

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ALEX NERI GUTIERREZ

Um Método de Averaging para Inclusões Diferenciais Fuzzy

Goiânia
2012

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: ☒ **Dissertação** ☐ **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):		ALEX NERI GUTIERREZ	
E-mail:		neguti22@gmail.com	
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? ☒ Sim ☐ Não			
Vínculo empregatício do autor		SEM VINCULO	
Agência de fomento:		Sigla: CAPES	
País:	BRASIL	UF:	CNPJ:
Título: UM MÉTODO DE AVERAGING PARA INCLUSÕES DIFERENCIAIS FUZZY			
Palavras-chave:		Método de averaging, inclusões diferenciais, teoria dos conjuntos fuzzy, equações diferenciais fuzzy, inclusões diferenciais fuzzy.	
Título em outra língua:		THE AVERAGING METHOD FOR FUZZY DIFFERENTIAL INCLUSIONS	
Palavras-chave em outra língua:		The averaging method, differential inclusions, fuzzy set theory, fuzzy differential equations, fuzzy differential inclusions.	
Área de concentração:		SISTEMAS DINÂMICOS	
Data defesa: (dd/mm/aaaa)		23/03/2012	
Programa de Pós-Graduação:		MESTRADO EM MATEMÁTICA	
Orientador (a):		Profª. Dra. Marina Tuyako Mizukoshi	
E-mail:		tuyako@mat.ufg.br	
Co-orientador (a):*			
E-mail:			

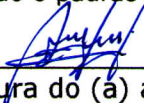
*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM ☐ NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.



 Assinatura do (a) autor (a)

Data: 23 / 04 / 12

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

ALEX NERI GUTIERREZ

Um Método de Averaging para Inclusões Diferenciais Fuzzy

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos.

Orientadora: Profa. Dra. Marina Tuyako Mizukoshi

Goiânia
2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

N445m Neri Gutierrez, Alex.
Um método de Averaging para inclusões diferenciais
fuzzy [manuscrito] / Alex Neri Gutierrez. - 2012.
viii, 84 f. : il., figs, tabs.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Marina Tuyako Mizukoshi.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de
Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2012.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras, abreviaturas, siglas e tabelas.
Apêndices.

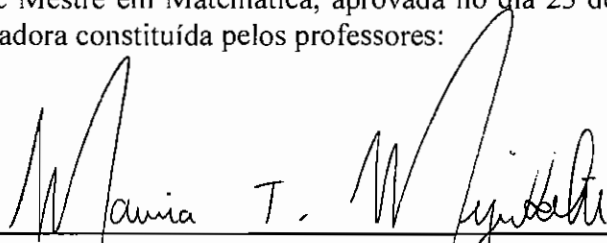
1. Método de Averaging. 2. Conjuntos fuzzy – Teoria. 3.
Equações diferenciais fuzzy. I. Título.

CDU: 519.635

ALEX NERI GUTIERREZ

UM MÉTODO DE AVERAGING PARA INCLUSÕES DIFERENCIAIS FUZZY

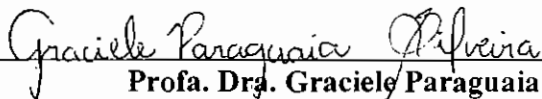
Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 23 de março de 2012, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



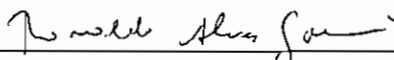
Profa. Dra. Marina Tuyako Mizukoshi
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica-UNICAMP



Profa. Dra. Graciele Paraguaia Silveira
Campus de Jataí-UFG



Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Alex Neri Gutierrez

Graduou-se em Matemática na UNT - Universidad Nacional de Trujillo - Trujillo - Peru.

Dedico este trabalho a toda a minha família de uma maneira muito especial a meu pai **Ricardo Neri Cruz**, minha mãe **Victoria Gumerinda Gutierrez Reyes** e meus irmãos **Jhoni** e **Perciles** pelo exemplo de vida e pela dedicação que tiveram em me educar e mostrar a importância do conhecimento.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos:

Primeiramente e acima de tudo a Deus por ter me dado a vida e permitido chegar ate os dias atuais com saudade e alegria de viver.

Aos meus pais e meus dois irmãos pelo apoio e por sempre estarem do meu lado. E do mais intimo do meu coração, pelo carinho que sempre me tratou, Ana Laksmy te quero muito.

A minha orientadora Profa. Marina Tuyako Mizukoshi pela orientação, incentivo, crença e paciência na elaboração deste trabalho. E todos os meus professores de pós-graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás pelo apoio e a amizade.

A todos os meus amigos e colegas de mestrado que sempre foram um apoio nos momentos de dificuldade, meus sinceros agradecimentos.

Aos meus professores de graduação da Universidade Nacional de Trujillo (Peru). Em especial ao Prof. Amado Mendez Cruz, pelo incentivo, crença e conselhos.

Finalmente, quero agradecer à CAPES pelo apoio financeiro.

"Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tendo uma espécie de paixão pela mesma. A verdade, o que proporciona o máximo prazer não é o conhecimento, mas sim o aprendizagem; não é a posição, mas sim o ato de atingir a meta ..."

Johann Carl Friedrich Gauss,
matemático alemão.

Resumo

Neri Gutierrez, Alex. **Um Método de Averaging para Inclusões Diferenciais Fuzzy**. Goiânia, 2012. 84p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

O trabalho tem como objetivo principal, o estudo de um método de averaging em problemas de valor inicial no contexto fuzzy. Com o intuito de facilitar a compreensão do trabalho, faz-se um estudo do, um método de averaging no contexto determinístico, teoria de inclusões diferenciais, teoria dos conjuntos fuzzy, inclusões diferenciais fuzzy e finalmente mostra-se o um resultado da validade do método de averaging no contexto fuzzy.

Palavras-chave

Método de Averaging, inclusões diferenciais, teoria dos conjuntos fuzzy, equações diferenciais fuzzy, inclusões diferenciais fuzzy

Abstract

Neri Gutierrez, Alex. **A Averaging Method for Fuzzy Differential Inclusions**. Goiânia, 2012. 84p. MSc. Dissertation. Institute of Mathematics and Statistics, Federal University of Goiás.

This work has the main objective to study a method of averaging to initial value problems in the context of the fuzzy theory. In order, to facilitate understanding of the work, averaging method, differential inclusions theory, fuzzy set theory, and fuzzy differential inclusions are studied; finally this work shows a result of the method of averaging in the context of the fuzzy theory.

Keywords

Averaging method, differential inclusions, fuzzy set theory, fuzzy differential equations, fuzzy differential inclusions

Sumário

Introdução	9
1 O Método de Averaging	12
1.1 Introdução ao Método de Averaging	12
1.2 A Forma Padrão de Lagrange	13
1.3 O Teorema de Averaging de Primeira Ordem	14
1.4 Existência de Ciclos Limites em Campos Vetoriais Polinomiais	17
2 Inclusões Diferenciais	30
2.1 Conceitos Preliminares	30
2.2 Multifunção	32
2.3 Problema de Seleção	35
2.4 Cálculo diferencial e integral de multifunções	38
2.4.1 Métrica de Hausdorff e função suporte	39
2.4.2 Integral e diferencial de multifunções	42
2.5 Inclusões Diferenciais	46
3 Teoria dos Conjuntos Fuzzy	54
3.1 O Cálculo diferencial e integral de funções fuzzy	60
3.2 Equações Diferenciais Fuzzy	66
4 Teorema de Averaging para Inclusões Diferenciais Fuzzy	69
4.1 Multifunções Fuzzy	69
4.2 Inclusão Diferencial Fuzzy	71
4.3 Um Teorema de Averaging para Inclusões Diferenciais Fuzzy	72
Considerações Finais	81
Referências Bibliográficas	82

Introdução

Nas três últimas décadas do século XX ficou claro que os avanços nas ciências físicas, biológicas, econômicas, entre outras poderiam ser abordados através de enfoques matemáticos quantitativos e qualitativos apropriados. Frequentemente um problema do mundo real pode ser modelado através de sistemas diferenciais, da forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases} \quad (0-1)$$

onde $t \in \mathbb{R}^+$ é a variável tempo, $x \in \mathbb{R}^n$ é a variável estado. Então, estuda-se a existência e o comportamento tanto analítico como qualitativo da solução de (0-1).

É bem conhecido que as imagens das soluções de um sistema diferencial (órbitas) são pontos, difeomorfas a um intervalo de $\mathbb{R}$ ou difeomorfas a um círculo [27]. Quando uma órbita periódica for isolada no conjunto de todas as órbitas periódicas, ela é denominada ciclo limite. A noção de ciclo limite surgiu pela primeira vez no estudo das equações diferenciais planares realizados por Poincaré entre os anos de 1880 e 1890, e desde então os ciclos limites são objetos de estudo de muitos pesquisadores. Por exemplo, Van der Pol em 1926, Lienard em 1928 e Andronov em 1929 provaram que a solução periódica de uma oscilação auto sustentável de um circuito em um tubo à vácuo era um ciclo limite, no sentido definido por Poincaré [1], [22]. Posteriormente surgiram vários pesquisadores que passaram a observar tanto a existência ou não dos ciclos limites, assim como obter o número máximo de ciclos limites e as propriedades das mesmas [4],[9],[17],[18],[28].

Existem diversos métodos para estudar existência de ciclos limites. Entre os quais encontra-se o método de averaging.

O nascimento do método de averaging é datada do final do século XVII quando em 1788, Lagrange formulou o problema gravitacional de três corpos como um problema de perturbação do problema de dois corpos [28]. Nenhuma prova rigorosa foi dada naquela época, até que Fatou deu a primeira prova da validade assintótica do método em 1928 [19]. Em 1930, após as pesquisas sistemáticas feitas por Krylov, Bogoliubov, Mitropolsky, entre outros, [1],[28], o método de averaging gradualmente tornou-se um dos métodos clássicos em análise de oscilações não lineares e recentemente no estudo de

ciclos limite.

Em análise de oscilações, o método de averaging é particularmente utilizado em problemas não lineares. A ideia do método de averaging é aproximar um sistema não autônomo através de um sistema autônomo, o qual é presumivelmente fácil de estudar. Além disso, pode-se obter propriedades da dinâmica do sistema não autônomo a partir das soluções do sistema autônomo.

Observa-se que o estudo de sistemas modelados por (0-1) quase sempre está incompleta, pois os valores dos coeficientes das equações diferenciais ou das condições iniciais geralmente não são precisamente conhecidos. Surge então a necessidade de teoria matemática para descrever noções vagas e incertas.

Em 1965, Zadeh iniciou o desenvolvimento da teoria dos conjuntos fuzzy, que torna possível a descrição de noções vagas e manipulações entre elas. A ideia básica da teoria dos conjuntos fuzzy é simples e natural. Um conjunto fuzzy é uma função de um conjunto com valores no intervalo $[0, 1]$ [29].

A teoria de conjuntos fuzzy e suas aplicações têm sido amplamente desenvolvida desde os anos 1970 e um interesse industrial na teoria de controle fuzzy tem aumentado dramaticamente desde 1990.

Em um problema de valor inicial (0-1), o valor inicial pode não ser exatamente conhecido, pois se eles são estimados através de medidas determinísticas, os mesmos podem estar sujeitos a erros. Se a natureza dos erros é aleatória, então podemos estudá-las através das equações diferenciais estocásticas. No entanto, se a estrutura subjacente não é probabilística, por causa das escolhas subjetivas, seria natural utilizar inclusões diferenciais ou ainda, equações diferenciais fuzzy ou inclusões diferenciais fuzzy. Assim, que surge naturalmente a seguinte questão

É possível aplicar o método de averaging em problemas de valor inicial no contexto fuzzy?

Para responder esta questão de modo que os leitores possam compreender e apreciar as complexidades das teorias envolvidas é apresentado um relato desde o estudo da teoria clássica do método de averaging, inclusões diferenciais e por fim o estudo dentro do contexto fuzzy.

Dessa maneira a dissertação encontra-se dividida em 4 partes.

No capítulo 1, estuda-se a teoria envolvendo o método de averaging para modelos determinísticos [28], a ideia básica do mesmo bem como uma aplicação na teoria de ciclos limites.

No capítulo 2, as inclusões diferenciais em $\mathbb{R}^n$ são apresentadas para a compreensão das inclusões diferenciais fuzzy. Inicialmente, estuda-se o conceito de multifunções,

bem como suas propriedades, a inclusão diferencial e a teoria de seleção para o estudo da existência de soluções de inclusões diferenciais.

No capítulo 3, tem-se a teoria de conjunto fuzzy, cálculo diferencial e integral de funções fuzzy e uma introdução a teoria de equações diferenciais fuzzy para estudar alguns resultados de existência de soluções.

No capítulo 4, apresenta-se o conceito de uma inclusão diferencial fuzzy, bem como propriedades das mesmas e por último demonstra-se o método de averaging para inclusões diferenciais fuzzy[25].

O Método de Averaging

Um dos métodos clássicos para analisar oscilações não lineares é o método de averaging, o qual é particularmente utilizado em estudo de problemas não lineares. O método de averaging analisa as soluções de um sistema diferencial não autônomo através de um sistema diferencial autônomo obtido da transformação do inicialmente não autônomo.

1.1 Introdução ao Método de Averaging

Considere o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \varepsilon f(t, x, \varepsilon); \\ x(0) &= x_0, \quad x \in U, \end{cases} \quad (1-1)$$

onde U é um subconjunto limitado e aberto de $\mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R} \times U \times \mathbb{R}^+$ limitado e $f : \mathbb{R} \times U \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função limitada sobre V e periódica, de período $T > 0$ na variável t e $\varepsilon \ll 1$. O interesse é associar (1-1) ao problema

$$\begin{cases} \dot{y} &= \varepsilon f(t, y, 0), \\ y(0) &= x_0; \end{cases}$$

através da aproximação

$$\begin{cases} \dot{y} &= \varepsilon \bar{f}(y), \\ y(0) &= x_0; \end{cases} \quad (1-2)$$

onde $\bar{f}(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y, 0) dt$.

Após a transformação pode-se inferir propriedades da dinâmica do sistema (1-1) mediante o entendimento da dinâmica do sistema (1-2).

Apesar do método ser eficiente surgem algumas perguntas:

1. Em geral, sistemas não lineares são dados por:

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon f(t, x), \quad (1-3)$$

o qual não está na forma do (1-1). Logo, como aplicar o método de averaging a (1-3)?

2. Como estudar a existência de soluções periódicas do sistema (1-1) através de (1-2)?

As respostas às duas questões são dadas nas seções 1.2 e 1.3, respectivamente.

1.2 A Forma Padrão de Lagrange

Considere o problema de valor inicial:

$$\dot{x} = A(t)x + \varepsilon g(t, x), \quad x(0) = x_0; \quad (1-4)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, $A(t)$ é uma matriz quadrada contínua de ordem n e $g(t, x)$ é uma função suficientemente suave em relação a t e x .

Para $\varepsilon = 0$, tem-se que (1-4) é linear e tem n soluções linearmente independentes. Considere a matriz fundamental $\Phi(t)$ das soluções de (1-4) para $\varepsilon = 0$ e considere a mudança de coordenadas

$$x(t) = \Phi(t)y(t); \quad (1-5)$$

então, temos que

$$\dot{x}(t) = \dot{\Phi}(t)y(t) + \Phi(t)\dot{y}.$$

Desde que $x(t)$ é solução de (1-4), tem-se

$$\dot{\Phi}(t)y(t) + \Phi(t)\dot{y} = A(t)\Phi(t)y(t) + \varepsilon g(t, \Phi(t)y(t)),$$

i.é.

$$\Phi(t)\dot{y} = (A(t)\Phi(t) - \dot{\Phi}(t))y(t) + \varepsilon g(t, \Phi(t)y(t)).$$

Como $\Phi(t)$ é a matriz fundamental do sistema não perturbado, i.é., $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$, tem-se

$$\Phi(t)\dot{y} = \varepsilon g(t, \Phi(t)y(t)),$$

i.é.,

$$\dot{y} = \varepsilon \Phi^{-1}(t)g(t, \Phi(t)y(t)). \quad (1-6)$$

Segue-se da equação (1-5)

$$y(0) = \Phi^{-1}(0)x_0.$$

A equação (1-6) denomina-se a forma padrão de Lagrange. A fórmula geral é

$$\dot{y} = \varepsilon f(t, y). \quad (1-7)$$

Assim, sem perda de generalidade, estuda-se as equações diferenciais não lineares da forma (1-4) na forma padrão de Lagrange, a qual está inicialmente na forma (1-1).

1.3 O Teorema de Averaging de Primeira Ordem

Como resposta à questão 2, estabelece-se o Teorema de averaging de primeira ordem, ver detalhes da prova em [28].

Teorema 1.1 *Considere os seguintes problemas de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x} &= \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 G(t, x, \varepsilon), \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (1-8)$$

e

$$\begin{cases} \dot{y} &= \varepsilon \bar{f}(y), \\ y(0) &= x_0, \end{cases} \quad (1-9)$$

onde $x, y, x_0 \in V$, $V \subset \mathbb{R}$ aberto, $t \in [0, \infty[$, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, F e G periódicas de período T na variável t , e

$$\bar{f}(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t, y) dt.$$

Além disso, suponha que:

(i) F , $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, G e $\frac{\partial G}{\partial x}$ são definidas, contínuas e limitadas por uma constante independente de ε em $[0, \infty[\times V$, com $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$;

(ii) T é uma constante que independe de ε ;

(iii) $y(t)$ pertence a V na escala de tempo $\frac{1}{\varepsilon}$.

Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

a) Para a escala de tempo $\frac{1}{\varepsilon}$ tem-se que $x(t) - y(t) = O(\varepsilon)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$;

b) Se p é um ponto de equilíbrio do sistema (1-9) tal que

$$\left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \right|_{y=p} \neq 0, \quad (1-10)$$

então existe uma solução T -periódica $\phi(t, \varepsilon)$ de (1-9) que se aproxima de p tal que $\phi(t, \varepsilon) \rightarrow p$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, na escala de tempo $\frac{1}{\varepsilon}$ na escala de tempo $\frac{1}{\varepsilon}$.

c) Se o sinal da expressão em (1-10) for negativo, então a solução periódica $\phi(t, \varepsilon)$ de (1-9) no espaço (t, x) é assintoticamente estável para ε suficientemente pequeno. Se (1-10) é positivo, então a solução é instável.

Para observar a aplicação do método vê-se o seguinte exemplo.

Exemplo 1.2 (Equação de Van der Pol) Considere a equação

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \quad (1-11)$$

com valores iniciais $x(0)$ e $\dot{x}(0)$ dados e f uma função de classe C^∞ em $V \subset \mathbb{R}^2$. Este é um sistema quasilinear e usaremos a transformação fase-amplitude [28], para colocar o sistema na forma padrão. Tome

$$\begin{aligned} x &= r \cos(t + \varphi), \\ \dot{x} &= -r \sin(t + \varphi). \end{aligned}$$

então, tem-se que

$$\begin{aligned} x^2 + \dot{x}^2 &= r^2, \\ \arctan\left(-\frac{\dot{x}}{x}\right) &= t + \varphi, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x\dot{x} + \dot{x}\ddot{x} &= r\dot{r}, \\ -x\ddot{x} - x^2 &= r^2\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Assim, tendo em conta a Equação (1-11), tem-se

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \sin(t + \varphi) f(r \cos(t + \varphi), -r \sin(t + \varphi)), & r(0) = r_0, \\ \dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{r} \cos(t + \varphi) f(r \cos(t + \varphi), -r \sin(t + \varphi)), & \varphi(0) = \varphi_0. \end{cases} \quad (1-12)$$

O campo de vetores (1-12) é 2π -periódico em t e se $f \in C^1(V)$ pode-se aplicar o método de averaging do lado direito visto que excluimos uma vizinhança da origem. Como a equação original é autônoma, a nova equação depende apenas de r e assim, define-se

duas componentes para o novo campo de vetores como segue

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}(t + \varphi) f(r \cos(t + \varphi), -r \text{sen}(t + \varphi)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}(\tau) f(r \cos(\tau), -r \text{sen}(\tau)) d\tau, \end{aligned}$$

e

$$f_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\tau) f(r \cos(\tau), -r \text{sen}(\tau)) d\tau,$$

Uma aproximação assintótica é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}}{dt} &= -\varepsilon f_1(\bar{r}), \\ \frac{d\bar{\varphi}}{dt} &= -\varepsilon \frac{f_2(\bar{r})}{\bar{r}}, \end{aligned}$$

com valores iniciais apropriados. Esta é uma redução a um sistema autônomo de primeira ordem.

Aplica-se a redução acima para a famosa equação de Van der Pol.

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}^2.$$

Assim

$$f(r \cos(t + \varphi), -r \text{sen}(t + \varphi)) = -r(1 - r^2 \cos^2(t + \varphi)) \text{sen}(t + \varphi).$$

Então

$$\begin{aligned} f_1(r) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \text{sen}^2(t + \varphi) (1 - r^2 \cos^2(t + \varphi)) dt = -\frac{r}{2} \left(1 - \frac{r^2}{4}\right), \\ f_2(r) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \text{sen}(t + \varphi) \cos(t + \varphi) (1 - r^2 \cos^2(t + \varphi)) dt = 0. \end{aligned}$$

logo

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \varepsilon \frac{\bar{r}}{2} \left(1 - \frac{\bar{r}^2}{4}\right), \quad (1-13)$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = 0. \quad (1-14)$$

Pelo Teorema 1.1 a solução é dada por

$$x(t) = \frac{r_0 e^{\frac{\varepsilon t}{2}}}{\left(1 + \frac{1}{4} r_0^2 (e^{\varepsilon t} - 1)\right)^{\frac{1}{2}}} \cos(t + \varphi_0) + O(\varepsilon) \quad (1-15)$$

no tempo-escala $\frac{1}{\varepsilon}$.

Se o valor inicial da amplitude r_0 for igual a 0 ou 2, a amplitude $\bar{r}$ é constante para todo tempo. O valor $r_0 = 0$ corresponde a um ponto crítico instável da equação original, $r_0 = 2$ dá uma solução periódica

$$x(t) = 2\cos(t + \varphi_0) + O(\varepsilon) \quad (1-16)$$

no tempo-escala $\frac{1}{\varepsilon}$.

A solução (1-15) tende para a solução periódica (1-16), pois se $0 < r_0 < 2$ então, de acordo com (1-13), temos que $\frac{d\bar{r}}{dt} > 0$ ou seja $\bar{r}(t)$ é crescente. Portanto em coordenadas polares as soluções que se iniciam com raio entre 0 e 2 se afastam da origem e tendem à soluções periódica (1-16). Analogamente para $r_0 > 2$ teremos $\frac{d\bar{r}}{dt} < 0$ e novamente as trajectórias que se inicia em r_0 tendem à solução (1-16). Chamamos esta órbita periódica dada por (1-16) de ciclo limite (estável).

1.4 Existência de Ciclos Limites em Campos Vetoriais Polinomiais

Em 1900, na Conferência Internacional de Matemática de Paris, o matemático alemão David Hilbert enunciou 23 problemas, no intuito de apontar temas promissores para a investigação em matemática no século XX [10]. Dentre estes, destacamos o décimo sexto problema que apesar de ser intensamente investigado, ainda permanece sem solução[4].

O XVI problema de Hilbert é um dos problemas mais investigados na teoria qualitativa dos sistemas dinâmicos no plano. Originalmente, Hilbert formulou seu XVI problema dividindo-o em duas partes. A primeira parte é objeto de estudo da Geometria Algébrica, e a segunda parte se refere à determinação do número máximo de ciclos limite de um sistema diferencial polinomial[10].

Devido à dificuldade de se obter a solução do XVI problema de Hilbert, muitos pesquisadores formularam e trabalharam o problema com condições mais fracas. Arnold, por exemplo, propôs a investigação do número máximo de ciclos limite que bifurcam de uma singularidade do tipo centro, conhecida como a versão fraca do XVI problema de Hilbert[4].

Segundo [16] e [18], existem diversos métodos para estudar a bifurcação de ciclos limite que bifurcam de um centro. A maioria deles são baseados na aplicação retorno de Poincaré, como é o caso do método da integral de Poincaré-Melnikov e do método das integrais abelianas. Recentemente, alguns outros métodos foram apresentados, alguns fundamentados no fator integração inverso e outros, na redução do problema a uma equação diferencial em uma variável, no caso do método de averaging, por exemplo[4].

Vale observar que os dois primeiros métodos fornecem as órbitas de sistemas não perturbados que se tornam ciclos limite após perturbações. O método das integrais abelianas se aplica apenas para dimensão dois. Os terceiro e quarto métodos fornecem o número e forma dos ciclos limite dos sistemas obtidos por perturbações de qualquer ordem em todas as dimensões[4].

Nesta seção estuda-se resultados que definem o número máximo de ciclos limite que podem surgir quando ocorre bifurcação do período anular na vizinhança da origem de uma classe de sistemas polinomiais usando o método de averaging de primeira ordem.

Mais precisamente, dado o sistema polinomial cúbico da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = -yf(x,y) \\ \dot{y} = xf(x,y) \end{cases} \quad (1-17)$$

onde $f(x,y) = 0$ é uma cônica tal que $f(0,0) \neq 0$.

Considera-se para (1-17) ε suficientemente pequeno e o sistema perturbado

$$\begin{cases} \dot{x} = -yf(x,y) + \varepsilon P(x,y) \\ \dot{y} = xf(x,y) + \varepsilon Q(x,y) \end{cases} \quad (1-18)$$

onde P e Q são polinômios da forma $P(x,y) = \sum_{k=1}^3 P_k(x,y)$, $Q(x,y) = \sum_{k=1}^3 Q_k(x,y)$, com $P_k(x,y) = \sum_{i+j=k} p_{ij}x^i y^j$ e $Q_k(x,y) = \sum_{i+j=k} q_{ij}x^i y^j$ polinômios homogêneos de grau k .

Então, estuda-se o número máximo de ciclos limite do sistema (1-18) que surgem quando ocorre bifurcação do período anular na vizinhança da origem do sistema (1-17) usando o método de averaging de primeira ordem.

Assim, o objetivo desta seção será estudar para quais coeficientes p_{ij} e q_{ij} no sistema (1-18), com $f(x,y) = (x+a)^2$, obtém-se o número máximo de ciclos limites que surgem ao bifurcar o período anular do sistema (1-17), usando o método de averaging de primeira ordem.

Teorema 1.3 [18] *O sistema (1-18) com $f(x,y) = (x+a)^2$ tem no máximo 5 ciclos limite que surgem ao bifurcar o período anular do sistema (1-17), usando o método de averaging de primeira ordem.*

Demonstração. De fato, fazendo a mudança de variáveis $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, tem-se que: $r^2 = x^2 + y^2$ e $\tan \phi = \frac{y}{x}$. Assim, derivando em relação à

variável tempo e considerando o sistema (1-18), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} \\
 &= x(-yf(x,y) + \varepsilon P(x,y)) + y(xf(x,y) + \varepsilon Q(x,y)) \\
 &= \varepsilon xP(x,y) + \varepsilon yQ(x,y) \\
 &= \varepsilon r \cos \phi P(r \cos \phi, r \sin \phi) + \varepsilon r \sin \phi Q(r \cos \phi, r \sin \phi) \\
 \Rightarrow \dot{r} &= \varepsilon (\cos \phi P(r \cos \phi, r \sin \phi) + \sin \phi Q(r \cos \phi, r \sin \phi)) \quad (1-19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r^2 \dot{\phi} &= x\dot{y} - y\dot{x} \\
 &= x(xf(x,y) + \varepsilon Q(x,y)) - y(-yf(x,y) + \varepsilon P(x,y)) \\
 &= (x^2 + y^2)f(x,y) + \varepsilon (xQ(x,y) - yP(x,y)) \\
 &= r^2 f(r \cos \phi, r \sin \phi) + \varepsilon (r \cos \phi Q(r \cos \phi, r \sin \phi) - r \sin \phi P(r \cos \phi, r \sin \phi)) \\
 \Rightarrow \dot{\phi} &= f(r \cos \phi, r \sin \phi) + \frac{\varepsilon}{r} (\cos \phi Q(r \cos \phi, r \sin \phi) - \sin \phi P(r \cos \phi, r \sin \phi)). \quad (1-20)
 \end{aligned}$$

Como $P(x,y) = \sum_{k=1}^3 P_k(x,y)$ e $Q(x,y) = \sum_{k=1}^3 Q_k(x,y)$, com $P_k(x,y) = \sum_{i+j=k} p_{ij} x^i y^j$, $Q_k(x,y) = \sum_{i+j=k} q_{ij} x^i y^j$, segue das equações (1-19) e (1-20) que:

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= \varepsilon \left(\cos \phi \sum_{k=1}^3 P_k(r \cos \phi, r \sin \phi) + \sin \phi \sum_{k=1}^3 Q_k(r \cos \phi, r \sin \phi) \right) \\
 &= \varepsilon \left(\cos \phi \sum_{k=1}^3 \sum_{i+j=k} p_{ij} (r \cos \phi)^i (r \sin \phi)^j + \sin \phi \sum_{k=1}^3 \sum_{i+j=k} q_{ij} (r \cos \phi)^i (r \sin \phi)^j \right) \\
 &= \varepsilon \left(\cos \phi \sum_{k=1}^3 \sum_{i+j=k} p_{ij} r^k \cos^i \phi \sin^j \phi + \sin \phi \sum_{k=1}^3 \sum_{i+j=k} q_{ij} r^k \cos^i \phi \sin^j \phi \right) \\
 &= \varepsilon \sum_{k=1}^3 r^k \sum_{i+j=k} (p_{ij} \cos \phi + q_{ij} \sin \phi) \cos^i \phi \sin^j \phi.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\dot{r} = \varepsilon \sum_{k=1}^3 f_k(\phi) r^k, \quad (1-21)$$

onde $f_k(\phi) = \sum_{i+j=k} (p_{ij} \cos \phi + q_{ij} \sin \phi) \cos^i \phi \sin^j \phi$.

Agora,

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= f(r \cos \phi, r \sin \phi) + \frac{\varepsilon}{r} \left(\cos \phi \sum_{k=1}^3 Q_k(r \cos \phi, r \sin \phi) - \sin \phi \sum_{k=1}^3 P_k(r \cos \phi, r \sin \phi) \right) \\
&= f(r \cos \phi, r \sin \phi) + \frac{\varepsilon}{r} \left(\cos \phi \sum_{k=1}^3 \sum_{i+j=k} q_{ij} (r \cos \phi)^i (r \sin \phi)^j \right. \\
&\quad \left. - \sin \phi \sum_{k=1}^3 \sum_{i+j=k} p_{ij} (r \cos \phi)^i (r \sin \phi)^j \right) \\
&= f(r \cos \phi, r \sin \phi) + \frac{\varepsilon}{r} \left(\cos \phi \sum_{k=1}^3 \sum_{i+j=k} q_{ij} r^k \cos^i \phi \sin^j \phi \right. \\
&\quad \left. - \sin \phi \sum_{k=1}^3 \sum_{i+j=k} p_{ij} r^k \cos^i \phi \sin^j \phi \right) \\
&= f(r \cos \phi, r \sin \phi) + \frac{\varepsilon}{r} \sum_{k=1}^3 r^k \sum_{i+j=k} (q_{ij} \cos \phi - p_{ij} \sin \phi) \cos^i \phi \sin^j \phi \\
&= f(r \cos \phi, r \sin \phi) + \varepsilon \sum_{k=1}^3 r^{k-1} \sum_{i+j=k} (q_{ij} \cos \phi - p_{ij} \sin \phi) \cos^i \phi \sin^j \phi.
\end{aligned}$$

Então,

$$\dot{\phi} = f(r \cos \phi, r \sin \phi) + \varepsilon \sum_{k=1}^3 g_k(\phi) r^{k-1}, \quad (1-22)$$

onde $g_k(\phi) = \sum_{i+j=k} (q_{ij} \cos \phi - p_{ij} \sin \phi) \cos^i \phi \sin^j \phi$.

Portanto, de (1-21) e (1-22) segue que

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{d\phi} &= \frac{\varepsilon \sum_{k=1}^3 f_k(\phi) r^k}{f(r \cos \phi, r \sin \phi) + \varepsilon \sum_{k=1}^3 g_k(\phi) r^{k-1}} \\
&= \frac{\varepsilon f(r \cos \phi, r \sin \phi) \sum_{k=1}^3 f_k(\phi) r^k}{f(r \cos \phi, r \sin \phi) (f(r \cos \phi, r \sin \phi) + \varepsilon \sum_{k=1}^3 g_k(\phi) r^{k-1})} \\
&= \varepsilon \sum_{k=1}^3 \frac{f_k(\phi) r^k}{f(r \cos \phi, r \sin \phi)} \left(1 - \frac{\varepsilon \sum_{k=1}^3 g_k(\phi) r^{k-1}}{f(r \cos \phi, r \sin \phi) + \varepsilon \sum_{k=1}^3 g_k(\phi) r^{k-1}} \right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{dr}{d\phi} = \varepsilon F(\phi, r) + \varepsilon^2 G(\phi, r, \varepsilon) \quad (1-23)$$

com

$$\begin{aligned} F(\phi, r) &= \sum_{k=1}^3 \frac{f_k(\phi)r^k}{f(r\cos\phi, r\sin\phi)} \quad e \\ G(\phi, r, \varepsilon) &= \sum_{k=1}^3 \frac{f_k(\phi)r^k}{f(r\cos\phi, r\sin\phi)} \left(\frac{\sum_{k=1}^3 g_k(\phi)r^{k-1}}{f(r\cos\phi, r\sin\phi) + \varepsilon \sum_{k=1}^3 g_k(\phi)r^{k-1}} \right). \end{aligned}$$

Como a equação (1-23) satisfaz as hipóteses do Teorema 1.1, pode-se aplicar o método de averaging. Então com a finalidade de provar o Teorema 1.3, via Teorema 1.1 estuda-se o número de pontos singulares hiperbólicos do sistema

$$\frac{dr}{d\phi} = \varepsilon \bar{f}(r), \quad (1-24)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{f}(r) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^3 r^k \int_0^{2\pi} \frac{f_k(\phi)}{f(r\cos\phi, r\sin\phi)} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^3 r^k \int_0^{2\pi} \frac{\sum_{i+j=k} (p_{ij} \cos\phi + q_{ij} \sin\phi) \cos^i \phi \sin^j \phi}{f(r\cos\phi, r\sin\phi)} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^3 r^k \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=k} \frac{p_{ij} \cos^{i+1} \phi \sin^j \phi + q_{ij} \cos^i \phi \sin^{j+1} \phi}{f(r\cos\phi, r\sin\phi)} d\phi \\ &= \sum_{k=1}^3 r^k \frac{1}{2\pi} \sum_{i+j=k} \left(p_{ij} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^{i+1} \phi \sin^j \phi}{f(r\cos\phi, r\sin\phi)} d\phi + q_{ij} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^i \phi \sin^{j+1} \phi}{f(r\cos\phi, r\sin\phi)} d\phi \right) \\ &= \sum_{k=1}^3 C_k(r) r^k \end{aligned} \quad (1-25)$$

com

$$C_k(r) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i+j=k} (p_{ij} I_{i+1,j}(r) + q_{ij} I_{i,j+1}(r)) \quad e \quad I_{p,q}(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^p \phi \sin^q \phi}{f(r\cos\phi, r\sin\phi)} d\phi, \quad (1-26)$$

com $p+q-1=k$ e $k=1, 2, 3$.

Agora, estuda-se o período anular a ser bifurcado e para isso, segue das condições impostas no Teorema 1.3, que o sistema (1-17) tem a forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y(x+a)^2 \\ \dot{y} &= x(x+a)^2, \end{cases} \quad (1-27)$$

e tem o único período anular

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x^2 + y^2 < a^2\}$$

Segue que a equação (1-26) tem a forma

$$C_k(r) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i+j=k} (p_{ij}I_{i+1,j}(r) + q_{ij}I_{i,j+1}(r)) \quad e \quad I_{p,q}(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^p \phi \sin^q \phi}{(r \cos \phi + 1)^2} d\phi. \quad (1-28)$$

Note que as integrais $I_{p,q}(r)$ são da forma

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin \phi, \cos \phi) d\phi,$$

onde $R(x, y) = \frac{x^p y^q}{(rx+1)^2}$ é uma função racional que não tem pólos no círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$. Logo, fazendo $z = e^{i\phi}$, tem-se que quando ϕ incrementa de 0 a 2π , z descreve o círculo unitário.

Nota-se que $z = e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ e $z^{-1} = e^{-i\phi} = \cos \phi - i \sin \phi$, então $\cos \phi = \frac{z^2+1}{2z}$ e $\sin \phi = \frac{z^2-1}{2iz}$.

Logo, tem-se que

$$I_{p,q}(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^p \phi \sin^q \phi}{(r \cos \phi + 1)^2} d\phi = \frac{-i}{2^{p+q-2}} \oint_{s^1} \frac{(z^2+1)^p (z^2-1)^q}{z^{p+q-1} (rz^2 + 2az + r)^2} dz. \quad (1-29)$$

Note que cada integral $I_{p,q}(r)$ tem como denominador a expressão $z^k (rz^2 + 2az + r)^2$, para $k = 1, 2, 3$.

Assim, os pólos destas integrais são $z_1 = 0$ com multiplicidade k , $z_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - r^2}}{r}$ e $z_3 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - r^2}}{r}$ com multiplicidades 2.

Desde que o módulo dos pontos são $|z_1| = 0$ e $|z_2| = \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{r}$, $|z_3| = \frac{a - \sqrt{a^2 - r^2}}{r}$ dependem dos valores de a e r e querendo estudar os zeros da função $\tilde{f}(r)$ sobre $(0, |a|)$, tem-se que z_1 e z_3 são os únicos pólos contidos no interior do disco unitário.

Logo, segue-se da equação (1-29) e do Teorema do Resíduo que:

$$I_{p,q}(r) = \frac{-i}{2^{p+q-2}} \oint_{s^1} \frac{(z^2+1)^p (z^2-1)^q}{z^{p+q-1} (rz^2 + 2az + r)^2} dz = \frac{2\pi}{2^{p+q-2}} \{Res(f(z), z_1) + Res(f(z), z_3)\}, \quad (1-30)$$

onde $f(z) = \frac{(z^2+1)^p (z^2-1)^q}{z^{p+q-1} (rz^2 + 2az + r)^2}$.

Agora, da equação (1-28) tem-se que

$$C_1(r) = \frac{1}{2\pi} (p_{10}I_{2,0}(r) + q_{10}I_{1,1}(r) + p_{01}I_{1,1}(r) + q_{01}I_{0,2}(r)) \quad (1-31)$$

$$C_2(r) = \frac{1}{2\pi} (p_{20}I_{3,0}(r) + q_{20}I_{2,1}(r) + p_{11}I_{2,1}(r) + q_{11}I_{1,2}(r) + p_{02}I_{1,2}(r) + q_{02}I_{0,3}(r)) \quad (1-32)$$

$$C_3(r) = \frac{1}{2\pi} (p_{30}I_{4,0}(r) + q_{30}I_{3,1}(r) + p_{21}I_{3,1}(r) + q_{21}I_{2,2}(r) + p_{12}I_{2,2}(r) + q_{12}I_{1,3}(r) + p_{03}I_{1,3}(r) + q_{03}I_{0,4}(r)). \quad (1-33)$$

Para se obter os valores de $I_{p,q}(r)$ nas expressões (1-31) a (1-33) basta considerar a expressão (1-30). Assim segue que

$$A) \quad I_{2,0}(r) = -i \oint_{s^1} \frac{(z^2+1)^2}{z(rz^2+2az+r)^2} dz = 2\pi \{Res(f(z), z_1) + Res(f(z), z_3)\}, \quad (1-34)$$

$$\text{onde } f(z) = \frac{(z^2+1)^2}{z(rz^2+2az+r)^2}.$$

Então,

$$\begin{aligned} Res(f(z), z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z^2+1)^2}{(rz^2+2az+r)^2} = \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \quad (1-35)$$

Agora, para se obter o resíduo de $f(z)$ no polo z_3 , considere $f(z)$ numa vizinhança V de z_3 dado por $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_3)^2}$, onde $h(z) = \frac{(z^2+1)^2}{z(z-z_2)^2}$ é uma função holomorfa em V . Logo o resíduo é dado por:

$$Res(f(z), z_3) = h'(z_3) = -a \frac{(a^2 - 2r^2)}{f^3}, \quad \text{onde } f = \sqrt{a^2 - r^2}. \quad (1-36)$$

Segue das equações (1-34), (1-35) e (1-36) que:

$$I_{2,0}(r) = \frac{2\pi(fa^2 - fr^2 - r^2a^3 + 2r^4a)}{r^2f^3}, \quad \text{com } f = \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Da mesma maneira, como foi feito para $I_{2,0}$ com $f = \sqrt{a^2 - r^2}$ obtém-se que:

$$B) \quad I_{1,1}(r) = -i \oint_{s^1} \frac{(z^2+1)(z^2-1)}{z(rz^2+2az+r)^2} dz = 2\pi \{Res(f(z), z_1) + Res(f(z), z_3)\} \quad (1-37)$$

$$\text{onde } f(z) = \frac{(z^2+1)(z^2-1)}{z(rz^2+2az+r)^2}.$$

Então,

$$Res(f(z), z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^4 - 1}{(rz^2 + 2az + r)^2} = -\frac{1}{r^2}, \quad (1-38)$$

$$Res(f(z), z_3) = h'(z_3) = \frac{-2a^3 + 2a^2f + 2r^2a - fr^2}{(-a + f)^2f}. \quad (1-39)$$

com $h(z) = \frac{z^4 - 1}{z(z - z_2)^2}$.

Das equações (1-37), (1-38) e (1-39) segue que:

$$I_{1,1}(r) = \frac{2\pi(-2a^3r^2 + 2r^2a^2f + 2r^4a - fr^4 - 2a^2f + 2a^3 - 2r^2a + fr^2)}{r^2(-a + f)^2f}.$$

$$C) \quad I_{0,2}(r) = -i \oint_{s^1} \frac{(z^2 - 1)^2}{z(rz^2 + 2az + r)^2} dz = 2\pi \{Res(f(z), z_1) + Res(f(z), z_3)\} \quad (1-40)$$

onde $f(z) = \frac{(z^2 - 1)^2}{z(rz^2 + 2az + r)^2}$.

Então,

$$Res(f(z), z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z^2 - 1)^2}{(rz^2 + 2az + r)^2} = \frac{1}{r^2}, \quad (1-41)$$

$$Res(f(z), z_3) = h'(z_3) = \frac{-(-a^2 + af + r^2)^2a}{f^3(-a + f)^2}. \quad (1-42)$$

com $h(z) = \frac{(z^2 - 1)^2}{z(z - z_2)^2}$.

Segue das equações (1-40), (1-41) e (1-42) que:

$$I_{0,2}(r) = \frac{2\pi(-2a^3 - 2r^2a^3 + 2fa^2r^2 + 2fa^2 + ar^4 + 2r^2a - fr^2)}{(-a + f)^2fr^2}.$$

$$D) \quad I_{3,0}(r) = \frac{-i}{2} \oint_{s^1} \frac{(z^2 + 1)^3}{z^2(rz^2 + 2az + r)^2} dz = \pi \{Res(f(z), z_1) + Res(f(z), z_3)\} \quad (1-43)$$

onde $f(z) = \frac{(z^2 + 1)^3}{z^2(rz^2 + 2az + r)^2}$.

Então,

$$Res(f(z), z_1) = h'_1(z_1) = \frac{-4a}{r^3}, \quad (1-44)$$

$$Res(f(z), z_3) = h'_2(z_3) = \frac{2a^2(2a^2 - 3r^2)}{rf^3}, \quad (1-45)$$

com $h_1(z) = \frac{(z^2+1)^3}{(rz^2+2az+r)^2}$ e $h_2(z) = \frac{(z^2+1)^3}{z^2(z-z_2)^2}$.

Das equações (1-43), (1-44) e (1-45) segue que:

$$I_{3,0}(r) = \frac{-2\pi a(2fa^2 - 2fr^2 - 2r^2a^3 + 3r^4a)}{r^3 f^3}.$$

$$E) \quad I_{2,1}(r) = \frac{-i}{2} \oint_{s^1} \frac{(z^2+1)^2(z^2-1)}{z^2(rz^2+2az+r)^2} dz = \pi \{Res(f(z), z_1) + Res(f(z), z_3)\} \quad (1-46)$$

onde $f(z) = \frac{(z^2+1)^2(z^2-1)}{z^2(rz^2+2az+r)^2}$.

Então,

$$Res(f(z), z_1) = h'_1(z_1) = \frac{4a}{r^3}, \quad (1-47)$$

$$Res(f(z), z_3) = h'_2(z_3) = \frac{4a(-4a^4 + 4fa^3 + 5r^2a^2 - 3r^2fa - r^4)}{f(-a+f)^3 r}, \quad (1-48)$$

com $h_1(z) = \frac{(z^2+1)^2(z^2-1)}{(rz^2+2az+r)^2}$ e $h_2(z) = \frac{(z^2+1)^2(z^2-1)}{z^2(z-z_2)^2}$.

Segue das equações (1-46), (1-47) e (1-48) que:

$$I_{2,1}(r) = \frac{4\pi a(-4fa^3 + 4a^4 - 5r^2a^2 + 3r^2fa + r^4 - 4r^2a^4 + 4r^2a^3f + 5r^4a^2 - 3r^4af - r^6)}{r^3 f(-a+f)^3}.$$

$$F) \quad I_{1,2}(r) = \frac{-i}{2} \oint_{s^1} \frac{(z^2+1)(z^2-1)^2}{z^2(rz^2+2az+r)^2} dz = \pi \{Res(f(z), z_1) + Res(f(z), z_3)\} \quad (1-49)$$

onde $f(z) = \frac{(z^2+1)(z^2-1)^2}{z^2(rz^2+2az+r)^2}$.

Então,

$$Res(f(z), z_1) = h'_1(z_1) = -\frac{4a}{r^3}, \quad (1-50)$$

$$Res(f(z), z_3) = h'_2(z_3) = \frac{2(-8a^5 + 8a^4f + 10r^2a^3 - 6r^2a^2f - 3r^4a + r^4f)}{f(-a+f)^3 r} \quad (1-51)$$

com $h_1(z) = \frac{(z^2+1)(z^2-1)^2}{(rz^2+2az+r)^2}$ e $h_2(z) = \frac{(z^2+1)(z^2-1)^2}{z^2(z-z_2)^2}$.

Segue das equações (1-49), (1-50) e (1-51) que:

$$I_{1,2}(r) = \frac{2\pi}{r^3 f(-a+f)^3} \left(8a^4f - 8a^5 + 10r^2a^3 - 6r^2a^2f - 2r^4a - 8r^2a^5 + 8fr^2a^4 + 10r^4a^3 - 6fr^4a^2 - 3r^6a + fr^6 \right).$$

$$G) \quad I_{0,3}(r) = \frac{-i}{2} \oint_{s^1} \frac{(z^2-1)^3}{z^2(rz^2+2az+r)^2} dz = \pi \{Res(f(z), z_1) + Res(f(z), z_3)\} \quad (1-52)$$

onde $f(z) = \frac{(z^2-1)^3}{z^2(rz^2+2az+r)^2}$.

Então,

$$Res(f(z), z_1) = h'_1(z_1) = \frac{4a}{r^3}, \quad (1-53)$$

$$Res(f(z), z_3) = h'_2(z_3) = \frac{4a(-a^2+af+r^2)^3}{r(-a+f)^3 f^3}, \quad (1-54)$$

com $h_1(z) = \frac{(z^2-1)^3}{(rz^2+2az+r)^2}$ e $h_2(z) = \frac{(z^2-1)^3}{z^2(z-z_2)^2}$.

Segue das equações (1-52), (1-53) e (1-54) que:

$$I_{0,3} = \frac{4a\pi(4a^4 - 4a^4r^2 + 4fr^2a^3 - 4a^3f + 5a^2r^4 - 5a^2r^2 - 3afr^4 + 3afr^2 - r^6 + r^4)}{f(-a+f)^3 r^3}.$$

$$H) \quad I_{4,0}(r) = \frac{-i}{4} \oint_{s^1} \frac{(z^2+1)^4}{z^3(rz^2+2az+r)^2} dz = \frac{\pi}{2} \{Res(f(z), z_1) + Res(f(z), z_3)\} \quad (1-55)$$

onde $f(z) = \frac{(z^2+1)^4}{z^3(rz^2+2az+r)^2}$.

Então,

$$Res(f(z), z_1) = \frac{1}{2} h''_1(z_1) = \frac{2}{r^2} + \frac{12a^2}{r^4}, \quad (1-56)$$

$$Res(f(z), z_3) = h'_2(z_3) = \frac{-4a^3(3a^2-4r^2)}{r^2 f^3}, \quad (1-57)$$

com $h_1(z) = \frac{(z^2+1)^4}{(rz^2+2az+r)^2}$ e $h_2(z) = \frac{(z^2+1)^4}{z^3(z-z_2)^2}$.

Segue das equações (1-55), (1-56) e (1-57) que:

$$I_{4,0} = \frac{\pi(-5r^2fa^2 - r^4f + 6a^4f - 6a^5r^2 + 8a^3r^4)}{r^4 f^3}.$$

$$I) \quad I_{3,1}(r) = \frac{-i}{4} \oint_{s^1} \frac{(z^2+1)^3(z^2-1)}{z^3(rz^2+2az+r)^2} dz = \frac{\pi}{2} \{Res(f(z), z_1) + Res(f(z), z_3)\} \quad (1-58)$$

onde $f(z) = \frac{(z^2+1)^3(z^2-1)}{z^3(rz^2+2az+r)^2}$.

Então,

$$Res(f(z), z_1) = \frac{1}{2}h_1''(z_1) = \frac{-12a^2}{r^4}, \quad (1-59)$$

$$Res(f(z), z_3) = h_2'(z_3) = \frac{12a^2(-2a^3 + 2a^2f + 2r^2a - r^2f)}{r^2(-a + f)^2f}, \quad (1-60)$$

com $h_1(z) = \frac{(z^2+1)^3(z^2-1)}{(rz^2+2az+r)^2}$ e $h_2(z) = \frac{(z^2+1)^3(z^2-1)}{z^3(z-z_2)^2}$.

Segue das equações (1-58), (1-59) e (1-60) que:

$$I_{3,1} = \frac{6\pi a^2(-2a^2f + 2a^3 - 2r^2a + r^2f - 2a^3r^2 + 2fr^2a^2 + 2r^4a - fr^4)}{r^4(-a + f)^2f}.$$

$$J) \quad I_{2,2}(r) = \frac{-i}{4} \oint_{s^1} \frac{(z^2+1)^2(z^2-1)^2}{z^3(rz^2+2az+r)^2} dz = \frac{\pi}{2} \{Res(f(z), z_1) + Res(f(z), z_3)\} \quad (1-61)$$

onde $f(z) = \frac{(z^2+1)^2(z^2-1)^2}{z^3(rz^2+2az+r)^2}$.

Então,

$$Res(f(z), z_1) = \frac{1}{2}h_1''(z_1) = -\frac{2}{r^2} + \frac{12a^2}{r^4}, \quad (1-62)$$

$$Res(f(z), z_3) = h_2'(z_3) = \left\{ (-6a^5 + 10a^3r^2 + 6a^4f - 7a^2fr^2 - 4r^4a + 2fr^4) \cdot (-a^2 + af + r^2) \right\} \frac{4a}{f^3(-a + f)^3r^2}, \quad (1-63)$$

com $h_1(z) = \frac{(z^2+1)^2(z^2-1)^2}{(rz^2+2az+r)^2}$ e $h_2(z) = \frac{(z^2+1)^2(z^2-1)^2}{z^3(z-z_2)^2}$.

Segue das equações (1-61), (1-62) e (1-63) que:

$$I_{2,2} = \frac{-\pi}{(-a + f)^3fr^4} \left(-24r^2a^6 - 24a^6 + 24a^5f + 24fr^2a^5 + 34r^4a^4 + 34a^4r^2 - 22fr^4a^3 - 22fr^2a^3 - 12r^6a^2 - 11a^2r^4 + 4r^6af + 3r^4af + r^6 \right).$$

$$K) \quad I_{1,3}(r) = \frac{-i}{4} \oint_{s^1} \frac{(z^2+1)(z^2-1)^3}{z^3(rz^2+2az+r)^2} dz = \frac{\pi}{2} \{Res(f(z), z_1) + Res(f(z), z_3)\} \quad (1-64)$$

onde $f(z) = \frac{(z^2+1)(z^2-1)^3}{z^3(rz^2+2az+r)^2}$.

Então,

$$Res(f(z), z_1) = \frac{1}{2}h_1''(z_1) = \frac{4}{r^2} - \frac{12a^2}{r^4}, \quad (1-65)$$

$$Res(f(z), z_3) = h_2'(z_3) = \left\{ (-6a^5 + 8a^3r^2 - 2r^4a + 6fa^4 - 5fr^2a^2 + fr^4) \cdot (-a^2 + af + r^2)^2 \right\} \frac{4}{r^2(-a+f)^4f^3}, \quad (1-66)$$

com $h_1(z) = \frac{(z^2+1)(z^2-1)^3}{(rz^2+2az+r)^2}$ e $h_2(z) = \frac{(z^2+1)(z^2-1)^3}{z^3(z-z_2)^2}$.

Segue das equações (1-64), (1-65) e (1-66) que:

$$I_{1,3} = \frac{2\pi}{(-a+f)^4fr^4} \left(24a^7 - 24a^7r^2 - 24a^6f + 24r^2fa^6 + 44a^5r^4 - 44r^2a^5 + 32r^2fa^4 - 32r^4fa^4 - 24r^6a^3 + 24r^4a^3 + 11r^6a^2f - 11r^4a^2f - 4ar^6 + 4r^8a + r^6f - r^8f \right).$$

$$L) \quad I_{0,4}(r) = \frac{-i}{4} \oint_{s^1} \frac{(z^2-1)^4}{z^3(rz^2+2az+r)^2} dz = \frac{\pi}{2} \{ Res(f(z), z_1) + Res(f(z), z_3) \} \quad (1-67)$$

com $f(z) = \frac{(z^2-1)^4}{z^3(rz^2+2az+r)^2}$.

Então,

$$Res(f(z), z_1) = \frac{1}{2}h_1''(z_1) = \frac{4}{r^2} - \frac{12a^2}{r^4}, \quad (1-68)$$

$$Res(f(z), z_3) = h_2'(z_3) = \frac{-12a(-a^2 + af + r^2)^4}{r^2(-a+f)^4f^3}, \quad (1-69)$$

com $h_1(z) = \frac{(z^2-1)^4}{(rz^2+2az+r)^2}$ e $h_2(z) = \frac{(z^2-1)^4}{z^3(z-z_2)^2}$.

Segue das equações (1-67), (1-68) e (1-69) que:

$$I_{0,4} = \frac{3\pi}{(-a+f)^4fr^4} \left(-16r^2a^7 - 16a^7 + 16a^6f + 16r^2fa^6 + 32r^4a^5 + 32r^2a^5 - 24r^4fa^4 - 24r^2fa^4 - 20r^4a^3 - 18r^6a^3 + 8r^6fa^2 + 10r^4a^2f + 4ar^6 + 2r^8a - r^6f \right).$$

Agora, substituindo os valores de $I_{p,q}$ obtidas nos itens A) ao B) obtém-se $C_1(r)$, $C_2(r)$ e $C_3(r)$. Novamente substituindo os $C_i(r)$ $i = 1, 2, 3$ na equação (1-25), ordenando os termos e observando a equação (1-28) obtém-se

$$\bar{f}(r) = \frac{(a^2 - r^2)(a_0 + a_2r^2)f + (b_0 + b_2r^2 + b_4r^4)}{2r(a^2 - r^2)f}$$

onde os coeficientes a_i e b_j , $i = 0, 2$, $j = 0, 2, 4$, são polinômios nos coeficientes de P , Q

e a .

Observa-se que

$$\begin{aligned}
 \bar{f}(r) &= \frac{(a^2 - r^2)(a_0 + a_2 r^2)f + (b_0 + b_2 r^2 + b_4 r^4)}{2r(a^2 - r^2)f} \\
 &= \frac{(a^2 - r^2)^2(a_0 + a_2 r^2)^2 f^2 - (b_0 + b_2 r^2 + b_4 r^4)^2}{2r(a^2 - r^2)((a^2 - r^2)(a_0 + a_2 r^2)f - (b_0 + b_2 r^2 + b_4 r^4))f} \\
 &= \frac{g(r)}{2r(a^2 - r^2)((a^2 - r^2)(a_0 + a_2 r^2)f - (b_0 + b_2 r^2 + b_4 r^4))f} \quad (1-70)
 \end{aligned}$$

onde $g(r) = (a^2 - r^2)^2(a_0 + a_2 r^2)^2 f^2 - (b_0 + b_2 r^2 + b_4 r^4)^2$.

Da equação (1-70) nota-se que o número de zeros da função $g(r)$ será maior que o da função $\bar{f}(r)$. Agora da definição de $g(r)$ observa-se que é de grau 5 em r^2 , portanto o número máximo de zeros de $\bar{f}(r)$ é 5. Portanto, pelo Teorema 1.1 o sistema (1-18) tem no máximo 5 ciclos limites. $\square$

Inclusões Diferenciais

Este capítulo contém inicialmente a teoria referente a multifunções que será fundamental para o estudo de inclusões diferenciais e consequentemente as inclusões diferenciais fuzzy do Capítulo 4.

2.1 Conceitos Preliminares

Nesta seção apresentamos algumas notações e resultados que serão utilizados no desenvolvimento da teoria subsequente (veja [5], [12], [14],[27], [26]).

Inicialmente considere os seguintes espaços:

- O espaço de Banach de funções integráveis $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com a norma

$$\|x(\cdot)\|_{L_1} = \int_0^T \|x(t)\| dt$$

e denotado por $L_1([0, T], \mathbb{R}^n)$.

- O espaço de Hilbert de funções mensuráveis $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\int_0^T \|x(t)\|^2 dt < \infty$$

e denotado por $L_2([0, T], \mathbb{R}^n)$. O produto interno é definido por

$$\langle x(\cdot), y(\cdot) \rangle = \int_0^T \langle x(t), y(t) \rangle dt.$$

- O espaço de Banach de funções contínuas $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com a norma

$$\|x(\cdot)\|_C = \max\{\|x(t)\| \mid t \in [0, T]\}$$

e denotado por $C([0, T], \mathbb{R}^n)$.

Recorda-se que uma função $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada absolutamente contínua se, dado um $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer coleção enumerável de subintervalos disjuntos (s_k, t_k) de $[0, T]$ satisfazendo

$$\sum (t_k - s_k) < \delta$$

tem-se

$$\sum |x(t_k) - x(s_k)| < \varepsilon.$$

Uma função absolutamente contínua é contínua e tem variação limitada. Qualquer função Lipschitziana é absolutamente contínua. Uma função absolutamente contínua $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável quase sempre, e sua derivada $\dot{x}$ é uma função Lebesgue integrável. Além disso, a fórmula de Newton-Leibniz é verdadeira; isto é,

$$x(t) - x(s) = \int_s^t \dot{x}(r) dr$$

para todo $t, s \in [0, T]$, $s < t$. Portanto, qualquer função absolutamente contínua $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ pode ser representada na forma

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(s) ds.$$

- Denota-se o espaço das funções absolutamente contínuas $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com a norma

$$|x(\cdot)|_{AC} = |x(0)| + \int_0^T |\dot{x}(t)| dt$$

por $AC([0, T], \mathbb{R}^n)$. O qual prova-se que é um espaço de Banach.

Seguidamente apresentam-se alguns resultados. O primeiro resultado é conhecido como teorema de compacidade de Arzela-Ascoli. Recorda-se que um conjunto $X \subset C([0, T], \mathbb{R}^n)$ é chamado equicontínuo se, para todo $\varepsilon > 0$, existe δ tal que $|x(t) - x(s)| < \varepsilon$ para cada $x(\cdot) \in X$ sempre que $t, s \in [0, T]$ e $|t - s| < \delta$.

Teorema 2.1 (Arzela-Ascoli) *Se um conjunto $X \subset C([0, T], \mathbb{R}^n)$ é limitado e equicontínuo, então ele contém uma sequência uniformemente convergente $x_i(\cdot) \in X$, $i = 1, 2, \dots$; isto é, existe $x(\cdot) \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$ tal que $|x_i(\cdot) - x(\cdot)|_C \rightarrow 0$, quando $i \rightarrow \infty$.*

Observação 2.2 *Em particular, o Teorema 2.1 implica que um conjunto limitado de funções absolutamente contínuas X , tal que $|\dot{x}(t)| \leq b$ para todo $x(\cdot) \in X$, contém uma subsequência uniformemente convergente.*

Os seguintes resultados relacionam a L_1 -convergência e a convergência pontual.

Teorema 2.3 (Lebesgue) Suponha que uma sequência $\{x_i(\cdot)\}_{i \in \mathbb{N}}$, $x_i(\cdot) \in L_1([0, T], \mathbb{R}^n)$ converge para $x(\cdot)$ quase sempre e $|x_i(t)| \leq \phi(t)$, $\forall t \in [0, T]$, $i = 1, 2, \dots$, onde $\phi(\cdot) \in L_1([0, T], \mathbb{R})$. Então $x(\cdot) \in L_1([0, T], \mathbb{R}^n)$ e a sequência $x_i(\cdot) \rightarrow x(\cdot)$ na L_1 -norma.

Teorema 2.4 Suponha que uma sequência $\{x_i(\cdot)\}_{i \in \mathbb{N}}$, $x_i(\cdot) \in L_1([0, T], \mathbb{R}^n)$ converge para $x(\cdot) \in L_1([0, T], \mathbb{R}^n)$ na L_1 -norma, então existe uma subsequência $\{x_{i_p}(\cdot)\}_{p=1}^\infty$, tal que $\{x_{i_p}(\cdot)\}_{p=1}^\infty \rightarrow x(\cdot)$ na L_1 -norma.

Para estimar uma solução da uma inclusão diferencial é útil o seguinte resultado.

Teorema 2.5 (Desigualdade de Gronwall) Se $\alpha(\cdot) \in AC([0, T], \mathbb{R})$ satisfaz

$$|\dot{\alpha}(t)| \leq l(t)\alpha(t) + \rho(t), \quad t \in [0, T],$$

onde $l(\cdot) \in L_1([0, T], \mathbb{R})$, $l(t) \geq 0$, e $\rho(\cdot) \in L_1([0, T], \mathbb{R})$, então

$$|\alpha(t)| \leq e^{\int_0^t l(s)ds} |\alpha(0)| + \int_0^t |\rho(s)| e^{\int_s^t l(\tau)d\tau} ds, \quad t \in [0, T].$$

A distância de um ponto x a um conjunto não vazio A é dada por $d(x, A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\}$ com $\|\cdot\|$ a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 2.6 Sejam A e $B \subset \mathbb{R}^n$, e $\alpha > 0$. Suponha que $B \subset A + \alpha B_n$, onde B_n é a bola unitária em $\mathbb{R}^n$. Então $d(x, A) \leq d(x, B) + \alpha$.

Um conjunto ordenado A diz-se indutivo superiormente quando todo subconjunto linearmente ordenado $S \subset A$ possui uma cota superior.

Teorema 2.7 (Teorema de Zorn) Todo conjunto não vazio indutivo superiormente possui elementos máximos.

O Teorema de Zorn também pode ser enunciado dizendo-se que todo conjunto não vazio indutivo inferiormente possui elementos mínimos.

Bem menos evidente é o fato de que o Teorema de Zorn é equivalente ao chamado Axioma da Escolha, um princípio básico da teoria dos conjuntos, o qual afirma que, dada uma coleção não vazia $\mathfrak{C}$ de conjuntos não vazios X é possível formar um conjunto A , escolhendo em cada $X \in \mathfrak{C}$ precisamente um elemento x .

2.2 Multifunção

Nesta seção são apresentados o conceito e as propriedades de uma multifunção, que são necessários para o estudo da teoria de inclusões diferenciais. A multifunção é uma aplicação que associa um ponto a um conjunto.

Nesta seção e nas posteriores X e Y denotarão dois conjuntos não vazios contidos em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, respectivamente e 2^Y denotará a família de todos os subconjuntos de Y .

Definição 2.8 Uma multifunção é definida como uma aplicação $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$, que associa a cada $x \in X$ um subconjunto $F(x) \in 2^Y \setminus \emptyset$.

Exemplo 2.9 Consideremos a multifunção $F : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}} \setminus \emptyset$, definida por

$$F(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{se } x > 0 \\ \{-1, 1\} & \text{se } x = 0 \\ \{-1\} & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

A primeira questão que surge naturalmente é: como definir a continuidade de uma multifunção?. No caso de uma função $f : X \rightarrow Y$, a continuidade é caracterizada por propriedades equivalentes:

- a) Para qualquer vizinhança V de $f(x_0)$, existe uma vizinhança N de x_0 tal que $f(N) \subset V$.
- b) Para qualquer sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $x_k \in X$ convergindo para x_0 , a sequência $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$, $f(x_k) \in Y$ converge para $f(x_0)$.

Estas duas propriedades para o caso de multifunções $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$ tornam-se:

- A) Para qualquer vizinhança V de $F(x_0)$, existe uma vizinhança N de x_0 tal que $F(N) \subset V$.
- B) Para qualquer sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $x_k \in X$ convergindo para x_0 e para qualquer $y_0 \in F(x_0)$, existe uma sequência de elementos $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $y_k \in F(x_k)$ que converge a y_0 .

Observação 2.10 Para as multifunções, as propriedades A) e B) não são equivalentes. Quando F satisfaz a propriedade A), diz-se que ela é semicontínua superior; se satisfizer a propriedade B), diz-se que ela é semicontínua inferior; e se A) e B) foram satisfeitas diz-se que F é contínua.

Definição 2.11 Uma multifunção $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$ é semicontínua superiormente (scs) em $x_0 \in X$, se para qualquer aberto N contendo $F(x_0)$ existir uma vizinhança M de x_0 tal que $F(M) \subset N$. Diz-se que F é semicontínua superiormente se ela o for para todo $x_0 \in X$.

Exemplo 2.12 A multifunção $F : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}} \setminus \emptyset$, definida por

$$F(x) = \begin{cases} [-1, 1] & \text{se } x = 0 \\ \{0\} & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

é semicontínua superiormente. Da definição de F tem-se que,

- Para todo $x \neq 0$, $F(x) = 0$ é uma função real constante, a qual é contínua. Segue-se da continuidade de F , que para qualquer $x_0 \neq 0$ e qualquer vizinhança N de $F(x_0)$, existe uma vizinhança M de x_0 tal que $f(M) \subset N$.
- Se $x_0 = 0$, então $F(x_0) = [-1, 1]$. Sejam $N =]-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[\supset F(x_0)$ e M qualquer vizinhança de x_0 , logo $F(M) = [-1, 1] \subset N$.

Segue da Definição 2.11 que F é semicontínua superiormente.

Definição 2.13 Uma multifunção $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$ é semicontínua inferiormente (sci) em $x_0 \in X$, se para qualquer $y_0 \in F(x_0)$ e qualquer vizinhança N de y_0 , existir uma vizinhança M de x_0 tal que

$$\forall x \in M, \quad F(x) \cap N \neq \emptyset$$

Exemplo 2.14 A multifunção $F : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}} \setminus \emptyset$, definida por

$$F(x) = \begin{cases} [-1, 1] & \text{se } x \neq 0 \\ \{0\} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Segue da Definição 2.13 que F é semicontínua inferiormente.

Observação 2.15 A Definição 2.13 pode ser formulada da seguinte maneira: dada qualquer sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $x_k \in X$ convergindo para x_0 e qualquer $y_0 \in F(x_0)$, existe uma sequência $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $y_k \in F(x_k)$ que converge para y_0 .

Definição 2.16 Uma multifunção $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$ é contínua se é semicontínua superiormente e semicontínua inferiormente.

Uma importante classe de multifunções contínuas são as Lipschitzianas. Para caracterizar este tipo de multifunções primeiramente denota-se por

$$B(K, \eta) \doteq \{y \in X / d(y, K) \leq \eta\}$$

a bola de raio η em torno do subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$. Ela pode ser escrita como $B(K, \eta) = K + \eta B_n$, com B_n a bola unitária fechada de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.17 Seja a multifunção $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$. Diz-se que F é localmente Lipschitziana, se para qualquer $x_0 \in X$, existir uma vizinhança $N \subset X$ e uma constante $L \geq 0$ (constante de Lipschitz) tal que

$$\forall x, y \in N, \quad F(x) \subset B(F(y), L \cdot d(x, y)).$$

Diz-se que F é Lipschitziana, se existir $L \geq 0$ tal que

$$\forall x, y \in X, \quad F(x) \subset B(F(y), L \cdot d(x, y)).$$

2.3 Problema de Seleção

Nesta seção apresenta-se o problema de seleção que consiste em um método para se obter soluções de inclusões diferenciais.

Dado $\mathfrak{F} = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ uma família de conjuntos arbitrários e A um conjunto de índices qualquer, uma seleção de $\mathfrak{F}$ é uma aplicação $\alpha \rightarrow f_\alpha \in F_\alpha$. Quando A é finito a existência de pelo menos uma seleção é verdadeira. Para quaisquer conjunto A arbitrário, não é possível afirmar a existência de uma seleção. Então estuda-se algumas características e propriedades do conjunto A para garantir a existência da mesma.

Definição 2.18 *Seja a multifunção $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ satisfazendo a relação*

$$f(w) \in F(w), \quad \forall w \in X$$

é chamada seleção de F . Se a aplicação f for mensurável, será chamada de seleção mensurável de F . Se f for contínua será chamada seleção contínua de F em X .

Exemplo 2.19 *Seja a multifunção $F : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}} \setminus \emptyset$, definida por*

$$F(x) = \begin{cases} [-1, 1] & \text{se } x \neq 0 \\ \{0\} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Uma seleção de F é dada por $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Quando F tem valores não vazios, a existência de uma seleção é garantida pelo Teorema de Zorn 2.7. Agora o problema é encontrar seleções com algumas propriedades como continuidade, mensurabilidade, etc, pois estas características serão importantes no estudo de inclusões diferenciais.

A seguir alguns resultados que garantem a existência de seleções com algumas propriedades mencionadas acima.

Teorema 2.20 (Teorema de Michael)[2] *Sejam, X um espaço métrico, Y um espaço de Banach e $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$ uma multifunção sci com valores fechados e convexos, então dado $(w_0, x_0) \in \text{Graf}(F)$ existe uma seleção contínua $f : X \rightarrow Y$ de F tal que $f(w_0) = x_0$.*

Assim, o Teorema 2.20 garante a existência de uma seleção contínua para toda multifunção sci com valores fechados e convexos. Mediante um exemplo, mostra-se que não acontece o mesmo para multifunções scs $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$ com valores fechados e convexos.

Exemplo 2.21 Consideremos a multifunção $F : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}} \setminus \emptyset$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} \{1\} & , \text{ se } x > 0 \\ [-1, 1] & , \text{ se } x = 0 \\ \{-1\} & , \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Segue da Definição 2.11 que F é semicontínua superiormente, porém não é possível encontrar uma seleção contínua de F definida em $\mathbb{R}$, veja Figura 2.1.

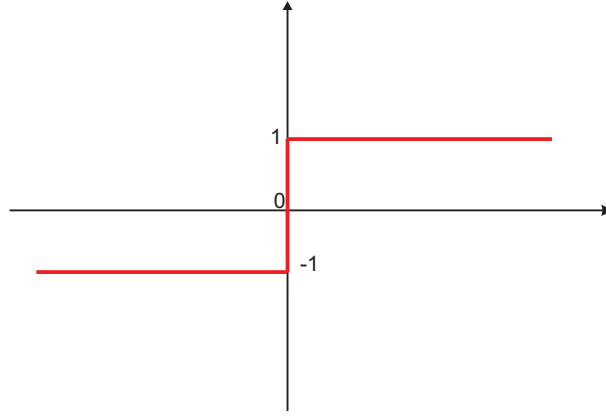


Figura 2.1: Multifunção scs com seleção não contínua

No entanto, para muitos propósitos a existência de uma seleção aproximada é suficiente (veja Figura 2.2).

Teorema 2.22 [2] Sejam, X um espaço métrico, Y um espaço de Banach e $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$ uma multifunção scs com valores convexos. Então para cada $\varepsilon > 0$ existe uma função localmente Lipschitz $f_\varepsilon : X \rightarrow Y$ tal que

$$f_\varepsilon(X) \subset \text{co}F(X) \quad e \quad \text{Graf}(f_\varepsilon) \subset B(\text{Graf}(F), \varepsilon)$$

Para o Exemplo 2.21, segue do Teorema 2.22 a existência de uma seleção aproximada do mesmo.

Sejam, X um espaço métrico, Y um espaço de Banach e $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$ uma multifunção. Define-se a função minimal como sendo

$$m(F(w)) = \left\{ u \in F(w) : \|u\| = \min_{y \in F(w)} \|y\| \right\}.$$

Quando Y é um espaço de Hilbert e F tem valores fechados e convexos, a função minimal para cada $w \in X$ é um conjunto unitário, neste caso denomina-se seleção minimal [2]. Para que esta seleção seja contínua é necessário a continuidade de F , pois se F for só

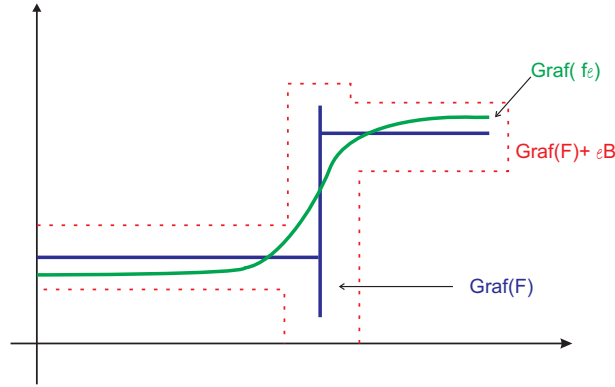


Figura 2.2: Multifunção sci com seleção contínua aproximada

scs ou sci com valores convexos e fechados, então não se pode garantir a continuidade de seleção minimal.

Exemplo 2.23 Seja a multifunção $F : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}} \setminus \emptyset$

$$F(x) = \begin{cases} [-1, 1] & , \text{ se } x = 0 \\ 1 & , \text{ se } x \neq 0. \end{cases}$$

Do Exemplo 2.12, F é scs com valores fechados e convexos. A seleção minimal é dada por

$$m(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ se } x = 0 \\ 1 & , \text{ se } x \neq 0. \end{cases}$$

A qual nota-se que não é contínua em $x = 0$.

Analogamente define-se F como sendo

$$F(x) = \begin{cases} [-1, 1] & , \text{ se } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ se } x = 0. \end{cases}$$

Do Exemplo 2.14, F é sci com valores compactos e convexos. A seleção minimal é dada por

$$m(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x = 0 \\ -1 & , \text{ se } x \neq 0. \end{cases}$$

A qual nota-se que não é contínua em $x = 0$.

Teorema 2.24 [2] Sejam, X um espaço métrico, Y um espaço de Hilbert e $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$ uma multifunção com valores fechados e convexos. Se F é contínua, então a função $w \rightarrow m(F(w))$ é uma seleção contínua.

2.4 Cálculo diferencial e integral de multifunções

Nesta seção são apresentados os principais resultados e propriedades sobre integral e diferencial de multifunções os quais serão importantes para definir conceitos similares para funções fuzzy.

Inicialmente considere os espaços de subconjuntos não vazios do espaço euclidiano n -dimensional $\mathbb{R}^n$:

- i) C^n consiste de todos os subconjuntos fechados não vazios de $\mathbb{R}^n$;
- ii) $\mathcal{K}^n$ consiste de todos os subconjuntos compactos não vazios de $\mathbb{R}^n$;
- iii) $\mathcal{K}_C^n$ consiste de todos os subconjuntos compactos, convexos e não vazios de $\mathbb{R}^n$.

Observação 2.25 *Os espaços C^n , $\mathcal{K}^n$ e $\mathcal{K}_C^n$ são fechados com as operações usuais de soma de conjuntos e multiplicação de um escalar por um conjunto.*

Observação 2.26 *Em geral,*

$$A + (-1)A \neq \{0\}.$$

Por exemplo, para $A = [0, 2]$, tem-se

$$A + (-1)A = [-2, 2] \neq \{0\}.$$

Em vista da observação (2.26) define-se a **diferença de Hukuhara $A - B$** entre conjuntos não vazios A e B .

Definição 2.27 *Dados $A, B \in C^n$, se existir $C \in C^n$ tal que $A = B + C$, então C é a diferença de Hukuhara ou a H -diferença, denotada por $A - B$.*

Exemplo 2.28 *Seja $A = [-1, 1]$, $B = [-1, 0]$ e $C = [0, 1]$, então*

$$A = B + C, \text{ logo tem sentido falar de } A - B = C \text{ ou } A - C = B.$$

A seguir, a definição de convergência no sentido de Kuratowski em subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.29 *Seja $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.*

- *Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto limite de $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$, se para toda bola com centro x e raio ε , $B(x; \varepsilon)$, existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A_p \cap B(x; \varepsilon) \neq \emptyset$, para todo $p \geq p_0$.*
- *Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é um valor de aderência de $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$, se para todo $p \in \mathbb{N}$ e para toda bola com centro x e raio ε , $B(x; \varepsilon)$, existe $q \geq p$ tal que $A_q \cap B(x; \varepsilon) \neq \emptyset$.*

- $\liminf A_p = \{x \in \mathbb{R}^n / x \text{ é um ponto limite de } A_p\}$.
- $\limsup A_p = \{x \in \mathbb{R}^n / x \text{ é um valor de aderência de } A_p\}$.
- Se $\liminf A_p = \limsup A_p = A$, então dizemos que A é o limite (no sentido de Kuratowski) da seqüência $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ e neste caso escrevemos $\lim A_p = A$ ou $A_p \xrightarrow{K} A$.

Exemplo 2.30 Seja $r > 1$ um número real fixo, e considere o conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = r^2\}$$

e a família

$$A_p = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / r^2 - \frac{1}{p} < x^2 + y^2 < r^2 + \frac{1}{p} \mid p \in \mathbb{N} \right\}.$$

De fato, tem-se que $\liminf A_p = \limsup A_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = r^2\}$. Logo A é o limite de $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ no sentido de Kuratowski.

2.4.1 Métrica de Hausdorff e função suporte

Aqui são dadas a definição e as propriedades da distância de Hausdorff, as quais serão importantes nos capítulos posteriores.

Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \subset \mathbb{R}^n$ não vazio. A distância $d(x, A)$ de x a A é definida por

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\}$$

com $\|\cdot\|$ a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$. Assim, tem-se que $d(x, A) = d(x, \bar{A}) \geq 0$ e $d(x, A) = 0$ se e somente se $x \in \bar{A}$, onde $\bar{A}$ é o fecho de $A \subset \mathbb{R}^n$.

Chama-se o subconjunto

$$S_\varepsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) < \varepsilon\}$$

uma ε -vizinhança de A . Seu fecho é o subconjunto

$$\bar{S}_\varepsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) \leq \varepsilon\}.$$

Em particular, denota-se por $\bar{S}_1^n$ a bola fechada em $\mathbb{R}^n$, isto é

$$\bar{S}_1^n = \bar{S}_1(\{0\})$$

o qual, é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.

Observação 2.31 *Note que*

$$\overline{S}_\varepsilon(A) = A + \varepsilon \overline{S}_1^n$$

para todo $\varepsilon > 0$ e qualquer subconjunto A não vazio de $\mathbb{R}^n$.

Por conveniência, algumas vezes escreve-se $S(A, \varepsilon)$ e $\overline{S}(A, \varepsilon)$ para $S_\varepsilon(A)$ e $\overline{S}_\varepsilon(A)$.

Agora, sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}^n$. Define-se a separação de Hausdorff de B a partir de A por

$$d_H^*(B, A) = \sup\{d(b, A) : b \in B\}$$

ou equivalentemente

$$d_H^*(B, A) = \inf\{\varepsilon > 0 : B \subseteq A + \varepsilon \overline{S}_1^n\}.$$

Tem-se que $d_H^*(B, A) \geq 0$ com $d_H^*(B, A) = 0$ se e somente se $B \subset \overline{A}$. Assim a desigualdade triangular é verdadeiro para todo subconjunto A, B e $C \in \mathbb{R}^n$. Da definição de $d_H^*(\cdot, \cdot)$, tem-se que em geral

$$d_H^*(B, A) \neq d_H^*(A, B).$$

Definição 2.32 *Define-se a distância de Hausdorff entre dois subconjuntos não vazios A e B de $\mathbb{R}^n$ por*

$$d_H(B, A) = \max\{d_H^*(B, A), d_H^*(A, B)\}.$$

Da Definição (2.32) segue que:

- a) $d_H(A, B) \geq 0$ com $d_H(A, B) = 0$ se e somente se $\overline{A} = \overline{B}$;
- b) $d_H(A, B) = d_H(B, A)$;
- c) $d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$,

para quaisquer subconjuntos não vazios A, B e C de $\mathbb{R}^n$.

Observação 2.33 *Para subconjuntos não vazios e fechados de $\mathbb{R}^n$ a distância de Hausdorff (2.32) é uma métrica, conhecida como a métrica de Hausdorff.*

Da observação (2.33) tem-se que (C^n, d_H) é um espaço métrico. Logo, segue-se o resultado.

Proposição 2.34 [8] *(C^n, d_H) é um espaço métrico completo separável no qual $\mathcal{K}^n$ e $\mathcal{K}_C^n$ são subconjuntos fechados. Consequentemente, $(\mathcal{K}^n, d_H)$ e $(\mathcal{K}_C^n, d_H)$ também são espaços métricos separáveis.*

As seguintes propriedades de espaço métrico de Hausdorff serão importantes no desenvolvimento das teorias dos Capítulos 3 e 4.

Proposição 2.35 [15] *Sejam $A, B, C, D \in \mathcal{K}^n$, então*

$$d_H(tA, tB) = t d_H(A, B) \quad \forall t \geq 0, \quad (2-1)$$

$$d_H(A + C, B + D) \leq d_H(A, B) + d_H(C, D). \quad (2-2)$$

Proposição 2.36 [15] *Sejam $A, B \in \mathcal{K}_c^n$ e $C \in \mathcal{K}^n$, então*

$$d_H(A + C, B + C) = d_H(A, B). \quad (2-3)$$

Proposição 2.37 [15] *Sejam $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ e $A \subset B \subset C$, então*

$$d_H(A, B) \leq \max\{d_H(A, X), d_H(C, X)\}$$

para todo $X \in \mathcal{K}$.

Dado um subconjunto limitado não vazio $A \subset \mathbb{R}^n$, define-se

$$\|A\| = \sup\{\|a\| : a \in A\} \quad (2-4)$$

ou equivalentemente,

$$\|A\| = d_H(\{0\}, A). \quad (2-5)$$

Aqui, $\|A\|$ é finito e o supremo em (2-4) é atingido quando $A \in \mathcal{K}^n$. Da Proposição 2.35 segue que

$$\|tA\| = t\|A\|, \quad \forall t \geq 0. \quad (2-6)$$

Além disso, das propriedades de métrica e de (2-5) decorre que

$$|\|A\| - \|B\|| \leq d_H(\{0\}, A) \quad \forall A, B \in \mathcal{K}^n. \quad (2-7)$$

Definição 2.38 *Se $A \in 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$, define-se a função suporte de A por*

$$S_A(x) = \sup_{a \in A} \langle x, a \rangle$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno em $\mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.39 [15] *Sejam $A, B \in \mathcal{K}_c$, então:*

$$I. \quad S_{A+B} = S_A + S_B.$$

$$2. S_{\lambda A} = \lambda S_A, \lambda \geq 0.$$

$$3. A = B \Leftrightarrow S_A = S_B.$$

Teorema 2.40 [15] *Sejam $A, B \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}$, então:*

$$d_H(A, B) = \max\{S_A(x) - S_B(x) : \|x\| = 1\}.$$

2.4.2 Integral e diferencial de multifunções

Para esta seção $T = [a, b]$ é um intervalo em $\mathbb{R}$.

Definição 2.41 *Sejam $G : T \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$ uma multifunção e $S(G)$ o conjunto de todas as seleções integráveis de G , isto é,*

$$S(G) = \{f : T \rightarrow \mathbb{R}^n : f \text{ é integrável e } f(t) \in G(t), \forall t \in T\}$$

Então a integral de Aumann de G em T é definida como

$$\int_T G = \left\{ \int_T f(t) dt : f \in S(G) \right\}.$$

Teorema 2.42 [3] *Se $G : T \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$, então $\int_T G = \emptyset$ ou $\int_T G$ é um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$.*

Definição 2.43 *A multifunção $G : T \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$ é dita mensurável se seu gráfico $\{(t, x) : x \in G(t)\}$ é um conjunto mensurável, isto é:*

$$\{(t, x) : x \in G(t)\} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

onde $\mathcal{A}$ denota a σ -álgebra dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ Lebesgue mensuráveis e $\mathcal{B}$ denota os subconjuntos Borel mensuráveis de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.44 *A multifunção $G : T \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$ é dita integravelmente limitada se existe uma função integrável $g : T \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|x\| \leq g(t)$, para todo $x \in G(t)$.*

Teorema 2.45 [3] *Se $G : T \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$ é mensurável e integravelmente limitada, então*

$$\int_T G \neq \emptyset.$$

Teorema 2.46 [3] *Seja $G : T \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$, com $G(t)$ fechado para todo $t \in T$. Se G é mensurável e integravelmente limitada, então $\int_T G \neq \emptyset$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.*

Corolário 2.47 [3] *Seja $G : T \rightarrow 2^{\mathbb{R}} \setminus \emptyset$, com $G(t)$ fechado para todo $t \in T$. Se G é integravelmente limitada, então*

$$\int_T G = [c, d]$$

para $c, d \in \mathbb{R}$ com $c \leq d$.

A seguir enuncia-se um resultado que mostra a relação existente entre a integral de Aumann e a integral de Lebesgue para multifunções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$ segundo a função suporte. Este resultado será de muita importância no cálculo da integral de Aumann de algumas funções.

Teorema 2.48 [3] *Se $G : T \rightarrow \mathcal{K}^n$ é mensurável e integravelmente limitada, então*

$$S_{\int_T G}(x) = \int_T S_{G(t)}(x) dt.$$

Exemplo 2.49 [3] *Se $G(t) = [a(t), b(t)]$ é mensurável e integravelmente limitada, então $a(t)$ e $b(t)$ são mensuráveis e*

$$\int_T G = \left[\int_T a(t) dt, \int_T b(t) dt \right].$$

De fato, tem-se que

$$S_{G(t)}(x) = \max\{xa(t), xb(t)\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e

$$\int_T S_{G(t)}(x) dt = \max \left\{ x \int_T a(t) dt, x \int_T b(t) dt \right\} = S_{[\int_T a(t) dt, \int_T b(t) dt]}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2-8)$$

Pelo Teorema 2.48 e da equação (2-8) tem-se

$$S_{\int_T G}(x) = \int_T S_{G(t)}(x) dt = S_{[\int_T a(t) dt, \int_T b(t) dt]}(x).$$

Como $\int_T G$ é convexo e compacto, segue do Teorema 2.39 item 3 que

$$\int_T G = \left[\int_T a(t) dt, \int_T b(t) dt \right].$$

Exemplo 2.50 *Sejam $T = [0, 1]$ e $G : T \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$, com $G(t) = B[0, t]$, onde $B[0, t]$ é a bola de centro na origem de raio t em $\mathbb{R}^n$, então*

$$\int_T G = B \left[0, \frac{1}{2} \right].$$

De fato, note que $\forall a \in G(t)$ pode ser escrito como $a = t \frac{x}{\|x\|}$, $x \in \mathbb{R}$. Assim, segue que

$$S_{G(t)}(x) = \sup_{a \in G(t)} \langle x, a \rangle = \begin{cases} \left\langle x, t \frac{x}{\|x\|} \right\rangle & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

isto é

$$S_{G(t)}(x) = t\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo

$$\int_T S_G(x) dt = \frac{\|x\|}{2} = S_{B[0, \frac{1}{2}]}(x).$$

Pelos Teoremas 2.39 e 2.48, tem-se

$$\int_T G = B \left[0, \frac{1}{2} \right].$$

Exemplo 2.51 Sejam $f : T \rightarrow \mathbb{R}$, integrável e $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ conjunto convexo com $f(x) \geq 0$, $\forall t \in T$. Então a multifunção $G(t) = f(t)A$ é integravelmente limitada e,

$$\int_T G = \left[\int_T f(t) dt \right] A.$$

Pelo Teorema 2.39 item 2, tem-se

$$S_{G(t)}(x) = f(t)S_A \implies \int_T S_{G(t)} dt = \left[\int_T f(t) dt \right] S_A = S_{(\int_T f(t) dt)A}(x).$$

Pelos Teoremas 2.39 e 2.48, conclui-se que

$$\int_T G = \left[\int_T f(t) dt \right] A.$$

Para definir diferenciabilidade de uma multifunção, será utilizada a definição segundo Hukuhara [8].

Definição 2.52 Diz-se que a multifunção $G : T \rightarrow \mathcal{K}_C(\mathbb{R}^n)$ é H -diferenciável num ponto $t_0 \in T$, se existe $DG(t_0) \in \mathcal{K}_C(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} d_H \left(\frac{G(t_0 + k) - G(t_0)}{k}, DG(t_0) \right) = 0$$

e

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} d_H \left(\frac{G(t_0) - G(t_0 - k)}{k}, DG(t_0) \right) = 0.$$

Nos pontos extremos de T , considera-se apenas um dos limites acima. $DG(t_0)$ é chamado de H -diferenciável de G no ponto t_0 .

Teorema 2.53 [3] Se $G : T \rightarrow \mathcal{K}_C(\mathbb{R}^n)$ é H -diferenciável em T , então

$$\frac{d(S_{G(t)}(x))}{dt} = S_{DG(t)}(x).$$

Exemplo 2.54 Sejam $T = [0, 1]$ e $G : T \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ com $G(t) = B[0, t]$, onde $B[0, t]$ é a bola de centro na origem de raio t em $\mathbb{R}^n$. Então, G é diferenciável e

$$\frac{d(S_{G(t)}(x))}{dt} = S_{DG(t)}(x) = \begin{cases} \|x\| & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

De fato, note que $G(t) = tB[0, 1]$, $\forall t \in [0, 1]$. Defina $DG(t_0) = B[0, 1]$, $\forall t_0 \in [0, 1]$, então:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0^+} d_H \left(\frac{G(t_0 + k) - G(t_0)}{k}, DG(t_0) \right) &= \lim_{k \rightarrow 0^+} d_H \left(\frac{(t_0 + k)B[0, 1] - t_0B[0, 1]}{k}, B[0, 1] \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow 0^+} d_H (B[0, 1], B[0, 1]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0^+} d_H \left(\frac{G(t_0) - G(t_0 - k)}{k}, DG(t_0) \right) &= \lim_{k \rightarrow 0^+} d_H \left(\frac{t_0B[0, 1] - (t_0 - k)B[0, 1]}{k}, B[0, 1] \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow 0^+} d_H (B[0, 1], B[0, 1]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto $G(t)$ é diferenciável.

Agora,

$$\begin{aligned} S_{DG(t_0)}(x) &= \left\langle x, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \text{ se } x \neq 0 \text{ e } S_{DG(t_0)}(0) = 0 \\ &= \|x\| \text{ se } x \neq 0 \text{ e } S_{DG(t_0)}(0) = 0. \end{aligned} \quad (2-9)$$

Por outro lado, do Exemplo 2.50 segue que

$$S_{G(t)}(x) = t\|x\| \text{ se } x \neq 0 \text{ e } S_{G(t)}(0) = 0.$$

Logo,

$$\frac{d(S_{G(t)}(x))}{dt} = \frac{d(t\|x\|)}{dt} = \|x\| \text{ se } x \neq 0 \text{ e } \frac{d(S_{G(t)}(0))}{dt} = 0. \quad (2-10)$$

Das equações (2-9) e (2-10) segue a afirmação do Teorema 2.53.

2.5 Inclusões Diferenciais

Nesta seção estabelece-se o conceito de inclusão diferencial bem como alguns resultados que serão primordiais para a compressão do método de averaging para inclusões diferenciais fuzzy.

Definição 2.55 *Uma inclusão diferencial é definida pela relação*

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x)$$

onde $x = x(t)$ é uma função não conhecida e $F(t, x)$ é uma multifunção dada, que associa a cada par (t, x) num certo domínio Ω subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um conjunto $F(t, x)$ de $\mathbb{R}^n$.

Em particular, se para cada $(t, x) \in \Omega$ o conjunto $F(t, x)$ consiste somente de um único elemento, i.e., $F(t, x) = \{f(t, x)\}$, então a inclusão diferencial torna-se uma equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (2-11)$$

As inclusões diferenciais surgem em problemas de matemática pura e aplicada. Por exemplo, o estudo de um sistema de controle conduz a uma inclusão diferencial, pois dado

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (2-12)$$

onde x é um vetor no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ é o vetor velocidade, t é o tempo e $u = u(t)$ um objeto de controle tal que

$$u(t) \in U \quad (2-13)$$

com U um subconjunto arbitrário de $\mathbb{R}^n$. Agora tendo como referencial o conjunto de todas as velocidades admissíveis do sistema no ponto $x \in \mathbb{R}^n$ dado por $f(t, x, u)$, o mesmo consiste de todos os valores $f(t, x, u)$, onde u é um ponto arbitrário de U . Por fim, se $x(t)$ for uma trajetória do sistema controlável (2-12) com controle admissível $u(t)$, então para quase todo t

$$\dot{x}(t) \in f(t, x, u(t)). \quad (2-14)$$

Isto conduz ao conceito de uma inclusão diferencial

$$\dot{x} \in f(t, x, u). \quad (2-15)$$

Por uma solução desta equação se entende como uma função $x(t)$ absolutamente contínua num intervalo I satisfazendo (2-14), quase sempre sobre I .

Assim como o problema (2-12), há muitos outros que conduzem ao conceito de uma inclusão diferencial. As soluções mais interessantes de inclusões diferenciais são as que são absolutamente contínuas. Lembrar que uma função contínua $x : [0, T] \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^n$ é chamada absolutamente contínua, se existe uma função localmente integrável v tal que

$$\int_t^s v(r)dr = x(s) - x(t)$$

para todo $t, s \in [0, T]$. Então para $x(\cdot)$ dado, a derivada $\dot{x}(t) = v(t)$ é definida quase sempre sobre $[0, T]$.

Sejam $F : \Omega \rightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{C}}^n$ e $(0, x_0) \in \Omega$. A inclusão diferencial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & \in F(t, x(t)), \\ x(0) & = x_0. \end{cases} \quad (2-16)$$

possui uma solução $y(t)$ sobre $[0, T]$, se $y(\cdot)$ for absolutamente contínua, $y(0) = x_0$ e $y(\cdot)$ satisfizer a inclusão quase sempre sobre $[0, T]$. Por simplicidade o termo quase sempre será entendido como presente em todas as vezes que for mencionado solução de uma inclusão diferencial.

Denota-se o conjunto de todas as soluções de (2-16) sobre $[0, \tau]$ por $\Sigma(x_0, \tau)$ e o conjunto atingível por

$$\mathcal{A}(x_0, \tau) = \{x(\tau) : x(\cdot) \in \Sigma(x_0, \tau)\}.$$

A seguir alguns resultados sobre a existência de soluções para uma inclusão diferencial da forma:

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)).$$

Para obter alguns casos de existência de soluções deve-se impor algumas condições sobre a multifunção F tais como: regularidade (continuidade, semicontinuidade, Lipschitz), topológicas, ou ainda, de tipo geométrico (compacidade, convexidade) nos valores de F .

Uma maneira simples de obter uma solução para o Problema de Cauchy para inclusões diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & \in F(t, x(t)) \\ x(0) & = x_0 \end{cases} \quad (2-17)$$

é reduzir (2-17) a um Problema de Cauchy para equações diferenciais. Para isto, é necessário obter uma seleção f de F tal que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \quad (2-18)$$

também seja solução de (2-17).

Para os resultados sobre a existência de soluções para inclusões diferenciais que seguem, considere a inclusão diferencial (2-17), onde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$ é uma multifunção com valores convexos e fechados.

Teorema 2.56 [2] *Sejam Ω subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $F : \Omega \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$ uma multifunção sci com valores fechados e convexos. Se $(0, x_0) \in \Omega$, então existe algum intervalo $I = (w_-, w_+)$, $w_- < 0 < w_+$ e pelo menos uma função continuamente diferenciável $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ que é uma solução do problema de Cauchy de inclusões diferenciais (2-17).*

Demonstração. Como por hipótese F é sci e tem valores fechados e convexos, segue do Teorema 2.20 a existência de uma seleção contínua $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Agora, devido ao Teorema de Peano [27] o Problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)), \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

possui pelo menos uma solução clássica num intervalo de existência $I = (w_-, w_+)$ com $w_- < 0 < w_+$. $\square$

Teorema 2.57 [2] *Sejam Ω subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $F : \Omega \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$ uma multifunção contínua com valores fechados e convexos. Se $(0, x_0) \in \Omega$, então existe uma solução do problema de Cauchy para inclusões diferenciais (2-17) definida em algum intervalo $I = (w_-, w_+)$, $w_- < 0 < w_+$.*

Demonstração. A demonstração deste teorema é similar a demonstração do Teorema 2.56, fazendo uso do Teorema 2.24. $\square$

Definição 2.58 *Uma aplicação $\psi : \Omega \rightarrow X$ é localmente compacta, se para cada $x \in \text{Dom}(\psi)$ existe uma vizinhança V de x tal que*

$$\psi(V) \subset K,$$

para algum subconjunto compacto $K \subset X$.

Teorema 2.59 [2] *Sejam Ω subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $F : \Omega \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$ uma multifunção scs com valores fechados e convexos. Suponha além disso que $(t, x) \mapsto m(F(t, x))$ é localmente compacta. Se $(0, x_0) \in \Omega$, então existe $T > 0$ e uma função absolutamente contínua $x(\cdot)$ definida em $[0, T]$, uma solução de (2-17).*

Demonstração. A demonstração deste teorema é análogo à demonstração do Teorema de Peano [27], fazendo uso do Teorema 2.22. $\square$

A seguir um resultado que garante a existência de soluções do Problema de Cauchy para a inclusão diferencial (2-17) quando F é Lipschitziana, isto é, $\exists l > 0$ tal que,

$$F(x) \subset F(y) + l |x - y| B_n.$$

Para tal fim, os seguintes resultados são necessários.

Seja $F : \mathbb{R}^m \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ uma multifunção.

Lema 2.60 [26] *Suponha que as sequências $\{x_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ e $\{y_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ convergem em $L_1([0, T], \mathbb{R}^n)$ para $x_0(\cdot)$ e $y_0(\cdot)$, respectivamente. Além disso, suponha que existe uma função $b(\cdot) \in L_1([0, T], \mathbb{R}^n)$ tal que $|w_i(t)| \leq b(t)$, $t \in [0, T]$, $i = 1, 2, \dots$, onde $w_i(t) = w(x_i(t), y_i(t)) - y_i(t)$ e $w(x, y) = \Pi(y, F(x))$. Então a sequência $\{w_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ converge para $w_0(\cdot) = w(x_0(\cdot), y_0(\cdot)) - y_0(\cdot)$ na norma $L_1([0, T], \mathbb{R}^n)$.*

Observação 2.61 $\Pi(x, A) = \{a \in A / |x - a| = d(x, A)\}.$

Lema 2.62 [26] *Seja $F : \mathbb{R}^m \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ uma multifunção contínua com $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^n$. Então $\rho(x, y) = d(y, F(x))$ é contínua.*

Teorema 2.63 [26] *Sejam $\delta \geq 0$, $\rho(\cdot) \in L_1([0, T], \mathbb{R})$ e $M \subset AC([0, T], \mathbb{R}^n)$. Considere também $r_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua tal que $|r_0(x) - x| \leq \delta$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, suponha que cada $x(\cdot) \in M$ satisfaz*

$$d(\dot{x}(t), F(x(t))) \leq \rho(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2-19)$$

Então, existe uma aplicação $r : M \rightarrow \Sigma(x_0, \tau)$, satisfazendo:

1. r é contínua na norma do espaço $AC([0, T], \mathbb{R}^n)$;
2. $r(x(\cdot))(0) = r_0(x(0))$ para todo $x(\cdot) \in M$;
3. Se $x(\cdot) \in M \cap \Sigma(x_0, \tau)$ e $r_0(x(0)) = x(0)$, então $r(x(\cdot)) = x(\cdot)$;

4. As desigualdades

$$|x(t) - r(x(\cdot))(t)| \leq \xi(t), \quad t \in [0, T] \quad (2-20)$$

$$\left| \dot{x}(t) - \frac{d}{dx} r(x(\cdot))(t) \right| \leq l\xi(t) + \rho(t), \quad t \in [0, T] \quad (2-21)$$

onde $\xi(t) = \delta e^{l|t|} + \left| \int_0^t e^{l(|t|-|s|)} \rho(s) ds \right|$, são satisfeitas.

Demonstração. Seja $x(\cdot) \in AC([0, T], \mathbb{R}^n)$ e tome

$$\begin{aligned} w(x(\cdot))(t) &= \Pi(\dot{x}(t), F(x(t))) \\ &= \{a \in F(x(t)) / |\dot{x} - a| = d(\dot{x}, F(x(t)))\} \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} |w(x(\cdot))(t)| &= |w(x(\cdot))(t) + \dot{x}(t) - \dot{x}(t)| \leq |\dot{x}(t)| + |w(x(\cdot))(t) - \dot{x}(t)| \\ &= |\dot{x}(t)| + d(\dot{x}(t), F(x(t))) \\ &\leq |\dot{x}(t)| + d(\dot{x}(t), 0) + d(0, F(x(t))) \\ &= 2|\dot{x}(t)| + d(0, F(x(t))) \end{aligned}$$

Logo, como F é Lipschitziana e da Proposição 2.6 tem-se que

$$|w(x(\cdot))(t)| \leq 2|\dot{x}(t)| + d(0, F(x(0))) + l|x(t) - x(0)|. \quad (2-22)$$

Segue da equação (2-22) que $w(x(\cdot)) \in L_1([0, T], \mathbb{R}^n)$. Logo, pode-se definir os operadores

$$J(x(\cdot))(t) = r_0(x(0)) + \int_0^t w(x(\cdot))(s) ds, \quad \forall t \in [0, T]$$

$$I(x(\cdot))(t) = x(0) + \int_0^t w(x(\cdot))(s) ds, \quad \forall t \in [0, T]$$

Seja $x_0(\cdot) \in M$ e defina a sequência de funções $x_k(\cdot) \in AC([0, T], \mathbb{R}^n)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x_1(\cdot) &= J(x_0(\cdot)) \\ x_k(\cdot) &= I^{k-1}(x_1(\cdot)), \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Segue da equação (2-19) que

$$\begin{aligned} |\dot{x}_1(t) - \dot{x}_0(t)| &= |w(x_0(\cdot))(t) - \dot{x}_0(t)| = |\Pi(\dot{x}_0(t), F(x_0(t))) - \dot{x}_0(t)| \\ &= d(\dot{x}_0(t), F(x_0(t))) \leq \rho(t) \end{aligned} \quad (2-23)$$

Logo pela desigualdade de Gronwall aplicada à (2-23) tem-se

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_0(t)| &\leq |x_0(0) - r_0(x_0(0))| + \int_0^t \rho(s) ds \\ &\leq \delta + \int_0^t \rho(s) ds, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2-24)$$

Da condição de Lipschitz e Proposição 2.6 segue que

$$\begin{aligned} |\dot{x}_{k+1}(t) - \dot{x}_k(t)| &= |w(x_k(\cdot))(t) - w(x_{k-1}(\cdot))(t)| = d(\dot{x}_k(t), F(x_k(t))) \\ &\leq d(\dot{x}_k(t), F(x_{k-1}(t))) + l|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \\ &= l|x_k(t) - x_{k-1}(t)|. \end{aligned} \quad (2-25)$$

Integrando (2-25), obtém-se

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t |\dot{x}_{k+1}(s) - \dot{x}_k(s)| ds \right| &\leq \left| \int_0^t l|x_k(s) - x_{k-1}(s)| ds \right| \\ &= \left| \int_0^t l|x_k(s) - x_k(0) - x_{k-1}(s) + x_{k-1}(0)| ds \right| \\ &= \left| \int_0^t l \left| \int_0^s (\dot{x}_k(\tau) - \dot{x}_{k-1}(\tau)) d\tau \right| ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^t l \int_0^s |\dot{x}_k(\tau) - \dot{x}_{k-1}(\tau)| d\tau ds \right|. \end{aligned} \quad (2-26)$$

Assim, tem-se a seguinte desigualdade.

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq \delta \frac{(l|t|)^k}{k!} + \left| \int_0^t \frac{(l(|t| - |s|))^k}{k!} \rho(s) ds \right| \quad \forall k \geq 0. \quad (2-27)$$

De fato, para $k = 0$, a afirmação segue de (2-24). Suponha então que a desigualdade (2-27) é válida para $k - 1$, $k > 1$, isto é,

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \leq \delta \frac{(l|t|)^{k-1}}{(k-1)!} + \left| \int_0^t \frac{(l(|t| - |s|))^{k-1}}{(k-1)!} \rho(s) ds \right|. \quad (2-28)$$

Prova-se agora que continua sendo verdadeira para k .

Então, das desigualdades (2-25) e (2-28) tem-se que:

$$\begin{aligned}
 |x_{k+1}(t) - x_k(t)| &= \left| \int_0^t (\dot{x}_{k+1}(s) - \dot{x}_k(s)) ds \right| \\
 &\leq \int_0^t |\dot{x}_{k+1}(s) - \dot{x}_k(s)| ds \\
 &\leq \int_0^t l |x_k(s) - x_{k-1}(s)| ds \\
 &\leq \int_0^t l \left(\delta \frac{(l|s|)^{k-1}}{(k-1)!} + \left| \int_0^s \frac{(l(|s| - |\tau|))^{k-1}}{(k-1)!} \rho(\tau) d\tau \right| \right) ds \\
 &\leq \int_0^t d \left(\delta \frac{(l|s|)^k}{k!} + \left| \int_0^s \frac{(l(|s| - |\tau|))^k}{k!} \rho(\tau) d\tau \right| \right) \\
 &\leq \delta \frac{(l|t|)^k}{k!} + \left| \int_0^t \frac{(l(|t| - |s|))^k}{k!} \rho(s) ds \right|. \tag{2-29}
 \end{aligned}$$

Assim, (2-27) é verdadeira, $\forall k \geq 0$.

Agora, de (2-25) e (2-27) para $k \geq 1$ segue que

$$|\dot{x}_{k+1}(t) - \dot{x}_k(t)| \leq l \left(\delta \frac{(l|t|)^{k-1}}{(k-1)!} + \left| \int_0^t \frac{(l(|t| - |s|))^{k-1}}{(k-1)!} \rho(s) ds \right| \right). \tag{2-30}$$

Por (2-30), $\{\dot{x}_i(\cdot)\}_{k=0}^\infty$ é uma sequência de Cauchy no espaço $L_1([0, T], \mathbb{R}^n)$, e consequentemente esta converge para uma função $v_0(\cdot) \in L_1([0, T], \mathbb{R}^n)$. Além disso, de (2-30) segue que $\dot{x}_k(t)$ converge para $v_0(t)$ quase sempre.

Defina

$$r(x_0(\cdot))(t) = r(x_0(0)) + \int_0^t v_0(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Do fato que

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^k}{k!} \leq e^z, \quad z \leq 0;$$

e das desigualdades (2-24) e (2-27), segue que

$$|x_0(t) - x_k(t)| \leq \delta e^{l|t|} + \left| \int_0^t e^{l(|t| - |s|)} \rho(s) ds \right| = \xi(t). \tag{2-31}$$

Agora das desigualdades (2-23), (2-30) e (2-31) tem-se

$$|\dot{x}_0(t) - \dot{x}_k(t)| \leq l \xi(t) + \rho(t). \tag{2-32}$$

Segue da desigualdade triangular e de (2-31) que

$$\begin{aligned} |x_0(t) - r(x_0(\cdot))(t)| &\leq |x_0(t) - x_k(t)| + |x_k(t) - r(x_0(\cdot))(t)| \\ &\leq \xi(t) + |x_k(t) - r(x_0(\cdot))(t)| \end{aligned} \quad (2-33)$$

e de (2-32)

$$\begin{aligned} \left| \dot{x}_0(t) - \frac{d}{dt} r(x_0(\cdot))(t) \right| &\leq |\dot{x}_0(t) - \dot{x}_k(t)| + \left| \dot{x}_k(t) - \frac{d}{dt} r(x_0(\cdot))(t) \right| \\ &\leq l\xi(t) + \rho(t) + \left| \dot{x}_k(t) - \frac{d}{dt} r(x_0(\cdot))(t) \right| \end{aligned} \quad (2-34)$$

Para $k \rightarrow \infty$, nas desigualdades (2-33) e (2-34), obtém-se

$$|x_0(t) - r(x_0(\cdot))(t)| \leq \xi(t)$$

e

$$\left| \dot{x}_0(t) - \frac{d}{dt} r(x_0(\cdot))(t) \right| \leq l\xi(t) + \rho(t)$$

Se $x_0(\cdot) \in M \cap \Sigma(x_0, \tau)$ e $r_0(x(0)) = x_0(0)$, então pela construção temos que

$$x_0(\cdot) = x_1(\cdot) = \dots = x_k(\cdot) = \dots$$

Consequentemente, $r(x_0(\cdot)) = x_0(\cdot)$.

Como r_0 é contínua, segue do Lema 2.60, que a aplicação $I^k \circ J : M \rightarrow AC([0, T], \mathbb{R}^n)$ é contínua. Da desigualdade (2-30) segue que a sequência $I^k \circ J(x_0(\cdot))$ converge uniformemente em $x_0(\cdot)$ para $v(x_0(\cdot))$. Portanto, a aplicação $r : M \rightarrow AC([0, T], \mathbb{R}^n)$ é contínua. Por último segue do Lema 2.62 e da desigualdade (2-25) que $r(x_0(\cdot)) \in \Sigma(x_0, \tau)$. $\square$

Corolário 2.64 (Teorema de existência) *Seja F lipschitziana na inclusão diferencial (2-17), então para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$, existe uma solução de (2-17).*

Demonstração. Consideremos o conjunto M consistindo de uma função $z(t) \equiv 0$. Seja $r_0(x) = x_0 + x$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Então pelo Teorema 2.63, existe uma solução $x(\cdot) \in \Sigma(x_0, \tau)$ satisfazendo

$$|x(t)| \leq |x_0|e^{l|t|} + \left| \int_0^t e^{l(|t|-|s|)} d(0, F(0)) ds \right|$$

$\square$

Teoria dos Conjuntos Fuzzy

Este capítulo contém uma introdução a algumas definições e propriedades básicas da teoria de conjuntos fuzzy.

A noção de conjuntos fuzzy, introduzida por Zadeh em 1965, estende a noção de conjunto clássico no sentido de que a relação de pertinência de um elemento a um conjunto deixa de ser uma relação dicotômica, isto é, dado um subconjunto A de um conjunto universal X , um elemento $x \in X$, além das duas possibilidades, a saber, $x \in A$ ou $x \notin A$ pode ter outras. Por exemplo, o conjunto dos números naturais pequenos, isto é, $\mathbb{F} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é pequeno}\}$, não admite uma resposta objetiva.

A ideia de Zadeh foi enfraquecer a pertinência de um elemento num conjunto, criando a noção de “ grau de pertinência”. Assim, um dado elemento pode pertencer parcialmente a um conjunto dado. Por exemplo, considerando a função $u : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$, dada por $u(n) = \frac{1}{n}$ definindo o grau de pertinência a $\mathbb{F}$, tem-se que $5 \in \mathbb{F}$ com grau de pertinência $0,2$ e $20 \in \mathbb{F}$ com grau de pertinência $0,05$, ou $n \in \mathbb{F}$ com grau de pertinência $\frac{1}{n}$. Observa-se que o atributo pequeno para $x \in \mathbb{N}$ é subjetivo no sentido que se poderia ter uma infinidade de funções $u : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ definindo o grau de pertinência de cada elemento de $\mathbb{F}$.

Exemplos como o que foi apresentado no parágrafo anterior fazem parte das inumeráveis situações nas quais o significado de pertinência não está bem definido e portanto não sabemos dizer se um determinado elemento pertence ou não a um conjunto dado. Portanto, podemos falar que o grau de pertinência dependerá do tipo de problema do qual esteja-se fazendo referência. Para modelar matematicamente um conjunto com estas características, Zadeh introduz o conceito de conjunto fuzzy.

Definição 3.1 *Um subconjunto fuzzy $\mathbb{F}$ de X é um conjunto de pares ordenados $\mathbb{F} = \{(x, u(x)) : x \in X\}$, onde $u : X \rightarrow [0, 1]$ é uma função chamada grau de pertinência de x em $\mathbb{F}$, de modo que se $x \in X$, então $u(x)$ denota o grau de pertinência ao conjunto fuzzy. Assim, $u(x) = 0$ significará a não pertinência, $0 < u(x) < 1$ a pertinência parcial e $u(x) = 1$ a pertinência total.*

Exemplo 3.2 Deseja-se representar os pontos $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ próximos à reta $y = mx + b$, $m, b \in \mathbb{R}$. Define-se o conjunto fuzzy cuja relação de pertinência u é dada por $u(p) = \frac{1}{1 + d(p, l)}$, onde l é a reta $y = mx + b$ e $d(p, l)$ é a distância do ponto p à reta. Então $u(p) = 1$, se $p = (x, y)$ satisfaz a equação $y = mx + b$, isto é $p \in l$ e conforme o ponto p encontra-se mais longe da reta, a função de pertinência $u(p)$ se aproxima de zero.

Observação 3.3 Para efeito de simplificação de notação o conjunto fuzzy $\mathbb{F}$ será referenciado apenas através da função u que o caracteriza.

Exemplo 3.4 [3] Seja $\mathbb{F}$ o subconjunto fuzzy dos números reais bem maiores do que 1. Assim, $\mathbb{F} = \{(x, u(x)) : x \in X = \mathbb{R}\}$.

Sempre tem-se uma infinidade de escolhas para u :

$$1. \ u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1, \\ \frac{x-1}{x} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Observe-se que u é crescente, e além disso, $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 1$.

$$2. \ v(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1, \\ 1 - e^{-1000(x-1)} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Também caracteriza o conjunto $\mathbb{F}$.

Observa-se que $v(x) \leq u(x)$, para todo $x \in X$. Neste caso, diz-se que $v \subset u$.

Observação 3.5 Um conjunto $A \subset X$ pode ser identificado como um conjunto fuzzy através de sua função característica $\chi_A : X \rightarrow [0, 1]$, com

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A, \\ 1 & \text{se } x \in A. \end{cases}$$

Paralelamente à definição de conjunto fuzzy está a definição de conjunto nível de um conjunto fuzzy.

Definição 3.6 Seja $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ um conjunto fuzzy e $\alpha \in [0, 1]$. O conjunto α -nível de u é o conjunto

$$[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R} / u(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha > 0.$$

O suporte $[u]^0$ de u é o fecho na topologia de X da união de todos os α -níveis, isto é,

$$[u]^0 = \overline{\bigcup_{\alpha > 0} [u]^\alpha}.$$

Exemplo 3.7 Considerando o exemplo 3.2, onde $u(p)$ mede a distância de um ponto $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ à reta $l : y = mx + b$, tem-se por exemplo que:

$$[u]^{1/2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / d(l, p) \leq 1\}.$$

De fato, da Definição 3.6 e definição de $u(p)$, segue que

$$\begin{aligned} [u]^{1/2} &= \{p \in \mathbb{R}^2 / u(p) \geq \frac{1}{2}\} \\ &= \{p \in \mathbb{R}^2 / \frac{1}{1 + d(p, l)} \geq \frac{1}{2}\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / d(l, p) \leq 1\}. \end{aligned}$$

As operações de união, intersecção e complemento entre conjuntos fuzzy podem ser definidas em termos de seus graus de pertinência. O conjunto formado por todos os subconjuntos fuzzy de X será denotado por $\mathcal{F}(X)$.

Sejam u, v subconjuntos fuzzy de X , então a união $u \vee v$, a intersecção $u \wedge v$ e o complemento u^c são subconjuntos fuzzy em $\mathcal{F}(X)$, cujas funções de pertinência são definidas respectivamente por,

$$\begin{aligned} (u \vee v)(x) &= u(x) \vee v(x) := \max\{u(x), v(x)\}, \\ (u \wedge v)(x) &= u(x) \wedge v(x) := \min\{u(x), v(x)\} \\ u^c(x) &= 1 - u(x). \end{aligned}$$

Um conjunto fuzzy $u \in \mathcal{F}(X)$ é chamado “conjunto fuzzy normal”, se existe pelo menos um ponto $x_0 \in X$ tal que $u(x_0) = 1$, e será chamado de conjunto fuzzy convexo se

$$u(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq u(x_1) \wedge u(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0, 1]. \quad (3-1)$$

No desenvolvimento deste trabalho, os conjuntos α -níveis sempre serão considerados compactos e convexos.

Observação 3.8 Para os números fuzzy, isto é, conjuntos fuzzy definidos em $\mathbb{R}$, a fuzzy convexidade implica que os conjuntos α -níveis são intervalos.

Denota-se por E^n o espaço de todos os subconjuntos fuzzy $u \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem as seguintes propriedades:

1. u aplica $\mathbb{R}^n$ sobre $I = [0, 1]$.
2. $[u]^0$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$.
3. $[u]^\alpha$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ para todo $\alpha \in I$.

4. u é fuzzy convexo.

Um resultado que segue-se da caracterização dos conjuntos que pertencem a E^n é o seguinte.

Lema 3.9 [15] *Se u é fuzzy convexo, então $[u]^\alpha$ é convexo para cada $\alpha \in I$.*

A seguir enuncia-se o Teorema de Representação de Negoita - Ralescu o qual é muito importante nas demonstrações das propriedades das funções fuzzy, tais como mensurabilidade, integrabilidade, diferenciabilidade, etc.

Teorema 3.10 [15] *Se $\{A^\alpha / 0 \leq \alpha \leq 1\}$ é uma família de conjuntos compactos convexos e não vazios de $\mathbb{R}^n$ tal que*

1. $\overline{\bigcup_{0 < \alpha \leq 1} A^\alpha} \subset A^0$,
2. $A^{\alpha_2} \subset A^{\alpha_1}$ para $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$,
3. Se α_k é uma sequência não decrescente convergindo para α , $\alpha > 0$ com

$$A^\alpha = \bigcap_{k \geq 1} A^{\alpha_k},$$

então existe um $u \in E^n$ tal que

$$[u]^\alpha = A^\alpha \text{ para todo } 0 < \alpha \leq 1$$

e

$$[u]^0 = \overline{\bigcup_{0 < \alpha \leq 1} A^\alpha} \subset A^0.$$

Observação 3.11 *Se $u \in E^n$, então seus α -níveis satisfazem às condições 1, 2 e 3 do Teorema 3.10.*

Proposição 3.12 [15] *Se $A \in \mathcal{K}_C^n$, então $X_A \in E^n$.*

Define-se agora, a adição e multiplicação por escalar de conjuntos fuzzy em E^n , isto é, para $u, v \in E^n$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha \in I$,

$$[u + v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha, \quad (3-2)$$

e

$$[\lambda u]^\alpha = \lambda [u]^\alpha, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3-3)$$

Proposição 3.13 [15] E^n é fechado segundo as operações de adição (3-2) e multiplicação por um escalar (3-3).

Definição 3.14 Sejam $u, v \in E^n$, a distancia de Hausdorff fuzzy $D : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ entre u e v é definida por

$$D(u, v) = \sup\{d_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) : \alpha \in I\}.$$

Observação 3.15 Da Observação 2.33 e da Definição 3.14 segue que, D é uma métrica sobre E^n .

Observação 3.16 Na Definição 3.14 a métrica D , não pode ser definida pelo máximo. Para tal fim, considere o seguinte exemplo.

Exemplo 3.17 Sejam $u, v \in E^1$ e seus conjuntos α -níveis dados por

$$[u]^\alpha = [v]^\alpha = [0, 1] \text{ para } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2},$$

e

$$[u]^\alpha = \{0\}, [v]^\alpha = [0, 2(1 - \alpha)] \text{ para } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1,$$

assim

$$d_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) = \begin{cases} 0 & , \text{se } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1 - \alpha) & , \text{se } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Logo, $D(u, v) = 1$.

Das propriedades da métrica de Hausdorff, Proposição 2.35 segue que:

$$D(cu, cv) = |c| D(u, v), \quad (3-4)$$

$$D(u + w, v + w) = D(u, v), \quad (3-5)$$

$$D(u + w, v + r) \leq D(u, v) + D(w, r), \quad (3-6)$$

para todo $c > 0$, e todo $u, v, w, r \in E^n$.

Também, tem-se a definição de convergência de uma sequência de conjuntos $\{u_p\}$ em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ que convergem a $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 3.18 (D -convergência). Diz-se que u_p D -converge para u , $u_p \xrightarrow{D} u$, se

$$\lim_{p \rightarrow \infty^+} D(u_p, u) = 0.$$

Teorema 3.19 [23] (E^n, D) é um espaço métrico completo.

O Princípio de extensão de Zadeh para uma função $f : X \rightarrow Y$ tem por objetivo indicar como deve ser a imagem de um subconjunto fuzzy u de X por meio de f . É de se esperar que esta imagem seja um subconjunto fuzzy de Y .

Definição 3.20 (Princípio de extensão de Zadeh) *Sejam X e Y conjuntos não vazios e $f : X \rightarrow Y$, então define-se o Princípio de extensão de Zadeh como a aplicação*

$$\tilde{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$$

onde

$$\tilde{f}(u)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} u(x) & , \text{ se } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & , \text{ se } f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

onde $f^{-1}(y) = \{x \in X / f(x) = y\}$.

Exemplo 3.21 *Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2$ e $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ um número fuzzy triangular simétrico com*

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-a|}{\delta} & , \text{ se } |x-a| \leq \delta, \\ 0 & , \text{ se } |x-a| > \delta. \end{cases}$$

Logo, fazendo uso do Princípio de extensão de Zadeh, tem-se

$$\tilde{f}(u)(y) = \begin{cases} u(\sqrt{y}) & , \text{ se } y \geq 0, \\ 0 & , \text{ se } y < 0, \end{cases}$$

isto é,

$$\tilde{f}(u)(y) = \begin{cases} 1 - \frac{|\sqrt{y}-a|}{\delta} & , \text{ se } |\sqrt{y}-a| \leq \delta \text{ e } y \geq 0, \\ 0 & , \text{ se } y < 0. \end{cases}$$

Exemplo 3.22 *Para a multiplicação de $u \in \mathcal{F}(X)$ por um escalar diferente de zero λ , o Princípio de extensão de Zadeh é aplicado à função $f : X \rightarrow X$ definida por $f(x) = \lambda x$, para obter*

$$(\lambda u)(x) = \begin{cases} u(\frac{x}{\lambda}) & , \text{ se } \lambda \neq 0, \\ X_{\{0\}} & , \text{ se } \lambda = 0. \end{cases} \quad (3-7)$$

para todo $x \in X$.

Sejam os conjuntos X_1, X_2 e Y não vazios. O Princípio de extensão de Zadeh pode ser generalizado para a função $f : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$. Define-se o Princípio de extensão de Zadeh como a aplicação

$$\tilde{f} : \mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$$

onde

$$\tilde{f}(u_1, u_2)(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, x_2) \in f^{-1}(y)} u_1(x_1) \wedge u_2(x_2) & , \text{ se } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & , \text{ se } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Aqui $f^{-1}(y) = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 : f(x_1, x_2) = y\}$.

Exemplo 3.23 Para a adição de dois conjuntos fuzzy $u, v \in \mathcal{F}(X)$, o Princípio de extensão de Zadeh é aplicado à função $f : X \times X \rightarrow X$ definida por $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, para obter

$$(u + v)(x) = \sup_{x_1 + x_2 = x} u(x_1) \wedge u(x_2), \quad (3-8)$$

para todo $x \in X$.

3.1 O Cálculo diferencial e integral de funções fuzzy

Sejam X, Y subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.24 Seja $f : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$, então f é chamada função ou aplicação fuzzy.

Observação 3.25 Deve-se notar, entretanto, que a função fuzzy não é necessariamente definida pelo Princípio de extensão de Zadeh. Pode ser qualquer função que aplica um conjunto fuzzy $A \in \mathcal{F}(X)$ num conjunto fuzzy $B := f(A) \in \mathcal{F}(Y)$.

Um importante resultado do Princípio de extensão é a caracterização dos níveis da imagem de um conjunto fuzzy, através de uma função contínua f .

Teorema 3.26 [3] Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, então a extensão de Zadeh $\tilde{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é bem definida e

$$[\tilde{f}(u)]^\alpha = f([u]^\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (3-9)$$

Observação 3.27 A igualdade (3-9) continua sendo válida se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Seja $u \in E^1$ tal que $[u]^\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona crescente então do Teorema 3.26 obtém-se que

$$[\tilde{f}(u)]^\alpha = f([a_1(\alpha), a_2(\alpha)]) = [f(a_1(\alpha)), f(a_2(\alpha))].$$

Teorema 3.28 Se $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, e $u, v \in E^1$, então

$$[\tilde{f}(u, v)]^\alpha = f([u]^\alpha, [v]^\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

onde

$$f([u]^\alpha, [v]^\alpha) = \{f(x_1, x_2) / x_1 \in [u]^\alpha, x_2 \in [v]^\alpha\}$$

Exemplo 3.29 Sejam $u, v \in E^1$ com os α -níveis dados por: $[u]^\alpha = [u_1^\alpha, u_2^\alpha]$ e $[v]^\alpha = [v_1^\alpha, v_2^\alpha]$, então a multiplicação fuzzy de u por v é definida através de seus α -níveis por

$$[u.v]^\alpha = [\min\{u_1^\alpha v_1^\alpha, u_1^\alpha v_2^\alpha, u_2^\alpha v_1^\alpha, u_2^\alpha v_2^\alpha\}, \max\{u_1^\alpha v_1^\alpha, u_1^\alpha v_2^\alpha, u_2^\alpha v_1^\alpha, u_2^\alpha v_2^\alpha\}]$$

A unicidade do produto segue do Teorema 3.10.

A seguir, seguem resultados de mensurabilidade e integrabilidade de uma função fuzzy. Seja $K_C^n(\mathbb{R}^n)$ como no Capítulo 2 que denota a família de todos os subconjuntos não vazios compactos e convexos de $\mathbb{R}^n$ e $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definição 3.30 A aplicação $F : T \rightarrow E^n$ é chamada contínua num ponto $t_0 \in I$, se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\lambda > 0$ tal que $D(F(t), F(t_0)) < \varepsilon$, sempre que $|t - t_0| < \lambda$, $t \in I$. A aplicação $F : T \rightarrow E^n$ é chamada contínua em T se é contínua para todo $t_0 \in T$.

Definição 3.31 A aplicação $F : T \rightarrow E^n$ diz-se Lipschitz contínua, se existir uma constante $K > 0$ (constante de Lipschitz), tal que para quaisquer $t_1, t_2 \in T$, tem-se a seguinte desigualdade :

$$D(F(t_2), F(t_1)) \leq K|t_1 - t_2|.$$

Definição 3.32 Dizemos que a aplicação $F : T \rightarrow E^n$ é fortemente mensurável se para todo $\alpha \in [0, 1]$ a multifunção $F_\alpha : T \rightarrow \mathcal{K}^n$ definida por

$$F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$$

é (Lebesgue) mensurável, com o conjunto $\mathcal{K}^n$ munido da topologia gerada pela métrica de Hausdorff.

Lema 3.33 [13] Se $F : T \rightarrow E^n$ é contínua com respeito à métrica D , então F é fortemente mensurável.

Se $F : T \rightarrow E^1$ então $F_\alpha(t)$ é um intervalo compacto, isto é, $F_\alpha(t) = [\lambda^\alpha(t), \mu^\alpha(t)]$. Assim tem-se o seguinte resultado:

Lema 3.34 [13] Seja $F : T \rightarrow E^1$ fortemente mensurável e denotando $[F(t)]^\alpha = [\lambda^\alpha(t), \mu^\alpha(t)]$ para $\alpha \in [0, 1]$, então λ^α e μ^α são mensuráveis.

Definição 3.35 A aplicação $F : T \rightarrow E^n$ é chamada integravelmente limitada sobre T , se existe uma função Lebesgue integrável $k : T \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\|x\| \leq k(t)$ para todo $x \in F_0(t)$, $t \in T$.

Definição 3.36 *Seja $F : T \rightarrow E^n$. A integral de F sobre T , denotada por $\int_T F(t)dt$ ou $\int_a^b F(t)dt$, é definida através de seus α -níveis pela equação*

$$\begin{aligned} \left[\int_T F(t)dt \right]^\alpha &= \int_T F_\alpha(t)dt \\ &= \left\{ \int_T f(t)/f : T \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ é uma seleção mensurável de } F_\alpha(t) \right\} \end{aligned}$$

para qualquer $\alpha \in [0,1]$. Uma aplicação fortemente mensurável e integravelmente limitada $F : T \rightarrow E^n$, é dita integrável sobre T , se $\int_T F(t)dt \in E^n$.

Para os resultados que seguem, as integrais $\int_T F(t)dt$, $\int_T f(t)dt$, serão denotadas por $\int_T F$, $\int_T f$.

O seguinte teorema devido a Puri e Ralescu, mostra que certas condições tornam as aplicações integráveis.

Teorema 3.37 [15] *Se a aplicação $F : T \rightarrow E^n$ é fortemente mensurável e integravelmente limitada então F é integrável sobre T .*

Observação 3.38 *Se $F : T \rightarrow E^1$ é integrável então pelo Lema 3.34 segue que $\int_T F$ é obtido pela integração dos α -níveis, isto é*

$$\left[\int_T F \right]^\alpha = \left[\int_T \lambda^\alpha, \int_T \mu^\alpha \right],$$

onde $[F(t)]^\alpha = [\lambda^\alpha, \mu^\alpha]$, $\alpha \in [0,1]$.

Corolário 3.39 [13] *Se a aplicação $F : T \rightarrow E^n$ é contínua, então ela é integrável.*

Definição 3.40 *A aplicação $F : T \rightarrow E^n$ é chamada absolutamente contínua sobre T , se existe uma aplicação integrável $G : T \rightarrow E^n$ tal que*

$$F(t) = F(t_0) + \int_{t_0}^t G(s)ds, \text{ para todo } t_0, t \in T.$$

A seguir, considera-se algumas propriedades da integral.

Teorema 3.41 [13] *Seja $F : T \rightarrow E^n$ integrável e $c \in T$. Então*

$$\int_a^b F = \int_a^c F + \int_c^b F.$$

Corolário 3.42 [13] Se $F : T \rightarrow E^n$ é contínua, então $G(t) = \int_a^t F$ é Lipschitz contínua em T .

Teorema 3.43 [13] Sejam $F, G : T \rightarrow E^n$ integráveis e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

1. $\int_T (F + G) = \int_T F + \int_T G$.
2. $\int_T \lambda F = \lambda \int_T F$.
3. $D(F, G)$ é integrável.
4. $D\left(\int_T F, \int_T G\right) \leq \int_T D(F, G)$.

Teorema 3.44 [13] Se $F : T \rightarrow E^n$ é integrável. Então a função real $\phi : T \times I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(t, \alpha) = \text{diâmetro} \left[\int_a^t F \right]^\alpha$$

é não decrescente em $t \in T$ e não crescente para $\alpha \in I = [0, 1]$.

Exemplo 3.45 Sejam $F : T \rightarrow E^n$ com $F(t) = f(t)u$ onde $u \in E^n$ e $f : T \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função integrável. Então

$$\int_a^t F = \left(\int_a^t f \right) u.$$

Segue de $[F(t)]^\alpha = [f(t)u]^\alpha = f(t)[u]^\alpha$, que F é fortemente mensurável e além disso, F é fortemente limitada por $g(t) = af(t)$ onde $a = \|[u]^0\| = \max[u]^0$. Assim do Teorema 3.37 segue que F é integrável e do Exemplo 2.51 tem-se que

$$\begin{aligned} \left[\int_a^t F(\tau) d\tau \right]^\alpha &= \int_a^t F_\alpha(\tau) d\tau \\ &= \int_a^t [f(\tau)u]^\alpha d\tau \\ &= \int_a^t f(\tau) [u]^\alpha d\tau \\ &= \left(\int_a^t f(\tau) d\tau \right) [u]^\alpha. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_a^t F = \left(\int_a^t f \right) u.$$

Considerando a definição da diferença de Hukuhara (H-diferença) tem-se a definição de diferenciabilidade devido a Puri e Ralescu.

Definição 3.46 A aplicação $F : T \rightarrow E^n$ é diferenciável em $t_0 \in T$, se existe $F'(t_0) \in E^n$ tal que os limites

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0 + t) - F(t_0)}{h} \quad e \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0) - F(t_0 - h)}{h}$$

existem e são iguais a $F'(t_0)$.

Nos pontos extremos de T , consideram-se somente as derivadas laterais em um dos extremos.

Observação 3.47 Da Definição 3.46, segue que, se F é diferenciável então a multifunção F_α é Hukuhara diferenciável para todo $\alpha \in [0, 1]$ e

$$DF_\alpha(t) = [F'(t)]^\alpha. \quad (3-10)$$

Aqui, $DF_\alpha(t)$ denota a derivada de Hukuhara de F_α .

A recíproca nem sempre é verdadeira, desde que a existência da H -diferença $[x]^\alpha - [y]^\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$, não implica a existência da H -diferença $x - y$.

Teorema 3.48 [13] Seja $F : T \rightarrow E^1$ diferenciável, com $F_\alpha(t) = [f_\alpha(t), g_\alpha(t)]$, $\alpha \in [0, 1]$. Então f_α e g_α são diferenciáveis e

$$[F'(t)]^\alpha(t) = [f'_\alpha(t), g'_\alpha(t)].$$

Teorema 3.49 [15] Se $F : T \rightarrow E^n$ é diferenciável sobre T , então para cada $\alpha \in [0, 1]$ a função real $\phi_\alpha : T \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi_\alpha(t) = \text{diâmetro} \left[\int_a^t F(t) \right]^\alpha$$

é não decrescente sobre T .

Das propriedades de D , equações (3-4)-(3-6), seguem os resultados.

Teorema 3.50 [13] Sejam $F, G : T \rightarrow E^1$ diferenciáveis sobre T e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

1. $(F + G)'(t) = F'(t) + G'(t)$.
2. $(\lambda F)'(t) = \lambda F'(t)$.

Teorema 3.51 [15] Seja $F : T \rightarrow E^1$ contínua. Então para todo $t \in T$, a integral $G(t) = \int_a^t F$ é diferenciável e $G'(t) = F(t)$.

Teorema 3.52 [15] *Seja $F : T \rightarrow E^1$ diferenciável e suponha que a derivada F' é integrável sobre T . Então para cada $s \in T$ temos*

$$F(t) = F(a) + \int_a^t F'.$$

Exemplo 3.53 *Seja $F : T \rightarrow E^1$ com $F(t) = f(t)u$ onde $u \in E^n$ e $f : T \rightarrow \mathbb{R}^+$ crescente e de classe C^1 . Então F é derivável e $F'(t) = f'(t)u$.*

De fato, defina $G(t) = f'(t)u$, então,

- *G existe, pois f é de classe C^1 .*
- *G é contínua, pois para todo $t \in T$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|t - s| < \delta$, então da definição de D e do Teorema 2.40 segue que*

$$\begin{aligned} D(G(t), G(s)) &= D(f'(t)u, f'(s)u) \\ &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d_H([f'(t)u]^\alpha, [f'(s)u]^\alpha) \\ &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d_H(f'(t)[u]^\alpha, f'(s)[u]^\alpha) \\ &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max_{\|x\|=1} |S_{f'(t)[u]^\alpha}(x) - S_{f'(s)[u]^\alpha}(x)| \\ &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max_{\|x\|=1} |(f'(t) - f'(s))S_{[u]^\alpha}(x)| \\ &= |f'(t) - f'(s)| \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max_{\|x\|=1} |S_{[u]^\alpha}(x)| \\ &\leq |f'(t) - f'(s)| \sup_{a \in [u]^0} |a| \end{aligned}$$

Como f é de classe C^1 segue que $D(G(t), G(s)) \leq \varepsilon$. Portanto $G(t)$ é contínua em T . Logo, pelo Corolário 3.39 G é integrável.

Do Exemplo 3.45, segue que

$$\int_a^t G = \left(\int_a^t f'(s)ds \right) u = (f(t) - f(a))u = F(t) - F(a)$$

Assim,

$$F(t) = F(a) + \left(\int_a^t f'(s)ds \right) u = F(a) + \left(\int_a^t f'(s)uds \right) = F(a) + \left(\int_a^t G(s)ds \right).$$

Segue do Teorema 3.51 que F é diferenciável e $F'(t) = f'(t)u$.

3.2 Equações Diferenciais Fuzzy

As equações diferenciais têm sido utilizadas para modelar os mecanismos evolutivos de importantes processos dinâmicos em diversos campos de aflições. O tipo mais básico é a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3-11)$$

Uma solução de (3-11) é uma função diferenciável $x = x(t)$ satisfazendo (3-11) para todo $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$. Geralmente uma solução correspondente a um problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)), \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (3-12)$$

A existência e unicidade de uma solução do problema de valor inicial (3-12) é importante não só matematicamente, mas também para se obter a resposta ao problema proposto. Quando f é contínua, resolver o problema de valor inicial (3-12) é equivalente a resolver a equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x(s)) ds$$

para uma função de classe C^1 .

As equações diferenciais muitas vezes representam uma idealização de situações reais onde a imprecisão poderá estar presente no fenômeno. Equações diferenciais estocásticas tem sido utilizado para incorporar os efeitos de flutuações aleatórias. No entanto, dados vagos devido à incerteza requer a introdução de outras teorias, tais como inclusão diferencial, equações diferenciais fuzzy, ou ainda, inclusão diferencial fuzzy.

Para o contexto fuzzy, interpreta-se o lado direito do (3-11) como uma aplicação $f : \mathbb{R}^+ \times E^n \rightarrow E^n$ com as soluções tendo valores $x(t) \in E^n$ para todo t . No que segue, sempre usa-se a métrica D em E^n e a derivada de Hukuhara.

Exemplo 3.54 *Seja $a \in E^1$ cujos conjuntos α -níveis $[a]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ para todo $\alpha \in I = [0, 1]$ e suponha que a solução $x : [0, T] \rightarrow E^n$ da equação diferencial fuzzy*

$$\dot{x}(t) = ax, \quad (3-13)$$

tem conjuntos α -níveis $[x(t)]^\alpha = [x_1^\alpha(t), x_2^\alpha(t)]$ para todo $\alpha \in I$ e $t \in [0, T]$.

Do Teorema 3.48 segue que

$$[\dot{x}(t)]^\alpha = [\dot{x}_1^\alpha(t), \dot{x}_2^\alpha(t)]$$

para todo $\alpha \in I$ e $t \in [0, T]$. Pelo Princípio de extensão de Zadeh, os conjuntos fuzzy $f(x(t)) = ax(t)$ tem conjuntos nível

$$[ax(t)]^\alpha = [\min\{a_1^\alpha x_1^\alpha(t), a_1^\alpha x_2^\alpha(t), a_2^\alpha x_1^\alpha(t), a_2^\alpha x_2^\alpha(t)\}, \max\{a_1^\alpha x_1^\alpha(t), a_1^\alpha x_2^\alpha(t), a_2^\alpha x_1^\alpha(t), a_2^\alpha x_2^\alpha(t)\}]$$

para todo $\alpha \in I$ e $t \in [0, T]$. Assim, a equação diferencial fuzzy (3-13) é equivalente ao sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \dot{x}_1^\alpha(t) = \min\{a_1^\alpha x_1^\alpha(t), a_1^\alpha x_2^\alpha(t), a_2^\alpha x_1^\alpha(t), a_2^\alpha x_2^\alpha(t)\}, \\ \dot{x}_2^\alpha(t) = \max\{a_1^\alpha x_1^\alpha(t), a_1^\alpha x_2^\alpha(t), a_2^\alpha x_1^\alpha(t), a_2^\alpha x_2^\alpha(t)\}. \end{cases} \quad (3-14)$$

para todo $\alpha \in I$.

Exemplo 3.55 Para $a = X_{\{-1\}} \in E^1$ a equação diferencial (3-13) torna-se

$$\dot{x}(t) = -x.$$

Logo o sistema (3-14) reduz-se a

$$\begin{cases} \dot{x}_1^\alpha(t) = -x_2^\alpha(t), \\ \dot{x}_2^\alpha(t) = -x_1^\alpha(t), \end{cases} \quad (3-15)$$

para todo $\alpha \in I$. Seja $x_0 \in E^1$ um valor inicial com $[x_0]^\alpha = [x_{01}^\alpha, x_{02}^\alpha]$. Logo para todo $\alpha \in I$, uma solução de sistema (3-15) é dado por

$$\begin{aligned} x_1^\alpha(t) &= \frac{1}{2}(x_{01}^\alpha - x_{02}^\alpha)e^t + \frac{1}{2}(x_{01}^\alpha + x_{02}^\alpha)e^{-t}, \\ x_2^\alpha(t) &= \frac{1}{2}(x_{02}^\alpha - x_{01}^\alpha)e^t + \frac{1}{2}(x_{01}^\alpha + x_{02}^\alpha)e^{-t}. \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in I$ e $t \geq 0$.

Assim para $x_0 = X_{\{c_0\}}$ a solução

$$x(t) = X_{\{c_0 e^{-t}\}} \rightarrow X_{\{0\}} \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Porém, quando $[x_0]^\alpha = [\alpha - 1, 1 - \alpha]$ para todo $\alpha \in I$, a solução tem conjuntos α -níveis

$$[x(t)]^\alpha = [(\alpha - 1)e^t, (1 - \alpha)e^t] = (1 - \alpha)e^t[-1, 1]$$

para todo $\alpha \in I$ e $t \geq 0$.

Em particular,

$$\text{diâmetro}[x(t)]^\alpha = 2(1 - \alpha)e^t,$$

assim a solução torna-se mais difusa quando o tempo cresce.

Considere o problema de valor inicial fuzzy,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= H(t, x(t)), \\ x(0) &= x_0 \in E^n. \end{cases} \quad (3-16)$$

onde $I = [0, b]$, $b > 0$ e $H : \mathbb{R} \times E^n \rightarrow E^n$.

Lema 3.56 [15] *Seja $H : \mathbb{R} \times E^n \rightarrow E^n$ contínua. A aplicação $x : I \rightarrow E^n$ é solução de (3-16) se e somente se é contínua e satisfaz a equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t H(s, x(s)) ds, \quad t \in I.$$

Um teorema que garante a existência e unicidade de soluções de uma equação diferencial fuzzy é o seguinte.

Teorema 3.57 [15] *Seja $H : \mathbb{R} \times E^n \rightarrow E^n$ contínua e lipschitziana na segunda variável, isto é, existe $k > 0$ tal que*

$$D(H(t, x), H(t, y)) \leq kD(x, y)$$

para todo $t \in I$, $x, y \in E^n$. Então o problema de valor inicial (3-16) tem solução única em I .

Exemplo 3.58 *Sejam $A, B : I \rightarrow E^1$ continuas, $H(t, x) = A(t)x + B(t)$, onde a multiplicação em E^1 é dado pelo Princípio de extensão de Zadeh. Se $[A(t)]^\alpha = [a_1^\alpha(t), a_2^\alpha(t)]$ e $[x]^\alpha = [x_1^\alpha, x_2^\alpha]$ então*

$$[A(t)x]^\alpha = [\min\{a_1^\alpha(t)x_1^\alpha, a_1^\alpha(t)x_2^\alpha, a_2^\alpha(t)x_1^\alpha, a_2^\alpha(t)x_2^\alpha\}, \max\{a_1^\alpha(t)x_1^\alpha, a_1^\alpha(t)x_2^\alpha, a_2^\alpha(t)x_1^\alpha, a_2^\alpha(t)x_2^\alpha\}]$$

Supor além disso, que as funções a_1^α e a_2^α são limitadas sobre I por alguma constante independente de α .

H satisfaz as condições do teorema (3.57) e portanto o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x + B(t), \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

tem solução única sobre I .

Teorema de Averaging para Inclusões Diferenciais Fuzzy

Neste capítulo estuda-se o método de averaging para inclusões diferenciais fuzzy. Mas, primeiramente introduz-se a definição de multifunção fuzzy, e algumas propriedades destas, como mensurabilidade, continuidade e integrabilidade. Posteriormente define-se o conceito de inclusão diferencial fuzzy o qual segue a ideia similar de inclusão diferencial definida no Capítulo 2. As definições e teoremas poderão ser encontrados em [25] e [24].

4.1 Multifunções Fuzzy

Inicia-se esta seção definindo o espaço $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}^n(E^n)$ formado pelos subconjuntos F do espaço E^n , tal que, para qualquer $\alpha \in I = [0, 1]$, o conjunto dos α -níveis dos elementos de F é um conjunto compacto convexo, no espaço $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}^n$.

Neste espaço define-se as operações de soma e multiplicação por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definição 4.1 *A soma de dois subconjuntos F e G no espaço $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}^n(E^n)$ é o conjunto*

$$F + G = \{f + g / f \in F, g \in G\}.$$

Definição 4.2 *O produto por escalar do conjunto $F \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}^n(E^n)$ por $\lambda \in \mathbb{R}$ é o conjunto*

$$G = \lambda F = \{g = \lambda f / f \in F\}.$$

Lema 4.3 [24] *Se $F, G \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}^n(E^n)$, então $F + G \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}^n(E^n)$.*

Lema 4.4 [24] *Se $F \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}^n(E^n)$, então $\lambda F \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}^n(E^n)$.*

Dos Lemas 4.3 e 4.4 segue-se o seguinte resultado.

Lema 4.5 [24] *Para quaisquer conjuntos $F, G, H \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, cumpre-se as seguintes propriedades:*

1. $F + G = G + F$.
2. $F + (G + H) = (F + G) + H$.
3. Existe o elemento nulo $\{\widehat{0}\}$: $F + \{\widehat{0}\} = F$.
4. No caso geral, o conjunto $F \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}^n$ tem um elemento inverso, em relação à operação de soma algébrica dos conjuntos.
5. $\alpha(\beta F) = (\alpha\beta)F$.
6. $1 \cdot F = F$.
7. $\alpha(F + G) = \alpha F + \alpha G$.
8. Se $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ e $F \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}^n(E^n)$ então $(\alpha + \beta)F = \alpha F + \beta F$. Caso contrário $(\alpha + \beta)F \subset \alpha F + \beta F$.

Neste capítulo considera-se $\widehat{0}$ como a aplicação fuzzy definida por $\widehat{0}(y) = 0$, se $y \neq 0$ e $\widehat{0}(0) = 1$.

Definição 4.6 Define-se a distância entre dois conjuntos $A, B \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}^n(E^n)$, como a quantidade

$$d(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} D(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} D(a, b) \right\}.$$

Como consequência a distância de um elemento $x \in E^n$ ao conjunto $A \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}^n(E^n)$ é denotada por:

$$\theta(x, A) = \min_{f \in F} D(x, f).$$

Definição 4.7 A aplicação $F : I \rightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{C}}^n(E^n)$ é chamada uma multifunção fuzzy.

Definição 4.8 A multifunção fuzzy $F : I \rightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{C}}^n(E^n)$ é chamada mensurável em I se o conjunto $\{t \in I : F(t) \cap G \neq \emptyset\}$ é mensurável para todo $G \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}^n(E^n)$.

Definição 4.9 A multifunção fuzzy $F : I \rightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{C}}^n(E^n)$ é chamada contínua num ponto $t_0 \in I$, se para qualquer $\varepsilon > 0$ existir $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tal que $d(F(t), F(t_0)) < \varepsilon$, sempre que $|t - t_0| < \delta$, $t \in I$. A multifunção fuzzy $F : I \rightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{C}}^n(E^n)$ é chamada contínua em I , se é contínua em todo ponto $t_0 \in I$.

Definição 4.10 A aplicação $f : I \rightarrow E^n$ é chamada seleção de uma multifunção fuzzy $F : I \rightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{C}}^n(E^n)$, se $f(t) \in F(t)$ para quase todo $t \in I$.

Observação 4.11 Como $F(t) \neq \emptyset$, então existe $f(t)$, $\forall t \in I$.

Define-se a integral de $F : I \rightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{C}}^n(E^n)$ sobre I :

$$\int_I F(t)dt = \left\{ \int_I f(t)dt : f(t) \in F(t) \text{ quase sempre em } I \right\}$$

onde $t \in I$.

4.2 Inclusão Diferencial Fuzzy

Considere a inclusão diferencial fuzzy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & \in F(t, x), \\ x(t_0) & = x_0, \end{cases} \quad (4-1)$$

onde $t \in I$ é tempo, $x \in G \subset E^n$ é a variável estado, as condições iniciais $t_0 \in I$, $x_0 \in G$ e $F : I \times G \rightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{C}}^n(E^n)$ é uma multifunção fuzzy.

Definição 4.12 *Uma função absolutamente contínua $x(t)$ com $x(t_0) = x_0$, é chamada uma solução da inclusão diferencial (4-1) se:*

1. $x(t) \in G$ para todo $t \in I$;
2. $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$ quase sempre sobre I .

Teorema 4.13 [24] *Seja a multifunção fuzzy $F : I \times G \rightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{C}}^n(E^n)$ satisfazendo as seguintes condições:*

- (i) $F(\cdot, x)$ é contínua sobre I .
- (ii) $F(\cdot, x)$ satisfaz a condição de Lipschitz com constante $K > 0$, i.e., para todo $(t, x), (t, y) \in I \times G$, a seguinte desigualdade cumpre-se:

$$d(F(t, x), F(t, y)) \leq KD(x, y);$$

- (iii) *Existe uma aplicação absolutamente contínua $y(\cdot)$, com $y(t_0) = y_0$, tal que $D(y(t), x_0) \leq b$ e $\theta(\dot{y}(t), F(t, y(t))) \leq \eta(t)$, para todo t : $|t - t_0| \leq a$, onde a função $\eta(t)$ é Lebesgue integrável.*

Então, existe uma solução $x(t)$ da inclusão diferencial fuzzy (4-1) sobre o intervalo $[t_0, t_0 + \rho]$ tal que

$$D(x(t), y(t)) \leq r(t),$$

onde $r(t) = r_0 e^{k(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{k(t-s)} \eta(s) ds$, $r_0 = D(x_0, y_0)$, $\rho = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$,
 $M = \max_{(t,x) \in I \times G} d(F(t, x), \{\hat{0}\})$.

4.3 Um Teorema de Averaging para Inclusões Diferenciais Fuzzy

Nesta seção enuncia-se e demonstra-se uma versão do teorema de Averaging para inclusões diferenciais fuzzy[25].

Considera-se a inclusão diferencial fuzzy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in \varepsilon F(t, x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (4-2)$$

onde $t \in \mathbb{R}^+$ é a variável tempo, $x \in G \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}^n(E^n)$ é a variável estado, $\varepsilon > 0$ é um número pequeno e $F : \mathbb{R}^+ \times E^n \rightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{C}}^n(E^n)$ é uma multifunção fuzzy.

À inclusão diferencial (4-2), associa-se a seguinte inclusão diferencial fuzzy

$$\begin{cases} \dot{\xi} \in \varepsilon \bar{F}(\xi), \\ \xi(0) = x_0, \end{cases} \quad (4-3)$$

onde

$$\bar{F}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t, x) dt \quad (4-4)$$

A seguir, o resultado que relaciona as soluções da inclusão diferencial fuzzy (4-2) com a solução da inclusão diferencial fuzzy (4-3), o qual é conhecido como Teorema de Averaging para inclusões diferenciais fuzzy.

Teorema 4.14 *Sejam $Q = \{(t, x) / t \in \mathbb{R}^+, x \in G \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}^n(E^n)\}$ e $F : Q \rightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{C}}^n(E^n)$ uma multifunção fuzzy tal que:*

- (i) *$F(t, x)$ é contínua, uniformemente limitada com constante M e satisfaz a condição de Lipschitz em x com constante λ , i.e.,*

$$|F(t, x)| = d(F(t, x), \{\emptyset\}) \leq M, \text{ e } d(F(t, x), F(t, y)) \leq \lambda D(x, y).$$

- (ii) *Existe o limite (4-4) uniformemente com respeito a x no domínio G .*

- (iii) *Para qualquer $x_0 \in G' \subset G$ e $t \in \mathbb{R}^+$, as soluções da inclusão (4-3), juntamente com uma ρ -vizinhança pertencem ao domínio G .*

Então, para qualquer $\eta \in]0, \rho]$ e $L > 0$, existe $\varepsilon^0(\eta, L) > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in]0, \varepsilon^0]$ e $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ as seguintes afirmações são verdadeiras.

- a) *Para qualquer solução $\xi(t)$ da inclusão (4-3) existe uma solução $x(t)$ da inclusão (4-2) tal que:*

$$D(x(t), \varepsilon(t)) \leq \eta; \quad (4-5)$$

b) Para qualquer solução $x(t)$ da inclusão (4-2) existe uma solução $\xi(t)$ da inclusão (4-3) tal que a desigualdade (4-5) é válida.

Demonstração. De fato, da condição (ii) do teorema, temos que para qualquer $\delta > 0$ é possível encontrar $T(\delta) > 0$ tal que para todo $T > T(\delta)$, tem-se

$$d\left(\bar{F}(x), \frac{1}{T} \int_0^T F(t, x) dt\right) < \delta.$$

Logo, da definição de $d(\cdot, \cdot)$, propriedades de $D(\cdot, \cdot)$, do Teorema 3.43 e escolhendo $T > T(\delta)$, obtém-se

$$\begin{aligned} |\bar{F}(x)| = d\left(\bar{F}(x), \{\hat{0}\}\right) &\leq d\left(\bar{F}(x), \frac{1}{T} \int_0^T F(t, x) dt\right) + d\left(\frac{1}{T} \int_0^T F(t, x) dt, \{\hat{0}\}\right) \\ &\leq \delta + \frac{1}{T} \int_0^T d\left(F(t, x), \{\hat{0}\}\right) dt \\ &\leq \delta + M. \end{aligned}$$

Por outro lado;

$$\begin{aligned} d(\bar{F}(x), \bar{F}(y)) &\leq d\left(\bar{F}(x), \frac{1}{T} \int_0^T F(t, x) dt\right) + d\left(\frac{1}{T} \int_0^T F(t, x) dt, \frac{1}{T} \int_0^T F(t, y) dt\right) \\ &\quad + d\left(\frac{1}{T} \int_0^T F(t, y) dt, \bar{F}(y)\right) \\ &\leq 2\delta + \frac{1}{T} \int_0^T d(F(t, x), F(t, y)) dt \\ &\leq 2\delta + \frac{1}{T} \int_0^T \lambda D(x, y) dt \\ &\leq 2\delta + \lambda D(x, y). \end{aligned}$$

Como δ é escolhido arbitrariamente, então, quando $\delta \rightarrow 0$ tem-se que

$$|\bar{F}(x)| \leq M, \quad e \quad d(\bar{F}(x), \bar{F}(y)) \leq \lambda D(x, y). \quad (4-6)$$

Portanto, segue de (4-6) que a multifunção fuzzy $\bar{F}(x)$ é uniformemente limitada com constante M e satisfaz a condição de Lipschitz com constante λ .

Agora, prova-se a afirmação **a)** do teorema. Para isso, faz-se a divisão do intervalo $[0, L\varepsilon^{-1}]$ em subintervalos com pontos $t_i = \frac{Li}{m\varepsilon}$, $i = 0, 1, \dots, m \in \mathbb{N}$.

Seja $\xi(t)$ a solução da inclusão (4-3). Então existe uma seleção mensurável $v(t)$ da multifunção fuzzy $\bar{F}(\xi(t))$ tal que

$$\xi(t) = \xi(t_i) + \varepsilon \int_{t_i}^t v(s) ds, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad \xi(t_0) = x_0. \quad (4-7)$$

Considere agora a aplicação

$$\xi^1(t) = \xi^1(t_i) + \varepsilon v_i(t - t_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad \xi^1(0) = x_0, \quad (4-8)$$

onde

$$D\left(\frac{L}{m\varepsilon}v_i, \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(s)ds\right) = \min_{v \in \bar{F}(\xi^1(t_i))} D\left(\frac{L}{m\varepsilon}v, \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(s)ds\right). \quad (4-9)$$

Denote por

$$\delta_i = D(\xi(t_i), \xi^1(t_i)).$$

Como

$$\begin{aligned} D(\xi(t), \xi(t_i)) &= \varepsilon D\left(\int_{t_i}^t v(s)ds, \hat{0}\right) \leq \varepsilon \int_{t_i}^t D(v(s), \hat{0}) ds \\ &\leq \varepsilon M(t - t_i) \\ &\leq \frac{ML}{m} \end{aligned} \quad (4-10)$$

então tem-se agora

$$\begin{aligned} D(\xi(t), \xi^1(t_i)) &\leq D(\xi(t), \xi(t_i)) + D(\xi(t_i), \xi^1(t_i)) \leq \delta_i + \varepsilon M(t - t_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \\ d(\bar{F}(\xi(t)), \bar{F}(\xi^1(t_i))) &\leq \lambda D(\xi(t), \xi^1(t_i)) \leq \lambda[\delta_i + \varepsilon M(t - t_i)]. \end{aligned} \quad (4-11)$$

De (4-9) e (4-11) tem-se

$$\begin{aligned} D\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} v(s)ds, \frac{L}{\varepsilon m}v_i\right) &\leq d\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{F}(\xi(t))dt, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{F}(\xi^1(t_i))dt\right) \\ &\leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} d(\bar{F}(\xi(t)), \bar{F}(\xi^1(t_i))) dt \\ &\leq \lambda \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\delta_i + \varepsilon M(t - t_i)) dt \\ &\leq \lambda \left[\delta_i(t_{i+1} - t_i) + \frac{\varepsilon M}{2}(t_{i+1} - t_i)^2 \right] \\ &\leq \lambda \left[\left(\frac{L}{m\varepsilon}\right) \delta_i + \frac{ML^2}{2\varepsilon m^2} \right] \end{aligned} \quad (4-12)$$

de (4-7), (4-8) e (4-12) obtém-se

$$\begin{aligned}
\delta_{i+1} = D(\xi(t_{i+1}), \xi^1(t_{i+1})) &= D\left(\xi(t_i) + \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(s) ds, \xi^1(t_i) + \varepsilon v_i(t_{i+1} - t_i)\right) \\
&\leq \delta_i + \varepsilon \lambda \left[\left(\frac{L}{m\varepsilon} \right) \delta_i + \frac{ML^2}{2\varepsilon m^2} \right] \\
&= \frac{\lambda ML^2}{2m^2} + \left(1 + \frac{\lambda L}{m} \right) \delta_i \\
&\leq \frac{\lambda ML^2}{2m^2} + \left(1 + \frac{\lambda L}{m} \right) \left(\frac{\lambda ML^2}{2m^2} + \left(1 + \frac{\lambda L}{m} \right) \delta_{i-1} \right) \\
&\vdots \\
&\leq \left(1 + \frac{\lambda L}{m} \right)^{i+1} \delta_0 + \frac{\lambda ML^2}{2m^2} \sum_{k=0}^i \left(1 + \frac{\lambda L}{m} \right)^k \\
&= \frac{ML}{2m} \left[\left(1 + \frac{\lambda L}{m} \right)^{i+1} - 1 \right], \quad i = 0, \dots, m-1 \\
&\leq \frac{ML}{2m} \left[\left(1 + \frac{\lambda L}{m} \right)^m - 1 \right] \\
&\leq \frac{ML}{2m} (e^{\lambda L} - 1).
\end{aligned} \tag{4-13}$$

Como

$$D(\xi^1(t), \xi^1(t_i)) \leq \varepsilon D(v_i, \widehat{0})(t - t_i) \leq \varepsilon M(t - t_i) \leq \frac{LM}{m}, \tag{4-14}$$

então, usando (4-10), (4-13) e (4-14) tem-se

$$\begin{aligned}
D(\xi(t), \xi^1(t)) &\leq D(\xi(t), \xi(t_i)) + D(\xi(t_i), \xi^1(t_i)) + D(\xi^1(t_i), \xi^1(t)) \\
&\leq \frac{ML}{m} + \frac{ML}{2m} (e^{\lambda L} - 1) + \frac{ML}{m} \\
&= \frac{ML}{2m} (e^{\lambda L} + 3).
\end{aligned} \tag{4-15}$$

Da condição (ii) do teorema, segue-se que para qualquer $\eta_1 > 0$ e m fixo, existe $\varepsilon^1(\eta_1, m) > 0$ tal que

$$d\left(\frac{\varepsilon m}{L} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(s, \xi^1(t_i)) ds, \overline{F}(\xi^1(t_i))\right) \leq \eta_1. \tag{4-16}$$

Portanto, existe $v^i(t) \in F(t, \xi^1(t_i))$, $i = 0, 1, \dots, m \in \mathbb{N}$, tal que

$$D\left(\frac{\varepsilon m}{L} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v^i(s) ds, v_i\right) \leq \eta_1. \tag{4-17}$$

Considere agora a família de aplicações

$$x^1(t) = x^1(t_i) + \varepsilon \int_{t_i}^t v^i(s) ds, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad x^1(0) = x_0. \quad (4-18)$$

De (4-8), (4-17) e (4-18), segue que:

$$D(x^1(t_i), \xi(t_i)) \leq L\eta_1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4-19)$$

Como

$$D(x^1(t), x^1(t_i)) = \varepsilon D\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} v^i(s) ds, \widehat{0}\right) \leq \varepsilon M(t - t_i) \leq \frac{ML}{m}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

então de (4-14) e (4-19), obtém-se

$$\begin{aligned} D(x^1(t), \xi^1(t)) &\leq D(x^1(t), x^1(t_i)) + D(x^1(t_i), \xi^1(t_i)) + D(\xi^1(t_i), \xi^1(t)) \\ &\leq \frac{2ML}{m} + L\eta_1, \end{aligned} \quad (4-20)$$

e

$$\begin{aligned} d(F(t, x^1(t)), F(t, \xi^1(t_i))) &\leq d(F(t, x^1(t)), F(t, x^1(t_i))) + d(F(t, x^1(t_i)), F(t, \xi^1(t_i))) \\ &\leq \lambda D(x^1(t), x^1(t_i)) + \lambda D(x^1(t_i), \xi^1(t_i)) \\ &\leq \lambda \left(\frac{ML}{m} + L\eta_1 \right) = \lambda L \left(\frac{M}{m} + \eta_1 \right). \end{aligned} \quad (4-21)$$

Considerando a seleção da aplicação $v^i(t)$, segue-se de (4-17) e (4-21) que

$$\theta(\dot{x}^1(t), \varepsilon F(t, x^1(t))) \leq d(\varepsilon F(t, \xi^1(t_i)), \varepsilon F(t, x^1(t))) \leq \varepsilon \lambda L \left(\frac{M}{m} + \eta_1 \right). \quad (4-22)$$

Logo do Teorema 4.13 segue-se que existe uma solução $x(t)$ da inclusão (4-2), tal que

$$D(x(t), x^1(t)) \leq \varepsilon \lambda L \left(\frac{M}{m} + \eta_1 \right) \int_0^1 e^{\lambda \varepsilon(t-s)} ds \leq L \left(\frac{M}{m} + \eta_1 \right) (e^{\lambda L} - 1) \quad (4-23)$$

Das estimativas (4-15), (4-20) e (4-23) segue-se que:

$$\begin{aligned}
 D(\xi(t), x(t)) &\leq D(\xi(t), \xi^1(t)) + D(x(t), x^1(t)) + D(\xi^1(t), x^1(t)) \\
 &\leq \frac{ML}{2m} (e^{\lambda L} + 3) + \frac{2ML}{m} + L\eta_1 + L \left(\frac{M}{m} + \eta_1 \right) (e^{\lambda L} - 1) \\
 &= \frac{ML}{2m} (3e^{\lambda L} + 5) + Le^{\lambda L} \eta_1.
 \end{aligned} \tag{4-24}$$

Portanto, escolhendo $m \geq \frac{ML}{\eta} (3e^{\lambda L} + 5)$ e $\eta_1 \leq \frac{\eta}{2Le^{\lambda L}}$, tem-se em (4-24)

$$D(\xi(t), x(t)) < \eta$$

O que demonstra a afirmação **a**).

A demonstração da afirmação **b**) do teorema, é similar a demonstração da afirmação **a**). $\square$

Se a multifunção fuzzy $F(t, x)$ é periódica em t , então pode-se obter uma estimativa melhor.

Teorema 4.15 *Sejam $Q = \{(t, x)/t \in \mathbb{R}^+, x \in G \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}^n(E^n)\}$ e $F : Q \rightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{C}}^n(E^n)$ uma multifunção fuzzy tal que:*

- (i) *$F(t, x)$ é contínua, uniformemente limitada com constante M e satisfaz a condição de Lipschitz em x com constante λ ;*
- (ii) *A multifunção fuzzy $F(t, x)$ é 2π -periódica em t ;*
- (iii) *Para qualquer $x_0 \in G' \subset G$ e $t \in \mathbb{R}^+$, as soluções da inclusão (4-3), juntamente com uma ρ -vizinhança pertencem ao domínio G .*

Então para qualquer $L > 0$, existe $\epsilon^0(L) > 0$ e $c(L) > 0$ tal que para todo $\epsilon \in]0, \epsilon^0]$ e $t \in [0, L\epsilon^{-1}]$ as seguintes afirmações são verdadeiras:

- a) *Para qualquer solução $x(t)$ da inclusão (4-2) existe uma solução $\xi(t)$ da inclusão (4-3) tal que*

$$D(x(t), \xi(t)) \leq c\epsilon \tag{4-25}$$

- b) *Para qualquer solução $\xi(t)$ da inclusão (4-3) existe uma solução $x(t)$ da inclusão (4-2) tal que a desigualdade (4-25) é válida.*

Demonstração. Note que no caso quando a multifunção fuzzy $F(t, x)$ é 2π periódica em t , tem-se que

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t, x) dt.$$

Prova-se agora a afirmação **a)** do teorema. Dividindo o intervalo $[0, L\varepsilon^{-1}]$ em subintervalos com pontos $t_i = 2\pi i$ $i = 0, 1, \dots$

Seja $x(t)$ uma solução da inclusão (4-2), então existe uma seleção $v(t)$ da multifunção fuzzy $F(t, x(t))$ tal que

$$x(t) = x(t_i) + \varepsilon \int_{t_i}^t v(s) ds, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad x(0) = x_0. \quad (4-26)$$

Considere a aplicação

$$x^1(t) = x^1(t_i) + \varepsilon \int_{t_i}^t v^1(s) ds, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad x^1(0) = x_0, \quad (4-27)$$

onde $v^1(t)$ é uma seleção mensurável da aplicação $F(t, x^1(t))$ tal que

$$D(v(t), v^1(t)) = \min_{v^1 \in F(t, x^1(t_i))} D(v(t), v^1). \quad (4-28)$$

Denote por $\delta_i = D(x(t_i), x^1(t_i))$, então tem-se

$$\begin{aligned} D(v(t), v^1(t)) &\leq d(F(t, x(t)), F(t, x^1(t_i))) \\ &\leq \lambda D(x(t), x^1(t_i)) \\ &\leq \lambda [D(x(t), x(t_i)) + D(x(t_i), x^1(t_i))] \\ &\leq \lambda \left[\varepsilon \int_{t_i}^t D(v(s), \widehat{0}) ds + \delta_i \right] \\ &\leq \lambda [\delta_i + \varepsilon M(t - t_i)]. \end{aligned}$$

Portanto, de (4-26) e (4-27) segue-se

$$\begin{aligned} \delta_{i+1} = D(x(t_{i+1}), x^1(t_{i+1})) &= D\left(x(t_i) + \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(s) ds, x^1(t_i) + \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} v^1(s) ds\right) \\ &\leq \delta_i + \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} D(v(s), v^1(s)) ds \\ &\leq \delta_i + \varepsilon \lambda \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\delta_i + \varepsilon M(s - t_i)] ds \\ &= \delta_i + 2\pi\varepsilon\lambda\delta_i + \varepsilon^2\lambda M \frac{(s - t_i)^2}{2} \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \\ &= \delta_i(1 + 2\pi\varepsilon\lambda) + 2\pi^2\varepsilon^2\lambda M. \end{aligned}$$

Logo, como $2\pi(i+1) \leq L\varepsilon^{-1}$, obtém-se

$$\begin{aligned}
 \delta_{i+1} &\leq (1 + 2\pi\varepsilon\lambda)\delta_i + 2\pi^2\varepsilon^2\lambda M \\
 &\leq (1 + 2\pi\varepsilon\lambda)((1 + 2\pi\varepsilon\lambda)\delta_{i-1} + 2\pi^2\varepsilon^2\lambda M) + 2\pi^2\varepsilon^2\lambda M \\
 &\vdots \\
 &\leq (1 + 2\pi\varepsilon\lambda)^{i+1}\delta_0 + 2\pi^2\varepsilon^2\lambda M \sum_{k=0}^i (1 + 2\pi\varepsilon\lambda)^k \\
 &= 2\pi^2\varepsilon^2\lambda M \sum_{k=0}^i (1 + 2\pi\varepsilon\lambda)^k \\
 &= 2\pi^2\varepsilon^2\lambda M \left(\frac{(1 + 2\pi\varepsilon\lambda)^{i+1} - 1}{2\varepsilon\lambda\pi} \right) \\
 &= \pi\varepsilon M \left((1 + 2\pi\varepsilon\lambda)^{i+1} - 1 \right) \\
 &\leq \pi\varepsilon M \left((1 + 2\pi\varepsilon\lambda)^{\frac{L}{2\varepsilon\pi}} - 1 \right) \\
 &\leq \pi\varepsilon M \left(e^{\lambda L} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

i.é.,

$$\delta_i \leq M\pi \left(e^{\lambda L} - 1 \right) \varepsilon, \quad i = 0, 1, \dots \quad (4-29)$$

Para $t \in [t_i, t_{i+1}]$ as seguintes desigualdades são verdadeiras:

$$D(x(t), x(t_i)) \leq 2\pi M\varepsilon, \quad D(x^1(t), x^1(t_i)) \leq 2\pi M\varepsilon, \quad (4-30)$$

e

$$\begin{aligned}
 D(x(t), x^1(t)) &\leq D(x(t), x(t_i)) + D(x(t_i), x^1(t_i)) + D(x^1(t_i), x^1(t)) \\
 &\leq 2\pi M\varepsilon + \delta_i + 2\pi M\varepsilon \\
 &\leq 4\pi M\varepsilon + \pi M\varepsilon \left(e^{\lambda L} - 1 \right) \\
 &= \pi M\varepsilon \left(e^{\lambda L} + 3 \right),
 \end{aligned} \quad (4-31)$$

por (4-29). O valor da aplicação $x^1(t)$ nos pontos t_{i+1} é dado por:

$$x^1(t_{i+1}) = x^1(t_i) + \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} v^1(s) ds = x^1(t_i) + 2\varepsilon\pi v_i, \quad (4-32)$$

onde $v_i \in \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(s, x^1(t_i)) ds = \overline{F}(x^1(t_i))$.

Considere a aplicação

$$\xi^1(t) = \xi^1(t_i) + \varepsilon v_i(t - t_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \quad \xi^1(0) = x_0, \quad (4-33)$$

então $x^1(t_i) = \xi^1(t_i)$ $i = 0, 1, \dots$. De (4-30) e (4-33) tem-se

$$\begin{aligned} D(x^1(t), \xi^1(t)) &\leq D(x^1(t), x^1(t_i)) + D(x^1(t_i), \xi^1(t)) \\ &= \leq D(x^1(t), x^1(t_i)) + D(\xi^1(t_i), \xi^1(t)) \\ &\leq 2\pi M\varepsilon + 2\pi M\varepsilon = 4\pi M\varepsilon. \end{aligned} \quad (4-34)$$

Como para todo $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots$,

$$D(\xi^1(t), \xi^1(t_i)) \leq 2\pi M\varepsilon, \quad d(\bar{F}(\xi^1(t_i)), \bar{F}(\xi^1(t))) \leq 2\lambda\pi M\varepsilon,$$

então

$$\theta(\xi^1(t), \varepsilon \bar{F}(\xi^1(t))) \leq d(\varepsilon \bar{F}(\xi^1(t_i)), \varepsilon \bar{F}(\xi^1(t))) \leq 2\lambda\pi M\varepsilon^2. \quad (4-35)$$

Segue do Teorema (4.13) e da desigualdade (4-35) que existe uma solução $\xi(t)$ da inclusão (4-3), tal que:

$$D(\xi(t), \xi^1(t)) \leq 2\varepsilon^2\pi\lambda M \int_0^1 e^{\lambda\varepsilon(t-s)} ds \leq 2\varepsilon\pi M(e^{\lambda L} - 1). \quad (4-36)$$

De (4-31), (4-34) e (4-36), segue que

$$\begin{aligned} D(x(t), \xi(t)) &\leq D(x(t), x^1(t)) + D(x^1(t), \xi^1(t)) + D(\xi^1(t), \xi(t)) \\ &\leq \pi M\varepsilon(e^{\lambda L} + 3) + 4\pi M\varepsilon + 2\pi M\varepsilon(e^{\lambda L} - 1) \\ &= \pi M\varepsilon(3e^{\lambda L} + 5). \end{aligned}$$

Denotando por $c_1 = \pi M(e^{\lambda L} - 1)$, então

$$D(x(t), \xi(t)) \leq c_1\varepsilon. \quad (4-37)$$

Agora para demonstrar a afirmação **b)** do teorema, tome-se qualquer solução $\xi(t)$ da inclusão (4-3) e fazendo os cálculos como na demonstração da afirmação **a)**, encontra-se uma solução $x(t)$ da inclusão (4-2) tal que a similar desigualdade (4-37) cumpre-se, com alguma constante c_2 . Fazendo $c = \max\{c_1, c_2\}$, obtém-se a justificativa da afirmação do teorema. $\square$

Considerações Finais

No estudo de inclusões diferenciais da forma:

$$\dot{x} \in f(t, x), \quad (4-38)$$

pode-se obter uma solução para (4-38) sempre que f seja uma multifunção (semicontínua superiormente, semicontínua inferiormente, contínua ou Lipschitz) com valores convexos e fechados.

Da mesma forma que para equações diferenciais no contexto determinístico, existem resultados de existência de soluções para inclusões diferenciais, para uma equação diferencial fuzzy e inclusões diferenciais fuzzy.

Mostra-se que o método de averaging pode ser aplicado nas inclusões diferenciais fuzzy e em particular nas equações diferenciais fuzzy. No entanto, o método de averaging para equações diferenciais estabelece resultados referentes a existência de soluções periódicas e ciclos limite. Os principais resultados desta dissertação foram obtidos do artigo [25].

Para trabalhos futuros, pretendemos investigar os principais resultados desta dissertação utilizando o Princípio de extensão de Zadeh. Também pretende-se estudar e analisar as afirmações b) e c) do Teorema 1.1 no contexto fuzzy.

Referências Bibliográficas

- [1] ARNOLD, V. I. **Geometrical Methods In The Theory Of Ordinary Differential Equations**. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [2] AUBIN, J; CELLINA, A. **Differential Inclusions: Set-Valued Maps and Viability Theory**. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.
- [3] BARROS, L. C. **Sobre Sistemas Dinâmicos Fuzzy: Teoria e Aplicações**. Tese, UNICAMP, IMECC, Março 1997.
- [4] CHRISTOPHER, C; LI, C. **Limit Cycles of Differential Equations**. Birkhäuser Verlag, Berlin, 2007.
- [5] CONWAY, J. B. **A Course in Functional Analysis**. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [6] DEIMLING, K. **Multivalued Differential Equations**. Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
- [7] DIAMOND, P. **Stability and periodicity in fuzzy differential equations**. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 8(5):583–589, 2000.
- [8] DIAMOND, P; KLOEDEN, P. **Metric Space of Fuzzy Sets: Theory and Applications**. World Scientific, Singapore, 1994.
- [9] GIACOMINI, H; LLIBRE, J; VIANO, M. **On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles**. IOPSCIENCE, Nonlinearity, 9(2):501–516, 1996.
- [10] HILBERT, D. **Mathematical problems**. Bull. Amer. Math. Soc., 37(4):407–436, 2000.
- [11] HULLERMEIER, E. **An approach to modeling and simulation of uncertain dynamical systems**. Int. J. Uncertainty, Fuzziness Knowledge-Bases Syst., 5(2):103–127, 1997.
- [12] ISNARD, I. **Introdução à Medida e Integração**. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [13] KALEVA, O. **Fuzzy differential equations**. Fuzzy Sets and Systems, 24(3):301–317, 1987.

- [14] LAGES, E. **Elementos de Topologia Geral**. Textos Universitários, IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [15] LAKSHMIKANTHAN, V; MOHAPATRA, R. **Theory of Fuzzy Differential Equations and Inclusions**. Taylor & Francis, London and New York, 2003.
- [16] LI, C; LI, W; LLIBRE, J; ZHANG, Z. **Linear estimate for the number of zeros of abelian integrals for quadratic isochronous centers**. *Nonlinearity*, 13:1775–1800, 2000.
- [17] LLIBRE, J; DEL RIO, J. P; RODRÍGUEZ, J. **Averaging analysis of a perturbed quadratic center**. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 46(1):45–51, 2001.
- [18] LLIBRE, J; GINÉ, J. **Limit cyclic of cubic polynomial vector fields via the averaging theory**. *Elsevier, Nonlinear Analysis*, 66(8):1707–1721, 2007.
- [19] MITROPOLSKY, I. **Averaging method in non-linear mechanics**. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2(1):69–96, 1967.
- [20] MIZUKOSHI, M. T. **Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Fuzzy**. Tese, UNICAMP, IMECC, Fevereiro 2004.
- [21] PARK, J. Y; HAN, H. K. **Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations**. *Internt. J. Math. & Math. Sci.*, 22(2):271–279, 1999.
- [22] PERKO, L. **Differential Equations and Dynamical Systems**, volume 7. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [23] PURI, M. L; RALESCU, D. A. **Fuzzy random variables**. *Journ. Math. Analysis and Applications*, 114:409–422, 1986.
- [24] SKRIPNIK, N. V. **Existence of classic solutions of the fuzzy differential inclusions**. *Ukr. Mat. Visn.*, 5(2):244–257, 2008.
- [25] SKRIPNIK, N. V. **The full averaging of fuzzy differential inclusions**. *Iranian Journal of Optimization*, 1(3):302–317, 2009.
- [26] SMIRNOV, G. **Introduction to the Theory of Differential Inclusions**. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2002.
- [27] SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

-
- [28] VERHUST, F. **Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems**. Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [29] ZADEH, L. A. **Fuzzy sets**. Information and Control, 8:338–353, 1965.