

Figura 3.14 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (6.51,-0.1299).

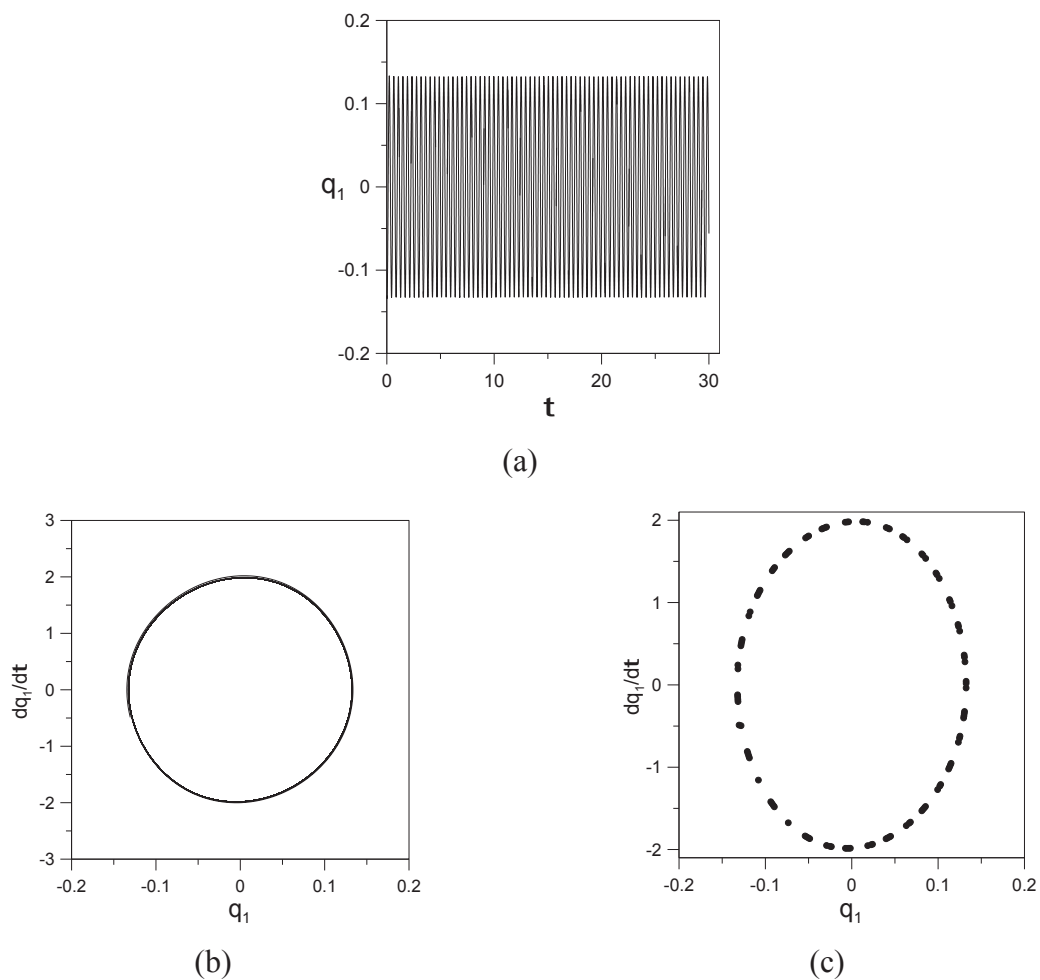


Figura 3.15 – Diagrama de bifurcação para a Análise 3.

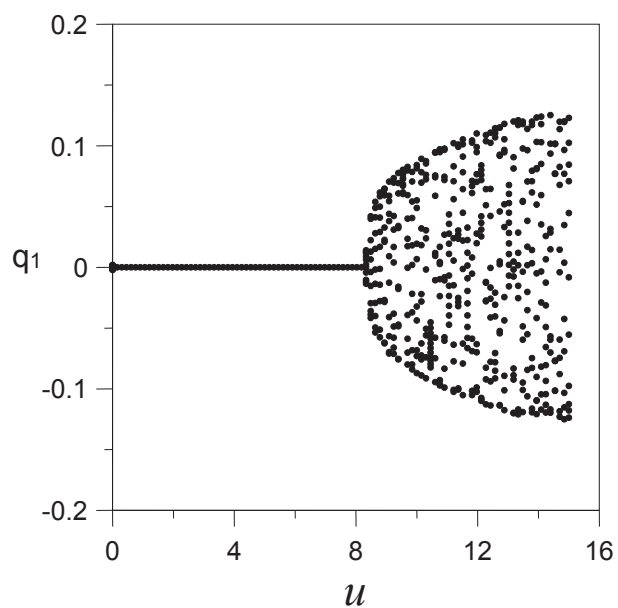


Figura 3.16 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (12.57, 01107).

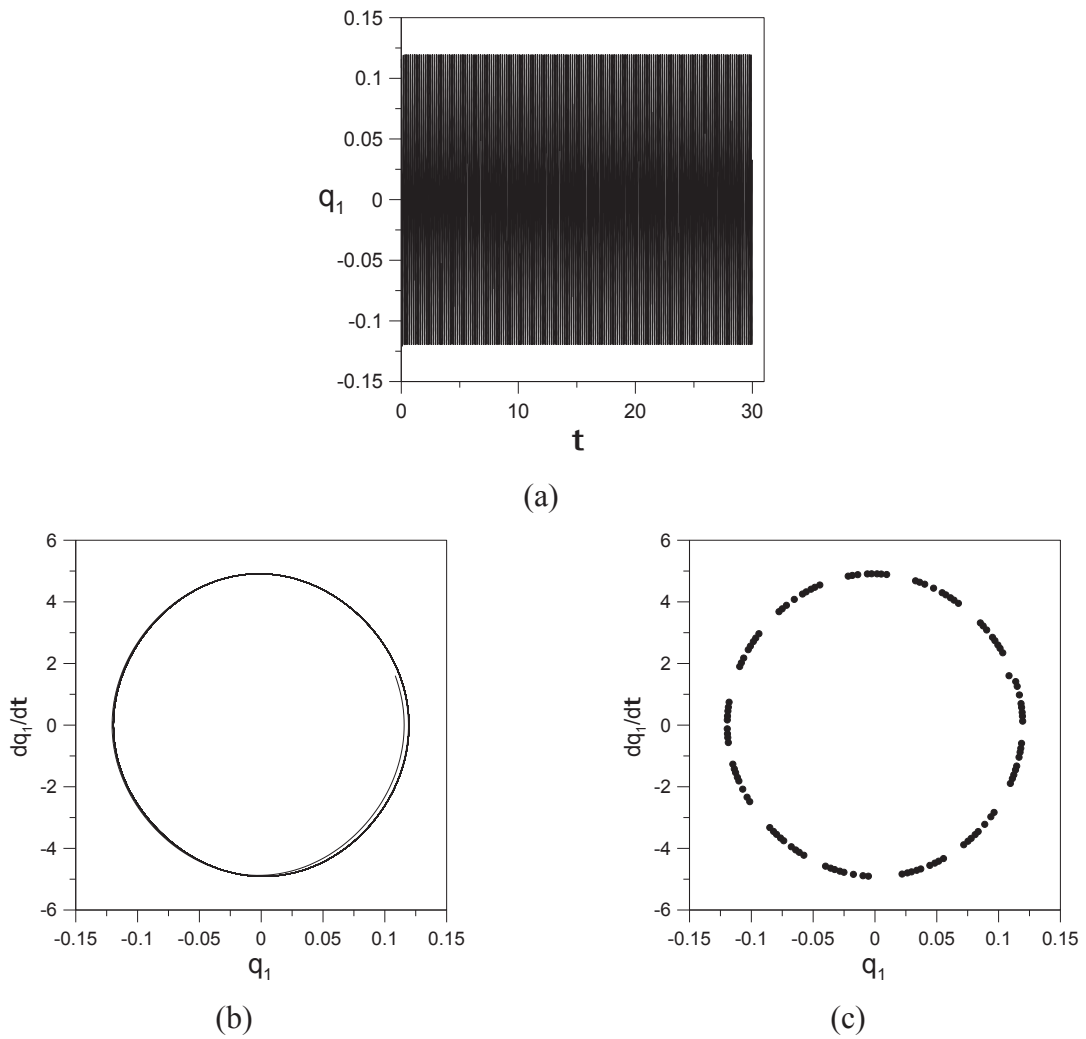


Figura 3.17 – Diagrama de bifurcação para a Análise 4.

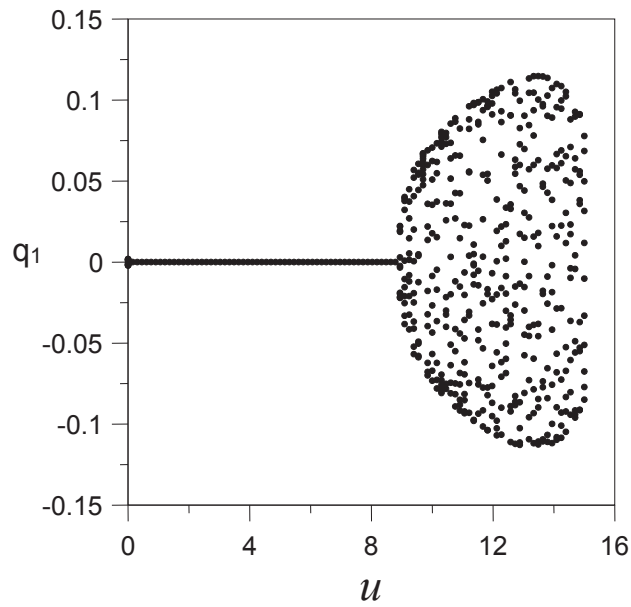
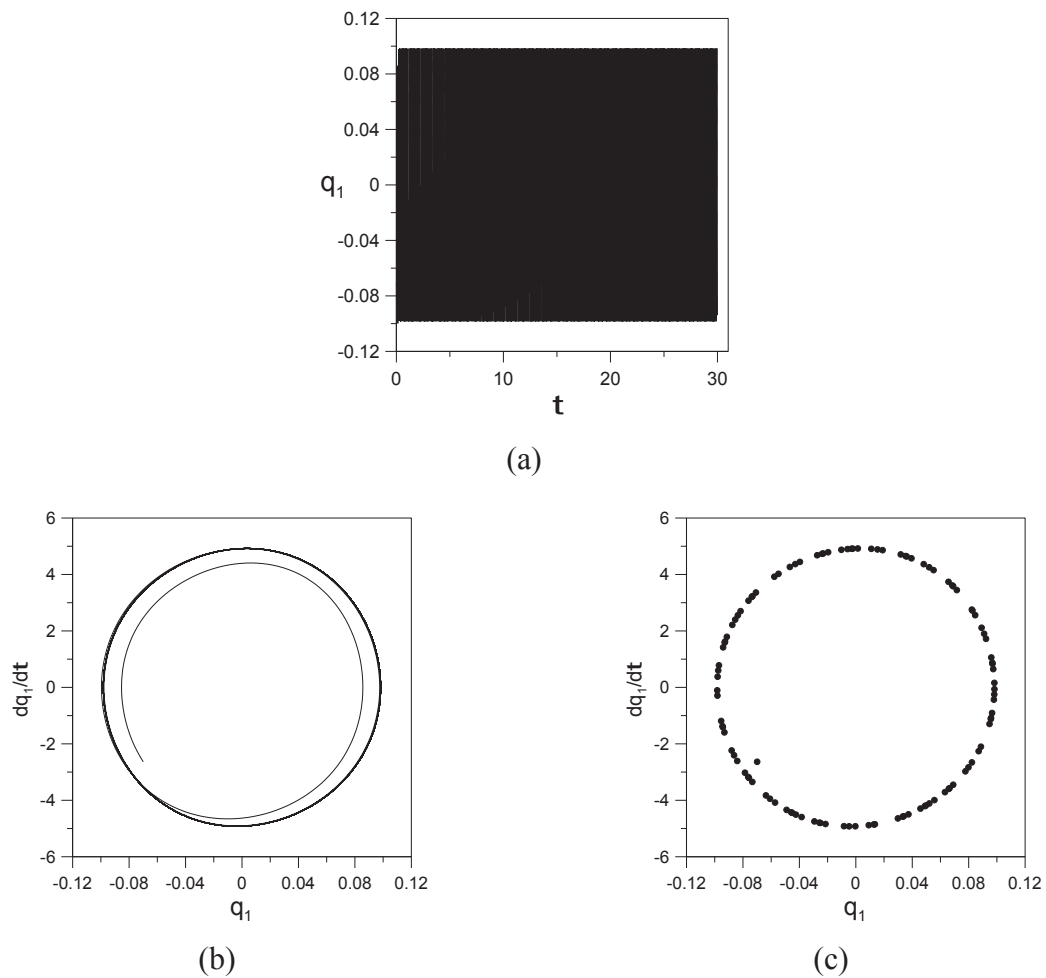


Figura 3.18 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto(10, 0.0509).



Como pode ser visto nas Figura 3.13, Figura 3.15 e Figura 3.17, para valores pequenos da velocidade do fluido, o tubo apresenta solução trivial e para um valor crítico de u , o sistema perde estabilidade e passa a ter soluções quase periódicas como pode ser comprovado pelo plano fase e seção de Poincaré de todas as análises. Pode-se observar também, que o aumento do parâmetro β eleva o valor da velocidade crítica do sistema, embora não mude o tipo de vibração sofrida pelo sistema após o valor crítico, como pode ser visto na Tabela 3.8.

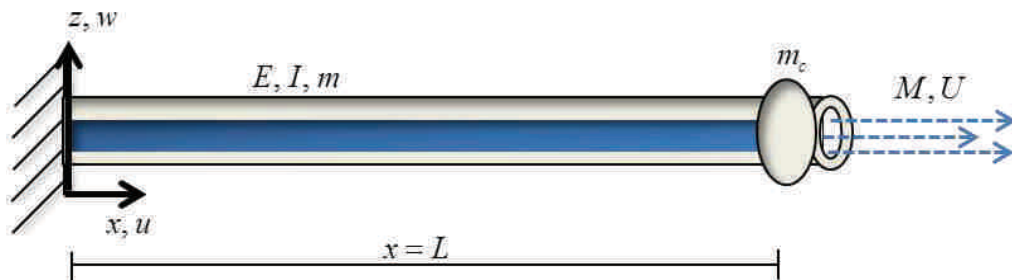
Tabela 3.8 – Resultados das análises para fluxo estático sem massa acoplada.

β	Tipo de vibração no estado permanente	u_{cr}
0.1	Quase periódico	4.8
0.2	Quase periódico	5.7
0.3	Quase periódico	8.33
0.4	Quase periódico	8.86

3.2.1.2 Tubo em balanço com massa acoplada

Considera-se um tubo em balanço de comprimento L , com rigidez a flexão EI , massa por unidade de comprimento m , com fluido interno em escoamento de massa por unidade de comprimento M e velocidade U , com uma massa concentrada m_c localizada na extremidade livre do tubo e, submetido a um regime de escoamento constante, conforme ilustra a Figura 3.19.

Figura 3.19 – Tubo em balanço com massa acoplada em sua extremidade livre.



Todas as análises foram feitas para os seguintes valores de parâmetros adimensionais apresentados nas Equações (3.6) e (3.8): amortecimento visco-elástico igual a $\alpha = 0.001$, gravidade $\gamma = 0$, massa concentrada $\mu = 0.10$ localizada na extremidade livre do tubo $\xi = 1.0$ e frequência natural adimensional igual a $\omega_1 = 2.96$, que corresponde à frequência fundamental do primeiro modo onde o sistema perde estabilidade.

Com o mesmo objetivo da análise realizada para um tubo em balanço sem massa acoplada, realizou-se quatro análises paramétricas variando-se o valor do parâmetro β , de acordo com a Tabela 3.9.

Tabela 3.9 - Análise paramétrica para fluxo estático com massa acoplada.

Análise	Valores dos parâmetros adimensionais
5	$\beta=0.1$ $\alpha=0.001$ $\gamma=0$ $\omega_1=2.96$ $\mu=0.1$ $\xi=1.0$
6	$\beta=0.2$ $\alpha=0.001$ $\gamma=0$ $\omega_1=2.96$ $\mu=0.1$ $\xi=1.0$
7	$\beta=0.3$ $\alpha=0.001$ $\gamma=0$ $\omega_1=2.96$ $\mu=0.1$ $\xi=1.0$
8	$\beta=0.4$ $\alpha=0.001$ $\gamma=0$ $\omega_1=2.96$ $\mu=0.1$ $\xi=1.0$

Apresenta-se na Figura 3.20 o diagrama de bifurcação para valores crescentes da velocidade do fluido e na Figura 3.21 a resposta no tempo, plano fase e seção de Poincaré para um ponto fixo no estado permanente, todos para a Análise 5. Nas Figura 3.22 e Figura 3.23 encontram-se os resultados para a Análise 6. Nas Figura 3.24 e Figura 3.25 encontram-se os resultados para a Análise 7 e, nas Figura 3.26 e Figura 3.27 ilustra-se os resultados para a Análise 8.

Figura 3.20 – Diagrama de bifurcação para a Análise 5.

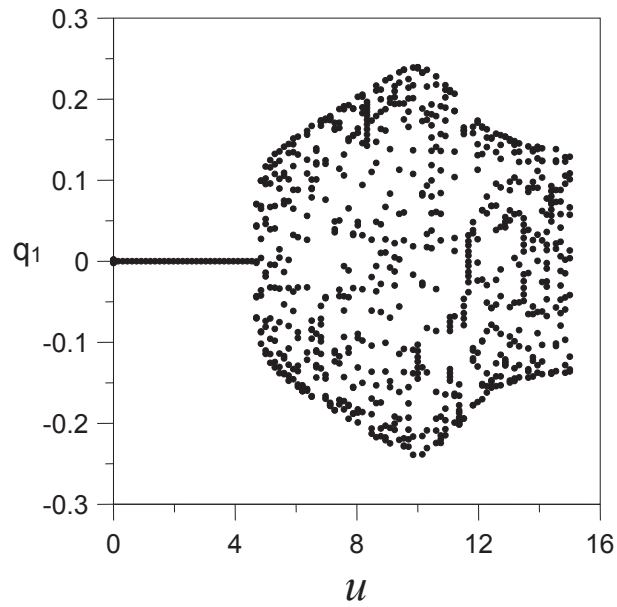


Figura 3.21 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (8.18, 0.0320).

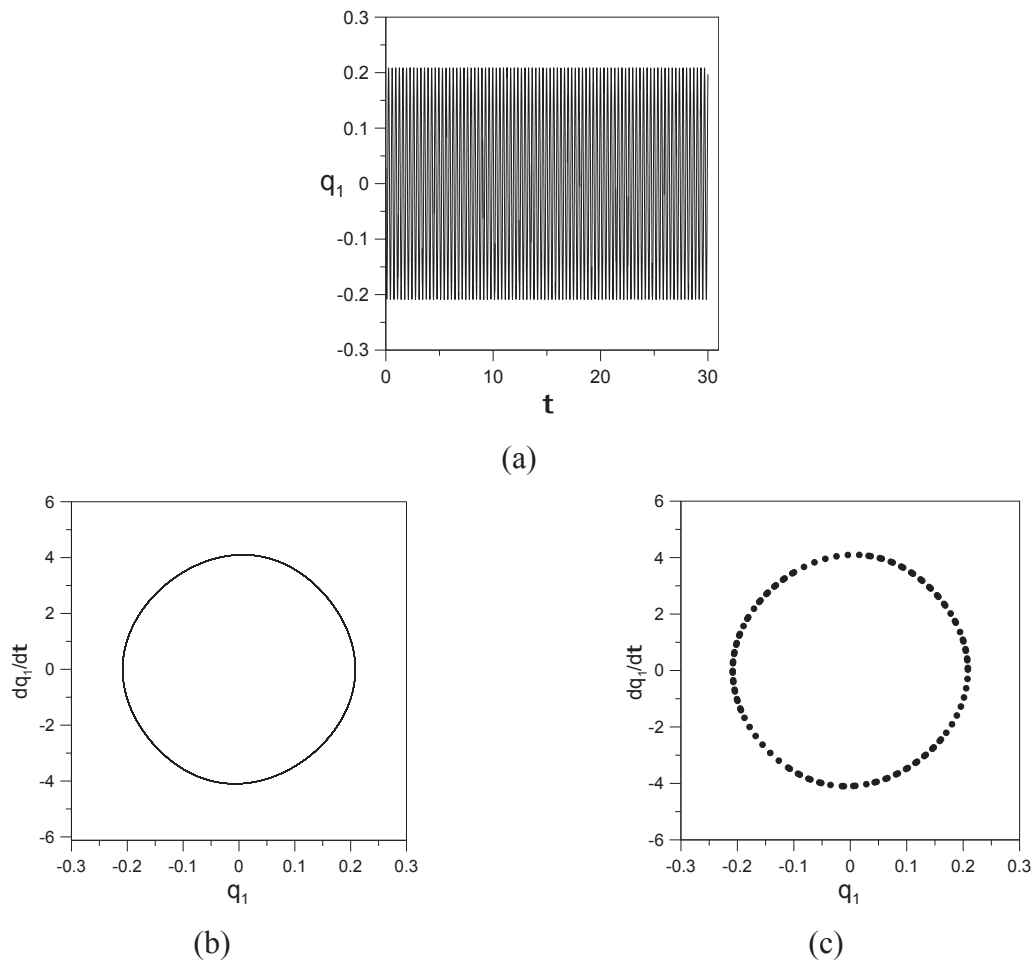


Figura 3.22 – Diagrama de bifurcação para a Análise 6.

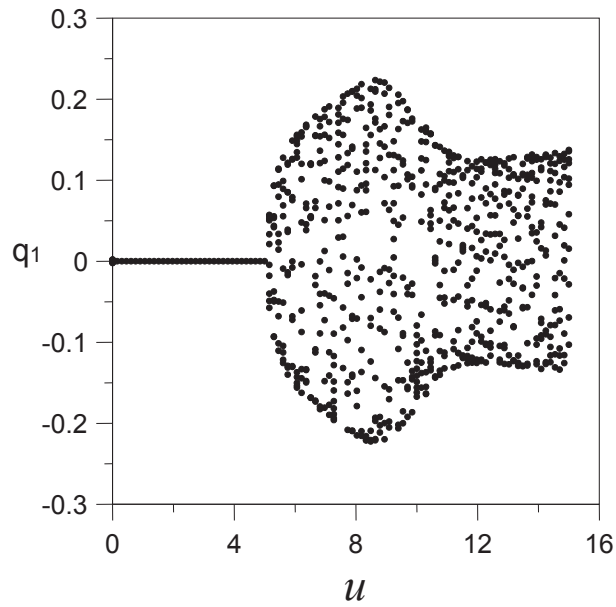


Figura 3.23 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (8.03, 0.00221).

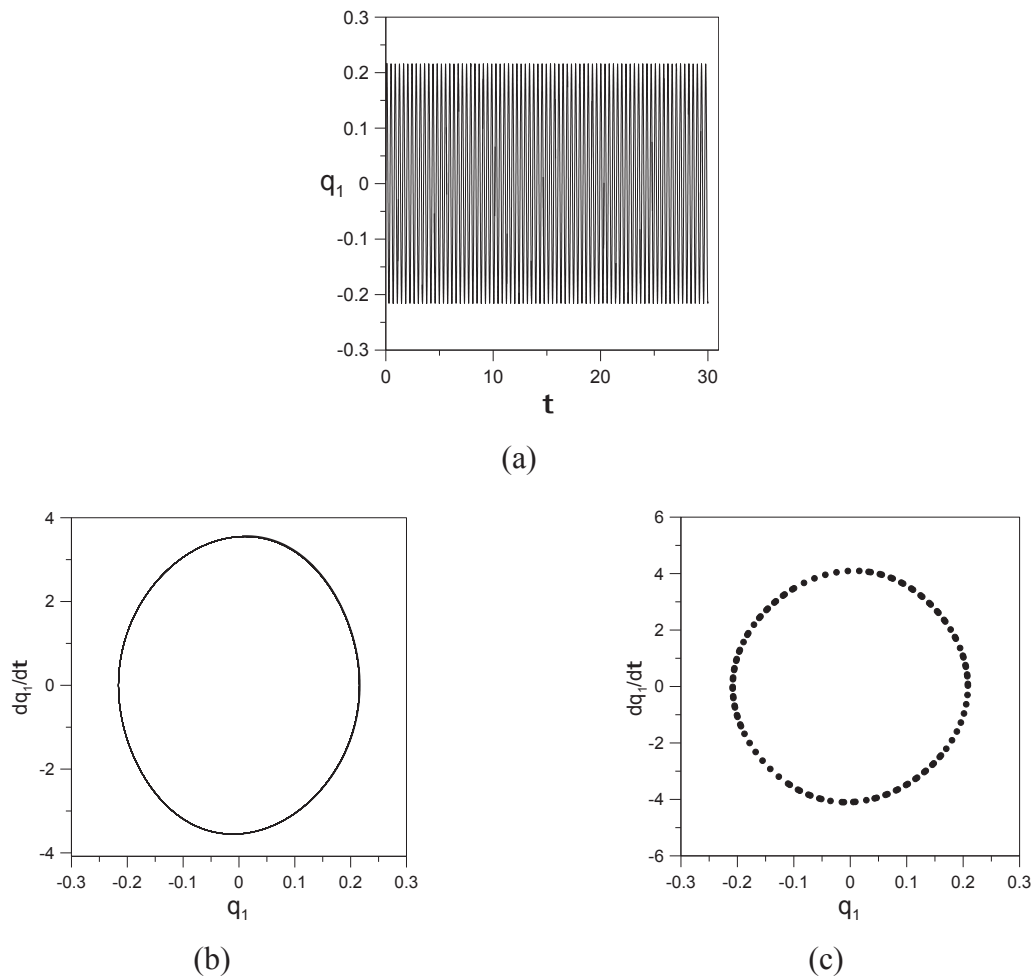


Figura 3.24 – Diagrama de bifurcação para a Análise 7.

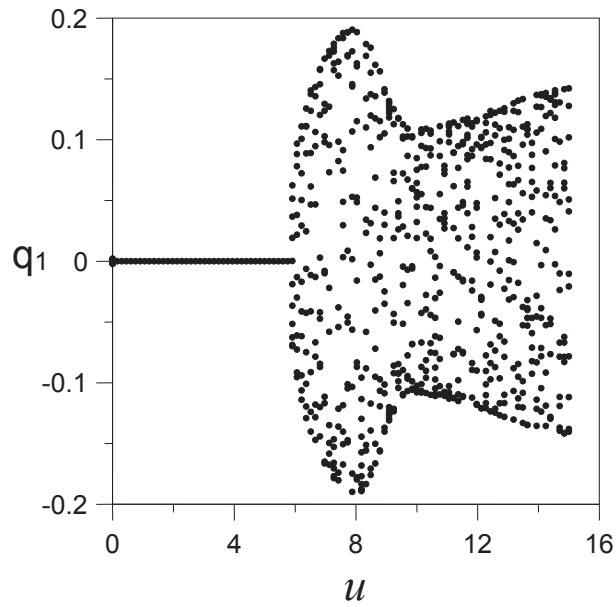


Figura 3.25 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (8.03, 0.1603).

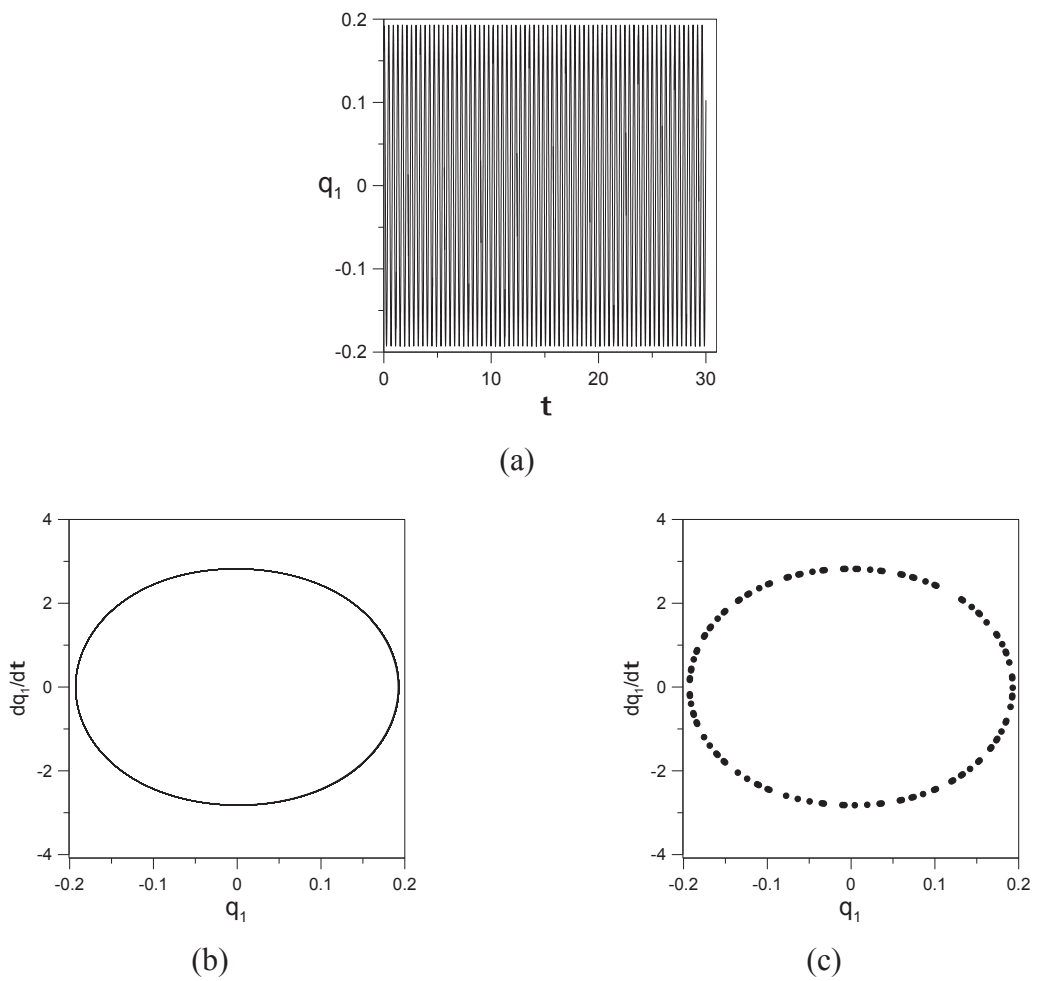


Figura 3.26 – Diagrama de bifurcação para a Análise 8.

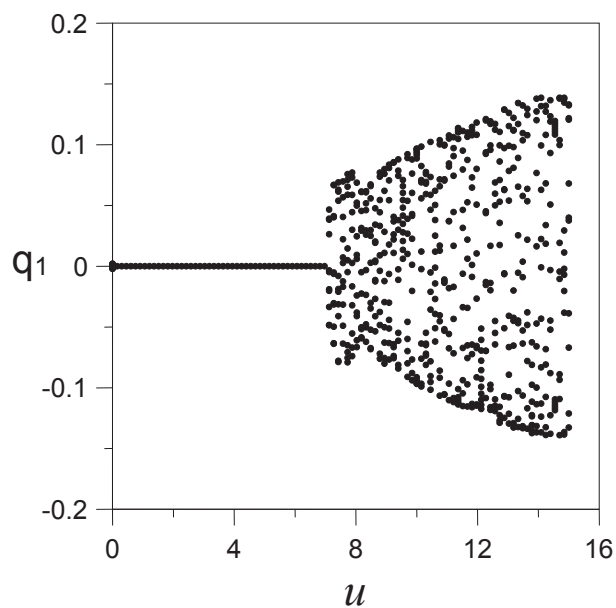
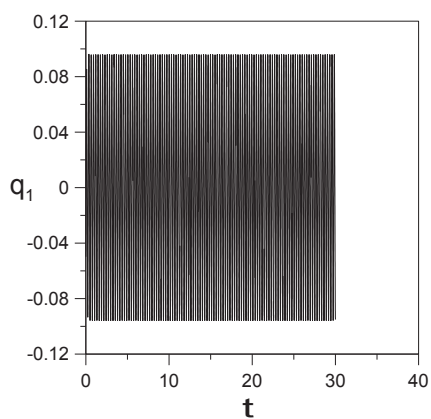
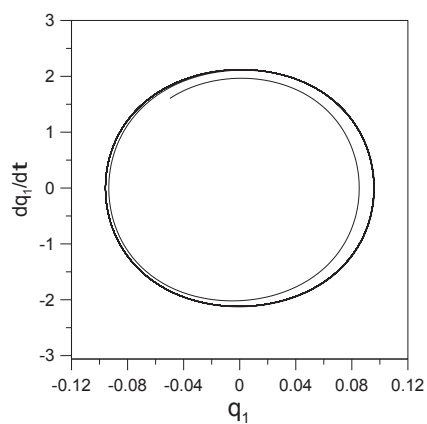


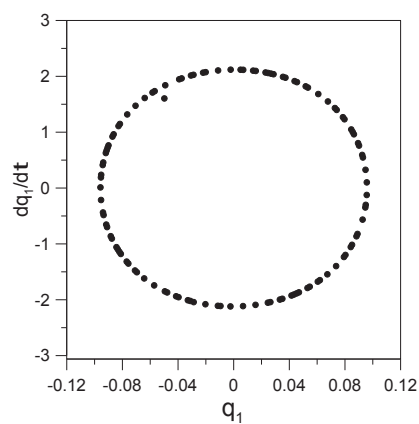
Figura 3.27 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (9.09, -0.051).



(a)



(b)



(c)

Verifica-se que todos os diagramas de bifurcação apresentam solução trivial para valores de velocidade do fluido entre zero até a velocidade crítica e todos os planos fase e as seções de Poincaré exibem movimentos quase periódicos após a velocidade crítica do fluido, ou seja, as mesmas conclusões da análise de um tubo em balanço sem massa concentrada. Consequentemente, a bifurcação também é a mesma, do tipo *Hopf*.

A mesma conclusão obtida para um tubo sem massa concentrada, referente a influência do parâmetro β na velocidade crítica do fluido, é observada nesta análise, ou seja, o aumento do valor de β eleva o valor da velocidade crítica, porém a presença da massa concentrada na extremidade livre do tubo reduziu a rigidez do sistema, o que pode ser comprovado pela redução da frequência natural. Consequentemente, para um mesmo valor de β , a velocidade crítica do fluido para um tubo em balanço sem massa concentrada é maior do que a velocidade crítica para um tubo com massa concentrada, como pode ser observado na Tabela 3.10

Tabela 3.10 – Comparação entre resultados com e sem massa acoplada.

β	Análise sem massa acoplada	Análise com massa acoplada
	u_{cr}	u_{cr}
0.1	4.8	4.64
0.2	5.7	5.13
0.3	8.33	5.90
0.4	8.86	7.12

3.2.2 Fluxo pulsante

A seguir, será considerado que o fluido está em um regime de fluxo pulsante, ou seja, a velocidade do fluido u passa a ser formada por uma parcela harmônica sobreposta a uma parcela estática, de acordo com a Equação(3.9).

$$u = u_0 (1 + \psi \cos(\omega \tau)) \quad (3.9)$$

Onde u_0 é a parcela permanente, $\psi \cos(\omega \tau)$ a parcela dinâmica, sendo ψ a amplitude da parcela dinâmica. Em problemas de instabilidade estrutural, o tipo de carregamento é o que caracteriza a natureza do problema a ser resolvido. Sistemas submetidos à excitação dinâmica, ou seja, quando a carga externa varia com o tempo, como é o caso de um tubo submetido a um fluido de fluxo pulsante, são classificados como sistemas parametricamente excitados cuja

instabilidade é denominada instabilidade paramétrica ou ressonância paramétrica. Regiões de instabilidade paramétrica devem ser evitadas em projeto, pois são regiões em que um pequeno valor da amplitude da excitação provoca grandes deslocamentos.

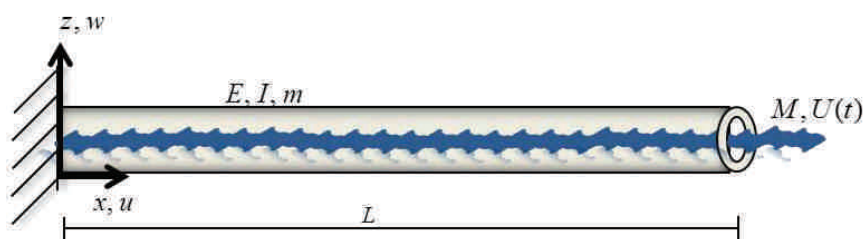
O estudo da instabilidade paramétrica inicia-se com a determinação das fronteiras de instabilidade, que neste caso, são curvas que relacionam valores de frequência de excitação do fluido, ω , com a amplitude da excitação do fluido ψ . Para um determinado valor da amplitude menor que o valor crítico, após uma perturbação inicial, a amplitude da resposta decresce, convergindo para a solução fundamental. A partir de um determinado ponto, a solução fundamental torna-se instável, passando a exibir vibrações com amplitudes maiores. O ponto onde a solução fundamental perde a estabilidade é um ponto de instabilidade paramétrica.

Sistemas submetidos à instabilidade paramétrica apresentam duas regiões críticas de instabilidade, uma denominada região de instabilidade secundária que ocorre quando a frequência de excitação, ω , se iguala a frequência natural do modo n , ω_n , em que o sistema perde a estabilidade e, outra mais crítica denominada região de instabilidade primária que ocorre quando a frequência da excitação é igual a duas vezes a frequência natural do sistema. Na região de instabilidade primária, $\omega/\omega_n = 2$, o valor da amplitude crítica é menor quando comparada ao valor desta amplitude na região de instabilidade secundária, $\omega/\omega_n = 1$ e, a amplitude dos deslocamentos são maiores, o que torna a região de ressonância primária mais crítica, em termos de estabilidade, que a região secundária.

3.2.2.1 Tubo em balanço sem massa acoplada

Considera-se um tubo em balanço de comprimento L , com rigidez a flexão EI , massa por unidade de comprimento m , com fluido interno em escoamento de massa por unidade de comprimento M e velocidade U e submetido a um regime de escoamento pulsante, conforme ilustra a Figura 3.28.

Figura 3.28 - Tubo em balanço submetido a um fluxo pulsante.



Todas as análises foram realizadas para os seguintes valores de parâmetros adimensionais apresentados nas Equações (3.6) e (3.8) : amortecimento visco-elástico igual a $\alpha = 0.001$, gravidade $\gamma = 10$ e, frequência natural adimensional igual a $\omega_1 = 5.29$, que corresponde à frequência fundamental do primeiro modo.

Com objetivo de analisar a influência da parcela permanente da velocidade do fluido, u_0 , e do parâmetro β , na instabilidade paramétrica do sistema, foram realizadas três análises, variando-se o valor da parcela estática de acordo com a velocidade crítica do sistema u_{cr} mensurada para cada valor adotado do parâmetro β , de acordo com a Tabela 3.11 .

Tabela 3.11 – Análise paramétrica sem massa concentrada.

Análise	u_0	β	u_{cr}
1	$0.1 u_{cr}$	0.1	4.8
		0.2	5.7
		0.3	8.4
		0.4	8.8
2	$0.4 u_{cr}$	0.1	4.8
		0.2	5.7
		0.3	8.4
		0.4	8.8
3	$0.6 u_{cr}$	0.1	4.8
		0.2	5.7
		0.3	8.4
		0.4	8.8

A análise de problemas de instabilidade paramétrica inicia-se com a determinação das fronteiras de escape. Portanto, mostra-se nas

Figura 3.29, Figura 3.30 e Figura 3.31 as fronteiras de instabilidade para os valores referidos na Tabela 3.11 para a Análise 01, Análise 02 e Análise 03, respectivamente. O parâmetro de controle considerado foi a amplitude da parcela dinâmica da velocidade, ψ . A frequência

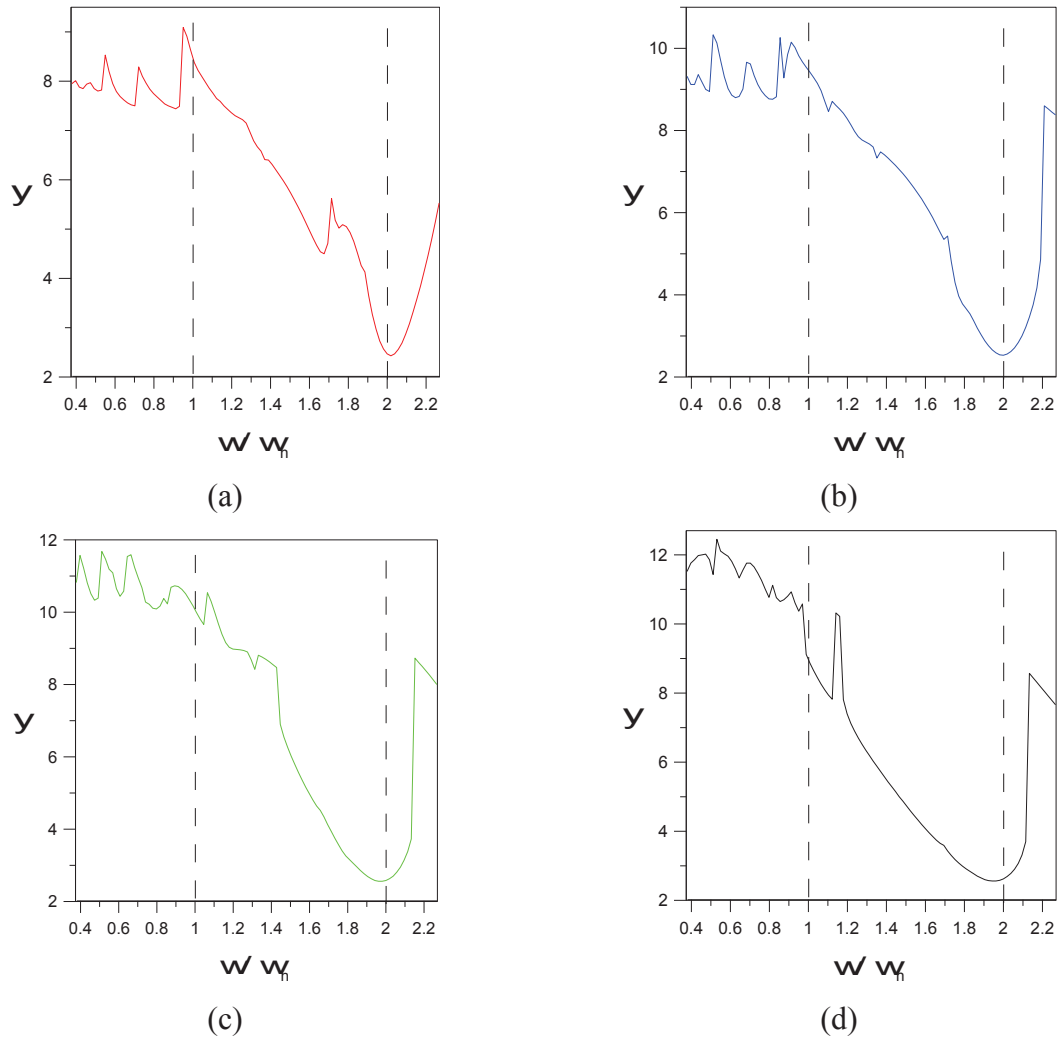
excitadora da velocidade do fluido, ω , encontra-se normalizada em função da frequência fundamental do primeiro modo $\omega_1 = 5.29$, onde o sistema perde estabilidade.

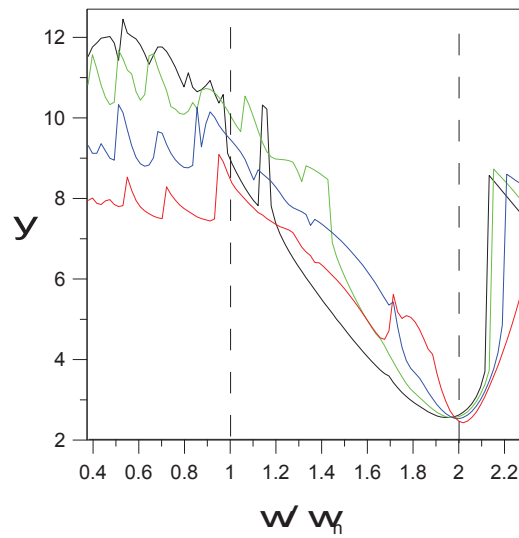
Com o intuito de organizar esta análise, atribuiu-se cores para cada fronteira de instabilidade de acordo com o valor atribuído de β , conforme apresentado na Tabela 3.12.

Tabela 3.12 – Cores da curva de estabilidade.

Cor da curva	Valor de β
Vermelha	0.1
Azul	0.2
Verde	0.3
Preta	0.4

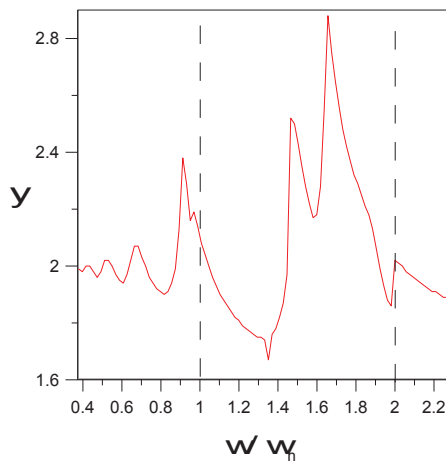
Figura 3.29 - Curvas de escape para a Análise 01: (a) $\beta = 0.1$; (b) $\beta = 0.2$; (c) $\beta = 0.3$; (d) $\beta = 0.4$; (e) Curvas de escape sobrepostas (--- $\beta = 0.1$, --- $\beta = 0.2$, --- $\beta = 0.3$, --- $\beta = 0.4$).



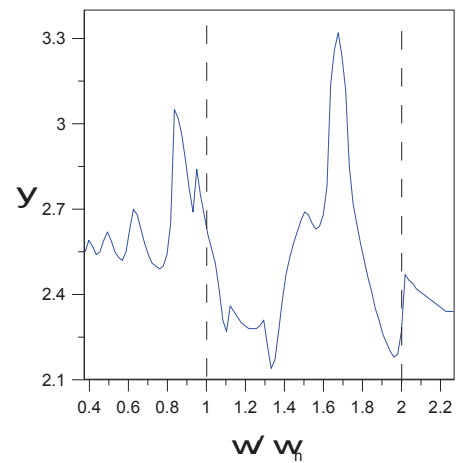


(e)

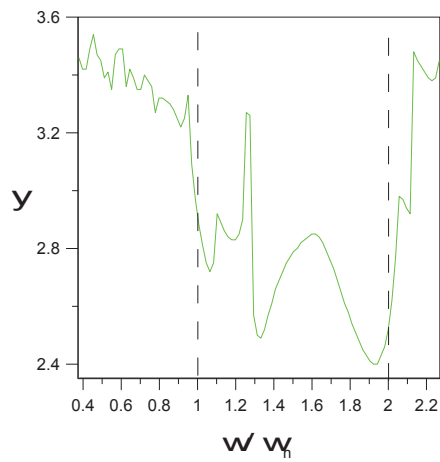
Figura 3.30 - Curvas de escape para a Análise 02: (a) $\beta = 0.1$; (b) $\beta = 0.2$; (c) $\beta = 0.3$; (d) $\beta = 0.4$; (e) Curvas de escape sobrepostas (--- $\beta = 0.1$, --- $\beta = 0.2$, --- $\beta = 0.3$, --- $\beta = 0.4$).



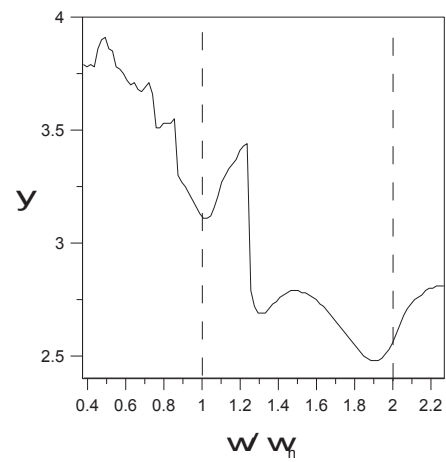
(a)



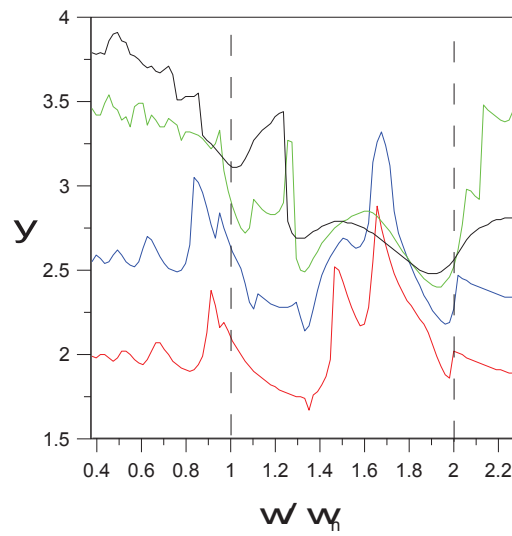
(b)



(c)

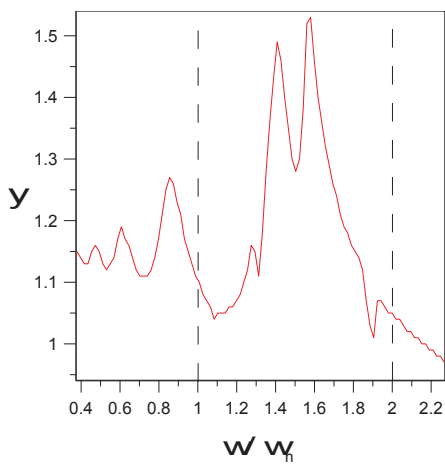


(d)

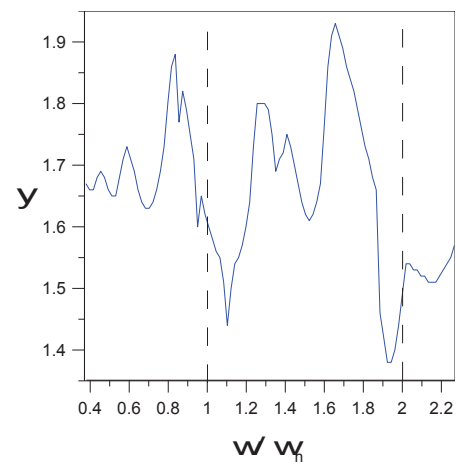


(e)

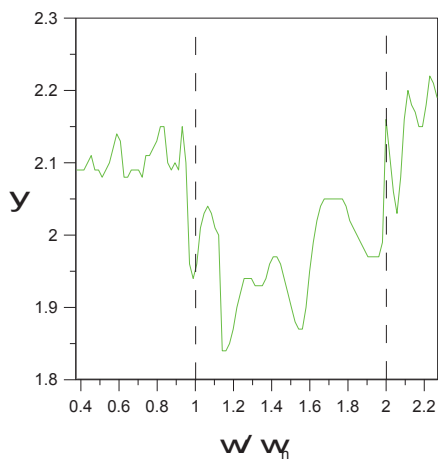
Figura 3.31 - Curvas de escape para a Análise 03: (a) $\beta = 0.1$; (b) $\beta = 0.2$; (c) $\beta = 0.3$; (d) $\beta = 0.4$; (e) Curvas de escape sobrepostas (--- $\beta = 0.1$, --- $\beta = 0.2$, --- $\beta = 0.3$, --- $\beta = 0.4$).



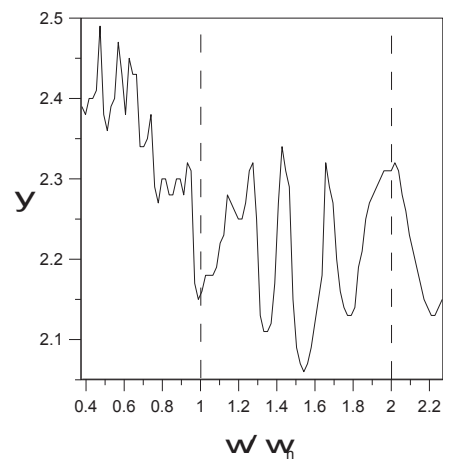
(a)



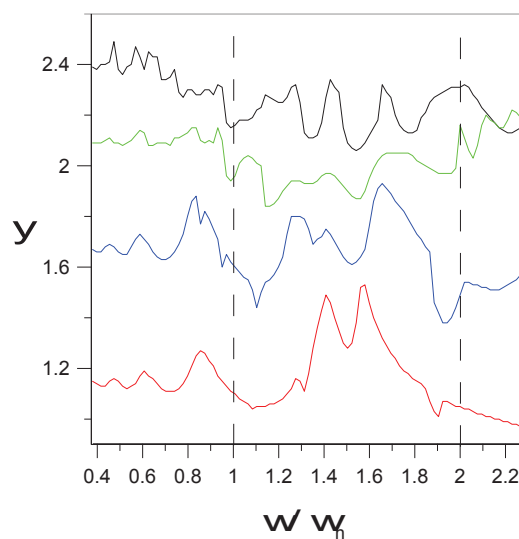
(b)



(c)



(d)



(e)

Para qualquer par ordenado $(\omega/\omega_n ; \psi)$ abaixo da curva, após uma perturbação inicial o sistema possui solução trivial, retornando à posição inicial de equilíbrio após a aplicação das condições iniciais de velocidade e deslocamento. Para valores de ψ acima da curva de estabilidade a solução fundamental torna-se instável, passando a exibir vibrações com grandes amplitudes de vibração.

Pode-se verificar em todas as curvas de estabilidade a existência de regiões de ressonância associadas a submúltiplos de ω , sendo que a amplitude destas discontinuidades aumenta à medida que eleva-se o valor de u_0 , sendo o caso mais crítico apresentado nas Figura 3.31(c) e Figura 3.31(d), em que a identificação das regiões principais de ressonância paramétrica fica comprometida devido ao grande número de vales. Associa-se, também, ao incremento do valor de u_0 a redução da rigidez do sistema, deslocando todas as curvas de transição para o lado esquerdo do gráfico.

Verifica-se nas Figura 3.30 e Figura 3.31 que o aumento da parcela estática da velocidade do fluido reduziu o intervalo de frequência entre a primeira e segunda região de instabilidade, aproximando-se os vales de ressonância.

A Tabela 3.13 apresenta os valores críticos para amplitude da velocidade, ψ_{cr} , a partir dos quais têm-se a ocorrência de instabilidade paramétrica na primeira e segunda região de instabilidade, sendo u_{cr} o valor da velocidade crítica do fluido apresentado na Tabela 3.11.

Nota-se que o aumento do valor de u_0 diminuiu o valor da amplitude crítica, devido à redução da frequência natural do sistema e, conseqüentemente, da rigidez. Nota-se que o aumento do parâmetro β aumenta a amplitude crítica nas regiões principais de instabilidade, porém, aumenta a largura dos vales de ressonância, aumentando-se as regiões de instabilidade. Como já comentado, os valores da amplitude crítica na primeira e segunda região de instabilidade para o sistema com $u_0 = 0.6u_{cr}$ e, com $\beta = 0.3$ e 0.4 ficam comprometidos devido à dificuldade de se identificar estas regiões, haja vista a grande quantidade de vales de ressonância existentes nas curvas de instabilidade para estes valores.

Tabela 3.13 – Valores da amplitude crítica para a 1ª e 2ª região de instabilidade paramétrica.

u_0	β	2ª região $\left(\frac{\omega}{\omega_n} = 1\right)$	1ª região $\left(\frac{\omega}{\omega_n} = 2\right)$
		ψ_{cr}	ψ_{cr}
$0.1 u_{cr}$	0.1	7.49	2.43
	0.2	8.81	2.45
	0.3	9.78	2.47
	0.4	10.23	2.51
$0.4 u_{cr}$	0.1	1.82	1.67
	0.2	2.49	2.15
	0.3	2.53	2.42
	0.4	2.68	2.48
$0.6 u_{cr}$	0.1	1.03	0.98
	0.2	1.43	1.36
	0.3	-----	-----
	0.4	-----	-----

Comparando-se as Figuras 3.29(e), Figura 3.30(e) e Figura 3.31(e) verifica-se que para o primeiro caso, ou seja, $u_0 = 0.1u_{cr}$, as curvas de instabilidade convergem para um mesmo valor de amplitude crítica na região principal de ressonância, como pode ser visto também na Tabela 3.13, o que não ocorre para os outros valores de u_0 onde as curvas de transição tendem a não se interceptarem.

Embora as curvas de transição possam ajudar a identificar as regiões de instabilidade paramétrica, esta análise é insuficiente para descrever o comportamento do tubo no interior destas regiões, sendo necessário o uso de métodos numéricos para descrever os diversos tipos de comportamentos exibidos pelo sistema no interior das regiões de instabilidade. Uma ferramenta bastante útil neste tipo de análise são os diagramas de bifurcação onde as

coordenadas dos pontos fixos são mostradas como função de um dado parâmetro de controle, que neste caso continua sendo a amplitude dinâmica da velocidade do fluido ψ .

Mostra-se nas Figura 3.32 e 3.34 os diagramas de bifurcação do tubo para valores crescentes da amplitude da velocidade do fluido e nas Figura 3.33 e Figura 3.35 a resposta no tempo, plano fase e seção de Poincaré para um ponto localizado após o valor da amplitude crítica, todos para a Análise 1 com $u_0 = 0.1 u_{cr}$, $\beta = 0.1$ e $\beta = 0.3$, respectivamente. Nas Figura 3.36 e Figura 3.37 encontram-se os resultados para Análise 2 com $u_0 = 0.4 u_{cr}$, $\beta = 0.3$ e nas Figura 3.38 e Figura 3.39 ilustra-se os resultados para Análise 03 com $u_0 = 0.6 u_{cr}$ e $\beta = 0.4$.

Figura 3.32 – Diagrama de bifurcação para Análise 01 com $\beta = 0.1$ e $\omega/\omega_n = 0.8$.

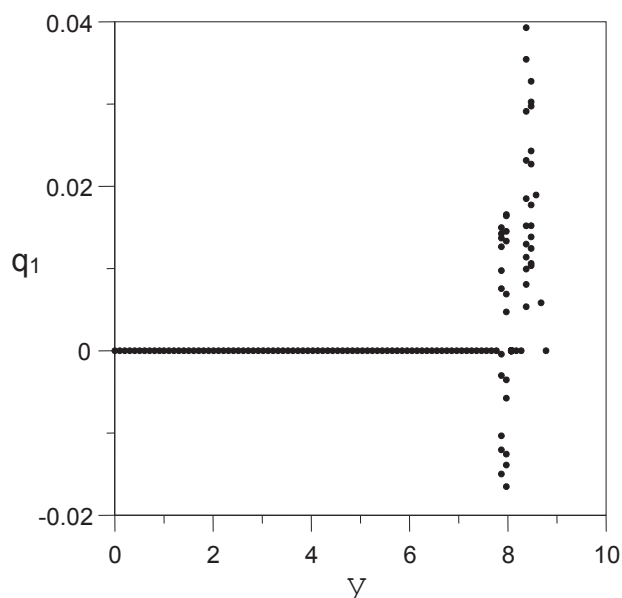
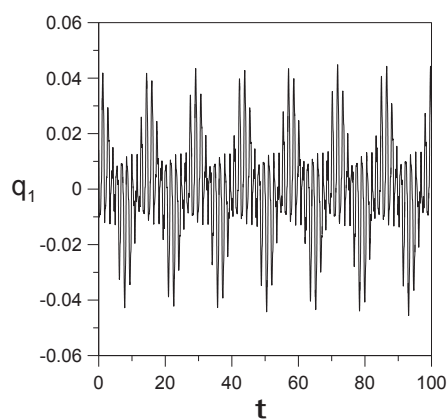


Figura 3.33 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (8.07; 0.0038).



(a)

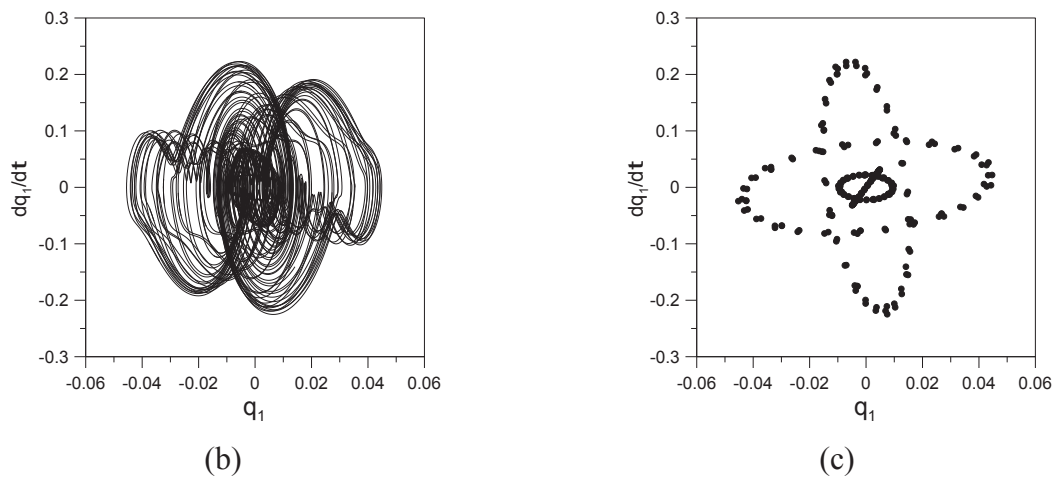


Figura 3.34 – Diagrama de bifurcação para Análise 01 com $\beta = 0.3$ e $\omega/\omega_n = 0.8$.

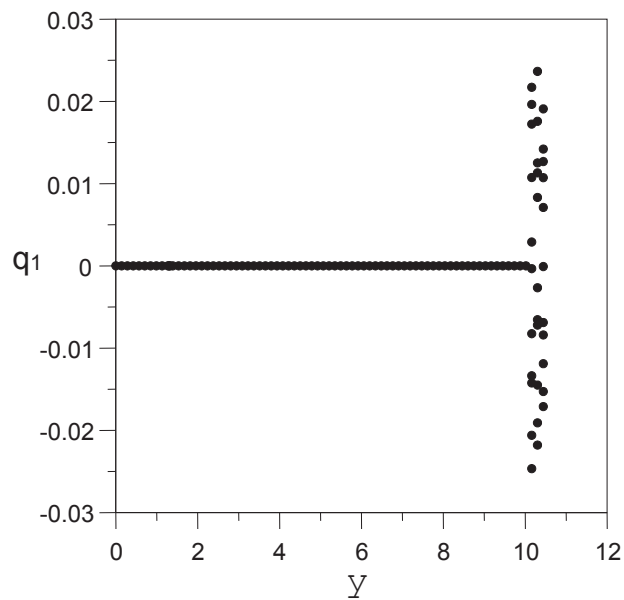
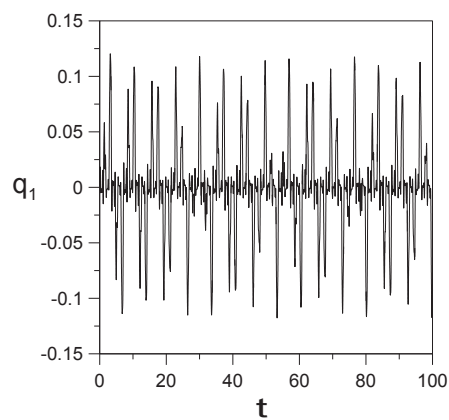


Figura 3.35 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (10.44; 0.019).



(a)

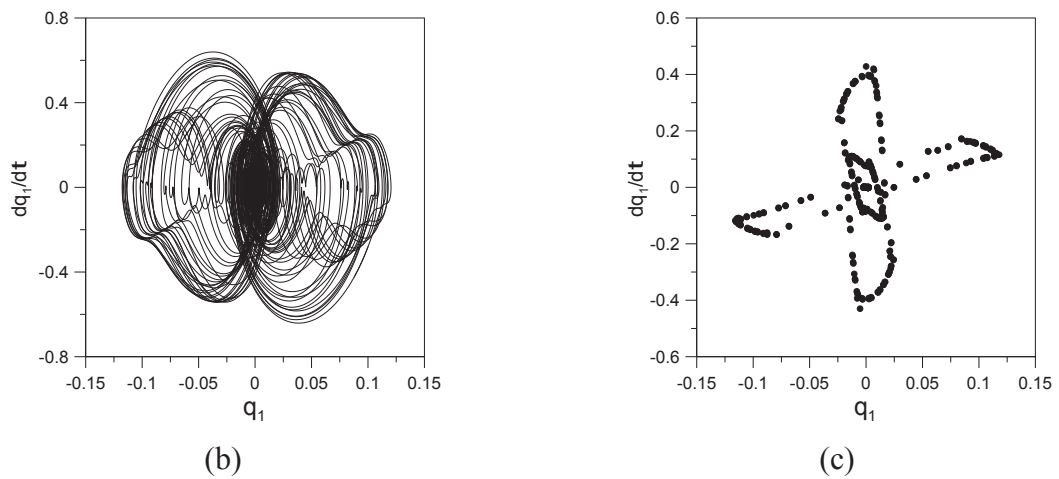


Figura 3.36 – Diagrama de bifurcação para Análise 02 com $\beta = 0.3$ e $\omega/\omega_n = 1.9$

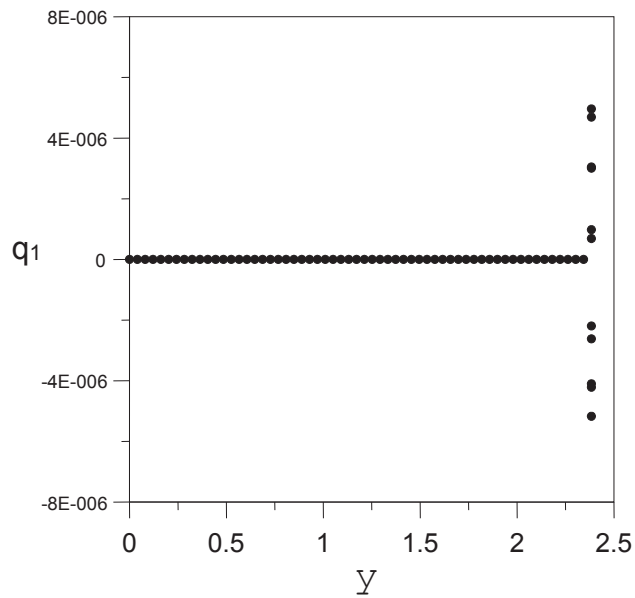
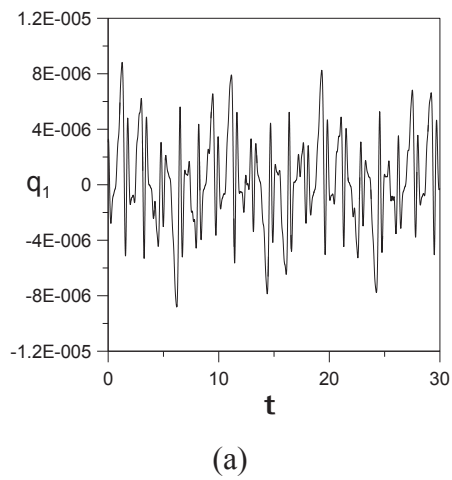


Figura 3.37 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (2.38; 3E10-6).



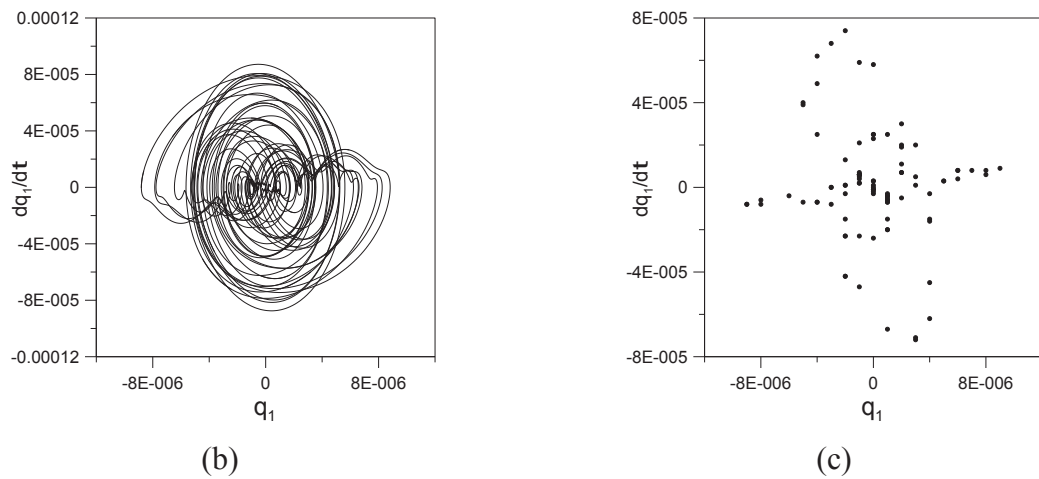


Figura 3.38 – Diagrama de bifurcação para Análise 03 com $\beta = 0.4$ e $\omega/\omega_n = 1.57$

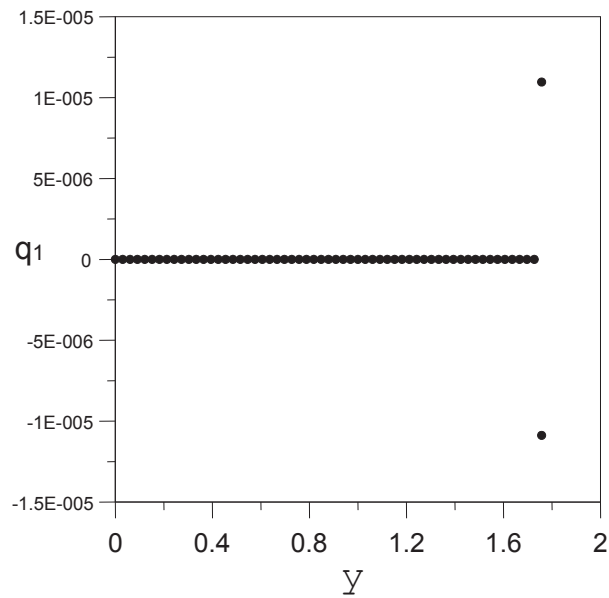
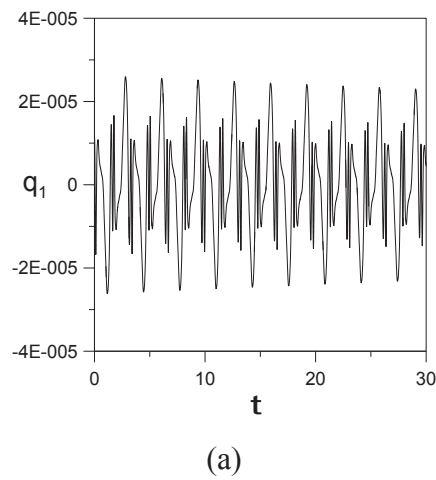
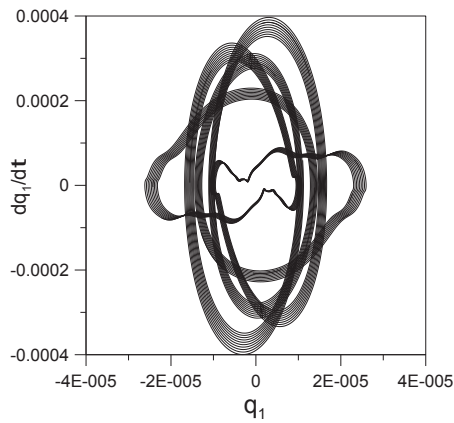
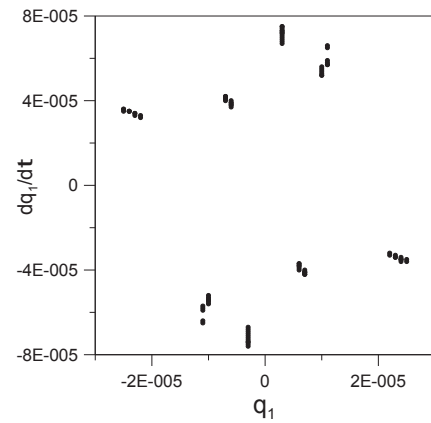


Figura 3.39 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto(1.75;1.0E10-5).





(b)



(c)

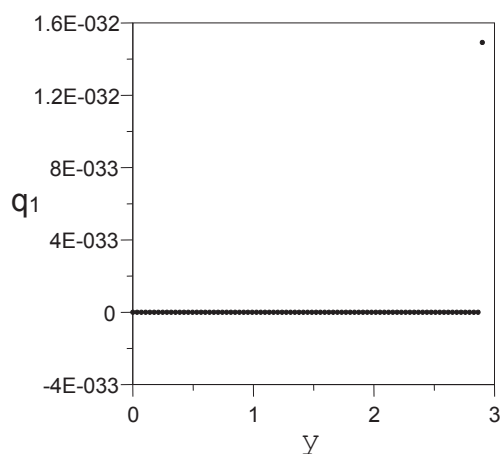
Verifica-se em todos resultados a existência da solução trivial para valores de ψ menores que o valor da amplitude crítica, ψ_{cr} e, após atingido este valor o sistema submetido a $u_0 = 0.1 u_{cr}$ passa a apresentar movimentos quase periódicos. Já o sistema com $u_0 = 0.4 u_{cr}$ e $u_0 = 0.6 u_{cr}$ após o valor crítico da amplitude apresentam movimentos caóticos. Têm-se na Tabela 3.14 os valores da amplitude crítica para cada resultado e o tipo de vibração sofrida pelo sistema após o valor crítico.

Tabela 3.14 – Resumo dos resultados.

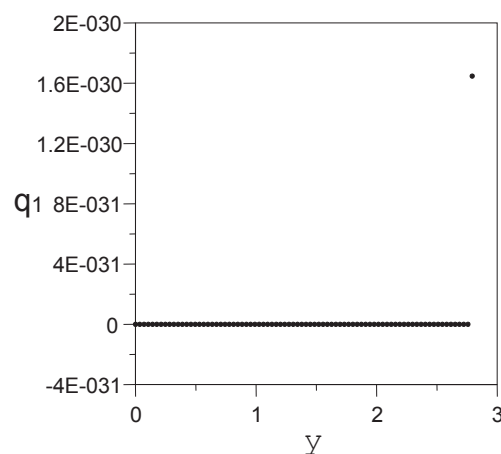
u_0	β	ω/ω_n	ψ_{cr}	Vibração após a bifurcação
$0.1 u_{cr}$	0.1	0.8	7.82	Quase Periódico
$0.1 u_{cr}$	0.3	0.8	9.91	Quase Periódico
$0.4 u_{cr}$	0.3	1.9	2.27	Caótica
$0.6 u_{cr}$	0.4	1.57	1.69	Caótica

Mostra-se na Figura 3.40 diagramas de bifurcação realizados para Análise 2 e Análise 3 que representaram apenas a solução trivial.

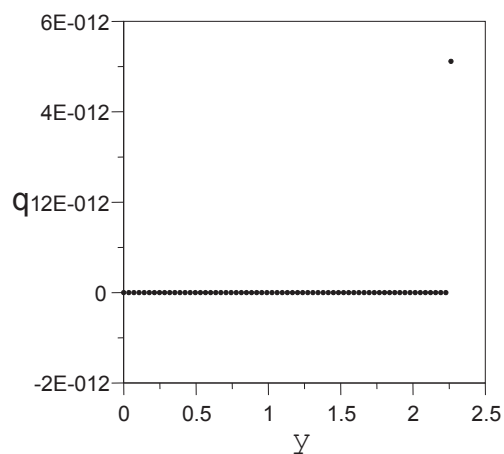
Figura 3.40 – Diagramas de bifurcação: (a) Análise 3 com $\beta=0.3$ e $\omega/\omega_n=1$; (b) Análise 2 com $\beta=0.2$ e $\omega/\omega_n=1$; (c) Análise 2 com $\beta=0.2$ e $\omega/\omega_n=2$; (d) Análise 3 com $\beta=0.3$ e $\omega/\omega_n=2$.



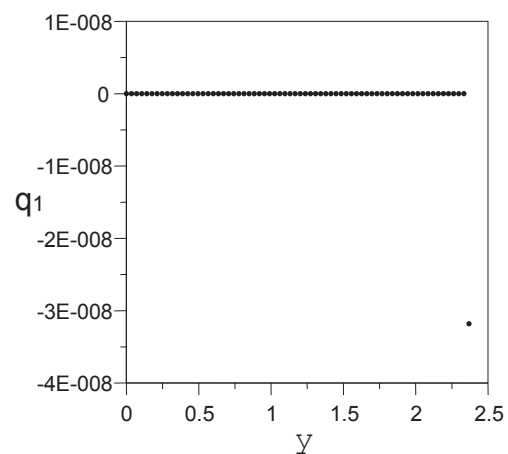
(a)



(b)



(c)

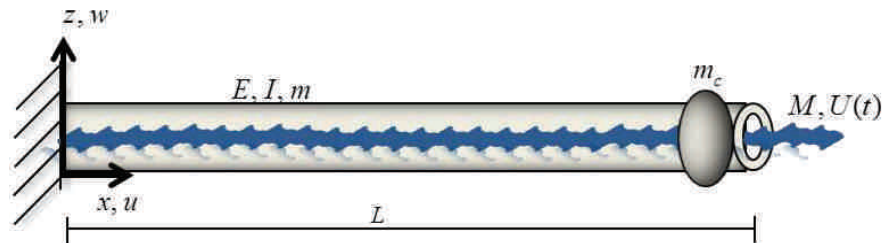


(d)

3.2.2.2 Tubo em balanço com massa acoplada

Considera-se um tubo em balanço de comprimento L , com rigidez a flexão EI , massa por unidade de comprimento m , com fluido interno em escoamento de massa por unidade de comprimento M e velocidade U , com uma massa concentrada m_c e, submetido a um regime de escoamento pulsante, conforme ilustra a Figura 3.41.

Figura 3.41 - Tubo em balanço submetido a um fluxo pulsante e massa concentrada.



Com o objetivo de avaliar a influência de uma massa acoplada com posição variável ao longo do comprimento do tubo, juntamente com o incremento do valor da parcela estática da velocidade do fluido, realizou-se três análises paramétricas, variando-se o valor de u_0 de acordo com a velocidade crítica do sistema u_{cr} e a posição da massa concentrada ao longo do comprimento do tubo, de acordo com a Tabela 3.15.

Tabela 3.15 - Análise paramétrica com massa concentrada.

	Análise	u_0	β	u_{cr}
4		$0.1 u_{cr}$	0.2	5.7
		$0.4 u_{cr}$	0.2	5.7
		$0.6 u_{cr}$	0.2	5.7
5		$0.1 u_{cr}$	0.2	5.7
		$0.4 u_{cr}$	0.2	5.7
		$0.6 u_{cr}$	0.2	5.7
6		$0.1 u_{cr}$	0.2	5.7
		$0.4 u_{cr}$	0.2	5.7
		$0.6 u_{cr}$	0.2	5.7

Todas as análises foram feitas para os seguintes valores de parâmetros adimensionais apresentados nas Equações (3.6) e (3.8): amortecimento visco-elástico igual a $\alpha = 0.001$, relação entre a massa do fluido e a massa do sistema $\beta = 0.2$, gravidade $\gamma = 10$, massa concentrada $\mu = 0.1$. Em todas as curvas de instabilidade o valor da frequência de excitação do fluido, ω , encontra-se normalizado em função da frequência natural adimensional igual a $\omega_1 = 5.29$, que corresponde à frequência fundamental do primeiro modo do sistema sem massa concentrada.

Seguindo o mesmo raciocínio de organização deste trabalho, atribuiu-se cores para cada curva de instabilidade de acordo com o valor de u_0 , conforme exposto na Tabela 3.16.

Tabela 3.16 - Cores das curvas de estabilidade.

Cor da curva	u_0
Vermelha	$0.1 u_{cr}$
Azul	$0.4 u_{cr}$
Preta	$0.6 u_{cr}$

Mostra-se nas Figura 3.42, Figura 3.43 e Figura 3.44 as curvas de instabilidade para Análise 04, Análise 05 e Análise 06 respectivamente, com a amplitude da velocidade do fluido como parâmetro de controle.

Figura 3.42 - Curvas de escape para a Análise 04: (a) $0.1 u_{cr}$; (b) $0.4 u_{cr}$; (c) $0.6 u_{cr}$; (d) Curvas de escape sobrepostas ($---$ $0.1 u_{cr}$, $---$ $0.4 u_{cr}$, $---$ $0.6 u_{cr}$).

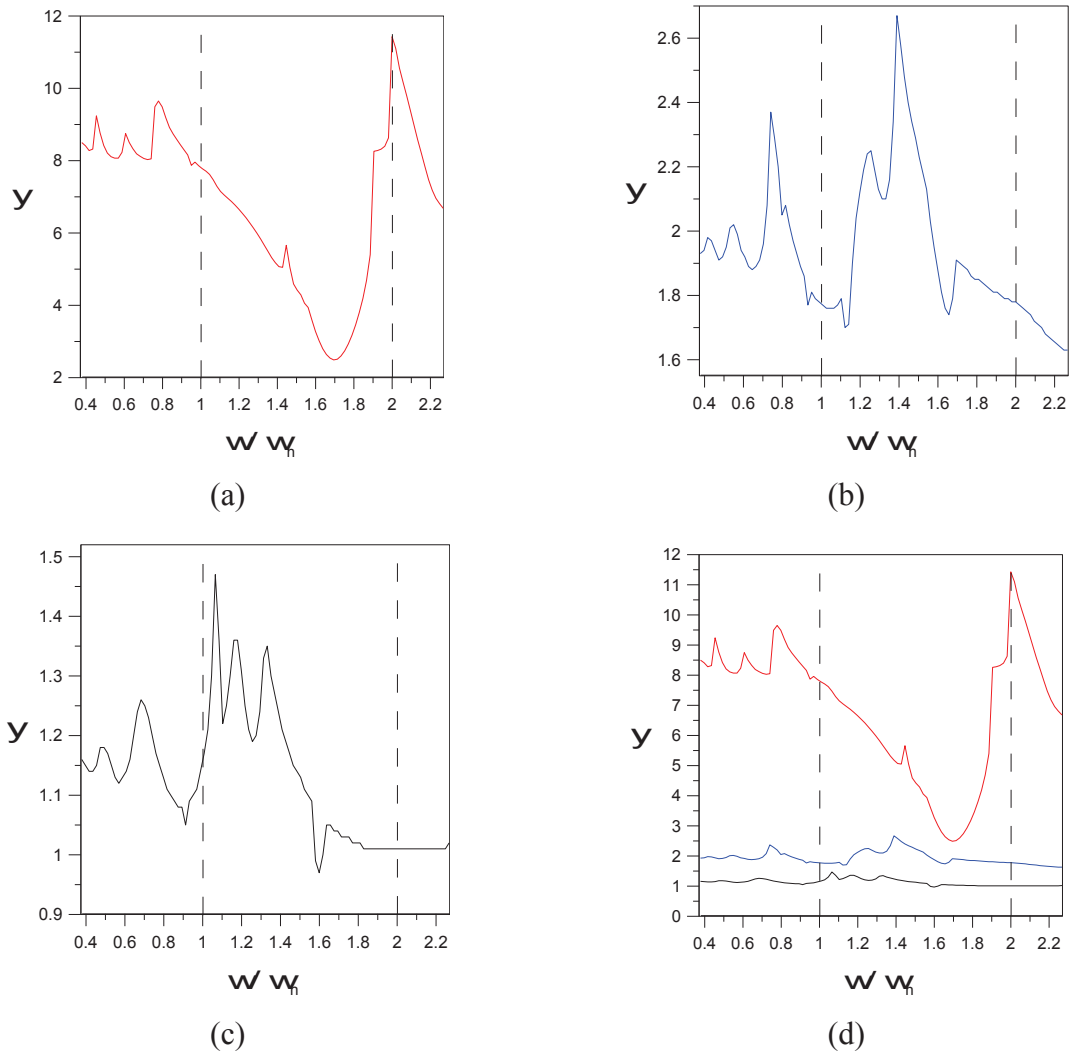


Figura 3.43 - Curvas de escape para a Análise 05: (a) $0.1 u_{cr}$; (b) $0.4 u_{cr}$; (c) $0.6 u_{cr}$; (d) Curvas de escape sobrepostas ($---$ $0.1 u_{cr}$, $---$ $0.4 u_{cr}$, $---$ $0.6 u_{cr}$).

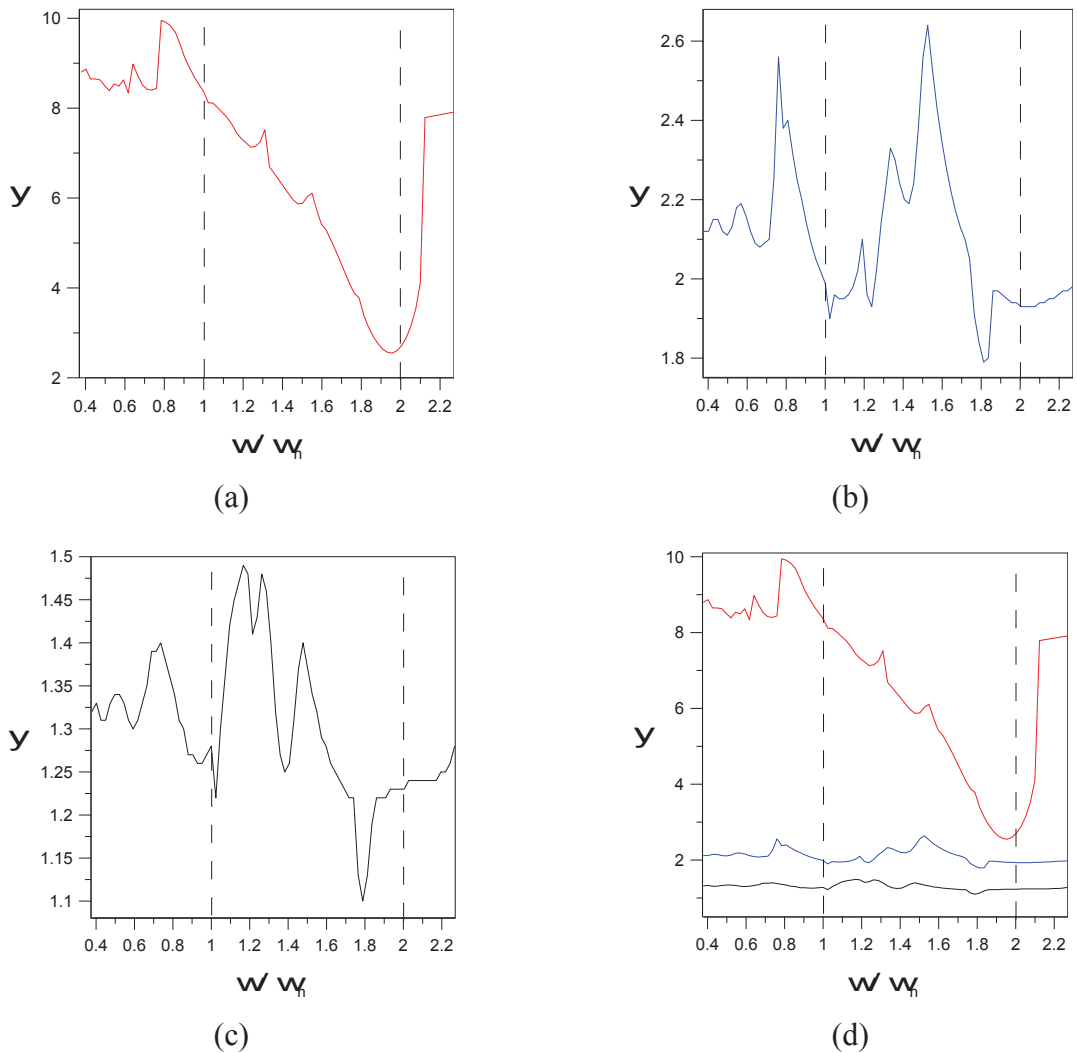
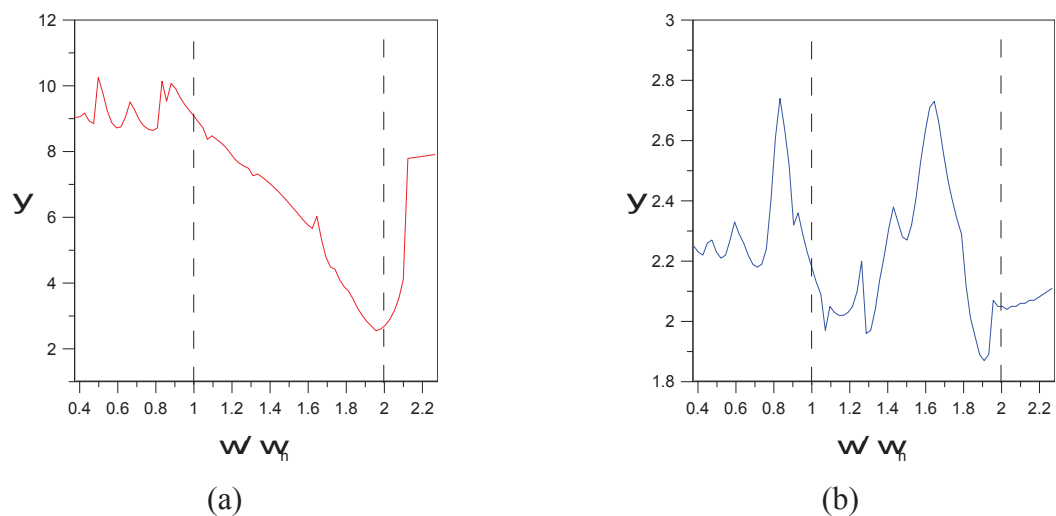
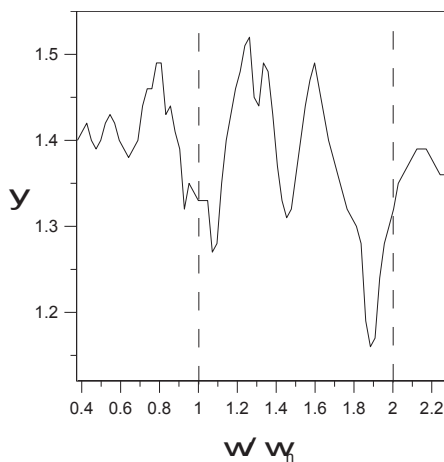
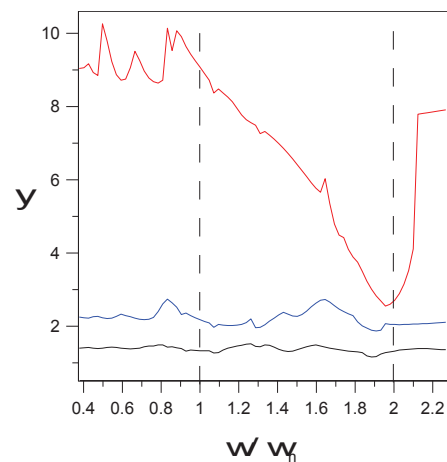


Figura 3.44 - Curvas de escape para a Análise 06: (a) $0.1 u_{cr}$; (b) $0.4 u_{cr}$; (c) $0.6 u_{cr}$; (d) Curvas de escape sobrepostas ($---$ $0.1 u_{cr}$, $---$ $0.4 u_{cr}$, $---$ $0.6 u_{cr}$).





(c)



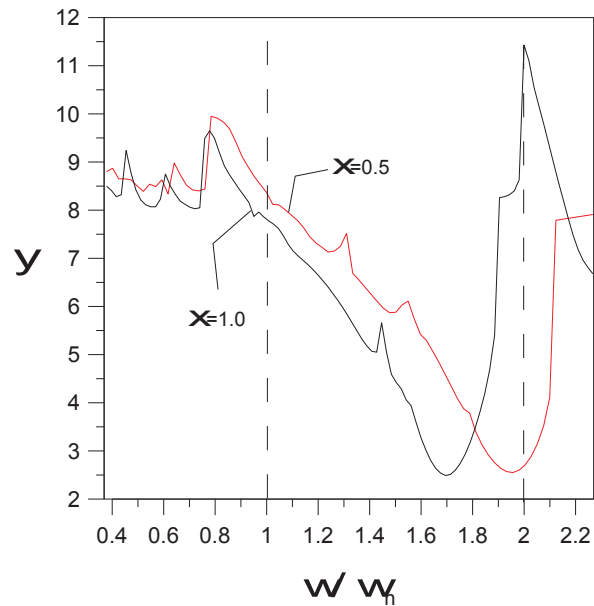
(d)

Verifica-se as mesmas observações feitas na seção 3.2.2.1 para um tubo em balanço sem massa concentrada. Exceto pelo fato que a presença da massa concentrada diminuiu a rigidez do sistema, conclusão também obtida para um tubo com massa concentrada submetido a um fluxo permanente do fluido.

Pode-se observar na Figura 3.44(d) que, para pequenos valores de u_0 a curva de instabilidade possui as regiões de instabilidade principal e secundária bem definidas e, elevando-se o valor da parcela estática estes vales tendem a desaparecer, aumentando-se a sensibilidade do sistema, pois um pequeno incremento do valor de ψ pode desestabilizar o sistema.

Comparando-se as Figura 3.42, Figura 3.43 e Figura 3.44 verifica-se que quanto mais afastada do engaste for a posição da massa concentrada menor a frequência natural do sistema e conseqüentemente a curva de instabilidade desloca-se para o lado esquerdo do gráfico, como pode ser visto na Figura 3.45 em que sobre põe-se as Figura 3.42(a) e Figura 3.43(a).

Figura 3.45 – Comparação entre curvas de escape : --- massa concentrada em $\xi = 1$; --- massa concentrada em $\xi = 0.5$.



Com o objetivo de se estudar o comportamento do sistema no interior das regiões de instabilidade paramétrica, mostra-se nas Figura 3.46 e Figura 3.48 diagramas de bifurcação para valores crescentes de amplitude da velocidade e, nas Figura 3.47 e Figura 3.49 a resposta no tempo, plano fase e seção de Poincaré para um ponto fixo localizado após a amplitude crítica, todos para a Análise 4 com $u_0 = 0.4u_{cr}$ e $u_0 = 0.6u_{cr}$ respectivamente.

Figura 3.46 - Diagrama de bifurcação para Análise 04 com $u_0 = 0.4$ e $\omega/\omega_n = 1.68$.

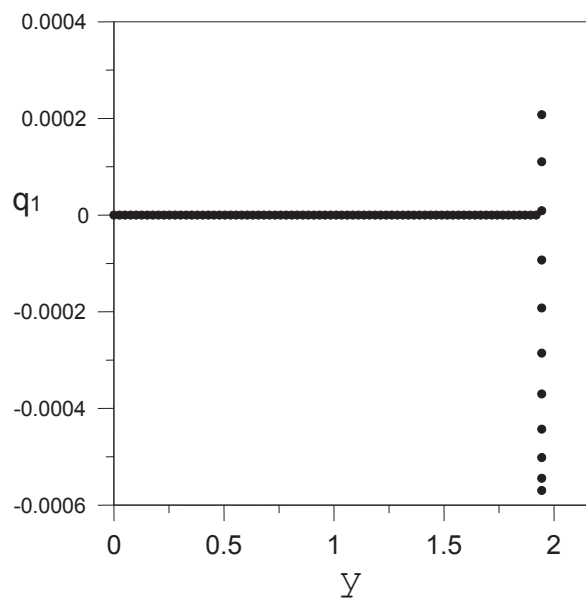


Figura 3.47 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (1.94; 2.07E-4).

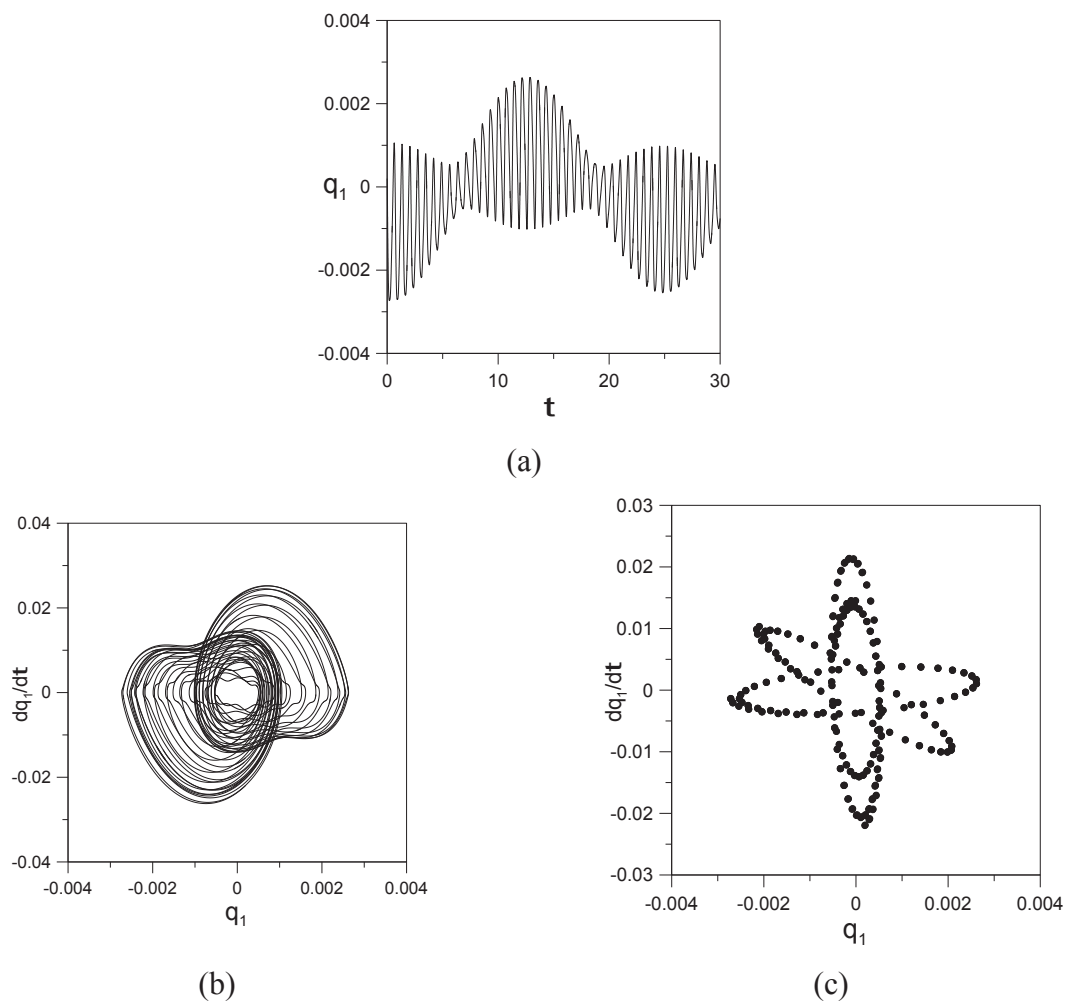
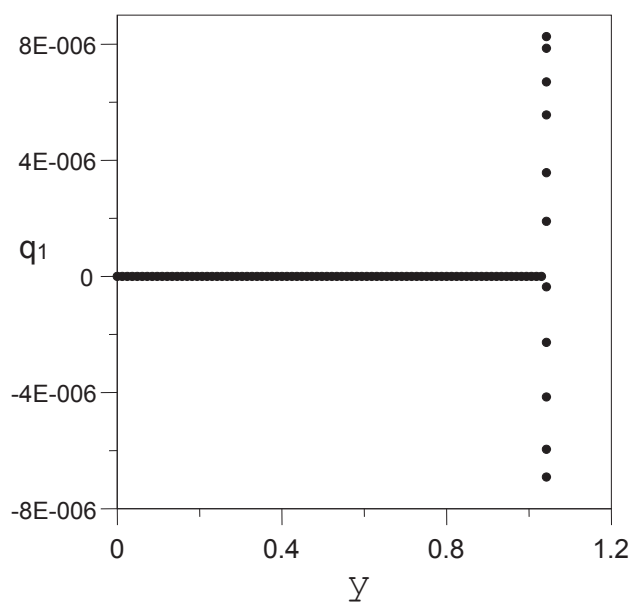
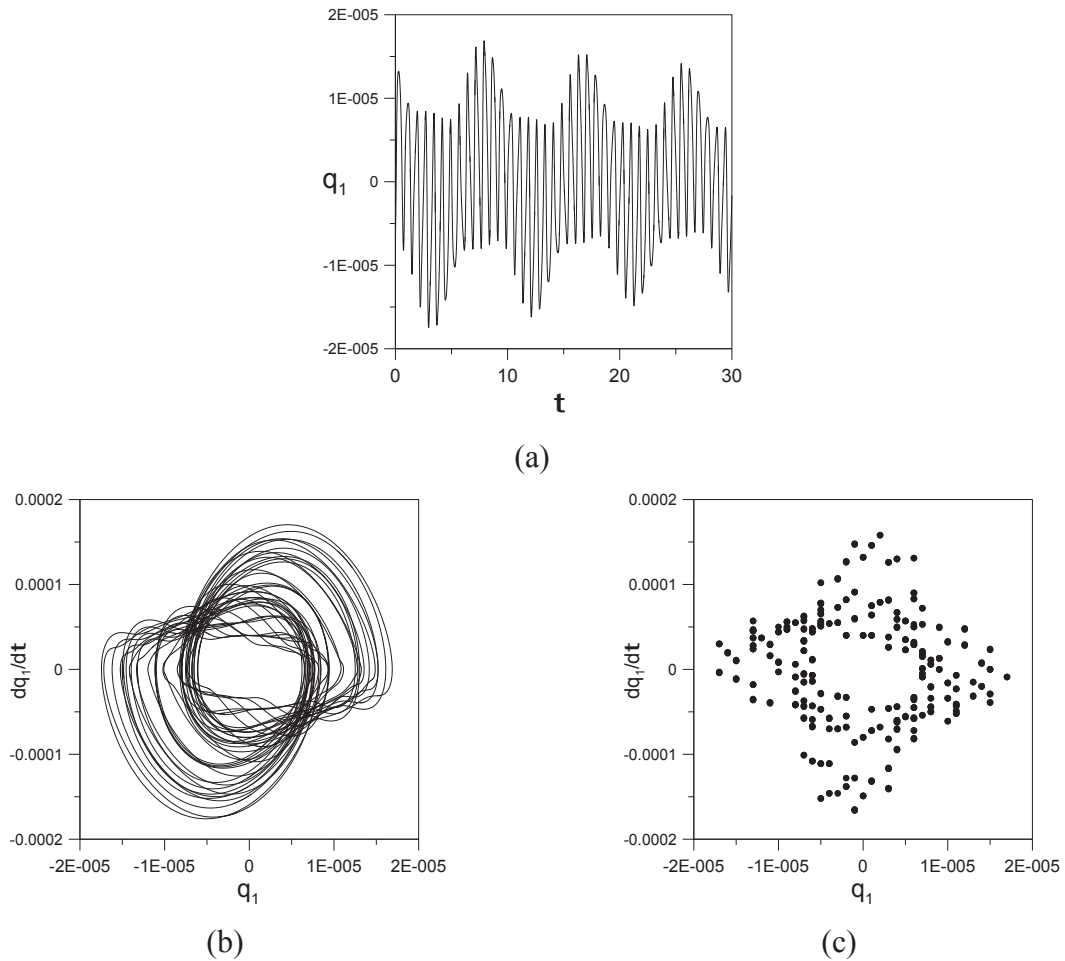
Figura 3.48 - Diagrama de bifurcação para Análise 04 com $u_0 = 0.6$ e $\omega/\omega_n = 1.68$.

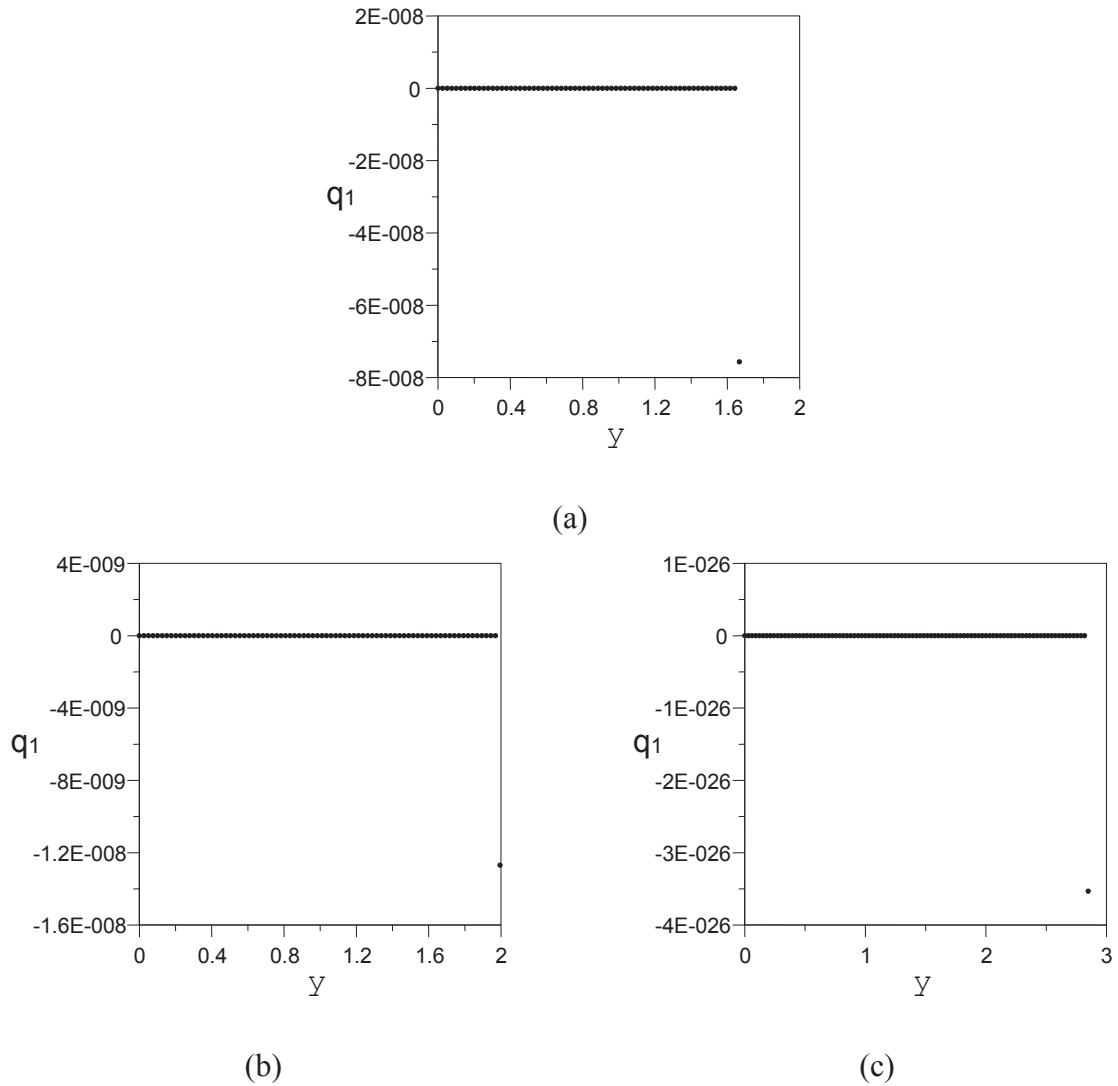
Figura 3.49 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (1.02; 6.91E-6).



Verifica-se que para o sistema com a massa concentrada localizada na extremidade livre do tubo, $u_0 = 0.4u_{cr}$ e relação de frequência igual a $\omega/\omega_n = 1.68$, após a bifurcação o sistema apresentou vibrações quase periódicas, como pode ser comprovado pelo plano fase e mapa de Poincaré nas Figura 3.47(b) e Figura 3.47(c) respectivamente. Por outro lado, aumentando-se o valor da parcela estática da velocidade para $u_0 = 0.6u_{cr}$ com a mesma relação de frequência da análise anterior, o sistema passou a apresentar movimentos caóticos, caracterizado por infinitos pontos cruzando a seção de Poincaré na Figura 3.49(c).

Mostra-se na Figura 3.50 diagramas de bifurcação realizados para Análise 5 que representaram apenas a solução trivial, em que após o ponto crítico o sistema apresentou vibrações de grande amplitude sem convergência.

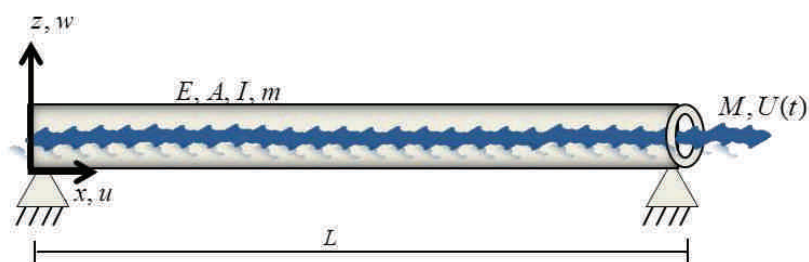
Figura 3.50 – Diagramas de bifurcação: (a) Análise 5 com $u_0=0.4 u_{cr}$ e $\omega/\omega_n=1.82$; (b) Análise 5 com $u_0=0.4 u_{cr}$ e $\omega/\omega_n=1$; (c) Análise 5 com $u_0=0.1 u_{cr}$ e $\omega/\omega_n=2$



3.2.2.3 Tubo simplesmente apoiado

Considera-se um tubo simplesmente apoiado de comprimento L , com rigidez a flexão EI , área da seção transversal A , massa por unidade de comprimento m , com fluido interno em escoamento de massa por unidade de comprimento M e velocidade U e, submetido a um regime de escoamento pulsante, conforme ilustra a Figura 3.51.

Figura 3.51 – Tubo simplesmente apoiado submetido a um fluxo pulsante.



Todas as análises foram realizadas para os seguintes valores de parâmetros adimensionais apresentados nas Equações (3.6) e (3.8): amortecimento visco-elástico igual a $\alpha = 0.01$, relação entre a massa do fluido e a massa do sistema $\beta = 0.2$, gravidade $\gamma = 0$ e, frequência natural adimensional igual a $\omega_1 = 9.87$, que corresponde à frequência fundamental do primeiro modo, onde o sistema perde estabilidade.

Com a intenção de avaliar a influência da parcela estática da velocidade nas regiões de instabilidade paramétrica, realizou-se uma análise variando-se o valor de u_0 de acordo com a velocidade crítica do sistema u_{cr} mensurada para o valor adotado do parâmetro β , de acordo com a Tabela 3.17.

Tabela 3.17 - Análise paramétrica para um tubo simplesmente apoiado.

Análise	u_0	β	u_{cr}
7	$0.1 u_{cr}$	0.2	π
	$0.4 u_{cr}$	0.2	π
	$0.6 u_{cr}$	0.2	π

Continuando com a mesma organização das curvas de escape, atribuiu-se cores para cada curva de instabilidade de acordo com o valor de u_0 , conforme exposto na Tabela 3.18.

Tabela 3.18 - Cores das curvas de estabilidade.

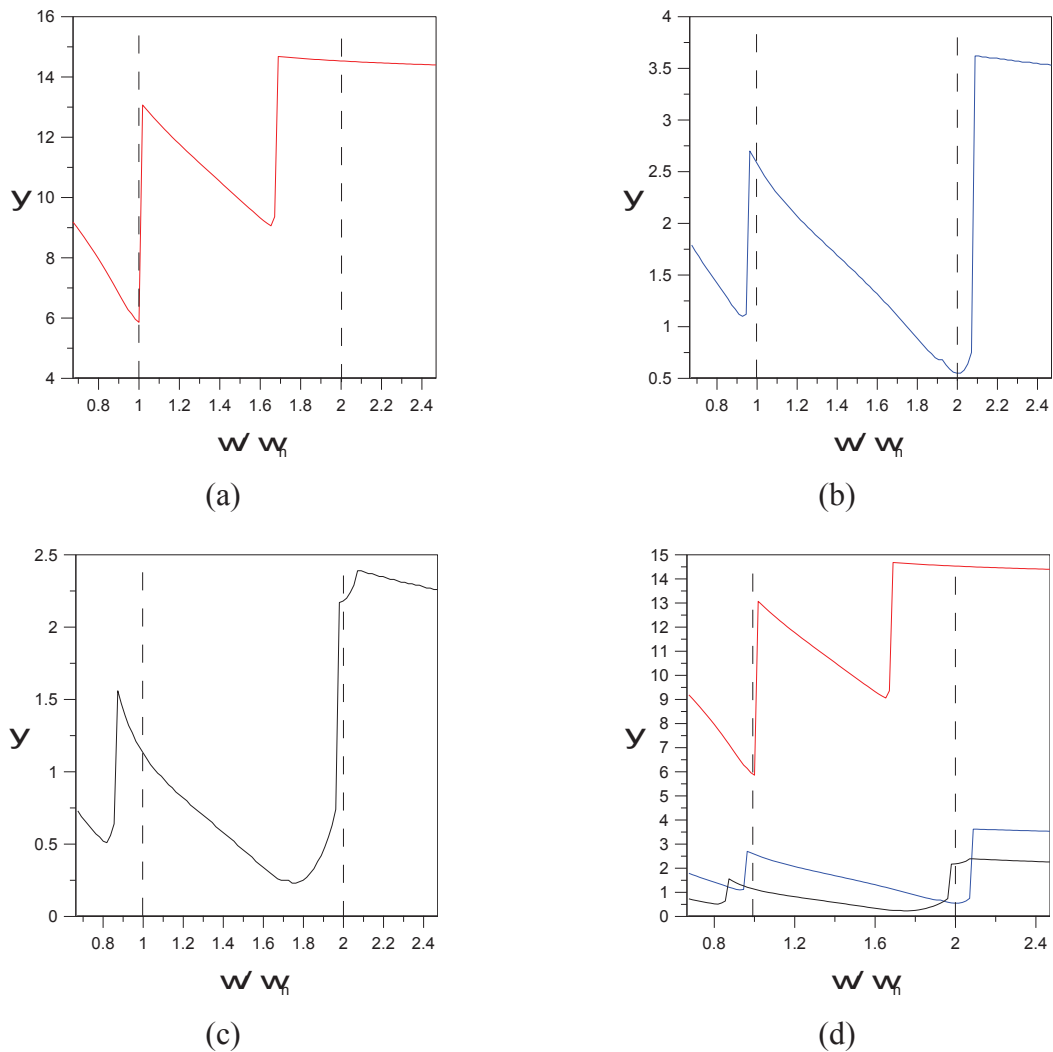
Cor da curva	u_0
Vermelha	$0.1 u_{cr}$
Azul	$0.4 u_{cr}$
Preta	$0.6 u_{cr}$

Têm-se na Figura 3.52 as curvas de transição para a Análise 7. Verifica-se que a curva de escape para $u_0 = 0.1 u_{cr}$ apresenta uma região de ressonância secundária ($\omega/\omega_n = 1$) mais

crítica que a região principal de ressonância ($\omega/\omega_n = 2$). Nota-se, também, a existência de trechos contínuos, sem a existência de regiões de ressonância associadas a submúltiplos de ω_1 , diferentemente dos resultados obtidos para um tubo em balanço.

O aumento do valor de u_0 fez surgir a região de ressonância principal, sendo esta agora mais crítica do que a região secundária. Observa-se, também, que o aumento da parcela estática da velocidade ampliou as regiões de ressonância paramétrica e, reduziu a frequência natural do sistema, deslocando as curvas de transição para o lado esquerdo do gráfico, como observado na análise para um tubo em balanço.

Figura 3.52 - Curvas de escape para a Análise 07: (a) $0.1 u_{cr}$; (b) $0.4 u_{cr}$; (c) $0.6 u_{cr}$; (d) Curvas de escape sobrepostas (--- $0.1 u_{cr}$, --- $0.4 u_{cr}$, --- $0.6 u_{cr}$).



Nas Figura 3.53 e Figura 3.55 encontram-se os diagramas de bifurcação para a segunda e primeira região de ressonância paramétrica, respectivamente, da curva de instabilidade da

Figura 3.52(b) e, nas Figura 3.54 e Figura 3.56 ilustra-se a resposta no tempo, plano fase e seção de Poincaré para um ponto fixo dentro das regiões de instabilidade.

Figura 3.53 – Diagrama de bifurcação para Análise 7 com $u_0=0.4 u_{cr}$ e $\omega/\omega_n=0.91$.

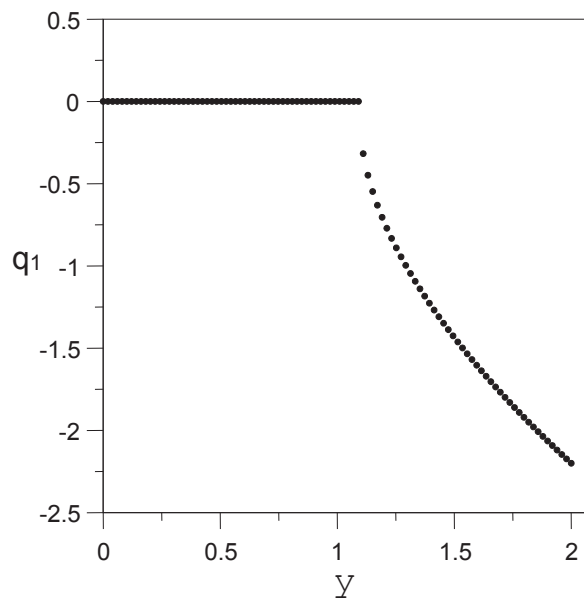
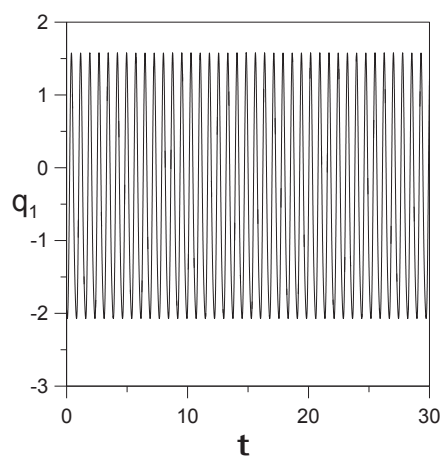


Figura 3.54 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (1.81; -1.95).



(a)

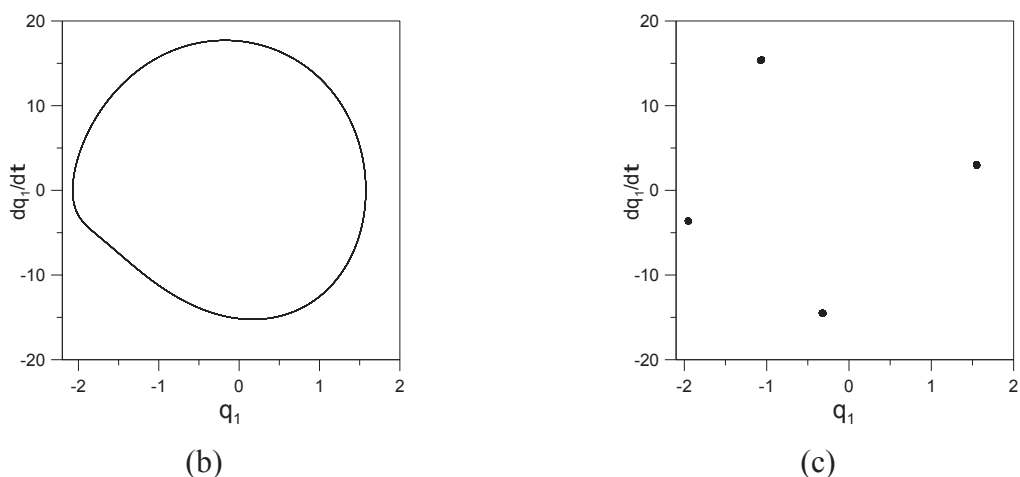


Figura 3.55 – Diagrama de bifurcação para Análise 7 com $u_0=0.4 u_{cr}$ e $\omega/\omega_n=1.96$.

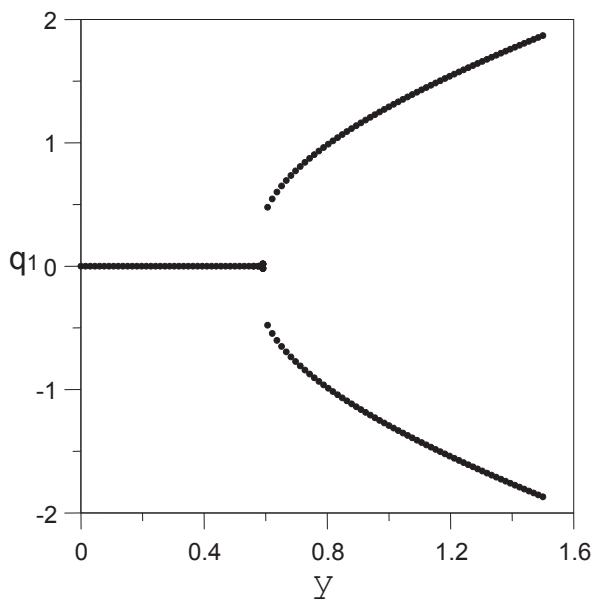
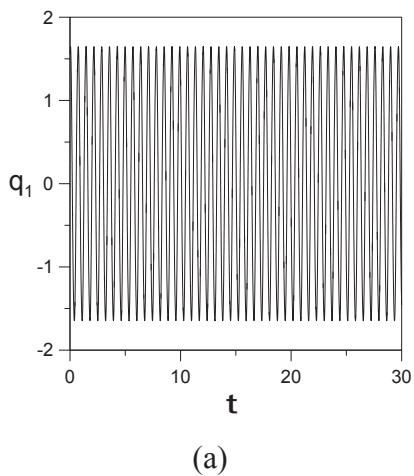
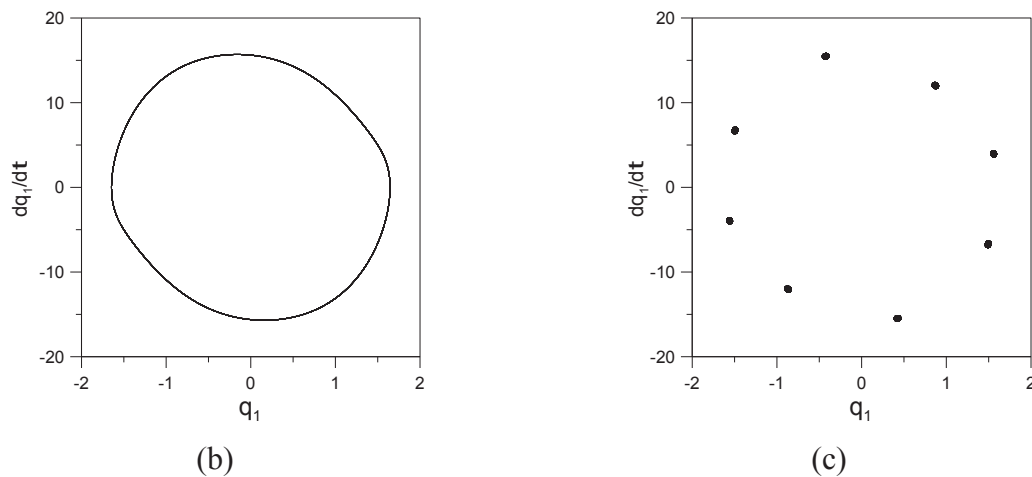


Figura 3.56 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (1.21; 1.55).





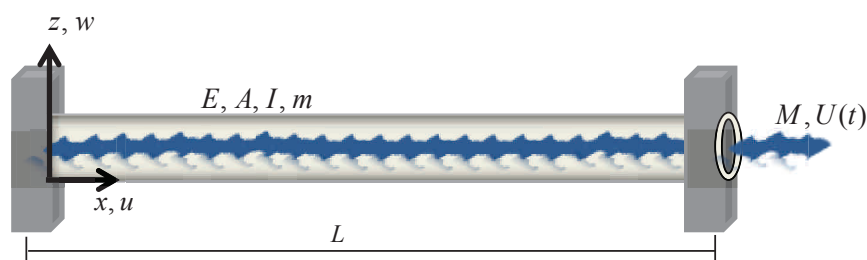
Verifica-se que em todos os resultados o sistema possui solução trivial para valores de amplitude menores que a amplitude crítica e , após a bifurcação o sistema apresenta vibrações periódicas, caracterizando uma bifurcação supercrítica do tipo *pitchfork* e, portanto, o sistema perde a estabilidade por divergência.

Observa-se que o período da resposta é igual a quatro vezes o período da excitação, na região secundária de instabilidade e, igual a oito vezes o período da frequência da força excitadora, na região principal de ressonância paramétrica, como pode ser comprovado pelas seções de Poincaré ilustradas nas Figura 3.54(c) e Figura 3.56(c), respectivamente.

3.2.2.4 Tubo biengastado

Considera-se um tubo simplesmente apoiado de comprimento L , com rigidez a flexão EI , área da seção transversal A , massa por unidade de comprimento m , com fluido interno em escoamento de massa por unidade de comprimento M e velocidade U e, submetido a um regime de escoamento pulsante, conforme ilustra a Figura 3.57.

Figura 3.57 - Tubo biengastado submetido a um fluxo pulsante.



Todas as análises foram feitas para os seguintes valores de parâmetros adimensionais apresentados nas Equações (3.6) e (3.8): amortecimento visco-elástico igual a $\alpha = 0.01$, relação entre a massa do fluido e a massa do sistema $\beta = 0.2$, gravidade $\gamma = 0$. Todas as curvas de instabilidade encontram-se normalizadas por uma frequência natural adimensional igual a $\omega_1 = 22.23$, que corresponde à frequência fundamental do primeiro modo, onde o sistema perde estabilidade, portanto, considera-se em todos os resultados que $\omega_n = \omega_1$.

Realizou-se uma análise paramétrica, variando-se o valor da carga estática u_0 de acordo com a velocidade crítica do sistema u_{cr} mensurada para o valor adotado do parâmetro β , de acordo com a Tabela 3.19.

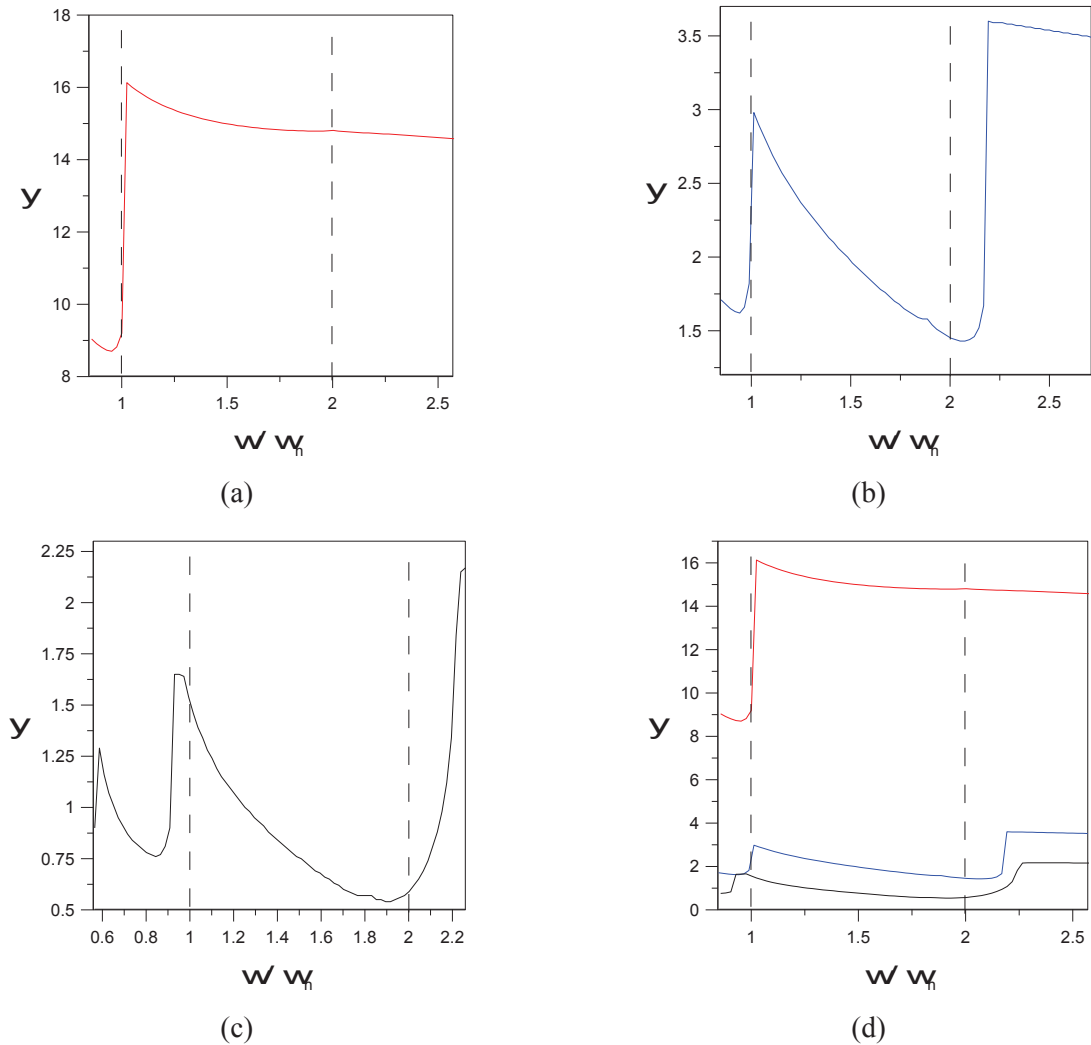
Tabela 3.19 - Análise paramétrica para um tubo biengastado.

Análise	u_0	β	u_{cr}
8	$0.1 u_{cr}$	0.2	2π
	$0.4 u_{cr}$	0.2	2π
	$0.6 u_{cr}$	0.2	2π

As observações realizadas para esta análise são semelhantes às observadas para um tubo biapoiado. Portanto, mostra-se na Figura 3.58 as curvas de escape para a Análise 08, em que na Figura 3.58(a) encontra-se a fronteira para $0.1 u_{cr}$, Figura 3.58(b) para $0.4 u_{cr}$, Figura 3.58(c) para $0.6 u_{cr}$ e, Figura 3.58(d) todas as curvas sobrepostas. Nota-se que, semelhante à análise feita para um tubo biapoiado, para uma carga estática igual a $u_0 = 0.1 u_{cr}$ a região de ressonância primária ($\omega/\omega_n = 2$) possui um valor limite de parâmetro da amplitude da velocidade ψ maior do que a região de ressonância secundária ($\omega/\omega_n = 1$).

Verifica-se que quanto maior o valor da parcela estática, maior a largura das regiões de instabilidade paramétrica. Nota-se, também, que as fronteiras para $0.4 u_{cr}$ e $0.6 u_{cr}$ possuem regiões de ressonância paramétrica bem definidas.

Figura 3.58 - Curvas de escape para a Análise 08: (a) $0.1 u_{cr}$; (b) $0.4 u_{cr}$; (c) $0.6 u_{cr}$; (d) Curvas de escape sobrepostas ($---$ $0.1 u_{cr}$, $---$ $0.4 u_{cr}$, $---$ $0.6 u_{cr}$).



Nas Figura 3.59 e Figura 3.61 encontram-se os diagramas de bifurcação para a segunda e primeira região de ressonância paramétrica, respectivamente, da curva de instabilidade da Figura 3.58(b) e, nas Figura 3.60 e Figura 3.62 ilustra-se a resposta no tempo, plano fase e seção de Poincaré para um ponto fixo dentro das regiões de instabilidade.

Figura 3.59 – Diagrama de bifurcação para Análise 8 com $u_0=0.4 u_{cr}$ e $\omega/\omega_n= 0.95$.

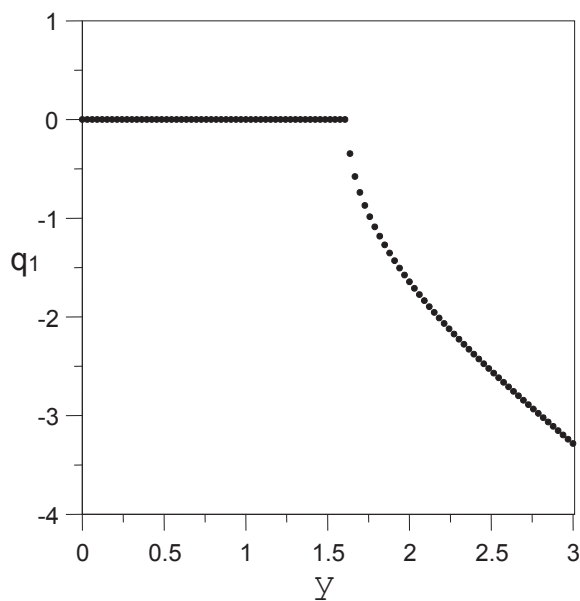


Figura 3.60 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto(2.42; -2.42).

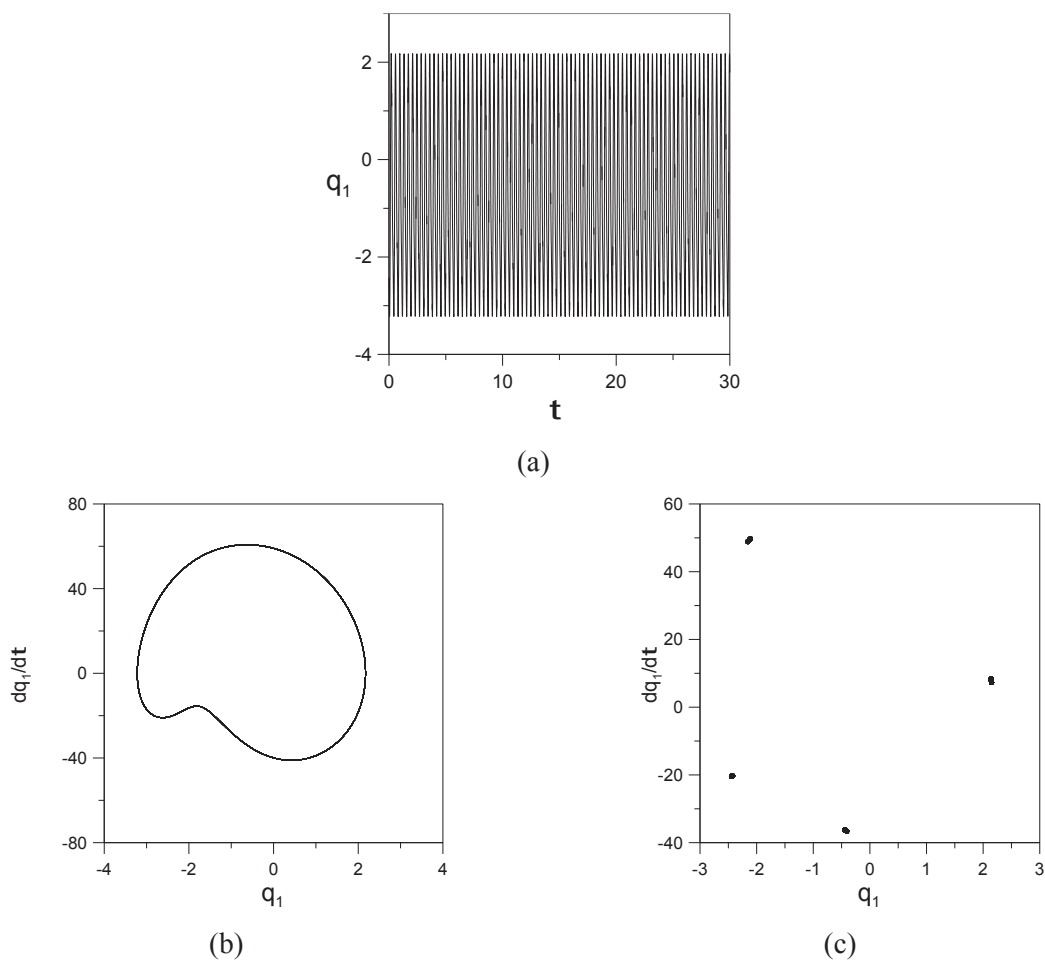


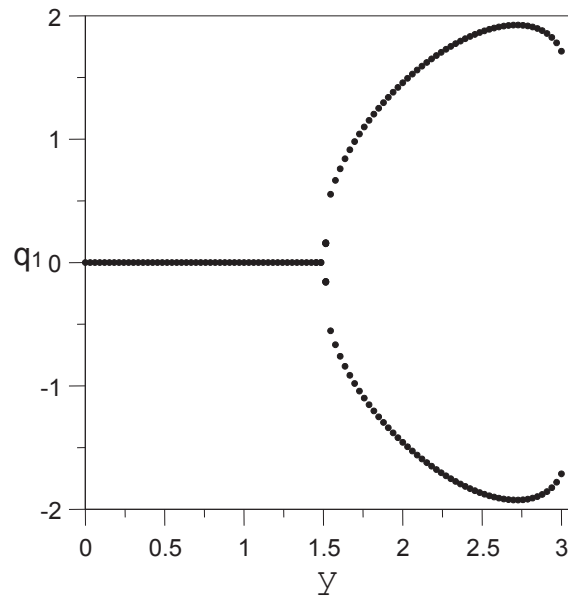
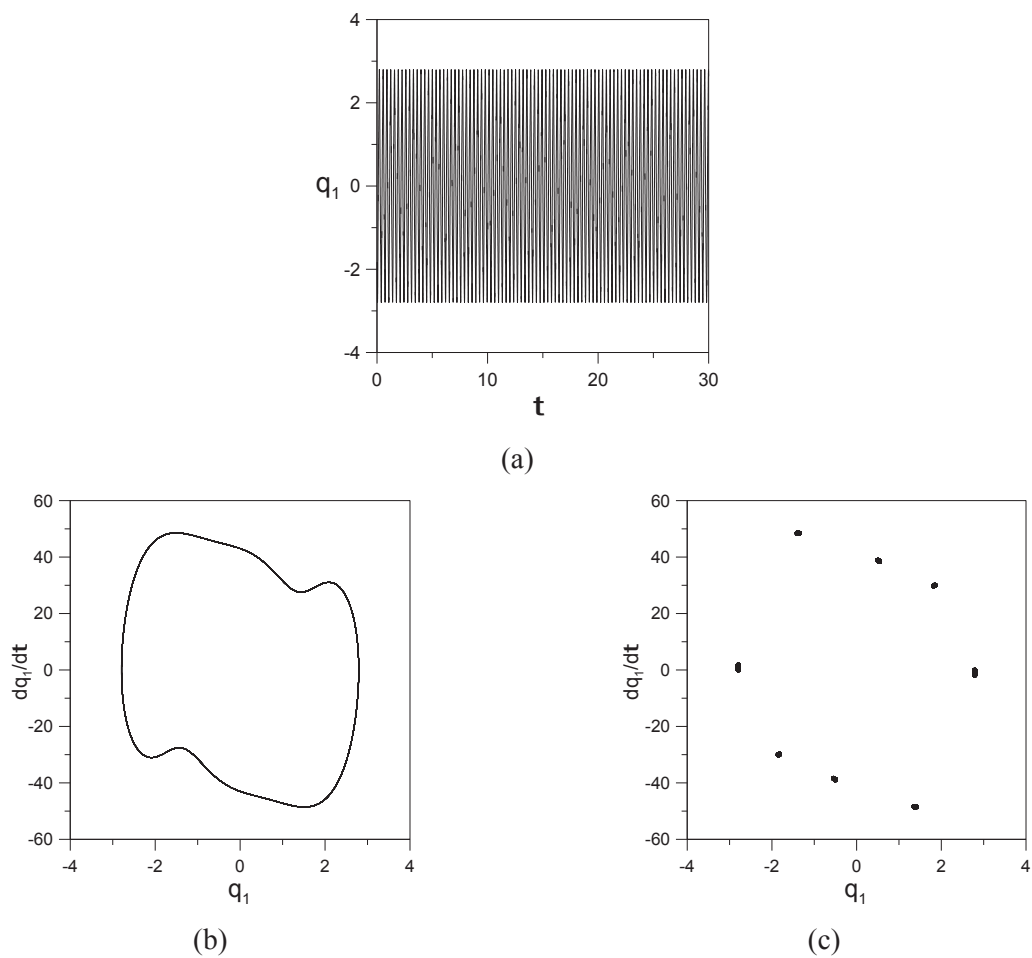
Figura 3.61 – Diagrama de bifurcação para Análise 8 com $u_0=0.4 u_{cr}$ e $\omega/\omega_n=1.98$.

Figura 3.62 - (a) Resposta permanente; (b) Plano fase; (c) Seção de Poincaré, todos para o ponto (2.93; -1.82).



Verifica-se que todos os resultados foram semelhantes aos encontrados na Seção 3.2.2.3, para um tubo simplesmente apoiado, ou seja, o sistema apresenta solução trivial para valores de amplitude menores que a amplitude crítica e, após a bifurcação apresenta movimentos periódicos, cujos períodos da resposta também são os mesmos do tubo biapoiado, quatro e oito vezes ao período da frequência de excitação para a segunda e primeira região de instabilidade paramétrica, comprovados pelas seções de Poincaré ilustradas nas Figura 3.60(c) e Figura 3.62(c).

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste trabalho foi estudado o comportamento dinâmico linear e não-linear de tubulações com fluido interno em escoamento, permanente e pulsante, para três condições de contorno: a) em balanço; b) simplesmente apoiado e; c) biengastado. Para modelar o tubo foi considerada a teoria não linear de Euler-Bernoulli e o fluido foi descrito através do modelo de Païdoussis e Issid(1974) onde foi considerado um fluido incompressível, irrotacional e isentrópico. Os deslocamentos laterais do tubo foram descritos por expansões de vigas com 4 graus de liberdade e o método de Galekin foi utilizado para obter um sistema de quatro equações diferenciais ordinárias não lineares de segunda ordem no tempo.

Na solução linear, através dos diagramas de Argand, foi possível observar que a velocidade crítica do fluido depende da condição de contorno do tubo, sendo que para tubos simplesmente apoiados e biengastados o valor crítico não se altera com a mudança da densidade do fluido e, para tubos em balanço a velocidade crítica é diretamente proporcional ao valor da densidade. Observou-se, também, que para uma certa velocidade do fluido tubos biapoiados e biengastados perdem estabilidade por divergência através de uma bifurcação do tipo *pitchfork* e, tubos em balanço perdem estabilidade por *flutter* através de uma bifurcação do tipo *hopf*; e que a presença de amortecimento visco-elástico e de uma massa concentrada na extremidade livre do tubo em balanço reduz a velocidade crítica do sistema.

A instabilidade não linear foi analisada considerando o fluido com fluxo permanente, apenas para o caso do tubo em balanço e, pulsante, abrangendo as três condições de contorno. Em todas as análises verificou-se que após a aplicação das condições iniciais de deslocamento e velocidade o sistema possui solução trivial para valores de velocidade ou amplitude menores que o valor crítico. Após o valor crítico, o tubo em balanço submetido a um fluxo contínuo apresentou vibrações quase periódicas, o tubo em balanço parametricamente excitado apresentou movimentos quase periódicos para valores de $u_0 = 0.1 u_{cr}$ e, vibrações caóticas para $u_0 = 0.4 u_{cr}$ e $u_0 = 0.6 u_{cr}$, já o tubo biapoiado e biengastado apresentaram vibrações periódicas.

A partir das curvas de instabilidade pôde-se observar que o tubo em balanço parametricamente excitado possui a primeira e a segunda região de instabilidade bem definidas para $u_0 = 0.1 u_{cr}$, à medida que eleva-se o valor da parcela permanente estes vales tendem a desaparecer e a quantidade de vales subharmônicos aumentam. Atribui-se também ao aumento do valor de u_0 a redução da frequência natural do sistema, deslocando-se as curvas para o lado esquerdo do gráfico. Verificou-se também que o incremento do valor da densidade do fluido aumenta o valor da velocidade crítica do sistema, embora este aumento amplie a largura dos vales aumentando as regiões de instabilidade.

A presença de uma massa concentrada acoplada ao tubo em balanço reduziu a frequência natural do sistema diminuindo sua velocidade crítica, sendo que esta redução é maior a medida que a posição da massa se afasta do engaste.

As curvas de instabilidade para tubos biapoiados e biengastados com $u_0 = 0.1 u_{cr}$ apresentaram uma região de instabilidade secundária com valor limite de ψ menor que a região de instabilidade principal e à medida que o valor de u_0 foi incrementado a região principal de instabilidade tornou-se a mais crítica. Para todos valores de u_0 analisados, obteve-se, para estas condições de contorno, regiões de instabilidade paramétrica bem definidas, sem a presença de vales subharmônicos, como observado na análise do tubo em balanço.

Com a finalidade de dar continuidade a esta linha de pesquisa são apresentadas a seguir algumas sugestões:

- Aprofundar a análise paramétrica para valores da parcela permanente da velocidade superior ao valor crítico a fim de discutir critérios de estabilidade para esta classe de problemas.
- Considerar outros parâmetros de controle como o efeito da variação da temperatura do tubo e do fluido na estabilidade do sistema.
- Realizar uma análise numérica tridimensional do sistema.

- Fazer uma análise experimental, para que se possa comprovar os resultados numéricos, confirmando experimentalmente os complexos fenômenos não lineares exibidos neste trabalho.

REFERÊNCIAS

- BAJAJ, A. K.; SETHNA, P. R.; LUNDGREN, T. S. Hopf bifurcation phenomena in tubes carrying a fluid. **SIAM Journal of Applied Mathematics. Canada**, v. 39, p. 213-230. 1980.
- BALACHANDRAN, B.; MAGRAB, E. B. **Vibrações Mecânicas**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011. 615 p.
- BENJAMIN, T. B. Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid. **Proceedings of the Royal Society**. London, v. 261, 457-486 e 487-499, 1961.
- DELLEZZOPOLLES, JR. C. F. **Análise dinâmica de torres de energia eólica**. 2011. 83 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, 2011.
- EL-BASSIOUNY, A. F. Principal parametric resonances of non-linear mechanical system with two-frequency and self-excitations. **Mechanics Research Communications**, v. 32, p. 337-350, 2005. DOI: 10.1016/j.mecherescom.2004.10.013.
- FOX, R. W.; MCDONALD, A. T. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. 504 p.
- GHAYESH, M. H.; AMABILI, M.; PAÏDOUSSIS, M. P. Nonlinear vibrations and stability of an axially moving beam with an intermediate spring support: two-dimensional analysis. **Nonlinear Dynamics**, v. 70, p. 335-354, DOI: 10.1007/s11071-012-0458-3.
- GHAYESH, M. H.; KHADEM, S. E. Rotatory inertia and temperature effects on non-linear vibration, steady-state response and stability of an axially moving beam with time-dependent velocity. **International Journal of Mechanical Sciences**, Iran, v. 50, p. 389-404, 2008. DOI: 10.
- GIACOBBI, B. D. **The dynamics of aspirating cantilevered pipes and pipes conveying variable density fluid**. 2010. 84 p. PhD Thesis. McGill University, Canada, 2010.
- GONÇALVES, B. P. **Interação dinâmica não-linear entre fluido e cascas delgadas**. 1987. 317 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – COOPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1987.
- GREGORY, R. W.; PAÏDOUSSIS, M. P. Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid. **Proceedings of the Royal Society**. London, v. 293, 512-527 e 528-542, 1966.
- GUO, C. Q.; ZHANG, C. H.; PAÏDOUSSIS, M. P. Modification of equation of motion of fluid-conveying pipe for laminar and turbulent flow profiles. **Journal of Fluids and Structures**, China, v.26, p. 793-803, 2010. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2010.04.005.

HOUSNER, G. W. Bending vibrations of a pipe line containing flowing fluid. **Journal of Applied Mechanics**. v. 19, p. 205-208, 1952.

JIN, J. D.; ZOU, G. S. Bifurcations and chaotic motions in the autonomous system of a restrained pipe conveying fluid. **Journal of Fluids and Structures**, China, v. 260, p. 783-805, 2003.

JIN, J. D.; SONG, Z. Y. Parametric resonances of supported pipes conveying pulsating fluid. **Journal of Fluids and Structures**, China, v. 20, p. 763-783, 2005.

LI, G. X.; PAÏDOUSSIS, M. P. Stability, double degeneracy and chaos in cantilevered pipes conveying fluid. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Canada, v. 29, p. 83-107, 1994.

LU, P.; LEE, H. P. A treatment for the study of dynamic instabilities of fluid-conveying pipes. **Mechanics Research Communications**, China, v. 36, p. 742-746, 2009. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2009.05.001.

LUNDRGREN, T. S.; SETHNA, P. R.; BAJAJ, A. K. Stability boundaries for flow-induced motions of tubes with an inclined terminal nozzle. **Journal of Sound and Vibration**. Canada, v. 64, p. 553-571. 1979

NIORDISON, F. I. Vibrations of a cylindrical tube containing flowing fluid. **Konglia Tekniska Högskolans Handlingar**. Nº 73.

OLIVEIRA, S. S. **Instabilidade paramétrica de colunas**. 1998. 150 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1998.

ÖZ, H. R.; PAKDEMIRLI, M.; BOYACI, H. Non-linear vibrations and stability of an axially moving beam with time dependent velocity. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Turkey, v. 36, p. 107-115, 2001.

ÖZHAN, B. B.; PAKDEMIRLI, M. Principal parametric resonances of a general continuous system with a cubic nonlinearities. **Applied Mathematics and Computation**, Turkey, v. 219, p. 2412-2423, 2012.

PAZ, M. **Structural Dynamics**. 2. ed. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1984. 561 p.

PAÏDOUSSIS, M. P. Dynamics of cantilevers subjected to internal and/or external axial flow: new developments and insights. **Institute of Thermomechanics**, Prague, 2008.

PAÏDOUSSIS, M. P. **Fluid-Structure Interactions**, Academic Press, Vol. 1, San Diego, 1998. 572 p.

PAÏDOUSSIS, M. P. Dynamics of tubular cantilevers conveying fluid. **Journal of Mechanical Engineering Science**. Canada, v. 12, p. 85-103. 1970.

- PAÏDOUSSIS, M. P. Dynamics of flexible slender cylinders in axial flow. **Journal of fluid mechanics**. Canada, v. 23, p. 717-736. 1966.
- PAÏDOUSSIS, M. P.; ISSID, N. T. Dynamic stability of pipes conveying fluid. **Journal of Soud and Vibration**. Canada, v. 33, p. 267-294. 1974.
- PAÏDOUSSIS, M. P.; MOON, F. C. Nonlinear and chaotic fluidelastic vibrations of a flexible pipe conveying fluid. **Journal of Fluids and Structures**, U.S.A., v. 2, p. 567-591, 1988.
- PRADO, Z. J. G. N. P. **Acoplamento e interação modal na instabilidade dinâmica de cascas cilíndricas**. 2001. 222 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.
- QIAN, Q.; WANG, L.; NI, Q. Instability of simply supported pipes conveying fluid under thermal loads. **Mechanics Research Communications**, China, v. 36, p. 413-417. 2008.
- RAO, S. S. **Vibrações Mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008. 424 p.
- RINALDI, S.; PAÏDOUSSIS, M. P. Dynamics of a cantilevered pipe discharging fluid, fitted with a stabilizing end-piece. **Journal of Fluids and Structures**. Canada, v. 26, p. 517-525. 2010. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2010.01.004.
- RINALDI, S.; PRABHAKAR, S.; VENGALLATORE, S.; PAÏDOUSSIS, M. P. Dynamics of microscale pipes containing internal fluid flow: damping, frequency shift, and satability. **Journal of Soud and Vibration**. Canada, v. 329, p. 1081-1088. 2010.
- ROUSSELET, J.; HERRMAN, G. Dynamic behavior of continuous cantilevered pipes conveying fluid near critical velocities. **Journal of Applied Mechanics**. v. 48, p. 945-947, 1981.
- ROUSSELET, J.; HERRMAN, G. Flutter of articulated pipes at finite amplitude. **Journal of Applied Mechanics**. v. 44, p. 154-158, 1977.
- SADEGHI, M. Y. **Nonlinear of a slender flexible cylinder subjected to axial flow**. 2006. 254 p. PhD Thesis. McGill University, Canada, 2006.
- SEMLER, C. **Nonlinear dynamics and chaos of a pipe conveying fluid**. 1991. 113 p. PhD Thesis. McGill University, Canada, 1991.
- SEMLER, C.; PAÏDOUSSIS, M. P. Nonlinear analysis of the parametric resonances of a planar fluid-conveying cantilevered pipe. **Journal of Fluids and Structures**. Canada, v. 10, p. 787-825, 1996.
- SEMLER, C.; PAÏDOUSSIS, M. P. Nonlinear dynamics of a fluid-conveying cantilevered pipe with an intermediate spring support. **Journal of Fluids and Structures**. Canada, v. 7, p. 269-298, 1993.
- THOMPSON, J. M.; LUNN, T. S. Static elastic formulations of a pipe conveying fluid. **Journal of Sound Vibration**, England, v. 77, p. 127-132, 1981.

XIE, W. C. **Dynamic Stability of Structures**. 2. ed. New York: Cambridge University Press, 2011. 435 p.

WANG, L. A further study on the non-linear dynamics of simply supported pipes conveying pulsating fluid. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, China, v. 44, p. 115-121, 2009.