Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística

Rosane Gomes Pereira

Desigualdades Universais para Autovalores do Operador Poli-harmônico

Goiânia
2012

sibi
sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	ROSANE GOMES PEREIRA					
E-mail:	rosanegope@yahoo.com.br					
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [X]Sim [ ] Não						
Vínculo empregatício do autor		Bolsista				
Agência de fomento:		CNPq			Sigla:	CNPq
País:	Brasil	UF:	GO	CNPJ:		
Título:	DESIGUALDADES UNIVERSAIS PARA AUTOVALORES DO OPERADOR POLI-HARMÔNICO					
Palavras-chave:	VARIEDADES RIEMANNIANAS, DESIGUALDADES TIPO-YANG					
Título em outra língua:	UNIVERSAL BOUNDS FOR EIGENVALUES OF THE POLYHARMONIC OPERATORS					
Palavras-chave em outra língua:	RIEMANNIAN MANIFOLDS, YANG-TYPE INEQUALITIES					
Área de concentração:	GEOMETRIA					
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	09/03/2012					
Programa de Pós-Graduação:	MESTRADO EM MATEMÁTICA					
Orientador (a):	Dr. LEVI ROSA ADRIANO					
E-mail:	levi@mat.ufg.br					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Rosane Gomes Pereira
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 28 / 03 / 2012

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Rosane Gomes Pereira

Desigualdades Universais para Autovalores do Operador Poli-harmônico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Levi Rosa Adriano

Goiânia
2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

P436d

Pereira, Rosane Gomes.
Desigualdades universais para autovalores do operador poli-harmônico [manuscrito] / Rosane Gomes Pereira. - 2012.
72 f.

Orientador: Prof. Dr. Levi Rosa Adriano.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2012.
Bibliografia.

1. Variedades Riemannianas. 2. Desigualdades tipo-Yang. 3. Operador Poli-harmônico. I. Título.

CDU: 510.5

ROSANE GOMES PEREIRA

DESIGUALDADES UNIVERSAIS PARA AUTOVALORES DO OPERADOR POLI-HARMÔNICO

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 09 de março de 2012, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Levi Rosa Adriano
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Changyu Xia

Prof. Dr. Changyu Xia
Departamento de Matemática-UnB

Prof. Dr. Veríssimo Pereira Gomes Neto
Departamento de Matemática-PUC/GO

Rosane Gomes Pereira

Graduou–se em Licenciatura em Matemática pela UFG - Universidade Federal de Goiás. Com o trabalho intitulado Introdução as Noções de Imersão, Submersão e Lema de Morse, obteve pela UFG o título de Especialista em Matemática. Durante o Mestrado, foi bolsista do CNPq.

Aos meus pais, uma grande costureira e um humilde pintor de paredes pela visão única da importância da educação e aos meus irmãos pelas estimulantes críticas.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Jeová Deus que me deu a dádiva da vida. Em segundo lugar, os meus agradecimentos se direcionam a minha família: a meus pais, que mesmo diante das dificuldades sempre valorizaram a educação de seus filhos e aos meus irmãos os quais sempre pude compartilhar minhas inseguranças.

Agradeço ao meu orientador, professor Levi, o qual me ensinou muito e me deu a oportunidade de aprender, através deste trabalho, de forma contínua. Agradeço ao professor Veríssimo, membro da banca, o qual ofereceu contribuições valorosas ao trabalho, para que este se tornasse mais acessível a comunidade matemática. Agradeço, sinceramente, pela sua presença e pela leitura do trabalho. Também, agradeço ao professor Changyu Xia, membro da banca, pelas sugestões e leitura do trabalho.

Às colegas professoras da Escola Municipal Recanto do Bosque, agradeço pelo apoio. Aos meus colegas de mestrado, amigos do *face*, o meu agradecimento deve ser feito de forma especial, pois cada um de vocês ocupa um lugar no meu coração. Agradeço muito por ter convivido com pessoas tão maravilhosas que me mostraram, com exemplos de perseverança, que mesmo o impossível pode não ser tão impossível assim. Para mim, foi um privilégio conviver com pessoas tão incríveis.

Por fim, agradeço ao apoio financeiro do CNPq que me permitiu executar este trabalho.

Resumo

Pereira, Rosane Gomes. **Desigualdades Universais para Autovalores do Operador Poli-harmônico**. Goiânia, 2012. 73p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho, estudamos autovalores do operador poli-harmônico em variedades Riemannianas compactas com fronteira (possivelmente vazia). Aqui, apresentamos uma desigualdade universal para os autovalores do operador poli-harmônico em domínios compactos no Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Esta desigualdade controla o k-ésimo autovalor pelos autovalores menores, independentemente da geometria particular do domínio.
Além disso, a desigualdade que apresentamos cobre a importante desigualdade de Yang em autovalores do Laplaciano de Dirichlet. Finalmente, apresentamos desigualdades universais para autovalores do operador poli-harmônico em domínios compactos na esfera unitária n- dimensional S^n.

Palavras–chave e Frases

Variedades Riemannianas, Cotas Universais, Desigualdade tipo-Yang, Operador Poli-harmônico.

Abstract

Pereira, Rosane Gomes. **Universal Bounds for Eigenvalues of the Polyharmonic Operator**. Goiânia, 2012. 73p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work, we study eigenvalues of polyharmonic operators on compact Riemannian manifolds with boundary (possibly empty). Here, we bring in a universal inequality for the eigenvalues of the polyharmonic operator on compact domains in an Euclidean space $\mathbb{R}^n$. This inequality controls the kth eigenvalue by the lower eigenvalues, independently of the particular geometry of the domain. Besides, a inequality we present covers the important Yang inequality on eigenvalues of the Dirichlet Laplacian. Finally, we introduce universal inequalities for eigenvalues of polyharmonic operator on compact domains in a unit n-sphere S^n.

Keywords and Phrases

Riemannian Manifolds, Universal Bounds, Yang-type Inequality, Polyharmonic Operator.

Sumário

Introdução

O estudo dos autovalores tem sua origem no método de separação de variáveis e apresentou-se de muito interesse para alguns ramos da matemática, e principalmente, da física. Nesta introdução, buscamos apresentar uma cronologia para os estudos dos problemas e, nos casos particulares, apresentamos as desigualdades mais famosas. Aqui, o nosso objetivo mais primordial é justificar a necessidade de obtermos desigualdades tipo-Yang, para isso organizamos as várias desigualdades numa linha de implicações, a qual mostra sem sombra de dúvidas, que a desigualdade de Yang é a melhor.

Consideremos Ω um domínio conexo, limitado e com fronteira suave no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ν o campo normal unitário exterior a $\partial\Omega$ e seja l um inteiro positivo. Soluções de $\Delta u = 0$ num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ são as clássicas funções harmônicas que descrevem a posição de equilíbrio de uma membrana elástica homogênea. Soluções de $\Delta^2 u = 0$ são chamadas bi-harmônicas, e elas modelam o equilíbrio de placas homogêneas. Similarmente, soluções de $\Delta^l u = 0$, $l \in \mathbb{N}$; são chamadas poli-harmônicas.

Podemos então naturalmente considerar o seguinte problema de autovalor

$$\begin{aligned} (-\Delta)^l u = \lambda u \quad em \quad \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = \cdots = \left.\frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}}\right|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \tag{0-1}$$

O espectro do operador do problema 0-1 é real e seus autovalores formam uma sequência não-decrescente

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots,$$

em que cada autovalor é repetido de acordo com sua multiplicidade. O caso $l = 1$ é bastante estudado, desde os trabalhos de Weyl [21] e Courant-Hilbert [12]. Mas, também para $l \geq 2$, as funções poli-harmônicas possuem interessantes aplicações na física.

No caso $l = 1$, o problema descreve vibrações de uma membrana com bordo fixo e é conhecido como problema da membrana fixa. Em 1956 Payne, Pólya e Weinberger provaram em [19] a seguinte estimativa para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \ \leq \ \frac{4}{kn}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i,\ k = 1,2,\cdots \tag{0-2}$$

esta ficou conhecida como a desigualdade PPW.

Em 1980, Hile e Protter, usando as mesmas técnicas básicas apresentadas por Payne, Pólya e Weinberger, obtiveram em [14] outra estimativa

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1}-\lambda_i} \geq \frac{kn}{4},\ k = 1,2,\cdots \tag{0-3}$$

esta ficou conhecida como a desigualdade HP.

Substituíndo cada $\lambda_{k+1} - \lambda_i$ em (0-3) por $\lambda_{k+1} - \lambda_k$ conseguimos mostrar que a desigualdade obtida por Hile e Protter é melhor do que a obtida por PPW em (0-2). Isto é, desigualdade HP $\Rightarrow$ desigualdade PPW.

Muitas outras estimativas surgiram do método desenvolvido por Payne, Pólya e Weienberger, dentre elas, em 1991, Yang [22] provou a seguinte desigualdade que ficou conhecida como a Primeira desigualdade de Yang, isto é, Yang 1.

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\left(\lambda_{k+1}-\left(1+\frac{4}{n}\right)\lambda_i\right) \leq 0,\ k = 1,2,\cdots. \tag{0-4}$$

Explicitamente (0-4) é uma inequação quadrática em λ_{k+1}

$$k\lambda_{k+1}^2 - \left(2+\frac{4}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)\lambda_{k+1} + \left(1+\frac{4}{n}\right)\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2 \leq 0. \tag{0-5}$$

Então

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1} \ &\leq \ \frac{1}{2k}\Bigg\{\left(2+\frac{4}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right) \\ &+ \ \left[\left(2+\frac{4}{n}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^2 - 4k\left(1+\frac{4}{n}\right)\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2\right]^{\frac{1}{2}}\Bigg\}, \quad k = 1,2,\cdots.\end{aligned}$$

Para as nossas considerações aqui, a menor raíz não é de interesse. Uma explicação mais detalhada sobre este fato pode ser conferida em [3].

Usando os fatos que $k\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2 \geq (\sum_{i=1}^{k}\lambda_i)^2$ e que $\left(2+\frac{4}{n}\right)^2 - 4\left(1+\frac{4}{n}\right) = \left(\frac{4}{n}\right)^2$

obtemos Yang 2, a Segunda desigualdade de Yang

$$\lambda_{k+1} \leq \frac{1}{k}\Big(1+\frac{4}{n}\Big)\sum_{i=1}^{k}\lambda_i, \quad k=1,2,\cdots. \tag{0-6}$$

Logo, Yang 1 $\Rightarrow$ Yang 2.

Como

$$\frac{\lambda_1+\cdots+\lambda_k}{k} \leq \frac{\lambda_k+\cdots+\lambda_k}{k} = \lambda_k$$

então Yang 2 $\Rightarrow$ PPW.

A fim de mostrarmos que ambas as desigualdades de Yang implicam na desigualdade HP, olharemos esta por meio da seguinte função

$$F(s) = \sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{s-\lambda_i},$$

onde para $s > \lambda_k$, F é estritamente decrescente.

Em seguida, consideraremos $f(x) = \frac{x}{s-x}$, $x < s$ e s positivo. Visto que, $f(x) = \frac{s}{s-x} - 1$ concluímos que $f''(x) > 0$ e que f é estritamente convexa para $x < s$. Usando a convexidade de f temos

$$\begin{aligned}
F(s) &= \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i) \\
&= k\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{k}f(\lambda_i) \\
&\geq kf\Big(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Big) \\
&= k\frac{\frac{1}{k}\sum\lambda_i}{s-\frac{1}{k}\sum\lambda_i}.
\end{aligned}$$

Para $s = \frac{1}{k}\Big(1+\frac{4}{n}\Big)\sum_{i=1}^{k}\lambda_i$

$$F\left(\frac{1}{k}\left(1+\frac{4}{n}\right)\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right) \geq \frac{nk}{4}.$$

Como F é estritamente decrescente para $s > \lambda_k$ então existe um único $\sigma > \lambda_k$ tal que $F(\sigma) = \frac{nk}{4}$. Logo, $\frac{1}{k}\Big(1+\frac{4}{n}\Big)\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \leq \sigma$. Por outro lado, da desigualdade HP temos $\lambda_{k+1} \leq \sigma$. Assim, concluímos que o limite superior de Yang 2 dado por

$\frac{1}{k}\Big(1+\frac{4}{n}\Big)\sum_{i=1}^{k}\lambda_i$ é melhor que o limite superior de HP dado por σ.

Logo, ambas as desigualdades de Yang são melhores que a desigualdade HP. Uma argumentação mais completa pode ser conferida em [3].

Portanto,

$$Yang1 \Rightarrow Yang2 \Rightarrow HP \Rightarrow PPW.$$

Assim, podemos afirmar, indubitavelmente, que a Primeira desigualdade de Yang é a melhor das desigualdades clássicas que são obtidas seguindo o método citado anteriormente. A partir deste momento e no restante do trabalho chamaremos esta desigualdade de A desigualdade de Yang e a escreveremos da seguinte forma simplificada

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \le \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i, \;\; k=1,2,\cdots.$$

No caso $l=2$, o problema 0-1 descreve vibrações características de uma placa fixada em equilíbrio e é o conhecido problema do bi-harmônico de Dirichlet ou *clamped plate problem*. Em 1956, Payne, Pólya e Weinberger encontraram em [19] a seguinte estimativa para este problema

$$\lambda_{k+1}-\lambda_k \;\le\; \frac{8(n+2)}{n^2}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \tag{0-7}$$

Como uma generalização de seu resultado, em 1984, Hile e Yeh [15] obtiveram

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i^{\frac{1}{2}}}{\lambda_{k+1}-\lambda_i} \;\ge\; \frac{n^2k^{\frac{3}{2}}}{8(n+2)}\Big(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Big)^{\frac{-1}{2}} \tag{0-8}$$

fazendo uso de um método melhorado de Hile e Protter [14]. Além disso, em 1990, Hook [16], Chen e Qian [9] provaram, independentemente, a seguinte desigualdade

$$\frac{n^2k^2}{8(n+2)} \;\le\; \left[\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i^{\frac{1}{2}}}{\lambda_{k+1}-\lambda_i}\right]\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{2}}. \tag{0-9}$$

Em 2005, como resposta afirmativa ao apontamento feito por Ashbaugh [2] de que seria possível estabelecer desigualdades para autovalores do *clamped plate problem* as quais seriam análogas as desigualdades de Yang no caso do

Laplaciano de Dirichlet, Cheng e Yang [11] obtiveram o seguinte resultado

$$\lambda_{k+1} - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \leq \left[\frac{8(n+2)}{n^2}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}[\lambda_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)]^{\frac{1}{2}}. \tag{0-10}$$

Em 2007, Wang e Xia [20] provaram

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \leq \frac{8}{n}\Big(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i^{\frac{3}{2}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i^{\frac{1}{2}}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{0-11}$$

Para o caso l geral, a desigualdade tipo Payne-Pólya-Weinberg é dada por [9, 14]

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq \frac{4l(n+2l-2)}{n^2k^2}\Big(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{l}}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}\Big). \tag{0-12}$$

Nosso trabalho, é baseado no artigo *Universal bounds for eigenvalues of the polyharmonic operators*, [17], que apresenta desigualdades do tipo Yang para domínios no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e na esfera unitária S^n. Isto é, as desigualdades apresentadas são da forma

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \leq G(n,k,l,\lambda_1,\cdots,\lambda_k) \tag{0-13}$$

onde G representa alguma expressão que depende das variáveis descritas.

Desigualdades do tipo dado em (0-13) são de fundamental interesse; visto que, como dito anteriormente a desigualdade de Yang é a melhor das estimativas obtida seguindo o método de Payne, Pólya e Weinberger.

A organização do trabalho será feita da seguinte forma. No primeiro capítulo, tratamos de alguns conceitos da Geometria Riemanniana e da Análise Funcional que serão de grande relevância para o restante do trabalho. No segundo capítulo, apresentamos ferramentas, tais como Desigualdade de Chebyshev (2.2) e a Fórmula de Böchner (2-3), utilizadas com frequência no capítulo 3.

Por fim, no último e principal capítulo do trabalho, buscamos exprimir estimativas para os autovalores do operador poli-harmônico.

Consideremos o problema

$$\begin{aligned} (-\Delta)^l u = \lambda u \quad &em \quad M \\ u|_{\partial M} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial M} = \cdots = \frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}}\Big|_{\partial M} &= 0 \end{aligned} \tag{0-14}$$

onde M é uma variedade Riemanniana com fronteira ∂M (possivelmente vazia), Δ é o operador laplaciano em M.

Neste capítulo, inicialmente, apresentamos desigualdades gerais para o problema 0-14. Em seguida, utilizamos estas desigualdades para obter estimativas tipo Yang em um domínio conexo, limitado em $\mathbb{R}^n$, com fronteira suave e em domínios compactos com fronteira em uma esfera unitária S^n.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados que serão úteis ao longo do trabalho. Muitos dos resultados, que serão utilizados posteriormente, são apresentados neste capítulo de forma superficial, o que não prejudica o entendimento do trabalho. No entanto, os conceitos apresentados aqui podem ser conferidos com mais detalhes em [5].

1.1 Variedades Riemannianas

Definição 1.1 *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que*

i) $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$.

ii) Para todo par α, β, com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ e $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ são diferenciáveis.

iii) A família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições i) e ii).

Definição 1.2 *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis, respectivamente, de dimensões m e n. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \longrightarrow N$ é uma imersão se $d\varphi_p : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disto, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N, diz-se que φ é um mergulho. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de N.*

As variedades diferenciáveis consideradas serão supostas de Hausdorff e com base enumerável.

Definição 1.3 *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ é um sistema de coordenadas* *locais em torno de p, com* $\mathbf{x}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ *e* $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(0, \cdots, 1, \cdots, 0)$, *então* $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \cdots, x_n)$ *é uma função diferenciável em U.*

Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma *Variedade Riemanniana*.

Definição 1.4 *Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo* $f : M \longrightarrow N$ *é chamado uma isometria se*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)},$$

para todo $p \in M$, $u, v \in T_pM$.

Exemplo 1.5 *Seja* $f : M^n \longrightarrow N^{n+k}$ *uma imersão. Suponhamos que N tenha uma estrutura Riemanniana, então f induz uma estrutura Riemanniana em M dada por*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)},$$

$u, v \in T_pM$. *Podemos verificar, facilmente, que* $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ *é bilinear e simétrica. Visto que f é imersão, temos que* df_p *é injetiva, logo,* $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ *é positiva definida. A métrica de M é chamada então a métrica induzida por f, e f é uma imersão isométrica.*

Nas definições seguintes indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M.

Definição 1.6 *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ *e que satisfaz as seguintes propriedades*

i) $\nabla_{fX+hY} Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z,$

ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$

onde $X,\ Y,\ Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f, h \in \mathcal{D}(M)$.

Os próximos resultados podem ser conferidos em [5].

Proposição 1.7 *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão* ∇ *em M é compatível com a métrica se e só se para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável* $c : I \longrightarrow M$ *tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle,\ t \in I. \tag{1-1}$$

Corolário 1.8 *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se e só se*

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad X,\ Y,\ Z \in \mathfrak{X}(M) \tag{1-2}$$

Definição 1.9 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{1-3}$$

Teorema 1.10 (Levi-Civita) *Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições*

a) *∇ é simétrica.*
b) *∇ é compatível com a métrica Riemanniana.*

Nas definições seguintes g representa a métrica Riemanniana da variedade M.

Definição 1.11 *O divergente de um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ é dado por*

$$\begin{array}{rccl} div\, X : & M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & p & \longmapsto & tr(Y(p) \mapsto \nabla_{Y(p)} X). \end{array}$$

Definição 1.12 *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, o gradiente é definido como o único campo de vetores ∇f em M tal que*

$$g(\nabla f(p), v) = df_p(v), \quad p \in M, \quad v \in T_p M.$$

Definição 1.13 *A Hessiana da $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é dado por*

$$\begin{array}{rccl} \nabla^2 f : & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ & (X,Y) & \longmapsto & g(\nabla_X \nabla f, Y). \end{array}$$

Definição 1.14 *O laplaciano de M é dado por*

$$\begin{array}{rccl} \Delta : & C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ & f & \longmapsto & div \nabla f. \end{array}$$

Sendo $\{Y_1, \cdots, Y_n\}$ uma base ortonormal do espaço tangente de M, ainda podemos concluir o seguinte fato a respeito do laplaciano

$$\Delta f = div \nabla f = tr(\nabla_Y \nabla f) = \sum_i g\left(\nabla_{Y_i} \nabla f, Y_i\right) = tr\left(\nabla^2 f\right). \tag{1-4}$$

Definição 1.15 *Um referencial é dito ortonormal se $\{E_i(p)\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal de $T_p(M)$ para cada $p \in M$.*

Se M é uma variedade Riemanniana de dimensão n e $p \in M$. Então temos que existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e n campos de vetores $E_1, E_2, \cdots, E_n \in \mathfrak{X}(U)$, ortonormais em cada ponto de U, tais que, em p, $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$. Uma tal família $E_i, i = 1, 2, \cdots, n$ de campos de vetores é chamada um referencial geodésico, local, em p.

Consideremos $\{E_i(p)\}_{i=1}^n$ um referencial geodésico em uma vizinhança $V \subset M$ e seja $f \in C^\infty(M)$. Obteremos uma expressão para o gradiente, denotando g por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

$$\langle \nabla f, E_i \rangle = df(E_i) = E_i(f) = f_i.$$

Logo

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n f_i E_i. \tag{1-5}$$

Podemos ainda obter uma expressão tanto para o Laplaciano quanto para o Hessiano.

$$\begin{aligned}
\Delta f &= div \nabla f \\
&= tr(\nabla_{E_i} \nabla f) \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \Big(\sum_{j=1}^n f_j E_j \Big), E_i \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle f_j \nabla_{E_i} E_j + E_i(f_j) E_j, E_i \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle f_{ji} E_j, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n f_{ii}. \qquad (1\text{-}6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(E_i, E_j) &= \langle \nabla_{E_j} \nabla f, E_i \rangle \\
&= \langle \nabla_{E_j} \Big(\sum_{m=1}^n f_m E_m \Big), E_i \rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{n} \langle f_m \nabla_{E_j} E_m + E_j(f_m) E_m, E_i \rangle \\
&= \sum_{m=1}^{n} \langle E_j(f_m) E_m, E_i \rangle \\
&= E_j(f_i) \\
&= f_{ij}. \qquad (1\text{-}7)
\end{aligned}
$$

De modo que

$$|\nabla^2 f|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2. \qquad (1\text{-}8)$$

Neste momento, aproveitando as definições citadas acima, faremos alguns cálculos que serão necessários no último capítulo do trabalho. Agora, encontraremos os símbolos de Christoffel em S^n, a esfera unitária n-dimensional. Para este cálculo, usaremos a projeção estereográfica, que pode ser conferida com mais detalhes em [8].

A projeção estereográfica fixa o pólo norte (N) de S^n e seu hiperplano equatorial n-dimensional $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Então, para cada ponto $y \in S^n$, associa um $x \in \mathbb{R}^n$ obtido pela interseção da reta em $\mathbb{R}^{n+1}$, determinada pelo pólo norte (N) e y, com o hiperplano equatorial $\mathbb{R}^n$.

Seja $y = (y_1, \cdots, y_{n+1})$, $n \geq 1$ denotando qualquer ponto em $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, e $(x_1, \cdots, x_n)$ sua imagem sobre a projeção estereográfica do pólo norte.

$$\mathbb{R}^n = \{z \in \mathbb{R}^{n+1}; z_{n+1} = 0\}$$

Com um cálculo simples, conseguimos mostrar que

$$y_j = x_j(1 - y_{n+1}), \quad j = 1, \cdots, n. \qquad (1\text{-}9)$$

Temos que $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 1$. Substituímos a expressão (1-9) obtendo a seguinte equação quadrática

$$y_{n+1}^2(1 + |x|^2) - 2y_{n+1}|x|^2 - (1 - |x|^2) = 0,$$

onde $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

Resolvendo a equação, obtemos $y_{n+1} = \dfrac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1}$.

Por outro lado, substituíndo o valor obtido acima em (1-9) obtemos

$$y_j = \frac{2x_j}{|x|^2+1}, \quad j = 1, \cdots, n.$$

Definimos $(y_1, \cdots, y_n) = \overline{y}$

$$\begin{aligned} d\overline{y} &= d\left(\frac{2x_1}{1+|x|^2}, \frac{2x_2}{1+|x|^2}, \cdots, \frac{2x_n}{1+|x|^2}\right) \\ &= 2\left\{\frac{1+|x|^2}{(1+|x|^2)^2}(dx_1, \cdots, dx_n) - 2(x_1, \cdots, x_n)\left[\frac{1}{(1+|x|^2)^2}\left((x_1, \cdots, x_n)\cdot(dx_1, \cdots, dx_n)\right)\right]\right\} \end{aligned}$$

Logo

$$d\overline{y} = 2\,\frac{(1+|x|^2)dx - 2x(x\cdot dx)}{(1+|x|^2)^2}.$$

Sendo $y_{n+1} = \dfrac{|x|^2-1}{|x|^2+1}$, temos

$$\begin{aligned} dy_{n+1} &= \frac{2x_1dx_1(|x|^2+1) - (|x|^2-1)2x_1dx_1}{(|x|^2+1)^2} + \cdots + \frac{2x_ndx_n(|x|^2+1) - (|x|^2-1)2x_ndx_n}{(|x|^2+1)^2} \\ &= \frac{4}{(|x|^2+1)^2}\left((x_1, \cdots, x_n)\cdot(dx_1, \cdots, dx_n)\right). \end{aligned}$$

Logo

$$dy_{n+1} = \frac{4x\cdot dx}{(|x|^2+1)^2}$$

Com isso, temos condições de calcular ds^2, a métrica de S^n.

$$\begin{aligned} |d\overline{y}|^2 &= 4\left\{\frac{(1+|x|^2)^2|dx|^2 - 4(1+|x|^2)(x\cdot dx)^2 + 4(x\cdot dx)^2|x|^2}{(1+|x|^2)^4}\right\} \\ &= \frac{4(1+|x|^2)^2|dx|^2 - 16(x\cdot dx)^2}{(1+|x|^2)^4} \end{aligned}$$

Ainda,

$$|dy_{n+1}|^2 = \frac{16(x\cdot dx)^2}{(1+|x|^2)^4}$$

Logo

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{n+1}(dy_\alpha)^2 = \frac{4|dx|^2}{(1+|x|^2)^2}.$$

A expressão dos símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em termos dos g_{ij}, dados pela métrica, é dada abaixo

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^{k} &= \frac{1}{2}\sum_{r} g^{kr}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}g_{rj}+\frac{\partial}{\partial x_j}g_{ir}-\frac{\partial}{\partial x_r}g_{ij}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\frac{(1+|x|^2)^2}{4}\left\{\delta_{kj}\left(\frac{-16x_i(1+|x|^2)}{(1+|x|^2)^4}\right)+\delta_{ik}\left(\frac{-16x_j(1+|x|^2)}{(1+|x|^2)^4}\right)-\delta_{ij}\left(\frac{-16x_k(1+|x|^2)}{(1+|x|^2)^4}\right)\right\}\\
&= \frac{-2}{(1+|x|^2)}\left\{x_i\,\delta_{kj}+x_j\,\delta_{ik}-x_k\,\delta_{ij}\right\}.
\end{aligned}
$$

Os símbolos de Christoffel obtidos acima, serão necessários para calcularmos $\nabla^2 y_\alpha(X_i,X_j)$ onde y_α, $\alpha=1,\cdots,n+1$ são as funções coordenadas na n- esfera unitária $S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ dadas por

$$
y_\alpha=\begin{cases}\frac{2x_\alpha}{1+|x|^2}, & \alpha=1,\cdots,n\\[2ex] \frac{|x|^2-1}{|x|^2+1}, & \alpha=n+1\end{cases}
$$

Usando as definições 1.12 e 1.13, obtemos

$$
\nabla^2 y_\alpha(X_i,X_j)=\left\langle\nabla_{X_i}\nabla y_\alpha,X_j\right\rangle=X_i\left\langle\nabla y_\alpha,X_j\right\rangle-\left\langle\nabla y_\alpha,\nabla_{X_i}X_j\right\rangle=\frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_k\Gamma_{ij}^k\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_k}.
$$

i) Caso em que $y_\alpha=\frac{|x|^2-1}{|x|^2+1}$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 y_\alpha(X_i,X_j) &= \frac{4\delta_{ij}}{(|x|^2+1)^2}-\frac{16x_ix_j}{(|x|^2+1)^3}-\sum_k\Gamma_{ij}^k\frac{4x_k}{(|x|^2+1)^2}\\
&= \frac{4\delta_{ij}}{(|x|^2+1)^2}-\frac{16x_ix_j}{(|x|^2+1)^3}\\
&\quad+\frac{8}{(1+|x|^2)^3}\left(\sum_k x_kx_i\delta_{kj}+\sum_k x_kx_j\delta_{ik}-\sum_k x_k^2\delta_{ij}\right)\\
&= \frac{4\delta_{ij}}{(|x|^2+1)^2}-\frac{16x_ix_j}{(|x|^2+1)^3}+\frac{8}{(1+|x|^2)^3}\left(x_jx_i+x_ix_j-|x|^2\,\delta_{ij}\right)\\
&= \frac{4\delta_{ij}}{(1+|x|^2)^2}\cdot\frac{1-|x|^2}{1+|x|^2}\\
&= -y_{n+1}\left\langle X_i,X_j\right\rangle
\end{aligned}
$$

ii) Caso em que $y_\alpha = \frac{2x_\alpha}{1+|x|^2}, \alpha = 1, \cdots, n$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 y_\alpha(X_i, X_j) &= -\frac{4x_i\delta_{\alpha j}}{(1+\mid x\mid^2)^2} - \frac{4x_j\delta_{\alpha i}}{(1+\mid x\mid^2)^2} - \frac{4x_\alpha\delta_{ij}}{(1+\mid x\mid^2)^2} + \frac{16x_\alpha x_i x_j}{(1+\mid x\mid^2)^3} \\
&\quad + \sum_k \left(\frac{4}{(1+\mid x\mid^2)^3}\right)\left(\delta_{\alpha k} + \delta_{\alpha k}\mid x\mid^2 - 2x_\alpha x_k\right)\left(x_i\delta_{kj} + x_j\delta_{ik} - x_k\delta_{ij}\right) \\
&= -\frac{8x_\alpha\delta_{ij}}{(1+\mid x\mid^2)^3} \\
&= \frac{-2x_\alpha}{(1+\mid x\mid^2)} \cdot \frac{4\delta_{ij}}{(1+\mid x\mid^2)^2} \\
&= -y_\alpha\left\langle X_i, X_j\right\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla^2 y_\alpha(X_i, X_j) = -y_\alpha\langle X_i, X_j\rangle, \ \alpha = 1, \cdots, n+1. \tag{1-10}$$

Ainda, segue de (1-4)

$$\Delta y_\alpha = -n y_\alpha, \ \alpha = 1, \cdots, n+1. \tag{1-11}$$

A fim de demonstrarmos o Teorema 2.3, que será enunciado no próximo capítulo, trataremos a respeito do conceito de curvatura.

Definição 1.16 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Proposição 1.17 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades*

i) R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é,

$$\begin{aligned}
R(fX_1 + hX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + hR(X_2, Y_1), \\
R(X_1, fY_1 + hY_2) &= fR(X_1, Y_1) + hR(X_1, Y_2),
\end{aligned}$$

$f, h \in \mathcal{D}(M)$, $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

ii) Para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ é linear, isto é,

$$R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W,$$

$$R(X,Y)fZ \quad = \quad fR(X,Y)Z,$$

$f \in \mathcal{D}(M)$, $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$

Prova. A demonstração da proposição segue das definições 1.6 e 1.16. □

Seja $\{E_1, \cdots, E_n\}$ uma base ortonormal de campos de vetores em torno de um ponto $p \in M$. Os componentes da curvatura R são definidos por

$$R(E_i, E_j)E_k = \sum_l R^l_{ijk} E_l.$$

Ainda, temos

$$\langle R(E_i, E_j)E_k, E_s \rangle = \langle \sum_l R^l_{ijk} E_l, E_s \rangle = \sum_l R^l_{ijk} \delta_{ls} = R^s_{ijk}.$$

Definimos

$$R^s_{ijk} := R_{ijks}. \tag{1-12}$$

Definição 1.18 *A curvatura seccional da seção bidimensional $\sigma \subset T_pM$, $p \in M$, gerada pelo par de vetores ortonormais E_i e E_j é definida por*

$$K(\sigma) = \langle R(E_i, E_j)E_j, E_i \rangle.$$

Definição 1.19 *Seja $\{E_1, \cdots, E_n\}$ uma base ortonormal do espaço tangente de M, então o tensor curvatura de Ricci é definido pelo 2-tensor simétrico dado por*

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \langle R(E_i, E_k)E_k, E_j \rangle$$

Os coeficientes R_{ijks} obtidos em (1-12) são denominados coeficientes de Ricci.

No exemplo seguinte, calcularemos o tensor de Ricci na esfera unitária S^n. Usaremos as definições dadas acima e o fato de que a curvatura seccional da esfera unitária $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é constante e igual a 1 (conferir exemplo 1.29).

Exemplo 1.20 *A definição 1.19 fornece-nos que*

$$\begin{aligned} Ric(\nabla f, \nabla f) &= \sum_{k=1}^{n} \langle R(\nabla f, E_k)E_k, \nabla f \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle R(\sum_{i=1}^{n} f_i E_i, E_k)E_k, \sum_{i=1}^{n} f_i E_i \rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} f_i f_i \sum_{k=1}^{n} \langle R(E_i,E_k)E_k,E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i f_i \sum_{k\neq i} \langle R(E_i,E_k)E_k,E_i\rangle \\
&= (n-1)\langle \sum_i f_i E_i, \sum_i f_i E_i\rangle \\
&= (n-1)\langle \nabla f, \nabla f\rangle.
\end{aligned}
$$

Definição 1.21 *Um tensor T de ordem r em uma variedade Riemanniana é uma aplicação multilinear*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{r\ fatores} \longrightarrow \mathcal{D}(M).$$

Isto é, dados $Y_1,\cdots,Y_r \in \mathfrak{X}(M)$, $T(Y_1,\cdots,Y_r)$, é uma função diferenciável em M, e que T é linear em cada argumento, ou seja

$$T(Y_1,\cdots,fX+hY,\cdots,Y_r) = fT(Y_1,\cdots,X,\cdots,Y_r)+hT(Y_1,\cdots,Y,\cdots,Y_r),$$

para todo $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, $f,h\in\mathcal{D}(M)$.

Definição 1.22 *Seja T um tensor de ordem r. A diferencial covariante ∇T de T é um tensor de ordem $(r+1)$ dada por*

$$\nabla T(Y_1,\cdots,Y_r,Z) = Z(T(Y_1,\cdots,Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1,\cdots,Y_r) - \cdots - T(Y_1,\cdots,Y_{r-1},\nabla_Z Y_r).$$

Para cada $Z\in\mathfrak{X}(M)$, a derivada covariante $\nabla_Z T$ de T em relação a Z é um tensor de ordem r dado por

$$\nabla_Z T(Y_1,\cdots,Y_r) = \nabla T(Y_1,\cdots,Y_r,Z).$$

1.2 Imersões Isométricas

Seja $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m=k}$ uma imersão. Então, para cada $p\in M$, existe uma vizinhança $U\subset M$ de p tal que $f(U)\subset\overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Isto é, existem $\overline{U}\subset\overline{M}$, vizinhança de $f(p)$ e um difeomorfismo $\varphi:\overline{U}\longrightarrow V$, onde V é um aberto de $\mathbb{R}^k$, tais que φ aplica difeomorficamente $f(U)\cap\overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n\subset\mathbb{R}^k$. Para simplificarmos a notação, faremos as seguintes identificações, U com $f(U)$ e cada $v\in T_qM$, $q\in U$, com $df_q(v)\in T_{f(q)}\overline{M}$.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$.

Assim, se $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M$ temos

$$v = v^T + v^N,\ v^T \in T_pM,\ v^N \in (T_pM)^{\perp}. \tag{1-13}$$

Denominamos v^T como componente tangencial de v e v^N a componente normal de v.

Indicaremos a conexão Riemanniana de $\overline{M}$ por $\overline{\nabla}$ e a conexão Riemanniana de M por ∇. Se X e Y são campos locais de vetores em M, e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T$$

Definição 1.23 *Se X, Y são campos locais em M,*

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em $\overline{M}$ normal a M.

Afirmação 1.24 *$B(X,Y)$ não depende das extensões $\overline{X}$, $\overline{Y}$.*

Prova. Consideremos $\overline{X}_1$ uma outra extensão de X, temos

$$B(X,Y) - B(X_1,Y) = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}_1}\overline{Y} - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{X}_1}\overline{Y} = \overline{\nabla}_{\overline{X}-\overline{X}_1}\overline{Y}$$

que se anula em M. Da mesma forma provamos que $B(X,Y) - B(X,Y_1)$ se anula em M. □

Logo, $B(X,Y)$ está bem definida. A partir de agora, indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $f(U) \approx U$.

Proposição 1.25 *Se X, $Y \in \mathfrak{X}(U)$, a aplicação $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \longrightarrow \mathfrak{X}(U)^{\perp}$ dada por*

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Prova. Seja $f \in \mathcal{D}(U)$ e indiquemos por $\overline{f}$ uma extensão de f a $\overline{U}$, temos

$$B(X, fY) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}(\overline{f}\overline{Y}) - \nabla_X(fY) = \overline{f}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} + \overline{X}(\overline{f})\overline{Y} - f\nabla_X Y - X(f)Y.$$

Como em M temos $\overline{f} = f$ e $\overline{X}(\overline{f}) = X(f)$ segue

$$B(X, fY) = fB(X, Y).$$

As demais condições para bilinearidade de B, segue das propriedades de linearidade de uma conexão. Resta-nos provar que B é simétrica

$$\begin{aligned} B(X,Y) - B(Y,X) &= \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y - (\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} - \nabla_Y X) = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}) - (\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &= [\overline{X}, \overline{Y}] - [X, Y]. \end{aligned}$$

Como em M, $[\overline{X}, \overline{Y}] = [X, Y]$ concluímos que $B(X, Y) = B(Y, X)$. □

Exprimindo, B em um sistema de coordenadas; visto que B é bilinear, concluímos que o valor de $B(X, Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$. Logo $B(X, Y)(p) = B(x, y)$, onde $x = X(p)$ e $y = Y(p)$.

Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \; x, \; y \; \in \; T_pM$$

é uma forma bilinear simétrica. Tal fato segue diretamente da proposição 1.25.

Definição 1.26 *A forma quadrática II_η definida em T_pM por*

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal η.

Como H_η é uma forma bilinear e simétrica então fica associada a H_η uma aplicação linear autoadjunta $S_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$ por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

Proposição 1.27 *Sejam $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Então*

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Prova. Sejam $y \in T_pM$ e X, Y extensões locais de x, y, respectivamente, e tangentes a M. Temos que $\langle N, Y\rangle = 0$, logo

$$\begin{aligned}\langle S_\eta(x), y\rangle &= \langle B(X,Y)(p), N\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N\rangle(p) = \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle(p) - \langle \nabla_X Y, N\rangle(p)\\ &= \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle(p)\end{aligned}$$

pois $\nabla_X Y$ é tangente a M e N é normal a M.

Pela compatibilidade da métrica, segue

$$\begin{aligned}\langle S_\eta(x), y\rangle &= \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle(p) = -\langle \overline{\nabla}_X N, Y\rangle(p) = -\langle (\overline{\nabla}_X N)^T + (\overline{\nabla}_X N)^N, Y\rangle(p)\\ &= -\langle (\overline{\nabla}_X N)^T, Y\rangle(p) = -\langle (\overline{\nabla}_X N)^T, y\rangle,\end{aligned}$$

para todo $y \in T_pM$.

Portanto, $S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_X N)^T$. □

Consideremos o caso em que $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$. Daremos uma interpretação geométrica para S_η.

Seja N uma extensão local de η, unitária e normal a M. Seja $S^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}\,;\, x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ a esfera unitária de $\mathbb{R}^{n+1}$. Transladando a origem do campo N para a origem do $\mathbb{R}^{n+1}$ definimos a aplicação normal de Gauss, $g : M^n \longrightarrow S^n$ dada por

$$g(q) \;=\; ponto\ final\ do\ transladado\ de\ N(q).$$

Como T_qM e $T_{g(q)}S^n$ são paralelos então podemos identificá-los e $dg_q : T_qM \longrightarrow T_qM$ é dada por

$$dg_q(x) = \frac{d}{dt}(N \circ c(t))_{t=0} = \overline{\nabla}_x N = (\overline{\nabla}_x N)^T = -S_\eta(x)$$

onde $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ é uma curva diferenciável com $c(0) = q$ e $c'(0) = x$. Para obtermos a penúltima igualdade usamos o fato que $\langle N, N\rangle = 1$ e a última igualdade segue da proposição 1.27.

Agora, relacionaremos as curvaturas de M e $\overline{M}$. Se $x, y \in T_pM \subset T_p\overline{M}$, são linearmente independentes, indicaremos por $K(x,y)$ e $\overline{K}(x,y)$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, no plano gerado por x e y.

Teorema 1.28 (Gauss) *Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de T_pM. Então*

$$K(x,y) - \overline{K}(x,y) = \langle B(x,x), B(y,y)\rangle - |\,B(x,y)\,|^2 \tag{1-14}$$

A demonstração do Teorema acima, pode ser conferida em [5].

No caso de hipersuperfície $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$, a fórmula de Gauss (1-14) admite uma simplificação. Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$, $|\eta| = 1$. Seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM para a qual S_η é diagonal, isto é $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, \cdots, n$, onde $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ são os valores próprios de S_η. Então se $i \neq j$ a fórmula de Gauss (1-14) fornece-nos

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j \tag{1-15}$$

pois, $H_\eta(e_i, e_j) = 0$ e $H_\eta(e_i, e_i) = \lambda_i$.

Exemplo 1.29 *Orientemos $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ pelo campo normal unitário $N(x) = -x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|x| = 1$. A aplicação normal de Gauss é então igual a $-I$, onde I é a identidade de S^n. Decorre que a aplicação autoadjunta S_η tem todos os seus valores próprios iguais a 1. Isto é, para todo $p \in S^n$, todo $v \in T_pS^n$ é um vetor próprio. Usando a expressão (1-15) concluímos que a curvatura seccional da esfera unitária $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é constante e igual a 1.*

Escolhendo um referencial ortonormal $E_1, \cdots, E_n$ de vetores em $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$, onde U é uma vizinhança de p na qual f é um mergulho, podemos escrever, em p

$$B(x, y) = \sum_i H_i(x, y) E_i, \; x, \; y \; \in \; T_pM, \; i = 1, \cdots, n$$

onde $H_i = H_{E_i}$. O vetor normal dado por

$$H = \frac{1}{n} \sum_i (\textit{traço } S_i) E_i,$$

onde $S_i = S_{E_i}$, não depende do referencial E_i escolhido. O vetor H é chamado o vetor curvatura média de f.

1.3 As Identidades de Green

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados importantes para o desenvolvimento do trabalho. Estes resultados são pré-requisitos para a manipulação dos conceitos, que serão desenvolvidos nos próximos capítulos. Aqui, faremos uso da seguinte notação *div X* que denotará o divergente de um campo vetorial X.

Seja M uma variedade Riemanniana, n- dimensional, $n \geq 1$, conexa, C^∞. Assumamos que M tem fronteira ∂M; que a menos que digamos o contrário, também é C^∞, com métrica Riemanniana induzida e mensurada, a densidade da medida sendo denotado por dA. Seja ν denotando o campo vetorial unitário normal e exterior a ∂M.

Aqui, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é o produto interno em T_pM, $p \in M$.

Teorema 1.30 (Teorema da Divergência) *Sejam X um campo vetorial que é C^1 em $\overline{M}$ e com suporte compacto em $\overline{M}$. Então*

$$\int_M (div\ X) dV = \int_{\partial M} \langle X, \nu\rangle dA.$$

Mais detalhes a respeito deste teorema e do seguinte podem ser conferidos em [7].

Agora, apresentaremos as identidades de Green as quais são obtidas diretamente do Teorema do Divergente 1.30.

Teorema 1.31 (Identidades de Green) *Sejam $h \in C^1(\overline{M})$, $f \in C^2(\overline{M})$, tal que $h\nabla f$ tem suporte compacto em $\overline{M}$. Então*

$$\int_M (h\Delta f + \langle \nabla h, \nabla f\rangle)\, dV = \int_{\partial M} h\frac{\partial f}{\partial \nu}\, dA.$$

Se também temos $h \in C^2(\overline{M})$ e ambos f, h tem suporte compacto em $\overline{M}$, então

$$\int_M (h\Delta f - f\Delta h)\, dV = \int_{\partial M} \Big(h\frac{\partial f}{\partial \nu} - f\frac{\partial h}{\partial \nu}\Big)\, dA.$$

1.4 Alguns Resultados de Análise Funcional

Neste trabalho, estamos estudando propriedades dos autovalores do operador $(-\Delta)^l$. Nesta seção, trataremos de forma mais específica de resultados utilizados para esse operador e seus autovalores. Consideremos o seguinte problema

$$\begin{aligned} (-\Delta)^l u = \lambda u \quad &em \quad M \\ u|_{\partial M} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial M} = \cdots = &\frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}}\Big|_{\partial M} = 0. \end{aligned} \tag{1-16}$$

No problema acima, os números λ são os autovalores de $(-\Delta)^l$. Além disso, para um dado autovalor λ, seu espaço vetorial de soluções é referido como seu autoespaço. Os elementos de cada autoespaço são chamados autofunções.

Seja $L^2(M)$ o espaço de funções mensuráveis f em M tais que $\int_M |f|^2\, dV < +\infty$. Em $L^2(M)$ temos os produto interno usual e a norma induzida, dada por

$$(f,h) = \int_M fhdV, \qquad \| f \|^2 = (f,f) \tag{1-17}$$

para $f,h \in L^2(M)$. Com o produto interno, $L^2(M)$ é um espaço de Hilbert.

O teorema seguinte que pode ser conferido em [7] nos dá algumas informações.

Teorema 1.32 *Para o problema de autovalor (1-16) citado acima, o conjunto dos autovalores consiste uma sequência*

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \uparrow +\infty,$$

e cada autoespaço associado é dimensionalmente finito. Autoespaços pertencentes a autovalores distintos são ortogonais em $L^2(M)$, e $L^2(M)$ é a soma direta de todos os autoespaços. Além disso, cada autofunção é C^∞ em $\overline{M}$.

O próximo teorema que enunciaremos é a conhecida desigualdade de Hölder, a qual aparecerá com frequência no trabalho, auxiliando-nos a exprimir desigualdades para os autovalores.

Teorema 1.33 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1$ e*

$$\left| \int fg \right| \leq \int | fg | \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Mais detalhes a respeito da desigualdade de Hölder pode ser conferido em [4]. Observemos que no caso em que $p = q = 2$ a desigualdade de Hölder (1.33) reduz- se a desigualdade de Schwarz.

Os próximos resultados serão de imensa importância no terceiro capítulo do trabalho. Apesar de não serem citados recorrentemente, seu uso permeia as demonstrações das desigualdades dos autovalores do poli-harmônico.

O teorema seguinte reforça o que foi dito no Teorema 1.32 e pode ser conferido no trabalho apresentado em [6].

Teorema 1.34 (Espectral) *Considerando o problema de autovalores de $(-\Delta)^l$, as seguintes afirmações são verdadeiras*

1) *Se repetirmos cada autovalor levando em conta sua multiplicidade, podemos escrever*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots,$$

em que $\lambda_k \longrightarrow \infty$ quando $k \longrightarrow \infty$.

2) *Existe uma base ortonormal* $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ *de* $L^2(M)$ *tal que cada* u_k *é uma autofunção correspondente a* λ_k.

Teorema 1.35 (Desigualdade de Rayleigh-Ritz) *Cada autovalor* λ_k *satisfaz*

$$\lambda_k = \min \frac{\int_\Omega \phi(-\Delta)^l \phi}{\int_\Omega |\phi|^2},$$

em que o mínimo é tomado sobre todas as funções $\phi \in L^2(M), \phi \not\equiv 0$, *tais que, se* $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ *é uma base ortonormal correspondente a cada autovalor, temos*

$$\int_\Omega u_j \phi = 0$$

para $j = 1, 2, \cdots, k-1$, *e a condição de fronteira é satisfeita como segue*

$$\phi\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \phi}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = \cdots = \frac{\partial^{l-1}\phi}{\partial \nu^{l-1}}\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

As funções ϕ são chamadas funções-teste.

Uma outra abordagem a respeito da desigualdade de Rayleigh-Ritz pode ser conferida em [7].

Teorema 1.36 (Nash) *Se* M^n *é uma variedade Riemanniana completa, então ela pode ser imersa isometricamente em* $\mathbb{R}^N$, *para algum* $N \geq n$.

Mais detalhes sobre o teorema pode ser conferido em [10].

Lema 1.37 *Sejam* y_α, $\alpha = 1, \cdots, N$, *as coordenadas do vetor posição de uma variedade* M^n, *imersa isometricamente em* $\mathbb{R}^N$ *e sejam* Δ *e* ∇ *os operadores Laplaciano e Gradiente, respectivamente, em* M, *com a métrica induzida. Para qualquer função* $u \in C^\infty(M)$, *temos*

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \langle \nabla y^\alpha, \nabla u \rangle^2 = |\nabla u|^2, \tag{1-18}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{N} (\Delta y^\alpha)^2 = n^2 |H|^2, \tag{1-19}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \Delta y^\alpha \nabla y^\alpha = 0, \tag{1-20}$$

onde $|H|$ *é a curvatura média de* M.

A demonstração do Lema acima pode ser conferida em [10].

CAPÍTULO 2

Resultados Auxiliares

Neste capítulo, apresentamos algumas ferramentas que serão úteis nas demonstrações dos principais resultados de nosso trabalho. Seu entendimento é fundamental para conseguirmos manipular as desigualdades de autovalores do operador poli-harmônico.

2.1 Algumas Desigualdades Auxiliares

Os lemas seguintes são de uso recorrente no próximo capítulo.

Lema 2.1 *Sejam $\{a_i\}_{i=1}^m$, $\{b_i\}_{i=1}^m$ e $\{c_i\}_{i=1}^m$ três sequências de números reais não negativos com $\{a_i\}$ decrescente e $\{b_i\}$ e $\{c_i\}$ crescentes. Então vale a seguinte desigualdade*

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i^2 b_i\right)\left(\sum_{i=1}^m a_i c_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^m a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^m a_i b_i c_i\right) \tag{2-1}$$

Prova. Provaremos por indução sobre m

i) Para $m = 1$, temos
$$(a_1^2 b_1)(a_1 c_1) = a_1^2(a_1 b_1 c_1).$$

ii) Suponha que (2-1) vale para $m = k$, isto é

$$\left(\sum_{i=1}^k a_i^2 b_i\right)\left(\sum_{i=1}^k a_i c_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^k a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^k a_i b_i c_i\right) \tag{2-2}$$

Usando (2-2) provaremos que é válida para $m = k+1$

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i c_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i c_i\right) \\
= \ &\left(a_{k+1}^2 + \left(\sum_{i=1}^k a_i^2\right)\right)\left(a_{k+1} b_{k+1} c_{k+1} + \left(\sum_{i=1}^k a_i b_i c_i\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \Big(a_{k+1}^2 b_{k+1} + \big(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 b_i\big)\Big)\Big(a_{k+1}c_{k+1} + \big(\sum_{i=1}^{k} a_i c_i\big)\Big) \\
&= \big(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\big)\big(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i c_i\big) - \big(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 b_i\big)\big(\sum_{i=1}^{k} a_i c_i\big) \\
&- a_{k+1}^2\Big[b_{k+1}\big(\sum_{i=1}^{k} a_i c_i\big) - \big(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i c_i\big)\Big] + a_{k+1}c_{k+1}\Big[b_{k+1}\big(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\big) - \big(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 b_i\big)\Big] \\
&\geq -a_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k}(b_{k+1}-b_i)a_i c_i + a_{k+1}c_{k+1}\left[\sum_{i=1}^{k}(b_{k+1}-b_i)a_i^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{k}(b_{k+1}-b_i)a_{k+1}a_i(c_{k+1}a_i - a_{k+1}c_i) \;\geq\; 0.
\end{aligned}
$$

Logo, a desigualdade (2-2) vale para $m = k+1$.

Portanto, (2-1) é válida. $\square$

A seguir apresentamos a famosa desigualdade de Chebyshev, a qual nos auxiliará a obter uma expressão para o k- ésimo autovalor do operador poli-harmônico.

Lema 2.2 (Desigualdade Chebyshev Reversa) *Suponha que $\{a_i\}_{i=1}^m$ e $\{b_i\}_{i=1}^m$ são duas sequências reais com $\{a_i\}$ crescente e $\{b_i\}$ decrescente. Então vale a seguinte desigualdade*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \leq \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m} b_i\right)$$

Prova. Usamos o fato que $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \leq 0$, para $i, j = 1, \cdots, m$ e aplicamos o somatório sobre i e j. Assim, obtemos

$$
\begin{aligned}
0 \geq \sum_{i,j=1}^{m}(a_i - a_j)(b_i - b_j) &= \sum_{i,j}(a_i b_i - a_i b_j - a_j b_i + a_j b_j) \\
&= m\sum_{i=1}^{m} a_i b_i - \big(\sum_{i=1}^{m} a_i\big)\big(\sum_{j=1}^{m} b_j\big) - \big(\sum_{j=1}^{m} a_j\big)\big(\sum_{i=1}^{m} b_i\big) + m\sum_{j=1}^{m} a_j b_j
\end{aligned}
$$

Para simplificar, usamos a seguinte notação

$$\sum a = \sum_{i=1}^{m} a_i, \quad \sum b = \sum_{i=1}^{m} b_i, \quad \sum ab = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$$

Donde, concluímos

$$2\Big(m\sum ab - \sum a\sum b\Big) \leq 0 \Rightarrow m\sum ab - \sum a\sum b \leq 0$$

o que conclui a demonstração. □

O Lema 2.2 pode ser conferido mais detalhadamente em [13].

2.2 A Fórmula de Böchner-Lichnerowicz

O teorema a seguir pode ser conferido em [18]. Aqui usaremos as expressões obtidas em (1-5), (1-6) e (1-8).

Teorema 2.3 (Fórmula de Böchner) *Se M é uma variedade Riemanniana e $f \in C^\infty(M)$, então*

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = |\nabla^2 f|^2 + \langle \nabla f, \nabla\Delta f\rangle + Ric(\nabla f, \nabla f). \tag{2-3}$$

Prova. Seja $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $V \subset M$. Como

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n f_i E_i$$

então

$$|\nabla f|^2 = \langle \sum_{i=1}^n f_i E_i, \sum_{i=1}^n f_i E_i\rangle = \sum_{i=1}^n (f_i)^2.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (|\nabla f|^2)_{jj} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n (f_i)^2\right)_{jj} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n 2 f_i f_{ij}\right)_{j} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \left(2\sum_{i=1}^n f_{ij}^2 + 2\sum_{i=1}^n f_i f_{ijj}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n f_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^n f_i f_{ijj}.
\end{aligned}$$

Como $f_{ij} = f_{ji}$, então $\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} f_i f_{jij}$.

A fórmula de Ricci (conf. em [18]) diz que

$$f_{jij} = f_{jji} + \sum_{l=1}^{n} f_l R_{ljij}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) &= \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} f_i f_{jij} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} f_i \left(f_{jji} + \sum_{l=1}^{n} f_l R_{ljij} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} f_i f_{jji} + \sum_{i,l=1}^{n} f_i f_l \left(\sum_{j=1}^{n} R_{ljij} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} f_i f_{jji} + \sum_{i,l=1}^{n} f_i f_l R_{li} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 + \left\langle \sum_{i=1}^{n} f_i E_i, \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (f_{jj})_i E_i \right\rangle + Ric\left(\sum_{i}^{n} f_i E_i, \sum_{l=1}^{n} f_l E_l \right)
\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = |\nabla^2 f|^2 + \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle + Ric(\nabla f, \nabla f).$$

□

CAPÍTULO 3

Operadores Poli-harmônicos

Neste capítulo, inicialmente, provaremos algumas desigualdades mais gerais para autovalores de operadores poli-harmônicos em variedades Riemannianas compactas. Em seguida, cumpriremos o objetivo do trabalho, isto é, apresentar uma desigualdade universal do tipo Yang em domínios compactos no Espaço Euclidiano. Para finalizar, apresentaremos desigualdades universais em domínios compactos na esfera S^n.

3.1 Os Autovalores do Operador Poli-harmônico em Variedades Compactas

Antes de iniciarmos as demonstrações das desigualdades mais gerais, apresentaremos um lema que também pode ser conferido em [1]. Este lema, será parte fundamental da prova da desigualdade (3-26) apresentada no Teorema 3.4.

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $A : \mathcal{D} \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ um operador autoadjunto definido em um domínio denso $\mathcal{D}$ que é limitado inferiormente e tem um espectro discreto $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$,

$$\{B_k : A(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{H}\}_{k=1}^{N}$$

uma coleção de operadores autoadjuntos deixando $\mathcal{D}$ invariante, e $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ os autovetores normalizados de A, u_i correspondendo a λ_i. Assumiremos que $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}$. $[A,B]$ denota o comutador de dois operadores definido por $[A,B] = AB - BA$, e $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$.

Sejam $\rho_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \langle [A,B_k]u_i, B_k u_i\rangle$ e $\Lambda_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \|[A,B_k]u_i\|^2$.

Lema 3.1 *O autovalor λ_i do operador A satisfaz as seguintes desigualdades*

$$\sum_{i=1}^{m}\rho_i \leq \frac{\sum_{i=1}^{m}\Lambda_i}{\lambda_{m+1}-\lambda_m}, \tag{3-1}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\rho_i \leq \sum_{j=1}^{m}\frac{\Lambda_i}{\lambda_{m+1}-\lambda_i}, \tag{3-2}$$

e

$$\sum_{i=1}^{m}(\lambda_{m+1}-\lambda_i)^2\rho_i \leq \sum_{i=1}^{m}(\lambda_{m+1}-\lambda_i)\Lambda_i \tag{3-3}$$

Prova. Seja ϕ uma função teste para λ_{m+1} na desigualdade de Rayleight-Ritz 1.35. Então

$$\lambda_{m+1} \leq \frac{\langle A\phi,\phi\rangle}{\langle\phi,\phi\rangle} \tag{3-4}$$

e

$$\langle\phi,u_j\rangle = 0,\ j=1,\cdots,m. \tag{3-5}$$

Seja ϕ_i dado por

$$\phi_i = Bu_i - \sum_{j=1}^{m}a_{ij}u_j, \tag{3-6}$$

onde B é um dos $B_{k's}$, $k=1,\cdots,N$. Usando a condição (3-5) temos

$$\langle Bu_i - \sum_{j=1}^{m}a_{ij}u_j, u_j\rangle = 0,$$

isto é,

$$\langle Bu_i,u_j\rangle = a_{ij}.$$

Como B é um operador autoadjunto podemos inferir o seguinte fato

$$a_{ji} = \langle Bu_j,u_i\rangle = \langle u_j,Bu_i\rangle = \overline{\langle Bu_i,u_j\rangle} = \overline{a_{ij}}.$$

Ainda,

$$\|\phi_i\|^2 = \langle\phi_i,\phi_i\rangle = \langle Bu_i - \sum_{j=1}^{m}a_{ij}u_j,\phi_i\rangle = \langle Bu_i,\phi_i\rangle \tag{3-7}$$

e

$$\langle A\phi_i,\phi_i\rangle \quad = \quad \langle ABu_i - \sum_{j=1}^{m}a_{ij}Au_j,\phi_i\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle ABu_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\lambda_j u_j, \phi_i \rangle \\
&= \langle ABu_i, \phi_i \rangle \\
&= \langle [A,B]u_i, \phi_i \rangle + \langle BAu_i, \phi_i \rangle \\
&= \langle [A,B]u_i, \phi_i \rangle + \lambda_i \langle Bu_i, \phi_i \rangle \\
&= \langle [A,B]u_i, \phi_i \rangle + \lambda_i \langle \phi_i, \phi_i \rangle \qquad (3\text{-}8)
\end{aligned}
$$

A última igualdade segue de (3-7).

Substituíndo (3-8) em (3-4), obtemos

$$(\lambda_{m+1} - \lambda_i) \leq \frac{\langle [A,B]u_i, \phi_i \rangle}{\langle \phi_i, \phi_i \rangle}. \qquad (3\text{-}9)$$

Ainda, temos

$$
\begin{aligned}
\langle [A,B]u_i, \phi_i \rangle &= \langle [A,B]u_i, Bu_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} u_j \rangle \\
&= \langle [A,B]u_i, Bu_i \rangle - \sum_{j=1}^{m} \overline{a_{ij}} \langle [A,B]u_i, u_j \rangle. \qquad (3\text{-}10)
\end{aligned}
$$

Seja $b_{ij} = \langle [A,B]u_i, u_j \rangle$. Então

$$\langle [A,B]u_i, \phi_i \rangle = \langle [A,B]u_i, Bu_i \rangle - \sum_{j=1}^{m} \overline{a_{ij}} b_{ij}. \qquad (3\text{-}11)$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
b_{ij} &= \langle [A,B]u_i, u_j \rangle \\
&= \langle ABu_i, u_j \rangle - \langle BAu_i, u_j \rangle \\
&= \langle Bu_i, Au_j \rangle - \lambda_i \langle Bu_i, u_j \rangle \\
&= (\lambda_j - \lambda_i) \langle Bu_i, u_j \rangle \\
&= (\lambda_j - \lambda_i) a_{ij}.
\end{aligned}
$$

Isto é,

$$b_{ij} = (\lambda_j - \lambda_i) a_{ij}. \qquad (3\text{-}12)$$

Substituíndo (3-12) em (3-11), concluímos

$$\langle [A,B]u_i, \phi_i\rangle = \langle [A,B]u_i, Bu_i\rangle - \sum_{j=1}^{m}(\lambda_j - \lambda_i) \mid a_{ij} \mid^2 . \tag{3-13}$$

Faremos uma leve pausa na demonstração para apresentarmos dois resultados que são ferramentas importantes para a continuidade desta.

Teorema 3.2 (Cauchy- Schwarz "Optimal") *Com a notação e escolha de ϕ_i dadas acima, temos*

$$\frac{\langle [A,B]u_i, \phi_i\rangle}{\langle \phi_i, \phi_i\rangle} \le \frac{\| [A,B]u_i \|^2 - \sum_{j=1}^{m} \mid b_{ij} \mid^2}{\langle [A,B]u_i, \phi_i\rangle}. \tag{3-14}$$

Prova. Temos que $\langle u_j, \phi_i\rangle = 0$, para $1 \le i, j \le m$; além disso, $\Big\langle [A,B]u_i, \phi_i \Big\rangle$ é real. De fato, da igualdade (3-13) podemos observar que basta mostrar que $\langle [A,B]u_i, Bu_i\rangle$ é real. Com efeito

$$\langle [A,B]u_i, Bu_i\rangle = \langle ABu_i - BAu_i, Bu_i\rangle = \langle ABu_i, Bu_i\rangle - \lambda_i \| Bu_i \|^2 .$$

Como A é autoadjunto, então $\langle ABu_i, Bu_i\rangle = \langle Bu_i, ABu_i\rangle$. Segue que o produto interno comuta, deste modo, $\langle ABu_i, Bu_i\rangle$ é real e, consequentemente $\langle [A,B]u_i, Bu_i\rangle$. Logo

$$\Big(\langle [A,B]u_i, \phi_i\rangle\Big)^2 = \Big(\langle [A,B]u_i - \sum_{j=1}^{m} b_{ij}u_j, \phi_i\rangle\Big)^2 \le \| [A,B]u_i - \sum_{j=1}^{m} b_{ij}u_j \|^2 \| \phi_i \|^2$$

A última parte segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz no caso real. Observemos que

$$\begin{aligned}
\| [A,B]u_i - \sum_{j=1}^{m} b_{ij}u_j \|^2 &= \langle [A,B]u_i - \sum_{j=1}^{m} b_{ij}u_j, [A,B]u_i - \sum_{j=1}^{m} b_{ij}u_j\rangle \\
&= \langle [A,B]u_i, [A,B]u_i\rangle - 2\sum_{j=1}^{m} \overline{b_{ij}}\langle [A,B]u_i, u_j\rangle + \sum_{j=1}^{m} \mid b_{ij} \mid^2 \\
&= \| [A,B]u_i \|^2 - \sum_{j=1}^{m} \mid b_{ij} \mid^2
\end{aligned}$$

Logo

$$\Big(\langle [A,B]u_i, \phi_i\rangle\Big)^2 \le \Big(\| [A,B]u_i \|^2 - \sum_{j=1}^{m} \mid b_{ij} \mid^2\Big) \| \phi_i \|^2 . \tag{3-15}$$

Segue de (3-9) que $\langle [A,B]u_i, \phi_i \rangle > 0$, visto que $i = 1, \cdots, m$. Dividindo este termo dos dois lados de (3-15), obtemos

$$\frac{\langle [A,B]u_i, \phi_i \rangle}{\langle \phi_i, \phi_i \rangle} \leq \frac{\left(\| [A,B]u_i \|^2 - \sum_{j=1}^{m} | b_{ij} |^2 \right)}{\langle [A,B]u_i, \phi_i \rangle}$$

o que conclui a demonstração do Teorema. □

Corolário 3.3 *Sobre as hipóteses do problema, a seguinte desigualdade é válida.*

$$(\lambda_{m+1} - \lambda_i)\Big(\langle [A,B]u_i, Bu_i \rangle - \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j - \lambda_i) \, | a_{ij} |^2 \Big) \leq \| [A,B]u_i \|^2 - \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j - \lambda_i)^2 \, | a_{ij} |^2 . \tag{3-16}$$

Prova. Usando a desigualdade (3-9), o Teorema 3.2 seguido pelas igualdades (3-12) e (3-13), obtemos

$$\begin{aligned}
(\lambda_{m+1} - \lambda_i) &\leq \frac{\langle [A,B]u_i, \phi_i \rangle}{\langle \phi_i, \phi_i \rangle} \\
&\leq \frac{\| [A,B]u_i \|^2 - \sum_{j=1}^{m} | b_{ij} |^2}{\langle [A,B]u_i, \phi_i \rangle} \\
&= \frac{\| [A,B]u_i \|^2 - \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j - \lambda_i)^2 \, | a_{ij} |^2}{\langle [A,B]u_i, Bu_i \rangle - \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j - \lambda_i) \, | a_{ij} |^2}.
\end{aligned}$$

Isto é

$$(\lambda_{m+1} - \lambda_i)\Big(\langle [A,B]u_i, Bu_i \rangle - \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j - \lambda_i) \, | a_{ij} |^2 \Big) \leq \| [A,B]u_i \|^2 - \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j - \lambda_i)^2 \, | a_{ij} |^2$$

o que finaliza a demonstração do corolário. □

Agora, com estes dois resultados devidamente provados daremos continuidade à prova do Lema.

Como B é um dos $B_{k's}$, $a_{ij} = a_{ij}^k$. Seja

$$A_{ij} \equiv \sum_{k=1}^{N} | a_{ij}^k |^2 . \tag{3-17}$$

Temos que $A_{ij}=A_{ji}\geq 0$. Aplicando somatório sobre k em (3-16), $1\leq k\leq N$ e usando as definições de ρ_i, Λ_i e A_{ij}, obtemos

$$(\lambda_{m+1}-\lambda_i)\Big(\rho_i-\sum_{j=1}^{m}(\lambda_j-\lambda_i)A_{ij}\Big) \;\leq\; \Lambda_i-\sum_{j=1}^{m}(\lambda_j-\lambda_i)^2A_{ij} \tag{3-18}$$

Minimizando o termo do lado direito de (3-18), obtemos

$$(\lambda_{m+1}-\lambda_i)\Big(\rho_i-\sum_{j=1}^{m}(\lambda_j-\lambda_i)A_{ij}\Big) \;\leq\; \Lambda_i \tag{3-19}$$

Lembramos que $\rho_i-\sum_{j=1}^{m}(\lambda_j-\lambda_i)A_{ij}>0$, isto segue de (3-13) e do fato de $\langle[A,B]u_i,\phi_i\rangle>0$. De (3-19) passamos para

$$(\lambda_{m+1}-\lambda_m)\Big(\rho_i-\sum_{j=1}^{m}(\lambda_j-\lambda_i)A_{ij}\Big)\leq \Lambda_i \tag{3-20}$$

Aplicando somatório sobre i de $1,\cdots,m$, temos

$$(\lambda_{m+1}-\lambda_m)\Big(\sum_{i=1}^{m}\rho_i-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(\lambda_j-\lambda_i)A_{ij}\Big)\leq \sum_{i=1}^{m}\Lambda_i \tag{3-21}$$

Como $A_{ij}=A_{ji}$ temos que

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(\lambda_j-\lambda_i)A_{ij}=0. \tag{3-22}$$

Usando a informação obtida em (3-22) na desigualdade (3-21), obtemos

$$\sum_{i=1}^{m}\rho_i \;\leq\; \frac{\sum_{i=1}^{m}\Lambda_i}{\lambda_{m+1}-\lambda_m},$$

o que prova (3-1).

Agora, reescrevemos (3-19)

$$\rho_i-\sum_{j=1}^{m}(\lambda_j-\lambda_i)A_{ij}\leq \frac{\Lambda_i}{\lambda_{m+1}-\lambda_i}$$

Aplicando somatório sobre i e usando (3-22) temos

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i \leq \sum_{i=1}^{m} \frac{\Lambda_i}{\lambda_{m+1}-\lambda_i},$$

o que prova (3-2).

Para finalizarmos, reescrevemos (3-18)

$$(\lambda_{m+1}-\lambda_i)\rho_i \;\leq\; \Lambda_i + (\lambda_{m+1}-\lambda_i)\sum_{j=1}^{m}(\lambda_j-\lambda_i)A_{ij} - \sum_{j=1}^{m}(\lambda_j-\lambda_i)^2 A_{ij} \tag{3-23}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}(\lambda_j-\lambda_i)^2 A_{ij} &= \sum_{j=1}^{m}(\lambda_j-\lambda_i)(\lambda_j-\lambda_{m+1}+\lambda_{m+1}-\lambda_i)A_{ij}\\ &= -\sum_{j=1}^{m}(\lambda_j-\lambda_i)(\lambda_{m+1}-\lambda_j)A_{ij} + \sum_{j=1}^{m}(\lambda_j-\lambda_i)(\lambda_{m+1}-\lambda_i)A_{ij}.\end{aligned}$$

Substituíndo na desigualdade (3-23), obtemos

$$(\lambda_{m+1}-\lambda_i)\rho_i \;\leq\; \Lambda_i + \sum_{j=1}^{m}(\lambda_j-\lambda_i)(\lambda_{m+1}-\lambda_j)A_{ij}. \tag{3-24}$$

Multiplicando por $(\lambda_{m+1}-\lambda_i)$ e aplicando somatório sobre i, inferimos

$$\sum_{i=1}^{m}(\lambda_{m+1}-\lambda_i)^2\rho_i \;\leq\; \sum_{i=1}^{m}(\lambda_{m+1}-\lambda_i)\Lambda_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(\lambda_j-\lambda_i)(\lambda_{m+1}-\lambda_i)(\lambda_{m+1}-\lambda_j)A_{ij}$$

Ora,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(\lambda_j-\lambda_i)(\lambda_{m+1}-\lambda_i)(\lambda_{m+1}-\lambda_j)A_{ij} = 0.$$

Logo

$$\sum_{i=1}^{m}(\lambda_{m+1}-\lambda_i)^2\rho_i \;\leq\; \sum_{i=1}^{m}(\lambda_{m+1}-\lambda_i)\Lambda_i,$$

o que prova (3-3). □

A seguir são apresentadas algumas desigualdades gerais, mencionadas no início do capítulo. Para nós, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotará a métrica em uma variedade Riemanniana M e o produto interno usual em L^2, definido em (1-17). Ainda, $\|\cdot\|^2 = \int_M |\cdot|^2$.

Teorema 3.4 *Seja $(M, <, >)$ uma variedade Riemanniana n-dimensional compacta conexa com fronteira ∂M (possivelmente vazia) e seja ν o campo de vetores normal unitário exterior de ∂M. Seja l um inteiro positivo e denote por Δ o operador Laplaciano de M. Considere o problema de autovalor*

$$(-\Delta)^l u = \lambda u \quad em \quad M$$
$$u|_{\partial M} = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial M} = \cdots = \left.\frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}}\right|_{\partial M} = 0. \tag{3-25}$$

Seja λ_i, $i = 1, \cdots$, o i-ésimo autovalor do problema (3-25) e u_i a autofunção ortonormal correspondente a λ_i, isto é,

$$(-\Delta)^l u_i = \lambda_i u_i \quad em \quad M$$

$$u_i|_{\partial M} = \left.\frac{\partial u_i}{\partial \nu}\right|_{\partial M} = \cdots = \left.\frac{\partial^{l-1} u_i}{\partial \nu^{l-1}}\right|_{\partial M} = 0.$$

$$\int_M u_i u_j = \delta_{ij}, \quad para \quad qualquer \;\; i, j = 1, 2, \cdots, .$$

Então para qualquer função $h \in C^{l+2}(M) \cap C^{l+1}(\partial M)$ e qualquer inteiro positivo k, temos

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \int_M hu_i((-\Delta)^l (hu_i) - \lambda_i hu_i) \leq \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \parallel (-\Delta)^l (hu_i) - \lambda_i hu_i \parallel^2 \tag{3-26}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \int_M (-hu_i^2 \Delta h - 2hu_i \langle \nabla h, \nabla u_i \rangle) \quad &\leq \quad \delta \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \int_M hu_i((-\Delta)^l (hu_i) - \lambda_i hu_i) \\ &+ \sum_{i=1}^{k} \frac{(\lambda_{k+1} - \lambda_i)}{\delta} \left\| \langle \nabla h, \nabla u_i \rangle + \frac{u_i \Delta h}{2} \right\|^2,\end{aligned} \tag{3-27}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \int_M (-hu_i^2 \Delta h - 2hu_i \langle \nabla h, \nabla u_i \rangle) \quad &\leq \delta \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \parallel (-\Delta)^l (hu_i) - \lambda_i hu_i \parallel^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{k} \frac{(\lambda_{k+1} - \lambda_i)}{\delta} \left\| \langle \nabla h, \nabla u_i \rangle + \frac{u_i \Delta h}{2} \right\|^2,\end{aligned} \tag{3-28}$$

onde δ é qualquer constante positiva $||g||^2 = \int_M g^2$.

Prova. A desigualdade (3-26) é obtida diretamente do Lema 3.1.

Na desigualdade (3-3), consideraremos $N = 1$, $B_1 = hId$ e $A = (-\Delta)^l$, de onde, obtemos

$$\begin{aligned}
\rho_i &= \langle [A, B_1]u_i, B_1u_i\rangle = \int_M [A, B_1]u_i \cdot B_1u_i = \int_M (AB_1 - B_1A)u_i \cdot B_1u_i \\
&= \int_M ((-\Delta)^l hId - hId(-\Delta)^l)u_i \cdot hIdu_i = \int_M ((-\Delta)^l hu_i - h(-\Delta)^l u_i) \cdot (hu_i) \\
&= \int_M ((-\Delta)^l hu_i - h\lambda_i u_i) \cdot (hu_i)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Lambda_i &= \| [A, B_1]u_i \|^2 = \int_M (AB_1 - B_1A)u_i \cdot (AB_1 - B_1A)u_i \\
&= \int_M ((-\Delta)^l hId - hId(-\Delta)^l)u_i \cdot ((-\Delta)^l hId - hId(-\Delta)^l)u_i \\
&= \int_M (((-\Delta)^l hu_i - h(-\Delta)^l u_i) \cdot ((-\Delta)^l hu_i - h(-\Delta)^l u_i)) \\
&= \int_M (((-\Delta)^l hu_i - h\lambda_i u_i) \cdot ((-\Delta)^l hu_i - h\lambda_i u_i)) = \| (-\Delta)^l hu_i - h\lambda_i u_i \|^2
\end{aligned}$$

Segue de (3-3)

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \int_M ((-\Delta)^l hu_i - \lambda_i hu_i)(hu_i) \leq \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \| (-\Delta)^l hu_i - \lambda_i hu_i \|^2$$

o que demonstra a desigualdade (3-26).

Consideremos as funções $\phi_i : M \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1, \cdots, k$ dadas por

$$\phi_i = hu_i - \sum_{j=1}^{k} r_{ij}u_j \quad \textit{onde} \quad r_{ij} = \int_M hu_iu_j$$

Temos que $\phi_i|_{\partial M} = \left.\frac{\partial \phi_i}{\partial \nu}\right|_{\partial M} = \cdots = \left.\frac{\partial^{l-1}\phi_i}{\partial \nu^{l-1}}\right|_{\partial M} = 0$ e ainda para todo $i, m = 1, \cdots, k$

$$\int_M u_m\phi_i = \int_M u_m(hu_i - \sum_{j=1}^{k} r_{ij}u_j) = \int_M hu_mu_i - \sum_{j=1}^{k} r_{ij} \int_M u_ju_m = r_{mi} - r_{im} = 0$$

Da desigualdade de Rayleigh - Ritz[conferir(1.35)] segue

$$\lambda_{k+1} \int_M \phi_i^2 \leq \int_M \phi_i(-\Delta)^l \phi_i = \lambda_i \int_M \phi_i hu_i + \int_M \phi_i((-\Delta)^l \phi_i - \lambda_i hu_i)$$

Observemos que:

$$\int_M \phi_i^2 = \int_M \phi_i(hu_i - \sum_{j=1}^{k} r_{ij}u_j) = \int_M \phi_i hu_i - \sum_{j=1}^{k} r_{ij} \int_M \phi_iu_j = \int_M \phi_i hu_i.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\lambda_{k+1}\int_M \phi_i^2 &\leq \lambda_i \int_M \phi_i^2 + \int_M \phi_i\Big((-\Delta)^l \phi_i - \lambda_i h u_i\Big)\\
&= \lambda_i \parallel \phi_i \parallel^2 + \int_M \phi_i \left((-\Delta)^l (h u_i - \sum_{j=1}^{k} r_{ij} u_j) - \lambda_i h u_i\right)\\
&= \lambda_i \parallel \phi_i \parallel^2 + \int_M \phi_i\Big((-\Delta)^l (h u_i) - \lambda_i h u_i\Big) - \int_M \phi_i \sum_{j=1}^{k} r_{ij}(-\Delta)^l u_j\\
&= \lambda_i \parallel \phi_i \parallel^2 + \int_M \phi_i\Big((-\Delta)^l (h u_i) - \lambda_i h u_i\Big) - \sum_{j=1}^{k} r_{ij}\int_M \phi_i \lambda_j u_j\\
&= \lambda_i \parallel \phi_i \parallel^2 + \int_M \phi_i\Big((-\Delta)^l (h u_i) - \lambda_i h u_i\Big)\\
&= \lambda_i \parallel \phi_i \parallel^2 + \int_M (h u_i)\Big((-\Delta)^l (h u_i) - \lambda_i h u_i\Big) - \sum_{j=1}^{k} r_{ij}\int_M \Big((-\Delta)^l (h u_i) - \lambda_i h u_i\Big) u_j
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(\lambda_{k+1} - \lambda_i) \parallel \phi_i \parallel^2 \leq \int_M (h u_i)\Big((-\Delta)^l (h u_i) - \lambda_i h u_i\Big) - \sum_{j=1}^{k} r_{ij} s_{ij},$$

$$onde \quad s_{ij} = \int_M ((-\Delta)^l (h u_i) - \lambda_i h u_i) u_j \tag{3-29}$$

Notemos que se $u \in C^{l+2}(M) \cap C^{l+1}(\partial M)$ satisfaz

$$u|_{\partial M} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial M} = \cdots = \frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}}\Big|_{\partial M} = 0 \tag{3-30}$$

então para $l = 2m$, temos

$$u|_{\partial M} = \nabla u|_{\partial M} = \Delta u|_{\partial M} = \nabla(\Delta u)|_{\partial M} = \cdots = \Delta^{m-1} u\Big|_{\partial M} = \nabla(\Delta^{m-1} u)\Big|_{\partial M} = 0. \tag{3-31}$$

e para $l = 2m + 1$

$$u|_{\partial M} = \nabla u|_{\partial M} = \Delta u|_{\partial M} = \nabla(\Delta u)|_{\partial M} = \cdots = \nabla(\Delta^{m-1} u)\Big|_{\partial M} = \Delta^{m} u\Big|_{\partial M} = 0. \tag{3-32}$$

Observemos que u_j e $h u_i$ satisfazem (3-30), logo as condições (3-31) e (3-32) também serão satisfeitas, quando $l = 2m$ e $l = 2m + 1$, respectivamente. Usando as condições

(3-31) e (3-32) e a segunda identidade de Green, repetidas vezes, concluímos que

$$\int_M u_j(-\Delta)^l(hu_i) = \int_M hu_i(-\Delta)^l u_j \tag{3-33}$$

Como $s_{ij} = \int_M ((-\Delta)^l(hu_i) - \lambda_i hu_i)u_j$ e usando (3-33), obtemos

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \int_M ((-\Delta)^l(hu_i))u_j - \lambda_i \int_M hu_i u_j \\ &= \int_M hu_i(-\Delta)^l u_j - \lambda_i \int_M hu_i u_j \\ &= \lambda_j \int_M hu_i u_j - \lambda_i \int_M hu_i u_j \\ &= (\lambda_j - \lambda_i) r_{ij}. \end{aligned}$$

Seja $p_i(h) = (-\Delta)^l(hu_i) - \lambda_i hu_i$. Segue de (3-29)

$$\begin{aligned} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \parallel \phi_i \parallel^2 &\leq \int_M ((hu_i)((-\Delta)^l(hu_i) - \lambda_i hu_i)) - \sum_{j=1}^k r_{ij} s_{ij} \\ &= \int_M ((hu_i)p_i(h)) + \sum_{j=1}^k (\lambda_i - \lambda_j) r_{ij}^2. \end{aligned} \tag{3-34}$$

Consideremos $t_{ij} = \int_M \left(\langle \nabla h, \nabla u_i \rangle + \frac{u_i \Delta h}{2} \right) u_j$. Usando as identidades de Green, temos

$$\begin{aligned} t_{ij} + t_{ji} &= \int_M \left(\langle \nabla h, \nabla u_i \rangle + \frac{u_i \Delta h}{2} \right) u_j + \int_M \left(\left\langle \nabla h, \nabla u_j \right\rangle + \frac{u_j \Delta h}{2} \right) u_i \\ &= \int_M (\langle \nabla h, \nabla u_i \rangle) u_j + \int_M (u_i \Delta h) u_j + \int_M (\left\langle \nabla h, \nabla u_j \right\rangle) u_i \\ &= \int_M \langle \nabla h, \nabla u_i \rangle u_j - \int_M \left\langle u_j \nabla u_i, \nabla h \right\rangle - \int_M \left\langle u_i \nabla u_j, \nabla h \right\rangle + \int_M \left\langle \nabla h, \nabla u_j \right\rangle u_i = 0. \end{aligned}$$

Ainda

$$\begin{aligned} \int_M (-2)\phi_i \left(\langle \nabla h, \nabla u_i \rangle + \frac{u_i \Delta h}{2} \right) &= \int_M (-2)(hu_i - \sum_{j=1}^k r_{ij} u_j) \left(\langle \nabla h, \nabla u_i \rangle + \frac{u_i \Delta h}{2} \right) \\ &= -2 \int_M (hu_i) \left(\langle \nabla h, \nabla u_i \rangle + \frac{u_i \Delta h}{2} \right) + 2 \sum_{j=1}^k r_{ij} \int_M u_j \left(\langle \nabla h, \nabla u_i \rangle + \frac{u_i \Delta h}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= \int_M (-hu_i^2\Delta h - 2hu_i\langle\nabla h, \nabla u_i\rangle) + 2\sum_{j=1}^{k} r_{ij}t_{ij} = w_i + 2\sum_{j=1}^{k} r_{ij}t_{ij} \tag{3-35}$$

onde $w_i = \int_M (-hu_i^2\Delta h - 2hu_i\langle\nabla h, \nabla u_i\rangle)$.

Seja $\alpha = \langle\nabla h, \nabla u_i\rangle + \frac{u_i\Delta h}{2} - \sum_{j=1}^{k} t_{ij}u_j$, observemos que para $\delta > 0$ qualquer

$$\int_M \left(\sqrt{\delta}\phi_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\delta}}\alpha(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \geq 0$$

Logo

$$(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\int_M (-2)\phi_i\alpha \ \leq\ \delta(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^3\int_M \phi_i^2 + \frac{1}{\delta}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\int_M \alpha^2. \tag{3-36}$$

Multiplicando (3-35) por $(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2$ e usando (3-34), (3-36) e o fato que $\int_M u_m\phi_i = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2(w_i + 2\sum_{j=1}^{k} r_{ij}t_{ij}) &= (\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\int_M (-2)\phi_i\left[\langle\nabla h, \nabla u_i\rangle + \frac{u_i\Delta h}{2}\right] \\
&= (\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\int_M (-2)\phi_i\left[\langle\nabla h, \nabla u_i\rangle + \frac{u_i\Delta h}{2} - \sum_{j=1}^{k} t_{ij}u_j\right] \\
&\leq \delta(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^3 \parallel \phi_i \parallel^2 + \tfrac{1}{\delta}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\int_M \left|\langle\nabla h, \nabla u_i\rangle + \frac{u_i\Delta h}{2} - \sum_{j=1}^{k} t_{ij}u_j\right|^2 \\
&= \delta(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^3 \parallel \phi_i \parallel^2 + \tfrac{1}{\delta}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\int_M \left|\langle\nabla h, \nabla u_i\rangle + \frac{u_i\Delta h}{2}\right|^2 - \sum_{j=1}^{k} t_{ij}^2 \\
&\leq \delta(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\left[\int_M ((hu_i)p_i(h)) + \sum_{j=1}^{k}(\lambda_i-\lambda_j)r_{ij}^2\right] \\
&+ \tfrac{1}{\delta}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\left[\left\|\langle\nabla h, \nabla u_i\rangle + \frac{u_i\Delta h}{2}\right\|^2 - \sum_{j=1}^{k} t_{ij}^2\right]
\end{aligned}$$

Aplicando somatório sobre i, obtemos

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2(w_i+2\sum_{j=1}^{k}r_{ij}t_{ij}) \leq \sum_{i=1}^{k}\delta(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\left[\int_M((hu_i)p_i(h))+\sum_{j=1}^{k}(\lambda_i-\lambda_j)r_{ij}^2\right]$$
$$+ \frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\left[\left\|\langle\nabla h,\nabla u_i\rangle+\frac{u_i\Delta h}{2}\right\|^2-\sum_{j=1}^{k}t_{ij}^2\right] \tag{3-37}$$

Sabendo que $r_{ij}=r_{ji}$ e $t_{ij}=-t_{ji}$ obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)r_{ij}t_{ij} &= \sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_j)(\lambda_{k+1}-\lambda_i)r_{ji}t_{ji} \\ &= -\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)r_{ij}t_{ij}\end{aligned}$$

Assim

$$\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)r_{ij}t_{ij}=0.$$

Logo

$$2\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2r_{ij}t_{ij}=2\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)r_{ij}t_{ij}+\quad 2\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_j-\lambda_i)r_{ij}t_{ij}$$
$$=-2\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_j)r_{ij}t_{ij}.$$

Substituíndo em (3-37) obtemos

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2w_i-2\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_j)r_{ij}t_{ij} \leq \delta\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\int_M((hu_i)p_i(h)) \;+$$
$$\delta\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2(\lambda_i-\lambda_j)r_{ij}^2+\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\left\|\langle\nabla h,\nabla u_i\rangle+\frac{u_i\Delta h}{2}\right\|^2-\frac{1}{\delta}\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)t_{ij}^2 \tag{3-38}$$

Analisemos o fator $\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2(\lambda_i-\lambda_j)r_{ij}^2$. Antes, observemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_j)r_{ij}^2 &= \sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_j)(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_j-\lambda_i)r_{ji}^2\\ &= -\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_j)r_{ij}^2\end{aligned}$$

Assim

$$\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_j)r_{ij}^2=0.$$

Logo

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2(\lambda_i-\lambda_j)r_{ij}^2 &= \sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_j)r_{ij}^2-\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_j)^2r_{ij}^2\\ &= -\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_j)^2r_{ij}^2.\end{aligned}$$

Substituímos em (3-38)

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2w_i-2\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_j)r_{ij}t_{ij} \le \delta\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\int_M((hu_i)p_i(h))$$
$$-\delta\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_j)^2r_{ij}^2+\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\left\|\langle\nabla h,\nabla u_i\rangle+\frac{u_i\Delta h}{2}\right\|^2-\frac{1}{\delta}\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)t_{ij}^2$$

Temos que

$$\sum_{i,j=1}^{k}\left(\delta^{\frac{1}{2}}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^{\frac{1}{2}}(\lambda_i-\lambda_j)r_{ij}-\frac{(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^{\frac{1}{2}}}{\delta^{\frac{1}{2}}}t_{ij}\right)^2\ge 0.$$

O que implica na seguinte desigualdade

$$-\sum_{i,j=1}^{k}\delta(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_j)^2r_{ij}^2-\sum_{i,j=1}^{k}\frac{(\lambda_{k+1}-\lambda_i)}{\delta}t_{ij}^2\le -2\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_j)r_{ij}t_{ij}.$$

Logo

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 w_i - 2\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_j)r_{ij}t_{ij} \leq \delta\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\int_M((hu_i)p_i(h)) + \frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\left\|\langle\nabla h,\nabla u_i\rangle+\frac{u_i\Delta h}{2}\right\|^2 - 2\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_j)r_{ij}t_{ij}.$$

Donde, concluímos

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\int_M(-hu_i^2\Delta h - 2hu_i\langle\nabla h,\nabla u_i\rangle) \leq \delta\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\int_M((hu_i)p_i(h)) + \frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\left\|\langle\nabla h,\nabla u_i\rangle+\frac{u_i\Delta h}{2}\right\|^2.$$

Assim, obtemos (3-27). Para obtermos (3-28) basta substituir (3-26) em (3-27)

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\int_M(-hu_i^2\Delta h - 2hu_i\langle\nabla h,\nabla u_i\rangle) \leq \delta\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\parallel(-\Delta)^l hu_i - \lambda_i hu_i\parallel^2 + \frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\left\|\langle\nabla h,\nabla u_i\rangle+\frac{u_i\Delta h}{2}\right\|^2. \qquad \square$$

3.2 Autovalores do Operador Poli-harmônico em Domínios Compactos no Espaço $\mathbb{R}^n$

A seguir, demonstraremos um lema que será de fundamental importância para obtermos as desigualdades tipo Yang.

Lema 3.5 *Sejam u_i e λ_i, $i=1,2,\cdots$ como no Teorema 3.4. Então*

$$0 \leq \int_M u_i(-\Delta)^k u_i \leq \lambda_i^{\frac{k}{l}}, k=1,\cdots,l-1. \qquad (3\text{-}39)$$

Antes de demonstrarmos o Lema enunciado acima, faremos algumas observações as quais serão úteis mais adiante.

Observação 3.6 *Aplicaremos a 2^a identidade de Green (conferir 1.31) $\frac{k}{2}$ vezes, sendo k par*

$$\int_M u_i\Delta(\Delta^{k-1}u_i) - \int_M \Delta^{k-1}u_i\Delta u_i = \int_{\partial M}(u_i\nabla(\Delta^{k-1}u_i) - \Delta^{k-1}u_i\nabla u_i)\cdot\vec{v} = 0$$

$$\int_M \Delta u_i \Delta(\Delta^{k-2} u_i) - \int_M \Delta^{k-2} u_i \Delta^2 u_i = \int_{\partial M} (\Delta u_i \nabla(\Delta^{k-2} u_i) - \Delta^{k-2} u_i \nabla \Delta u_i) \cdot \vec{\nu} = 0$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$\int_M \Delta^{\frac{k}{2}-1} u_i \Delta(\Delta^{k-\frac{k}{2}} u_i) - \int_M \Delta^{k-\frac{k}{2}} u_i \Delta^{\frac{k}{2}} u_i = \int_{\partial M} (\Delta^{\frac{k}{2}-1} u_i \nabla(\Delta^{\frac{k}{2}} u_i) - \Delta^{\frac{k}{2}} u_i \nabla(\Delta^{\frac{k}{2}-1} u_i)) \cdot \vec{\nu} = 0.$$

Somando as identidades obtemos

$$\int_M u_i \Delta^k u_i = \int_M \Delta^{\frac{k}{2}} u_i \Delta^{\frac{k}{2}} u_i, \ k \ par. \tag{3-40}$$

Observação 3.7 *Para k ímpar, aplicaremos o mesmo argumento acima, entretanto, apenas $\dfrac{k-1}{2}$ vezes. Desta forma, obtemos*

$$\int_M u_i \Delta^k u_i = \int_M \Delta^{k-\frac{k-1}{2}} u_i \Delta^{\frac{k-1}{2}} u_i = \int_M \Delta^{\frac{k-1}{2}} u_i \Delta(\Delta^{\frac{k-1}{2}} u_i), \ k \ ímpar. \tag{3-41}$$

É importante lembrar que em ambas as observações, usamos as condições de fronteira dadas em (3-31) e (3-32). Encerradas as observações, agora iniciaremos a demonstração.

Prova. Quando $k \in \{1, \cdots, l-1\}$ é par, temos que

$$\int_M u_i (-\Delta)^k u_i = \int_M (\Delta^{\frac{k}{2}} u_i)^2 \geq 0.$$

Se $k \in \{1, \cdots, l-1\}$ é ímpar, temos

$$\int_M u_i(-\Delta)^k u_i = -\int_M u_i \Delta^k u_i = -\int_M \Delta^{\frac{k-1}{2}} u_i \Delta(\Delta^{\frac{k-1}{2}} u_i) = \int_M \nabla(\Delta^{\frac{k-1}{2}} u_i) \cdot \nabla(\Delta^{\frac{k-1}{2}} u_i) = \int_M |\nabla(\Delta^{\frac{k-1}{2}} u_i)|^2 \geq 0.$$

Logo, para $k \in \{1, \cdots, l-1\}$ temos

$$\int_M u_i (-\Delta)^k u_i \geq 0.$$

A fim de demonstrarmos a desigualdade do lado direito, faremos a seguinte afirmação, que será provada por indução.

Para qualquer $k \in \{1, \cdots, l-1\}$,

$$\left(\int_M u_i (-\Delta)^k u_i\right)^{k+1} \leq \left(\int_M u_i (-\Delta)^{k+1} u_i\right)^k \tag{3-42}$$

Faremos indução sobre k.

i) Para $k = 1$ temos

$$\left(\int_M u_i(-\Delta)u_i\right)^2 = \left(\int_M u_i\Delta u_i\right)^2 \leq \int_M u_i^2 \int_M (\Delta u_i)^2 = \int_M \Delta u_i \Delta u_i = \int_M u_i \Delta^2 u_i$$
$$= \int_M u_i(-\Delta)^2 u_i.$$

Assim, (3-42) mantém-se para $k = 1$.

ii) Suponha que a desigualdade seja válida para $k-1$, isto é,

$$\left(\int_M u_i(-\Delta)^{k-1}u_i\right)^k \leq \left(\int_M u_i(-\Delta)^k u_i\right)^{k-1} \tag{3-43}$$

mostraremos a validade para k par e k ímpar.

Para k par:
Aplicamos a 2ª identidade de Green (conf. 1.31) $\frac{k}{2} - 1$ vezes. Além disso, usamos a desigualdade de Hölder (conf. 1.33) e a observação (3-41) para concluirmos que

$$\int_M u_i(-\Delta)^k u_i = \int_M \Delta^{\frac{k}{2}-1}u_i \Delta(\Delta^{\frac{k}{2}}u_i) = -\int_M \nabla(\Delta^{\frac{k}{2}-1}u_i)\cdot\nabla(\Delta^{\frac{k}{2}}u_i)$$
$$\leq \left(\int_M |\nabla(\Delta^{\frac{k}{2}-1}u_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M |\nabla(\Delta^{\frac{k}{2}}u_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(-\int_M \Delta^{\frac{k}{2}-1}u_i\Delta(\Delta^{\frac{k}{2}-1}u_i)\right)^{\frac{1}{2}} \left(-\int_M \Delta^{\frac{k}{2}}u_i\Delta(\Delta^{\frac{k}{2}}u_i)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\int_M u_i(-\Delta)^{k-1}u_i\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M u_i(-\Delta)^{k+1}u_i\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para k ímpar:
Primeiramente, usamos a observação (3-41), seguida pela desigualdade de Schwarz (conf. 1.33) e a observação (3-40) para inferirmos que

$$\begin{aligned}\int_M u_i(-\Delta)^k u_i &= -\int_M \Delta^{\frac{k-1}{2}}u_i\Delta^{\frac{k+1}{2}}u_i \\ &\leq \left(\int_M |\Delta^{\frac{k-1}{2}}u_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M |\Delta^{\frac{k+1}{2}}u_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$= \left(\int_M u_i(-\Delta)^{k-1}u_i\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_M u_i(-\Delta)^{k+1}u_i\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Então para $k \in \{1, \cdots, l-1\}$ temos

$$\int_M u_i(-\Delta)^k u_i \leq \left(\int_M u_i(-\Delta)^{k-1}u_i\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_M u_i(-\Delta)^{k+1}u_i\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3-44}$$

Usando a hipótese de indução (3-43) em (3-44) obtemos

$$\begin{aligned}\int_M u_i(-\Delta)^k u_i &\leq \left[\left(\int_M u_i(-\Delta)^{k-1}u_i\right)^{k}\right]^{\frac{1}{2k}}\left(\int_M u_i(-\Delta)^{k+1}u_i\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \left[\left(\int_M u_i(-\Delta)^{k}u_i\right)^{k-1}\right]^{\frac{1}{2k}}\left(\int_M u_i(-\Delta)^{k+1}u_i\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Logo

$$\left(\int_M u_i(-\Delta)^k u_i\right)^{1-\frac{k-1}{2k}} \leq \left(\int_M u_i(-\Delta)^{k+1}u_i\right)^{\frac{1}{2}}$$

Portanto

$$\left(\int_M u_i(-\Delta)^k u_i\right)^{k+1} \leq \left(\int_M u_i(-\Delta)^{k+1}u_i\right)^{k}$$

O que prova a afirmação (3-42) para qualquer $k \in \{1, \cdots, l-1\}$.

Aplicando (3-42) repetidas vezes, concluímos

$$\begin{aligned}&\int_M u_i(-\Delta)^k u_i \leq \left(\int_M u_i(-\Delta)^{k+1}u_i\right)^{\frac{k}{k+1}} \leq \left[\left(\int_M u_i(-\Delta)^{k+2}u_i\right)^{\frac{k+1}{k+2}}\right]^{\frac{k}{k+1}} \leq \cdots\\ &\cdots \leq \left(\int_M u_i(-\Delta)^{l}u_i\right)^{\frac{k}{l}} = \left(\int_M u_i\lambda_i u_i\right)^{\frac{k}{l}} = \lambda_i^{\frac{k}{l}}.\end{aligned}$$

Portanto

$$0 \leq \int_M u_i(-\Delta)^k u_i \leq \lambda_i^{\frac{k}{l}}, \ \ k \in \{1, \cdots, l-1\}.$$

□

No teorema seguinte, obteremos uma desigualdade universal para autovalores do operador poli-harmônico em domínios compactos no Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.8 *Seja Ω um domínio limitado conexo em um Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, n-dimensional, e seja Δ o laplaciano de $\mathbb{R}^n$. Denote por λ_i o i-ésimo autovalor do problema*

$$(-\Delta)^l u = \lambda u \quad em \quad \Omega$$

$$u|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = \cdots = \left.\frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}}\right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3-45}$$

Então temos

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \le \left(\frac{4l(n+2l-2)}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prova. Sejam $x_1,\cdots,x_n$ as funções coordenadas Euclidianas canônicas de $\mathbb{R}^n$. Seja u_i a i-ésima autofunção ortonormal correspondente ao autovalor λ_i do problema (3-45), $i = 1,\cdots$. Então

$$\Delta x_\alpha = 0 \;\; e \;\; \nabla x_\alpha = (\underbrace{0,0,\cdots,1}_{\alpha},0,\cdots,0), \alpha = 1,2,\cdots,n.$$

Aplicando indução sobre l, obtemos a seguinte expressão geral

$$(-\Delta)^l(x_\alpha u_i) = x_\alpha(-\Delta)^l u_i + 2l(-1)^l\left\langle \nabla x_\alpha, \nabla(\Delta^{l-1}u_i)\right\rangle = \lambda_i x_\alpha u_i + 2l(-1)^l\left\langle \nabla x_\alpha, \nabla(\Delta^{l-1}u_i)\right\rangle \tag{3-46}$$

Usando o Teorema 3.4, tomaremos $h = x_\alpha$ em (3-27). Assim, concluímos para qualquer $\delta > 0$ que

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\int_\Omega(-x_\alpha u_i^2\Delta x_\alpha - 2x_\alpha u_i\langle\nabla x_\alpha,\nabla u_i\rangle)$$
$$\le \delta\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\int_\Omega x_\alpha u_i((-\Delta)^l(x_\alpha u_i)-\lambda_i x_\alpha u_i) + \sum_{i=1}^{k}\frac{(\lambda_{k+1}-\lambda_i)}{\delta}\left\|\langle\nabla x_\alpha,\nabla u_i\rangle + \frac{u_i\Delta x_\alpha}{2}\right\|^2.$$

Usando o fato que $\Delta x_\alpha = 0$ e aplicando o somatório sobre α, temos

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\sum_{\alpha=1}^{n}\int_\Omega(-2x_\alpha u_i\langle\nabla x_\alpha,\nabla u_i\rangle)$$
$$\le \delta\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\sum_{\alpha=1}^{n}\int_\Omega x_\alpha u_i((-\Delta)^l(x_\alpha u_i)-\lambda_i x_\alpha u_i) + \sum_{i=1}^{k}\frac{(\lambda_{k+1}-\lambda_i)}{\delta}\sum_{\alpha=1}^{n}\|\langle\nabla x_\alpha,\nabla u_i\rangle\|^2. \tag{3-47}$$

Observemos que: $\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} |\nabla x_\alpha|^2 = n$ e $\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} \langle \nabla x_\alpha, \nabla u_i\rangle^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} |\nabla_\alpha u_i|^2 = |\nabla u_i|^2$.

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\int_\Omega (-2x_\alpha u_i\langle \nabla x_\alpha, \nabla u_i\rangle) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\int_\Omega u_i^2 \Delta x_\alpha^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega u_i^2\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\Delta x_\alpha^2\right) = n\int_\Omega u_i^2 = n. \tag{3-48}$$

Além disso, segue do Lema 3.5

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \| \langle \nabla x_\alpha, \nabla u_i\rangle \|^2 = \sum_{\alpha=1}^{n}\int_\Omega \langle \nabla x_\alpha, \nabla u_i\rangle^2 = \int_\Omega |\nabla u_i|^2 = -\int_\Omega u_i\Delta u_i = \int_\Omega u_i(-\Delta)u_i \leq \lambda_i^{\frac{1}{l}}. \tag{3-49}$$

Usando a igualdade (3-46), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega x_\alpha u_i((-\Delta)^l(x_\alpha u_i) - \lambda_i x_\alpha u_i) &= 2l(-1)^l\int_\Omega x_\alpha u_i \left\langle \nabla x_\alpha, \nabla(\Delta^{l-1}u_i)\right\rangle \\
&= 2l(-1)^l\int_\Omega x_\alpha u_i \Delta^{l-1}(\langle \nabla x_\alpha, \nabla u_i\rangle) \\
&= 2l(-1)^l\int_\Omega \Delta^{l-1}(x_\alpha u_i)\langle \nabla x_\alpha, \nabla u_i\rangle
\end{aligned} \tag{3-50}$$

Como $\Delta^{l-1}(x_\alpha u_i) = x_\alpha \Delta^{l-1}u_i + 2(l-1)\left\langle \nabla x_\alpha, \nabla(\Delta^{l-2}u_i)\right\rangle$, então segue da expressão acima

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega x_\alpha u_i((-\Delta)^l(x_\alpha u_i) - \lambda_i x_\alpha u_i) = \\
&2l(-1)^l\int_\Omega \left(x_\alpha \Delta^{l-1}u_i + 2(l-1)\left\langle \nabla x_\alpha, \nabla(\Delta^{l-2}u_i)\right\rangle\right)\langle \nabla x_\alpha, \nabla u_i\rangle.
\end{aligned} \tag{3-51}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega x_\alpha u_i((-\Delta)^l(x_\alpha u_i) - \lambda_i x_\alpha u_i) &= 2l(-1)^l\int_\Omega x_\alpha u_i \left\langle \nabla x_\alpha, \nabla(\Delta^{l-1}u_i)\right\rangle \\
&= 2l(-1)^l\int_\Omega \left\langle x_\alpha u_i \nabla x_\alpha, \nabla(\Delta^{l-1}u_i)\right\rangle \\
&= 2l(-1)^{l+1}\int_\Omega \Delta^{l-1}u_i div(x_\alpha u_i \nabla x_\alpha) \\
&= 2l(-1)^{l+1}\int_\Omega \Delta^{l-1}u_i(\langle \nabla(x_\alpha u_i), \nabla x_\alpha\rangle + x_\alpha u_i \Delta x_\alpha) \\
&= 2l(-1)^{l+1}\int_\Omega (\Delta^{l-1}u_i)(u_i\langle \nabla x_\alpha, \nabla x_\alpha\rangle + x_\alpha\langle \nabla u_i, \nabla x_\alpha\rangle) \\
&= 2l(-1)^{l+1}\int_\Omega (\Delta^{l-1}u_i)(u_i |\nabla x_\alpha|^2 + x_\alpha\langle \nabla u_i, \nabla x_\alpha\rangle).
\end{aligned}$$

Somando a igualdade obtida acima com a obtida em (3-51), obtemos

$$\int_\Omega x_\alpha u_i((-\Delta)^l(x_\alpha u_i)-\lambda_i x_\alpha u_i)=$$
$$2l(-1)^l\int_\Omega\left\{(l-1)\left\langle\nabla x_\alpha,\nabla(\Delta^{l-2}u_i)\right\rangle\langle\nabla x_\alpha,\nabla u_i\rangle-\frac{1}{2}\Delta^{l-1}u_i\mid\nabla x_\alpha\mid^2 u_i\right\}.$$

Temos que

$$\sum_{\alpha=1}^n\left\langle\nabla x_\alpha,\nabla(\Delta^{l-2}u_i)\right\rangle\langle\nabla x_\alpha,\nabla u_i\rangle=\sum_{\alpha=1}^n\nabla_\alpha(\Delta^{l-2}u_i)\nabla_\alpha u_i=\left\langle\nabla(\Delta^{l-2}u_i),\nabla u_i\right\rangle.$$

Usando a igualdade que obtivemos anteriormente e o Lema 3.5, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=1}^n\int_\Omega x_\alpha u_i((-\Delta)^l(x_\alpha u_i)-\lambda_i x_\alpha u_i)\\
=\ & 2l(-1)^l\int_\Omega\left\{(l-1)\sum_{\alpha=1}^n\left\langle\nabla x_\alpha,\nabla(\Delta^{l-2}u_i)\right\rangle\langle\nabla x_\alpha,\nabla u_i\rangle-\frac{1}{2}\Delta^{l-1}u_i\left(\sum_{\alpha=1}^n\mid\nabla x_\alpha\mid^2\right)u_i\right\}\\
=\ & 2l(-1)^l\int_\Omega\left\{(l-1)\left\langle\nabla(\Delta^{l-2}u_i),\nabla u_i\right\rangle-\frac{1}{2}\Delta^{l-1}u_i(n)u_i\right\}\\
=\ & 2l(-1)^{l+1}(l-1)\int_\Omega u_i\Delta(\Delta^{l-2}u_i)+l(-1)^{l+1}n\int_\Omega u_i\Delta^{l-1}u_i\\
=\ & (2l(-1)^{l+1}(l-1)+l(-1)^{l+1}n)\int_\Omega u_i\Delta^{l-1}u_i\\
=\ & (2l(l-1)+l\,n)\int_\Omega u_i(-\Delta)^{l-1}u_i\\
\leq\ & l(2l+n-2)\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}.
\end{aligned}$$

Agora, substituímos as igualdades (3-48), (3-49) em (3-47)

$$\sum_{i=1}^k(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\cdot n\leq\delta\sum_{i=1}^k(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 l(2l+n-2)\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}+\sum_{i=1}^k\frac{(\lambda_{k+1}-\lambda_i)}{\delta}\lambda_i^{\frac{1}{l}}.$$

Tomando $\delta=\left\{\frac{\sum_{i=1}^k(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i^{\frac{1}{l}}}{l(n+2l-2)\sum_{i=1}^k(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}}\right\}^{\frac{1}{2}}$, obtemos

$$\sum_{i=1}^k(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\cdot n\leq(l(n+2l-2))^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^k(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^k(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$\left(l(n+2l-2)\sum_{i=1}^k(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^k(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Donde, concluímos

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \leq \left(\frac{4l(n+2l-2)}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Observemos que, no caso $l=1$ o teorema anterior cobre a famosa desigualdade de Yang. Uma estimativa para o $(k+1)$–ésimo autovalor é apresentada no corolário abaixo.

Corolário 3.9 *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 3.8, temos*

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1} \leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i + \frac{2l(n+2l-2)}{k^2n^2}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right) + \\ \left\{\left(\frac{2l(n+2l-2)}{k^2n^2}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right)^2 - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{3-52}$$

e

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1} \leq \left(1+\frac{2l(n+2l-2)}{n^2}\right)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i + \\ \left\{\left(\frac{2l(n+2l-2)}{n^2}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^2 - \left(1+\frac{4l(n+2l-2)}{n^2}\right)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3-53}$$

Prova. Da desigualdade de Chebyshev, Lema 2.2 segue que

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i^{\frac{1}{l}} \leq \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right)$$

e

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\lambda_i^{\frac{l-1}{l}} \leq \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}\right)$$

Substituíndo estas desigualdades no Teorema 3.8, obtemos

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \\ &\leq \left(\frac{4l(n+2l-2)}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Logo

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \leq \frac{4l(n+2l-2)}{k^2n^2}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right).$$

Fazendo $A=\dfrac{4l(n+2l-2)}{k^2n^2}$ e abrindo o somatório, temos

$$k\lambda_{k+1}^2-\lambda_{k+1}\left[2\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)+A\,k\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right)\right]+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2$$
$$+A\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)\leq 0.$$

Resolvemos a inequação em λ_{k+1}, donde obtemos

$$\lambda_{k+1}\leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i+\frac{2l(n+2l-2)}{k^2n^2}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right)$$
$$+\left\{\left(\frac{2l(n+2l-2)}{k^2n^2}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right)^2-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

O que conclui a demonstração da desigualdade (3-52).

A fim de provarmos a desigualdade (3-53), usaremos o Lema 2.1

$$\left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right)\leq\left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right)$$

Substituíndo no Teorema 3.8, obtemos

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \;\leq\; \left(\frac{4l(n+2l-2)}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Isto é

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \;\leq\; \left(\frac{4l(n+2l-2)}{n^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i\right)$$

Abrindo o somatório, obtemos

$$k\lambda_{k+1}^2 - 2\lambda_{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right) + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2 - \left(\frac{4l(n+2l-2)}{n^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)\lambda_{k+1}$$
$$+ \left(\frac{4l(n+2l-2)}{n^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2\right) \leq 0.$$

Fazendo $B = \frac{4l(n+2l-2)}{n^2}$ e resolvendo o polinômio em λ_{k+1}, obtemos

$$\lambda_{k+1} \leq \frac{2+B}{2}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right) + \frac{1}{2k}\left\{(2+B)^2\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^2 - 4k(1+B)\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(1+\frac{2l(n+2l-2)}{n^2}\right)\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)$$
$$+ \left\{\left(1+\frac{2l(n+2l-2)}{n^2}\right)^2\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^2 - \frac{1}{k}\left(1+\frac{4l(n+2l-2)}{n^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(1+\frac{2l(n+2l-2)}{n^2}\right)\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)$$
$$+ \left\{\left[1+\frac{4l(n+2l-2)}{n^2}+\left(\frac{2l(n+2l-2)}{n^2}\right)^2\right]\frac{1}{k^2}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^2 - \frac{1}{k}\left(1+\frac{4l(n+2l-2)}{n^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(1+\frac{2l(n+2l-2)}{n^2}\right)\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)$$
$$+ \left\{-\frac{1}{k}\left(1+\frac{4l(n+2l-2)}{n^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2 - \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^2\right) + \left(\frac{2l(n+2l-2)}{n^2}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(1+\frac{2l(n+2l-2)}{n^2}\right)\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)$$
$$+ \left\{\left(\frac{2l(n+2l-2)}{n^2}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^2 - \left(1+\frac{4l(n+2l-2)}{n^2}\right)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Donde obtemos a desigualdade (3-53). □

3.3 Autovalores do Operador Poli-harmônico em Domínios Compactos numa Esfera Unitária

Nesta seção, obteremos desigualdades universais para autovalores do operador poliharmônico em domínios compactos na esfera unitária $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Para nós, ∇ denota a conexão em S^n e $\overline{\nabla}$ é a conexão em $\mathbb{R}^{n+1}$, a variedade ambiente. Além disso, Δ é o operador laplaciano em S^n e $\overline{\Delta}$ é o operador laplaciano em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Seja l um inteiro positivo e para $p = 0, 1, 2, \cdots$, defina os polinômios $F_p(t)$ indutivamente por

$$F_0(t) = 1,\ F_1(t) = t - n,\ F_p(t) = (2t-2)F_{p-1}(t) - (t^2 + 2t - n(n-2))F_{p-2}(t),\ \ p = 2, \cdots$$

Temos que F_p é um polinômio de grau p e podemos escrever

$$F_l(t) = a_l t^l + a_{l-1} t^{l-1} + \cdots + a_1 t + a_0.$$

Provaremos por indução que $a_l = 1$ e $a_0 = (-n)^l$ para cada l inteiro positivo.

i) Para $l = 1$ temos

$$F_1(t) = a_1 t + a_0 \Rightarrow a_1 = 1 \quad a_0 = (-n)^1.$$

ii) Suponhamos que $a_l = 1$ para $l \leq p-1$ e mostraremos que vale para $l = p$. Para isso, escrevemos $F_m(t) = a_m t^m + R_{m-1}(t)$ onde $R_{m-1}(t)$ é algum polinômio de grau não maior que $m-1$. Usando a hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned} F_p(t) &= (2t-2)F_{p-1}(t) - (t^2 + 2t - n(n-2))F_{p-2}(t) \\ &= (2t-2)(t^{p-1} + R_{p-2}(t)) - (t^2 + 2t - n(n-2))(t^{p-2} + R_{p-3}(t)) \\ &= 2t^p - 2t^{p-1} - t^p - 2t^{p-1} + n(n-2)t^{p-2} + Q_{p-1}(t) \\ &= t^p + R_{p-1}(t) \end{aligned}$$

onde Q_{p-1} é algum polinômio de grau não maior que $p-1$.
Logo, a afirmação é válida para $l = p$.

iii) Suponhamos agora que $a_0 = (-n)^l$ para $l \leq p-1$ e mostraremos que também vale para $l = p$. Para isso, escrevemos $F_m(t) = [Q_{m-1}(t)]t + a_0$. Usando a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned}
F_p(t) &= (2t-2)F_{p-1}(t)-(t^2+2t-n(n-2))F_{p-2}(t)\\
&= (2t-2)([Q_{p-2}(t)]t+(-n)^{p-1})-(t^2+2t-n(n-2))([Q_{p-3}(t)]t+(-n)^{p-2})\\
&= (2t-2)(-n)^{p-1}-(t^2+2t-n(n-2))(-n)^{p-2}+[A_{p-1}(t)]t\\
&= (-2)(-n)^{p-1}+n(n-2)(-n)^{p-2}+[Q_{p-1}(t)]t\\
&= (-2)(-n)^{p-1}+n^2(-n)^{p-2}-2n(-n)^{p-2}+[Q_{p-1}(t)]t\\
&= (-n)^2(-n)^{p-2}+[Q_{p-1}(t)]t\\
&= (-n)^p+[Q_{p-1}(t)]t
\end{aligned}$$

em que A_p é algum polinômio de grau não maior que p.
Logo, a afirmação é válida para $l = p$.

Portanto,

$$F_l(t) = t^l + a_{l-1}t^{l-1} + \cdots + a_1 t + (-n)^l \quad para \quad l = 1,2,3,\cdots. \tag{3-54}$$

O lema abaixo, nos auxiliará na demonstração do teorema principal desta seção. Nele, obtemos uma desigualdade que depende dos coeficientes dos polinômios obtidos acima. Este lema também é apresentado em [6].

Lema 3.10 *Com a notação anterior, vale*

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\int_\Omega x_\alpha u_i((-\Delta)^l(x_\alpha u_i)-x_\alpha(-\Delta)^l u_i) \leq \sum_{j=1}^{l-1} | a_j | \lambda_i^{\frac{j}{l}} + n^l,$$

em que $a_j, j = 1,\cdots,l-1$ é definido em (3-54) e Ω é um domínio compacto conexo em uma esfera unitária S^n.

Prova. Sejam $x_1,\cdots,x_{n+1}$ as funções coordenadas canônicas do Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, então

$$S^n = \left\{(x_1,\cdots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{\alpha=1}^{n+1} {x_\alpha}^2 = 1\right\}.$$

A fórmula de Böchner (2-3) fornece-nos que

$$\frac{1}{2}\Delta(| \nabla f |^2) = | \nabla^2 f |^2 + \langle \nabla f, \nabla\Delta f\rangle + Ric(\nabla f, \nabla f).$$

Como na esfera S^n a curvatura de Ricci é constante e igual a (n - 1), conferir exemplo 1.20, então segue

$$\frac{1}{2}\Delta(| \nabla f |^2) = | \nabla^2 f |^2 + \langle \nabla f, \nabla\Delta f\rangle + (n-1)\langle \nabla f, \nabla f\rangle. \tag{3-55}$$

Ainda

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla g|^2) = |\nabla^2 g|^2 + \langle \nabla g, \nabla\Delta g\rangle + (n-1)\langle \nabla g, \nabla g\rangle \tag{3-56}$$

e

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla(f+g)|^2) = |\nabla^2(f+g)|^2 + \langle \nabla(f+g), \nabla(\Delta(f+g))\rangle + (n-1)\langle \nabla(f+g), \nabla(f+g)\rangle . \tag{3-57}$$

Temos que

$$|\nabla(f+g)|^2 = \langle \nabla f, \nabla f\rangle + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle + \langle \nabla g, \nabla g\rangle = |\nabla f|^2 + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle + |\nabla g|^2 . \tag{3-58}$$

Além disso,

Seja $e_1, \cdots, e_n$ um referencial móvel ortonormal localmente definido em Ω, onde $\left\langle \nabla^2 f, \nabla^2 g\right\rangle = \sum_{s,t=1}^{n} \nabla^2 f(e_s, e_t)\nabla^2 g(e_s, e_t)$. Temos

$$\begin{aligned}
|\nabla^2(f+g)|^2 &= \left\langle \nabla^2(f+g), \nabla^2(f+g)\right\rangle \\
&= \sum_{s,t=1}^{n} \nabla^2(f+g)(e_s,e_t)\nabla^2(f+g)(e_s,e_t) \\
&= \sum_{s,t=1}^{n} \nabla^2 f(e_s,e_t)\nabla^2 f(e_s,e_t) + 2\sum_{s,t=1}^{n} \nabla^2 f(e_s,e_t)\nabla^2 g(e_s,e_t) + \sum_{s,t=1}^{n} \nabla^2 g(e_s,e_t)\nabla^2 g(e_s,e_t) \\
&= \left\langle \nabla^2 f, \nabla^2 f\right\rangle + 2\left\langle \nabla^2 f, \nabla^2 g\right\rangle + \left\langle \nabla^2 g, \nabla^2 g\right\rangle \\
&= |\nabla^2 f|^2 + 2\left\langle \nabla^2 f, \nabla^2 g\right\rangle + |\nabla^2 g|^2 .
\end{aligned} \tag{3-59}$$

Usando as igualdades (3-57), (3-59), (3-55) e (3-56), nesta ordem, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta(|\nabla(f+g)|^2) &= \\
&= |\nabla^2(f+g)|^2 + \langle \nabla(f+g), \nabla\Delta(f+g)\rangle + (n-1)\langle \nabla(f+g), \nabla(f+g)\rangle \\
&= |\nabla^2 f|^2 + 2\left\langle \nabla^2 f, \nabla^2 g\right\rangle + |\nabla^2 g|^2 + \langle \nabla f, \nabla\Delta f\rangle + \langle \nabla f, \nabla\Delta g\rangle + \langle \nabla g, \nabla\Delta f\rangle \\
&\quad + \langle \nabla g, \nabla\Delta g\rangle + (n-1)\langle \nabla f, \nabla f\rangle + 2(n-1)\langle \nabla f, \nabla g\rangle + (n-1)\langle \nabla g, \nabla g\rangle \\
&= \frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) + \frac{1}{2}\Delta(|\nabla g|^2) + 2\left\langle \nabla^2 f, \nabla^2 g\right\rangle + \langle \nabla f, \nabla\Delta g\rangle + \langle \nabla g, \nabla\Delta f\rangle \\
&\quad +2(n-1)\langle \nabla f, \nabla g\rangle .
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta(|\nabla(f+g)|^2) &= \frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) + \frac{1}{2}\Delta(|\nabla g|^2) + 2\left\langle \nabla^2 f, \nabla^2 g\right\rangle + \langle \nabla f, \nabla\Delta g\rangle + \langle \nabla g, \nabla\Delta f\rangle \\
&\quad +2(n-1)\langle \nabla f, \nabla g\rangle .
\end{aligned} \tag{3-60}$$

Por outro lado, usando a igualdade (3-58), obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla(f+g)|^2) = \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 + \Delta(\langle\nabla f, \nabla g\rangle) + \frac{1}{2}\Delta|\nabla g|^2 \tag{3-61}$$

Logo

$$\Delta(\langle\nabla f, \nabla g\rangle) = 2\left\langle\nabla^2 f, \nabla^2 g\right\rangle + \langle\nabla f, \nabla(\Delta g)\rangle + \langle\nabla g, \nabla(\Delta f)\rangle + 2(n-1)\langle\nabla f, \nabla g\rangle. \tag{3-62}$$

Em um domínio na esfera unitária, conforme vimos em (1-10) e (1-11) temos

$$\nabla^2 x_\alpha = -x_\alpha\langle\ ,\ \rangle \quad e \quad \Delta x_\alpha = -n x_\alpha, \ \ \alpha = 1, \cdots, n+1.$$

Considerando $f = x_\alpha$, a igualdade (3-62) fornece-nos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
&\Delta(\langle\nabla x_\alpha, \nabla g\rangle) = \\
&= 2\left\langle\nabla^2 x_\alpha, \nabla^2 g\right\rangle + \langle\nabla x_\alpha, \nabla(\Delta g)\rangle + \langle\nabla g, \nabla(\Delta x_\alpha)\rangle + 2(n-1)\langle\nabla x_\alpha, \nabla g\rangle \\
&= 2\sum_{s,t=1}^{n}\nabla^2 x_\alpha(e_s, e_t)\nabla^2 g(e_s, e_t) + \langle\nabla x_\alpha, \nabla(\Delta g)\rangle - n\langle\nabla g, \nabla x_\alpha\rangle + 2(n-1)\langle\nabla x_\alpha, \nabla g\rangle \\
&= -2\sum_{s,t=1}^{n} x_\alpha\langle e_s, e_t\rangle\nabla^2 g(e_s, e_t) + \langle\nabla x_\alpha, \nabla(\Delta g)\rangle + (n-2)\langle\nabla x_\alpha, \nabla g\rangle \\
&= -2\sum_{s,t=1}^{n} x_\alpha\delta_{st}\nabla^2 g(e_s, e_t) + \langle\nabla x_\alpha, \nabla(\Delta g)\rangle + (n-2)\langle\nabla x_\alpha, \nabla g\rangle \\
&= -2\sum_{t=1}^{n} x_\alpha\nabla^2 g(e_t, e_t) + \langle\nabla x_\alpha, \nabla(\Delta g)\rangle + (n-2)\langle\nabla x_\alpha, \nabla g\rangle \\
&= -2x_\alpha\sum_{t=1}^{n}\nabla^2 g(e_t, e_t) + \langle\nabla x_\alpha, \nabla(\Delta + (n-2))g\rangle \\
&= -2x_\alpha\Delta g + \langle\nabla x_\alpha, \nabla(\Delta + (n-2))g\rangle.
\end{aligned}$$

Logo

$$\Delta(\langle\nabla x_\alpha, \nabla g\rangle) = -2x_\alpha\Delta g + \langle\nabla x_\alpha, \nabla(\Delta + (n-2))g\rangle. \tag{3-63}$$

Ainda, calculamos
$\Delta(x_\alpha g) = g\Delta x_\alpha + x_\alpha\Delta g + 2\langle\nabla x_\alpha, \nabla g\rangle = -ngx_\alpha + x_\alpha\Delta g + 2\langle\nabla x_\alpha, \nabla g\rangle = x_\alpha(\Delta - n)g + 2\langle\nabla x_\alpha, \nabla g\rangle.$

Usando (3-63) e o resultado acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta^2(x_\alpha g) &= \Delta(\Delta(x_\alpha g)) \\
&= \Delta(x_\alpha(\Delta - n)g) + 2\Delta(\langle\nabla x_\alpha, \nabla g\rangle)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Delta x_\alpha(\Delta-n)g + x_\alpha(\Delta^2-n\Delta)g + 2\langle\nabla x_\alpha, \nabla(\Delta-n)g\rangle + 2\Delta(\langle\nabla x_\alpha,\nabla g\rangle)\\
&= \Delta x_\alpha(\Delta-n)g + x_\alpha(\Delta^2-n\Delta)g + 2\langle\nabla x_\alpha, \nabla(\Delta-n)g\rangle - 4x_\alpha\Delta g + 2\langle\nabla x_\alpha,\nabla(\Delta+(n-2))g\rangle\\
&= -nx_\alpha(\Delta-n)g + x_\alpha(\Delta^2-n\Delta)g + 2\langle\nabla x_\alpha, \nabla(\Delta-n+\Delta+(n-2))g\rangle - 4x_\alpha\Delta g\\
&= x_\alpha(-n\Delta+n^2+\Delta^2-n\Delta-4\Delta)g + 2\langle\nabla x_\alpha,\nabla(2\Delta-2)g\rangle\\
&= x_\alpha(\Delta^2-2(n+2)\Delta+n^2)g + 2\langle\nabla x_\alpha,\nabla(2\Delta-2)g\rangle
\end{aligned}
$$

Assim, para cada $q = 0,1,2,3,\cdots$, existem polinômios B_q e C_q de graus não maiores que q tais que

$$
\Delta^q(x_\alpha g) = x_\alpha(B_q(\Delta))g + 2\Big\langle\nabla x_\alpha, \nabla(C_q(\Delta)g)\Big\rangle \tag{3-64}
$$

Como $\Delta^0(x_\alpha g) = x_\alpha g$ então $B_0 = 1$ e $C_0 = 0$.
Além disso, como $\Delta(x_\alpha g) = x_\alpha(\Delta-n)g + 2\langle\nabla x_\alpha,\nabla g\rangle$ então $B_1(\Delta) = \Delta - n$ e $C_1(\Delta) = 1$.

Com as igualdades (3-63) e (3-64), obtemos

$$
\begin{aligned}
\Delta^q(x_\alpha g) &= \Delta(\Delta^{q-1}(x_\alpha g))\\
&= \Delta\Big(x_\alpha(B_{q-1}(\Delta))g + 2\Big\langle\nabla x_\alpha,\nabla(C_{q-1}(\Delta)g)\Big\rangle\Big)\\
&= (B_{q-1}(\Delta))g\Delta x_\alpha + x_\alpha\Delta(B_{q-1}(\Delta)g) + 2\Big\langle\nabla x_\alpha,\nabla(B_{q-1}(\Delta)g)\Big\rangle + 2\Delta\Big(\Big\langle\nabla x_\alpha,\nabla(C_{q-1}(\Delta)g)\Big\rangle\Big)\\
&= -nx_\alpha(B_{q-1}(\Delta))g + x_\alpha\Delta(B_{q-1}(\Delta)g) + 2\Big\langle\nabla x_\alpha,\nabla(B_{q-1}(\Delta)g)\Big\rangle - 4x_\alpha\Delta(C_{q-1}(\Delta)g)\\
&\quad +2\Big\langle\nabla x_\alpha,\nabla((\Delta+(n-2))(C_{q-1}(\Delta)g))\Big\rangle\\
&= x_\alpha((\Delta-n)B_{q-1}(\Delta) - 4\Delta C_{q-1}(\Delta))g\\
&\quad +2\Big\langle\nabla x_\alpha,\nabla\Big((B_{q-1}(\Delta)+\Delta C_{q-1}(\Delta)+(n-2)C_{q-1}(\Delta))g\Big)\Big\rangle.
\end{aligned}
$$

Logo, segue de (3-64)

$$
\begin{aligned}
B_q(\Delta) &= (\Delta-n)B_{q-1}(\Delta) - 4\Delta C_{q-1}(\Delta)\\
C_q(\Delta) &= B_{q-1}(\Delta) + (\Delta+(n-2))C_{q-1}(\Delta)
\end{aligned} \tag{3-65}
$$

Consequentemente de (3-65), temos

$$
\begin{aligned}
B_q(\Delta) &= (2\Delta-2)B_{q-1}(\Delta) - (\Delta+n-2)B_{q-1}(\Delta) - 4\Delta C_{q-1}(\Delta)\\
&= (2\Delta-2)B_{q-1}(\Delta) - (\Delta+n-2)\Big((\Delta-n)B_{q-2}(\Delta) - 4\Delta C_{q-2}(\Delta)\Big) - 4\Delta C_{q-1}(\Delta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (2\Delta-2)B_{q-1}(\Delta)-(\Delta^2-n^2-2\Delta+2n)B_{q-2}(\Delta)+4\Delta\Big[(\Delta+n-2)C_{q-2}(\Delta)-C_{q-1}(\Delta)\Big]\\
&= (2\Delta-2)B_{q-1}(\Delta)-(\Delta^2+2\Delta-n(n-2))B_{q-2}(\Delta)+\\
&\quad 4\Delta\Big[B_{q-2}(\Delta)+(\Delta+n-2)C_{q-2}(\Delta)-C_{q-1}(\Delta)\Big]\\
&= (2\Delta-2)B_{q-1}(\Delta)-(\Delta^2+2\Delta-n(n-2))B_{q-2}(\Delta)+4\Delta\Big[C_{q-1}(\Delta)-C_{q-1}(\Delta)\Big]\\
&= (2\Delta-2)B_{q-1}(\Delta)-(\Delta^2+2\Delta-n(n-2))B_{q-2}(\Delta).
\end{aligned}
$$

Logo

$$B_q(\Delta)=(2\Delta-2)B_{q-1}(\Delta)-(\Delta^2+2\Delta-n(n-2))B_{q-2}(\Delta);\quad q\geq 2.$$

Com isso e usando o fato de $B_0=1$ e $B_1(\Delta)=\Delta-n$, segue que $B_q=F_q, \forall q=0,1,2,\cdots$. Usando a igualdade (3-64) e considerando $g=u_i$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega x_\alpha u_i((-\Delta)^l(x_\alpha u_i)-x_\alpha(-\Delta)^l u_i) &= \int_\Omega x_\alpha u_i((-1)^l\Delta^l(x_\alpha u_i)-\lambda_i x_\alpha u_i)\\
&= \int_\Omega x_\alpha u_i\Big[(-1)^l(x_\alpha B_l(\Delta)u_i+2\langle\nabla x_\alpha,\nabla(C_l(\Delta)u_i)\rangle)-\lambda_i x_\alpha u_i\Big]\\
&= \int_\Omega x_\alpha u_i\Big[(-1)^l(x_\alpha(\Delta^l+a_{l-1}\Delta^{l-1}+\cdots+a_1\Delta+a_0)u_i)-\lambda_i x_\alpha u_i\Big]\\
&\quad+\int_\Omega 2(-1)^l x_\alpha u_i(\langle\nabla x_\alpha,\nabla(C_l(\Delta)u_i)\rangle)\\
&= \int_\Omega x_\alpha u_i(x_\alpha(-\Delta)^l u_i-\lambda_i x_\alpha u_i)\\
&\quad+\int_\Omega(-1)^l x_\alpha^2 u_i(a_{l-1}\Delta^{l-1}+\cdots+a_1\Delta+a_0)u_i\\
&\quad+(-1)^l\int_\Omega u_i\Big\langle\nabla {x_\alpha}^2,\nabla(C_l(\Delta)u_i)\Big\rangle\\
&= (-1)^l\int_\Omega {x_\alpha}^2 u_i(a_{l-1}\Delta^{l-1}+\cdots+a_1\Delta+a_0)u_i\\
&\quad+(-1)^l\int_\Omega u_i\Big\langle\nabla {x_\alpha}^2,\nabla(C_l(\Delta)u_i)\Big\rangle.
\end{aligned}
$$

Sabendo que $\nabla\left(\sum_{\alpha=1}^{n+1}{x_\alpha}^2\right)=0$, aplicando somatório sobre α e usando o Lema 3.5, obtemos

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\int_\Omega x_\alpha u_i((-\Delta)^l(x_\alpha u_i)-x_\alpha(-\Delta)^l u_i)=$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^l \int_\Omega \left(\sum_{\alpha=1}^{n+1} x_\alpha{}^2\right) u_i(a_{l-1}\Delta^{l-1} + \cdots + a_1\Delta + a_0)u_i + (-1)^l \int_\Omega u_i \left\langle \nabla\left(\sum_{\alpha=1}^{n+1} x_\alpha{}^2\right), \nabla(C_l(\Delta)u_i)\right\rangle \\
&= (-1)^l \int_\Omega u_i(a_{l-1}\Delta^{l-1} + \cdots + a_1\Delta + a_0)u_i \\
&= \int_\Omega u_i(-a_{l-1}(-\Delta)^{l-1} + a_{l-2}(-\Delta)^{l-2} - \cdots + (-1)^{l-1}a_1(-\Delta) + (-1)^l a_0)u_i \\
&\leq \int_\Omega u_i(\mid -a_{l-1} \mid (-\Delta)^{l-1} + \mid a_{l-2} \mid (-\Delta)^{l-2} + \cdots + \mid (-1)^{l-1}a_1 \mid (-\Delta) + \mid (-1)^l a_0 \mid)u_i \\
&= \int_\Omega u_i \left(\sum_{j=1}^{l-1} \mid a_j \mid (-\Delta)^j\right) u_i + \mid a_0 \mid \int_\Omega u_i^2 \\
&= \sum_{j=1}^{l-1} \mid a_j \mid \int_\Omega u_i(-\Delta)^j u_i + \mid a_0 \mid \leq \sum_{j=1}^{l-1} \mid a_j \mid \lambda_i^{\frac{j}{l}} + \mid a_0 \mid \\
&= \sum_{j=1}^{l-1} \mid a_j \mid \lambda_i^{\frac{j}{l}} + n^l
\end{aligned}
$$

o que conclui a demonstração. □

No próximo teorema, apresentamos uma desigualdade tipo-Yang em um domínio compacto na esfera unitária S^n.

Teorema 3.11 *Seja λ_i o i-ésimo autovalor do seguinte problema*

$$(-\Delta)^l u = \lambda u \quad em \quad \Omega$$

$$u|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = \cdots = \left.\frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}}\right|_{\partial\Omega} = 0,$$

onde Ω é um domínio compacto conexo em uma n-esfera unitária S^n.
Então temos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \\
&\leq \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 (\mid a_{l-1} \mid \lambda_i^{\frac{l-1}{l}} + \cdots + \mid a_1 \mid \lambda_i^{\frac{1}{l}} + \mid a_0 \mid)\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\times \left\{\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)(n^2 + 4\lambda_i^{\frac{1}{l}})\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (3\text{-}66)
\end{aligned}
$$

Prova. Sejam $x_1,\cdots,x_{n+1}$ as funções coordenadas canônicas do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, então

$$S^n=\left\{(x_1,\cdots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1};\sum_{\alpha=1}^{n+1}{x_\alpha}^2=1\right\}.$$

Seja u_i a i-ésima autofunção ortonormal correspondendo ao autovalor λ_i, $i=1,2,\cdots$. Para qualquer $\delta>0$, tomando $h=x_\alpha$ na desigualdade (3-27) do Teorema 3.4 temos

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\int_\Omega(-x_\alpha u_i^2\Delta x_\alpha-2x_\alpha u_i\langle\nabla x_\alpha,\nabla u_i\rangle)\\ &\leq\delta\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\int_\Omega x_\alpha u_i((-\Delta)^l(x_\alpha u_i)-\lambda_i x_\alpha u_i)+\sum_{i=1}^{k}\frac{(\lambda_{k+1}-\lambda_i)}{\delta}\left\|\langle\nabla x_\alpha,\nabla u_i\rangle+\frac{u_i\Delta x_\alpha}{2}\right\|^2.\end{aligned}$$

Considerando o somatório em α de 1 a $n+1$, obtemos

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\sum_{\alpha=1}^{n+1}\int_\Omega(-x_\alpha u_i^2\Delta x_\alpha-2x_\alpha u_i\langle\nabla x_\alpha,\nabla u_i\rangle)\\ &\leq\delta\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\sum_{\alpha=1}^{n+1}\int_\Omega x_\alpha u_i((-\Delta)^l(x_\alpha u_i)-\lambda_i x_\alpha u_i)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{k}\frac{(\lambda_{k+1}-\lambda_i)}{\delta}\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left\|\langle\nabla x_\alpha,\nabla u_i\rangle+\frac{u_i\Delta x_\alpha}{2}\right\|^2.\end{aligned}\tag{3-67}$$

Temos que

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{n+1}\int_\Omega(-x_\alpha u_i^2\Delta x_\alpha-2x_\alpha u_i\langle\nabla x_\alpha,\nabla u_i\rangle)&=\sum_{\alpha=1}^{n+1}\int_\Omega(n{x_\alpha}^2u_i^2-u_i\langle 2x_\alpha\nabla x_\alpha,\nabla u_i\rangle)=\\ \int_\Omega nu_i^2\left(\sum_{\alpha=1}^{n+1}{x_\alpha}^2\right)-\int_\Omega u_i\left\langle\sum_{\alpha=1}^{n+1}\nabla{x_\alpha}^2,\nabla u_i\right\rangle&=n\int_\Omega u_i^2=n.\end{aligned}\tag{3-68}$$

Além disso, usando o lema 3.5, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left\|\langle\nabla x_\alpha,\nabla u_i\rangle+\frac{u_i\Delta x_\alpha}{2}\right\|^2&=\sum_{\alpha=1}^{n+1}\int_\Omega\left(\langle\nabla x_\alpha,\nabla u_i\rangle+\frac{u_i\Delta x_\alpha}{2}\right)\left(\langle\nabla x_\alpha,\nabla u_i\rangle+\frac{u_i\Delta x_\alpha}{2}\right)\\ &=\sum_{\alpha=1}^{n+1}\int_\Omega\left(\langle\nabla x_\alpha,\nabla u_i\rangle^2+u_i\Delta x_\alpha\langle\nabla x_\alpha,\nabla u_i\rangle+\frac{u_i^2(\Delta x_\alpha)^2}{4}\right)\\ &=\int_\Omega\left(\sum_{\alpha=1}^{n+1}\langle\nabla x_\alpha,\nabla u_i\rangle^2-\sum_{\alpha=1}^{n+1}nu_i\langle x_\alpha\nabla x_\alpha,\nabla u_i\rangle+\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{n^2u_i^2{x_\alpha}^2}{4}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_\Omega |\nabla u_i|^2 - \frac{n}{2}\int_\Omega \left\langle \sum_{\alpha=1}^{n+1} \nabla {x_\alpha}^2, \nabla u_i \right\rangle + \frac{n^2}{4}\int_\Omega \left(\sum_{\alpha=1}^{n+1} {x_\alpha}^2\right) u_i^2 \\
&= \frac{n^2}{4} + \int_\Omega |\nabla u_i|^2 = \frac{n^2}{4} + \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla u_i \\
&= \frac{n^2}{4} + \int_\Omega u_i(-\Delta) u_i \\
&\leq \frac{n^2}{4} + \lambda_i^{\frac{1}{l}}. \qquad (3\text{-}69)
\end{aligned}$$

Substituímos as expressões (3-68), (3-69) e o Lema 3.10 em (3-67)

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 n \leq \delta \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \left(\sum_{j=1}^{l-1} |a_j| \lambda_i^{\frac{j}{l}} + |a_0| \right) + \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(\frac{n^2}{4} + \lambda_i^{\frac{1}{l}} \right).$$

Tomando $\delta = \left\{ \dfrac{\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(\frac{n^2}{4} + \lambda_i^{\frac{1}{l}} \right)}{\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 (|a_{l-1}| \lambda_i^{\frac{l-1}{l}} + \cdots + |a_1| \lambda_i^{\frac{1}{l}} + |a_0|)} \right\}^{\frac{1}{2}}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 n \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 (|a_{l-1}| \lambda_i^{\frac{l-1}{l}} + \cdots + |a_1| \lambda_i^{\frac{1}{l}} + |a_0|) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(\frac{n^2}{4} + \lambda_i^{\frac{1}{l}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 (|a_{l-1}| \lambda_i^{\frac{l-1}{l}} + \cdots + |a_1| \lambda_i^{\frac{1}{l}} + |a_0|) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(\frac{n^2}{4} + \lambda_i^{\frac{1}{l}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \\
&\leq \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 (|a_{l-1}| \lambda_i^{\frac{l-1}{l}} + \cdots + |a_1| \lambda_i^{\frac{1}{l}} + |a_0|) \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\times \left\{ \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(n^2 + 4\lambda_i^{\frac{1}{l}} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

□

A seguir, apresentamos duas estimativas para o $(k+1)$-ésimo autovalor.

Corolário 3.12 *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 3.11, temos*

$$\lambda_{k+1} \leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i + \frac{1}{2n^2k^2}\left(\sum_{i=1}^{k}(| a_{l-1} | \lambda_i^{\frac{l-1}{l}} + \cdots + | a_1 | \lambda_i^{\frac{1}{l}} + | a_0 |)\right) \times \left(kn^2 + 4\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right)$$

$$+ \quad \left\{\frac{1}{4n^4k^4}\left(\sum_{i=1}^{k}(| a_{l-1} | \lambda_i^{\frac{l-1}{l}} + \cdots + | a_1 | \lambda_i^{\frac{1}{l}} + | a_0 |)\right)^2 \left(kn^2 + 4\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right)^2 - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

e $\lambda_{k+1} \leq U_{k+1} + \sqrt{U_{k+1}^2 - V_{k+1}}$, *onde*

$$U_{k+1} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i + \frac{1}{2n^2k}\sum_{i=1}^{k}\left(| a_{l-1} | \lambda_i^{\frac{l-1}{l}} + \cdots + | a_1 | \lambda_i^{\frac{1}{l}} + | a_0 |\right)\left(n^2 + 4\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right)$$

e

$$V_{k+1} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2 + \frac{1}{n^2k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(| a_{l-1} | \lambda_i^{\frac{l-1}{l}} + \cdots + | a_1 | \lambda_i^{\frac{1}{l}} + | a_0 |\right)\left(n^2 + 4\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right).$$

Prova. Pelo Lema 2.2, obtemos

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2\left(| a_{l-1} | \lambda_i^{\frac{l-1}{l}} + \cdots + | a_1 | \lambda_i^{\frac{1}{l}} + | a_0 |\right)$$
$$\leq \frac{1}{k}\left\{\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2\right\}\left\{\sum_{i=1}^{k}\left(| a_{l-1} | \lambda_i^{\frac{l-1}{l}} + \cdots + | a_1 | \lambda_i^{\frac{1}{l}} + | a_0 |\right)\right\} \tag{3-70}$$

e

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)(n^2 + 4\lambda_i^{\frac{1}{l}}) \leq \frac{1}{k}\left\{\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)\right\}\left\{\sum_{i=1}^{k}(n^2 + 4\lambda_i^{\frac{1}{l}})\right\}$$
$$= \frac{1}{k}\left\{\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)\right\}\left\{n^2k + 4\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right\}. \tag{3-71}$$

Substituímos (3-70),(3-71) na desigualdade dada pelo Teorema 3.11

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \le \frac{1}{nk}\left\{\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{i=1}^{k}\Big(|\,a_{l-1}\,|\,\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}+\cdots+|\,a_1\,|\,\lambda_i^{\frac{1}{l}}+|\,a_0\,|\Big)\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\left\{\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{n^2k+4\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Logo

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \le \frac{1}{n^2k^2}\left\{\sum_{i=1}^{k}\Big(|\,a_{l-1}\,|\,\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}+\cdots+|\,a_1\,|\,\lambda_i^{\frac{1}{l}}+|\,a_0\,|\Big)\right\}$$
$$\times\left\{\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\right\}\left\{n^2k+4\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right\}.$$

Fazendo $A=\sum_{i=1}^{k}\Big(|\,a_{l-1}\,|\,\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}+\cdots+|\,a_1\,|\,\lambda_i^{\frac{1}{l}}+|\,a_0\,|\Big),\quad B=n^2k+4\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{l}}$ e abrindo o somatório acima, obtemos

$$k\lambda_{k+1}^2-\lambda_{k+1}\left[2\Big(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Big)+\frac{1}{n^2k}(A)(B)\right]+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2+\frac{1}{n^2k^2}(A)(B)\Big(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Big)\le 0.$$

Resolvendo o polinômio em λ_{k+1}, obtemos

$$\lambda_{k+1} \;\le\; \frac{1}{k}\Big(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Big)+\frac{1}{2n^2k^2}(A)(B)+\frac{1}{2k}\left\{\frac{1}{n^4k^2}(A)^2(B)^2-4k\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2-\frac{1}{k}\Big(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Big)^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Simplificando a expressão

$$\lambda_{k+1} \;\le\; \frac{1}{k}\Big(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Big)+\frac{1}{2n^2k^2}(A)(B)+\left\{\frac{1}{4n^4k^4}(A)^2(B)^2-\frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right)^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Com isso, a primeira desigualdade fica demonstrada.

Por outro lado, pelo Lema 2.1, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\Big(|\,a_{l-1}\,|\,\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}+\cdots+|\,a_1\,|\,\lambda_i^{\frac{1}{l}}+|\,a_0\,|\Big)\right)\left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(n^2+4\lambda_i^{\frac{1}{l}})\right)\\
\leq\ &\left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\Big(|\,a_{l-1}\,|\,\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}+\cdots+|\,a_1\,|\,\lambda_i^{\frac{1}{l}}+|\,a_0\,|\Big)(n^2+4\lambda_i^{\frac{1}{l}})\right)
\end{aligned}
$$

Substituímos no Teorema 3.11

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\leq\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\times\left\{\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\Big(|\,a_{l-1}\,|\,\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}+\cdots+|\,a_1\,|\,\lambda_i^{\frac{1}{l}}+|\,a_0\,|\Big)(n^2+4\lambda_i^{\frac{1}{l}})\right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Donde, obtemos

$$
\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\leq\frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\Big(|\,a_{l-1}\,|\,\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}+\cdots+|\,a_1\,|\,\lambda_i^{\frac{1}{l}}+|\,a_0\,|\Big)(n^2+4\lambda_i^{\frac{1}{l}})\right\}.
$$

Abrindo o somatório, obtemos

$$
\begin{aligned}
&k\lambda_{k+1}^2-2\lambda_{k+1}\Big(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Big)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2\\
&-\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{k}\Big(|\,a_{l-1}\,|\,\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}+\cdots+|\,a_1\,|\,\lambda_i^{\frac{1}{l}}+|\,a_0\,|\Big)(n^2+4\lambda_i^{\frac{1}{l}})\right)\lambda_{k+1}\\
+\quad&\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Big(|\,a_{l-1}\,|\,\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}+\cdots+|\,a_1\,|\,\lambda_i^{\frac{1}{l}}+|\,a_0\,|\Big)(n^2+4\lambda_i^{\frac{1}{l}})\leq 0
\end{aligned}
$$

Resolvendo em λ_{k+1}, obtemos

$$
\begin{aligned}
\lambda_{k+1}\ \leq\ &\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i+\frac{1}{2n^2k}\sum_{i=1}^{k}\Big(|\,a_{l-1}\,|\,\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}+\cdots+|\,a_1\,|\,\lambda_i^{\frac{1}{l}}+|\,a_0\,|\Big)(n^2+4\lambda_i^{\frac{1}{l}})\\
&+\left\{\frac{1}{k^2}\Big(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Big)^2+\frac{1}{n^2k^2}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\sum_{i=1}^{k}\Big(|\,a_{l-1}\,|\,\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}+\cdots+|\,a_1\,|\,\lambda_i^{\frac{1}{l}}+|\,a_0\,|\Big)(n^2+4\lambda_i^{\frac{1}{l}})\right.\\
&\left.-\left[\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2+\frac{1}{n^2k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Big(|\,a_{l-1}\,|\,\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}+\cdots+|\,a_1\,|\,\lambda_i^{\frac{1}{l}}+|\,a_0\,|\Big)(n^2+4\lambda_i^{\frac{1}{l}})\right]\right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Sendo

$$
\begin{aligned}
U_{k+1} &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i + \frac{1}{2n^2k}\sum_{i=1}^{k}\Big(|\, a_{l-1}\,|\, \lambda_i^{\frac{l-1}{l}} + \cdots + |\, a_1\,|\, \lambda_i^{\frac{1}{l}} + |\, a_0\,|\Big)(n^2 + 4\lambda_i^{\frac{1}{l}}) \\
V_{k+1} &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2 + \frac{1}{n^2k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Big(|\, a_{l-1}\,|\, \lambda_i^{\frac{l-1}{l}} + \cdots + |\, a_1\,|\, \lambda_i^{\frac{1}{l}} + |\, a_0\,|\Big)(n^2 + 4\lambda_i^{\frac{1}{l}})
\end{aligned}
$$

Concluímos que

$$
\lambda_{k+1} \le U_{k+1} + \sqrt{U_{k+1}^2 - V_{k+1}}.
$$

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Ashbaugh, Mark S.;Hermi, L. **A unified approach to universal inequalities for eigenvalues of elliptic operators**. *Pacific Journal of Mathematics*, 217(2):201–219, 2004.

[2] Ashbaugh, M. S. **Isoperimetric and universal inequalities for eigenvalues, in spectral theory e geometry**. (Edinburgh, 1998), E. B. Davies e Yu Safalov eds., London Math. Soc. Lecture Notes, vol. 273, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, pp. 95 - 139.

[3] Ashbaugh, M. S. **The universal eigenvalue bounds of payne-pólya-weinberger, hile-protter, and h c yang**. *Proc.Indian Acad.Sci. (Math. Sci.)*, 112(1):3–30, 2002.

[4] Brezis, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces e Partial Differential Equations**. Springer, 2010.

[5] Carmo, M. P. **Geometria Riemanniana**. IMPA, Rio de Janeiro, 2008.

[6] Cavalheiro, A. C. **Sobre Autovalores do Laplaciano Bi-harmônico em Variedades Riemannianas e do Poli-harmônico em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{S}^n$**. Technical report, Departamento de Matemática - Universidade de Brasília, 2010.

[7] Chavel, I. **Eigenvalues in Riemannian geometry**. Academic Press, 1984.

[8] Chavel, I. **Riemannian Geometry - A modern Introduction**. Cambridge University Press, second edition, 2006.

[9] Chen, Z. C.; Qian, C. L. **Estimates for discrete spectrum of laplacian operator with any order**. *J. China Univ. Sci. Tech.*, 20:259–266, 1990.

[10] Chen, Daguang; Cheng, Q.-M. **Extrinsic estimates for eigenvalues of the laplace operator**. *J. Math. Soc. Japan*, 60(2):325–339, 2008.

[11] Cheng, Qing-Ming; Yang, H. **Inequalities for eigenvalues of a clamped plate problem**. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(6):2625–2635, 2005.

[12] Courant, R.; Hilbert, D. **Methoden der mathematischen Physik I**. Springer, 3rd edition, 1968.

[13] Hardy, G.; Pólya, G. L. J. **Inequalities**. Cambridge University Press, second edition, 1994.

[14] Hile, G. N.; Protter, M. H. **Inequalities for eigenvalues of the laplacian**. *Indiana Univ. Math. J.*, 29:523–538, 1980.

[15] Hile, G. N.; Yeh, R. **Inequalities for eigenvalues of the biharmonic operator**. *Pacific J. Math.*, 112:115–133, 1984.

[16] Hook, S. **Domain independent upper bounds for eigenvalues of elliptic operator**. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 318:615–642, 1990.

[17] Jost, J.; Li Jost, X. . W. Q. X. C. **Universal bounds for eigenvalues of the polyharmonic operators**. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363(4):1821–1854, 2011.

[18] Li, P. **Lecture Notes on Geometric Analysis**. Department of Mathematics University of California, revised edition, 2009.

[19] Payne, L. E.; Pólya, G. W. H. F. **On the ratio of consecutive eigenvalues**. *J. Math. and Phys.*, 35:289–298, 1956.

[20] Wang, Q.; Xia, C. **Universal bounds for eigenvalues of the biharmonic operator on riemannian manifolds**. *J. Funct. Anal.*, 245:334–352, 2007.

[21] Weyl, H. **Das asympotische verteilungsgesetz der eigenwerte linearer partieller differentialgleichungen**. *Math. Ann.*, 71:441–469, 1912.

[22] Yang, H. C. **Estimates of the difference between consecutive eigenvalues**. 1995. preprint (revision of International Centre for Theoretical Physics preprint IC/91/60, Trieste, Italy, April 1991).