqrt{8m-7}-1}{2} \right\rceil$
$P = K_m \odot K_n$	$m, n \geq 2$	$\geq \max\{m + \lceil \log_2 m \rceil, n + 3\}$
$P = K_m \odot K_n$	$m \geq 5$ e $2 \leq n \leq \lceil \log_2 m \rceil - 1$	$\leq m + \left\lceil \frac{\sqrt{8m-7}-1}{2} \right\rceil$
$P = K_m \odot K_n$	$m \geq 5$ e $\lceil \log_2 m \rceil \leq n \leq 2^{\lceil \log_2 m \rceil} - \lceil \log_2 m \rceil - 1$	$= m + \lceil \log_2 m \rceil$
$P = K_m \odot K_n$	$m \geq 8$ e $m + \left\lceil \frac{\sqrt{8m-7}-1}{2} \right\rceil - 4 \leq n \leq 2m - 5$	$= n + 4$
$P = K_m \odot K_n$	$n \geq 2m - 4$	$= n + 3$

---

## Coloração de identificação local em produto Cartesiano

---

Neste capítulo, estudamos a lid-coloração no produto Cartesiano de dois grafos  $G$  e  $H$  de ordens  $m$  e  $n$ , respectivamente, denotado por  $G \square H$ . Iniciamos o capítulo apresentando, na Seção 6.1, alguns trabalhos relacionados ao produto Cartesiano existentes na literatura. Na Seção 6.2, um resultado importante obtido por Esperet *et al.* [16] para o produto Cartesiano no caso em que  $G$  e  $H$  são grafos bipartidos. Posteriormente, na mesma seção, apresentamos resultados obtidos por Bhyravarapu, Kumari e Reddy [8] para os casos em que  $G$  é um ciclo e  $H$  é um caminho, bem como para o caso em que tanto  $G$  quanto  $H$  são ciclos. Também na mesma seção, apresentamos um limite superior do produto Cartesiano de  $G$  por  $H$ , obtido por Bhyravarapu, Kumari e Reddy [8]. Apresentamos nossos resultados na Seção 6.3 para o produto Cartesiano de dois grafos, onde  $G$  é um grafo completo e  $H$  é um caminho,  $G$  é um grafo completo e  $H$  é um ciclo, e entre dois grafos completos de ordens  $m$  e  $n$ , respectivamente. Por fim, na Seção 6.4, reunimos os resultados obtidos neste capítulo.

### 6.1 Trabalhos relacionados ao produto Cartesiano

Um dos principais produtos entre grafos é o produto Cartesiano, diversos problemas podem ser modelados através desse produto. Uma descrição detalhada do produto Cartesiano entre grafos pode ser encontrada em Hammack, Imrich e Klavžar [20]. A teoria dos grafos, especialmente métricas baseadas em distância, tem sido amplamente utilizada em diversas aplicações físico-químicas, sobretudo na caracterização e modelagem de estruturas químicas. A aplicação da teoria dos grafos à química e à pesquisa de medicamentos decorre da estreita relação entre as propriedades e atividades das moléculas e suas conectividades fundamentais. Ao abordar a conectividade topológica de estruturas químicas e sua caracterização, vários estudos têm se dedicado a explorar as relações entre propriedades químicas e índices topológicos baseados em teoria dos grafos ao longo dos anos [2]. Os índices topológicos de algumas classes importantes de grafos moleculares

de interesse químico podem ser determinados especificando os componentes do produto Cartesiano. A importância dos índices baseados em distância e grau nas ciências químicas é significativa, e o estudo e cálculo desses índices topológicos representam uma área de pesquisa recente tanto na teoria dos grafos químicos quanto na química reticular. Hayat *et al.* [22] desenvolveram uma técnica computacional para calcular expressões analíticas exatas para uma série de índices topológicos baseados em distância de grafos químicos.

É conhecido na literatura que, dados dois grafos  $G$  e  $H$ ,  $\chi(G \square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$ . Além disso, há uma variedade de estudos que abordam a coloração do grafo produto Cartesiano. Lin e Chang [25] estudaram a coloração equilibrada no produto Cartesiano, fornecendo valores exatos ou limites superiores para o número cromático equilibrado do produto Cartesiano de  $G$  por  $H$  quando  $G$  e  $H$  são ciclos, caminhos, estrelas ou grafos bipartidos completos. Além disso, conjecturaram que o número cromático equilibrado do produto Cartesiano de  $G$  por  $H$  é limitado superiormente pelo produto dos números cromáticos de  $G$  e  $H$ . Yan, Wang e Zhang [42] provaram essa conjectura quando  $G$  ou  $H$  é um grafo multipartido completo balanceado.

Behzad [6] e Vizing [41] propuseram independentemente uma conjectura chamada conjectura da coloração total, que afirma que para qualquer grafo simples  $G$ , o número cromático total é ou  $\Delta(G) + 1$  ou  $\Delta(G) + 2$ . Seoud *et al.* [38] determinaram o número cromático total do produto Cartesiano de dois caminhos e o produto Cartesiano de um caminho por um ciclo. Kemnitz e Marangio [24] categorizaram o produto Cartesiano de grafos completos  $K_n \square K_m$  como tipo I se  $n \geq m \geq 4$ ,  $n \equiv 0 \pmod{4}$  ou  $n > m \geq 4$ ,  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , onde  $n$  e  $m$  são pares, e como tipo II se  $n$  é par e  $m$  é ímpar, e  $n > \frac{(m-1)^2}{2}$ . Eles também determinaram o número cromático total dos produtos Cartesianos  $C_n \square C_m$ ,  $K_n \square H$  e  $C_n \square H$ , onde  $H$  é um grafo bipartido. Baril, Kheddouci e Togni [4] provaram que  $K_m \square K_m$  é do tipo I se  $m$  e  $n$  são pares. Segundo os autores, ainda existem casos desses produtos de grafos completos que não são classificados como tipo I ou tipo II. Outros resultados relevantes na literatura sobre coloração total em diferentes classes de grafos podem ser encontrados em Geetha, Narayanan e Somasundaram [18].

## 6.2 Lid-coloração de $C_m \square P_n$ e $C_m \square C_n$

O estudo da lid-coloração do produto Cartesiano entre dois grafos  $G$  e  $H$  teve início com Esperet *et al.* [16] em 2012. Eles demonstraram no Teorema 3.6 que se  $G$  e  $H$  são grafos bipartidos sem vértices isolados, então  $G \square H$  pode ser 3-lid-colorido. Bhyravarapu, Kumari e Reddy [8] apresentaram no Teorema 6.1 o número lid-cromático do produto Cartesiano entre um ciclo e um caminho com  $m$  e  $n$  vértices, respectivamente.

**Teorema 6.1** [8] *Para todo par de números inteiros positivos  $m$  e  $n$ , onde  $m \geq 3$  e  $n \geq 2$ , temos:*

$$\chi_{lid}(C_m \square P_n) = \begin{cases} 5 & \text{se } m = 3 \text{ e } n \geq 2; \\ 4 & \text{se } m \text{ é ímpar, } m \geq 5 \text{ e } n \geq 2; \\ 3 & \text{se } m \text{ é par e } n \geq 2. \end{cases}$$

Bhyravarapu, Kumari e Reddy [8] também mostraram no Teorema 6.2 o número lid-cromático do produto Cartesiano de dois ciclos.

**Teorema 6.2** [8] *Sejam  $m$  e  $n$  dois inteiros positivos tais que  $3 \leq m \leq n$ . Então, temos:*

$$\chi_{lid}(C_m \square C_n) = \begin{cases} 5 & \text{se } m = 3 \text{ e } n \geq 3; \\ 3 & \text{se } m = 2p \text{ e } n = 2q \text{ para algum } p, q \in \mathbb{N}; \\ 4 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Bhyravarapu, Kumari e Reddy [8] também apresentaram um limite superior no Teorema 6.3 para o número lid-cromático do produto Cartesiano de dois grafos conexos.

**Teorema 6.3** [8] *Sejam  $G$  e  $H$  dois grafos conexos com pelo menos dois vértices, tais que  $\chi(G) = k_1$  e  $\chi(H) = k_2$ . Então,  $\chi_{lid}(G \square H) \leq k_1 k_2 - 1$ .*

Na demonstração do Teorema 6.3, os autores inicialmente estabeleceram que  $\chi_{lid}(G \square H) \leq \chi(G)\chi(H)$ , fornecendo uma lid-coloração com  $\chi(G)\chi(H)$  cores. Posteriormente, melhoraram esse limite, combinando duas cores distintas da coloração apresentada em uma única cor, alcançando assim o resultado desejado.

### 6.3 Lid-coloração de $K_m \square P_n$ , $K_m \square C_n$ e $K_m \square K_n$

Na presente seção, apresentamos resultados preliminares dos nossos estudos sobre a lid-coloração no produto Cartesiano entre dois grafos  $G$  e  $H$ , onde pelo menos um dos fatores não é bipartido. Investigamos o produto Cartesiano de  $G$  por  $H$  de ordens  $m$  e  $n$ , onde  $G$  é o grafo completo e  $H$  é um caminho, ciclo ou grafo completo.

Nas Figuras 6.1, 6.3(a) e 6.3(b), a coloração do grafo  $K_m \square H$  será representada por uma matriz, na qual cada linha corresponde à coloração dos vértices de uma cópia de  $K_m$ , e cada coluna corresponde à coloração dos vértices de uma cópia de  $H$ . No Teorema 6.4, apresentamos o número lid-cromático para o produto Cartesiano  $K_m \square P_n$ , que coincide com o limite do Teorema 6.3.



*Prova.* Uma lid-coloração  $c$  de  $K_m \square C_n$  é apresentada nas Figuras 6.3(a) e 6.3(b) para  $n$  par, e nas Figuras 6.3(c) e 6.3(d) para  $n$  ímpar, ambas com cardinalidade  $2m - 1$ . Observe que nas Figuras 6.3(a) e 6.3(c), vértices adjacentes possuem cores distintas, ou seja,  $c$  é uma coloração própria. Além do mais, nas Figuras 6.3(b) e 6.3(d), todos os pares de vértices adjacentes possuem conjuntos de cores em suas vizinhanças fechadas distintos, o que implica em  $c$  ser uma lid-coloração. Portanto, concluímos que  $\chi_{lid}(K_m \square C_n) \leq 2m - 1$ .

Para o limite inferior, suponhamos que existe uma coloração  $c$  de  $K_m \square C_n$  com menos de  $\lceil \frac{5m-2}{3} \rceil$  cores. Seja  $H$  uma clique em  $K_m \square C_n$  com  $V(H) = \{v_1, \dots, v_m\}$ . Sem perda de generalidade, assumimos que  $c(v_i) = i$  para todo  $i \in [m]$ . Portanto, restam no máximo  $x = \lceil \frac{2m-2}{3} \rceil - 1$  cores para serem utilizadas nos vértices restantes do grafo. Seja  $X = \{m+1, \dots, m+x\}$ , o conjunto destas cores.

Cada vértice de  $H$  tem dois vizinhos fora de  $H$ , os quais não são adjacentes entre si. Para colorir esses dois vértices, podemos utilizar no máximo duas cores de  $X$ . Além disso, cada cor de  $X$  pode ser utilizada no máximo duas vezes, pois os vizinhos de  $H$  induzem duas cliques disjuntas, cada uma com  $m$  vértices. Para identificar os vértices de  $H$ , são necessários  $m$  subconjuntos distintos de  $X$  com cardinalidade no máximo 2. Além do conjunto vazio e dos  $x$  subconjuntos unitários, podemos formar  $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$  subconjuntos com dois elementos de  $X$ , de modo que cada cor de  $X$  seja utilizada apenas uma vez nesses subconjuntos. Assim, o número de subconjuntos disponíveis para colorir os vértices vizinhos de  $H$  é dado por

$$1 + x + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor. \quad (6-1)$$

onde  $x = \lceil \frac{2m-2}{3} \rceil - 1$ .

Para analisar o valor de  $x$ , é necessário considerar três casos distintos: quando  $m \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $m \equiv 1 \pmod{3}$  e  $m \equiv 2 \pmod{3}$ .

No caso em que  $m \equiv 0 \pmod{3}$ , observamos que  $x = \frac{2m}{3} - 1$ . Substituindo o valor de  $x$  na Expressão 6-1 e considerando o caso em que  $m \equiv 0 \pmod{3}$ , obtemos:

$$1 + x + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 1 + \frac{2m}{3} - 1 + \left\lfloor \frac{\frac{2m}{3} - 1}{2} \right\rfloor \quad (6-2)$$

$$= \frac{2m}{3} + \left\lfloor \frac{2m-3}{6} \right\rfloor \quad (6-3)$$

$$= \frac{2m}{3} + \left\lfloor \frac{m}{3} - \frac{1}{2} \right\rfloor \quad (6-4)$$

Sabe-se que  $m = 3a$ , onde  $a$  é um número inteiro positivo. Substituindo na Expressão 6-4, obtemos:

$$= 2a + \left\lfloor a - \frac{1}{2} \right\rfloor \quad (6-5)$$

Observa-se que, como  $a$  é um inteiro positivo,  $\lfloor a - \frac{1}{2} \rfloor = a - 1$ . Substituindo na Expressão 6-5, temos que:

$$= 3a - 1 \quad (6-6)$$

$$= m - 1. \quad (6-7)$$

No caso em que  $m \equiv 1 \pmod{3}$ , temos  $x = \lfloor \frac{2m}{3} \rfloor - 1$ . Substituindo o valor de  $x$  na Expressão 6-1 temos:

$$1 + x + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{2m}{3} \right\rfloor - 1 + \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{2m}{3} \right\rfloor - 1}{2} \right\rfloor \quad (6-8)$$

Neste caso  $m = 3a + 1$ , com  $a$  sendo um número inteiro positivo, substituindo na Expressão 6-8, temos que:

$$= \left\lfloor 2a + \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\left\lfloor 2a + \frac{2}{3} \right\rfloor - 1}{2} \right\rfloor \quad (6-9)$$

Observe que  $\lfloor 2a + \frac{2}{3} \rfloor = 2a$ . Substituindo na Expressão 6-9, temos que:

$$= 2a + \left\lfloor a - \frac{1}{2} \right\rfloor \quad (6-10)$$

$$= 2a + a - 1 \quad (6-11)$$

$$= m - 2. \quad (6-12)$$

Finalmente no caso em que  $m \equiv 2 \pmod{3}$ , temos  $x = \left\lfloor \frac{2m}{3} \right\rfloor - 1$ . Substituindo o valor de  $x$  na Expressão 6-1 temos:

$$1 + x + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{2m}{3} \right\rfloor - 1 + \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{2m}{3} \right\rfloor - 1}{2} \right\rfloor \quad (6-13)$$

$$= \left\lfloor 2a + \frac{4}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\left\lfloor 2a + \frac{4}{3} \right\rfloor - 1}{2} \right\rfloor \quad (6-14)$$

Note que  $\left\lfloor 2a + \frac{4}{3} \right\rfloor = 2a + 1$ . Substituindo na Expressão 6-14, temos que:

$$= 3a + 1 \quad (6-15)$$

$$= m - 1. \quad (6-16)$$

Observe que, nos casos em que  $m \equiv 0 \pmod{3}$  e  $m \equiv 2 \pmod{3}$ , a Expressão 6-1 resulta em  $m - 1$ , enquanto, no caso em que  $m \equiv 1 \pmod{3}$ , ela resulta em  $m - 2$ . Em particular, em todos os casos, a quantidade de subconjuntos disponíveis é estritamente menor que  $m$ . Portanto, existem pelo menos dois vértices em  $H$ , digamos  $v_i$  e  $v_z$ , tais que  $c(N[v_i]) = c(N[v_z])$ , o que contradiz o fato de que  $c$  é uma lid-coloração de  $K_m \square C_n$ . Assim, concluímos que  $\chi_{lid}(K_m \square C_n) \geq \left\lceil \frac{5m-2}{3} \right\rceil$ .  $\square$

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & m \\ m & m+1 & \cdots & 2m-1 \\ 1 & 2 & \cdots & m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m+1 & \cdots & 2m-1 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{cccc} [m] & [m] \cup \{m+1\} & \cdots & [m] \cup \{2m-1\} \\ [m, 2m-1] \cup \{1\} & [m, 2m-1] \cup \{2\} & \cdots & [m, 2m-1] \\ [m] & [m] \cup \{m+1\} & \cdots & [m] \cup \{2m-1\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [m, 2m-1] \cup \{1\} & [m, 2m-1] \cup \{2\} & \cdots & [m, 2m-1] \end{array} \right)$$

(a)  $c(K_m \square C_n)$ , com  $n$  par.(b)  $c(N[v])$ , com  $v \in K_m \square C_n$ .

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & m \\ m & m+1 & \cdots & 2m-1 \\ 1 & 2 & \cdots & m \\ m & m+1 & \cdots & 2m-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & \cdots & m+1 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{cccc} [m] & [m+1] & \cdots & [m+1] \cup \{2m-1\} \\ [m, 2m-1] \cup \{1\} & [m, 2m-1] \cup \{2\} & \cdots & [m, 2m-1] \\ [m] & [m+1] & \cdots & [m+1] \cup \{2m-1\} \\ [m, 2m-1] \cup \{1\} & [m, 2m-1] \cup \{2\} & \cdots & [m, 2m-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [m+1] & [2, m+1] & \cdots & [2, m+1] \cup \{2m-1\} \end{array} \right)$$

(c)  $c(K_m \square C_n)$ , com  $n$  ímpar.(d)  $c(N[v])$ , com  $v \in K_m \square C_n$ .**Figura 6.3:** Lid-coloração de  $K_m \square C_n$ , com  $n$  par e  $n$  ímpar.

Nas Figuras 6.4 e 6.5, apresentamos exemplos que satisfazem os limites inferior e superior, respectivamente, estabelecidos pelo Teorema 6.5.

$$\left( \begin{array}{ccccc} 4 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccccc} 134678 & 1245678 & 1234678 & 14678 & 145678 \\ 12345 & 123456 & 1234567 & 1234578 & 123458 \\ 134678 & 1245678 & 1234678 & 14678 & 145678 \\ 12345 & 123456 & 1234567 & 1234578 & 123458 \end{array} \right)$$

(a)  $c(K_5 \square C_4)$ .(b)  $c(N[v])$ , com  $v \in K_5 \square C_4$ .**Figura 6.4:** Lid-coloração para  $K_5 \square C_4$  com  $\lceil \frac{5m-2}{3} \rceil = 8$  cores.

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccccc} 12345 & 123456 & 123457 & 123458 & 123459 \\ 156789 & 256789 & 356789 & 456789 & 56789 \\ 12345 & 123456 & 123457 & 123458 & 123459 \\ 156789 & 256789 & 356789 & 456789 & 56789 \\ 12345 & 123456 & 123457 & 123458 & 123459 \\ 156789 & 256789 & 356789 & 456789 & 56789 \end{array} \right)$$

(a)  $c(K_5 \square C_6)$ .(b)  $c(N[v])$ , com  $v \in K_5 \square C_6$ .**Figura 6.5:** Lid-coloração para  $K_5 \square C_6$  com  $2m-1 = 9$  cores.

Finalizamos a seção apresentando, no Teorema 6.6, limites inferior e superior do produto Cartesiano  $K_m \square K_n$ .

**Teorema 6.6** [30] Para  $m \geq n \geq 2$ , temos  $m + \log_2 m \leq \chi_{lid}(K_m \square K_n) \leq 2m - 1$ .

*Prova.* Uma lid-coloração  $c$  com  $2m - 1$  cores de  $K_m \square K_n$  é apresentada na Figura 6.6(a). Perceba que na Figura 6.6(a), vértices adjacentes possuem cores diferentes, ou seja,  $c$  é uma coloração própria. Já na Figura 6.6(b), pares de vértices adjacentes possuem conjuntos de cores em suas vizinhanças fechadas distintos, o que implica em  $c$  ser uma lid-coloração de  $K_m \square K_n$ . Portanto,  $\chi_{lid}(K_m \square K_n) \leq 2m - 1$ . O grafo  $K_m \square K_n$  é livre de gêmeos e contém uma clique de tamanho  $m$ . Pelo Corolário 4.6,  $\chi_{lid}(K_m \square K_n) \geq m + \log_2 m$ .  $\square$

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & 3 & \cdots & m-1 & m \\
 2 & 3 & 4 & \cdots & m & m+1 \\
 3 & 4 & 5 & \cdots & m+1 & m+2 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 n-1 & n & m+1 & \cdots & 2m-3 & 2m-2 \\
 n & m+1 & m+2 & \cdots & 2m-2 & 2m-1
 \end{array} \right| & & \left| \begin{array}{cccccc}
 [m] & [m+1] & [m+2] & \cdots & [2m-2] & [2m-1] \\
 [m+1] & [2, m+1] & [2, m+2] & \cdots & [2, 2m-2] & [2, 2m-1] \\
 [m+2] & [2, m+2] & [3, m+2] & \cdots & [3, 2m-2] & [3, 2m-1] \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 [2m-2] & [2, 2m-2] & [3, 2m-2] & \cdots & [n-1, 2m-2] & [n-1, 2m-1] \\
 [2m-1] & [2, 2m-1] & [3, 2m-1] & \cdots & [m-1, 2m-2] & [m, 2m-1]
 \end{array} \right| \\
 \text{(a) } c(K_m \square K_n). & & \text{(b) } c(N[v]), \text{ com } v \in K_m \square K_n.
 \end{array}$$

**Figura 6.6:** Lid-coloração de  $K_m \square K_n$ .

Para mostrar que o limite inferior do Teorema 6.6 é justo, apresentamos na Figura 6.7 uma lid-coloração para o grafo  $K_4 \square K_4$  com  $m + \log_2 m = 6$  cores. Portanto, temos uma lid-coloração.

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc}
 1 & 2 & 3 & 4 \\
 2 & 3 & 4 & 5 \\
 3 & 4 & 1 & 6 \\
 4 & 5 & 6 & 3
 \end{array} \right| & & \left| \begin{array}{cccc}
 1234 & 12345 & 12346 & 123456 \\
 12345 & 2345 & 123456 & 23456 \\
 12346 & 123456 & 1346 & 13456 \\
 123456 & 23456 & 13456 & 3456
 \end{array} \right| \\
 \text{(a) } c(K_4 \square K_4). & & \text{(b) } c(N[v]), \text{ com } v \in K_4 \square K_4.
 \end{array}$$

**Figura 6.7:** Lid-coloração para  $K_4 \square K_4$  com  $m + \log_2 m = 6$  cores.

Observe que, pelo Teorema 6.4, tem-se  $\chi_{lid}(K_m \square P_n) = 2m - 1$  para todo  $n \geq 2$ . Em particular, segue que  $\chi_{lid}(K_m \square K_2) = 2m - 1$ , atingindo o limite superior do Teorema 6.6.

## 6.4 Resumo dos resultados do capítulo

Neste capítulo, apresentamos os resultados obtidos para o produto Cartesiano de  $G$  por  $H$ , onde pelo menos um dos fatores não é bipartido. Demonstramos no Teorema 6.4 que  $\chi_{lid}(K_m \square K_n) = 2m - 1$ , com  $m \geq 3$  e  $n \geq 2$ . Além disso, no Teorema 6.5,

apresentamos limites inferior e superior para o produto  $K_m \square C_n$ , com  $m, n \geq 4$ . Finalmente, no Teorema 6.6, fornecemos limites inferior e superior para o produto  $K_m \square K_n$ , com  $m, n \geq 2$ . A Tabela 6.1 sintetiza os principais resultados apresentados neste capítulo.

**Tabela 6.1:** Resultados em produto Cartesiano

Classe	Condição	$\chi_{lid}(G)$
$G = K_m \square P_n$	$m \geq 3$ e $n \geq 2$	$= 2m - 1$
$G = K_m \square C_n$	$m, n \geq 4$	$\geq \left\lceil \frac{5m - 2}{3} \right\rceil$
$G = K_m \square C_n$	$m, n \geq 4$	$\leq 2m - 1$
$G = K_m \square K_n$	$m, n \geq 2$	$\geq m + \lceil \log_2 m \rceil$
$G = K_m \square K_n$	$m, n \geq 2$	$\leq 2m - 1$

---

## Considerações finais

---

Neste trabalho, investigamos o problema da coloração de identificação local (lid-coloração) em diversas classes de grafos. Inicialmente, apresentamos os conceitos fundamentais e resultados teóricos relacionados à lid-coloração em grafos caminho, ciclos, grafos bipartidos e potência de caminho. Ao longo do trabalho, também investigamos o comportamento da lid-coloração em classes de grafos ainda não caracterizadas na literatura, obtendo novos resultados para o número lid-cromático, tais como limites e valores exatos. Vale ressaltar que o estudo da lid-coloração se mostra desafiador mesmo em classes simples de grafos. Além disso, essa coloração não é hereditária com relação a subgrafos, isto é, se  $H$  é um subgrafo de  $G$ , pode ocorrer que  $\chi_{lid}(H) > \chi_{lid}(G)$ .

No Capítulo 3, apresentamos nossos resultados sobre a lid-coloração em potência de caminho. No Capítulo 4, mostramos que o problema de decidir se um grafo *split* admite uma  $p$ -lid-coloração é NP-completo. Também, determinamos o número lid-cromático em casos específicos dessa classe, incluindo grafos *split* completos e grafos *split* obtidos pelo produto corona  $K_m \odot \overline{K_n}$ . Por fim, investigamos a lid-coloração em grafos *split*-comparabilidade.

No Capítulo 5, mostramos que o problema de decidir se um grafo obtido pelo produto corona admite uma  $\ell$ -lid-coloração é NP-completo, para  $\ell \geq 5$ . Além disso, determinamos o número lid-cromático do produto corona nos casos em que os fatores são caminhos e ciclos. Também estabelecemos limites superiores justos para o produto  $G \odot H$ , bem como para o caso especial em que  $G$  é livre de vértices gêmeos verdadeiros. Por fim, apresentamos resultados para o produto corona quando os fatores são grafos completos. Nesses casos, determinamos o número lid-cromático sempre que possível e, nas situações restantes, estabelecemos limites inferiores e superiores para esse parâmetro.

Finalmente, no Capítulo 6, reunimos resultados existentes sobre a lid-coloração no produto Cartesiano de grafos e determinamos o número lid-cromático do produto Cartesiano entre um grafo completo e um grafo caminho. No mesmo contexto, estabelecemos limites inferiores e superiores para o produto Cartesiano entre um grafo completo e um grafo ciclo, bem como para o produto Cartesiano entre dois grafos completos.

Para trabalhos futuros, sugerimos investigar a lid-coloração em grafos *split*-

comparabilidade no caso em que  $S_t \neq \emptyset$ . No contexto do produto corona, os resultados obtidos ao longo deste trabalho sugerem uma estreita relação entre o problema de decidir se  $\chi_{lid}(G \odot \overline{K_n}) = 4$  e o problema da 3-coloração. Isso motiva a conjectura de que, se  $G$  é um grafo não bipartido e livre de triângulos e satisfaz  $\chi_{lid}(G \odot \overline{K_n}) = 4$ , então  $\chi(G) \leq 3$ . Nesse sentido, também permanece em aberto determinar se o problema de decidir se um grafo obtido pelo produto corona admite uma 4-lid-coloração é NP-completo.

Outra direção de pesquisa consiste em estudar a existência de fórmulas fechadas para o número lid-cromático do produto Cartesiano nos casos em que os fatores são um grafo completo e um ciclo, bem como no caso em que os fatores são dois grafos completos. Como continuação das investigações sobre produtos de grafos, pretendemos analisar a lid-coloração do produto forte quando um dos fatores é um grafo completo. Essa proposta amplia os resultados obtidos por Pavithra e Reji [35], que estudaram a lid-coloração do produto forte de grafos bipartidos, bem como de produtos cujos fatores são caminhos e ciclos.

Além disso, uma classe que se mostra promissora e desafiadora para o estudo da lid-coloração é a dos grafos de **Sierpinski generalizados**, definidos recursivamente a partir de um grafo base  $G$ . Para cada inteiro  $n \geq 1$ , o grafo  $S(n, G)$  é obtido tomando  $|V(G)|$  cópias de  $S(n-1, G)$  e adicionando arestas entre vértices correspondentes de cópias distintas de acordo com as arestas de  $G$ . Em particular,  $S(1, G)$  é isomorfo a  $G$ . Os grafos de Sierpiński generalizados não constituem um produto clássico. Ainda assim, podem ser interpretados como uma construção recursiva análoga a um produto, baseada em cópias interligadas de um mesmo grafo.

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] APPEL, K.; HAKEN, W. **The solution of the four-color-map problem.** *Scientific American*, 237(4):108–121, 1977.
- [2] AROCKIARAJ, M.; KAVITHAH, S.; BALASUBRAMANIAN, K. **Vertex-cut methods for distance-based topological indices and its application to inorganic networks.** *Journal of Mathematical Chemistry*, 54:1728–1747, 2016.
- [3] ARUMUGAM, S.; LEE, Y.-C.; PREMALATHA, K.; WANG, T.-M. **On local antimagic vertex coloring for corona products of graphs.** *arXiv preprint arXiv:1808.04956*, 2018.
- [4] BARIL, J. L.; KHEDDOUCI, H.; TOGNI, O. **Vertex distinguishing edge-and total-colorings of cartesian and other product graphs.** *Ars. Comb.*, 107:109–127, 2012.
- [5] BASKORO, E. T.; PURWASIH. **The locating-chromatic number for corona product of graphs.** *Southeast Asian Journal of Sciences*, 1(1):126–136, 2012.
- [6] BEHZAD, M. **The total chromatic number.** In: *Proceedings of Conference of Combinatorial Mathematics and Its Applications*, p. 1–8, 1969.
- [7] BHYRAVARAPU, S.; KUMARI, S.; REDDY, I. V. **On locally identifying coloring of cartesian product and tensor product of graphs.** *arXiv preprint arXiv:2305.17536*, 2023.
- [8] BHYRAVARAPU, S.; KUMARI, S.; REDDY, I. V. **On locally identifying coloring of graphs.** In: *Conference on Algorithms and Discrete Applied Mathematics*, p. 147–158. Springer, 2023.
- [9] BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. **Graph theory with applications**, volume 290. Macmillan London, 1976.
- [10] BURSTEIN, M. I. **An upper bound for the chromatic number of hypergraphs.** *Sakharth. SSR Mecn. Akad. Moambe*, 75:37–40, 1974.

- [11] CHARTRAND, G.; ZHANG, P. **A first course in graph theory**. Courier Corporation, 2013.
- [12] DA COSTA PEREIRA, P. R. **CÓDIGOS PARA SUBFAMÍLIAS DOS GRAFOS COR-DAIS**. PhD thesis, UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, 2007.
- [13] DE, N. **Application of corona product of graphs in computing topological indices of some special chemical graphs**. In: *Handbook of Research on Applied Cybernetics and Systems Science*, p. 82–101. IGI Global, 2017.
- [14] DEO, N. **Graph theory with applications to engineering and computer science**. Courier Dover Publications, 2017.
- [15] DIESTEL, R. **Graph theory**. Springer, 2000.
- [16] ESPERET, L.; GRAVIER, S.; MONTASSIER, M.; OCHEM, P.; PARREAU, A. **Locally identifying coloring of graphs**. *Electron. J. Comb.*, 19, 2012.
- [17] FOUCAUD, F.; HONKALA, I.; LAIHONEN, T.; PARREAU, A.; PERARNAU, G. **Locally identifying colourings for graphs with given maximum degree**. *Discrete Mathematics*, 312(10):1832–1837, 2012.
- [18] GEETHA, J.; NARAYANAN, N.; SOMASUNDARAM, K. **Total colorings-a survey**. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 20(3):339–351, 2023.
- [19] GONÇALVES, D.; PARREAU, A.; PINLOU, A. **Locally identifying coloring in bounded expansion classes of graphs**. *Discrete Applied Mathematics*, 161(18):2946–2951, 2013.
- [20] HAMMACK, R.; IMRICH, W.; KLAVŽAR, S. **Handbook of product graphs**. CRC press, 2011.
- [21] HARARY, F.; FRUCHT, R. **On the corona of two graphs**. *Aequationes mathematicae*, 5:322–325, 1970.
- [22] HAYAT, S.; AHMAD, S.; UMAIR, H. M.; WANG, S. **Distance property of chemical graphs**. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 47(5):1071–1093, 2018.
- [23] KARP, R. M. **Reducibility among combinatorial problems**. In: *Complexity of computer computations (Proc. Sympos., IBM Thomas J. Watson Res. Center, Yorktown Heights, N.Y., 1972)*, p. 85–103. Plenum, New York, 1972.
- [24] KEMNITZ, A.; MARANGIO, M. **Total colorings of cartesian products of graphs**. *Congressus Numerantium*, 165:99–110, 2003.

- [25] LIN, W.-H.; CHANG, G. J. **Equitable colorings of cartesian products of graphs.** *Discrete applied mathematics*, 160(3):239–247, 2012.
- [26] MARTINS, N.; SAMPAIO, R. **Locally identifying coloring of graphs with few p4s.** *Theoretical Computer Science*, 707:69–76, 2018.
- [27] MOHAN, S.; GEETHA, J.; SOMASUNDARAM, K. **Total coloring of corona product of two graphs.** *Australas. J Comb.*, 68:15–22, 2017.
- [28] OLIVEIRA, M. R.; CAPPELLE, R. M.; COELHO, H. **Locally identifying coloring in some chordal graphs.** *Matemática Contemporânea*, 22:152–160, 2023.
- [29] OLIVEIRA, R. M.; CAPPELLE, M. R.; COELHO, H.; NASCIMENTO, J. R. **Locally identifying coloring of corona products: complexity and structural results.** In: *Anais do 56o. SBPO Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, volume 56, p. 1–12, 2024.
- [30] OLIVEIRA, R. M.; CAPPELLE, M. R.; COELHO, H. **Coloração de identificação local em produto cartesiano.** In: *Anais do VIII Encontro de Teoria da Computação*, p. 35–39. SBC, 2023.
- [31] OLIVEIRA, R. M.; CAPPELLE, M. R.; COELHO, H. **Coloração de identificação local no produto corona de ciclos e caminhos.** In: *Anais do IX Encontro de Teoria da Computação*, p. 119–123. SBC, 2024.
- [32] OLIVEIRA, R. M.; CAPPELLE, M. R.; COELHO, H.; NASCIMENTO, J. R. **On the complexity of lid-coloring in split graphs.** Submetido para publicação, 2025.
- [33] ORTIZ, C.; VILLANUEVA, M. **Threshold dimension of split-permutation graphs.** *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 75:117, 2010.
- [34] PAVITHRA, R.; REJI, T. **Locally identifying coloring of corona product of graphs.** *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, p. 2450032, 2024.
- [35] PAVITHRA, R.; REJI, T. **Locally identifying coloring of strong product of graphs.** *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 18(3):2550052, 2026.
- [36] PENAUD, J. G. **Une propriete de bicoloration des hypergraphes planaires.** *Cahiers Centre Études Rech.*, 17:345–349, 1975.
- [37] ROBERTSON, N.; SANDERS, D.; SEYMOUR, P.; THOMAS, R. **The four-colour theorem.** *journal of combinatorial theory, Series B*, 70(1):2–44, 1997.

- [38] SEOUD, M. A.; EL MAQSoud, A. A.; WILSON, R. J.; WILLIAMS, J. **Total colourings of cartesian products.** *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 28(4):481–487, 1997.
- [39] THOMASSEN, C. **The even cycle problem for directed graphs.** *Journal of the American Mathematical Society*, 5(2):217–229, 1992.
- [40] VERMA, S.; PANDA, B. **Adjacent vertex distinguishing total coloring of the corona product of graphs.** *Discussiones Mathematicae: Graph Theory*, 44(1), 2024.
- [41] VIZING, V. G. **On an estimate of the chromatic class of a graph.** *Diskret Analiz*, 3:25–30, 1964.
- [42] YAN, Z.; WANG, W.; ZHANG, X. **Equitable colorings of cartesian products with balanced complete multipartite graphs.** *Discrete Applied Mathematics*, 180:200–203, 2015.
- [43] YERO, I. G.; KUZIAK, D.; RONDÓN AGUILAR, A. **Coloring, location and domination of corona graphs.** *Aequationes mathematicae*, 86:1–21, 2013.