

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOTECNIA,
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

**VIBRAÇÕES NÃO LINEARES EM
TUBULAÇÕES COM FLUIDO EM
ESCOAMENTO**

JOAQUIM ORLANDO PARADA

D0075E13
GOIÂNIA
2013

JOAQUIM ORLANDO PARADA

**VIBRAÇÕES NÃO LINEARES EM
TUBULAÇÕES COM FLUIDO EM
ESCOAMENTO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal de Goiás para obtenção do título de mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Mecânica das Estruturas.

Orientador: Dr. Zenón José Guzmán Núñez del Prado.

D0075E13
GOIÂNIA
2013

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
GPT/BC/UFG**

Orlando Parada, Joaquim

Vibrações não Lineares em Tubulações com Fluido em Escoamento
[manuscrito] / Joaquim Orlando Parada. - 2013.

146 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Zenón José Guzmán Núñez Del Prado.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Escola
de Engenharia Elétrica (EEEC), Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil - Geotecnia, Estruturas e Construção Civil, Goiânia,
2013.

Bibliografia.

Inclui siglas, mapas, fotografias, abreviaturas, símbolos, gráfico,
tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Sistema não linear. 2. Galerkin. 3. Curvas de Escape. 4.
Diagrama de Bifurcação. I. José Guzmán Núñez Del Prado, Zenón,
orient. II. Título.

CDU 624.01

Autorizamos a reprodução total ou parcial deste trabalho, para fins de pesquisa.

Goiânia, 13 de junho de 2016.

Assinatura: *Joaquim Orlando Parada*

e-mail: jparada.engenharia@gmail.com

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):		Joaquim Orlando Parada	
E-mail:		jparada.engenharia@gmail.com	
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não			
Vínculo empregatício do autor			
Agência de fomento:		Coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior	Sigla: CAPES
País:	Brasil	UF:	Go CNPJ:
Título: Vibrações não lineares em tubulações com fluido em escoamento.			
Palavras-chave: Sistema não linear, Galerkin, Curvas de Escape.			
Título em outra língua: Nonlinear movement in fluid flow pipes			
Palavras-chave em outra língua: Nonlinear System, Galerkin, Stability boudaries.			
Área de concentração:		Mecânica das Estruturas	
Data defesa: (dd/mm/aaaa)		21/06/2013	
Programa de Pós-Graduação:		PPG-GECON	
Orientador (a):		Dr. Zenón José Guzmán Núñez Del Prado.	
E-mail:		zenon@eec.ufg.br	
Co-orientador (a):*			
E-mail:			

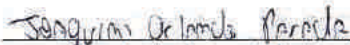
*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.


 Assinatura do (a) autor (a)

Data: 13 / 06 / 2016

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.



Universidade Federal de Goiás
Escola de Engenharia Civil
Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil

FOLHA DE APROVAÇÃO

Vibrações Não Lineares em Tubulações com Fluido em Escoamento

Joaquim Orlando Parada

Dissertação defendida e aprovada pela banca constituída pelos senhores:

Prof. Dr. Zenón José Guzmán N. del Prado (GECON/UFG)

Prof. Dr. Frederico Martins Alves da Silva (GECON/UFG)

Prof. Dr. José Luís Vital de Brito (UnB)

Goiânia, 21 de junho de 2013

DEDICATÓRIA

À Maria Regina Rocha, minha mãe. Sua bondade, simplicidade e seu belo sorriso sempre me motivaram. Guarda mais esta na sua estante, porque é pra você.

Ao ilustre engenheiro Joaquim Orlando Parada Torres, meu pai. Um exemplo de cidadão, profissional e um poço de sabedoria, obrigado por trilhar esta trajetória junto comigo.

À minha Sereníssima Giuliana. Tínhamos um plano e ninguém mudou de ideia. Obrigado por acreditar.

AGRADECIMENTOS

Ao professor e orientador deste trabalho, professor Zenón del Prado, com o qual tive o enorme prazer de conviver durante estes dois anos. O Professor Zenón é um exemplo de profissionalismo e competência no que diz respeito a sua profissão, não mede esforços no sentido de auxiliar seus orientandos na busca pelo conhecimento. Meus sinceros agradecimentos pela paciência, amizade e dedicação a este trabalho.

Aos professores do PPG-GECON: professor Frederico Silva, professor Daniel Araújo, professora Sylvia Almeida e professor Ademir Prado, meus sinceros agradecimentos pela oportunidade do conhecimento adquirido.

Aos amigos da “salinha”: Melina Rocha, Antônio Gama, João Rassi, Jorge García, Ludmila Cabrine, Mauro Sousa, Glacielle Medeiros, Marcel Willian, Vitor Escher, Wanderlei Malaquias, Mônica Dias. Embora, a grande maioria não seja da área de estruturas, dividimos muitas horas de alívio, angústia, lazer e principalmente de estudos. Foi e sempre será um enorme prazer encontrá-los.

Aos meus queridos amigos do “Lajeado do Edimilson”: Nicolau, Miguel, André, Almeida, Edimilson, Helena, Gabriela, Ricardo, Juliana e Heloísa. Estive muitas vezes ausente, mas nunca distante, a cada sorriso com vocês ou a cada saudade uma nova página surgia neste trabalho, obrigado pela motivação.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

À Deus, por guiar minhas escolhas alinhando o caminho da dedicação aos resultados.

RESUMO

Nesta dissertação analisa-se a instabilidade linear e não linear de tubos com fluido interno em escoamento estático e pulsante. A equação de movimento dinâmico foi deduzida para tubos em balanço e biengastados. Para tanto, utilizou-se a teoria de vigas de Euler Bernoulli e o princípio variacional de Hamilton, resultado em uma equação diferencial parcial de segunda ordem no tempo. Tal equação foi discretizada, pelo método de Galerkin, em quatro equações diferenciais ordinárias, uma para cada grau de liberdade, em seguida transformadas em um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem. Tais equações foram integradas pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem e, posteriormente, foram obtidos alguns resultados numéricos como: diagrama de Argand, curvas de escape, diagrama de bifurcação, resposta no tempo, plano fase e, seção de Poincaré, através de algoritmos implementados computacionalmente na linguagem C++. Tais resultados revelaram a importância dos termos não lineares na estabilidade do sistema, especialmente na análise pós-crítica, revelaram também a existência de movimentos quase periódicos, para o sistema submetido a um fluxo estático e, caóticos para fluxo pulsante.

Palavras-chave: Sistema não linear. Galerkin. Curvas de escape. Diagrama de Bifurcação. Movimentos quase periódicos. Movimentos caóticos.

ABSTRACT

In this work, the linear and nonlinear instability of pipes conveying static and pulsating fluid flow is analyzed. The dynamic equation of motion was derived for cantilevered and clamped-clamped pipes. For this purpose, the Euler Bernoulli beam theory and Hamilton's principle were applied, resulting in a partial differential equation of second order in time. Thus, a model with four degrees of freedom, which satisfies the boundary condition, is used and, the Galerkin method is applied to derive the set of coupled non linear ordinary equations of motion which are, in turn, solved by the fourth order Runge-Kutta method, and then some numerical results were obtained as Argand diagram, stability boundaries, time response, phase plane and, Poincaré section, through computational algorithms modeled in C++. These results revealed the importance of the nonlinear terms in the stability of the system, especially in the post-critical analysis, also revealed the existence of quasi-periodic motions, for the system subjected to a static flow and, chaotic motions for pulsating fluid flow.

keywords: Nonlinear system. Galerkin. Stability boundaries. Bifurcation diagram. Quasi-periodic motions. Chaotic motions.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	19
INTRODUÇÃO	19
1.1 OBJETIVOS	21
1.2 ESCOPO DA DISSERTAÇÃO	21
1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	22
CAPÍTULO 2	35
FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	35
2.1 DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO NÃO LINEAR DE MOVIMENTO	36
2.1.1 Tubo em balanço	36
2.1.1.1 EXPRESSÃO PARA CURVATURA	39
2.1.1.2 Método variacional	42
2.1.1.3 Energia cinética.....	45
2.1.1.4 Energia Potencial	48
2.1.1.5 Equação de equilíbrio final do tubo	53
2.1.2 Equação de movimento para tubos biengastados	57
2.2 DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO LINEAR DE MOVIMENTO	65
2.3 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	66
2.3.1 Discretização da equação linear de movimento	67
2.3.1.1 Viga simplesmente apoiada	68
2.3.1.2 Viga biengastada	69
2.3.1.3 Viga em balanço	70
2.3.2 Discretização da equação não linear de movimento	76
CAPÍTULO 3	81
RESULTADOS NUMÉRICOS	81
3.1.1 Diagramas de Argand	82
3.1.1.1 Tubo simplesmente apoiado	83
3.1.1.2 Tubo biengastado	85

3.1.1.3	Tubo em balanço.....	88
3.1.2	FRONTEIRAS DE INSTABILIDADE.....	90
3.1.2.1	Tubo em balanço sem massa concentrada.....	91
3.1.2.2	Tubo em balanço com massa concentrada.....	93
3.2	RESULTADOS NÃO LINEARES.....	94
3.2.1	Fluxo contínuo.....	95
3.2.1.1	Tubo em balanço sem massa acoplada.....	95
3.2.1.2	Tubo em balanço com massa acoplada.....	102
3.2.2	Fluxo pulsante.....	108
3.2.2.1	Tubo em balanço sem massa acoplada.....	109
3.2.2.2	Tubo em balanço com massa acoplada.....	121
3.2.2.3	Tubo simplesmente apoiado.....	129
3.2.2.4	Tubo biengastado.....	134
CAPÍTULO 4.....	140
CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	140
REFERÊNCIAS.....	144

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Exemplos de interação fluido estrutura: (a) Avião em pleno voo; (b) Tubulação para exploração de petróleo; (c) Mangueira de combate a incêndio descarregando água; (d) Edifício Burj Khalifa em Dubai com 828 metros de altura.	20
Figura 1.2 - Ponte sobre o Estreito de Tacoma sob ação de ressonância.	21
Figura 1.3 – Localização do Trans-Arabian pipeline.	23
Figura 1.4 - Tubo em balanço.	26
Figura 1.5 - Tubo com extremidades fixas.	26
Figura 1.6 - Tubo simplesmente apoiado.	28
Figura 1.7 - Viga biapoiada submetida a carregamento harmônico.	32
Figura 1.8 - Viga biapoiada com mola intermediária.	34
Figura 2.1 – Modelo de viga para formulação.	35
Figura 2.2 - Tubo com fluido em escoamento.	36
Figura 2.3 - (a) Sistema de coordenadas Eulerianas (x, z) e Lagrangeanas (x_0, z_0) ; (b) Configuração deformada do tubo; (c) Campos de deslocamento do sistema, (d) Sistema utilizado para a demonstração da condição de inextensibilidade e, coordenada curvilínea s	37
Figura 2.4 – Ângulo θ utilizado na expressão da curvatura κ	39
Figura 2.5 - Sistema para cálculo da deformação axial ε e curvatura κ	40
Figura 2.6 – Termos para adaptação do Princípio de Hamilton.	44
Figura 2.7 – Modelo de amortecimento do tipo Kevin-Voigt.	54
Figura 2.8 - Tubo biengastado.	58
Figura 2.9 - Cubo submetido a carga axial.	59
Figura 3.1 - Diagramas de Argand para um tubo simplesmente apoiado com $\beta=0,1$: (a) $RexIm$; (b) $uxIm$; (c) $uxRe$	83
Figura 3.2 - Diagrama de Argand para um tubo simplesmente apoiado com $\beta=0,3$: (a) $RexIm$; (b) $uxIm$; (c) $uxRe$	84
Figura 3.3 - Diagrama de Argand para um tubo engastado-engastado com $\beta=0,1$: (a) $RexIm$; (b) $uxIm$; (c) $uxRe$	86

Figura 3.4 - Diagramas de Argand para um tubo engastado-engastado com $\beta=0,3$: (a) $RexIm$; (b) $uxIm$; (c) $uxRe$	87
Figura 3.5 - Diagramas de Argand para um tubo em balanço com $\beta=0,1$: (a) $RexIm$; (b) $uxIm$; (c) $uxRe$	88
Figura 3.6 - Diagramas de Argand para um tubo em balanço com $\beta=0,3$: (a) $RexIm$; (b) $uxIm$; (c) $uxRe$	89
Figura 3.7 - Comparação entre curvas de estabilidade para 2, 4, 6 e 8 modos de viga.....	91
Figura 3.8 - Curvas de instabilidade para $\alpha=0$, $\alpha=0.01$, $\alpha=0.001$ e $\alpha=0.0001$	93
Figura 3.9 - Comparação entre curvas de instabilidade com e sem massa concentrada na extremidade do tubo.	94
Figura 3.10 - Tubo em balanço submetido a um fluxo estático.	95
Figura 3.11 – Diagrama de bifurcação para Análise 01.....	97
Figura 3.12 – (a) Resposta no tempo da solução trivial; (b) Resposta permanente; (c) Plano fase; (d) Seção de Poincaré, todos para o ponto (13.48, 0.1236).....	97
Figura 3.13 – Diagrama de bifurcação para a Análise 2.	98
Figura 3.14 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (6.51,-0.1299).	99
Figura 3.15 – Diagrama de bifurcação para a Análise 3.	99
Figura 3.16 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (12.57, 01107).	100
Figura 3.17 – Diagrama de bifurcação para a Análise 4.	100
Figura 3.18 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto(10, 0.0509).	101
Figura 3.19 – Tubo em balanço com massa acoplada em sua extremidade livre.....	102
Figura 3.20 – Diagrama de bifurcação para a Análise 5.	104
Figura 3.21 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (8.18, 0.0320).	104
Figura 3.22 – Diagrama de bifurcação para a Análise 6.	105
Figura 3.23 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (8.03, 0.00221).	105
Figura 3.24 – Diagrama de bifurcação para a Análise 7.	106
Figura 3.25 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (8.03, 0.1603).	106

Figura 3.26 – Diagrama de bifurcação para a Análise 8.	107
Figura 3.27 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (9.09, -0.051).	107
Figura 3.28 - Tubo em balanço submetido a um fluxo pulsante.	110
Figura 3.29 - Curvas de escape para a Análise 01: (a) $\beta = 0.1$; (b) $\beta = 0.2$; (c) $\beta = 0.3$; (d) $\beta = 0.4$; (e) Curvas de escape sobrepostas (--- $\beta = 0.1$, --- $\beta = 0.2$, --- $\beta = 0.3$, --- $\beta = 0.4$).	111
Figura 3.30 - Curvas de escape para a Análise 02: (a) $\beta = 0.1$; (b) $\beta = 0.2$; (c) $\beta = 0.3$; (d) $\beta = 0.4$; (e) Curvas de escape sobrepostas (--- $\beta = 0.1$, --- $\beta = 0.2$, --- $\beta = 0.3$, --- $\beta = 0.4$).	112
Figura 3.31 - Curvas de escape para a Análise 03: (a) $\beta = 0.1$; (b) $\beta = 0.2$; (c) $\beta = 0.3$; (d) $\beta = 0.4$; (e) Curvas de escape sobrepostas (--- $\beta = 0.1$, --- $\beta = 0.2$, --- $\beta = 0.3$, --- $\beta = 0.4$).	113
Figura 3.32 – Diagrama de bifurcação para Análise 01 com $\beta = 0.1$ e $\omega/\omega_n = 0.8$	116
Figura 3.33 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (8.07; 0.0038).	116
Figura 3.34 – Diagrama de bifurcação para Análise 01 com $\beta = 0.3$ e $\omega/\omega_n = 0.8$	117
Figura 3.35 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (10.44; 0.019).	117
Figura 3.36 – Diagrama de bifurcação para Análise 02 com $\beta = 0.3$ e $\omega/\omega_n = 1.9$	118
Figura 3.37 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (2.38; 3E10-6).	118
Figura 3.38 – Diagrama de bifurcação para Análise 03 com $\beta = 0.4$ e $\omega/\omega_n = 1.57$	119
Figura 3.39 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto(1.75;1.0E10-5).	119
Figura 3.40 – Diagramas de bifurcação: (a) Análise 3 com $\beta=0.3$ e $\omega/\omega_n=1$; (b) Análise 2 com $\beta=0.2$ e $\omega/\omega_n=1$; (c) Análise 2 com $\beta=0.2$ e $\omega/\omega_n=2$; (d) Análise 3 com $\beta=0.3$ e $\omega/\omega_n=2$	121
Figura 3.41 - Tubo em balanço submetido a um fluxo pulsante e massa concentrada.	122
Figura 3.42 - Curvas de escape para a Análise 04: (a) $0.1 u_{cr}$; (b) $0.4 u_{cr}$; (c) $0.6 u_{cr}$; (d) Curvas de escape sobrepostas (--- $0.1 u_{cr}$, --- $0.4 u_{cr}$, --- $0.6 u_{cr}$).	123
Figura 3.43 - Curvas de escape para a Análise 05: (a) $0.1 u_{cr}$; (b) $0.4 u_{cr}$; (c) $0.6 u_{cr}$; (d) Curvas de escape sobrepostas (--- $0.1 u_{cr}$, --- $0.4 u_{cr}$, --- $0.6 u_{cr}$).	124

Figura 3.44 - Curvas de escape para a Análise 06: (a) $0.1 u_{cr}$; (b) $0.4 u_{cr}$; (c) $0.6 u_{cr}$; (d) Curvas de escape sobrepostas ($---$ $0.1 u_{cr}$, $---$ $0.4 u_{cr}$, $---$ $0.6 u_{cr}$).	124
Figura 3.45 – Comparação entre curvas de escape : $---$ massa concentrada em $\xi = 1$; $---$ massa concentrada em $\xi = 0.5$.	126
Figura 3.46 - Diagrama de bifurcação para Análise 04 com $u_0 = 0.4$ e $\omega/\omega_n = 1.68$.	126
Figura 3.47 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (1.94; 2.07E-4).	127
Figura 3.48 - Diagrama de bifurcação para Análise 04 com $u_0 = 0.6$ e $\omega/\omega_n = 1.68$.	127
Figura 3.49 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (1.02; 6.91E-6).	128
Figura 3.50 – Diagramas de bifurcação: (a) Análise 5 com $u_0=0.4 u_{cr}$ e $\omega/\omega_n=1.82$; (b) Análise 5 com $u_0=0.4 u_{cr}$ e $\omega/\omega_n=1$; (c) Análise 5 com $u_0=0.1 u_{cr}$ e $\omega/\omega_n=2$	129
Figura 3.51 – Tubo simplesmente apoiado submetido a um fluxo pulsante.	130
Figura 3.52 - Curvas de escape para a Análise 07: (a) $0.1 u_{cr}$; (b) $0.4 u_{cr}$; (c) $0.6 u_{cr}$; (d) Curvas de escape sobrepostas ($---$ $0.1 u_{cr}$, $---$ $0.4 u_{cr}$, $---$ $0.6 u_{cr}$).	131
Figura 3.53 – Diagrama de bifurcação para Análise 7 com $u_0=0.4 u_{cr}$ e $\omega/\omega_n= 0.91$.	132
Figura 3.54 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (1.81; -1.95).	132
Figura 3.55 – Diagrama de bifurcação para Análise 7 com $u_0=0.4 u_{cr}$ e $\omega/\omega_n= 1.96$.	133
Figura 3.56 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (1.21; 1.55).	133
Figura 3.57 - Tubo biengastado submetido a um fluxo pulsante.	134
Figura 3.58 - Curvas de escape para a Análise 08: (a) $0.1 u_{cr}$; (b) $0.4 u_{cr}$; (c) $0.6 u_{cr}$; (d) Curvas de escape sobrepostas ($---$ $0.1 u_{cr}$, $---$ $0.4 u_{cr}$, $---$ $0.6 u_{cr}$).	136
Figura 3.59 – Diagrama de bifurcação para Análise 8 com $u_0=0.4 u_{cr}$ e $\omega/\omega_n= 0.95$.	137
Figura 3.60 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto(2.42; -2.42).	137
Figura 3.61 – Diagrama de bifurcação para Análise 8 com $u_0=0.4 u_{cr}$ e $\omega/\omega_n= 1.98$.	138
Figura 3.62 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (2.93; -1.82).	138

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1- Frequencias naturais para vigas simplesmente apoiadas.....	69
Tabela 2.2- Valores dos coeficientes C_n e σ_i para vigas biengastadas.	70
Tabela 2.3- Valores dos coeficientes C_n e σ_i para vigas em balanço.....	70
Tabela 3.1 - Tipo de instabilidade pela análise dos autovalores.	82
Tabela 3.2 – Valores adimensionais para os diagramas de Argand.	83
Tabela 3.3 - Variação da velocidade crítica do fluido em função de β e das condições de contorno.....	90
Tabela 3.4 - Parametros adimensionais para fronteiras de instabilidade.....	91
Tabela 3.5 – Valores dos parâmetros para análise da influencia do amortecimento.....	92
Tabela 3.6 - – Valores dos parâmetros para análise da influencia da massa concentrada.....	93
Tabela 3.7 – Análise paramétrica para fluxo estático e sem massa acoplada.	96
Tabela 3.8 – Resultados das análises para fluxo estático sem massa acoplada.....	101
Tabela 3.9 - Análise paramétrica para fluxo estático com massa acoplada.	103
Tabela 3.10 – Comparação entre resultados.....	108
Tabela 3.11 – Análise paramétrica sem massa concentrada.....	110
Tabela 3.12 – Cores da curva de estabilidade.	111
Tabela 3.13 – Valores da amplitude crítica para a 1ª e 2ª região de instabilidade paramétrica.	115
Tabela 3.14 – Resumo dos resultados.	120
Tabela 3.15 - Análise paramétrica com massa concentrada.....	122
Tabela 3.16 - Cores das curvas de estabilidade.....	123
Tabela 3.17 - Análise paramétrica para um tubo simplesmente apoiado.	130
Tabela 3.18 - Cores das curvas de estabilidade.....	130
Tabela 3.19 - Análise paramétrica para um tubo biengastado.....	135

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Coeficiente de amortecimento de Kevin-Voigt
A	Área da seção transversal do tubo
\mathbf{A}	Matriz modal
\mathbf{C}	Matriz de amortecimento
E	Módulo de elasticidade de Young
E^*	Módulo de viscosidade
g	Aceleração da gravidade
\mathbf{i}	Vetor unitário na direção do eixo x
I	Momento de inércia
\mathbf{k}	Vetor unitário na direção do eixo z
\mathbf{K}	Matriz de rigidez
L	Lagrangeano
L	Comprimento do tubo
m	Massa do tubo por unidade de comprimento
m_c	Massa concentrada
M	Massa do fluido por unidade de comprimento
\mathbf{M}	Matriz de massa
n	Número de modos
P	Pressão axial externa devido ao fluxo do fluido
P	Ponto qualquer do tubo
P_0	Ponto P localizado na configuração indeformada do tubo
P_{cr}	Carga crítica de flambagem
\mathbf{q}	Vetor de deslocamentos generalizados
$\dot{\mathbf{q}}$	Vetor de velocidades generalizadas
Q	Ponto qualquer do tubo
Q_0	Ponto Q localizado na configuração indeformada do tubo
\mathbf{Q}	Vetor de cargas generalizadas
\mathbf{r}	Vetor posição ao longo do tubo

\mathbf{r}_L	Vetor posição da extremidade livre do tubo
s	Coordenada curvilínea ao longo do tubo
S_0	Área da seção transversal do tubo antes da deformação axial do tubo
S_1	Área da seção transversal do tubo após a deformação axial do tubo
t	Constante dimensional do tempo
T	Energia Cinética
T_f	Energia cinética associada ao fluido
T_p	Energia cinética associada ao tubo
u	Velocidade do fluido adimensional
u_0	Velocidade adimensional estática do fluido
$u(x,t)$	Campo de deslocamento longitudinal
U	Velocidade dimensional do fluido
U_0	Velocidade dimensional do fluido antes da deformação axial do tubo
U_1	Velocidade dimensional do fluido após a deformação axial do tubo
U_{cr}	Velocidade crítica dimensional do fluido
V_p	Energia potencial associada ao tubo
V_f	Energia potencial associada ao fluido
x	Coordenada longitudinal Lagrangeana, configuração deformada
x_0	Coordenada longitudinal Euleriana, configuração indeformada
x_L	Deslocamento longitudinal da extremidade livre do tubo
z	Coordenada transversal Lagrangeana, configuração deformada
z_0	Coordenada transversal Euleriana, configuração indeformada
z_L	Deslocamento transversal da extremidade livre do tubo
$w(z,t)$	Campo de deslocamento transversal
α	Constante adimensional referente ao amortecimento
A	Constante adimensional que relaciona a energia de membrana e a energia de flexão do sistema
β	Relação adimensional entre a massa do fluido e a massa do sistema
γ	Constante adimensional referente a aceleração da gravidade
Γ_0	Tensão externa devido ao meio onde o tubo descarrega o fluido

δ	Variacional
δ	Função delta de Dirac
δx	Deslocamento infinitesimal longitudinal na coordenada Lagrangeana
δx_0	Deslocamento infinitesimal longitudinal na coordenada Euleriana
δz	Deslocamento infinitesimal transversal na coordenada Lagrangeana
δz_0	Deslocamento infinitesimal transversal na coordenada Euleriana
δs	Deslocamento infinitesimal na direção tangencial do tubo na configuração indeformada
δs_0	Deslocamento infinitesimal na direção tangencial do tubo na configuração deformada
δW	Trabalho virtual das forças externas
ε	Deformação axial
η	Deslocamento transversal adimensional do tubo
θ	Ângulo entre a posição do tubo e o eixo x
κ	Curvatura
λ	Autovalor
μ	Constante adimensional relacionada à massa concentrada
ν	Coefficiente de Poisson
φ	Vetor modal
ξ	Deslocamento longitudinal adimensional do tubo
$O(n)$	Ordem de grandeza de valor n
Π	Energia Potencial
Π_s	Energia de deformação interna
Π_g	Energia potencial gravitacional
σ	Tensão
τ	Coefficiente adimensional do tempo
$\boldsymbol{\tau}$	Vetor unitário ao longo da coordenada curvilínea s
$\boldsymbol{\tau}_L$	Vetor tangencial unitário da extremidade livre do tubo
ψ	Amplitude da parcela dinâmica da velocidade do fluido adimensional
ω	Frequencia natural adimensional da força excitadora

ω_n	Frequencia natural adimensional referente ao modo n
$()'$	Derivada em relação a coordenada curvilínea s
$(\dot{ })$	Derivada em relação ao tempo

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

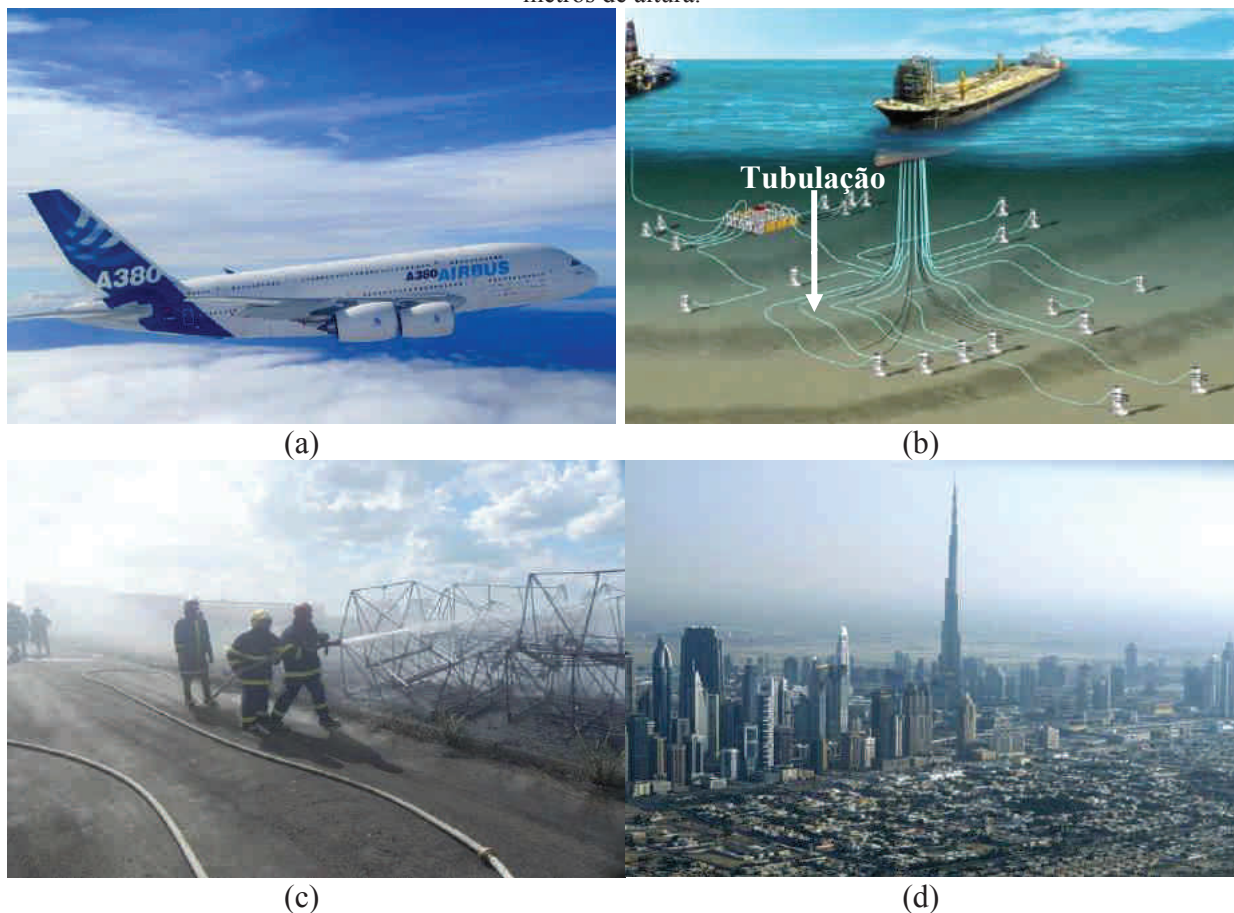
A interação fluido-estrutura tem se tornado um problema clássico da dinâmica das estruturas. Em função de sua importância em vários ramos da engenharia, como na engenharia civil, na engenharia mecânica, aeronáutica, naval e, até mesmo, na biomecânica, como problemas de circulação sanguínea, frequentemente são encontrados na literatura trabalhos de pesquisa nesta área.

Estruturas cilíndricas em contato com fluido encontram-se sob ação, a uma velocidade do fluido suficientemente alta, de instabilidades fluido elásticas, que envolvem a interação entre o fluxo do fluido com oscilações da estrutura do sistema. Tais instabilidades provocam movimentos auto-excitados que, de acordo com a terminologia aerolástica, denomina-se perda de estabilidade por *flutter* ou divergência, dependendo das condições de contorno e valores atribuídos aos parâmetros de análise.

Em função de sua simplicidade, talvez o mais simples sistema não conservativo que esteja submetido a vibrações auto-excitadas e, pela facilidade de reproduzi-lo em laboratório, vários sistemas dinâmicos têm sido modelados como um tubo em balanço com fluido em escoamento. Na verdade, um tubo em balanço, quando comparado a outras condições de contorno, é o modelo que consegue reproduzir um maior número de fenômenos relacionados à instabilidade dinâmica, devido a sua alta não linearidade geométrica.

Mostra-se na Figura 1.1 alguns exemplos de aplicação da relação fluido-estrutura como: (a) a fuselagem de um avião em pleno voo; (b) um sistema de exploração de petróleo; (c) uma mangueira de combate a incêndio descarregando água e, (d) um arranha céu sobre ação do vento.

Figura 1.1 - Exemplos de interação fluido estrutura: (a) Avião em pleno voo; (b) Tubulação para exploração de petróleo; (c) Mangueira de combate a incêndio descarregando água; (d) Edifício Burj Khalifa em Dubai com 828 metros de altura.



Fonte: (a) disponível em www.airbus.com, acessado em 10/05/2013; (b) disponível em www.diariodopresal.wordpress.com, acessado em 12/05/2013; (c) disponível em www.bombeiros.go.gov.br, acessado em 23/04/2011; (d) disponível em www.g1.globo.com, acessado em 23/04/2011.

Ressalta-se, também, a importância do estudo da instabilidade paramétrica a que este sistema encontra-se submetido. A instabilidade paramétrica surge quando a ação da carga, representada pelo fluido, deixa de ser considerada constante e passa a ser representada por uma parcela estática sobreposta com uma parcela dinâmica excitada harmonicamente. Em contraste com o caso de uma excitação externa na qual uma pequena excitação não consegue produzir uma grande resposta, a menos que a frequência de excitação esteja próxima a uma das frequências naturais do sistema, uma pequena excitação paramétrica pode produzir uma resposta de grande amplitude ao sistema.

Na Figura 1.2 ilustra-se um exemplo de um caso clássico de colapso em estruturas devido à ressonância paramétrica, o caso da ponte sobre o Estreito de Tacoma nos Estados Unidos que desabou em 1940 devido à ação do vento cuja velocidade provocou grandes deslocamentos em sua estrutura levando-a ao colapso. Outro exemplo de colapso em estruturas

parametricamente excitadas são os casos com helicópteros, conhecidos como ressonância com o solo (*Ground Resonance*), que ocorre quando a frequência do rotor se iguala a uma das frequências naturais do sistema, quando este encontra-se no solo.

Figura 1.2 - Ponte sobre o Estreito de Tacoma sob ação de ressonância.



Fonte: disponível em naukas.com, acessado em 12/05/2013.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo desta dissertação é analisar a instabilidade dinâmica de tubos submetidos a um fluxo de fluido, com velocidade constante e pulsante, em seu interior. Deseja-se estudar a influência do fluido no comportamento não linear do tubo e identificar o tipo de bifurcação associado às fronteiras de escape e, com os resultados obtidos, pretende-se debater acerca da importância da não linearidade na estabilidade da estrutura. Para tanto, faz-se algumas considerações acerca do tubo e do fluido, a saber: considera-se que o fluido é incompressível; a velocidade do fluido é constante; o diâmetro do tubo é pequeno comparado ao seu comprimento; os deslocamentos laterais são grandes, mas as deformações são pequenas; o movimento da seção reta do tubo é planar; a inércia rotacional e a energia devido ao cisalhamento são desprezadas. Portanto, o tubo pode ser descrito de acordo com a teoria de vigas de Euler-Bernoulli.

1.2 ESCOPO DA DISSERTAÇÃO

Para cumprir os objetivos propostos nesta dissertação, este trabalho foi desenvolvido em quatro capítulos. Neste primeiro capítulo são apresentados a contextualização, os aspectos

gerais da pesquisa incluindo os objetivos e justificativas do estudo bem como a revisão da literatura abordando as peculiaridades das análises paramétricas realizadas por diversos pesquisadores ao longo do tempo.

No Capítulo 2 é apresentada a formulação matemática para se chegar à equação diferencial parcial de segunda ordem utilizada para descrever o comportamento dinâmico linear e não linear do tubo, através do princípio variacional de Hamilton, utilizando-se a teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Ainda neste capítulo é apresentado o processo de discretização das equações de movimento pelo método de Galerkin, transformando uma equação diferencial parcial em um conjunto de equações diferenciais ordinárias.

No Capítulo 3 são apresentados os resultados numéricos lineares e não lineares tais como: diagramas de Argand, fronteiras de estabilidade, diagrama de bifurcação, resposta no tempo, plano fase e, seção de Poincaré.

Finalmente, no Capítulo 4, são apresentadas as conclusões obtidas, bem como algumas sugestões para trabalhos futuros.

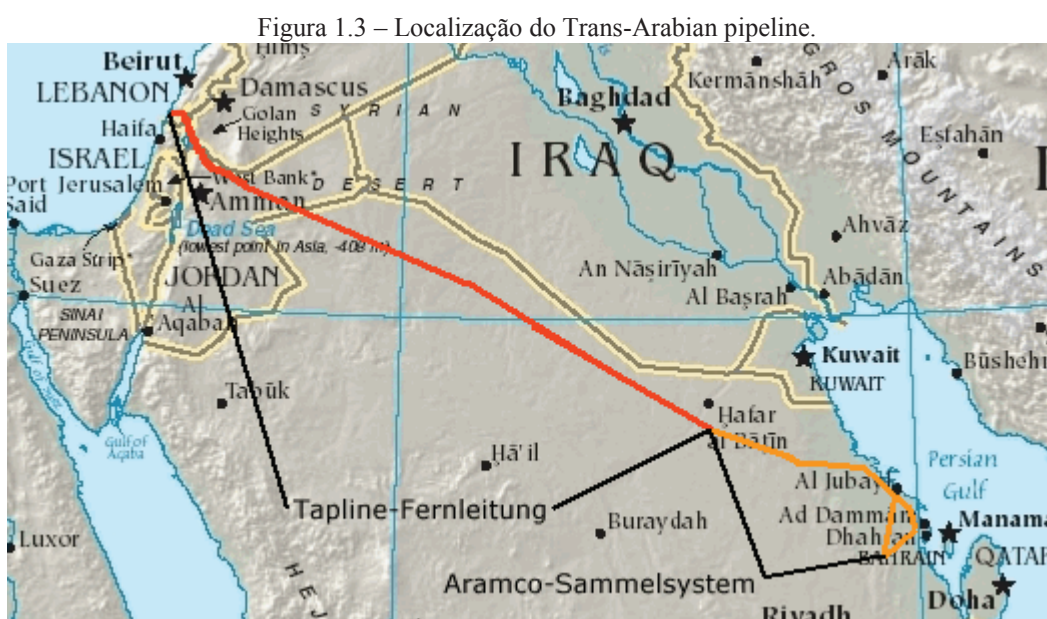
1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Uma série de experimentos realizados com correias elásticas, ilustrando o equilíbrio entre as tensões devido ao movimento e a força centrífuga, talvez tenha sido um dos primeiros estudos relevantes para a análise dinâmica de tubos com fluido em escoamento. Certamente, alguns aspectos relativos à dinâmica desses sistemas já eram conhecidos, considerando que o modelo mais simples que representa este sistema seja uma mangueira de jardim descarregando água (PAIDOUSSIS, ISSID, 1974).

Seguindo a ordem cronológica, Marcell Brillouin em 1885, analisou o movimento espontâneo sofrido pela ponta de um tubo de borracha com fluido em escoamento a uma velocidade relativamente alta. Evidentemente, ele foi o primeiro a reconhecer o movimento como auto excitado, mas infelizmente suas análises não foram publicadas. Tempos depois, em 1939 Bourrieres, um dos alunos de Brillouin, se comprometeu a realizar uma pesquisa acerca da dinâmica envolvida na instabilidade de tubos com fluido em escoamento, tanto teoricamente quanto experimentalmente. Portanto, Bourrieres (1939) *apud* Païdoussis e Issid (1974) ,

derivou corretamente a equação de equilíbrio do sistema e, embora, não tenha conseguido determinar sua velocidade crítica, conseguiu observar uma série de fenômenos interessantes (PAIDOUSSIS, ISSID, 1974). Portanto, oficialmente, o primeiro a estudar o comportamento dinâmico de tubos flexíveis com fluido interno em escoamento foi Bourrieres (1939), cujo interesse neste assunto serviu de inspiração a diversos outros pesquisadores como Housner (1952), Niordson (1953) e Benjamin (1961).

O interesse no tema cresceu por volta de 1950, com a necessidade do estudo de vibração do *Trans-Arabian Pipeline*, um oleoduto ligando a cidade de Qaisumah na Arábia Saudita à Sidon no Líbano, com um total de aproximadamente 1214 Km de extensão, com diâmetro de 760mm e uma capacidade de transportar até 79m³ por dia, um desafio para engenharia da época, como visto na Figura 1.3.



Fonte: Disponível em <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2f/Tapline.png>, acessado em 21/03/2013.

Diante disso, Ashley e Haviland (1950), seguidos por Feodos'ev (1951) derivaram uma equação de movimento completa para o sistema do *Trans-Arabian* - um tubo com fluido em escoamento simplesmente apoiado. O mesmo sistema foi analisado por Housner (1952) e ambos concluíram que a uma determinada velocidade de escoamento considerada elevada, o sistema se desestabilizava como uma coluna submetida a um carregamento axial. Em um estudo subsequente, Niordson (1953) derivou a mesma equação de equilíbrio e obteve as mesmas conclusões, confirmando a análise de Housner (1952).

Long (1955) analisou tubos em balanço com fluido em escoamento, embora tenha estudado, também, outras condições de contorno. Sua pesquisa limitou-se a pequenas velocidades de escoamento, consideradas abaixo do limite de instabilidade. Apesar disso, sua análise teórica e, logo após comprovada por experimentos, diagnosticou que mesmo em pequenas velocidades o sistema era amortecido pelo fluxo do fluido, em contraste com sistemas simplesmente apoiados.

Handelman (1955) apresentou um método analítico de solução para o sistema de um tubo com fluido interno em escoamento, no qual os autovalores do problema eram determinados de acordo com o tipo da equação diferencial de movimento. Heinrich (1956), Bolotin (1956) e Tsoon (1957), também analisaram diversos aspectos do método de análise, seguidos por Movchan (1965) que analisou o sistema simplesmente apoiado.

O modelo físico do tubo com fluido interno em escoamento foi estudado, mais adiante, por Gregory e Païdoussis (1966), para o caso de fluxo constante por Païdoussis (1970) e, para fluxo pulsante por Païdoussis e Issid (1974). Resultados bastante relevantes são encontrados em pesquisas realizadas por Païdoussis (1987), especialmente para o caso de equações lineares.

Gregory e Païdoussis (1966) confirmaram teoricamente e experimentalmente que um tubo em balanço com fluido em escoamento submetido a um fluxo de velocidade suficientemente elevado está sujeito a instabilidade oscilatória (*flutter*) diferente de tubos simplesmente apoiados em que a instabilidade é estática (divergência), embora Benjamin (1961) já tivesse observado a existência de movimentos auto excitados neste tipo de sistema através de experimentos com tubos articulados por juntas flexíveis.

Benjamim (1961) observou, também, a existência do fenômeno de divergência em tubos em balanço dispostos verticalmente, onde a ação da gravidade é imperativa. Tal análise foi combatida por Païdoussis (1970), o qual afirmava que tubos em balanço com fluido em escoamento nunca estariam sujeitos à instabilidade estática devido ao trabalho realizado pela força de Coriolis e pela força giroscópica intrínseca a este sistema não conservativo.

A estabilidade de tubos em balanço com fluido em escoamento – negligenciando a ação da gravidade – foi amplamente discutida por Nemat-Nasser, Prasad e Herrmann (1966), com ênfase na importância das forças dependentes da velocidade do fluido, como a força de

Coriolis. Demonstrou-se que tais forças podem desestabilizar o sistema, efeito também reportado por Gregory e Païdoussis (1966). Estudos subsequentes realizados por Herrmann e Nemat-Nasser (1967) demonstraram que fenômenos de instabilidade como *flutter* e divergência estão associados às condições de contorno do sistema.

Stein e Torbiner (1970) concentraram suas análises em sistemas de tubos simplesmente apoiados considerados infinitamente longos e, propuseram uma correção na equação de movimento do sistema, no que diz respeito à pressão interna do tubo. Diagnosticaram que o sistema pode tornar-se estaticamente instável (divergência), mesmo quando submetido a pequenas velocidades de fluxo, devido à pressão interna do sistema. Thurman e Mote (1970) realizaram uma análise não linear para este sistema e, utilizando o método da perturbação, concluíram que em termos de estabilidade a importância dos termos não lineares cresce a medida que a velocidade do fluido aumenta.

Chen (1971) estudou a estabilidade de um sistema de tubos com fluido em escoamento, com uma extremidade engastada e a outra restringida por uma mola linear, concluindo que o comportamento do sistema ora configurava-se como um tubo em balanço (*flutter*) ora como um tubo engastado apoiado (divergência), dependendo apenas da rigidez da mola.

Païdoussis e Issid (1974) realizaram um amplo estudo sobre a estabilidade de tubos com fluido em escoamento simplesmente apoiados, biengastados e em balanço. Provaram que sistemas simplesmente apoiados e biengastados são incapazes de sofrerem instabilidades oscilatórias (*flutter*). Apesar de estarem submetidos a forças giroscópicas e a força de Coriolis, a mesma não realiza trabalho, classificando este sistema como giroscópico conservativo. Portanto o mesmo não ganha nem perde energia, com isso, a força de Coriolis atua como uma força restauradora, após o sistema atingir sua velocidade crítica, esta força giroscópica reestabiliza o sistema antes de iniciar-se uma instabilidade oscilatória (*flutter*).

Contrariamente, tubos em balanço são sistemas não conservativos, pois as forças giroscópicas inerentes ao sistema realizam trabalho, trabalho este inicialmente negativo – para pequenas velocidades do fluido - retirando energia do sistema, fazendo-se com que este permaneça na situação de equilíbrio. Com o incremento da velocidade do fluido, o trabalho da força giroscópica torna-se positivo, fornecendo energia ao sistema, levando à instabilidade auto

excitada (*flutter*), que se caracteriza-se pelo desaparecimento da frequência natural e o amortecimento do sistema torna-se negativo.

Segundo Semler (1991) um tubo em balanço, Figura 1.4, com fluido interno em escoamento é um sistema não conservativo, que perde estabilidade por *flutter*, conhecida como bifurcação do tipo Hopf. Fisicamente, essa instabilidade ocorre quando a energia extraída pelo tubo a partir do fluido se torna maior do que a energia desprendida pelo tubo através da força de Coriolis. Neste mesmo trabalho, Semler (1991) discretizou um tubo em balanço em dois graus de liberdade utilizando o método de Galerkin com o auxílio de funções de viga.

Figura 1.4 - Tubo em balanço.



Em tubos com ambos os lados fixos, Figura 1.5, a força centrífuga desestabilizadora, que age como uma força axial de compressão com velocidade de escoamento suficientemente grande, supera as forças inerciais que tentam restaurar o deslocamento lateral para a posição inicial de repouso, conduzindo a perda de estabilidade por divergência (HOUSNER, 1952). O fenômeno da divergência é o tipo de instabilidade esperado para esse caso, por se tratar de um sistema conservativo.

Figura 1.5 - Tubo com extremidades fixas.



Com as novas aplicações na engenharia e na indústria, o interesse no estudo da dinâmica não-linear de tubos com fluido em escoamento cresceu. A vantagem da análise não linear é de se conhecer o comportamento do sistema além dos valores críticos, enquanto que a análise linear apenas preconiza um aumento exponencial da amplitude de vibração após a bifurcação, ou seja, após a bifurcação o sistema não entra em equilíbrio novamente.

Experimentos realizados por Dodds e Runyan (1965) e Païdoussis (1966) sugeriram o aparecimento de algumas fronteiras de estabilidade após a bifurcação, portanto, a teoria não linear tornou-se necessária para promover o entendimento entre o prognóstico teórico e a observação prática.

A primeira formulação não linear para movimento planar foi feita por Bourrieres (1939), que desenvolveu a formulação pelo método do equilíbrio de forças e descreveu todas as relações não lineares, inclusive para a curvatura. Não chegou a resolver as equações, mas simplificou o sistema de equações linearizando-as, obtendo alguns resultados analíticos interessantes para o sistema, embora não tenha encontrado o valor da velocidade crítica do sistema.

Pesquisas subsequentes a respeito da análise dinâmica não linear foram feitas por Rousselet (1977) e Herrmann (1981), que derivaram as equações sob dois métodos distintos, o método do equilíbrio de forças, a fim de encontrarem um conjunto de equações que poderiam ser consideradas soluções exatas, e pelo método de energia usando o princípio de Hamilton. Infelizmente, um pequeno equívoco na junção de alguns termos os conduziram a um conjunto de equações confusas, mas o material antes do equívoco pôde ser aproveitado. Além disso, devido ao fato de terem levado em consideração a força de atrito entre o fluido e o tubo deformado e a resultante não linear da perda de pressão, conseguiram formular uma equação para o próprio fluido.

Outra escola, liderada por Sethna (1979), também formulou um conjunto de equações não-lineares seguindo uma aproximação diferente. Lundgren, Sethna e Bajaj (1979) derivaram um conjunto de equações diferenciais que pareciam estar completamente corretas, sem nenhuma aproximação significativa, exceto por considerarem nulo o efeito da força da gravidade. Como Bourrieres (1939), eles mantiveram as equações de uma forma geral, sem interligá-las. Lundgren, Sethna e Bajaj (1979) estudaram um tubo com um bico inclinado na extremidade causando uma deformação senoidal do tubo através das equações não lineares.

Bajaj *et al.* (1980) consideraram o parâmetro de perda de pressão do tubo e , usando métodos matemáticos para reduzir a dimensão do sistema de equações, estudaram a dinâmica não linear de um tubo em balanço com fluido interno em escoamento e puderam encontrar o valor da velocidade crítica do sistema. Concluíram que dependendo da perda de pressão sofrida pelo tubo, pode ocorrer bifurcação subcrítica ou supercrítica.

Os pesquisadores Steindl e Troger (1988) estenderam seus trabalhos adicionando suportes elásticos rotacionais simétricos, com o objetivo de estudar outras situações mais críticas de perda de estabilidade e obtiveram os diagramas de bifurcação para o sistema.

Outros pesquisadores também estudaram o sistema de um tubo com apoios fixos em ambas as extremidades, Figura 1.5, como Thurman e Mote (1969), os quais fazem parte da mesma classe dinâmica de tubos biapoiados, em que, neste caso, a linha central não é considerada inextensível, portanto, sua não linearidade está relacionada com o alongamento axial do tubo e a tensão induzida no tubo, ambas dependentes do deslocamento lateral. Todas as outras relações, como a curvatura, são consideradas lineares.

Holmes (1977) foi o primeiro pesquisador a estudar a dinâmica não linear de tubos biapoiados, Figura 1.6, mesmo assim, o único termo não linear utilizado foi a relação da curvatura, o restante dos termos foram relações lineares obtidas por Païdoussis e Issid (1974). Isto se deve ao fato de que seu trabalho ocorreu num estágio inicial de pesquisa sobre a não linearidade de tal sistema.

Figura 1.6 - Tubo simplesmente apoiado.



Após discretizar as equações, Holmes (1977) observou algumas características do sistema biapoiado em análise e descobriu a existência de bifurcações locais e globais. O pesquisador também estudou a perda de estabilidade por *flutter*, que é o tipo de instabilidade sofrido por tubos em balanço com fluido interno em escoamento, Figura 1.4. A partir do estudo da estabilidade local e global dos pontos de equilíbrio após a primeira bifurcação, ele provou que seria impossível um tubo, com suas extremidades apoiadas, sofrer instabilidade por *flutter*.

Namachchivaya e Tien (1989) estudaram o comportamento não linear de tubos simplesmente apoiados. Além do fluxo constante, estudaram também o comportamento do sistema com o incremento de fluido pulsante. Suas equações contêm alguns equívocos, especialmente nos termos dinâmicos, consequentemente termos não lineares em função do tempo são

incompatíveis. Além disso, alguns termos não lineares representando a deformação axial não estão presentes na formulação.

Apesar de uma grande quantidade de estudos sobre as equações de movimento do tubo com fluido em escoamento, existe uma grande dificuldade para se chegar a uma equação de equilíbrio final. Isto se deve ao fato de que as notações e os processos seguidos por cada pesquisador, na maioria das vezes, eram completamente diferentes, apesar de haver muita similaridade entre artigos sobre o assunto. Além disso, praticamente não havia interconectividade entre as pesquisas. E não comparavam uma formulação com outras sobre o mesmo sistema analisado.

Païdoussis e Issid (1974) descreveram o comportamento dinâmico do sistema em detalhes dizendo que à medida em que a velocidade do fluido aumenta, o tubo é submetido a um amortecimento induzido pela força de Coriolis, a uma certa velocidade – velocidade crítica – este amortecimento decresce, tornando-se negativo e, quando o fluxo atinge uma velocidade suficientemente alta, este amortecimento negativo excede as forças reestabilizadoras do sistema dando origem a oscilações amplificadas (*flutter*). Analisaram, também, teórica e experimentalmente o sistema com fluxo reverso, ou seja, o fluido entra no tubo, concluindo que o sistema sofre instabilidade por *flutter* a uma velocidade do fluido superior do que a verificada em sistemas com fluxo externo.

Païdoussis e Semler (1993), Li e Païdoussis (1994) usaram o método da perturbação para contornar as dificuldades de integração da equação de movimento de um tubo em balanço, considerando que os deslocamentos laterais são pequenos comparados com a unidade e com isso determinaram termos equivalentes para os termos inerciais não lineares.

Ghayesh e Khadem (2008) estudaram a relevância da inércia rotacional e da variação da temperatura na estabilidade não linear de vigas em balanço, concluindo que, o incremento da inércia rotacional diminui a frequência natural do sistema e que o aumento da temperatura ocasiona um aumento na frequência natural do sistema.

Qian, Wang e Ni (2009) estudaram a estabilidade de um tubo simplesmente apoiado com fluido interno em escoamento e submetido a cargas térmicas. Deduziram relações termoelásticas lineares e não lineares para análise deste sistema e concluíram que o aumento da temperatura do sistema contribui para sua instabilidade, diminuindo sua velocidade crítica.

Concluíram, também, que para tal condição de contorno, a análise não linear não apresentou diferenças significativas na estabilidade do sistema.

Rinaldi e Païdoussis (2010) estudaram a estabilidade dinâmica linear de um tubo em balanço com uma peça acoplada na extremidade do tubo. Analisaram dois tipos de peças, uma vazada, sem restrição ao fluxo do fluido e outra fechada com pequenos furos laterais. Concluíram que o sistema com a peça sem restrição ao fluxo do fluido apresentou o mesmo comportamento dinâmico de um tubo sem a peça, ou seja, a uma determinada velocidade suficientemente elevada, o sistema perde sua estabilidade por *flutter*. Para o sistema com a peça fechada e com furos laterais, verificaram o aparecimento de uma força de compressão na extremidade livre do tubo a qual se anula com a força centrífuga, fazendo com que o sistema seja amortecido pela força de Coriolis, anulando a instabilidade oscilatória.

Gayesh, Amabili e Païdoussis (2012) realizaram uma análise não linear a respeito da vibração longitudinal e transversal acopladas de uma viga biapoiada submetida a um carregamento harmônico distribuído com uma mola intermediária de rigidez não linear. Concluíram que o aumento da amplitude da força excitadora, a rigidez e a localização da mola contribuem substancialmente para a estabilidade do sistema. Concluíram, também, que o acoplamento entre os campos de deslocamentos fez com que movimentos caóticos e quase-periódicos obtidos a partir da análise de vibração transversal do sistema, passassem a apresentar características de movimentos quase-periódicos e periódicos respectivamente.

Wang (2012) analisou um tubo simplesmente apoiado submetido, simultaneamente, a um escoamento interno de um fluido incompressível e um escoamento externo, sendo este último representado por um carregamento externo distribuído de forças seguidoras tangenciais a curvatura do tubo devido à forças induzidas pela viscosidade do fluido externo, chegando a conclusão que tal sistema pode apresentar instabilidade por quebra de simetria (divergência) ou instabilidade oscilatória (*flutter*), dependendo dos parâmetros adotados para a intensidade da força seguidora distribuída ao longo do tubo e para a velocidade do fluido. Para altos valores de intensidade da força seguidora observou-se *flutter* a uma velocidade relativamente pequena, já para valores pequenos de intensidade da força seguidora observou-se instabilidade por divergência a uma velocidade relativamente alta.

Ozhan e Pakdemirli (2012) realizaram um estudo de vibração de um sistema giroscópico genérico contendo não linearidade cúbica submetido à excitação paramétrica. Concluíram

que a frequência natural dos três primeiros modos do sistema decresce com o aumento da velocidade axial e da viscosidade do fluido, mas ganha rigidez com o aumento da área da seção transversal do sistema e da carga harmônica.

Guo, Zhang e Païdoussis (2010) analisaram a estabilidade de tubos em balanço considerando a não uniformidade do fluxo devido a viscosidade do fluido, obtendo-se mudanças na força centrífuga do sistema para escoamento laminar e turbulento, concluindo que a velocidade crítica para ocorrência de instabilidade estática (divergência), em regime de escoamento laminar, pode ser até 13% menor do que a prevista para o fluxo de fluido ideal (*plug flow*) e, para ocorrência de *flutter*, essa diferença pode chegar até 36%.

Em todas as pesquisas discutidas até agora o fluxo do fluido foi considerado constante. Quando um sistema encontra-se submetido a um carregamento dinâmico ou dependente do tempo, este passa a ser denominado sistema parametricamente excitado e sua instabilidade é denominada instabilidade paramétrica ou ressonância paramétrica.

A instabilidade paramétrica é um problema clássico da teoria da elasticidade e está relacionada com o termo de excitação paramétrica, o qual é um caso particular de vibração forçada em que a sollicitação é representada na equação de movimento não como uma não homogeneidade, mas na forma e coeficientes que variam com o tempo, sendo estes geralmente harmônicos. Os sistemas submetidos a este tipo de ação, mesmo quando são governados por equações diferenciais homogêneas e lineares, podem exibir certos padrões de resposta semelhantes ao que se espera de sistemas não-lineares.

Excitações paramétricas são frequentes em muitas aplicações da engenharia. Nos sistemas mecânicos elásticos, em particular, o estudo das vibrações induzidas por carregamento paramétrico pulsante foi um dos problemas que motivou o desenvolvimento da chamada Teoria da Estabilidade Dinâmica de Sistemas Elásticos.

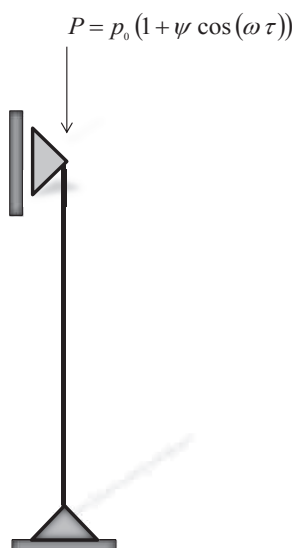
Em contraste com o caso de uma excitação externa na qual uma pequena excitação não pode produzir uma grande resposta, a menos que a frequência de excitação esteja próxima de uma das frequências naturais do sistema (ressonância primária), uma pequena excitação paramétrica pode produzir uma resposta de grande amplitude quando a frequência da excitação é aproximadamente duas vezes uma das frequências naturais do sistema

(ressonância paramétrica principal). Pode-se ter também ressonância paramétrica quando a frequência de excitação for próxima de certos múltiplos desta frequência (OLIVEIRA, 1998).

Provavelmente, uma das primeiras observações do fenômeno de ressonância paramétrica seja atribuída a Faraday. Segundo Nayfeh e Mook (1979), ele constatou que as ondas que se formam na superfície de um líquido dentro de um cilindro submetido a excitação vertical exibem o dobro do período dessa excitação.

Stephenson (1908) foi o primeiro a observar que sob a ação de um carregamento periódico, uma coluna poderia permanecer estável mesmo quando a parcela constante da carga fosse da ordem de duas vezes o valor crítico de Euler. Beliaev (1924) analisou a resposta de uma coluna reta biarticulada para uma carga periódica axial, como mostra a Figura 1.7, e mostrou que a equação do movimento discretizada é uma equação de Mathieu, determinando assim a frequência de ressonância paramétrica principal para a coluna, observando que a coluna exibia fortes vibrações laterais quando a frequência da solitação longitudinal era aproximadamente o dobro da frequência natural do movimento transversal.

Figura 1.7 - Viga biapoada submetida a carregamento harmônico.



Chen (1971) analisou a estabilidade de tubos simplesmente apoiados com fluido em escoamento de velocidade U , a qual é composta por uma parcela harmônica dependente do tempo sobreposta a uma parcela estática, de acordo com a Equação (1.1).

$$U = u_0 (1 + \psi \cos(\omega \tau)) \quad (1.1)$$

Sendo u_0 a parcela estática, ψ a amplitude da parcela dinâmica, ω a frequência de excitação da força e, τ o parâmetro adimensional do tempo. Encontrando-se, portanto, regiões de instabilidade paramétrica. Chen (1971), então, determinou as fronteiras de instabilidades para este caso e encontrou semelhanças no comportamento dinâmico entre sua análise e o caso de uma coluna submetida a um carregamento axial harmônico, como esquematizado na Figura 1.7.

Païdoussis e Issid (1974) obtiveram resultados para ressonâncias sub-harmônicas de um tubo em balanço através do método de Bolotin (1964) e analisaram as ressonâncias combinadas através da análise semi analítica de Floquet. As regiões de ressonância paramétrica determinadas teoricamente foram comprovadas experimentalmente por Païdoussis e Issid (1976). Além disso demonstraram que um tubo cuja velocidade do fluido tenha atingido sua velocidade crítica pode-se restabelecer sua estabilidade através da excitação paramétrica para certos valores de excitação e frequência.

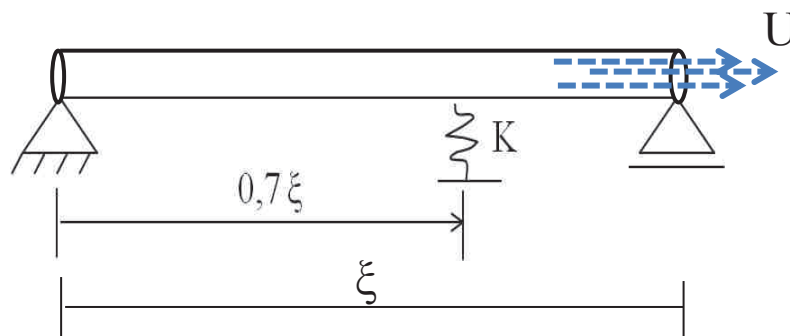
Yoshizawa *et al.* (1986), Namachchivaya (1989), Namachchivaya e Tien (1989) consideraram o sistema de um tubo simplesmente apoiado com escoamento pulsante considerando termos não lineares na formulação. Tal análise torna-se mais simples comparando-se com um tubo em balanço, pois o sistema analisado é conservativo apesar de ser giroscópico. Concluíram que apenas um ou dois modos no processo de discretização proposto por Galerkin são suficientes para obter-se as equações de movimento. Consequentemente, pode-se aplicar, facilmente, o método das múltiplas escalas. Para tubos em balanço o processo é mais complexo devido aos termos inerciais não lineares contidos na equação de movimento (SEMLER, 1994), o que torna difícil a transformação desta equação em um conjunto de equações não lineares de primeira ordem para posterior integração numérica.

Jin e Song (2005) investigaram um tubo biapoiado submetido a um escoamento interno de fluido pulsante. Determinaram as fronteiras de instabilidade variando valores de alguns parâmetros como, amortecimento, gravidade, densidade do fluido. Concluíram que o aumento do valor do amortecimento e densidade do fluido diminui a frequência natural do sistema, contribuindo para sua instabilidade ao contrário do aumento do valor da gravidade que

aumentou a frequência natural e conseqüentemente um aumento da rigidez do sistema. Determinaram, também, as fronteiras de instabilidade para ressonância combinada entre os dois primeiros modos de vibração, verificando a existência de ressonância sub-harmônica, movimentos quase-periódicos e movimentos periódicos combinados para o mesmo valor de frequência de excitação da carga.

Wang (2008) analisou a estabilidade dinâmica de tubos simplesmente apoiados submetidos a escoamento de fluido pulsante, com o incremento de uma mola de posição variável ao longo do comprimento do tubo, considerando a rigidez axial do tubo não linear bem como a rigidez da mola. A análise foi realizada com valores de velocidade acima da velocidade crítica do sistema com fluxo constante. Wang (2008) concluiu que, para valores de velocidade do fluido bastante elevadas e sem mola intermediária o sistema apresenta movimentos caóticos. O sistema demonstrou insensível para pequenos valores da rigidez da mola. Para valores elevados de rigidez, mantendo-se a velocidade do fluido elevada, o sistema tornou-se bastante sensível, mostrando que a não linearidade da rigidez da mola contribui para a estabilidade do sistema. O autor concluiu também que a estabilidade do sistema é bastante sensível à posição da mola, sendo que as posições mais críticas, com movimentos caóticos, encontraram-se a aproximadamente $0,7 \xi$, como ilustrado na Figura 1.8, sendo U a velocidade do fluido.

Figura 1.8 - Viga biapoada com mola intermediária.



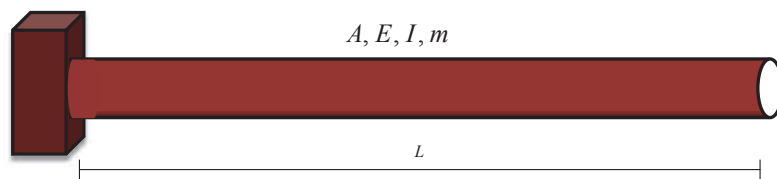
Fomte: Wang (2008) modificado.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Na dedução da equação de equilíbrio dinâmico do tubo, considera-se que este é uma viga de seção transversal A , módulo de elasticidade transversal E , momento de inércia I , massa distribuída m e comprimento L , conforme ilustrado na Figura 2.1.

Figura 2.1 – Modelo de viga para formulação.



Para que isso seja possível são consideradas as seguintes hipóteses:

- Assume-se que o fluido é incompressível;
- A velocidade do fluido é constante e ininterrupta;
- Os deslocamentos laterais são grandes, o que fornecerá os termos não lineares, mas as deformações são pequenas;
- As deformações por cisalhamento e rotacionais são desprezíveis;
- O movimento da seção reta do tubo é planar;
- O diâmetro do tubo é relativamente pequeno comparado ao seu comprimento, o que leva o tubo a ter um comportamento segundo a teoria de Euler-Bernoulli.

Na análise de sistemas contínuos, as configurações deformadas podem ser analisadas através do sistema de coordenadas Lagrangeano e configurações indeformadas através do sistema Euleriano. No sistema Euleriano, os deslocamentos de cada ponto do tubo podem ser representados por suas coordenadas no espaço. No sistema Lagrangeano o movimento é representado pelo deslocamento dos pontos a partir de sua posição no espaço no instante de tempo inicial ($t=0$).

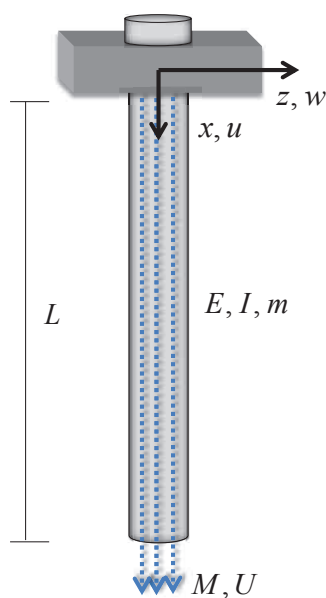
2.1 DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO NÃO LINEAR DE MOVIMENTO

A dedução da equação não linear inicia-se com o tubo em balanço e logo após deduz-se a equação não linear de movimento de um tubo biengastado.

2.1.1 Tubo em balanço

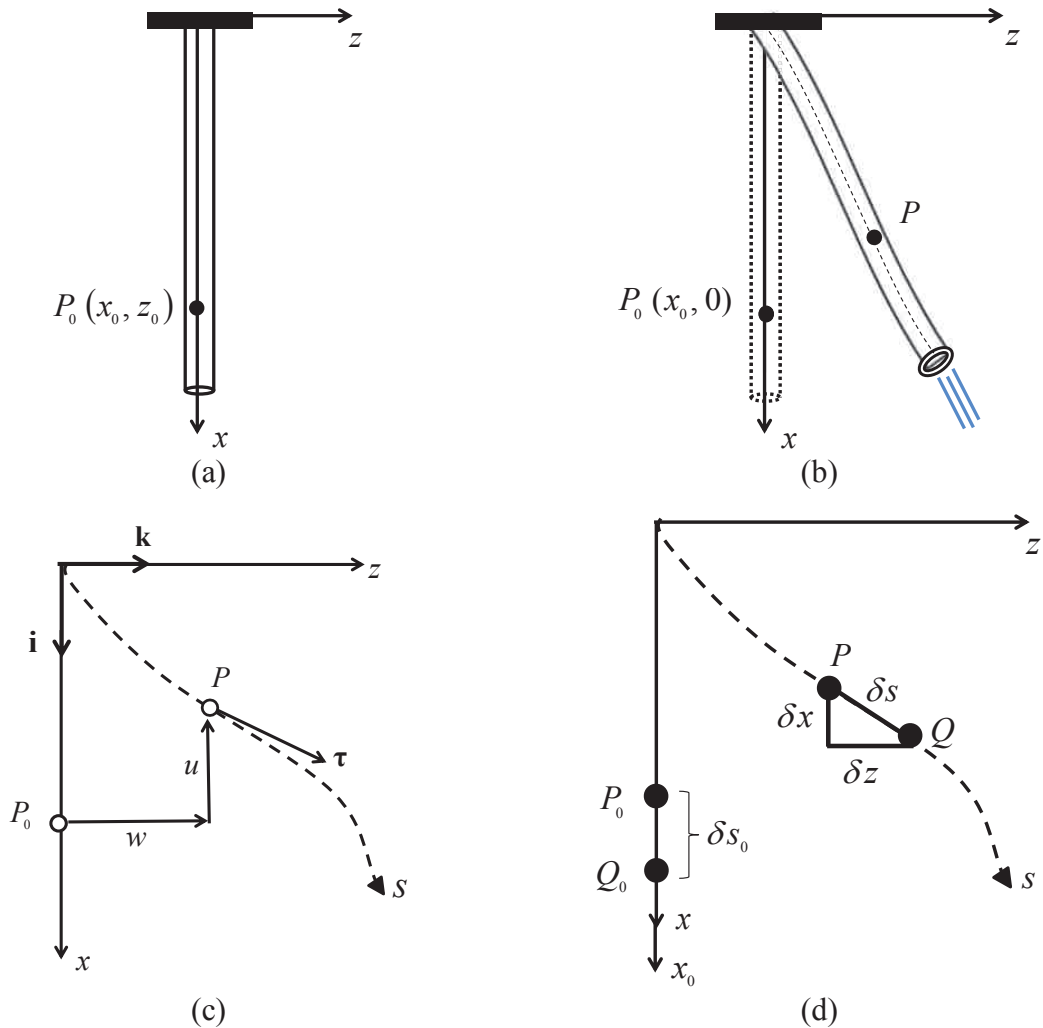
A dedução da equação de movimento será realizada de acordo com a formulação apresentada por Païdoussis (1998). Portanto, considera-se, um tubo em balanço de massa distribuída m , coeficiente de elasticidade E , momento de inércia I e comprimento L . O tubo encontra-se sujeito a um fluido interno em escoamento com velocidade U e massa distribuída M , conforme ilustra-se na Figura 2.2.

Figura 2.2 - Tubo com fluido em escoamento.



Na Figura 2.3 têm-se algumas configurações do sistema em análise, a saber: configuração indeformada na Figura 2.3(a), configuração deformada na Figura 2.3(b), campos de deslocamento na Figura 2.3(c) e esquema para dedução da condição de inextensibilidade na Figura 2.3(d).

Figura 2.3 - (a) Sistema de coordenadas Eulerianas (x, z) e Lagrangeanas (x_0, z_0) ; (b) Configuração deformada do tubo; (c) Campos de deslocamento do sistema; (d) Sistema utilizado para a demonstração da condição de inextensibilidade e coordenada curvilínea s .



Fonte: Païdoussis (1998) modificado.

Na teoria da elasticidade, as coordenadas (x, y, z) são comumente utilizadas para localizar um ponto material em um corpo elástico deformável e (u, v, w) correspondem aos campos de deslocamento deste ponto material. Portanto, considera-se um ponto $P_0(x_0, z_0)$ localizado na configuração indeformada do tubo no instante $t = 0$, Figura 2.3(a), como a configuração de equilíbrio do tubo encontra-se ao longo do eixo x , têm-se que $P_0(x_0, z_0) \equiv P_0(x_0, 0)$.

Com o início do escoamento, o tubo começa a movimentar-se, assumindo sua configuração deformada, Figura 2.3(b) e, o ponto $P_0(x_0, 0)$ desloca-se para o ponto P , definindo, portanto, um campo de deslocamento transversal $w(z, t)$ e outro longitudinal $u(x, t)$, ilustrados na Figura 2.3(c), os quais são definidos pelas Equações (2.1) e (2.2), como:

$$w = z - z_0, \quad \therefore w = z \quad (2.1)$$

$$u = x - x_0 \quad (2.2)$$

Uma consideração importante deve ser feita para tubos em balanço, chamada condição de inextensibilidade da linha central do tubo, o comprimento desta linha permanece o mesmo durante o movimento, ou seja, não sofre deformação. Diante disso, costuma-se fazer uso de uma coordenada curvilínea s ao longo do tubo como ilustra a Figura 2.3(d). Portanto, considerando-se dois pontos P e Q localizados sobre o eixo deformado s , que no instante $t = 0$ eram P_0 e Q_0 , respectivamente, de acordo com a Figura 2.3(d), é possível expressar que:

$$(\delta s)^2 = (\delta x)^2 + (\delta z)^2 \quad (2.3)$$

$$(\delta s_0)^2 = (\delta x_0)^2 + (\delta z_0)^2 = (\delta x_0)^2 \quad (2.4)$$

Portanto,

$$(\delta s)^2 - (\delta s_0)^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_0} \right)^2 - 1 \right] (\delta x_0)^2 \quad (2.5)$$

Aplicando a condição de inextensibilidade, tem-se:

$$(\delta s)^2 - (\delta s_0)^2 = 0 \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_0} \right)^2 = 1 \quad (2.7)$$

Das Equações (2.1) e (2.2) obtêm-se:

$$z = w \quad (2.8)$$

$$x = u + x_0 \quad (2.9)$$

Substituindo as Equações (2.8) e (2.9) em (2.7), obtêm-se a condição de inextensibilidade em função dos campos de deslocamento, sendo:

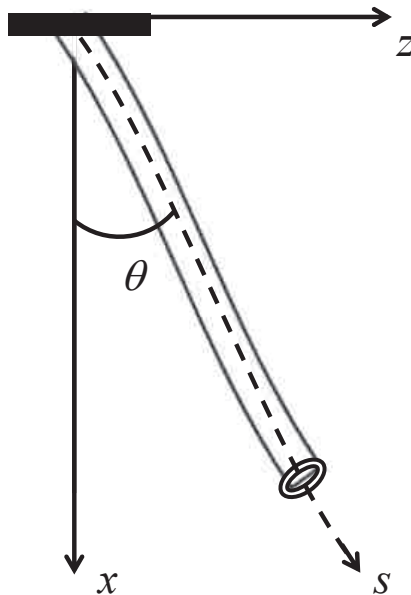
$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_0}\right)^2 = 1 \quad (2.10)$$

Com $x_0 = s$.

2.1.1.1 EXPRESSÃO PARA CURVATURA

A expressão para a curvatura, κ , será utilizada posteriormente na formulação da equação de equilíbrio do tubo quando for aplicado o processo do método variacional, mais precisamente na parcela da energia potencial. Assim, dependendo das considerações em relação ao sistema de coordenadas, condições de contorno e, conseqüentemente, a aplicação da condição de inextensibilidade, a expressão da curvatura κ se altera.

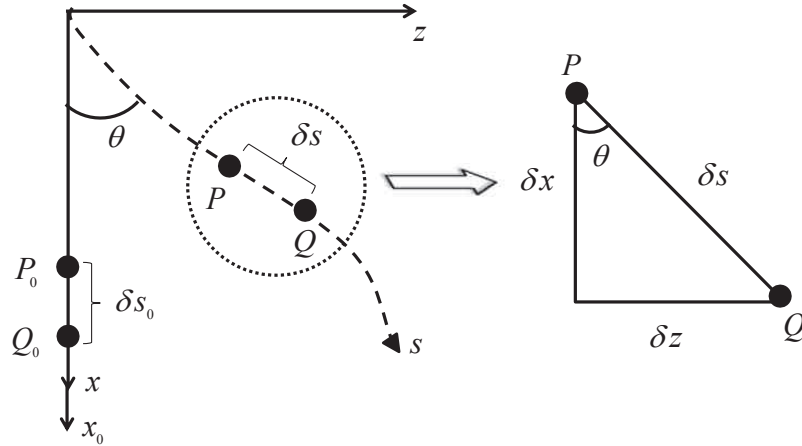
Figura 2.4 – Ângulo θ utilizado na expressão da curvatura κ .



Portanto, sendo θ o ângulo entre a posição do tubo e o eixo x , e s a coordenada curvilínea ao longo do tubo, de acordo com a Figura 2.4. Para um tubo submetido a um movimento planar da seção reta, extensível ou inextensível, a curvatura é dada por:

$$\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial s} \quad (2.11)$$

Figura 2.5 - Sistema para cálculo da deformação axial ε e curvatura κ .



De acordo com a Figura 2.5, a deformação axial da linha central do tubo pode ser expressa por:

$$\varepsilon = \frac{\delta s - \delta s_0}{\delta s_0} \quad (2.12)$$

$$\frac{\delta s}{\delta s_0} = \varepsilon + 1 \quad (2.13)$$

Como,

$$\text{sen } \theta = \frac{\delta z}{\delta s} = \frac{\partial w / \partial x_0}{\varepsilon + 1} \quad (2.14)$$

$$\text{cos } \theta = \frac{\delta x}{\delta s} = \frac{1 + \partial u / \partial x_0}{\varepsilon + 1} \quad (2.15)$$

$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} \approx \theta \quad (2.16)$$

Portanto,

$$\theta = \frac{\partial w / \partial x_0}{1 + \partial u / \partial x_0} \quad (2.17)$$

Aplicando-se a regra da cadeia na Equação(2.17), chega-se a:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_0} = \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2} \frac{\partial u}{\partial x_0} - \frac{\partial w}{\partial x_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2} \quad (2.18)$$

Expandindo a Equação (2.11), obtêm-se:

$$\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial \theta}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial s} \quad (2.19)$$

Da Equação (2.13) têm-se que:

$$\frac{\partial x_0}{\partial s} = \frac{1}{\varepsilon + 1} \quad (2.20)$$

Portanto, substituindo as Equações (2.18) e (2.20) em (2.19), chega-se à expressão para a curvatura κ :

$$\kappa = \frac{1}{\varepsilon + 1} \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2} \frac{\partial u}{\partial x_0} - \frac{\partial w}{\partial x_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}}{(1 + \varepsilon)^2} \quad (2.21)$$

Aplicando-se a condição de inextensibilidade na Equação (2.21), ou seja, $\varepsilon = 0$ e $s = x_0$, chega-se a expressão da curvatura para tubos em balanço:

$$\kappa = \frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2} \frac{\partial u}{\partial x_0} - \frac{\partial w}{\partial x_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} \quad (2.22)$$

Substituindo, $w = z$ e $u = x - s$ na Equação (2.22), têm-se:

$$\kappa = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \quad (2.23)$$

Da Equação (2.7), obtêm-se a relação:

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = \frac{\partial x}{\partial s} = \sqrt{1 - \left(\frac{\partial z}{\partial x_0} \right)^2} \quad (2.24)$$

Substituindo a Equação (2.24) em (2.23), obtêm-se a expressão da curvatura κ para um tubo em balanço, dada por:

$$\kappa = \frac{\partial^2 z / \partial s^2}{\sqrt{1 - (\partial z / \partial s)^2}} \quad (2.25)$$

A equação da curvatura a ser utilizada depende das considerações feitas para o sistema físico em análise, e deve ser feita de forma correta, pois esta expressão será utilizada nas equações de energia utilizadas pelo método variacional.

2.1.1.2 Método variacional

O método variacional é baseado no Princípio de Hamilton, conforme a Equação (2.26).

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (2.26)$$

onde L é o Lagrangeano do sistema. No Princípio de Hamilton considera-se que existem apenas forças conservativas e, como o sistema em análise possui forças dissipativas, têm-se que acrescentar o trabalho virtual realizado por estas forças não incluídas no Lagrangeano δW . Portanto obtêm-se uma relação do princípio de Hamilton adaptada para este sistema, dada por:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0, \quad (2.27)$$

Assim, a expressão para o Lagrangeano pode ser dada por:

$$L = T - \Pi \quad (2.28)$$

$$L = T_f + T_p - \Pi_f - \Pi_p \quad (2.29)$$

Sendo, T_f e T_p a energia cinética associada ao fluido e ao tubo respectivamente. Π_f e Π_p a energia potencial desenvolvida pelo fluido e pelo tubo, respectivamente.

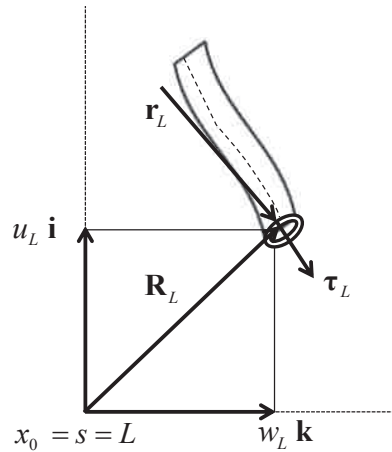
Portanto, o princípio variacional de Hamilton mostra que a soma das variações no tempo da diferença entre as energias cinética e potencial e o trabalho feito pelas forças não conservativas num intervalo de tempo t_1 e t_2 é igual a zero. A aplicação deste princípio produz diretamente as equações de movimento para um dado sistema (OLIVEIRA, 1998).

Como discutido anteriormente, o princípio de Hamilton aplica-se apenas a sistemas conservativos e, o sistema em estudo possui forças não conservativas, faz-se necessário uma adaptação para a Equação (2.26). Tal relação foi desenvolvida por Benjamin (1961) para o caso de uma viga simplesmente apoiada, do tipo Euler-Bernoulli, com fluido em escoamento, mas foi McIver (1973) quem desenvolveu esta relação, de uma forma mais genérica, adaptando-a para o caso de um tubo em balanço. Portanto, de acordo com McIver (1973), na presença de forças dissipativas, a devida expressão do princípio de Hamilton para este sistema é dada por:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(MU \left(\left(\frac{\partial \mathbf{r}_L}{\partial t} \right) + U \boldsymbol{\tau}_L \right) \delta \mathbf{r}_L \right) dt, \quad (2.30)$$

onde M é a massa distribuída do fluido, U é a velocidade do fluido, \mathbf{r}_L e $\boldsymbol{\tau}_L$ representam o vetor posição e o vetor tangencial unitário, respectivamente, da extremidade do tubo, conforme ilustra-se na Figura 2.6.

Figura 2.6 – Termos para adaptação do Princípio de Hamilton.



Os termos proporcionais a MU na Equação (2.30) estão relacionados com a energia acumulada pela extremidade livre do tubo, ou seja, o lado direito desta equação pode ser associada a um momento virtual originado nesta extremidade livre. De acordo com Benjamin (1961), tal termo está diretamente relacionado à estabilidade do sistema, provando que:

$$\Delta W = - \int_0^{t_1} M U \left(\left(\frac{\partial \mathbf{r}_L}{\partial t} \right)^2 + U \boldsymbol{\tau}_L \cdot \mathbf{r}_L \right) dt, \quad (2.31)$$

representa a energia adquirida pelo tubo. Caso o tubo seja biapoiado, então $\Delta W = 0$, o sistema é conservativo, mas se o tubo estiver em balanço, $\Delta W \neq 0$, o sistema torna-se não conservativo (Païdoussis, 1970). Quando a velocidade do fluido U é pequena, $\Delta W < 0$, o sistema encontra-se estabilizado pela força de Coriolis. Por outro lado, quando o fluxo do fluido alcança velocidades suficientemente elevadas ΔW torna-se positivo, extraindo energia do fluido e desestabilizando o sistema.

Ressalta-se a importância da ordem de grandeza dos termos utilizados na Equação (2.28). Como o interesse deste trabalho é a análise de movimentos não lineares, a ordem de grandeza deve ser superior à linear. Devido a simetria do sistema a ordem das equações não lineares deve ser ímpar $O(3)$, mas o cálculo variacional necessita de uma ordem superior a esta, ou seja, no mínimo $O(4)$.

2.1.1.3 Energia cinética

A energia cinética do sistema é o somatório da energia cinética do fluido, T_f , e do tubo, T_p , e pode ser escrita como:

$$T = T_f + T_p = \frac{1}{2}m \int_0^L V_p^2 dx_0 + \frac{1}{2}M \int_0^L V_f^2 dx_0 , \quad (2.32)$$

onde, V_p e V_f são as velocidades do tubo e do fluido, respectivamente.

Considera-se um pequeno elemento do tubo, que por definição a velocidade deste elemento é descrita como:

$$V_p = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial t} \mathbf{k} \quad (2.33)$$

Onde $\mathbf{r}(x, z)$ é o vetor posição ao longo do tubo, \mathbf{i} e \mathbf{k} são vetores unitários na direção dos campos u e w , respectivamente, conforme ilustrado na Figura 2.6. Portanto, considerando um pequeno elemento do fluido, sua velocidade pode ser representada por:

$$V_f = V_p + U \boldsymbol{\tau} , \quad (2.34)$$

sendo U definido como a velocidade do elemento do fluido em relação ao elemento do tubo e $\boldsymbol{\tau}$ o vetor unitário ao longo da coordenada curvilínea s . Para um tubo em balanço em que a condição de inextensibilidade é aplicada, $\boldsymbol{\tau}$ tem a seguinte forma:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial x}{\partial s} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial s} \mathbf{k} \quad (2.35)$$

Substituindo as Equações (2.35) e (2.33) na Equação (2.34), tem-se:

$$V_f = \frac{\partial x}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial t} \mathbf{k} + U \left(\frac{\partial x}{\partial s} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial s} \mathbf{k} \right) \quad (2.36)$$

$$V_f = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial s} \right) (x \mathbf{i} + z \mathbf{k}) \quad (2.37)$$

Assim, substituindo as Equações (2.37) e (2.33) na Equação (2.32), tem-se a expressão para a energia cinética total do sistema dada pela Equação (2.38).

$$T = \frac{1}{2} m \int_0^L \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 ds + \frac{1}{2} M \int_0^L \left(\frac{\partial x}{\partial t} + U \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t} + U \frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 ds \quad (2.38)$$

Uma consideração importante a respeito do termo U^2 , que surge na Equação (2.38), é que devido a condição de inextensibilidade tem-se:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 = 1 \quad (2.39)$$

Portanto,

$$U^2 \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + U^2 \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 = U^2 \quad (2.40)$$

Aplicando o cálculo variacional na Equação (2.38), obtém-se:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0 \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt &= m \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\dot{x} \delta \dot{x} + \dot{z} \delta \dot{z}) ds dt \\ &+ M \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [(\dot{x} + U x')(\delta \dot{x} + U \delta x') + (\dot{z} + U z')(\delta \dot{z} + U \delta z')] ds dt, \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde $(\quad)'$ representa a derivada em relação a coordenada curvilínea s e $(\quad)^{\bullet}$ representa a derivada em relação ao tempo t . Expandindo o lado direito da Equação (2.42), tem-se:

$$\begin{aligned}
& m \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\dot{x} \delta \dot{x} + \dot{z} \delta \dot{z}) ds dt \\
& + M \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\dot{x} \delta \dot{x} + \dot{x} U \delta x' + U x' \delta \dot{x} + U^2 x' \delta x') ds dt \\
& + M \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\dot{z} \delta \dot{z} + \dot{z} U \delta z' + z' U \delta \dot{z} + U^2 z' \delta z') ds dt
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Aplicando-se a primeira variação, δ , na condição de inextensibilidade, chega-se a:

$$\delta(x')^2 + \delta(z')^2 = 0 \tag{2.44}$$

$$2x' \delta x' + 2z' \delta z' = 0 \tag{2.45}$$

Portanto:

$$x' \delta x' + z' \delta z' = 0 \tag{2.46}$$

Substituindo a Equação (2.46) na (2.43), encontra-se:

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt &= m \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\dot{x} \delta \dot{x} + \dot{z} \delta \dot{z}) ds dt \\
&+ M \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\dot{x} \delta \dot{x} + U x' \delta \dot{x} + \dot{z} \delta \dot{z}) ds dt
\end{aligned} \tag{2.47}$$

$$+ M \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (U z' \delta \dot{z} + U \dot{x} \delta x' + U \dot{z} \delta z') ds dt$$

Finalmente, integrando por partes a Equação (2.47), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [(m + M) \ddot{x} + M \dot{U} x' + 2MU \dot{x}'] \delta x ds dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [(m + M) \ddot{z} + M \dot{U} z' + 2MU \dot{z}'] \delta z ds dt \\ & + MU \int_{t_1}^{t_2} (\dot{x}_L \delta x_L + \dot{z}_L \delta z_L) dt \end{aligned} \quad (2.48)$$

Onde $x_L = x(L)$ e $z_L = z(L)$ representam, respectivamente, os deslocamentos longitudinais e laterais na extremidade livre do tubo.

2.1.1.4 Energia Potencial

A energia potencial do sistema é dividida em energia de deformação interna Π_s e energia gravitacional Π_g , sendo a energia potencial total o somatório dessas duas componentes, a saber:

$$\Pi = \Pi_s + \Pi_g \quad (2.49)$$

É necessário uma definição precisa a cerca da energia de deformação, considerando grandes deslocamentos, lembrando que devido a simetria do sistema a ordem das equações não lineares deve ser ímpar $O(3)$, mas o cálculo variacional necessita de uma ordem superior a esta, ou seja, $O(4)$. Este problema foi resolvido por Stoker (1968), que assumiu que a deformação no elemento do tubo é pequena, mesmo que o deslocamento transversal da seção

reta do tubo seja grande. Para tanto ele provou que a deformação na vizinhança de cada ponto do sistema contínuo pode ser determinada pela teoria linear utilizando as relações de tensão-deformação de Hooke. Portanto, de acordo com Stoker (1968), tem-se a relação para energia de deformação do sistema, dada por:

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_0^L \left(EA \varepsilon^2 + EI (1 + \varepsilon^2) \kappa^2 \right) dx_0, \quad (2.50)$$

onde EA representa a rigidez de membrana, EI a rigidez à flexão, ε a deformação axial do tubo e, κ a curvatura deduzida anteriormente, representada pela Equação (2.25). Aplicando-se a condição de inextensibilidade na Equação (2.50), $\varepsilon = 0$, ou seja, a linha central do tubo não sofre deformação, chega-se a Equação (2.51).

$$\Pi_s = \frac{EI}{2} \int_0^L \kappa^2 ds \quad (2.51)$$

Expandido a expressão da curvatura, dada pela Equação (2.25), em série de Taylor até a quarta ordem, tem-se:

$$\kappa^2 \cong \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \right)^2 \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 \right) + O(4) \quad (2.52)$$

Portanto, substituindo a Equação (2.52) em (2.51), tem-se:

$$\Pi_s = \frac{EI}{2} \int_0^L z''^2 (1 + z'^2) ds + O(4) \quad (2.53)$$

Aplicando o operador variacional, δ , na Equação (2.53), obtêm-se:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \Pi_s dt = \frac{EI}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(z'' \delta z'' + 2 z' z''^2 \delta z' + 2 z'^2 z'' \delta z'' \right) ds dt + O(5) \quad (2.54)$$

Integrando por partes a Equação (2.54), chega-se a:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \Pi_s dt = EI \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(z'''' + 4 z' z'' z''' + z'''^3 + z'''' z'^2 \right) \delta z ds dt + O(5), \quad (2.55)$$

onde $()'' = \partial^2 () / \partial s^2$, $()''' = \partial^3 () / \partial s^3$ e $()'''' = \partial^4 () / \partial s^4$. A parcela da energia gravitacional poder ser calculada por:

$$\Pi_g = -(m+M) g \int_0^L x dx_0 \quad (2.56)$$

Para desenvolver o cálculo variacional da energia gravitacional é conveniente fazer uma relação entre as variações δx e δz . Aplicando-se a primeira variação na condição de inextensibilidade, representada pela Equação (2.39), tem-se:

$$\frac{\partial x}{\partial s} \delta \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial s} \delta \frac{\partial z}{\partial s} = 0 \quad (2.57)$$

$$\delta \frac{\partial x}{\partial s} = - \frac{\frac{\partial z}{\partial s} \delta \frac{\partial z}{\partial s}}{\frac{\partial x}{\partial s}} \quad (2.58)$$

Da Equação (2.39), têm-se:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \sqrt{1 - \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^2} \quad (2.59)$$

Substituindo a Equação (2.59) na (2.58), obtêm-se:

$$\delta \frac{\partial x}{\partial s} = - \frac{\frac{\partial z}{\partial s} \delta \frac{\partial z}{\partial s}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2}} \quad (2.60)$$

Expandindo a Equação (2.60) em série de Taylor até a quarta ordem, chega-se a:

$$\delta \frac{\partial x}{\partial s} = - \frac{\frac{\partial z}{\partial s} \delta \frac{\partial z}{\partial s}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2}} = - \frac{\partial z}{\partial s} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 \right) \delta \frac{\partial z}{\partial s} + O(4) \quad (2.61)$$

Portanto,

$$\delta x = - \int_0^s \left(\frac{\partial z}{\partial s} \delta \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^3 \delta \frac{\partial z}{\partial s} \right) ds \quad (2.62)$$

Integrando a Equação (2.62) por partes e, notando que $\delta z = 0$ em $s = 0$, obtêm-se:

$$\delta x = - \left(\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^3 \right) \delta z + \int_0^s \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \right) \delta z ds + O(4) \quad (2.63)$$

Ou,

$$\delta x = - \left(z' + \frac{1}{2} z'^3 \right) \delta z + \int_0^s \left(z'' + \frac{3}{2} z'^2 z'' \right) \delta z ds + O(4), \quad (2.64)$$

Fazendo a variação, δ , da energia gravitacional, têm-se:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \Pi_g dt = -(m+M) g \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta x ds dt \quad (2.65)$$

Substituindo a Equação (2.64) na (2.65), chega-se a:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \Pi_g dt = & -(m+M) g \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(z' \delta z + \frac{1}{2} z'^3 \delta z \right) ds dt + O(4) \\ & -(m+M) g \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_0^s \left(z'' \delta z + \frac{3}{2} z'' z'^2 \delta z \right) ds dt + O(4) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Com o objetivo de simplificar a Equação (2.66), Semler (1991) provou que:

$$\int_0^L g(s) \left(\int_0^s f(s) \delta z \right) ds = \int_0^L \left(\int_0^L g(s) ds \right) f(s) \delta z ds, \quad (2.67)$$

sendo $f(s)$ e $g(s)$ funções genéricas. Portanto, aplicando-se a relação (2.67) na Equação (2.66), obtêm-se a parcela da energia gravitacional Π_g :

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \Pi_g dt = & -(m+M) g \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(- \left(z' + \frac{1}{2} z'^3 \right) \delta z \right) ds dt + O(5) \\ & + (m+M) g \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(+ (L-s) \left(z'' + \frac{3}{2} z'' z'^2 \right) \delta z \right) ds dt + O(5) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Em seguida, aplica-se o procedimento do cálculo variacional no lado direito (Ld) da Equação (2.30).

$$\begin{aligned}
Ld &= MU \int_{t1}^{t2} \left((\dot{x}_L + Ux'_L) \delta x_L + (\dot{z}_L + Uz'_L) \delta z_L \right) dt \\
&= MU \underbrace{\int_{t1}^{t2} (\dot{x}_L \delta x_L + \dot{z}_L \delta z_L) dt}_A + MU^2 \underbrace{\int_{t1}^{t2} (x'_L \delta x_L + z'_L \delta z_L) dt}_B \\
&= A + B
\end{aligned} \tag{2.69}$$

O primeiro termo da Equação (2.69), termo A , é igual ao último termo da Equação (2.48), logo, pode ser anulado. Portanto, substituindo as Equações (2.59) e (2.64) no segundo termo da Equação (2.69), termo B , têm-se:

$$Ld = B = MU^2 \int_{t1}^{t2} \int_0^L \left(z'' + z'^2 z'' - z'' \int_S^L (z' z'') ds \right) \delta z ds dt \tag{2.70}$$

2.1.1.5 Equação de equilíbrio final do tubo

Reunindo as Equações (2.48), (2.55), (2.68) e (2.70), e lembrando que $z = w$, obtém-se a equação de equilíbrio final do tubo:

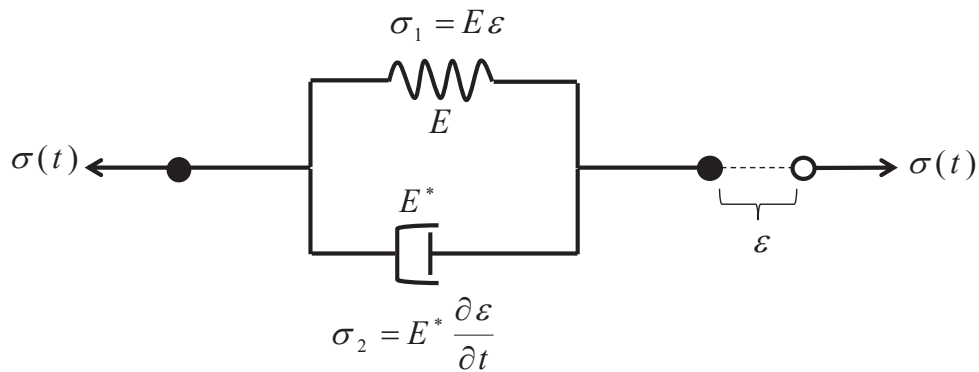
$$\begin{aligned}
&(m + M) \ddot{w} + 2MU \dot{w}' \left(1 + w'^2 \right) + (m + M) g w' \left(1 + \frac{1}{2} w'^2 \right) \\
&+ w'' \left(MU^2 \left(1 + w'^2 \right) + \left(M \dot{U} - (m + M) g \right) (L - s) \left(1 + \frac{3}{2} w'^2 \right) \right) \\
&+ EI \left(w'''' \left(1 + w'^2 \right) + 4 w' w'' w'''' + w''^3 \right) \\
&- w'' \left(\int_S^L \int_0^s (m + M) \left(\dot{w}'^2 + w' + \ddot{w}' \right) ds ds \right. \\
&\quad \left. + \int_s^L \left(\frac{1}{2} M \dot{U} w'^2 + 2MU w' \dot{w}' + MU^2 w' w' \right) ds \right)
\end{aligned} \tag{2.71}$$

$$+ w' \int_0^s (m + M) (\dot{w}'^2 + w' \ddot{w}') ds = 0$$

Termos dissipativos precisam ser incluídos à Equação (2.71) e, isto pode ser feito assumindo que a dissipação interna do material do tubo seja viscoelástica e do tipo Kelvin-Voigt. O comportamento viscoelástico é observado numa infinidade de materiais com aplicações na engenharia, como plásticos, alguns materiais compósitos, metais, etc. Nestes materiais a tensão σ não é apenas uma função de uma deformação instantânea ε , mas dependente do histórico desta deformação.

O modelo de amortecimento viscoelástico do tipo Kelvin-Voigt pode ser obtido conectando em paralelo uma mola, com módulo de elasticidade igual a E e, um amortecedor, com módulo de viscosidade E^* , conforme ilustra a Figura 2.7.

Figura 2.7 – Modelo de amortecimento do tipo Kelvin-Voigt.



Fonte: Xie (2006) modificado

Portanto, a tensão σ para este modelo é definida por:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad (2.72)$$

$$\sigma = E \varepsilon + E^* \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (2.73)$$

Em seguida a energia de deformação pode ser modificada, utilizando uma aproximação feita por Stoker (1968), representada pela Equação (2.74).

$$E \rightarrow E \left(1 + a \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right), \quad (2.74)$$

onde a representa o coeficiente de amortecimento de Kevin-Voigt. Portanto, a rigidez à flexão, EI , deve ser substituída por $EI(1 + a \partial / \partial t)$ na Equação (2.71).

Caso o tubo tenha uma massa concentrada m_c localizada num ponto s do tubo, pode-se utilizar o procedimento descrito por Païdoussis (1998), através do uso da função delta de Dirac δ . Portanto, substituindo a Equação (2.74) na (2.71) e, acrescentando-se uma massa concentrada m_c ao sistema, têm-se a Equação (2.75).

$$\begin{aligned} & (m+M) \left(1 + \frac{m_c \delta(s-L)}{(m+M)L} \right) \ddot{w} + 2 M U \dot{w}' (1+w'^2) \\ & + (m+M) \left(1 + \frac{m_c \delta(s-L)}{(m+M)L} \right) g w' \left(1 + \frac{1}{2} w'^2 \right) + w'' M U^2 (1+w'^2) \\ & + w'' \left(\left(M \dot{U} - (m+M) \left(1 + \frac{m_c \delta(s-L)}{(m+M)L} \right) g \right) (L-s) \left(1 + \frac{3}{2} w'^2 \right) \right) \\ & + EI \left(1 + a \frac{\partial}{\partial t} \right) (w'''' (1+w'^2) + 4 w' w'' w''' + w''^3) \\ & - w'' \left(\int_S^L \int_0^S (m+M) \left(1 + \frac{m_c \delta(s-L)}{(m+M)L} \right) (\dot{w}'^2 + w' \ddot{w}') ds ds \right. \\ & \left. + \int_S^L \left(\frac{1}{2} M \dot{U} w'^2 + 2 M U w' \dot{w}' + M U^2 w' w' \right) ds \right) \\ & + w' \int_0^S (m+M) \left(1 + \frac{m_c \delta(s-L)}{(m+M)L} \right) (\dot{w}'^2 + w' \ddot{w}') ds = 0 \end{aligned} \quad (2.75)$$

Para permitir um melhor desenvolvimento das análises que seguem no capítulo de resultados, faz-se uma mudança de variáveis através da consideração dos seguintes parâmetros adimensionais:

$$\xi = \frac{s}{L}, \quad \eta = \frac{w}{L}, \quad \tau = \left(\frac{EI}{m+M} \right)^{1/2} \frac{t}{L^2}, \quad \alpha = \left(\frac{EI}{m+M} \right)^{1/2} \frac{a}{L^2}, \quad (2.76)$$

$$u = \left(\frac{M}{EI} \right)^{1/2} UL, \quad \gamma = \frac{m+M}{EI} L^3 g, \quad \beta = \frac{M}{m+M}, \quad \mu = \frac{m_c}{(m+M)L}$$

Portanto, normalizando a Equação (2.75) em função dos parâmetros adimensionais apresentados em (2.76) chega-se à equação adimensional do sistema, dada pela Equação (2.77).

$$\begin{aligned} & \alpha \dot{\eta}'''' + \eta'''' + \ddot{\eta} (1 + \mu \delta(\xi - 1)) + \eta'' \left(u^2 - \gamma \int_{\xi}^1 (1 + \mu \delta(\xi - 1)) d\xi \right) \\ & + \gamma (1 + \mu \delta(\xi - 1)) \eta' + 2u \sqrt{\beta} \dot{\eta}' + 2u \sqrt{\beta} \dot{\eta}' \eta'^2 + \eta'''' \eta'^2 + \eta''^3 \\ & + \frac{1}{2} \gamma \eta'^3 (1 + \mu \delta(\xi - 1)) + \eta'' \eta'^2 \left(u^2 - \frac{3}{2} \int_{\xi}^1 \gamma (1 + \mu \delta(\xi - 1)) d\xi \right) \\ & + 4 \eta' \eta'' \eta''' + \eta' (1 + \mu \delta(\xi - 1)) \int_0^{\xi} (\dot{\eta}'^2 + \eta' \ddot{\eta}') d\xi \\ & - \eta'' \left(\int_{\xi}^1 (1 + \mu \delta(\xi - 1)) \int_0^{\xi} (\dot{\eta}'^2 + \eta' \ddot{\eta}') d\xi d\xi \right. \\ & \left. + \int_{\xi}^1 (2u \sqrt{\beta} \eta' \dot{\eta}' + u^2 \eta' \eta'') d\xi \right) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Com o objetivo de analisar o sistema sujeito a instabilidade paramétrica, considera-se que a velocidade do fluido, u , esteja submetida a uma pequena perturbação harmônica:

$$u = u_0 (1 + \psi \cos(\omega \tau)), \quad (2.78)$$

onde u_0 representa a parcela estática do carregamento e, $\psi \cos(\omega \tau)$ a parcela dinâmica, sendo ψ a amplitude da parcela dinâmica, ω a frequência de excitação da carga e, τ o tempo adimensionalizado pela relação (2.76). Substituindo, então, a Equação (2.78) na (2.77), têm-se:

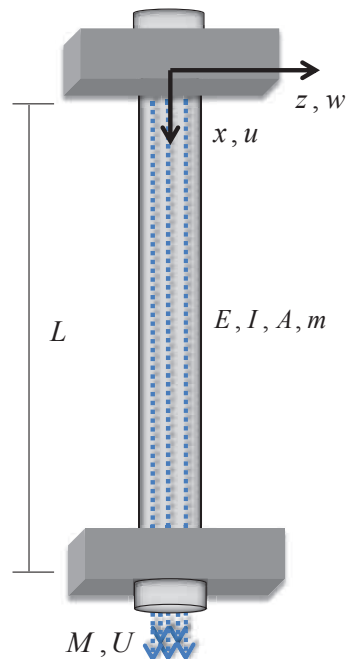
$$\begin{aligned}
& \alpha \dot{\eta}'''' + \eta'''' + \dot{\eta}(1 + \mu \delta(\xi - 1)) + \frac{1}{2} \gamma \eta'^3 (1 + \mu \delta(\xi - 1)) \\
& + \eta'' \left((u_0 (1 + \psi \cos(\omega \tau)))^2 - \gamma \int_{\xi}^1 (1 + \mu \delta(\xi - 1)) d\xi \right) \\
& + \gamma (1 + \mu \delta(\xi - 1)) \eta' + 2 u_0 (1 + \psi \cos(\omega \tau)) \sqrt{\beta} \dot{\eta}' \\
& + 2 u_0 (1 + \psi \cos(\omega \tau)) \sqrt{\beta} \dot{\eta}' \eta'^2 + \eta'''' \eta'^2 + \eta''^3 \\
& + \eta'' \eta'^2 \left((u_0 (1 + \psi \cos(\omega \tau)))^2 - \frac{3}{2} \int_{\xi}^1 \gamma (1 + \mu \delta(\xi - 1)) d\xi \right) \\
& + 4 \eta' \eta'' \eta'''' + \eta' (1 + \mu \delta(\xi - 1)) \int_0^{\xi} (\dot{\eta}'^2 + \eta' \ddot{\eta}') d\xi \\
& - \eta'' \left(\int_{\xi}^1 (1 + \mu \delta(\xi - 1)) \int_0^{\xi} (\dot{\eta}'^2 + \eta' \ddot{\eta}') d\xi d\xi \right) \\
& + \int_{\xi}^1 (2 u_0 (1 + \psi \cos(\omega \tau)) \sqrt{\beta} \eta' \dot{\eta}' + u^2 \eta' \eta'') d\xi \left. \right) \tag{2.79}
\end{aligned}$$

2.1.2 Equação de movimento para tubos biengastados

Considera-se um tubo biengastado de massa distribuída m , coeficiente de elasticidade E , área da seção transversal A , momento de inércia I e comprimento L . O tubo encontra-se sujeito a um fluido interno em escoamento com velocidade U e massa distribuída M , conforme ilustra-

se na Figura 2.8. Neste caso, como a condição de inextensibilidade não pode ser aplicada, serão necessárias duas equações, uma na direção x e outra na direção z .

Figura 2.8 - Tubo biengastado.



Além disso, como as duas extremidades do tubo estão fixas, o lado direito da Equação (2.30) é zero e o sistema é, então, conservativo. Consequentemente, a contribuição das forças geradas pelo fluxo do fluido não será a mesma de um sistema de um tubo em balanço.

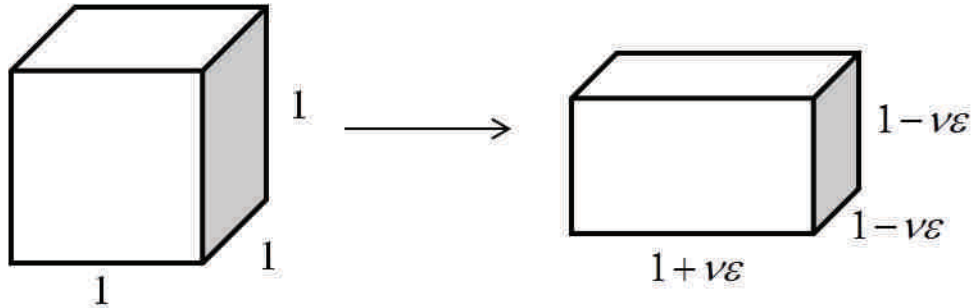
Quando uma barra está submetida a tensão, o acréscimo axial é acompanhado por uma contração lateral, isto é, há uma diminuição da largura da barra e um acréscimo em seu comprimento. Dentro do campo da elasticidade esta relação entre deformação lateral e axial, denominada coeficiente de Poisson (ν), é considerado constante e igual a 0,5 para materiais elásticos.

$$\nu = \frac{\text{deformação lateral}}{\text{deformação axial}} = \frac{1}{2} \quad (2.80)$$

Para o caso em que apenas cargas axiais são aplicadas em um corpo elástico, a variação do volume é proporcional a $1 - 2\nu$. Consequentemente, a variação do volume devido a tensões

axiais pode ser considerada nula, ou seja, o material é incompressível. Deste modo, um cubo de material elástico com lados iguais a 1, submetido a carga axial é ilustrado na Figura 2.9.

Figura 2.9 - Cubo submetido a carga axial.



Portanto a variação do volume, Δv , é dada por:

$$\Delta v = v_1 - v_0 \quad (2.81)$$

$$\Delta v = (1 + \nu\varepsilon)(1 - \nu\varepsilon)^2 - 1 \quad (2.82)$$

$$\Delta v = \varepsilon(1 - 2\nu) + O(2)^2 \quad (2.83)$$

Em que v_0 e v_1 são, respectivamente, o volume do cubo antes e depois do carregamento axial. Como o coeficiente de Poisson (ν) pode ser aproximado a 0,5 para materiais elásticos, a Equação (2.81), torna-se $\Delta v = 0$, provando que não há variação do volume.

No caso de um tubo, para qualquer comprimento inicial dx_0 , tal conservação de volume pode ser dado por:

$$dx_0 S_0 = dx_0 (1 + \varepsilon) S_1 \quad (2.84)$$

Em que S_0 e S_1 são a área da seção transversal do tubo antes e após a deformação, respectivamente. Para a consideração feita no início desta formulação, em que utiliza-se um fluido incompressível, pode-se chegar a seguinte relação:

$$U_0 S_0 = U_1 S_1, \quad (2.85)$$

onde U_0 e U_1 são as velocidades do fluido antes e após a deformação do tubo respectivamente. Portanto, a velocidade do fluido em relação ao tubo não é mais constante, sendo:

$$U_1(x_0) = U_0 \left(\frac{S_0}{S_1} \right) = U_0 (1 + \varepsilon) \quad (2.86)$$

Portanto, substituindo a Equação (2.86) na (2.36), têm-se:

$$V_f = V_p + U(x_0) \boldsymbol{\tau} = (\dot{x} \mathbf{i} + \dot{z} \mathbf{k}) + U(1 + \varepsilon) \left(\frac{\partial x / \partial x_0}{1 + \varepsilon} \mathbf{i} + \frac{\partial z / \partial x_0}{1 + \varepsilon} \mathbf{k} \right) \quad (2.87)$$

A Equação (2.34) obtida para um tubo em balanço continua válida, exceto pelo fato de que a condição de inextensibilidade dada pela Equação (2.40) não se aplica mais. Portanto, termos U^2 ascendem da energia cinética e não mais do lado direito da Equação (2.30), que é nulo. Portanto, da Equação (2.38) têm-se a energia cinética T total do sistema:

$$T = \frac{1}{2} m \int_0^L \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 ds + \frac{1}{2} M \int_0^L \left(\frac{\partial x}{\partial t} + U \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t} + U \frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 ds \quad (2.88)$$

Como,

$$w = z \quad (2.89)$$

$$u = x - x_0 \quad (2.90)$$

Substituindo as Equações (2.89) e (2.90) na Equação (2.88) obtêm-se a energia cinética do sistema em função dos campos de deslocamentos:

$$T = \frac{1}{2} m \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx_0 + \frac{1}{2} M \int_0^L \left((\dot{u} + U(1+u'))^2 + (\dot{w} + U w')^2 \right) dx_0, \quad (2.91)$$

onde $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial x_0$ e $\dot{(\cdot)} = \partial(\cdot)/\partial t$. A energia de deformação interna Π para este sistema é decomposta em duas parcelas, uma estática devido a uma pressão axial externa P e uma tensão Γ_0 e outra oscilatória devido a vibração do tubo segundo a Equação (2.92).

$$\Pi = \frac{1}{2} EA \int_0^L \left(\frac{\Gamma_0 - P}{EA} + \varepsilon \right)^2 dx_0 + \frac{1}{2} EI \int_0^L \left((1 + \varepsilon)^2 \kappa^2 \right) dx_0 \quad (2.92)$$

Substituindo a Equação (2.20) na (2.19), têm-se que:

$$\kappa = \frac{1}{1 + \varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial x_0} \quad (2.93)$$

Portanto, usando a relação (2.93), obtêm-se uma equação para a energia de deformação simplificada para este sistema:

$$\Pi = \frac{1}{2} EA \int_0^L \left(\frac{\Gamma_0 - P}{EA} + \varepsilon \right)^2 dx_0 + \frac{1}{2} EI \int_0^L \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_0} \right)^2 dx_0 \quad (2.94)$$

A expressão para a deformação axial, expandida até quarta ordem em série de Taylor, é dada pela Equação (2.95).

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_0} \right)^2 + O(4) \quad (2.95)$$

Da Equação (2.18), têm-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_0} = \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2} \frac{\partial u}{\partial x_0} - \frac{\partial w}{\partial x_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}}{(1 + \varepsilon)^2} \quad (2.96)$$

Substituindo a Equação (2.95) na (2.96) obtêm-se :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_0} \right)^2 = w''^2 - 2 w''^2 u' - 2 w''^2 w'^2 - 2 w' w'' u'' + O(5) \quad (2.97)$$

A expressão para energia potencial gravitacional Π_g permanece a mesma para um tubo em balanço dada pela Equação(2.56), a saber:

$$\Pi_g = -(m + M) g \int_0^L x dx_0 \quad (2.98)$$

Lembrando que $u = x - x_0$, têm-se:

$$\Pi_g = -(m + M) g \int_0^L (x_0 + u) dx_0 \quad (2.99)$$

A equação de movimento final do sistema é obtida outra vez através do cálculo variacional, mas desta vez com duas variáveis independentes, δu e δw . Após algumas integrações por partes, chega-se as equações de equilíbrio do sistema, representadas pelas Equações (2.100) e (2.101).

$$(m + M) \ddot{u} + M \dot{U} + 2MU \dot{u}' + MU^2 u'' + M \dot{U} u' - E A u'' - E I (w'''' w' + w'' w''') + (\Gamma_0 - P - E A) w' w'' - (m + M) g = 0 \quad (2.100)$$

$$(m + M) \ddot{w} + M \dot{U} w' + 2MU \dot{w}' + MU^2 w'' - (\Gamma_0 - P) w'' + E I w'''' \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned}
& -EI \left(3 u'''' w'' + 4 u'' w'''' + 2 u' w'''' + w' u'''' + 2 w'^2 w'''' \right. \\
& \left. + 8 w' w'' w'''' + 2 w''^3 \right) + (\Gamma_0 - P - EA) \left(u'' w' + u' w'' + \frac{3}{2} w'^2 w'' \right) = 0
\end{aligned}$$

Com a intenção de simplificar a Equação (2.101), Holmes (1977) considerou que o campo de deslocamento longitudinal u seja pequeno em relação ao campo de deslocamento transversal w , assim sendo, Holmes (1977) partiu da equação linear deduzida por Païdoussis e Issid (1974) para o mesmo sistema da Figura 2.8, dada pela Equação (2.102), considerando que o único termo não linear seria a deformação axial do tudo ε .

$$\begin{aligned}
EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(MU^2 - \left((M+m)g - M \frac{\partial U}{\partial t} \right) (L-x) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2MU \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \\
+ (M+m)g \frac{\partial w}{\partial x} + (M+m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0
\end{aligned} \tag{2.102}$$

Considerando um material viscoelástico do tipo Kelvin-Voigt, já definido na seção 2.1.1.5, a tensão axial σ induzida por movimentos transversais é dada pela Equação (2.103).

$$\sigma = \frac{T}{A} = E \varepsilon + E^* \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \tag{2.103}$$

A deformação axial ε é definida pela Equação (2.104).

$$\varepsilon = \frac{1}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \tag{2.104}$$

Substituindo a Equação (2.104) na Equação (2.103), têm-se a força axial T que será somada à Equação (2.102).

$$T = -\frac{EA}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{E^* A}{L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) dx \quad (2.105)$$

Portanto, somando-se a Equação (2.105) à Equação (2.102) e adicionando o amortecimento viscoelástico do tipo Kelvin-Voigt através da relação (2.74), obtêm-se a equação não linear deduzida por Holmes (1977).

$$\begin{aligned} & \left(1 + a \frac{\partial}{\partial t} \right) EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(MU^2 - \left((M+m)g - M \frac{\partial U}{\partial t} \right) (L-x) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ & + 2MU \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \left(\left(1 + a \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{EA}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ & + (M+m)g \frac{\partial w}{\partial x} + (M+m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.106)$$

Fazendo-se uma mudança de variáveis através da consideração dos seguintes parâmetros adimensionais:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{w}{L}, \quad \tau = \left(\frac{EI}{m+M} \right)^{1/2} \frac{t}{L^2}, \quad \alpha = \left(\frac{EI}{m+M} \right)^{1/2} \frac{a}{L^2}, \quad (2.107)$$

$$u = \left(\frac{M}{EI} \right)^{1/2} UL, \quad \gamma = \frac{m+M}{EI} L^3 g, \quad \beta = \frac{M}{m+M}, \quad \chi = \frac{AL^2}{I}$$

Têm-se a equação não linear adimensional para o sistema, dada pela Equação (2.108).

$$\alpha \dot{\eta}'''' + \eta'''' + \eta'' \left(u^2 - \gamma(1-\xi) - \frac{\chi}{2} \int_0^1 (\eta')^2 d\xi \right) \quad (2.108)$$

$$-\alpha \chi \eta'' \left(\int_0^1 (\eta' \dot{\eta}') d\xi \right) + 2u \sqrt{\beta} \dot{\eta}' + \gamma \eta' + \ddot{\eta} = 0,$$

onde $(\)'' = \partial^2 (\) / \partial \xi^2$, $(\)''' = \partial^3 (\) / \partial \xi^3$, $(\)'''' = \partial^4 (\) / \partial \xi^4$, $(\dot{\ }) = \partial (\) / \partial \tau$ e, $(\ddot{\ }) = \partial^2 (\) / \partial \tau^2$.

2.2 DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO LINEAR DE MOVIMENTO

As relações feitas para o princípio de Hamilton, coordenada lagrangeanas e eulerianas, conceito de inextensibilidade, desenvolvidas na formulação não linear, ficam preservadas nesta dedução.

As considerações a respeito da formulação para um sistema fechado, conservativo, também permanecem, Equações (2.26) e (2.27), exceto pelo grau das equações a serem consideradas no método de energia, mantendo-se apenas os termos lineares, formulado para o princípio de Hamilton de acordo com a Equação (2.28).

Os deslocamentos laterais do tubo devem ser considerados pequenos em relação ao seu comprimento, portanto, termos não lineares devem ser desprezados. As equações resultantes devem conter termos de ordem ímpar, $O(1)$, mas o cálculo variacional exige uma ordem superior a esta, $O(2)$, no integrando da Equação (2.26).

Portanto, eliminando os termos que representam grandes deslocamentos da Equação (2.75), permanecendo apenas os termos lineares, obtém-se a equação de equilíbrio dinâmico linear do tubo com fluido interno em escoamento, representada pela Equação (2.109).

$$EI \left(1 + a \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + \left[MU^2 - \left((M+m) \left(1 + \frac{m_c \delta(s-L)}{(m+M)L} \right) g - M \frac{\partial U}{\partial t} \right) (L-s) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + 2MU \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} + (M+m) \left(1 + \frac{m_c \delta(s-L)}{(m+M)L} \right) g \frac{\partial w}{\partial s} + (M+m) \left(1 + \frac{m_c \delta(s-L)}{(m+M)L} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.109)$$

Fazendo algumas considerações, como fluxo de escoamento constante e negligenciando a ação da gravidade, a Equação (2.109) se torna mais simples, de acordo com a Equação (2.110).

$$EI \left(1 + a \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + MU^2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + 2MU \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} + (M + m) \left(1 + \frac{m_c \delta(s-L)}{(m+M)L} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.110)$$

Sendo o primeiro termo da Equação (2.110) representa a rigidez a flexão do sistema, o segundo termo representa a força de Coriolis, o terceiro termo representa a força centrífuga e, o quarto termo representa a inércia da massa concentrada.

$$\xi = \frac{s}{L}, \quad \eta = \frac{w}{L}, \quad \tau = \left(\frac{EI}{m+M} \right)^{1/2} \frac{t}{L^2}, \quad \alpha = \left(\frac{EI}{m+M} \right)^{1/2} \frac{a}{L^2}, \quad (2.111)$$

$$u = \left(\frac{M}{EI} \right)^{1/2} UL, \quad \beta = \frac{M}{m+M}, \quad \mu = \frac{m_c}{(m+M)L}$$

Adimensionalizando este equação, através das relações (2.111), obtêm-se a equação linear adimensional, dada pela Equação (2.112).

$$\alpha \dot{\eta}'''' + \eta'''' + u^2 \eta'' + 2u\sqrt{\beta} \dot{\eta}' + (1 + \mu \delta(\xi - 1)) \ddot{\eta} = 0, \quad (2.112)$$

onde $(\)'' = \partial^2 (\) / \partial \xi^2$, $(\)''' = \partial^3 (\) / \partial \xi^3$, $(\)'''' = \partial^4 (\) / \partial \xi^4$, $(\)^\bullet = \partial (\) / \partial \tau$ e, $(\)^{\bullet\bullet} = \partial^2 (\) / \partial \tau^2$.

2.3 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

A análise de sistemas dinâmicos contínuos com um número infinito de graus de liberdade é uma tarefa bastante árdua. Para facilitar a análise do problema, é usual utilizar um processo de discretização, o tubo passa a ser descrito por um conjunto de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem no tempo que, por sua vez, pode ser transformado em um sistema de

equações diferenciais de primeira ordem. Este processo de discretização permite o uso de um grande respaldo teórico além de ferramentas numéricas desenvolvidas para análise de sistemas dinâmicos discretos.

Para tal processo utilizou-se o método de Galerkin, o qual considera que o deslocamento transversal adimensional do tubo η pode ser representado por uma superposição de modos normais $\phi(\xi)$ de uma viga, como mostra a Equação (2.113) e, isto é possível desde que estas funções $\phi(\xi)$ satisfaçam as condições de contorno do sistema e sejam linearmente independentes.

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\xi) q_i(\tau) \quad (2.113)$$

Onde, ϕ_i é o modo normal da viga, q_i é a amplitude do modo e n é o número de modos.

2.3.1 Discretização da equação linear de movimento

Discretizou-se o sistema contínuo linear através do método de Galerkin a partir de autofunções $\phi(\xi)$, de uma viga biapoiada, biengastada e em balanço, a serem utilizadas como um conjunto adequado de funções de base e, $q(\tau)$ as respectivas coordenadas principais, de acordo com a Equação (2.113).

Segundo Paz (1984), a frequência natural dimensional Ω_n de uma viga pode ser determinada por:

$$\Omega_n = C_n \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (2.114)$$

Pode-se normalizar a Equação (2.114) através da relação (2.115):

$$\omega_n = \Omega_n \sqrt{\frac{m L^4}{E I}} \quad (2.115)$$

Assim sendo, substituindo a Equação (2.114) na Equação (2.115), obtêm-se a frequência natural adimensional dada por:

$$\omega_n = C_n \quad (2.116)$$

Sendo $C_n = \lambda_n^2$, onde n referencia a ordem da frequência natural, com n variando de um até o número de modos e λ_n são os autovalores relacionados às frequências naturais ω_n . O valor da constante C_n varia de acordo com a condição de contorno da viga. Em sequência mostra-se os diferentes valores de frequências naturais e expansões dos modos de viga para as condições de contorno a serem analisadas.

2.3.1.1 Viga simplesmente apoiada

O modo de uma viga simplesmente apoiada é dado pela Equação (2.117).

$$\phi_i(x) = \text{sen} \left(\frac{i\pi x}{L} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.117)$$

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (2.118)$$

Para um viga biapoiada têm-se que:

$$\lambda_i = i\pi \quad (2.119)$$

Portanto, substituindo-se as Equações (2.119) e (2.118), que representam o deslocamento longitudinal adimensional do tubo, na Equação (2.117), têm-se o modo adimensional de uma viga simplesmente apoiada, dado por:

$$\phi_i(\xi) = \text{sen}(\lambda_i \xi), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.120)$$

Na Tabela 2.1 são apresentados alguns valores do coeficiente C_n para cada respectivo modo i .

Tabela 2.1- Frequencias naturais para vigas simplesmente apoiadas.

i	C_n	λ_i
1	π^2	π
2	$4 \pi^2$	2π
3	$9 \pi^2$	3π
4	$16 \pi^2$	4π
5	$25 \pi^2$	5π

Fonte: Paz(1984).

2.3.1.2 Viga biengastada

O modo de uma viga biengastada é dado por:

$$\phi_i(x) = (\cosh(\lambda_i x) + \cos(\lambda_i x)) - \sigma_i (\sinh(\lambda_i x) + \sin(\lambda_i x)) \quad (2.121)$$

Substituindo a Equação(2.118) na Equação(2.121), têm-se o modo adimensional de uma viga biengastada:

$$\phi_i(\xi) = (\cosh(\lambda_i \xi) + \cos(\lambda_i \xi)) - \sigma_i (\sinh(\lambda_i \xi) + \sin(\lambda_i \xi)), \quad (2.122)$$

onde:

$$\sigma_i = \frac{\cos(\lambda_i) - \cosh(\lambda_i)}{\text{sen}(\lambda_i) - \sinh(\lambda_i)} \quad (2.123)$$

Na Tabela 2.2 são apresentados alguns valores de coeficientes C_n e σ_i para o cálculo das frequencias naturais de uma viga biengastada.

Tabela 2.2- Valores dos coeficientes C_n e σ_i para vigas biengastadas.

i	C_n	λ_i	σ_i
1	22,3733	4,73	0,982502
2	61,6728	7,8532	1,000777
3	120,9034	10,9956	0,999967
4	199,8594	14,1372	1,000001
5	298,5555	17,2788	1,000000

Fonte: Paz(1984).

2.3.1.3 Viga em balanço

O modo de uma viga em balanço é dado pela Equação (2.124):

$$\phi_i(x) = (\cosh(\lambda_i x) + \cos(\lambda_i x)) - \sigma_i (\sinh(\lambda_i x) + \sin(\lambda_i x)) \quad (2.124)$$

Substituindo a Equação (2.118) na Equação (2.124), têm-se o modo adimensional de uma viga biengastada, dado por:

$$\phi_i(\xi) = (\cosh(\lambda_i \xi) + \cos(\lambda_i \xi)) - \sigma_i (\sinh(\lambda_i \xi) + \sin(\lambda_i \xi)) \quad (2.125)$$

Onde:

$$\sigma_i = \frac{\cos(\lambda_i) - \cosh(\lambda_i)}{\sin(\lambda_i) - \sinh(\lambda_i)} \quad (2.126)$$

Na Tabela 2.3 são apresentados alguns valores de coeficientes C_n e σ_i para o cálculo das frequências naturais de uma viga em balanço.

Tabela 2.3- Valores dos coeficientes C_n e σ_i para vigas em balanço.

i	C_n	λ_i	σ_i
1	3,5160	1,8751	0,734096
2	22,0345	4,6941	1,018466
3	61,6972	7,8548	0,999225
4	120,0902	10,9586	1,000033
5	199,8600	14,1372	1,000000

Fonte: Paz(1984).

Portanto, aplicando-se o método de Galerkin no sistema linear sem amortecimento chega-se a um sistema de n equações diferenciais ordinárias acopladas, isso significa que as equações

não podem ser resolvidas individualmente, apenas simultaneamente. Para resolver este problema deve-se realizar um procedimento denominado desacoplamento modal.

O desacoplamento modal só é possível em sistemas lineares, portanto, considera-se um sistema linear com n graus de liberdade, que após ser discretizado pode ser escrito matricialmente como:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.127)$$

Onde \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{x} , e $\ddot{\mathbf{x}}$ são denominados como matrizes de massa, de rigidez, vetores de deslocamentos, e de acelerações respectivamente, e são dadas por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & m_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & m_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & m_4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & m_n \end{bmatrix} \quad (2.128)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1n} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{1n} & k_{2n} & k_{3n} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.129)$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{Bmatrix} \quad (2.130)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \ddot{x}_n(t) \end{Bmatrix} \quad (2.131)$$

As matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} são simétricas, sendo que a primeira é diagonal. A Equação (2.127) é um sistema de equações diferenciais homogêneas de segunda ordem no tempo que admite soluções do tipo:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} \cos(\omega t) \quad (2.132)$$

Sendo \mathbf{a} um vetor solução. Substituindo a Equação (2.132) na Equação (2.127), têm-se:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (2.133)$$

Fazendo $\lambda = \omega^2$, chega-se a equação característica para tal sistema, dada por:

$$\left| \mathbf{K} - \lambda^2 \mathbf{M} \right| \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (2.134)$$

A Equação (2.134) representa um problema de autovalor, portanto, existem n soluções não triviais desta equação e para cada autovalor λ_i existe um vetor solução correspondente \mathbf{a}_i denominado autovetor. Como condição necessária para que a Equação (2.134) possua solução não trivial é necessário que a matriz característica seja singular, ou seja:

$$\left| \mathbf{K} - \lambda^2 \mathbf{M} \right| = 0 \quad (2.135)$$

As raízes da Equação (2.135) são os autovalores λ_i que representam as frequências naturais do sistema e os correspondentes autovetores \mathbf{a}_i , obtidos através da Equação (2.134), representam os modos principais de vibração.

Pode-se normalizar o vetor solução \mathbf{a} multiplicando-o por uma constante c para um determinado modo r , então a Equação (2.133) pode ser escrita como:

$$\mathbf{K} \mathbf{a}_r c_r - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{a}_r c_r = \mathbf{0} \quad (2.136)$$

Fazendo $\mathbf{a}_r c_r = \boldsymbol{\varphi}_r$ e substituindo na Equação (2.136), têm-se:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_r - \omega^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_r = \mathbf{0} \quad (2.137)$$

Sendo $\boldsymbol{\varphi}_r$ denominado vetor modal. Da propriedade de ortogonalidade dos modos têm-se para um determinado modo r e s :

$$\boldsymbol{\varphi}_r^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_s = 0 \quad r \neq s \quad (2.138)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_r^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_s = 0 \quad r \neq s \quad (2.139)$$

Portanto, a matriz de massa e de rigidez são ortogonais aos modos r e s . Para $r = s$, têm-se:

$$\boldsymbol{\varphi}_r^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_s = K_r \quad r = s \quad (2.140)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_r^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_s = M_r \quad r = s \quad (2.141)$$

Sendo K_r e M_r escalares positivos, denominados rigidez generalizada e massa generalizada respectivamente e, para todo o sistema obtêm-se:

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{K} \quad (2.142)$$

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{M} \quad (2.143)$$

Em que $\boldsymbol{\Phi}$ é denominada matriz modal, \mathbf{M} e \mathbf{K} são as matrizes de massa e rigidez generalizadas, dadas por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & M_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & M_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & M_4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & M_n \end{bmatrix} \quad (2.144)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & K_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & K_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & K_4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & K_n \end{bmatrix} \quad (2.145)$$

$$\Phi = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \varphi_4 \quad \varphi_n] \quad (2.146)$$

Onde \mathbf{M} e \mathbf{K} são diagonais. As Equações (2.127) precisam estar em função de coordenadas generalizadas q para que o sistema seja desacoplado e, portanto, cada uma das n equações poderão ser resolvidas independentemente como se tivesse apenas um grau de liberdade.

A resposta de um sistema com vários graus de liberdade pelo método da superposição modal é definido como o somatório das respostas de cada modo, individualmente, portanto, encontrar um sistema de coordenadas desacopladas é a essência do método. Tais coordenadas são chamadas de coordenadas principais ou coordenadas normais.

Portanto, introduz-se um conjunto de coordenadas \mathbf{q} , definidas como:

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{q} \quad (2.147)$$

Sendo:

$$\mathbf{q} = \{ q(x_1) \quad q(x_2) \quad q(x_3) \quad q(x_4) \quad q(x_n) \} \quad (2.148)$$

Substituindo a Equação (2.147) na Equação (2.127) e multiplicando pela matriz modal transposta Φ^T , obtêm-se:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.149)$$

Aplicando-se as relações (2.142) e (2.143) na Equação (2.149), chega-se a:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.150)$$

Sendo a Equação (2.150), um sistema desacoplado de n equações diferenciais ordinárias linearmente independentes. O sistema desacoplado pode ser facilmente resolvido levando em consideração as condições iniciais $\mathbf{q}(0)$ e $\dot{\mathbf{q}}(0)$.

Como o sistema linear em análise conta com a presença de amortecimento, então a Equação (2.127) passa a ser dada por:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.151)$$

Onde \mathbf{C} é a matriz de amortecimento, que é dada por:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ c_{1n} & c_{2n} & c_{3n} & \cdots & c_{nm} \end{bmatrix} \quad (2.152)$$

Considerando que o amortecimento seja viscoso, ou que pode ser aproximado como tal. Neste caso, os autovalores e autovetores não são mais reais. O procedimento que se segue foi realizado por Bishop e Johnson (1960) e aplica-se a casos em que as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{K} e \mathbf{C} são simétricas, sendo esta última derivada de uma função dissipativa. As seguintes matrizes particionadas \mathbf{B} , \mathbf{E} , e o vetor \mathbf{z} de ordem $2N$ são definidas como:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (2.153)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (2.154)$$

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (2.155)$$

A equação de segunda ordem (2.151) poder ser reduzida a um sistema de primeira ordem, conforme Equação (2.156).

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{E}\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (2.156)$$

O procedimento adiante é o mesmo para sistema conservativos. Assumindo soluções do tipo:

$$\mathbf{z} = \mathbf{a}e^{\lambda t} \quad (2.157)$$

a equação reduzida (2.156), leva ao problema de autovalor descrito por:

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{Y}| \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (2.158)$$

Onde :

$$\mathbf{Y} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{E} \quad (2.159)$$

Os autovalores, e consequentemente os autovetores calculados são termos complexos. O tipo de bifurcação em sistemas não conservativos é a bifurcação do tipo *hopf*, o que caracteriza o fenômeno de *flutter* e ocorre quando a bifurcação é caracterizada por um autovalor imaginário. Matematicamente a instabilidade por *flutter* é caracterizada por um par de autovalores atravessando a fronteira dos números reais negativos para os reais positivos, assim que a velocidade do fluido é incrementada até chegar à velocidade crítica em que a parte imaginária torna-se negativa.

2.3.2 Discretização da equação não linear de movimento

Discretizou-se a equação diferencial parcial não linear que representa a equação de equilíbrio de um tubo em balanço, de acordo com o método proposto por Païdoussis e Issid (1974),

utilizando o método de Galerkin, substituindo a Equação (2.113) na Equação (2.77), multiplicando por $\phi_i(\xi)$ e integrando de zero a um, chega-se a um modelo simplificado, como mostra a Equação (2.160).

$$\ddot{q}_i + C_{ij} \dot{q}_j + K_{ij} q_j + \alpha_{ijkl} q_j q_k q_l + \beta_{ijkl} q_j q_k \dot{q}_l + \gamma_{ijkl} q_j \dot{q}_k \dot{q}_l = 0 \quad (2.160)$$

$$i, j, k, l=1,2,\dots,n.$$

Em que C_{ij} , K_{ij} , α_{ijkl} , β_{ijkl} e γ_{ijkl} são coeficientes calculados a partir das autofunções $\phi_i(\xi)$ e são dados por:

$$C_{ij} = \alpha \lambda_i^2 \delta_{ij} + \sqrt{\beta} u a_{ij} \quad (2.161)$$

$$a_{ij} = \int_0^1 \phi_i \phi_j' d\xi \quad (2.162)$$

$$k_{ij} = \lambda_i^4 \delta_{ij} + u^2 b_{ij} + \gamma (a_{ij} - d_{ij}) \quad (2.163)$$

$$b_{ij} = \int_0^1 \phi_i \phi_j'' d\xi \quad (2.164)$$

$$d_{ij} = \int_0^1 \phi_i \phi_j'' (1-\xi) d\xi \quad (2.165)$$

$$\alpha_{ijkl} = u^2 a_{ijkl} + \gamma b_{ijkl} + c_{ijkl} \quad (2.166)$$

$$\beta_{ijkl} = 2u \sqrt{\beta} d_{ijkl} \quad (2.167)$$

$$\gamma_{ijkl} = \int_0^1 \phi_i \phi_j' \left(\int_0^1 \phi_k' \phi_l' d\xi \right) d\xi - \int_0^1 \phi_k' \phi_j'' \left(\int_\xi^1 \int_0^\xi \phi_k' \phi_l' d\xi d\xi \right) d\xi, \quad (2.168)$$

sendo ϕ_i' e ϕ_i'' representam a primeira e a segunda derivada em relação ao deslocamento longitudinal adimensional do tubo ξ e, δ_{ij} o delta de Kronecker. As constantes a_{ijkl} , b_{ijkl} , c_{ijkl} e d_{ijkl} são integradas numericamente como:

$$\begin{aligned} a_{ijkl} = & \int_0^1 \phi_i \phi_j'' \phi_k' \phi_l' d\xi - \int_0^1 \phi_i \phi_j' \left(\int_0^\xi \phi_k' \phi_l'' d\xi \right) d\xi \\ & + \int_0^1 \phi_i \phi_j'' \left(\int_\xi^1 \int_0^\xi \phi_k' \phi_l'' d\xi d\xi \right) d\xi \end{aligned} \quad (2.169)$$

$$\begin{aligned} & - \int_0^\xi \phi_i \phi_j'' \left(\int_0^\xi \phi_k' \phi_l'' d\xi \right) d\xi \\ b_{ijkl} = & -\frac{3}{2} \int_0^1 \phi_i \phi_j'' \phi_k' \phi_l' (1-\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^1 \phi_i \phi_j' \phi_k' \phi_l' d\xi \\ & + \int_0^1 \phi_i \phi_j' \left(\int_0^\xi \phi_k' \phi_l'' (1-\xi) d\xi \right) d\xi \end{aligned} \quad (2.170)$$

$$- \int_0^1 \phi_i \phi_j'' \left(\int_\xi^1 \int_0^\xi \phi_k' \phi_l'' (1-\xi) d\xi d\xi \right) d\xi$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \phi_i \phi_j'' \left(\int_{\xi}^1 \phi_k' \phi_l' d\xi \right) d\xi \\
c_{ijkl} = & 3 \int_0^1 \phi_i \phi_j' \phi_k' \phi_l'' d\xi + \int_0^1 \phi_i \phi_j'' \phi_k' \phi_l' d\xi \\
& - \int_0^1 \phi_i \phi_j' \left(\int_{\xi}^1 \int_0^{\xi} \phi_k'' \phi_l''' d\xi d\xi \right) d\xi \tag{2.171}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \phi_i \phi_j' \left(\int_0^{\xi} \phi_k'' \phi_l''' d\xi \right) d\xi - \int_0^1 \phi_i \phi_j'' \left(\int_{\xi}^1 \phi_k'' \phi_l''' d\xi \right) d\xi \\
d_{ijkl} = & \int_0^1 \phi_i \phi_j' \phi_k' \phi_l' d\xi - \int_0^1 \phi_i \phi_j' \left(\int_0^{\xi} \phi_k' \phi_l' d\xi \right) d\xi \\
& + \int_0^1 \phi_i \phi_j'' \left(\int_{\xi}^1 \int_0^{\xi} \phi_k' \phi_l' d\xi d\xi \right) d\xi - \int_0^1 \phi_i \phi_j'' \left(\int_{\xi}^1 \phi_k' \phi_l' d\xi \right) d\xi \tag{2.172}
\end{aligned}$$

Considerando que o fluxo do fluido não seja simplesmente estático, e sim uma superposição de uma parcela estática e outra dinâmica, como mostra a Equação (2.173)

$$u = u_0 (1 + \psi \cos \omega \tau) \tag{2.173}$$

Em que u_0 é a parcela estática, $\psi \cos(\omega \tau)$ é a parcela dinâmica, sendo ψ a amplitude, ω a frequência da excitação. Os termos C_{ij} e K_{ij} passam a ser:

$$C_{ij} = \alpha \lambda_j^4 \delta_{ij} + 2\beta^{1/2} u_0 (1 + \psi \sin \omega \tau) b_{ij} \tag{2.174}$$

$$\begin{aligned} K_{ij} = & \lambda_j^4 \delta_{ij} + u_0^2 (1 + \psi \operatorname{sen} \omega \tau)^2 c_{ij} \\ & + \beta^{1/2} \psi u_0 \omega \cos \omega \tau (d_{ij} - c_{ij}) + \gamma (b_{ij} - c_{ij} + d_{ij}) \end{aligned} \quad (2.175)$$

CAPÍTULO 3

RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são realizadas as análises lineares e não-lineares dos resultados numéricos para um tubo de comprimento L , com rigidez a flexão EI , massa por unidade de comprimento m , com fluido interno em escoamento de massa por unidade de comprimento igual a M e velocidade U , massa concentrada m_c e, considerando três condições de contorno distintas: a) um tubo em balanço, b) um tubo biapoiado e, c) um tubo biengastado.

Para a análise das equações de movimento foram empregadas diversas ferramentas numéricas, a saber: integração das equações diferenciais de movimento usando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, algoritmo para o cálculo das fronteiras de instabilidade e escape, e o cálculo de diagramas de bifurcação. Todos os desenvolvimentos algébricos deste trabalho foram realizados usando-se o programa de álgebra simbólica MAPLE 14 e as implementações computacionais foram realizadas através da linguagem de programação C++.

As equações diferenciais parciais foram discretizadas utilizando-se o método de Galerkin, chegando-se a um modelo simplificado, com quatro graus de liberdade, capaz de descrever com precisão o processo de perda de estabilidade do tubo.

Com a Equação (2.112) discretizada em quatro graus de liberdade chega-se a um sistema de quatro equações diferenciais ordinárias acopladas, ou seja, existe mais de um grau de liberdade numa mesma equação, isso significa que as equações não podem ser resolvidas individualmente, apenas simultaneamente. Portanto, aplicou-se o método do desacoplamento modal, discutido no capítulo 2, obtendo-se quatro equações diferenciais ordinárias desacopladas de segunda ordem no tempo. Todo este processo permitiu a análise do sistema através dos autovalores obtidos a partir da solução não trivial da equação característica do sistema.

3.1.1 Diagramas de Argand

Os diagramas de Argand são diagramas que permitem analisar a instabilidade de um sistema linear, através da análise dos autovalores (λ) ou das autofrequências (Ω), que se relacionam de acordo com a Equação (3.1).

$$\lambda = \Omega^2 \quad (3.1)$$

Os autovalores encontrados, a partir da solução da equação característica, possuem uma parte real e outra imaginária como ilustra a Equação (3.2), onde Re é a parcela real do autovalor e está relacionada à rigidez do sistema e Im a parcela imaginária que está relacionada ao amortecimento do sistema.

$$\lambda = \pm \text{Re} \pm \text{Im} \quad (3.2)$$

Para o caso em estudo, a estabilidade pode ser analisada considerando a velocidade do fluido, u , como o parâmetro de controle da análise na qual, para uma certa velocidade, denominada velocidade crítica u_{cr} , o sistema perde estabilidade através de uma bifurcação do tipo *pitchfork* (divergência) ou Hopf (*flutter*) dependendo da condição de contorno do sistema. A Tabela 3.1 ilustra a ocorrência de instabilidade por divergência e *flutter* de acordo com os sinais dos autovalores.

Tabela 3.1 - Tipo de instabilidade pela análise dos autovalores.

Autovalor (λ)	Re	Im	Tipo de instabilidade
$\pm \text{Re} \pm \text{Im}$	0	< 0	Divergência
$\pm \text{Re} \pm \text{Im}$	> 0	< 0	<i>Flutter</i>

Os diagramas de Argand foram realizados utilizando a Equação (2.112). Discretizou-se o sistema linear através do método de Galerkin de acordo com o método apresentado na Seção 2.3.

Estudou-se a influência da massa do fluido nas velocidades críticas do mesmo, esse estudo foi realizado através da análise dos autovalores do sistema linear e da influência do parâmetro β dado por:

$$\beta = \frac{M}{m + M} \quad (3.3)$$

Todos diagramas de Argand foram obtidos para os valores de parâmetros adimensionais exibidos na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Valores adimensionais para os diagramas de Argand.

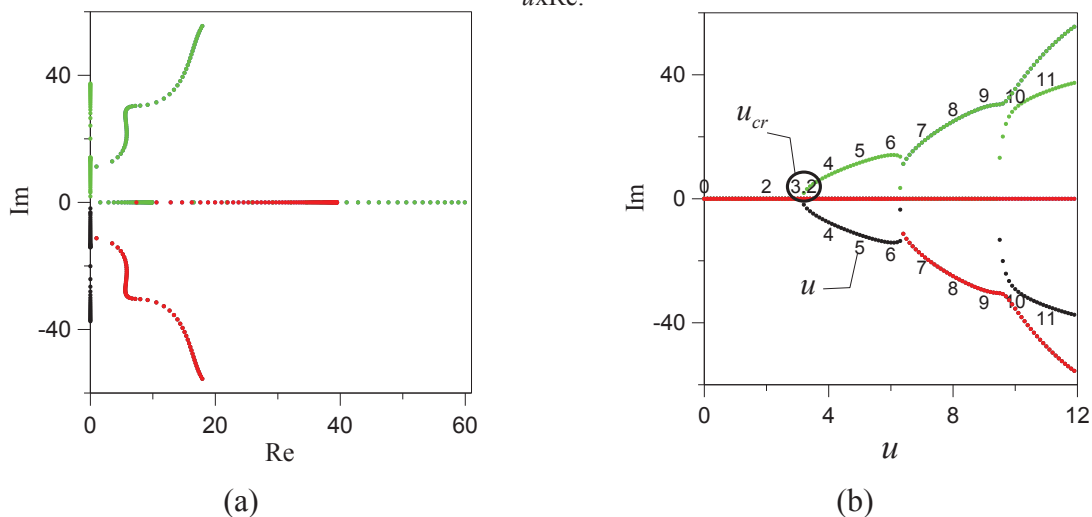
Parâmetro	Valor
α	0.0
μ	0.0

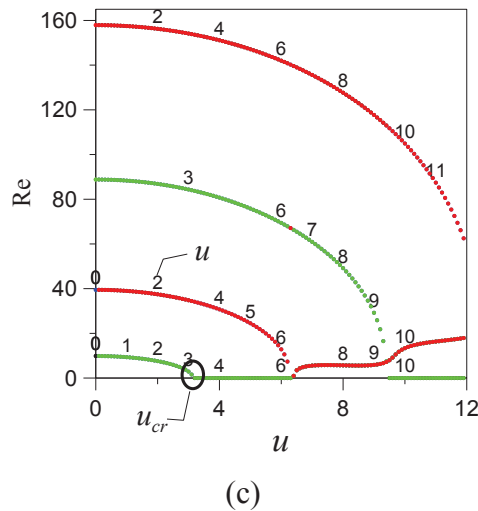
Onde α é o parâmetro adimensional do amortecimento visco-elástico e μ o parâmetro adimensional da massa concentrada.

3.1.1.1 Tubo simplesmente apoiado

Na Figura 3.1 são apresentados os diagramas de Argand para um tubo simplesmente apoiado, sem massa concentrada e com $\beta=0.1$. A Figura 3.1(a) mostra a variação da parte real e imaginária dos autovalores, a Figura 3.1(b) relaciona a parte imaginária do autovalor com o aumento da velocidade do fluido e, a Figura 3.1(c) relaciona a parte real do autovalor com a velocidade do fluido.

Figura 3.1 - Diagramas de Argand para um tubo simplesmente apoiado com $\beta=0,1$: (a) $\text{Re} \times \text{Im}$; (b) $u \times \text{Im}$; (c) $u \times \text{Re}$.

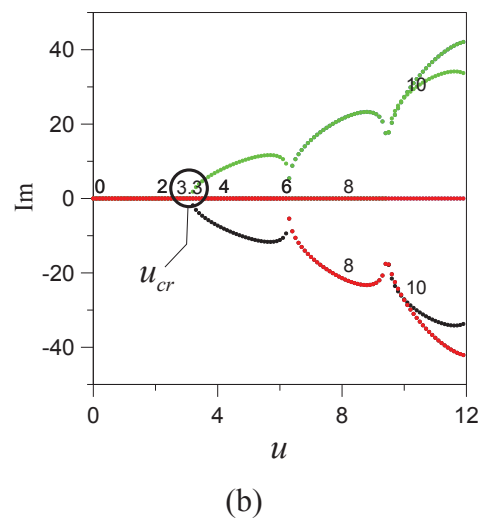
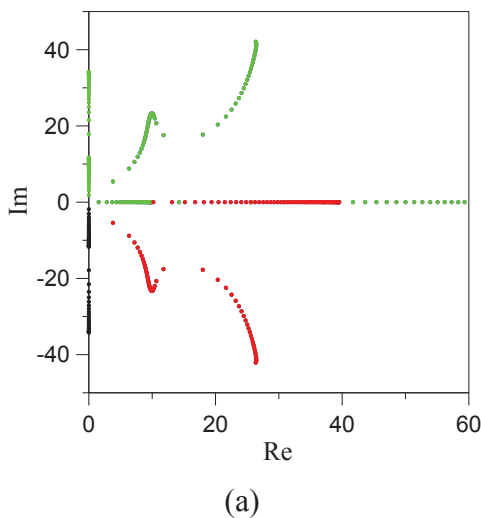


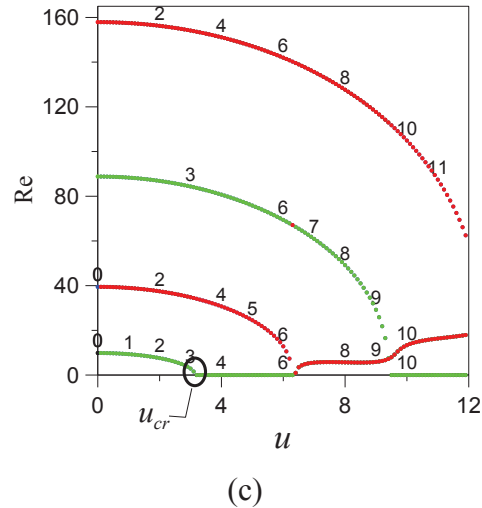


Um tubo simplesmente apoiado é um sistema conservativo com autovalores puramente reais que vão diminuindo à medida que a velocidade do fluido u cresce. Para $u = \pi$ o sistema perde estabilidade no primeiro modo por divergência através de uma bifurcação do tipo *pitchfork* onde os autovalores assumem valores puramente imaginários negativos, portanto, a velocidade crítica do sistema u_{cr} é igual a π .

Considere agora um tubo simplesmente apoiado sem massa concentrada e com $\beta = 0,3$. A Figura 3.2(a) apresenta a variação da parte real e imaginária dos autovalores, a Figura 3.2(b) relaciona a parte imaginária do autovalor com o incremento da velocidade do fluido e a Figura 3.2(c) relaciona a parte real do autovalor com a velocidade do fluido.

Figura 3.2 - Diagrama de Argand para um tubo simplesmente apoiado com $\beta=0,3$: (a) $Re \times Im$; (b) $u \times Im$; (c) $u \times Re$.

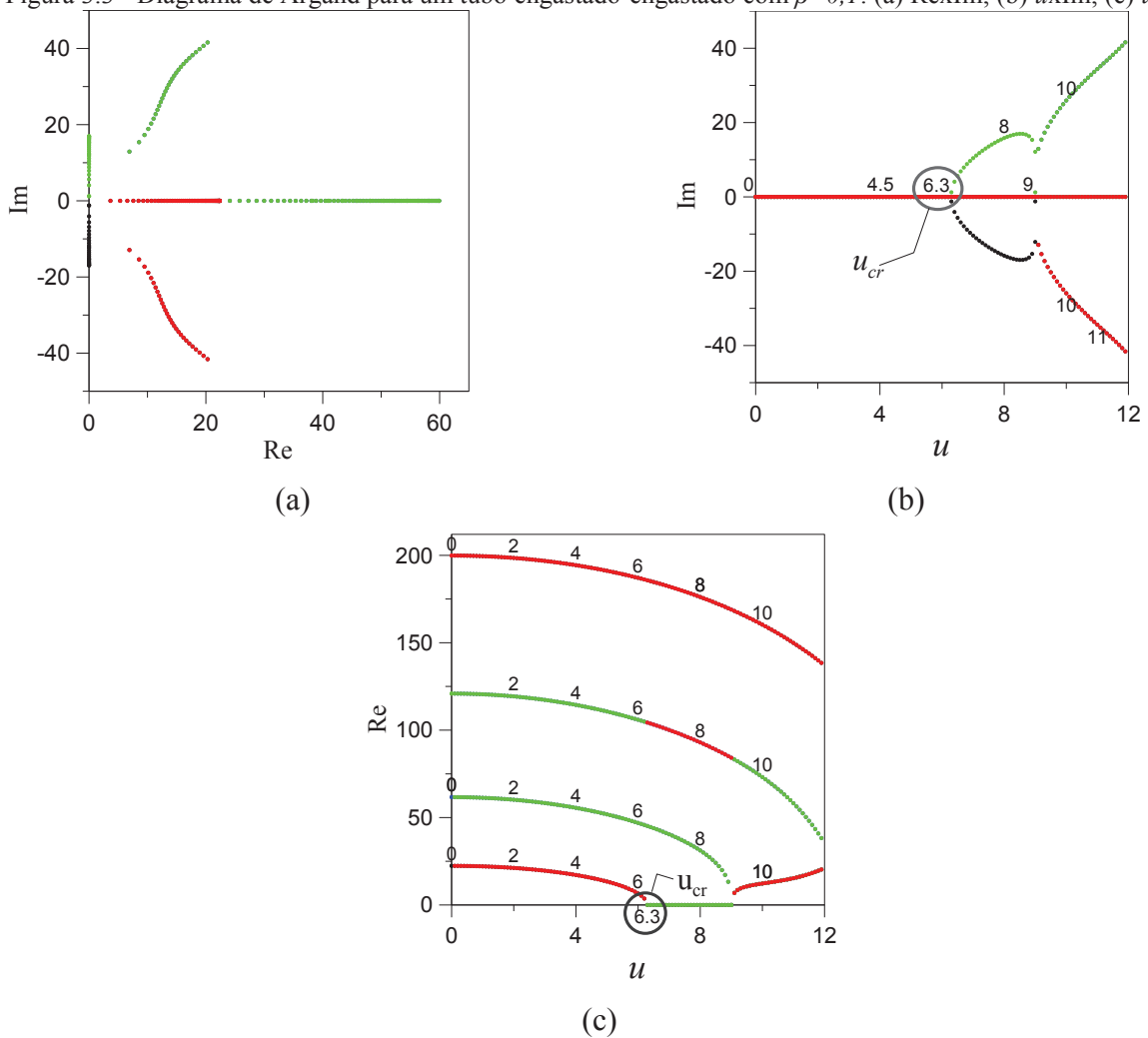




Segundo as Figura 3.2(b) e Figura 3.2(c) os autovalores do sistema são puramente reais até a velocidade do fluido $u = \pi$ e, após esta velocidade os valores são puramente imaginários, esta mudança caracteriza a perda de estabilidade do sistema por divergência através de uma bifurcação do tipo *pitchfork*, portanto, a velocidade crítica do sistema é $u_{cr} = \pi$. Como pode ser visto, para um tubo simplesmente apoiado o valor de β não altera a velocidade crítica do fluido.

3.1.1.2 Tubo biengastado

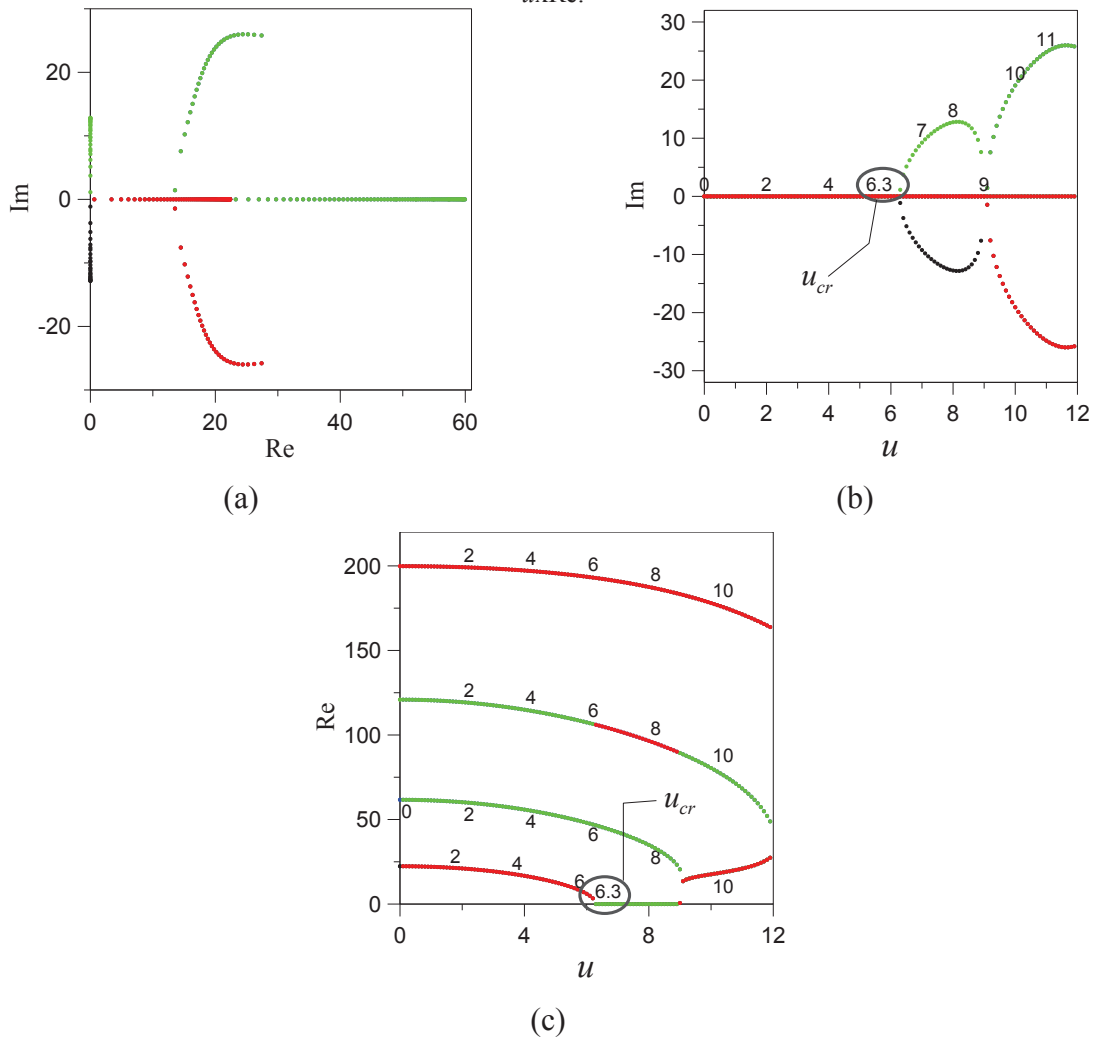
Na Figura 3.3 são apresentados os diagramas de Argand para um tubo engastado-engastado, sem massa concentrada e com $\beta = 0,1$. A Figura 3.3(a) mostra a variação da parte real e imaginária dos autovalores, a Figura 3.3(b) relaciona a parte imaginária do autovalor com o incremento da velocidade do fluido enquanto que a Figura 3.3(c) relaciona a parte real do autovalor com a velocidade do fluido.

Figura 3.3 - Diagrama de Argand para um tubo engastado-engastado com $\beta=0,1$: (a) $\text{Re}x\text{Im}$; (b) $ux\text{Im}$; (c) $ux\text{Re}$.

Um tubo biengastado é um sistema conservativo que para baixas velocidades do fluido os autovalores são puramente reais e, a medida que a velocidade do fluido é incrementada os autovalores vão diminuindo. Para $u = 2\pi$ o sistema perde estabilidade no primeiro modo por divergência através de uma bifurcação do tipo *pitchfork* onde os autovalores assumem valores puramente imaginários e negativos, portanto, a velocidade crítica do sistema u_{cr} é igual a 2π .

Na Figura 3.4 são apresentados os diagramas de Argand de um tubo engastado-engastado, sem massa concentrada e com $\beta = 0,3$. A Figura 3.4(a) mostra a variação da parte real e imaginária dos autovalores, a Figura 3.4(b) relaciona a parte imaginária do autovalor com o incremento da velocidade do fluido e a Figura 3.4(c) relaciona a parte real do autovalor com a velocidade do fluido.

Figura 3.4 - Diagramas de Argand para um tubo engastado-engastado com $\beta=0,3$: (a) $\text{Re}x\text{Im}$; (b) $u x\text{Im}$; (c) $u x\text{Re}$.

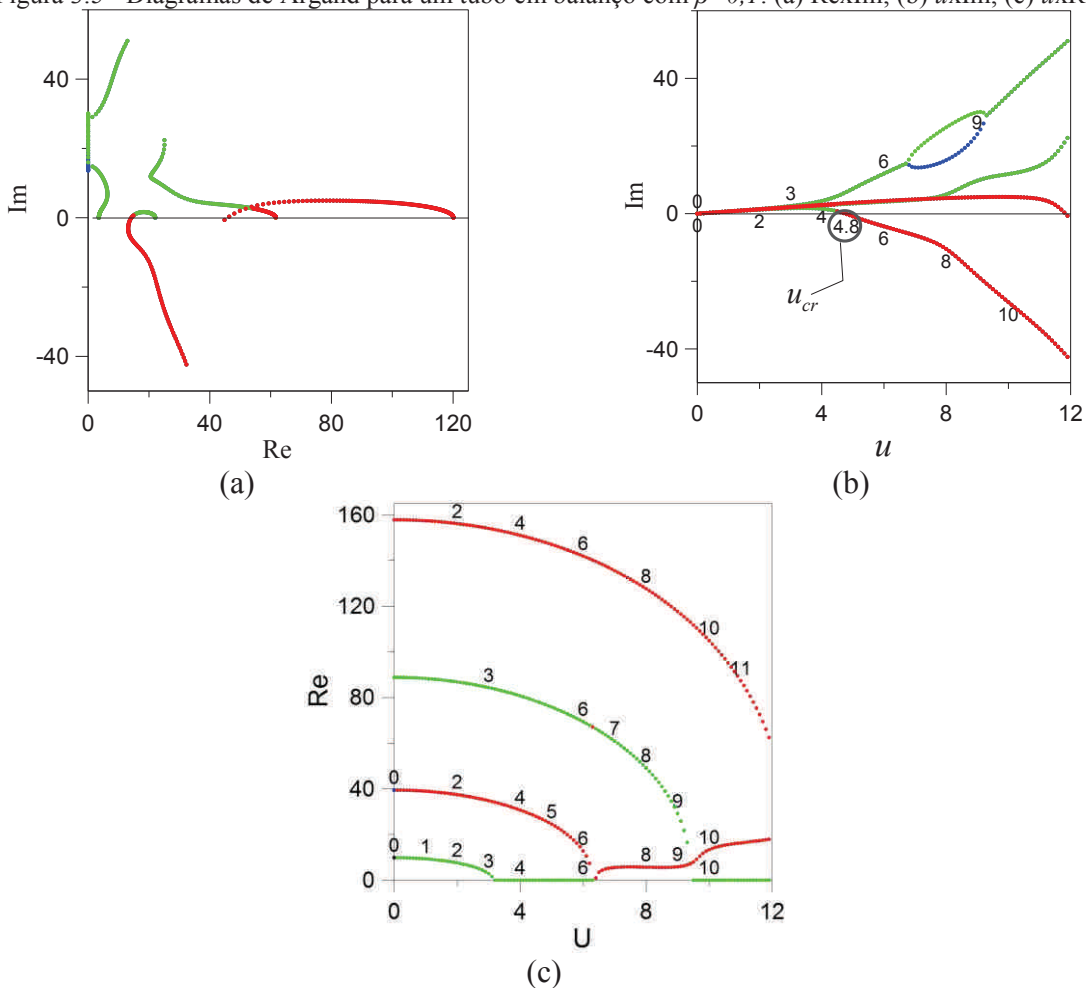


De acordo com a Figura 3.4(b) e Figura 3.4(c) os autovalores do sistema são puramente reais decrescentes até a velocidade do fluido $u = 2\pi$ e após esta velocidade os valores tornam-se puramente imaginários, caracterizando a perda de estabilidade do sistema por divergência através de uma bifurcação do tipo *pitchfork*, portanto, a velocidade crítica do sistema é $u_{cr} = 2\pi$. Comparando os resultados, verifica-se que o parâmetro β não influencia na velocidade crítica do fluido.

3.1.1.3 Tubo em balanço

Na Figura 3.5 são apresentados os diagramas de Argand para um tubo em balanço, sem massa concentrada e com $\beta = 0,1$. A Figura 3.5(a) mostra a variação da parte real e imaginária dos autovalores, a Figura 3.5(b) relaciona a parte imaginária do autovalor com o incremento da velocidade do fluido e a Figura 3.5(c) relaciona a parte real do autovalor com a velocidade do fluido.

Figura 3.5 - Diagramas de Argand para um tubo em balanço com $\beta=0,1$: (a) $\text{Re}x\text{Im}$; (b) $ux\text{Im}$; (c) $ux\text{Re}$.

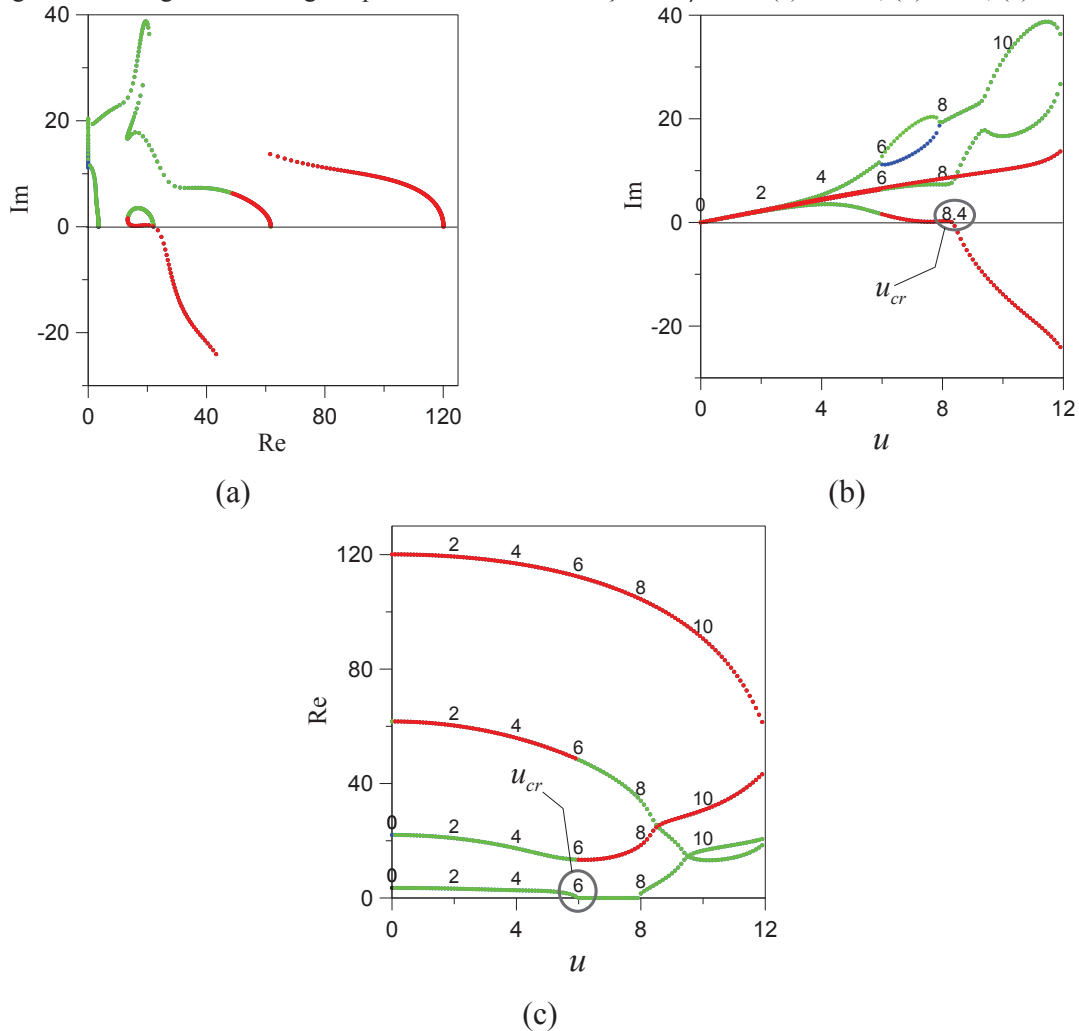


Um tubo engastado é um sistema não conservativo, portanto, para valores pequenos de velocidade do fluido u ($u < 4$, por exemplo) o fluxo do fluido induz amortecimento ao sistema fazendo com que este permaneça estável. À medida que esta velocidade cresce, a parcela imaginária do autovalor do primeiro modo decresce até se tornar negativo, fazendo com que o amortecimento seja negativo e o sistema sofra grandes oscilações, caracterizando a perda de estabilidade do sistema por *flutter*, através de uma bifurcação do tipo *hopf*.

De acordo com a Figura 3.5(b), a velocidade do fluido na qual a parcela imaginária do autovalor torna-se negativa é 4,8. Portanto a velocidade crítica do fluido para este sistema é $u_{cr} = 4,8$.

Na Figura 3.6 são apresentados os diagramas de Argand de um tubo em balanço, sem massa concentrada e com $\beta = 0,3$. A Figura 3.6(a) mostra a variação da parte real e imaginária dos autovalores, a Figura 3.6(b) relaciona a parte imaginária do autovalor com o incremento da velocidade do fluido e a Figura 3.6(c) relaciona a parte real do autovalor com a velocidade do fluido.

Figura 3.6 - Diagramas de Argand para um tubo em balanço com $\beta=0,3$: (a) $Re \times Im$; (b) $u \times Im$; (c) $u \times Re$.



De acordo com a Figura 3.6(b) o valor da velocidade do fluido, u , para o qual as parcelas imaginárias dos autovalores tornam-se negativas, fazendo com que o sistema perda estabilidade por *flutter*, através de uma bifurcação do tipo *hopf* é 8,4. Portanto a velocidade

crítica para este sistema é $u_{cr} = 8,4$. Na Tabela 3.3 são apresentadas as variações da velocidade crítica do fluido, para as condições de contorno analisadas, obtidas através dos diagramas de Argand.

Tabela 3.3 - Variação da velocidade crítica do fluido em função de β e das condições de contorno.

Condições de contorno	β	u_{cr}	Tipo de instabilidade
Tubo simplesmente apoiado	0,1	3,14	Divergência
	0,3	3,14	
Tubo engastado-engastado	0,1	6,28	Divergência
	0,3	6,28	
Tubo em balanço	0,1	4,8	<i>Flutter</i>
	0,3	8,4	

De acordo com a Tabela 3.3, em um tubo simplesmente apoiado ou biengastado, ao se variar o valor da relação β não há variação da velocidade crítica do fluido. Ao contrário, em um tubo em balanço, ao se incrementar o valor de β o valor da velocidade crítica cresce.

3.1.2 FRONTEIRAS DE INSTABILIDADE

Considera-se um tubo em balanço de comprimento L , com rigidez a flexão EI , massa por unidade de comprimento m , com fluido interno em escoamento de massa por unidade de comprimento M e velocidade U , massa concentrada m_c localizada ao longo do comprimento do tubo e coordenada curvilínea s , cuja equação de movimento linear é dada pela Equação (2.112).

Nota-se, através da Tabela 3.3, que para um tubo em balanço a velocidade crítica do fluido, u_{cr} , é dependente da relação entre a massa do fluido e a massa do sistema, β , dada pela Equação (3.3). Portanto, pode-se, também, analisar a estabilidade do sistema a partir de curvas que relacionam os valores de β com suas respectivas u_{cr} . São as chamadas fronteiras de instabilidade, que representam o limite a partir do qual para combinações de β e de velocidade do fluido o sistema perde estabilidade, ou seja, para combinações abaixo da fronteira a estrutura se encontra estável e para combinações acima da fronteira a estrutura torna-se instável.

Com a equação linear discretizada e desacoplada, têm-se interesse na solução não trivial da equação característica do sistema. Tal solução encontra-se em função dos parâmetros de

controle, como a velocidade do fluido (u), amortecimento visco-elástico (α), massa concentrada acoplada ao tubo (μ) e o parâmetro β . Como o objetivo é determinar os pontos de par ordenado (β, u_{cr}), atribuiu-se valores numéricos para determinados parâmetros, de acordo com o interesse da análise paramétrica.

3.1.2.1 Tubo em balanço sem massa concentrada

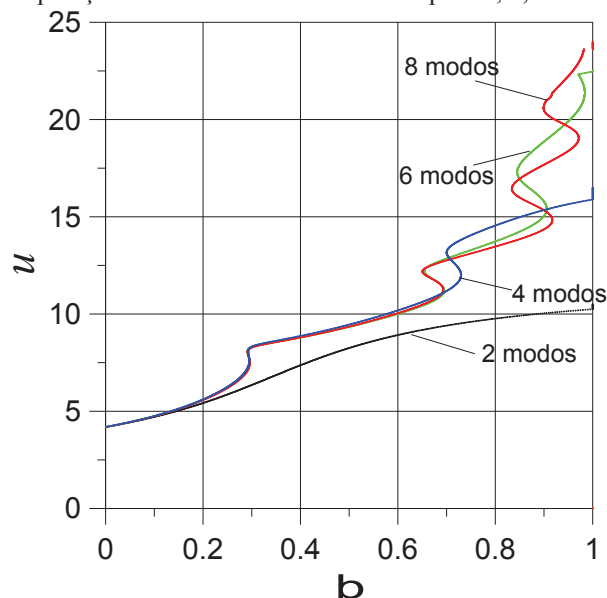
Analisou-se, primeiramente, a influência do número de modos nas curvas de instabilidade, para tanto, adotou-se os seguintes valores dos parâmetros adimensionais exibidos na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 - Parametros adimensionais para fronteiras de instabilidade.

Parâmetro	Valor
α	0.0
μ	0.0

A Figura 3.7 mostra a comparação entre as curvas de instabilidade considerando dois, quatro, seis e oito modos de viga de um tubo em balanço não amortecido e sem massa concentrada. Os trechos em formato de S são chamados de saltos e, são de extrema importância na análise da estabilidade do sistema, pois para um mesmo valor de β têm-se duas velocidade críticas.

Figura 3.7 - Comparação entre curvas de estabilidade para 2, 4, 6 e 8 modos de viga.



A partir da Figura 3.7 pode-se observar que o aumento do número de modos gera um aumento do número de saltos. A consideração de somente dois modos nesta análise não é capaz de

descrever corretamente os saltos e a medida que o número de modos é incrementado na análise observa-se uma melhor descrição das velocidades críticas e o aparecimento de saltos.. Para valores de β até 0.6, as curvas para quatro, seis e oito modos encontram-se sobrepostas, portanto, um modelo com quatro graus de liberdade torna-se adequado para descrever as regiões de estabilidade do sistema. Já para valores mais altos de β , 0.6 a 1.0, é preciso a consideração de pelo menos 6 modos para descrever corretamente as curvas de instabilidade do tubo.

Realizou-se uma segunda análise com o objetivo de avaliar a influência do amortecimento visco-elástico, α , no comportamento dinâmico do sistema linear. Para tanto, foram feitas algumas curvas de instabilidade com diferentes valores de amortecimento, organizadas conforme a Tabela 3.5.

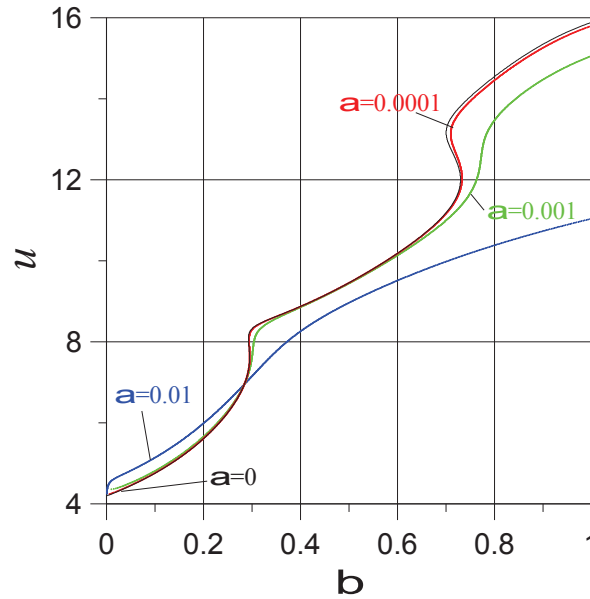
Tabela 3.5 – Valores dos parâmetros para análise da influencia do amortecimento.

Cor da curva	Valores dos parâmetros adimensionais
Azul	$\alpha = 0.01$ $\mu = 0$
Verde	$\alpha = 0.001$ $\mu = 0$
Vermelha	$\alpha = 0.0001$ $\mu = 0$
Preta	$\alpha = 0$ $\mu = 0$

Portanto, na Figura 3.8 mostra-se a comparação das fronteiras de instabilidade do tubo sem massa concentrada modelado com quatro modos de viga e valores incrementais de amortecimento adimensional. Sendo α dado por:

$$\alpha = \left(\frac{EI}{m + M} \right)^{1/2} \frac{a}{L^2} \quad (3.4)$$

Onde a representa o coeficiente de amortecimento de Kevin-Voigt. Pode-se observar que, à medida que o amortecimento é incrementado, a fronteira de estabilidade perde os saltos e desloca-se para baixo, ou seja, a velocidade crítica do fluido diminui, fazendo com que o sistema fique mais sensível e conseqüentemente mais instável, deixando claro que o amortecimento desestabiliza o sistema.

Figura 3.8 - Curvas de instabilidade para $\alpha=0$, $\alpha=0.01$, $\alpha=0.001$ e $\alpha=0.0001$.

3.1.2.2 Tubo em balanço com massa concentrada

Com o objetivo de analisar as regiões de estabilidade do sistema com a presença de uma massa concentrada localizada na extremidade livre do tubo, realizou-se uma análise paramétrica utilizando os parâmetros mostrados na Tabela 3.6.

Tabela 3.6 -- Valores dos parâmetros para análise da influencia da massa concentrada.

Cor da curva	Valores dos parâmetros adimensionais
Preta	$\alpha=0$ $\mu=0$
Azul	$\alpha=0$ $\mu=0.1$ $\xi=1.0$

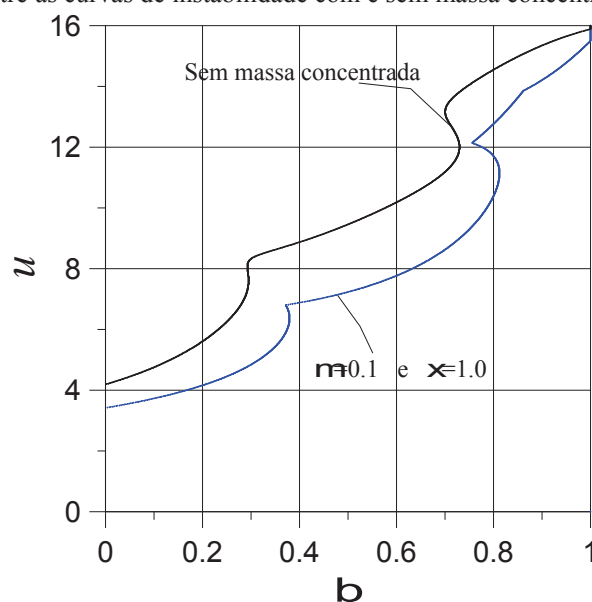
Portanto, ilustra-se na Figura 3.9 as curvas de instabilidade de um tubo em balanço com fluido interno em escoamento, não amortecido, modelado com quatro modos de viga, em que compara-se a influência da massa concentrada, m_c , na extremidade do tubo. Sendo:

$$\xi = \frac{s}{L}, \quad (3.5)$$

$$\mu = \frac{m_c}{(m + M)L}, \quad (3.6)$$

onde s representa a coordenada curvilínea ao longo do tubo, ξ é o deslocamento longitudinal adimensional do tubo e, μ é a constante adimensional relacionada à massa concentrada. Pode-se verificar que, com a presença da massa concentrada, m_c , na extremidade do tubo, a fronteira mantém os saltos, mas desloca-se para baixo, diminuindo seu tamanho, o que indica uma redução da velocidade crítica do sistema, deixando-o mais sensível, ou seja, mais instável se comparado com o sistema sem massa concentrada.

Figura 3.9 - Comparação entre as curvas de instabilidade com e sem massa concentrada na extremidade do tubo.



3.2 RESULTADOS NÃO LINEARES

A dinâmica não linear do sistema é descrita pelas equações diferenciais parciais (2.77) para o tubo em balanço e (2.108) para o tubo biapoado e biengastado. A análise de sistemas dinâmicos contínuos com um número infinito de graus de liberdade é uma tarefa bastante árdua. Para facilitar a análise do problema, é usual utilizar um processo de discretização, o tubo, cuja equação de movimento é uma equação diferencial parcial, passa a ser descrito por um conjunto de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem no tempo que, por sua vez, pode ser transformado em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Este processo de discretização permite o uso de um grande respaldo teórico além de ferramentas numéricas desenvolvidas para análise de sistemas dinâmicos discretos.

Para tal processo utilizou-se o método de Galerkin, o qual considera que o deslocamento transversal adimensional η pode ser representado por uma superposição de modos normais

$\phi(\xi)$ de uma viga, como mostra a Equação(3.7) e, isto é possível desde que estas funções $\phi(\xi)$ satisfaçam as condições de contorno do sistema e sejam linearmente independentes.

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\xi) q_i(\tau) \quad (3.7)$$

Onde, ϕ_i é o modo, q_i é a amplitude do modo e n é o número de modos. Neste trabalho, discretizou-se o sistema em quatro graus de liberdade, cujas expansões ϕ_i para as diferentes condições de contorno.

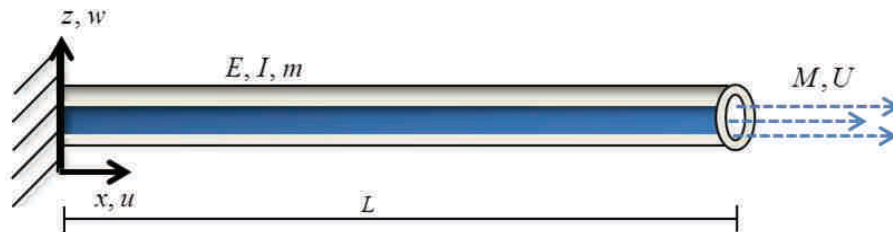
3.2.1 Fluxo contínuo

Neste item analisa-se o comportamento dinâmico não linear de um tubo em balanço com e sem a presença de uma massa concentrada.

3.2.1.1 Tubo em balanço sem massa acoplada

Considera-se um tubo em balanço de comprimento L , com rigidez a flexão EI , massa por unidade de comprimento m , com fluido interno em escoamento de massa por unidade de comprimento M e velocidade U e submetido a um regime de escoamento estático, conforme ilustra a Figura 3.10.

Figura 3.10 - Tubo em balanço submetido a um fluxo estático.



Para permitir um melhor desenvolvimento da análise paramétrica, foi feita uma mudança de variáveis através da consideração dos seguintes parâmetros adimensionais:

$$\xi = \frac{s}{L}, \quad \eta = \frac{w}{L}, \quad \tau = \left(\frac{EI}{m+M} \right)^{1/2} \frac{t}{L^2}, \quad \alpha = \left(\frac{EI}{m+M} \right)^{1/2} \frac{a}{L^2}, \quad (3.8)$$

$$u = \left(\frac{M}{EI} \right)^{1/2} U L, \quad \gamma = \frac{m + M}{EI} L^3 g, \quad \beta = \frac{M}{m + M},$$

chegando-se à equação de movimento dinâmica não linear dada pela Equação (2.77). Para todas as análises têm-se: para amortecimento visco-elástico $\alpha = 0.001$, gravidade $\gamma = 0$ e $\omega_1 = 3.51$, que é a frequência natural adimensional do primeiro modo, onde ocorre a perda de estabilidade do sistema.

Com a intenção de discutir a influência do parâmetro β no comportamento dinâmico do sistema, realizou-se quatro análises paramétricas, organizadas conforme a Tabela 3.7.

Tabela 3.7 – Análise paramétrica para fluxo estático e sem massa acoplada.

Análise	Valores dos parâmetros adimensionais
1	$\beta = 0.1$ $\alpha = 0.001$ $\gamma = 0$ $\omega_1 = 3.51$
2	$\beta = 0.2$ $\alpha = 0.001$ $\gamma = 0$ $\omega_1 = 3.51$
3	$\beta = 0.3$ $\alpha = 0.001$ $\gamma = 0$ $\omega_1 = 3.51$
4	$\beta = 0.4$ $\alpha = 0.001$ $\gamma = 0$ $\omega_1 = 3.51$

Na Figura 3.11 é apresentado, para a Análise 1, o diagrama de bifurcação para valores incrementais da velocidade do fluido. Pode-se observar que, para valores de u entre 0 e 4.8 o sistema apresenta solução trivial, ilustrada na Figura 3.12(a). Após o valor crítico de velocidade, $u_{cr} = 4.84$, o sistema passa a ter movimentos quase periódicos como pode-se comprovar pelo plano fase e seção de Poincaré ilustrados na Figura 3.12(c) e Figura 3.12(d), respectivamente. Os resultados das Figura 3.12(b), Figura 3.12(c) e Figura 3.12(d) foram

obtidos para o ponto (13.48, 0.1236) do diagrama de bifurcação no estado permanente, onde q_1 é amplitude do deslocamento da coordenada generalizada do primeiro modo.

Figura 3.11 – Diagrama de bifurcação para Análise 01

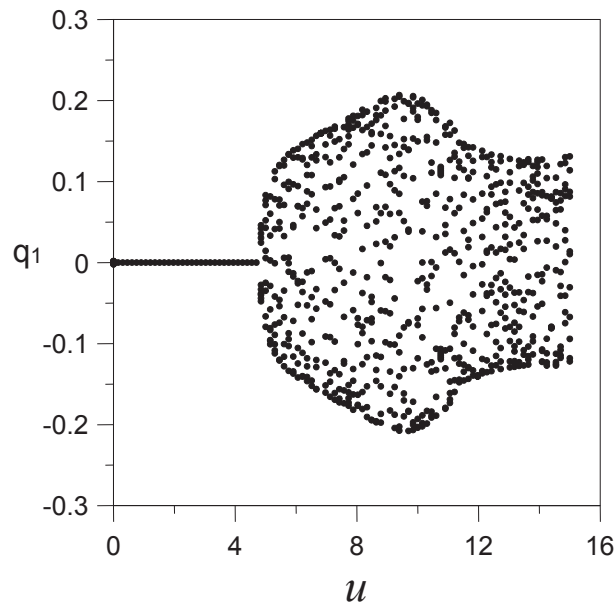
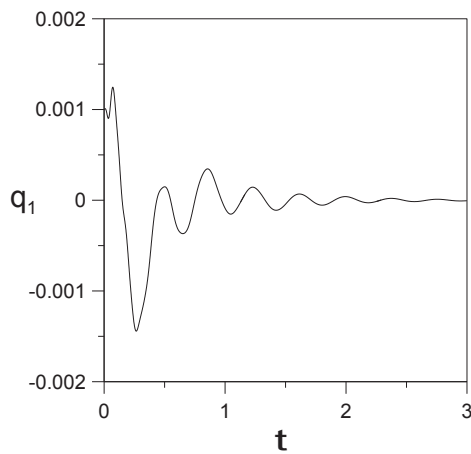
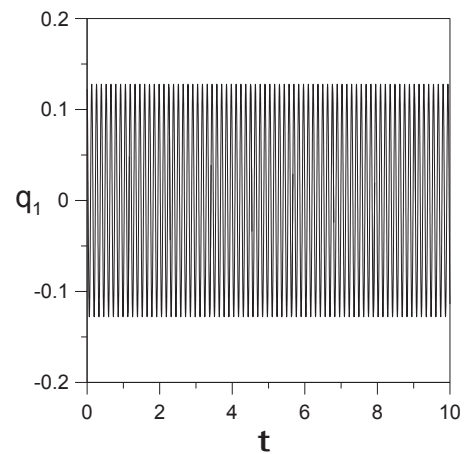


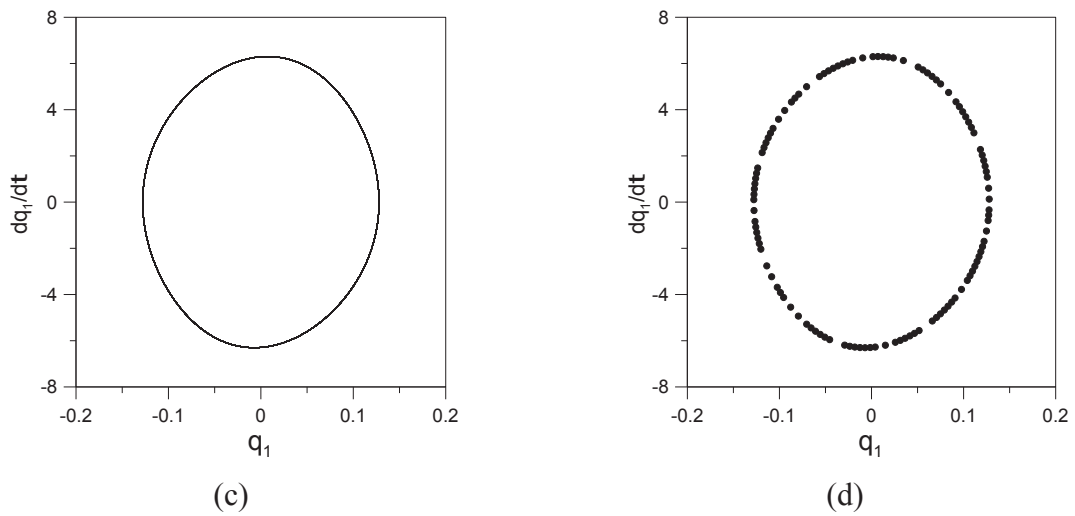
Figura 3.12 – (a) Resposta no tempo da solução trivial; (b) Resposta permanente; (c) Plano fase; (d) Seção de Poincaré, todos para o ponto (13.48, 0.1236)



(a)



(b)



Da mesma forma, obteve-se resultados para o restante das análises contidas na Tabela 3.7. Na Figura 3.13 é apresentado o diagrama de bifurcação para valores incrementais da velocidade do fluido e , na Figura 3.14 a resposta no tempo, plano fase e seção de Poincaré, todos para a Análise 2. Nas Figura 3.15 e 3.16 encontram-se os resultados para a Análise 3 e, nas Figura 3.17 e Figura 3.18 ilustra-se os resultados para a Análise 4.

Figura 3.13 – Diagrama de bifurcação para a Análise 2.

