

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Movimentos sob atração focal em campos vetoriais planares

por

Tibério Bittencourt de Oliveira Martins

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia

Dissertação de Mestrado em Matemática

Goiânia, Goiás

2008



Termo de Ciência e de Autorização para Disponibilizar as Teses e Dissertações Eletrônicas (TEDE) na Biblioteca Digital da UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás-UFG a disponibilizar gratuitamente através da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações – BDTD/UFG, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor(a): Tibério Bittencourt de Oliveira Martins			
CPF:		E-mail:	tiberio.b@gmail.com
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não			
Vínculo Empregatício do autor			
Agência de fomento:	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico	Sigla:	CNPq
País:	Brasil	UF:	GO
CNPJ:	33.654.831/0001-36		
Título:	Movimentos sob atração focal em campos vetoriais planares		
Palavras-chave:	Bifurcações sela-nó, forquilha e de Bogdanov-Takens		
Título em outra língua:	Motions under focal attraction in planar vector fields		
Palavras-chave em outra língua:	Fold, Pitchfork and Bogdanov-Takens bifurcations		
Área de concentração:	Análise		
Data defesa:	(29/08/2008)		
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado em Matemática		
Orientador(a):	Ronaldo Alves Garcia		
CPF:		E-mail:	ragarcia@mat.ufg.br
Co-orientador(a):	-----		
CPF:	-----		
E-mail:	-----		

3. Informações de acesso ao documento:

Liberação para disponibilização?¹ total parcial

Em caso de disponibilização parcial, assinale as permissões:

Capítulos. Especifique: _____

Outras restrições: _____

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O Sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Data: 30 / 09 / 2008

Assinatura do(a) autor(a)

¹ Em caso de restrição, esta poderá ser mantida por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Todo resumo e metadados ficarão sempre disponibilizados.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Movimentos sob atração focal em campos vetoriais planares

por

Tibério Bittencourt de Oliveira Martins

Área de Concentração : **Análise**

Orientador: **Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia**

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Conselho Diretor do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Goiânia, Goiás

2008

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(GPT/BC/UFG)

Martins, Tibério Bittencourt de Oliveira.
M383m Movimentos sob atração focal em campos vetoriais planares
[manuscrito] Tibério Bittencourt de Oliveira Martins /. – 2008.
67f. : il., figs.

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2008.

Bibliografia: f.67.

1. Campos vetoriais planares – Biologia 2. Equações diferenciais
bidimensionais 3. Dinâmica de modelagem – Platelminhos I. Garcia,
Ronaldo Alves II. Universidade Federal de Goiás, **Instituto de
Matemática e Estatística**. III. Título.

CDU: 5 14.765.2:57

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA-MESTRADO

“MOVIMENTOS SOB ATRAÇÃO FOCAL EM CAMPOS
VETORIAIS PLANARES”


por

Tibério Bittencourt de Oliveira Martins

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Conselho Diretor do Instituto de Matemática e Estatística, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Goiânia, 29 de agosto de 2008.

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia-IME/UFG
(Orientador)


Profa. Dra. Maria José Pacifico-UFRJ

Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado-IME/UFG



Este trabalho teve suporte financeiro do CNPq.

Sumário

1	Variedade Central	12
2	Um movimento sob atração focal em um meio rotacionado	17
3	Uma pequena variação do problema dos platelmintos	25
4	Uma segunda variação do problema dos platelmintos	30
5	Bifurcação de Bogdanov-Takens	47
6	Uma terceira variação do problema dos platelmintos	51
6.1	velocidade radial	51
6.2	Análise do foco	53
6.3	Os outros pontos de equilíbrio	53
6.4	bifurcação de Bogdanov-Takens	55
6.5	Análise da existência de uma grande órbita periódica	56
7	Critério para ausência de órbitas periódicas	58
7.1	O critério	58
7.2	Campos vetoriais quadráticos	61
8	Apêndice: Formas normais	62
8.1	Bifurcação Sela-nó	62
8.2	Bifurcação Forquilha	65
	Conclusão	69
	Referências Bibliográficas	70

Resumo

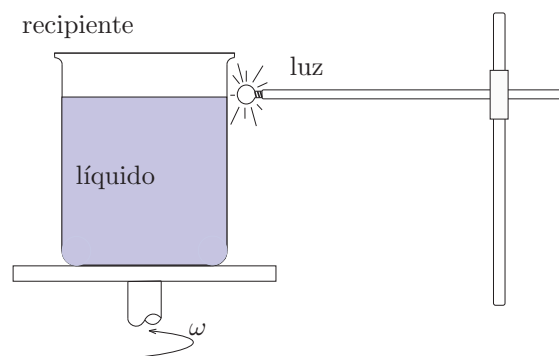
Neste trabalho, desenvolvemos o artigo ”**On the motion under focal attraction in a rotating medium**” de J. Sotomayor [9] que trata de um sistema de equações diferenciais bidimensional que modela o seguinte problema na Biologia: num recipiente raso de seção circular, com líquido, girando a uma velocidade angular ω , existem platelmintos, organismos vermiforme, eles são atraídos por um ponto luminoso fixo perto da borda do recipiente e nadam com uma velocidade v em direção a este ponto. O problema é mostrar que existe um ponto de equilíbrio onde os platelmintos vão se aglomerar com o passar do tempo. É analisada a dinâmica da modelagem: existência de pontos de equilíbrio e estabilidade do sistema e bifurcações. Analisamos também três modificações desse sistema. Na parte final, é discutido um critério para determinação da ausência de órbitas periódicas em campos vetoriais planares.

Abstract

In this work, we develop the article "**On the motion under focal attraction in a rotating medium**", of J. Sotomayor, which deals with a bidimensional differential system that model the following Biological problem: in a shallow recipient with circular section, with liquid in, spinning with angular speed ω , there are platyhelminthes, flatworms organisms, they are attracted by a fix lighting point near of the border of the recipient and they swim with a speed v in the direction of the this point. The problem is to show that there exists an equilibrium point where platyhelminthes go to cluster by the time passing. It's analyzed the dynamic of the model: existence of critical points and stability of the system and bifurcations. We analyzed three modifications of this system too. In the last part, it's discussed a criterium for non existence of periodic orbits of a planar vector fields in a simply connected region.

Introdução

Será analisado nessa dissertação um sistema de equações diferenciais motivado por um experimento com platelmintos, organismos vermiformes muito pequenos na Biologia. O objetivo desse experimento é isolar uma certa espécie de platelmintos fototrópicos (que são atraídos pela luz) das outras espécies. Os platelmintos estão imersos em um fluido líquido num recipiente de seção circular, e são atraídos por um ponto de luz localizado na borda desse recipiente. Se o recipiente estiver parado, todas as espécies fototrópicas serão atraídas para o mesmo local, não sendo possível o isolamento. A idéia então é fazer esse recipiente girar em torno do seu eixo central com uma velocidade de rotação constante. Sob a hipótese de que cada espécie se desloca no fluido com uma velocidade distinta, será mostrado nessa dissertação que para certos valores da velocidade de rotação, existe um ponto de equilíbrio no interior do recipiente onde apenas platelmintos de mesma espécie se agruparão com o passar do tempo, ou seja, organismos com velocidades diferentes se acumulam em pontos de equilíbrio diferentes, permitindo assim que, o cientista interessado no isolamento de certa espécie possa retirá-la do recipiente com uma colher, por exemplo.



Durante todo o texto, denominamos este problema como o Problema dos Platelmintos. Esta modelagem foi sugerida por L. Markus (ver [11]) e estudada

por H.K. Wilson em [11] e posteriormente por J. Sotomayor em [9]. Desenvolvemos o artigo [9] no capítulo 2.

Após esta análise, fizemos mais três análises de sistemas ligeiramente diferentes do anterior, duas motivadas pelo conceito generalizado de distância em Matemática e a terceira acrescentando uma velocidade radial no fluido. Nas equações do sistema original, surge uma expressão relativa ao cálculo da distância de cada platelminto ao foco luminoso em cada instante, o que fizemos foi trocar essa expressão por outras duas para daí fazermos a mesma análise, na esperança de que, no geral, os três sistemas se comportassem de forma semelhante. É mostrado nos capítulos 3 e 4 que isso nem sempre ocorre, mas grande parte das características do sistema original é mantida. No capítulo 5 é discutida a bifurcação de Bogdanov-Takens que é aplicada no capítulo 6. No último capítulo, é discutido um critério para determinação de ausência de órbitas periódicas em campos vetoriais planares.

Nessas análises foram usados todos os resultados clássicos das equações diferenciais ordinárias tais quais existência e unicidade de solução, equivalência topológica de sistemas, Teorema de Liouville, Teorema de Hartman, Critério da Divergência de Bendixson, Teorema de Poincaré-Bendixson e Variedades Estáveis, além de uma introdução à Teoria das Bifurcações no capítulo 1, para cálculos de variedades centrais e retratos de fase em torno de pontos singulares não hiperbólicos.

Os retratos de fase de todo o texto foram gerados com o auxílio do software gratuito **Odeinr2** encontrado em [5].

Capítulo 1

Variedade Central

Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

com f suficientemente diferenciável e $f(0) = 0$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os autovalores da matriz jacobiana de f avaliada no ponto singular $x_0 = 0$. Suponha que $x_0 = 0$ seja um ponto não hiperbólico e que existam n_0 autovalores com parte real nula, n_+ autovalores com parte real positiva e n_- autovalores com parte real negativa. Seja T^c o subespaço linear de \mathbb{R}^n gerado pela união dos autovetores correspondentes aos autovalores de parte real nula. E seja φ^t o fluxo associado ao sistema (1.1).

Teorema 1. (da Variedade Central) *Existe uma variedade $W_{loc}^c(0)$ diferenciável de dimensão n_0 invariante por φ^t que é tangente a T^c em $x=0$. Além disso, existe uma vizinhança U de $x_0 = 0$, tal que se $\varphi^t x \in U$ para todo $t \geq 0$ ($t \leq 0$), então $\varphi^t x \rightarrow W_{loc}^c(0)$ para $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$).*

Em uma base de autovetores, o sistema (1.1) pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dot{u} = Bu + g(u, v) \\ \dot{v} = Cv + h(u, v) \end{cases} \quad (1.2)$$

onde $u \in \mathbb{R}^{n_0}$, $v \in \mathbb{R}^{n_+ + n_-}$, B é uma matriz $n_0 \times n_0$ com todos seus autovalores no eixo imaginário, enquanto C é uma matriz $(n_+ + n_-) \times (n_+ + n_-)$ com nenhum autovalor no eixo imaginário. As funções g e h têm suas expansões de Taylor começando com o termo quadrático no mínimo. A variedade central W^c do sistema (1.2) pode ser localmente representada como o gráfico de uma função de classe C^r :

$$W^c = \{(u, v) : v = V(u)\}$$

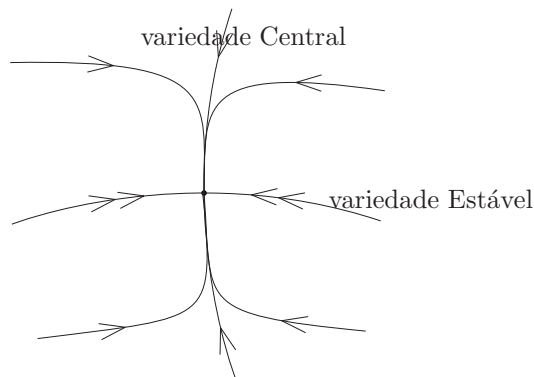
Em que $V : \mathbb{R}^{n_0} \rightarrow \mathbb{R}^{n_+ + n_-}$ e devido a propriedade de tangência de W^c , $V(u) = O(\|u\|^2)$.

O fluxo na variedade central é governado pelo sistema n_0 -dimensional

$$\dot{u} = Bu + g(u, V(u)) \quad (1.3)$$

Teorema 2. *Suponha que a origem do sistema (1.3) seja um ponto de equilíbrio estável (assintoticamente estável)(instável). Então a origem do sistema (1.2) é um ponto de equilíbrio estável (assintoticamente estável)(instável)(ver [1]).*

O resultado a seguir mostra que uma solução que comece suficientemente próxima a variedade central tende à variedade muito rapidamente, isso justifica, por exemplo, a aparência dos retratos de fase de sistemas bidimensionais com uma variedade central e uma estável, em que as órbitas próximas a variedade central são mais fortemente "lançadas" contra a variedade central fazendo uma curvatura muito grande. Aqui e durante todo o texto utilizaremos, quando necessário, duas setas seguidas para a direção cujo autovalor tem maior módulo.



Teorema 3. *Suponha que a origem do sistema (1.3) seja um ponto de equilíbrio estável. Seja $(u(t), v(t))$ uma solução de (1.2) com $(u(0), v(0))$ suficientemente pequeno. Então existe uma solução $\nu(t)$ de (1.3) e uma constante positiva γ tal que para $t \rightarrow \infty$,*

$$\begin{aligned} u(t) &= \nu(t) + O(e^{-\gamma t}) \\ v(t) &= h(\nu(t)) + O(e^{-\gamma t}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Demonstração. (ver [1]) □

Se substituirmos $v(t) = V(u(t))$ na segunda equação de (1.2) obtemos:

$$V'(u)[Bu + g(u, V(u))] = CV(u) + h(u, V(u)) \quad (1.5)$$

Esta equação junto com as condições $V(0) = 0$, $V'(0) = 0$ é o sistema a ser resolvido para encontrar a variedade central. Mas a dificuldade da resolução é

tão grande quanto a resolução do sistema original. O próximo resultado, entretanto, mostra que, a princípio, a variedade central pode ser aproximada de forma recursiva por um polinômio de qualquer grau. Como é de nosso interesse estudar sistemas atratores, suponha que não exista autovalores com parte real positiva e para as funções $\phi : \mathbb{R}^{n_0} \rightarrow \mathbb{R}^{n-}$ de classe C^1 na vizinhança da origem, defina:

$$(M\phi)(t) = \phi'(u)[Bu + g(u, \phi(u))] - C\phi(u) - h(u, \phi(u)) \quad (1.6)$$

Observe que para (1.5), $(MV)(t) = 0$

Teorema 4. *Seja ϕ uma aplicação de classe C^1 , na vizinhança da origem, de \mathbb{R}^{n_0} em \mathbb{R}^{n-} com $\phi(0) = 0$ e $\phi'(0) = 0$. Suponha que para $u \rightarrow 0$, $(M\phi)(t) = O(|u|^q)$ com $q > 1$. Então para $u \rightarrow 0$, $|V(u) - \phi(u)| = O(|u|^q)$ (ver [1]).*

Teorema 5. (Princípio da redução) *O sistema (1.2) é localmente topologicamente equivalente perto da origem ao sistema (ver [1])*

$$\begin{cases} \dot{u} = Bu + g(u, V(u)) \\ \dot{v} = Cv \end{cases} \quad (1.7)$$

Observe que as equações para u e v são disjuntas em (1.7). A primeira equação é a restrição de (1.2) a sua variedade central. Então, a dinâmica do sistema estruturalmente instável (1.2) é essencialmente determinado por essa restrição, já que a segunda equação em (1.7) é linear e tem soluções de decaimento/crescimento exponencial. Uma segunda maneira de se obter a expressão da variedade central é a seguinte (ver [4]): suponha $n_0 = 1$, então o sistema (1.2) pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{u^2}{2}g_{uu} + u\langle g_{uv}, v \rangle + \frac{u^3}{6}g_{uuu} + \dots \\ \dot{v} = Cv + \frac{u^2}{2}h_{uu} + \frac{u}{2}h_{uv}v + \frac{1}{6}h_{uuu}u^3 + \dots \end{cases} \quad (1.8)$$

Seja v a equação cujo gráfico é a variedade central

$$v = V(u) = \frac{1}{2}w_2u^2 + \frac{1}{6}w_3u^3 + O(u^4) \quad (1.9)$$

em que w_2 e w_3 são coeficientes a determinar. Derivando em relação a variável t obtemos

$$\dot{v} = w_2u\dot{u} + \frac{u^2\dot{u}}{2}w_3 + O(u^5) \quad (1.10)$$

substituindo (1.9) na primeira equação de (1.8) obtemos

$$\dot{u} = g(u, v) = \frac{u^2}{2}g_{uu} + \frac{u}{2}g_{uv}v + \frac{u^3}{6}g_{uuu} + \dots$$

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{u^2}{2}g_{uu} + u^3 \left[\frac{1}{6}g_{uuu} + \frac{1}{4}g_{uv} \left(w_2 + \frac{u}{3}w_3 + \frac{O(u^4)}{u^2} \right) \right] + O(u^4) \\ \dot{u} &= \frac{u^2}{2}g_{uu} + u^3 \left(\frac{1}{6}g_{uuu} + \frac{1}{4}g_{uv}w_2 \right) + O(u^4)\end{aligned}\quad (1.11)$$

Substituindo a expansão (1.9) na segunda equação do sistema (1.2) e usando a expressão (1.11) em (1.10) tem-se a seguinte igualdade, onde as funções que aparecem são todas avaliadas na origem:

$$\begin{aligned}& w_2 u \left[\frac{u^2}{2}g_{uu} + u^3 \left[\frac{g_{uuu}}{6} + \frac{g_{uv}}{4}w_2 \right] \right] + \\ & + \frac{u^2 \left[\frac{u^2}{2}g_{uu} + u^3 \left[\frac{g_{uuu}}{6} + \frac{g_{uv}}{4}w_2 \right] \right]}{2} w_3 + \\ & + O(u^5) = \\ & = w_2 g_{uu} \frac{u^3}{2} + w_2 \left[\frac{g_{uuu}}{6} + \frac{g_{uv}w_2}{4} \right] u^4 + \\ & + w_3 \frac{u^4}{4} g_{uu} + O(u^5) \\ & = C \left(\frac{1}{2}w_2 u^2 + \frac{1}{6}w_3 u^3 \right) + \\ & + \frac{1}{2}h_{uu}u^2 + \frac{u}{2}h_{uv} \left(\frac{1}{2}w_2 u^2 + \frac{1}{6}w_3 u^3 \right) + \\ & + \frac{1}{6}h_{uuu}u^3 + O(u^4)\end{aligned}$$

o que implica:

$$\frac{1}{2}(Cw_2 + h_{uu}) = 0$$

e

$$\frac{1}{2}w_2 g_{uu} = \frac{1}{6}Cw_3 + \frac{1}{4}h_{uv}w_2 + \frac{1}{6}h_{uuu}$$

Como C é invertível (já que não tem autovalor nulo) segue que

$$w_2 = -C^{-1}h_{uu}\quad (1.12)$$

e

$$w_3 = 3g_{uu}C^{-1}w_2 - \frac{3}{2}C^{-1}h_{uv}w_2 - C^{-1}h_{uuu}$$

implica

$$w_3 = -3g_{uu}(C^{-1})^2 h_{uu} + \frac{3}{2}C^{-1}h_{uv}C^{-1}h_{uu} - C^{-1}h_{uuu} \quad (1.13)$$

E a restrição de (1.2) a variedade central é dada por

$$\dot{u} = \frac{u^2}{2}g_{uu} + \frac{u^3}{6} \left(g_{uuu} - \frac{3}{2} \langle g_{uv}, C^{-1}h_{uu} \rangle \right) + O(u^4) \quad (1.14)$$

Capítulo 2

Um movimento sob atração focal em um meio rotacionado

O sistema de equações diferenciais a seguir foi estudado por J. Sotomayor em [9]. Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y + v \frac{R-x}{\sqrt{(R-x)^2 + y^2}} \\ \dot{y} = \omega x - v \frac{y}{\sqrt{(R-x)^2 + y^2}} \end{cases} \quad (2.1)$$

As soluções, também chamadas de órbitas, do sistema (2.1) descrevem o movimento de certos organismos atraídos por um foco $F = (R, 0)$, uma fonte luminosa ou um polo magnético. Estes organismos se movimentam com velocidade v em um meio (um fluido por exemplo) que rotaciona com velocidade angular ω em torno de um ponto fixo localizado na origem $O = (0, 0)$. O ponto focal F , que é indefinido para o sistema (2.1) é referido como ponto singular, fora dele o sistema é analítico. Um ponto em que as duas componentes do sistema se anulam é referido como ponto de equilíbrio.

Este modelo foi sugerido por L. Markus (ver [11]) para o movimento de platelmintos fototrópicos nadando em um líquido num recipiente circular raso com seção

$$G_R = x^2 + y^2 \leq R$$

O mecanismo é utilizado para separar platelmintos de espécies diferentes sob a hipótese de que tenham também velocidades diferentes. Nadando em direção ao foco luminoso, espera-se que platelmintos de mesma espécie se isolem em um determinado ponto P quando $t \rightarrow +\infty$, podendo ser retirados mergulhando uma colher nesse ponto (ver [10], página 264).

Seja $(w_-(p_0), w_+(p_0))$ o intervalo maximal da solução $\varphi(t, p_0)$ do sistema (2.1).

Definição 1. Denotemos por $W^s(Q)$ a bacia de atração de um ponto singular Q :

$$W^s(Q) = \{P_0 \in \mathbb{R}^2 | \varphi(t, P_0) \longrightarrow Q \text{ quando } t \longrightarrow w_+(P_0)\}$$

e $W^u(Q)$ a bacia de repulsão de um ponto singular Q :

$$W^u(Q) = \{P_0 \in \mathbb{R}^2 | \varphi(t, P_0) \longrightarrow Q \text{ quando } t \longrightarrow w_-(P_0)\}$$

Observe que para $Q = F$, as órbitas que se direcionarem para Q farão o trajeto em tempo finito.

Teorema 6. Para todo $\omega \geq 0$, a região $G_R \setminus F$ é positivamente invariante, de fato a componente radial do sistema (2.1) é negativa no complemento do disco fechado \mathcal{C} de centro $(\frac{R}{2}, 0)$ e raio $\frac{R}{2}$. Além disso são válidas as seguintes afirmações:

1. Para $0 \leq \omega \leq \frac{v}{R}$, F é um atrator global: $W^s(F) = \mathbb{R}^2$.
2. Para $\omega > \frac{v}{R}$, há um único ponto de equilíbrio hiperbólico P localizado em

$$P = P(\omega, v, R) = ((v/R)^2/R, (v/wR)\sqrt{r^2 - (\frac{v}{\omega})^2}) \quad (2.2)$$

pertencente à borda de \mathcal{C} cuja bacia de atração contém $W^u(F)$, a bacia de repulsão de F , que é um curva regular analítica contida em $G_R \setminus F$.

3. $W^s(F)$, a bacia de atração de F , é uma curva disjunta de G_R . Em particular vale que para $\omega > \frac{v}{R}$, $G_{R,+} = G_R \cap W^s(P) = G_R \setminus F$.

Demonstração. Fazendo a seguinte mudança de variáveis: $x = R\bar{x}$, $y = R\bar{y}$, $\omega = \frac{\bar{\omega}v}{R}$ e $t = \frac{\bar{t}R}{v}$ e retirando as barras chegamos ao seguinte sistema.

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\omega y + \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} \\ \dot{y} &= \omega x - \frac{y}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} \end{cases} \quad (2.3)$$

Observamos que o sistema (2.3) tem as mesmas propriedades qualitativas do sistema (2.1). A mudança de coordenadas teve a função de normalizar o raio do disco G_R para $R=1$ e a velocidade dos platelmintos para $v=1$. Escrevendo a equação em coordenadas polares centradas em $F = (1, 0)$ dada por:

$$x = 1 - r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta$$

obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\dot{r} \cos \theta + r \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta} \end{cases} \quad (2.4)$$

Isolando \dot{r} e $\dot{\theta}$ em (2.4), fazendo a mudança de coordenadas e multiplicando ambas equações por r , reescalando assim o tempo, obtemos

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(\omega \operatorname{sen} \theta - 1) \\ \dot{\theta} &= -\omega(r - \cos \theta) \end{cases} \quad (2.5)$$

Componente radial do sistema

Considere a componente radial

$$z(t) = x(t)^2 + y(t)^2$$

que nas coordenadas polares fica

$$z = 1 + r^2 - 2r \cos \theta$$

então temos

$$\begin{aligned} z'(t) &= 2r\dot{r} - 2\dot{r} \cos \theta + 2r \operatorname{sen} \theta \dot{\theta} \\ &= 2r(r(\omega \operatorname{sen} \theta - 1)) - 2r(\omega \operatorname{sen} \theta - 1) \cos \theta + 2r \operatorname{sen} \theta (-\omega(r - \cos \theta)) \\ &= 2\omega r^2 \operatorname{sen} \theta - 2r^2 - 2\omega r \operatorname{sen} \theta \cos \theta + 2r \cos \theta - 2\omega r^2 \operatorname{sen} \theta + 2r\omega \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ &= -2r(r - \cos \theta) \end{aligned} \quad (2.6)$$

tem-se de (2.6) que

$$z'(t) < 0 \iff r > \cos \theta$$

Se denotarmos por

$$\mathcal{C} = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid r \leq \cos \theta\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq (\frac{1}{2})^2\}$$

então toda solução fora do disco \mathcal{C} tende a se aproximar de $(0, 0)$. Daqui já se conclui que $w_+(p_0) = +\infty$ para todo p_0 .

Pontos de equilíbrio e inexistência de órbitas periódicas

Os pontos singulares de (2.5) são:

a) $P = (r_P, \theta_P)$, tal que $\operatorname{sen} \theta_P = \frac{1}{\omega}$ e $r_P = \sqrt{1 - \frac{1}{\omega^2}}$, caso ocorra $\omega \geq 1$.

b) $r = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Fazendo as mudanças de coordenadas inversas $(r, \theta) \longrightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \longrightarrow (x, y)$ obtemos em (a)

$$P = \left((v/R)^2/R, (v/wR) \sqrt{r^2 - \left(\frac{v}{\omega}\right)^2} \right)$$

e $P = F$ em (b). Com um cálculo direto, verifica-se que o ponto singular em (a) pertence a borda de \mathcal{C} .

Seja $X(r, \theta) = (\dot{r}, \dot{\theta}) = (r(\omega \sin \theta - 1), -\omega(r - \cos \theta))$ o campo. A análise da dinâmica do campo X é feita em três etapas. Primeiramente considerando $\omega > 1$, depois $0 < \omega < 1$ e finalmente a bifurcação em $w = 1$. A matriz jacobiana de X é:

$$J(r, \theta) = \begin{pmatrix} \omega \sin \theta - 1 & r\omega \cos \theta \\ -\omega & -\omega \sin \theta \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Pelo critério da divergência de Bendixson, não existe órbita periódica para este campo pois

$$\operatorname{div} X(r, \theta) = -1$$

para qualquer valor de ω . Então pelo teorema de Poincaré-Bendixson, toda órbita tende a algum ponto singular.

Substituindo P em (2.7)

$$J(P) = \begin{pmatrix} 0 & \omega - \frac{1}{\omega} \\ -\omega & -1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

O polinômio característico de $J(P)$ é $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + \omega^2 - 1$. Resolvendo $P(\lambda) = 0$ obtem-se

$$\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{5 - 4\omega^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{5 - 4\omega^2}}{2}$$

Se $\omega > 1$ então $\Delta = 5 - 4\omega^2 < 1$ e $\Delta < 0$ para $\omega > \sqrt{5}/2$, logo P é um atrator tipo nó se $1 < \omega \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ e tipo foco atrator se $\omega > \frac{\sqrt{5}}{2}$.

No caso $1 < \omega \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ em que P é um nó estável, os autoespaços associados a λ_1 e λ_2 são respectivamente

$$r = -\frac{1 + \sqrt{5 - 4\omega^2}}{2\omega}\theta, \quad r = \frac{\sqrt{5 - 4\omega^2} - 1}{2\omega}\theta$$

Dado este intervalo de variação de ω , o coeficiente angular do primeiro autoespaço é positivo e o coeficiente angular do segundo autoespaço é negativo.

Para os pontos singulares em (b) e $\omega > 1$ existem dois casos. O primeiro é $F = (0, \frac{\pi}{2})$:

$$J(0, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \omega - 1 & 0 \\ -\omega & -\omega \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

O polinômio característico dessa matriz jacobiana é dado por $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + \omega - \omega^2$. Seus autovalores são $\lambda_1 = \omega - 1$ e $\lambda_2 = -\omega$ com respectivos autoespaços $r = \frac{1 - 2\omega}{\omega}\theta$ e $r = 0$. Pelo teorema de Hartman $F = (0, \frac{\pi}{2})$ é um ponto de sela cuja inclinação da separatriz instável é dada por $-2 + \frac{1}{\omega}$.

O segundo caso ocorre para $F = (0, -\frac{\pi}{2})$:

$$J(0, -\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -\omega - 1 & 0 \\ -\omega & \omega \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

O polinômio característico dessa matriz jacobiana é dado por $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - \omega - \omega^2$. Seus autovalores são $\lambda_1 = \omega$ e $\lambda_2 = -1 - \omega$ com respectivos autoespaços $r = 0$ e $r = \frac{1+2\omega}{\omega}\theta$. Pelo teorema de Hartman $F = (0, -\frac{\pi}{2})$ também é um ponto de sela cuja inclinação da separatriz estável é dada por $2 + \frac{1}{\omega}$.

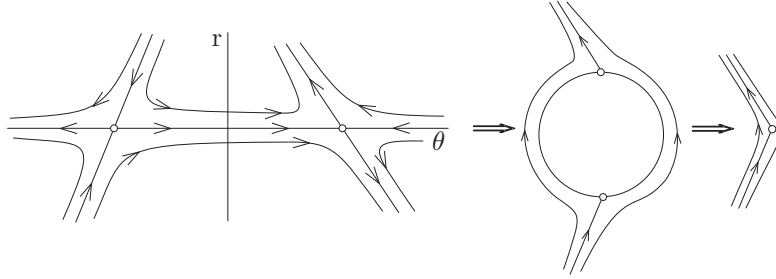


Figura 2.1: explosão do ponto $(1,0)$ para $\omega > 1$

Comparando as inclinações em $(0, \frac{\pi}{2})$ no plano $\theta \times r$, a inclinação da borda de G_R , dado por $r = 2 \cos \theta$, é -2 e a inclinação da borda de C , dado por $r = \cos \theta$, é -1 , portanto a separatriz instável está entre essas duas bordas. De modo análogo, em $(0, -\frac{\pi}{2})$, a inclinação de G_R é 2 portanto a separatriz estável está fora de G_R .

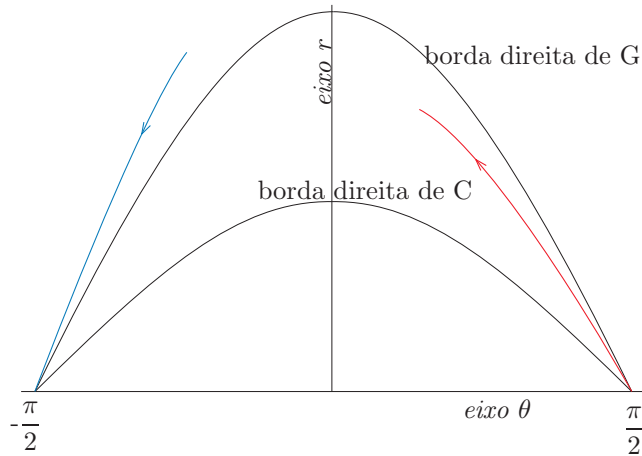


Figura 2.2: Bordas de G e C e as direções separatrizes

Nas coordenadas originais x, y temos a configuração a seguir, em que a bacia de atração de F , $W^s(F)$, é uma curva analítica regular disjunta de G_R .

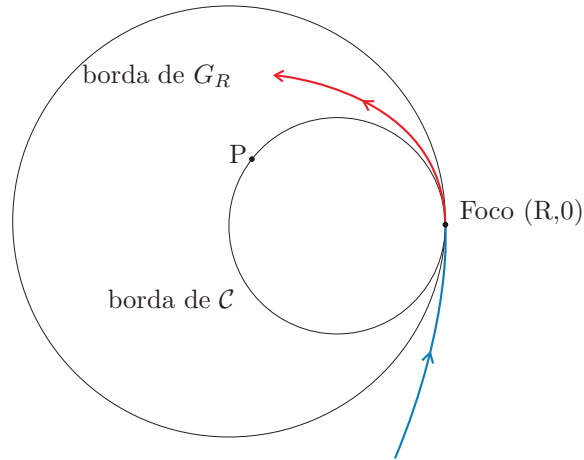


Figura 2.3: Bordas de G e C , ponto de equilíbrio P e as direções separatrizes no foco F

Como não existem soluções periódicas para o sistema e toda solução distante tende a se aproximar da origem, pelo teorema de Poincaré-Bendixson, toda solução fora de $F \cup W^s(F)$ tende ao ponto P , em particular, se denotarmos por $G_{R,+} = G_R \cap W^s(P)$ concluímos que $G_{R,+} = G_R \setminus F$.

Se $0 < \omega < 1$ então os únicos pontos singulares são os considerados no item (b), além disso para $F = (\frac{\pi}{2}, 0)$ a matriz jacobiana $J(F)$ tem os dois autovalores negativos $\lambda_1 = \omega - 1$ e $\lambda_2 = -\omega$ e portanto é um nó atrator. Para $F = (-\frac{\pi}{2}, 0)$, a matriz jacobiana $J(F)$ tem autovalores com sinais opostos $\lambda_1 = \omega$ e $\lambda_2 = -1 - \omega$, portanto é um ponto de sela, logo $W^s(F) = \mathbb{R}^2 \setminus F$.

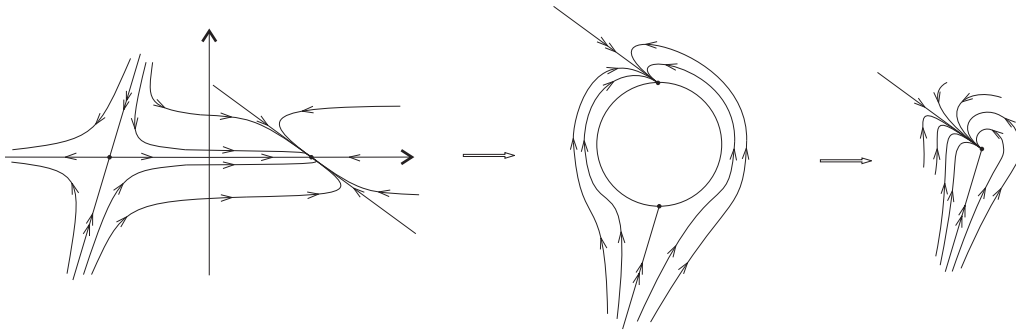


Figura 2.4: explosão do ponto $(1,0)$ para $0 < \omega < 1$

Análise da bifurcação

Para $\omega = 1$, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\sin \theta - 1) \\ \dot{\theta} = -r + \cos \theta \end{cases} \quad (2.11)$$

que tem como únicos pontos singulares os pontos $(0, \frac{\pi}{2})$ e $(0, -\frac{\pi}{2})$. Para o primeiro ponto singular $(0, \frac{\pi}{2})$ fazemos a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{cases} \bar{r} = r \\ \bar{\theta} = \theta - \frac{\pi}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{\bar{r}} = \bar{r}(\sin(\bar{\theta} + \frac{\pi}{2}) - 1) \\ \dot{\bar{\theta}} = -\bar{r} + \cos(\bar{\theta} + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

retirando-se as barras, obtemos o seguinte sistema com a nova origem $(0,0)$ como ponto singular

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) - 1) \\ \dot{\theta} = -r + \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

A matriz jacobiana (2.8) aplicada no ponto singular $(0,0)$ possui os autovalores 0 e -1 associados respectivamente aos autoespaços $r = -\theta$ e $r = 0$ e portanto associados respectivamente aos autovetores $(-1, 1)$ e $(0, 1)$. Seja

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a matriz de autovetores. Fazemos a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \implies \begin{cases} u = r \\ v = r + \theta \end{cases} \implies \begin{cases} r = u \\ \theta = v - u \end{cases}$$

e então obtemos o seguinte sistema nas coordenadas (u,v) :

$$\begin{cases} \dot{u} = u \cos(v - u + \frac{\pi}{2}) - u \\ \dot{v} = u \cos(v - u + \frac{\pi}{2}) - \sin(v - u + \frac{\pi}{2}) - 2u \end{cases} \quad (2.12)$$

comparando o sistema (2.12) ao sistema (1.2) tem-se que

$$g(u, v) = u \cos(v - u + \frac{\pi}{2}) - u \quad (2.13)$$

$$h(u, v) = v + u \cos(v - u + \frac{\pi}{2}) - \sin(v - u + \frac{\pi}{2}) - 2u \quad (2.14)$$

Calculando os coeficientes (1.12) e (1.13) e o campo restrito à variedade central (1.14) obtemos

$$w_2 = 0 \text{ e } w_3 = -4$$

de onde obtemos a equação da variedade central

$$v = -\frac{2}{3}u^3 + O(u^4)$$

e o campo restrito a ela dado por

$$\dot{u} = -\frac{u^3}{2} + O(u^4)$$

Logo $(0, \frac{\pi}{2})$ é um ponto singular atrator do tipo **Forquilha**.

Para o segundo ponto singular $(0, -\frac{\pi}{2})$ não existe bifurcação, a matriz jacobiana de (2.11) aplicada neste ponto é dada por (2.7)

$$J\left(0, -\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Os autovalores 1 e -2 estão associados aos autoespaços $r = 0$ e $r = 3\theta$ respectivamente, logo $(0, -\frac{\pi}{2})$ é ponto de sela. Portanto $W^s(F) = \mathbb{R}^2$. Fazendo o explosão

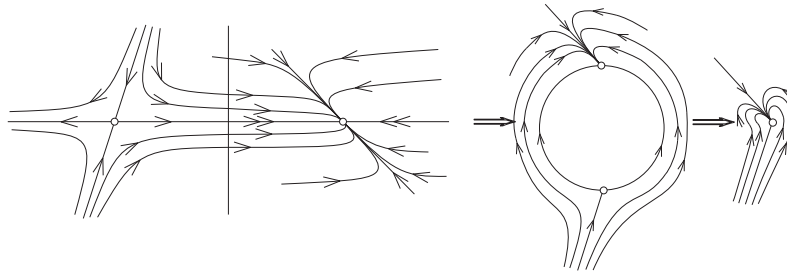


Figura 2.5: explosão do ponto (1,0)

do ponto singular $F=(1,0)$ nas coordenadas (x,y) é atrator. □

Capítulo 3

Uma pequena variação do problema dos platelmintos

A modificação a seguir foi sugerida por Ronaldo Alves Garcia com o intuito de se analisar as semelhanças entre o sistema original e o modificado cuja alteração foi feita na forma de se medir "distância" utilizando para isto um valor $\epsilon > 0$ pequeno. Neste caso, o sistema é analítico em todo plano.

Considere o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y + v \frac{R-x}{\sqrt{(R-x)^2 + y^2 + \epsilon}} \\ \dot{y} = \omega x - v \frac{y}{\sqrt{(R-x)^2 + y^2 + \epsilon}} \end{cases} \quad (3.1)$$

onde ω, v, R, ϵ são positivos.

Teorema 7. *Para todos $\omega, \epsilon \geq 0$, a região G_R é positivamente invariante, de fato a componente radial do sistema (3.1) é negativa no complemento do disco fechado \mathcal{C} de centro $(\frac{R}{2}, 0)$ e raio $\frac{R}{2}$. Além disso são válidas as seguintes afirmações:*

1. *Para todos $\omega, \epsilon > 0$, há um único ponto de equilíbrio hiperbólico P atrator global pertencente a borda de \mathcal{C} , dado por*

$$P = P(\omega, v, R) = \left(R(1 - r_P^2), \frac{vRr_P^2}{\omega\sqrt{R^2r_P^2 + \epsilon^2}} \right)$$

em que

$$r_P = \sqrt{\sqrt{\frac{\epsilon^2}{4R^3v} + \frac{\epsilon}{R^2}} - \frac{\epsilon}{2R^2}}$$

2. $W^s(P) = \mathbb{R}^2$.

3. Para $\epsilon \rightarrow 0$ então $P \rightarrow F(1,0)$ e para $\epsilon \rightarrow \infty$ então $P \rightarrow (0,0)$.

4. Considerando o sistema (2.1) como caso particular de (3.1), o ponto $(\epsilon, \omega) = (0, 1)$ é uma bifurcação.

Demonstração. Fazendo a seguinte mudança de variáveis:

$$x = R\bar{x}, \quad y = R\bar{y}, \quad \epsilon = R^2\bar{\epsilon}, \quad t = \frac{\bar{t}R}{v} \quad \text{e} \quad \omega = \frac{\bar{\omega}v}{R}$$

e retirando as barras tem-se

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y + \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2 + \epsilon}} \\ \dot{y} = \omega x - \frac{y}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2 + \epsilon}} \end{cases} \quad (3.2)$$

em que $R = v = 1$. Fazendo uma nova mudança de variáveis para coordenadas polares com origem em $(1,0)$:

$$x = 1 - r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta$$

e reparametrizando o tempo multiplicando o novo campo de forças por r obtemos:

$$\begin{cases} \dot{r} = r \left(\omega \sin \theta - \frac{r}{\sqrt{r^2 + \epsilon}} \right) \\ \dot{\theta} = -\omega(r - \cos \theta) \end{cases} \quad (3.3)$$

Pontos de equilíbrio

Os pontos de equilíbrio do sistema (3.3) são:

a) $F_+ = (0, \frac{\pi}{2})$ e $F_- = (0, -\frac{\pi}{2})$,

b) $P = (r_P, \theta_P)$, tal que $r_P = \cos \theta_P$, $\sin \theta_P = \frac{r_P}{\omega \sqrt{r_P^2 + \epsilon}}$

Isso mostra que os pontos de equilíbrio, se existirem no sistema original, necessariamente estarão sobre a borda de \mathcal{C} .

A matriz jacobiana $J = J(r, \theta)$ do campo (3.3) é dada por

$$J(r, \theta) = \begin{pmatrix} \omega \sin \theta - \frac{r^3 + 2r\epsilon}{(r^2 + \epsilon)^{3/2}} & r\omega \cos \theta \\ -\omega & -\omega \sin \theta \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Para o caso (a),

$$J(F_+) = J(0, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ -\omega & -\omega \end{pmatrix}$$

e portanto os autovalores de $J(F_+)$ são ω e $-\omega$ com respectivos autoespaços $r = -2\theta$ e $r = 0$. Pelo teorema de Hartman, F_+ é ponto de sela.

$$J(F_-) = J(0, -\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -\omega & 0 \\ -\omega & \omega \end{pmatrix}$$

e portanto os autovalores de $J(F_-)$ são ω e $-\omega$ com respectivos autoespaços $r = 0$ e $r = -2\theta$, logo F_- também é ponto de sela. Fazendo o explosão do ponto $(1, 0)$ de (3.2), equivalente aos pontos $(0, \theta)$ de (3.3), mas o ponto $(1, 0)$ não é singular no sistema (3.2), concluimos que $(1, 0)$ é um ponto regular e vale portanto o teorema do fluxo tubular.

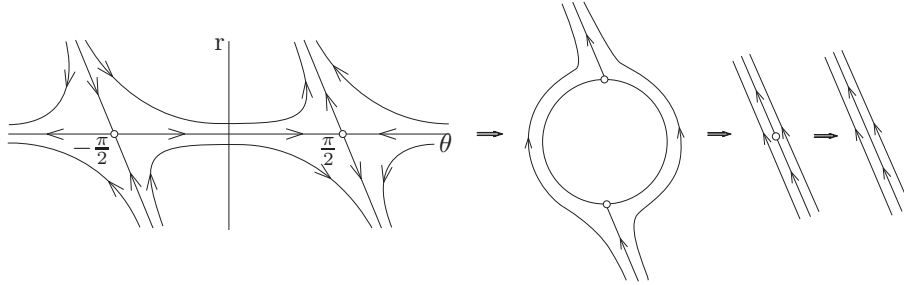


Figura 3.1: explosão do ponto $(1,0)$

Para o caso (b), resolvemos o sistema

$$\begin{cases} r = \cos\theta \\ \text{sen } \theta = \frac{r}{\omega\sqrt{r^2 + \epsilon}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 &\implies \frac{r^2}{\omega^2(r^2 + \epsilon)} + r^2 = 1 \implies \omega^2 r^4 + \omega^2 r^2 \epsilon + r^2 = \omega^2 r^2 + \omega^2 \epsilon \implies \\ &\implies \omega^2 r^4 + (\omega^2 \epsilon - \omega^2 + 1)r^2 - \omega^2 \epsilon = 0 \end{aligned}$$

fazendo $r^2 = \phi$ obtem-se

$$\omega^2 \phi^2 + (\omega^2 \epsilon - \omega^2 + 1)\phi - \omega^2 \epsilon = 0$$

o discriminante da equação de 2º grau é dado por:

$$\Delta = (\omega^2 \epsilon - \omega^2 + 1)^2 + 4\omega^4 \epsilon$$

e então

$$\phi = r^2 = \frac{-(\omega^2 \epsilon - \omega^2 + 1) \pm \sqrt{(\omega^2 \epsilon - \omega^2 + 1)^2 + 4\omega^4 \epsilon}}{2\omega^2}$$

Como $\Delta > |-(\omega^2\epsilon - \omega^2 + 1)|$, segue que a equação de 4º grau tem apenas uma raiz real positiva, uma negativa e duas complexas. Como $r_P > 0$ segue que

$$r_P = \sqrt{\frac{\sqrt{(\omega^2\epsilon - \omega^2 + 1)^2 + 4\omega^4\epsilon} - (\omega^2\epsilon - \omega^2 + 1)}{2\omega^2}}$$

e θ_P é dada implicitamente por

$$\text{sen } \theta_P = \frac{r_P}{\omega\sqrt{r_P^2 + \epsilon}}$$

Seja P o ponto singular em (b), a matriz jacobiana do campo (3.3) em P é:

$$J(P) = \begin{pmatrix} \frac{r_P}{\sqrt{r_P^2 + \epsilon}} - \frac{r_P^3 + 2r_P\epsilon}{(r_P^2 + \epsilon)^{3/2}} & r_P^2\omega & \\ -\omega & -\frac{r_P}{\sqrt{r_P^2 + \epsilon}} & \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

O traço da matriz jacobiana é dado por:

$$T = \text{tr}(J(P)) = \frac{-r_P\epsilon - r_P^2 - r_P\epsilon}{(r_P^2 + \epsilon)^{3/2}} = \frac{-r_P(r_P^2 + 2\epsilon)}{(r_P^2 + \epsilon)} < 0$$

O determinante da matriz jacobiana é dado por:

$$D = \det(J(P)) = \frac{r_P^2\epsilon}{(r_P^2 + \epsilon)^2} + r_P^2\omega^2 > 0$$

O discriminante do polinômio característico é:

$$\Delta = \frac{r_P^2(r_P^2 + 2\epsilon)^2}{(r_P^2 + \epsilon)^3} - \frac{4r_P^2\epsilon}{(r_P^2 + \epsilon)^2} - 4r_P^2\omega^2 = r_P^2 \left[\frac{r_P^4}{(r_P^2 + \epsilon)^3} - 4\omega^2 \right]$$

Como $T < 0$ e $D > 0$, então P é um nó atrator se $\Delta \geq 0$ e foco atrator se $\Delta < 0$.

Componente radial do sistema

Seja $z(t) = x(t)^2 + y(t)^2$ a componente radial do sistema (3.2),

$$\dot{z}(t) = 2(x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t)) = -\frac{2v}{\sqrt{(R-x)^2 + y(t)^2 + \epsilon}} \left[\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 - \left(\frac{R}{2}\right) \right]$$

Logo a componente radial é negativa em $\mathbb{R}^2 - \mathcal{C}$, onde

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \mid \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 - \left(\frac{R}{2}\right) \leq 0\}$$

Inexistência de órbitas periódicas

Pelo teste de divergência de Bendixson, o sistema não admite órbita periódica pois

$$\operatorname{div}(X(r, \theta)) = -\frac{r^3 + 2r\epsilon}{(r^2 + \epsilon)^{3/2}}$$

logo $\operatorname{div}X < 0$ para todo \mathbb{R}^2 . Com isso pode-se concluir que o ponto singular P é um atrator global.

Conclusão

Não ocorre bifurcação neste sistema, o ponto singular P é único, e este ponto converge a $(R, 0)$ se $\epsilon \rightarrow 0$. Para ϵ crescente o ponto singular P percorre a borda superior de \mathcal{C} tendendo a origem. Se considerarmos o sistema (2.1) como um caso particular de (3.1) com $\epsilon = 0$ então o ponto $(\epsilon, \omega) = (0, 1)$ é uma bifurcação dependente do parâmetro ω como foi visto no capítulo anterior. O caso em que $\epsilon < 0$ não foi analisado. \square

Capítulo 4

Uma segunda variação do problema dos platelmintos

O problema a seguir, também sugerido por Ronaldo Alves Garcia, é uma modificação da função distância do sistema original para a função modular.

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y + v \frac{R-x}{|R-x|+|y|} \\ \dot{y} = \omega x - v \frac{y}{|R-x|+|y|} \end{cases} \quad (4.1)$$

Teorema 8. *Para todo $\omega \geq 0$, a região $G_R \setminus F$ é positivamente invariante, de fato a componente radial do sistema (2.1) é negativa no complemento do disco fechado \mathcal{C} de centro $(\frac{R}{2}, 0)$ e raio $\frac{R}{2}$. Além disso são válidas as seguintes afirmações:*

1. *Para $0 \leq \omega < 2(\sqrt{2}-1)\frac{v}{R}$, F é um atrator global: $W^s(F) = \mathbb{R}^2$.*
2. *Para $\omega = 2(\sqrt{2}-1)\frac{v}{R}$, há uma bifurcação sela-nó P_1 localizado em*

$$\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) R, \frac{\sqrt{2}}{4} R \right)$$

e um atrator em $F = (R, 0)$. Todo o fluxo se divide em órbitas que convergem a P_1 e órbitas que convergem a F .

3. *Para $2(\sqrt{2}-1)\frac{v}{R} < \omega < \frac{v}{R}$, há três pontos singulares: F é atrator, P_1 , localizado sobre a borda superior do disco \mathcal{C} em*

$$\frac{1}{4} \left(\frac{2v}{\omega R} + 1 + \sqrt{\left(1 + \frac{2v}{\omega R}\right)^2 - 8 \left(\frac{v}{\omega R}\right)^2}, \frac{2v}{\omega R} - 1 - \sqrt{\left(1 + \frac{2v}{\omega R}\right)^2 - 8 \left(\frac{v}{\omega R}\right)^2} \right)$$

é sela e P_2 , também localizado sobre a borda superior de \mathcal{C} em

$$\frac{1}{4} \left(\frac{2v}{\omega R} + 1 - \sqrt{\left(1 + \frac{2v}{\omega R}\right)^2 - 8 \left(\frac{v}{\omega R}\right)^2}, \frac{2v}{\omega R} - 1 + \sqrt{\left(1 + \frac{2v}{\omega R}\right)^2 - 8 \left(\frac{v}{\omega R}\right)^2} \right)$$

é atrator. A singularidade P_1 se localiza entre F e P_2 e excetuando suas separatrizes estáveis, ela divide todo o fluxo em órbitas que convergem a F e órbitas que convergem a P_2 .

4. Para $\omega \geq \frac{v}{R}$, P_2 é ponto singular atrator hiperbólico pertencente a \mathcal{C} cuja bacia de atração contém $W^u(F)$, a bacia de repulsão de F , que é um curva regular analítica contida em $G_R \setminus F$. $W^s(F)$, a bacia de atração de F , é uma curva disjunta de G_R . Em particular vale que para $\omega > \frac{v}{R}$, $G_{R,+} = G_R \cap W^s(P) = G_R \setminus F$.

Demonstração. Com a mesma mudança de variáveis: $x = R\bar{x}$, $y = R\bar{y}$, $\omega = \frac{\bar{\omega}v}{R}$ e $t = \frac{\bar{t}R}{v}$, retirando as barras e multiplicando o campo (4.1) por $|1 - x| + |y|$, chegamos ao seguinte sistema com $R = v = 1$.

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y(|1 - x| + |y|) + 1 - x \\ \dot{y} = \omega x(|1 - x| + |y|) - y \end{cases} \quad (4.2)$$

Inexistência de órbitas periódicas

Considere a componente radial

$$z(t) = x(t)^2 + y(t)^2$$

derivando z obtemos

$$\begin{aligned} \dot{z} &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \\ &= 2 \frac{x(R - x) - y^2}{|R - x| + |y|} \\ &= -\frac{2}{|R - x| + |y|} \left[\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

portanto este resultado é análogo aos casos anteriores.

Análise do segundo quadrante

Seja $\mathcal{Q}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq 1 \text{ e } y \geq 0\}$ que chamaremos de segundo quadrante. Para todo $(x, y) \in \mathcal{Q}_2$, o sistema (4.2) é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y^2 + \omega xy - x - \omega y + 1 \\ \dot{y} = -\omega x^2 + \omega xy + \omega x - y \end{cases} \quad (4.3)$$

A matriz jacobiana do sistema (4.3) é dada por:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \omega y - 1 & -2\omega y + \omega x - \omega \\ -2\omega x + \omega y + \omega & \omega x - 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

O primeiro ponto singular em \mathcal{Q}_2 é o foco luminoso $F=(1,0)$.

$$J(F) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\omega & \omega - 1 \end{pmatrix}$$

Os autovalores de $J(F)$ são -1 e $\omega - 1$ associados aos autoespaços $y = x$ e $x = 0$ respectivamente. Portanto se $\omega > 1$ então, restrito ao quadrante \mathcal{Q}_2 , F é um ponto de sela e se $\omega < 1$, F é um nó estável. O caso $\omega = 1$ será analisado no final do capítulo.

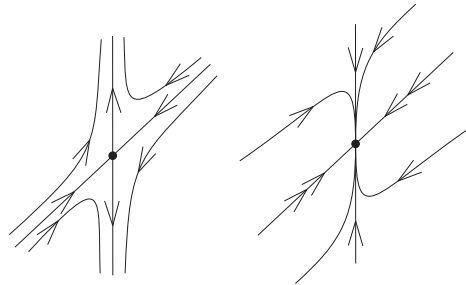


Figura 4.1: Singularidade em $(1,0)$ com o campo restrito a \mathcal{Q}_2 : ponto de sela se $\omega > 1$ e nó-estável se $0 < \omega < 1$ respectivamente

Os outros pontos singulares são calculados da seguinte forma: da segunda equação de (4.3) obtemos

$$-\omega x^2 + \omega x + (\omega x - 1)y = 0 \implies y = \frac{\omega x^2 - \omega x}{\omega x - 1} = \frac{\omega x(x - 1)}{\omega x - 1}$$

Da primeira equação:

$$-\omega y(y - x + 1) - x + 1 = 0$$

Substituindo o valor de y :

$$\begin{aligned}
 & -\omega \left(\frac{\omega x(x-1)}{\omega x-1} \right) \left(\frac{\omega x(x-1)}{\omega x-1} - x + 1 \right) - x + 1 = 0 \\
 & -\omega \left(\frac{\omega x(x-1)}{\omega x-1} \right) \left(\frac{\omega x(x-1) - (x-1)(\omega x-1)}{\omega x-1} \right) = x-1 \\
 & \quad -\omega \left(\frac{\omega x(x-1)}{\omega x-1} \right) \left(\frac{1}{\omega x-1} \right) = 1 \\
 & -\omega^2 x(x-1) = (\omega x-1)^2 \implies \omega^2 x^2 + \omega^2 x = \omega^2 x^2 - 2\omega x + 1 \implies
 \end{aligned}$$

$$2\omega^2 x^2 - (\omega^2 + 2\omega)x + 1 = 0$$

$$\Delta = (\omega^2 + 2\omega)^2 - 8\omega^2 = \omega^2((\omega + 2)^2 - 8)$$

$$\Delta \geq 0 \iff (\omega + 2)^2 - 8 \geq 0 \iff \omega \geq 2(\sqrt{2} - 1)$$

então se $\Delta < 0$ não se tem raiz real, mas se $\Delta \geq 0$

$$x_{1,2} = \frac{\omega + 2 \pm \sqrt{(\omega + 2)^2 - 8}}{4\omega}$$

Para verificar se $x_{1,2} \in \mathcal{Q}_2$ basta verificar se $x_1 < 1$ já que $x_2 < x_1$.

$$\begin{aligned}
 x_1 < 1 & \iff \frac{\omega + 2 + \sqrt{(\omega + 2)^2 - 8}}{4\omega} < 1 \iff \sqrt{(\omega + 2)^2 - 8} < 3\omega - 2 \iff \\
 & \iff (\omega - 1)^2 > 0
 \end{aligned}$$

O cálculo das ordenadas $y_{1,2}$ é feito de maneira análoga: da primeira equação de (4.3) tem-se

$$x = \frac{\omega y(y+1) - 1}{\omega y - 1}$$

substituindo na segunda equação obtemos,

$$y_{1,2} = \frac{2 - \omega \mp \sqrt{(\omega + 2)^2 - 8}}{4\omega}$$

resta entender sob quais condições teremos $y_{1,2} > 0$.

$$|2 - \omega| > |(\omega + 2)^2 - 8| \iff \omega < 1$$

Portanto se $2(\sqrt{2} - 1) < \omega < 1$ então existem os dois pontos singulares (x_1, y_1) e (x_2, y_2) e se $\omega > 1$ apenas (x_2, y_2) existe. Fazendo a mudança de coordenadas inversa, chegamos à localização desses pontos no sistema original.

Substituindo os pontos singulares em (4.4) obtemos a

$$\text{traço}(J(x_1, y_1)) = \text{traço}(J(x_2, y_2)) = -1 \quad (4.5)$$

$$\det(J(x_1, y_1)) = -\frac{1}{2}\sqrt{(\omega + 2)^2 - 8}(\omega - \sqrt{(\omega + 2)^2 - 8}) \quad (4.6)$$

$$\det(J(x_2, y_2)) = \frac{1}{2}\sqrt{(\omega + 2)^2 - 8}(\omega + \sqrt{(\omega + 2)^2 - 8}) \quad (4.7)$$

Para o primeiro ponto singular

$$\det(J(x_1, y_1)) \leq 0 \iff \omega - \sqrt{(\omega + 2)^2 - 8} \geq 0 \iff \omega \leq 1$$

Como (x_1, y_1) só existe se $\omega < 1$ então a existência desse ponto implica nele ser sela.

Para o segundo ponto singular

$$\det(J(x_2, y_2)) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \Delta = \text{traço}(J(x_2, y_2))^2 - 4\det(J(x_2, y_2)) &\geq 0 \iff \\ \iff 1 &\geq 2\sqrt{(\omega + 2)^2 - 8}(\omega + \sqrt{(\omega + 2)^2 - 8}) \end{aligned}$$

Para $\omega = 2(\sqrt{2} - 1)$ o lado direito da inequação zera e para $\omega = 1$ o lado direito é 4, logo é possível termos Δ tanto positivo quanto negativo. Seja $g(\omega) = 2\sqrt{(\omega + 2)^2 - 8}(\omega + \sqrt{(\omega + 2)^2 - 8}) - 1$. Observando seu gráfico, verifica-se que a partir da raiz de g , o ponto (x_2, y_2) é um foco atrator. E no pequeno intervalo aproximado $(0.82842, 0.85635)$, (x_2, y_2) é um nó atrator.

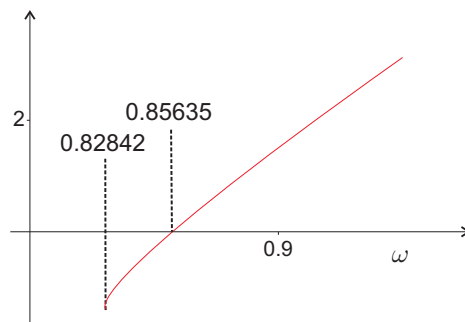


Figura 4.2: gráfico $y = g(\omega)$

Análise do primeiro quadrante

Seja $Q_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 1, y \geq 0\}$ o quadrante superior direito. Para todo $(x, y) \in Q_1$, o sistema (4.2) é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y^2 - \omega xy + \omega y - x + 1 \\ \dot{y} = \omega x^2 + \omega xy - \omega x - y \end{cases} \quad (4.8)$$

O foco $F=(1,0)$ é ponto singular e

$$J(F) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \omega & \omega - 1 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

cujos autovalores são $\omega - 1$ e -1 associados aos autoespaços $x = 0$ e $y = -x$ respectivamente. Portanto, restrito ao quadrante Q_1 , F é ponto de sela se $\omega > 1$ e nó estável se $2(\sqrt{2} - 1) < \omega < 1$. O único ponto singular em Q_1 é o foco F .

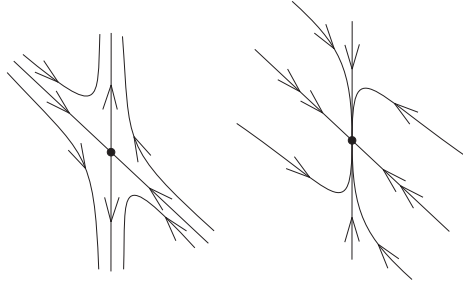


Figura 4.3: Singularidade em $(1,0)$ com o campo restrito a Q_1 : ponto de sela se $\omega > 1$ e nó-estável se $2(\sqrt{2} - 1) < \omega < 1$ respectivamente

Para ver isso, procedemos de módulo análogo ao que foi feito em Q_2 : da segunda equação de (4.8),

$$y = \frac{\omega x(1-x)}{\omega x - 1}$$

Substituindo na primeira equação obtemos

$$x_{1,2} = \frac{\omega + 2 \pm \sqrt{(\omega + 2)^2 - 8}}{4\omega}$$

Como $x_1 > x_2$, basta verificar que $x_1 < 1$.

$$x_1 < 1 \iff \sqrt{(\omega + 2)^2 - 8} < 4\omega \iff (\omega - 1)^2 > 0$$

Análise do terceiro quadrante

Seja $\mathcal{Q}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq 1, y \leq 0\}$ o quadrante inferior esquerdo. O sistema (4.2) restrito a este quadrante é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega y^2 + \omega xy - \omega y - x + 1 \\ \dot{y} = -\omega x^2 - \omega xy + \omega x - y \end{cases} \quad (4.10)$$

O foco $F=(1,0)$ é ponto singular e

$$J(F) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\omega & -\omega - 1 \end{pmatrix}$$

cujos autovalores são $-\omega - 1$ e -1 associados aos autoespaços $x = 0$ e $y = -x$ respectivamente. Portanto, restrito ao quadrante \mathcal{Q}_3 , F é nó estável.

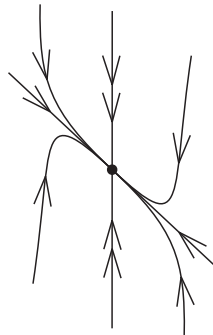


Figura 4.4: nó estável em $(R, 0)$ com o campo restrito a \mathcal{Q}_3

O foco F é o único ponto singular de \mathcal{Q}_3 : de modo análogo aos anteriores, da primeira equação de (4.10),

$$x = \frac{\omega y - \omega y^2 - 1}{\omega y - 1}$$

Substituindo na segunda equação obtemos

$$y_{1,2} = \frac{\omega + 2 \pm \sqrt{(\omega - 2)^2 - 8}}{4\omega} \geq 0$$

Análise do quarto quadrante

Seja $\mathcal{Q}_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \leq 0\}$ o quadrante inferior direito. O sistema (4.3) restrito a \mathcal{Q}_4 é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega y^2 - \omega xy + \omega y - x + 1 \\ \dot{y} = \omega x^2 - \omega xy - \omega x - y \end{cases} \quad (4.11)$$

$F=(0,1)$ é ponto singular e

$$J(F) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \omega & -\omega - 1 \end{pmatrix}$$

cujos autovalores são $-\omega - 1$ e -1 associados aos autoespaços $x = 0$ e $y = x$ respectivamente. Portanto, restrito ao quadrante \mathcal{Q}_4 , F é nó estável.

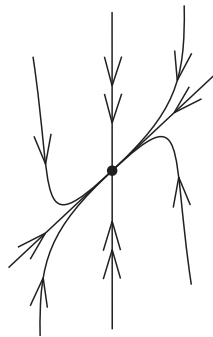


Figura 4.5: nó estável em $(0,0)$ com o campo restrito a \mathcal{Q}_4

O foco F é o único ponto singular de \mathcal{Q}_4 : da segunda equação de (4.11),

$$y = \frac{\omega x(x-1)}{\omega x + 1}$$

Substituindo na primeira, obtemos

$$x_{1,2} = \frac{\omega - 2 \pm \sqrt{(\omega - 2)^2 - 8}}{4\omega}$$

Como $x_1 > x_2$, basta agora verificar que $x_1 < 1$:

$$x_1 > 1 \iff (\omega + 1)^2 < 0$$

Retrato de fase local do foco

Como o foco F pertence a todos os quadrantes, devemos colar os retratos de fase,

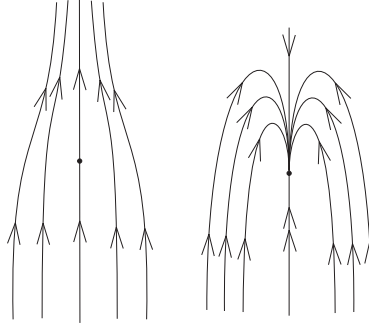


Figura 4.6: singularidade em $(1,0)$ para $\omega > 1$ e $\omega < 1$ respectivamente

de modo que para $\omega > 1$, o sistema admite o ponto singular $F=(1,0)$ com $W^s(F)$ sendo uma curva analítica regular e outro ponto singular $P_2 = (x_2, y_2)$ como foco atrator com $W^s(P_2)$ contendo $W^u(F)$, esta uma curva analítica regular também. Como não há solução periódica e as curvas integrais que estão distante tendem a se aproximar da origem, $W^s(P_2) = \mathbb{R}^2 - W^s(F)$. Para $2(\sqrt{2} - 1) < \omega < 1$, o sistema tem três pontos singulares, $P_1 = (x_1, y_1)$ sela, P_2 foco atrator ou nó atrator e F atrator também, sendo que P_1 e P_2 estão sobre a borda superior do disco \mathcal{C} e P_1 está entre P_2 e F , dividindo o fluxo em órbitas que convergem a P_2 e órbitas que convergem a F . Para $0 < \omega < 2(\sqrt{2} - 1)$, F é o único ponto singular do sistema e é globalmente atrator. Os casos $\omega = 2(\sqrt{2} - 1)$ e $\omega = 1$ são bifurcações e serão analisados posteriormente.

Sobre a inclinação de $W^u(F)$

Para $\omega > 1$ seja $\phi(t) = (x(t), y(t))$ uma parametrização de $W^u(F)$. Afirmamos que $\phi(t)$ entra em G_R entre as bordas dos dois discos G_R e \mathcal{C} . Como $\phi(t)$ entra no disco maior na direção $(1,0)$, podemos escrever a coordenada x como função de y . Se transladarmos o foco F para origem teremos as seguintes hipóteses para a esta curva:

$$\frac{d}{dy}x(0) = 0 \quad (4.12)$$

$$x(0) = 0 \quad (4.13)$$

e pela regra da cadeia

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{-\omega y^2 + \omega xy - x - \omega y + 1}{-\omega x^2 + \omega xy + \omega x - y} \quad (4.14)$$

Da fórmula de Taylor:

$$x(y) = x(0) + x'(0)y + x''(0)\frac{y^2}{2} + O(x^3)$$

e usando as hipóteses (4.12) e (4.13) sobre a função $x = x(y)$ obtemos o seguinte limite:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x}{y^2} = x''(0) \quad (4.15)$$

Para encontrarmos $x''(0)$, derivamos a expressão (4.14) e passamos o limite $y \rightarrow 0$. Usando as hipóteses (4.12) e (4.13) e os resultados (4.14) e (4.15) obtemos

$$x''(0) = -\frac{2\omega}{2\omega - 1}$$

Com o teorema da função implícita, podemos escrever as bordas dos discos G_R e \mathcal{C} , localmente perto de $(1,0)$ como

$$x(y) = 1 - \frac{1}{2}y^2 + O(y^3)$$

e

$$x(y) = 1 - y^2 + O(y^3)$$

respectivamente. Basta agora comparar com a inclinação de $\phi(t)$:

$$-1 < \frac{\omega}{2\omega - 1} < -\frac{1}{2}$$

Sobre a inclinação de $W^s(F)$

A direção da curva integral $\varphi(t)$ que chega em $(1,0)$ é $(0,1)$ para $t \rightarrow \infty$ e esta curva é disjunta do disco G_R para qualquer valor positivo de ω : de fato quando $t \rightarrow \infty$ esta curva é a única sob a condição

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v(t)}{u(t)} = 0 \quad (4.16)$$

onde $\varphi(t) = (u(t), v(t))$ está escrita sobre uma base de autovetores. Seja

$$x = \bar{x} + 1 \quad y = \bar{y}$$

a translação que leva $(1,0)$ para origem. Se denotarmos por $F(x, y)$ o campo de força (4.10), o novo campo será $G(\bar{x}, \bar{y}) = F(\bar{x} + 1, \bar{y})$. Podemos retirar as barras sem maiores problemas. Seja

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a matriz de autovalores da jacobiana do campo G aplicada no ponto $(0,0)$ com respectivos autovalores $-\omega - 1$ e -1 . Façamos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u - v \end{pmatrix}$$

O sistema de equações diferenciais escrito numa base de autovetores fica:

$$\begin{cases} \dot{u} = \omega u^2 - 2\omega uv - \omega u - u \\ \dot{v} = \omega u^2 - \omega uv - v \end{cases}$$

Na translação do ponto $(1,0)$ para $(0,0)$, as equações das bordas circulares de G_R e \mathcal{C} passam a

$$\begin{aligned} (x + 1)^2 + y^2 &= 1 \\ (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

e nas variáveis u, v , elas se transformam nas elipses

$$\begin{aligned} (v + 1)^2 + (u - v)^2 &= 1 \\ (v + \frac{1}{2})^2 + (u - v)^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Pelo teorema da função implícita, localmente perto da origem $(u, v) = (0, 0)$, a borda elíptica de G_R pode ser escrita como

$$v(u) = 0.5u^2 + O(u^3)$$

Para a curva integral $\varphi(t) = (u(t), v(t))$, tomando v como função de u temos

$$v(u) = v(0) + v'(0)u + v''(0)\frac{u^2}{2} + O(u^3)$$

e portanto

$$v(u) = v''(0)\frac{u^2}{2} + O(u^3)$$

Esta última equação implica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v(t)}{u(t)^2} = \frac{v''(0)}{2} \tag{4.17}$$

Pela regra da cadeia temos

$$\begin{aligned}
\frac{d^2v}{du} &= \frac{d}{du} \left(\frac{dv}{du} \right) \\
&= \frac{d}{du} \left(\frac{\omega u^2 - \omega uv - v}{\omega u^2 - 2\omega uv - \omega u - u} \right) \\
&= -\frac{\omega}{u^2(-\omega u + 2\omega v + \omega + 1)^3} (\omega^2 u^4 + u^3(-2\omega^2 v - \omega) + \\
&+ u^2(4\omega v + 3\omega + 2\omega^2 v^2 + \omega^2 + 2\omega^2 v + 2) + uv(-4 - 6\omega v - 5\omega) + 4\omega v^3 + \\
&+ (4 + \omega^2)v^2 + (\omega + 1)v)
\end{aligned}$$

tomando o limite $t \rightarrow \infty$ e usando as condições (4.16) e (4.17) obtemos

$$v''(0) = -\frac{\omega(3\omega + \omega^2 + 2)}{(\omega + 1)^3} - \frac{\omega}{(\omega + 1)^2} \frac{v''(0)}{2}$$

de onde obtemos

$$v''(0) = -\frac{2\omega}{2\omega + 1}$$

e a equação de $\varphi(t)$

$$v(u) = -\frac{\omega}{2\omega + 1} + O(u^3) \quad (4.18)$$

concluindo

$$\frac{\omega}{2\omega + 1} < 0.5$$

Análise da bifurcação para $\omega = 1$

O caso $\omega = 1$ é uma bifurcação, além disso,

$$(x_1, y_1) = (1, 0) \quad \text{e} \quad (x_2, y_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

De (4.4), obtemos

$$J(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Pelo teorema de Hartman, $(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ é um foco atrator.

Para $(x_1, y_1) = (1, 0)$ é necessário estudar esta singularidade em todos os quadrantes e fazer a colagem dos retratos de fase.

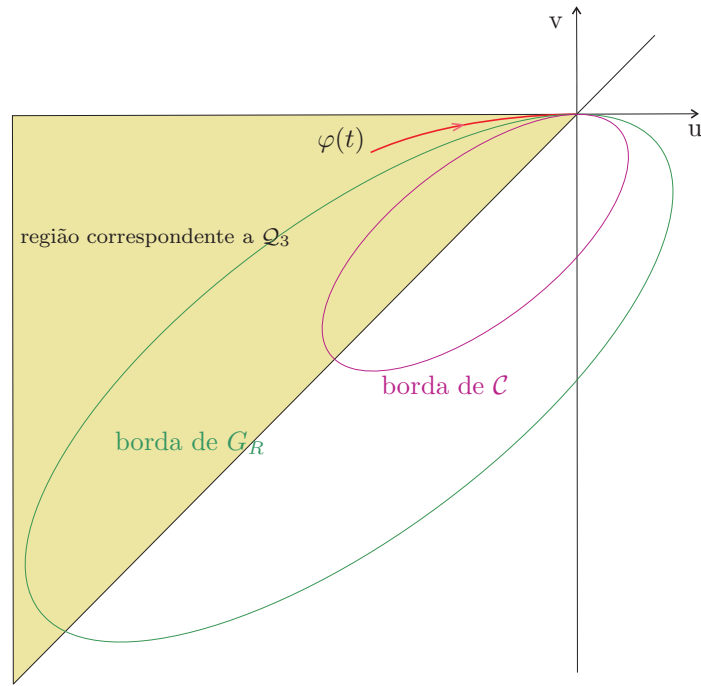


Figura 4.7: curva integral chegando em $(1,0)$

Denotemos o campo de força (4.8), restrito ao primeiro quadrante \mathcal{Q}_1 , por $F(x, y)$. De (4.9) obtem-se os autovalores 0 e -1 associados aos seus respectivos autoespaços $x=1$ e $y=-x$. Considere a translação

$$x = \bar{x} + 1 \quad y = \bar{y}$$

e denote o novo campo por $G(\bar{x}, \bar{y}) = F(\bar{x} + 1, \bar{y})$, de modo a transladar o foco $F=(1,0)$ para a origem $(0,0)$. Retirando-se as barras, vamos proceder como no capítulo 2, de modo a calcular a variedade central e o campo restrito a ela. Seja

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a matriz de autovetores e considere a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ -x \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ u + v \end{pmatrix}$$

de modo a reescrever o sistema na forma de (1.2):

$$\begin{cases} \dot{u} &= -u^2 - 2uv \\ \dot{v} &= -v + u^2 + uv \end{cases}$$

Como no capítulo 2, sejam

$$g(u, v) = -u^2 - 2uv$$

$$h(u, v) = u^2 + uv$$

$g_{uu}(0, 0) = -2$, $g_{uuu}(0, 0) = 0$, $g_{uv}(0, 0) = -2$, $h_{uu}(0, 0) = 2$, $h_{u,v}(0, 0) = 1$. Com esses coeficientes encontramos a equação da variedade central

$$v = u^2 + u^3 + O(u^4)$$

e o campo restrito a ela

$$\dot{u} = -u^2 - 2u^3$$

De forma, que a singularidade é atratora do tipo sela-nó.

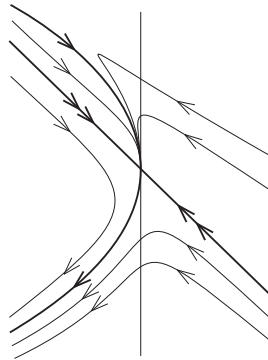


Figura 4.8: sela-nó em (1,0) com o campo restrito a \mathcal{Q}_1

Com cálculos análogos e o campo restrito ao segundo Quadrante \mathcal{Q}_2 , verifica-se que $F=(1,0)$ é novamente uma bifurcação do tipo sela-nó, Com a equação da variedade central dada por

$$v = -u^2 + u^3 + O(u^4)$$

e o campo restrito a ela

$$\dot{u} = u^2 - 2u^3$$

A restrição do campo de forças aos quadrantes \mathcal{Q}_3 e \mathcal{Q}_4 não apresentam bifurcação, portanto o retrato de fase segue das análises anteriores que mostraram que (1,0) é um nó estável nestes quadrantes. Fazendo a colagem dos retratos de fase obtemos

Análise da bifurcação para $\omega = 2(\sqrt{2} - 1)$

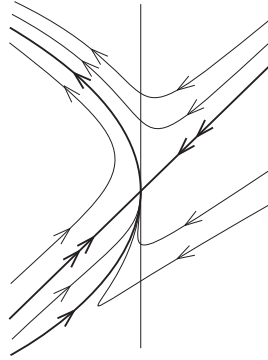


Figura 4.9: sela-nó em $(1,0)$ com o campo restrito a \mathcal{Q}_2

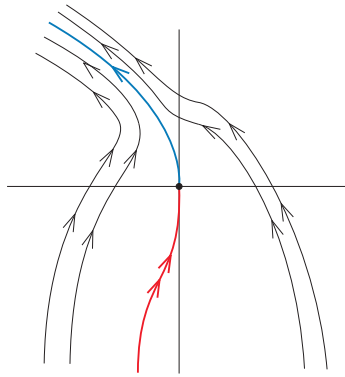


Figura 4.10: Singularidade em $(1,0)$ para $\omega = 1$

O caso $\omega = 2(\sqrt{2} - 1)$ também é uma bifurcação, e para este valor de ω temos

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

De (4.4), obtemos

$$J(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

cujos autovalores são 0 e -1 com seus respectivos autovetores $(-1, 1)$ e $(1 + \sqrt{2}, 1)$. Denotemos o campo (4.3), restrito ao segundo quadrante, por $F(x, y)$ e façamos a translação

$$x = \bar{x} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \quad y = \bar{y} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

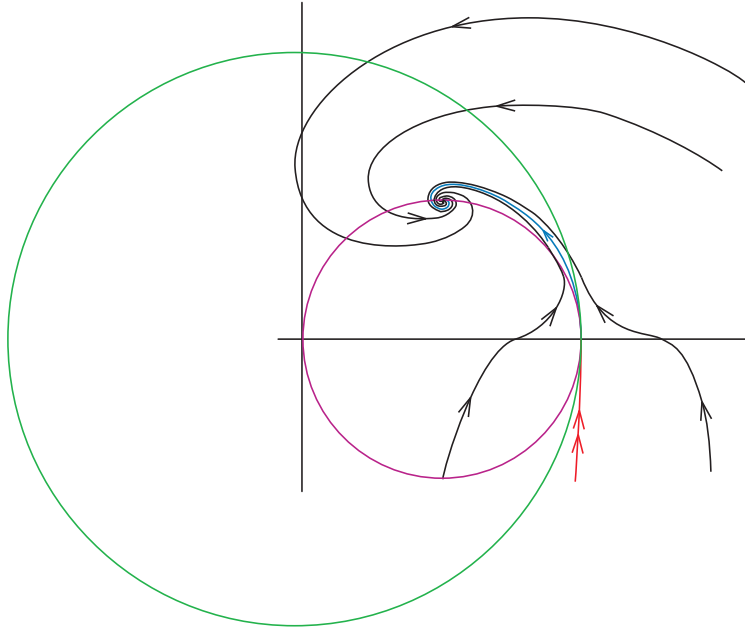


Figura 4.11: retrato de fase do campo original com $\omega = 1$

Seja $G(\bar{x}, \bar{y}) = F(x = \bar{x} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \bar{y} + \frac{\sqrt{2}}{4})$ o novo campo, de modo a transladar a singularidade (x_1, y_1) para a origem $(0,0)$. Retirando-se as barras, vamos proceder como no capítulo 2, de modo a calcular a variedade central e o campo restrito a ela. Seja

$$V = \begin{pmatrix} -1 & 1 + \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a matriz de autovetores e considere a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= V^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1 + \frac{\sqrt{2}}{2})x + (\frac{\sqrt{2}}{2})y \\ (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})x + (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})y \end{pmatrix} \iff \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u + (1 + \sqrt{2})v \\ u + v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de modo a reescrever o sistema na forma de (1.2):

$$\begin{cases} \dot{u} &= (8\sqrt{2} - 12)u^2 + (14\sqrt{2} - 16)uv + (4\sqrt{2} - 8)v^2 \\ \dot{v} &= -v + (16 - 12\sqrt{2})u^2 + (24 - 16\sqrt{2})uv + (8 - 6\sqrt{2})v^2 \end{cases}$$

Como no capítulo 2, sejam

$$g(u, v) = (8\sqrt{2} - 12)u^2 + (14\sqrt{2} - 16)uv + (4\sqrt{2} - 8)v^2$$

$$h(u, v) = (16 - 12\sqrt{2})u^2 + (24 - 16\sqrt{2})uv + (8 - 6\sqrt{2})v^2$$

$$g_{uu}(0, 0) = 16\sqrt{2} - 24, \quad g_{uuu}(0, 0) = 0, \quad g_{uv}(0, 0) = 14\sqrt{2} - 16,$$

$h_{uu}(0, 0) = 32 - 24\sqrt{2}, \quad h_{u,v}(0, 0) = 24 - 16\sqrt{2}$. Com esses coeficientes encontramos a equação da variedade central

$$v = (16 - 12\sqrt{2})u^2 + (550 - 388\sqrt{2})u^3 + O(u^4)$$

e o campo restrito a ela

$$\dot{u} = (8\sqrt{2} - 12)u^2 + (208\sqrt{2} - 296)u^3 + O(u^4)$$

De forma que a singularidade é atratora do tipo sela-nó.

□

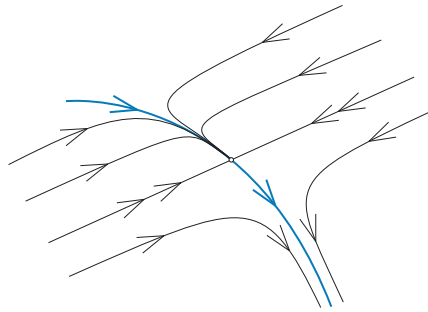


Figura 4.12: sela-nó em $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ para $\omega = 2(\sqrt{2} - 1)$

Capítulo 5

Bifurcação de Bogdanov-Takens

Considere o sistema planar

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2,$$

com f suave, e suponha que tal sistema tenha em $\alpha = 0$ um ponto de equilíbrio $x = 0$ com dois autovalores nulos (condição de Bogdanov-Takens) (ver [[4]]).

$$\lambda_{1,2}(0) = 0.$$

Esse tipo de bifurcação ocorre numa terceira modificação do problema dos platelmintos no capítulo a seguir.

Podemos escrever o sistema em $\alpha = 0$ da forma

$$\dot{x} = A_0 x + F(x), \tag{5.1}$$

em que $A_0 = f_x(0, 0)$ e $F(x) = f(x, 0) - A_0 x$ é uma função suave, $F(x) = O(\|x\|^2)$. As condições de bifurcação implicam

$$\Delta(0) = \det A_0 = 0, \quad \sigma(0) = \text{tr } A_0 = 0.$$

Assuma que

$$A_0 \neq 0$$

isto é, A_0 tenha pelo menos um elemento não nulo. Então existe dois vetores linearmente independentes, $v_{0,1} \in \mathbb{R}^2$, tal que

$$A_0 v_0 = 0, \quad A_0 v_1 = v_0. \tag{5.2}$$

O vetor v_0 é o autovetor de A_0 correspondente ao autovalor 0, enquanto v_1 é o autovetor generalizado de A_0 correspondente a este autovalor. Mais ainda, existem autovetores adjuntos similares $w_{1,2} \in \mathbb{R}^2$ da matriz transposta A_0^T :

$$A_0^T w_1 = 0, \quad A_0^T w_0 = w_1. \tag{5.3}$$

Os vetores v_1 e w_0 não são unicamente definidos mesmo que v_0 e w_1 estejam fixos. Entretanto, sempre podemos selecionar quatro vetores satisfazendo (5.2) e (5.3) tal que

$$\langle v_0, w_0 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle = 1, \quad (5.4)$$

O teorema alternativo de Fredholm implica

$$\langle v_1, w_0 \rangle = \langle v_0, w_1 \rangle = 0. \quad (5.5)$$

Se v_0 e v_1 são selecionados como base, então qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^2$ pode ser unicamente representado por

$$x = y_1 v_0 + y_2 v_1,$$

para $y_{1,2} \in \mathbb{R}$. Levando em conta (5.4) e (5.5), essas novas coordenadas (y_1, y_2) são dadas por

$$\begin{cases} y_1 = \langle x, w_0 \rangle, \\ y_2 = \langle x, w_1 \rangle. \end{cases} \quad (5.6)$$

E nas coordenadas (y_1, y_2) , o sistema (5.1) toma a forma

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle F(y_1 v_0 + y_2 v_1), w_0 \rangle \\ \langle F(y_1 v_0 + y_2 v_1), w_1 \rangle \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Usando as coordenadas (y_1, y_2) para todo α com $\|\alpha\|$ pequeno. Nessas coordenadas, o sistema original fica:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f(y_1 v_0 + y_2 v_1, \alpha), w_0 \rangle \\ \langle f(y_1 v_0 + y_2 v_1, \alpha), w_1 \rangle \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

e para $\alpha = 0$ reduz-se para (5.7). Expandindo o lado direito de (5.8) como série de Taylor com respeito a y em $y = 0$:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + a_{00}(\alpha) + a_{10}(\alpha)y_1 + a_{01}(\alpha)y^2 + \\ \quad + \frac{1}{2}a_{20}(\alpha)y_1^2 + a_{11}(\alpha)y_1y_2 + \frac{1}{2}a_{02}(\alpha)y_2^2 + P_1(y, \alpha), \\ \dot{y}_2 = b_{00}(\alpha) + b_{10}(\alpha)y_1 + b_{01}(\alpha)y^2 + \\ \quad + \frac{1}{2}b_{20}(\alpha)y_1^2 + b_{11}(\alpha)y_1y_2 + \frac{1}{2}b_{02}(\alpha)y_2^2 + P_2(y, \alpha), \end{cases} \quad (5.9)$$

em que $a_{kl}(\alpha)$ e $P_{1,2}(y, \alpha) = O(\|y\|^3)$ são funções suaves de seus argumentos. Temos

$$a_{00}(0) = a_{10}(0) = a_{01}(0) = b_{00}(0) = b_{10}(0) = b_{01}(0) = 0.$$

As funções $a_{kl}(\alpha)$ podem ser expressas em termos de $f(x, \alpha)$ e dos vetores $v_{0,1}$, $w_{0,1}$. Por exemplo,

$$a_{20}(\alpha) = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \langle f(y_1 v_0 + y_2 v_1), w_0 \rangle \Big|_{y=0}, \quad (5.10)$$

$$b_{20}(\alpha) = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \langle f(y_1 v_0 + y_2 v_1), w_1 \rangle \Big|_{y=0}, \quad (5.11)$$

$$b_{11}(\alpha) = \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y^2} \langle f(y_1 v_0 + y_2 v_1), w_1 \rangle \Big|_{y=0}. \quad (5.12)$$

A demonstração do seguinte teorema pode ser encontrada em [4].

Teorema 9. *Suponha que o sistema planar*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2,$$

com f suave, tenha em $\alpha = 0$ um ponto de equilíbrio $x = 0$ com dois autovalores nulos:

$$\lambda_{1,2}(0) = 0.$$

Assuma que as seguintes condições de genericidade sejam satisfeitas:

(BT.0) A matriz jacobiana $A(0) = f_x(0, 0) \neq 0$;

(BT.1) $a_{20}(0) + b_{11}(0) \neq 0$;

(BT.2) $b_{20}(0) \neq 0$;

(BT.3) a aplicação

$$(x, \alpha) \mapsto \left(f(x, \alpha), \operatorname{tr} \left(\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} \right), \det \left(\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} \right) \right)$$

é regular no ponto $(x, \alpha) = (0, 0)$.

Então existem uma mudança de variáveis invertível suavemente dependente dos parâmetros, uma reparametrização que preserva a direção do tempo, e uma mudança de parâmetros suave e invertível, que juntos reduzem o sistema a

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = \beta_1 + \beta_2 \eta_1 + \eta_1^2 + s \eta_1 \eta_2 + O(\|\eta\|^3), \end{cases} \quad (5.13)$$

em que $s = \operatorname{sign}[b_{20}(a_{20}(0) + b_{11}(0))] = \pm 1$.

Lema 1. *O sistema*

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = \beta_1 + \beta_2 \eta_1 + \eta_1^2 + s \eta_1 \eta_2 + O(\|\eta\|^3) \end{cases}$$

é localmente topologicamente equivalente perto da origem ao sistema

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = \beta_1 + \beta_2 \eta_1 + \eta_1^2 + s \eta_1 \eta_2. \end{cases}$$

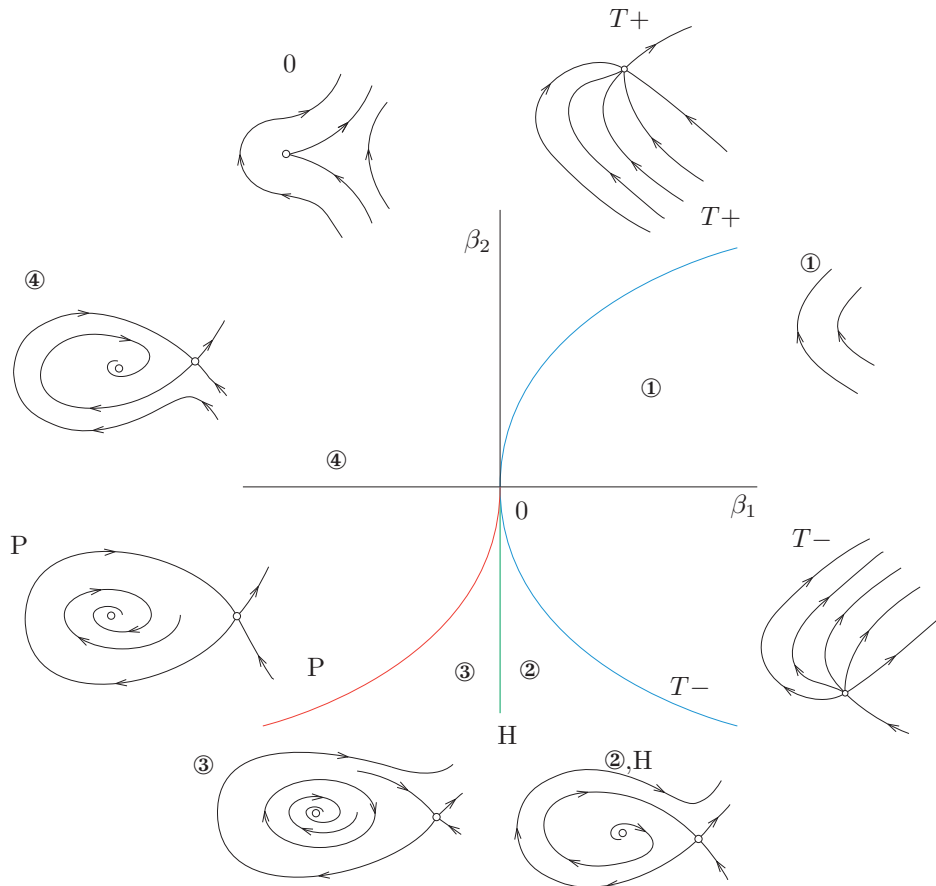


Figura 5.1: Bifurcação de Bogdanov-Takens no plano

O diagrama acima é da bifurcação da forma normal de Bogdanov-Takens (5.13) para $s = +1$ (ver [4]), como é o caso que será estudado por nós, em que

$$T+ = \{(\beta_1, \beta_2) | \beta_1 = \frac{\beta_2^2}{4}, \beta_2 > 0\}$$

$$T- = \{(\beta_1, \beta_2) | \beta_1 = \frac{\beta_2^2}{4}, \beta_2 < 0\}$$

$$H = \{(\beta_1, \beta_2) | \beta_1 = 0, \beta_2 < 0\}$$

$$P = \{(\beta_1, \beta_2) | \beta_1 = -\frac{6}{25}\beta_2^2 + o(\beta_2^3), \beta_2 < 0\}$$

Capítulo 6

Uma terceira variação do problema dos platelmintos

6.1 velocidade radial

O problema a seguir foi sugerido por Jorge Sotomayor. Ele acrescenta ao problema original dos platelmintos uma velocidade radial no fluido representada pelo vetor $b(x, y)$, $b > 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = bx - \omega y + v \frac{R-x}{\sqrt{(R-x)^2 + y^2}} \\ \dot{y} = by + \omega x - v \frac{y}{\sqrt{(R-x)^2 + y^2}} \end{cases} \quad (6.1)$$

O acréscimo desse vetor velocidade modifica bastante o retrato de fase do campo. Pode surgir uma órbita periódica repulsora que engloba todo o disco G_R . Para determinados valores dos parâmetros, também ocorre a bifurcação de Bogdanov-Takens.

Fazendo a seguinte mudança de variáveis: $x = R\bar{x}$, $y = R\bar{y}$, $\omega = \frac{\bar{\omega}v}{R}$, $b = \frac{\bar{b}v}{R}$ e $t = \frac{\bar{t}R}{v}$ e retirando as barras chegamos ao seguinte sistema com $R = v = 1$.

$$\begin{cases} \dot{x} = bx - \omega y + \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} \\ \dot{y} = by + \omega x - \frac{y}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} \end{cases}$$

Escrevendo a equação em coordenadas polares centradas em $F = (1, 0)$ dada por:

$$x = 1 - r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta$$

obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{r} = br((r - \cos(\theta)) + r(\omega \sin \theta - 1)) \\ \dot{\theta} = b \sin(\theta) + \omega - \omega(r - \cos \theta) \end{cases} \quad (6.2)$$

Os pontos singulares de (6.2) são:

- a) $F_1 = (0, \theta_1)$ e $F_2 = (0, \theta_2)$ em que $\sin \theta_1 = -\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + b^2}}$ e $\cos \theta_1 = \frac{b}{\sqrt{\omega^2 + b^2}}$ e $\sin \theta_2 = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + b^2}}$ e $\cos \theta_2 = -\frac{b}{\sqrt{\omega^2 + b^2}}$.
- b) $P_3 = (r_3, \theta_3)$ e $P_4 = (r_4, \theta_4)$ em que

$$\begin{aligned} r_3 &= \frac{b + \sqrt{(\omega^2 + b^2)^2 - \omega^2}}{\omega^2 + b^2} \\ \sin \theta_3 &= \frac{\omega}{\omega^2 + b^2} \\ \cos \theta_3 &= \frac{\sqrt{(\omega^2 + b^2)^2 - \omega^2}}{\omega^2 + b^2} \\ r_4 &= \frac{b - \sqrt{(\omega^2 + b^2)^2 - \omega^2}}{\omega^2 + b^2} \\ \sin \theta_4 &= \frac{\omega}{\omega^2 + b^2} \\ \cos \theta_4 &= -\frac{\sqrt{(\omega^2 + b^2)^2 - \omega^2}}{\omega^2 + b^2} \end{aligned}$$

De fato, se $r = 0$, então $b \sin \theta + \omega \cos \theta = 0$ que implica $\operatorname{tg} \theta = -\frac{\omega}{b}$.

Caso $r \neq 0$, então da segunda equação de (6.2) $b \sin \theta + \omega \cos \theta - \omega r = 0$. Substituindo na primeira equação obtemos $\sin \theta = \frac{\omega}{\omega^2 + b^2}$, o que implica $\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{(\omega^2 + b^2)^2 - \omega^2}}{\omega^2 + b^2}$ e conseqüentemente $r = \frac{b \pm \sqrt{(\omega^2 + b^2)^2 - \omega^2}}{\omega^2 + b^2}$.

A primeira condição de existência dos pontos $P_{3,4}$ é que

$$0 \leq \frac{\omega}{\omega^2 + b^2} \leq 1$$

Com essa condição, o ponto P_3 tem sua existência garantida, mas o ponto P_4 precisa de mais uma condição que garanta o seu raio positivo.

$$0 \leq (\omega^2 + b^2)^2 - \omega^2 \leq b^2$$

que implica em

$$\frac{\omega^2}{\omega^2 + b^2} \leq \omega^2 + b^2 \leq 1$$

Usando a lei dos cossenos, conclui-se que a distância dos pontos $P_{3,4}$ à origem é $\frac{1}{\omega^2 + b^2}$.

6.2 Análise do foco

Considere o ponto $F_1 = (0, \theta_1)$. A matriz jacobiana do campo aplicada a este ponto é

$$J(F_1) = J(0, \theta_1) = \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{\omega^2 + b^2} & 0 \\ -\omega & \sqrt{\omega^2 + b^2} \end{pmatrix}$$

cujos autovalores são $-1 - \sqrt{\omega^2 + b^2}$ e $\sqrt{\omega^2 + b^2}$ associados aos seus respectivos autovetores $(\frac{1 + 2\sqrt{\omega^2 + b^2}}{\omega}, 1)$ e $(0, 1)$. Portanto um ponto de sela.

Para o ponto $F_2 = (0, \theta_2)$, a matriz jacobiana do campo é

$$J(F_2) = J(0, \theta_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1 - 2\sqrt{\omega^2 + b^2}}{\omega} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

cujos autovalores são $-\sqrt{\omega^2 + b^2}$ e $\sqrt{\omega^2 + b^2} - 1$ associados aos seus respectivos autovetores $(0, 1)$ e $(\frac{1 - 2\sqrt{\omega^2 + b^2}}{\omega}, 1)$. Portanto um ponto de sela se $\omega^2 + b^2 > 1$ e um nó atrator se $\omega^2 + b^2 < 1$. Logo o foco $(R, 0)$ é um atrator no sistema (6.2) se $\omega^2 + b^2 < 1$.

6.3 Os outros pontos de equilíbrio

Considere o ponto de equilíbrio P_3 . Sua existência é garantida para

$$0 \leq \frac{\omega}{\omega^2 + b^2} \leq 1$$

A matriz jacobiana do campo aplicada a este ponto é

$$J(P_3) = J(r_3, \theta_3) = \begin{pmatrix} \frac{b(b + \sqrt{(\omega^2 + b^2)^2 - \omega^2})}{\omega^2 + b^2} & \frac{w(b + \sqrt{(\omega^2 + b^2)^2 - \omega^2})^2}{(\omega^2 + b^2)^2} \\ -\omega & -\frac{\omega^2 - b(\sqrt{(\omega^2 + b^2)^2 - \omega^2})}{\omega^2 + b^2} \end{pmatrix}$$

O traço dessa matriz é dado por

$$tr(P_3) = \frac{b^2 - \omega^2 + 2b\sqrt{(\omega^2 + b^2)^2 - \omega^2}}{\omega^2 + b^2}$$

e seu determinante é dado por

$$det(P_3) = \frac{(b + \sqrt{(\omega^2 + b^2)^2 - \omega^2})\sqrt{(\omega^2 + b^2)^2 - \omega^2}}{\omega^2 + b^2}$$

O sinal de $det(P_3)$ é sempre positivo ou nulo. E caso $b \geq \omega$, o sinal de $tr(P_3)$ também é positivo ou nulo. Se $b < \omega$ então fazendo a análise de sinal, concluímos que

$$tr(P_3) \geq 0 \implies b \geq \frac{1}{2}$$

Portanto P_3 é um nó repulsor se $b > \omega$ ou $b = \omega \neq \frac{1}{2}$ ou se $b < \omega$ com $b > \frac{1}{2}$. É um nó atrator se $b < \omega$ e $b < \frac{1}{2}$ e será uma bifurcação de Bogdanov-Takens, que será estudada posteriormente, se $b = \omega = \frac{1}{2}$.

Considere agora o ponto de equilíbrio P_4 . Sua existência é garantida se

$$0 \leq \frac{\omega}{\omega^2 + b^2} \leq 1$$

e

$$\omega^2 + b^2 \leq 1$$

A matriz jacobiana do campo aplicada a este ponto é

$$J(P_4) = J(r_4, \theta_4) = \begin{pmatrix} -\frac{b(b + \sqrt{(\omega^2 + b^2)^2 - \omega^2})}{\omega^2 + b^2} & \frac{w(-b + \sqrt{(\omega^2 + b^2)^2 - \omega^2})^2}{(\omega^2 + b^2)^2} \\ -\omega & -\frac{\omega^2 + b(\sqrt{(\omega^2 + b^2)^2 - \omega^2})}{\omega^2 + b^2} \end{pmatrix}$$

O traço dessa matriz é dado por

$$tr(P_4) = \frac{b^2 - \omega^2 - 2b\sqrt{(\omega^2 + b^2)^2 - \omega^2}}{\omega^2 + b^2}$$

e seu determinante é dado por

$$det(P_4) = \frac{(-b + \sqrt{(\omega^2 + b^2)^2 - \omega^2})\sqrt{(\omega^2 + b^2)^2 - \omega^2}}{\omega^2 + b^2}$$

O sinal de $\det(P_4)$ é negativo ou nulo. De fato:

$$b \geq \sqrt{(\omega^2 + b^2)^2 - \omega^2} \iff \omega^2 + b^2 \leq 1$$

O sinal de $\text{tr}(P_4)$ é negativo caso $b < \omega$ ou $b = \omega \neq \frac{1}{2}$. Caso $b > \omega$, então

$$\text{tr}(P_4) \geq 0 \iff b \leq \frac{1}{2}$$

Portanto P_4 é sela se $\omega \neq \omega^2 + b^2$. Caso $\omega = \omega^2 + b^2$ então P_4 é um nó atrator se $b < \omega$, nó repulsor se $b > \omega$ e uma bifurcação de Bogdanov-Takens se $b = \omega$, caso que será estudado posteriormente.

6.4 bifurcação de Bogdanov-Takens

Fazendo $b = \frac{1}{2}$ e impondo $\det(P_4) = 0$ (condição de Bogdanov-Takens) obtemos $\omega = \frac{1}{2}$ e então $P_4 = P_3 = (1, \frac{\pi}{2})$. A matriz jacobiana do campo neste ponto passa a ser:

$$A_0 = J(P_4) = J(P_3) = J(1, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

com 0 como único autovalor associado ao autovetor $v_0 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Seguindo os passos da bifurcação de Bogdanov-Takens, sejam $v_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ o autovetor generalizado de A_0 , de modo que $A_0 v_1 = v_0$, $w_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ autovetor de A_0^T associado ao autovalor 0 e w_0 o autovetor generalizado de A_0^T , ou seja, $A_0^T w_0 = w_1$. Considere a translação

$$r = \bar{r} + 1, \quad \theta = \bar{\theta} + \frac{\pi}{2}, \quad b = \bar{b} + \frac{1}{2} \text{ e } \omega = \bar{\omega} + \frac{1}{2}$$

que leva F_4 para origem e os parâmetros $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ também para a origem. Basta verificar agora que o sistema atende as hipóteses de Bogdanov-Takens:

$$a_{20}(0) = 0$$

$$b_{20}(0) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$b_{11}(0) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

além do determinante jacobiano da aplicação (BT.3) no ponto $(0,0,0,0)$ ser -1 .

O ponto de bifurcação está fora da região G_1 e, como exemplo, para os parâmetros $(\omega, b) = (0.57, 0.503)$ tem-se um ciclo limite instável também fora do disco G_1 .

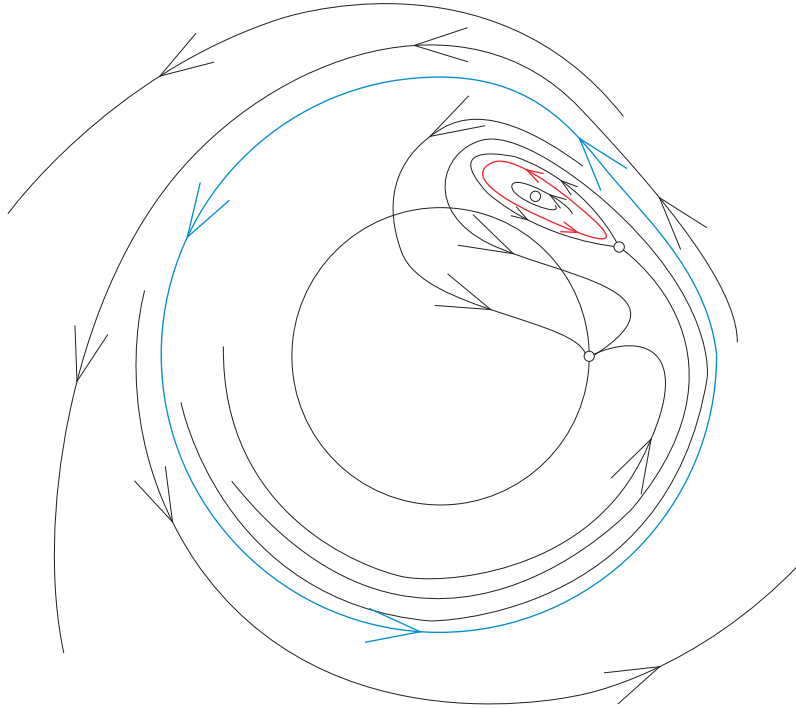


Figura 6.1: Retrato de fase com parâmetros $(\omega, b) = (0.57, 0.503)$

6.5 Análise da existência de uma grande órbita periódica

O que será verificado agora é a condição para a existência de uma órbita que envolve todo o disco G_R e todos os pontos de equilíbrio como vista no retrato de fase anterior. Considere a componente radial do sistema (6.2), ou seja,

$$z(t) = x(t)^2 + y(t)^2$$

derivando em relação a variável t , obtemos

$$z'(t) = 2b(x^2 + y^2) - 2 \frac{\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4} \right]}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} \quad (6.3)$$

Das análises dos problemas anteriores dessa mesma componente, concluímos que para $b = 0$,

$$z'(t) < 0 \iff (x, y) \notin \mathcal{C}$$

em que \mathcal{C} é o disco de raio $\frac{1}{2}$ e centrado em $(\frac{1}{2}, 0)$. Por continuidade então, para b suficientemente pequeno, conseguimos uma região $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | k_1 < x^2 + y^2 < k_2\}$ que envolve todo o disco G_R e todos os pontos de equilíbrio, em que $z'(t) < 0$ para todos os pontos, ou seja, enquanto permanecem nessa região, as órbitas tendem a se aproximar da origem.

Considere agora a seguinte mudança de variáveis:

$$x = \frac{r}{1-r} \cos \theta - 1 \quad \text{e} \quad y = \frac{r}{1-r} \sin \theta$$

O sistema (6.2) reescrito nessas novas coordenadas e reescalado por r passa a ser:

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(1-r)^2(\dot{y} \sin \theta - \dot{x} \cos \theta) \\ \dot{\theta} &= (1-r)(\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) \end{cases} \quad (6.4)$$

Denominaremos a primeira e a segunda componentes do novo campo por F e G respectivamente. Com auxílio de um software para cálculos algébricos, conclui-se que, nas coordenadas (r, θ) , a reta $(1, 0)$ zera a primeira equação do sistema e faz a segunda sempre igual a ω , ou seja, $F(1, \theta) = 0$ e $G(1, \theta) = \omega$. Fazendo o cálculo

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{dr}{d\theta} \right) \Big|_{r=1} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{F(r, \theta)}{G(r, \theta)} \right) \Big|_{r=1} d\theta = -\frac{2b\pi}{\omega}$$

conclui-se que a reta $r = r(\theta) = 1$ é uma solução periódica, o que equivale a dizer que o infinito é um atrator para o sistema (6.2) e portanto pelo teorema de Poincaré-Bendixson existe ao menos uma órbita periódica repulsora envolvendo a região \mathcal{A} . Observe que para a existência dessa órbita periódica é necessário um valor baixo para b , o que já era de se esperar, visto que com um valor alto, os platelmintos seriam levados para o infinito pela correnteza gerada por b .

Capítulo 7

Critério para ausência de órbitas periódicas

7.1 O critério

Neste capítulo, desenvolvemos o artigo "Criterion for absence of periodic orbits" do professor R. A. Garcia[3] cujo o assunto é mais um método para determinação de ausência de órbitas periódicas em campos vetoriais bidimensionais.

Considere uma equação diferencial ordinária de classe C^k , $k \geq 3$,

$$\dot{p} = F(p), \quad p = (x, y), \quad F(p) = (P(p), Q(p)). \quad (7.1)$$

Denote o fluxo C^k de (7.1) por $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Associado ao fluxo, temos uma família de difeomorfismos φ_t com parâmetro t definida por $\varphi_t(p) = \varphi(t, p)$ com $\varphi_0 = Id$.

Teorema 10. *A primeira equação variacional de (7.1) é dada por*

$$\frac{d}{dt}(D\varphi_t(p)) = DF(\varphi_t(p))D\varphi_t(p), \quad D\varphi_0(p) = Id.$$

Seja $\sigma(t) = \det(D\varphi_t(p))$. A fórmula de Liouville é dada por

$$\sigma'(t) = (\operatorname{div} F)(\varphi_t(p))\sigma(t), \quad \sigma(0) = 1 \quad (7.2)$$

Demonstração. Seja $\varphi_t(p) = (\alpha(p), \beta(p))$. Então

$$D\varphi_t(p) = \begin{pmatrix} \alpha_x(p) & \alpha_y(p) \\ \beta_x(p) & \beta_y(p) \end{pmatrix}$$

Temos que $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \partial\alpha \\ \partial\beta \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{pmatrix}$ e assim por diante. Então, segue que :

$$\frac{d\alpha}{dt} = P(\alpha, \beta) \rightarrow \frac{d}{dt}(\alpha_x) = P_x\alpha_x + P_y\beta_x \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}(\alpha_y) = P_x\alpha_y + P_y\beta_y$$

$$\frac{d\beta}{dt} = Q(\alpha, \beta) \rightarrow \frac{d}{dt}(\beta_x) = Q_x\alpha_x + Q_y\beta_x \text{ e } \frac{d}{dt}(\beta_y) = Q_x\alpha_y + Q_y\beta_y$$

portanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\det D\varphi_t) &= \begin{vmatrix} \frac{d}{dt}(\alpha_x) & \frac{d}{dt}(\alpha_y) \\ \beta_x & \beta_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ \frac{d}{dt}(\beta_x) & \frac{d}{dt}(\beta_y) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} P_x\alpha_x + P_y\beta_x & P_x\alpha_y + P_y\beta_y \\ \beta_x & \beta_y \end{vmatrix} + \\ &\quad + \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ Q_x\alpha_x + Q_y\beta_x & Q_x\alpha_y + Q_y\beta_y \end{vmatrix} \\ &= (P_x + Q_y)(\alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x) \\ &= (\operatorname{div}F)\det D\varphi_t. \end{aligned}$$

Isso termina a prova, estabelecendo a fórmula de Liouville. \square

Teorema 11. *Sejam D_0 um conjunto mensurável no plano \mathbb{R}^2 e $D(t) = \varphi_t(D_0)$. Defina $A(t) = \text{Área de } \varphi_t(D_0)$. Então*

$$\begin{aligned} A(0) &= \int_{D_0} dx dy = \text{Área de } D_0, \\ A'(0) &= \int_{D_0} \operatorname{div}F dx dy, \\ A''(0) &= \int_{D_0} [\langle \nabla(\operatorname{div}F), F \rangle + (\operatorname{div}F)^2] dx dy \\ A'''(0) &= \int_{D_0} \langle \operatorname{Hess}(F)F, F \rangle + \langle \nabla(\operatorname{div}F), DF \cdot F \rangle + 3\operatorname{div}F \langle \nabla(\operatorname{div}F), F \rangle + \\ &\quad + \operatorname{div}F^3 dx dy \end{aligned} \tag{7.3}$$

Demonstração. \square

Do cálculo integral

$$A(t) = \int_{D(t)} dx dy = \int_{D_0} |\det D\varphi_t(p)| dx dy = \int_{D_0} \det D\varphi_t(p) dx dy.$$

A última igualdade é válida pois φ_t preserva a orientação de \mathbb{R}^2 . Derivando sob

o sinal da integral, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{dA(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{D_0} \det D\varphi_t(p) dx dy = \int_{D_0} \frac{d}{dt} (\det D\varphi_t(p)) dx dy \\
&= \int_{D_0} \sigma'(t) dx dy = \int_{D_0} (\operatorname{div} F)(\varphi_t(p)) \sigma(t) dx dy \\
\frac{d^2 A(t)}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \int_{D_0} (\operatorname{div} F)(\varphi_t(p)) \sigma(t) dx dy = \int_{D_0} \frac{d}{dt} [(\operatorname{div} F)(\varphi_t(p)) \sigma(t)] dx dy \\
&= \int_{D_0} [D(\operatorname{div} F)(\varphi_t(p)) \cdot \frac{d}{dt} (\varphi_t(p)) \sigma(t) + (\operatorname{div} F)(\varphi_t(p)) \sigma'(t)] dx dy \\
&= \int_{D_0} \{ \langle \nabla(\operatorname{div} F)(\varphi_t(p)), F(\varphi_t(p)) \rangle + [(\operatorname{div} F)(\varphi_t(p))]^2 \} \sigma(t) dx dy \\
\frac{d^3 A(t)}{dt^3} &= \int_{D_0} \{ \langle \operatorname{Hess}(\operatorname{div} F)(\varphi_t(p)) F(\varphi_t(p)), F(\varphi_t(p)) \rangle + \\
&\quad + \langle \nabla \operatorname{div} F(\varphi_t(p)), DF(\varphi_t(p)) F(\varphi_t(p)) \rangle + \\
&\quad + 2 \operatorname{div} F \langle \nabla \operatorname{div} F(\varphi_t(p)), F(\varphi_t(p)) \rangle \} \sigma(t) + \\
&\quad + \{ \langle \nabla(\operatorname{div} F)(\varphi_t(p)), F(\varphi_t(p)) \rangle + \\
&\quad + [(\operatorname{div} F)(\varphi_t(p))]^2 \} \operatorname{div} F(\varphi_t(p)) \sigma(t) dx dy
\end{aligned}$$

basta agora tomar $t = 0$ nas equações acima.

Observação 1. A expressão

$$\mathcal{Q}(F) = \langle \nabla(\operatorname{div} F), F \rangle + (\operatorname{div} F)^2$$

é par. Isto é, $\mathcal{Q}(F) = \mathcal{Q}(-F)$.

Teorema 12. Seja R uma região simplesmente conexa no plano \mathbb{R}^2 e suponha que $\operatorname{div} F \neq 0$ ou $\mathcal{Q}(F) = \langle \nabla(\operatorname{div} F), F \rangle + (\operatorname{div} F)^2(p) \neq 0$ para todo ponto $p \in R$. Então a equação (7.1) não tem órbitas periódicas ou gráficos contidos na região R .

Demonstração. Por contradição, suponha que exista uma órbita periódica ou um gráfico $\gamma \subset R$ com $\partial\gamma = D_0$. Segue então que $A(t) = \text{Área de } D_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ o que implica $A'(t) = A''(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mas pelo teorema (11), $A'(0) \neq 0$ ou $A''(0) \neq 0$. Um absurdo. \square

Exemplo 1. Seja

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 + y^2 + a \\ \dot{y} &= x^n - y \end{cases}$$

Então o $\operatorname{div} F = 2x - 1$ e $\langle \nabla(\operatorname{div} F), F \rangle + (\operatorname{div} F)^2(p) = 2y^2 + 6x^2 - 4x + 2a + 1 > 0$ para $a \in (\frac{1}{6}, +\infty)$.

7.2 Campos vetoriais quadráticos

Considere o campo de vetores quadrático F definido por:

$$\begin{cases} \dot{x} = c_0 + ax + by + \frac{A}{2}x^2 + Bxy + \frac{C}{2}y^2 \\ \dot{y} = c_1 + cx - ay + \frac{L}{2}x^2 - Axy + \frac{N}{2}y^2 \end{cases} \quad (7.4)$$

então $\operatorname{div}F(x, y) = (B + N)y$ e $\mathcal{Q}(F) = (B + N)[c_1 + cx - ay + \frac{L}{2}x^2 - Axy + (\frac{3N}{2} + B)y^2]$. Seja

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_m &= \frac{1}{2} \frac{3Nc^2 + La^2 + 2Bc^2 - 2Aac + 2c_1(A^2 - 2LB - 3NL)}{A^2 - 2BL - 3NL} \\ &= \frac{1}{2} \frac{3Nc^2 + La^2 + 2Bc^2 - 2Aac}{A^2 - 2BL - 3NL} + c_1 \end{aligned} \quad (7.5)$$

Teorema 13. *Suponha que $B + N \neq 0$, $L > 0$ e $2BL + 3NL - A^2 > 0$ e $\mathcal{Q}_m \neq 0$. Então o sistema (7.4) não tem órbita periódica ou gráfico.*

Demonstração. O ponto crítico de $\mathcal{Q}(F)$ é dado por:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{Aa - (3N + 2B)c}{A^2 - 2BL - 3NL}, \frac{La - Ac}{A^2 - 2BL - 3NL} \right)$$

um cálculo direto mostra que

$$\mathcal{Q}(F)(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2} \frac{3Nc^2 + La^2 + 2Bc^2 - 2Aac}{A^2 - 2BL - 3NL} + c_1.$$

A condição $2BL + 3NL - A^2 > 0$ é equivalente à forma quadrática $\frac{L}{2}x^2 - Axy + (\frac{3N}{2} + B)y^2$ ser positiva definida. Então, sob as hipóteses, segue que $\mathcal{Q}(F)(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. \square

O teorema a seguir assegura que qualquer sistema quadrático pode ser transformado no sistema (7.4). Na prática, não se faz esses cálculos com os coeficientes manualmente, portanto não se faz necessário a exibição da matriz de transformação. O ideal é utilizar um programa de computador que faça esses cálculos rapidamente.

Teorema 14. *Sempre existe uma mudança de coordenadas linear que transforma um campo vetorial quadrático qualquer no sistema (7.4).*

Capítulo 8

Apêndice: Formas normais

8.1 Bifurcação Sela-nó

Considere o seguinte sistema unidimensional dependente a um parâmetro

$$\dot{x} = \alpha + x^2 \equiv f(x, \alpha) \quad (8.1)$$

Para $\alpha = 0$, o sistema tem um ponto crítico não hiperbólico em $x=0$, ou seja,

$$f(0, 0) = 0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial x}f(0, 0) = 0$$

Para $\alpha > 0$ não há pontos críticos, e para $\alpha < 0$ existem dois, a saber $x_1(\alpha) = \sqrt{-\alpha}$ e $x_2(\alpha) = -\sqrt{-\alpha}$. Podemos determinar a estabilidade desses pontos analisando o sinal de $f_x(x, \alpha) = 2x$ de onde concluímos que x_1 é instável e x_2 é assintoticamente estável. Observe o diagrama a seguir:

Lema 2. *O sistema*

$$\dot{x} = \alpha + x^2 + O(x^3)$$

é localmente topologicamente equivalente perto da origem ao sistema

$$\dot{x} = \alpha + x^2$$

Demonstração. Considere $y = y(t)$ uma solução do sistema. Seja $f(y, \alpha) = \alpha + y^2 + \psi(y, \alpha)$, em que $\psi(y, \alpha) = O(y^3)$ é uma função de classe C^r . Como $f(0, 0) = 0$ e $f_\alpha(0, 0) = 1$, podemos aplicar o teorema da função implícita e concluir que existe uma única função suave $\alpha = g(y)$ tal que $g(0) = 0$ e $f(y, g(y)) = 0$ para y suficientemente pequeno. De fato,

$$f(y, \alpha) = 0 \iff \alpha = -y^2 + O(y^3) \iff g(y) = -y^2 + O(y^3)$$

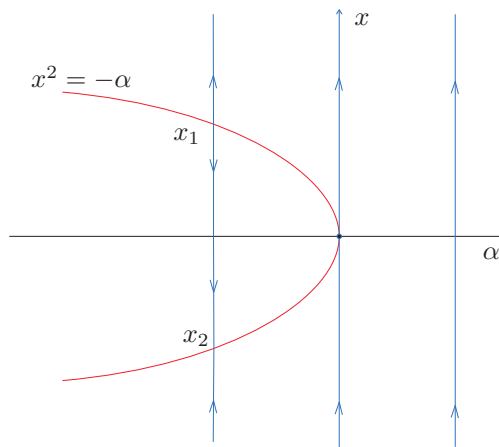


Figura 8.1: Bifurcação Sela-nó

Então para $\alpha < 0$ suficientemente pequeno, existem dois pontos de equilíbrio hiperbólicos $y_1(\alpha)$ e $y_2(\alpha)$ perto de $x_1(\alpha) = \sqrt{-\alpha}$ e $x_2(\alpha) = -\sqrt{-\alpha}$ respectivamente.

O homeomorfismo, dependente de α , $h_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entre os sistemas é construído da seguinte forma: para $\alpha \geq 0$, o homeomorfismo é a própria identidade

$$h_\alpha(x) = x$$

e para $\alpha < 0$

$$h_\alpha(x) = a(\alpha) + b(\alpha)x$$

em que as constantes $a(\alpha)$ e $b(\alpha)$ são encontradas resolvendo o sistema

$$h_\alpha(x_j\alpha) = y_j(\alpha), \quad j = 1, 2$$

□

Teorema 15. *Suponha que o sistema unidimensional*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

tenha em $(0, 0)$ um ponto de equilíbrio não hiperbólico, ou seja,

$$f(0, 0) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} f(0, 0) = 0 \tag{8.2}$$

Assuma que as seguintes condições são satisfeitas:

(a) $f_{xx}(0, 0) \neq 0$

(b) $f_\alpha \neq 0$

Então existe uma mudança de coordenadas invertível que transforma o sistema em

$$\dot{\eta} = \beta \pm \eta^2 + O(\eta^3)$$

Demonstração. A expansão de Taylor de f com respeito a x em $x=0$ é

$$f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + f_3(\alpha)x^3 + f_4(tx, \alpha)x^4 \quad t \in [0, 1]$$

Considere a seguinte mudança de coordenadas

$$\xi = x + \delta$$

em que $\delta = \delta(\alpha)$ será escolhido adequadamente mais adiante. A transformação inversa é dada por

$$x = \xi - \delta$$

e o sistema é transformado em

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= f_0(\alpha) + f_1(\alpha)(\xi - \delta) + f_2(\alpha)(\xi - \delta)^2 + f_3(\alpha)(\xi - \delta)^3 + f_4(tx, \alpha)(\xi - \delta)^4 \\ \dot{\xi} &= [f_0(\alpha) - f_1(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\delta^2 - f_3(\alpha)\delta^3 + f_4(t(\xi - \delta), \alpha)\delta^4] + \\ &+ [f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + 3f_3(\alpha)\delta^2 - 4f_4(t(\xi - \delta), \alpha)\delta^3]\xi + \\ &+ [f_2(\alpha) - 3f_3(\alpha)\delta + 6f_4(t(\xi - \delta), \alpha)\delta^2]\xi^2 \\ &+ [f_3(\alpha) + f_4(t(\xi - \delta), \alpha)(\xi - \delta)]\xi^3 \\ \dot{\xi} &= [f_0(\alpha) - f_1(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\delta^2 + O(\delta^3)] + \\ &+ [f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2)]\xi + \\ &+ [f_2(\alpha) + O(\delta)]\xi^2 + \\ &+ O(\xi^3) \end{aligned}$$

Por hipótese, $f_2(0) = \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0) \neq 0$. Então existe uma função $\delta(\alpha)$ que anula o termo linear da equação acima α suficientemente pequeno. De fato, defina

$$F(\alpha, \delta) = f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2)$$

Tem-se então

$$F(0, 0) = 0, \quad F_\delta(0, 0) = -2f_2(0), \quad F_\alpha(0, 0) = f_1'(0)$$

Pelo teorema da função implícita, existe uma única função suave $\delta(\alpha)$, tal que

$$\delta(0) = 0, \quad F(\alpha, \delta(\alpha)) \equiv 0$$

A escolha mais adequada para δ então é

$$\delta(\alpha) = \frac{f_1'(0)}{2f_2(0)}\alpha + O(\alpha^2)$$

De forma que a equação em ξ agora não tem mais o termo linear:

$$\dot{\xi} = [f'(0)\alpha + O(\alpha^2)] + [f_2'(0) + O(\alpha)]\xi^2 + O(\xi^3) \quad (8.3)$$

Considere agora um novo parâmetro $\mu = \mu(\alpha)$ o termo constante da última equação:

$$\mu = f'(0)\alpha + \alpha^2\phi(\alpha)$$

em que ϕ é uma função suave. Temos então:

(a) $\mu(0) = 0$

(b) $\mu'(0) = f_0'(0) = f_\alpha(0, 0)$

Como por hipótese tem-se $f_\alpha(0, 0) \neq 0$, segue do teorema da função implícita a existência de uma única função inversa local $\alpha = \alpha(\mu)$ com $\alpha(0) = 0$. Portanto a equação (refsis.xi) fica

$$\dot{\xi} = \mu + \gamma(\mu)\xi^2 + O(\xi^3)$$

em que $\gamma(\mu)$ é uma função suave com $\gamma(0) = f_2(0) \neq 0$ por hipótese.

Por fim, seja agora $\eta = |\gamma(\mu)|\xi$ e $\beta = |\gamma(\mu)|\mu$ e então teremos

$$\dot{\eta} = \beta + s\eta^2 + O(\eta^3)$$

em que $s = \text{signal}(\gamma(0)) = \pm 1$. □

Usando agora o lema (2), conseguimos eliminar o termo $O(\eta^3)$ e finalmente chegar ao seguinte resultado(ver [4]):

Teorema 16. Forma topológica normal para bifurcação sela-nó. *Todo sistema unidimensional dependente a um parâmetro real*

$$\dot{x} = f(x, \alpha),$$

com a origem $(0,0)$ como ponto de equilíbrio não hiperbólico tal que:

(a) $f_{xx}(0, 0) \neq 0$

(b) $f_\alpha(0, 0) \neq 0$

é localmente topologicamente equivalente perto da origem à seguinte forma normal:

$$\dot{\eta} = \beta \pm \eta^2$$

8.2 Bifurcação Forquilha

Considere agora a equação diferencial real dependente a um parâmetro

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \equiv f(x, \mu)$$

f tem três pontos de equilíbrio se $\mu > 0$, a saber 0 e $\pm\sqrt{\mu}$. Se $\mu \leq 0$, f tem apenas 0 como ponto de equilíbrio, além disso, para $\mu = 0$, este ponto é não hiperbólico nem é uma bifurcação do tipo sela-nó pois:

$$f_\mu(0, 0) = f_{xx}(0, 0) = 0$$

A estabilidade dos pontos é analisada através do sinal de

$$f_x(0, \mu) = \mu \text{ e } f_x(\pm\sqrt{\mu}, \mu) = -2\mu$$

de onde concluímos que para $\mu > 0$, 0 é instável e $\pm\sqrt{\mu}$ são assintoticamente estáveis e para $\mu < 0$, 0 é assintoticamente estável. Observe o diagrama a seguir

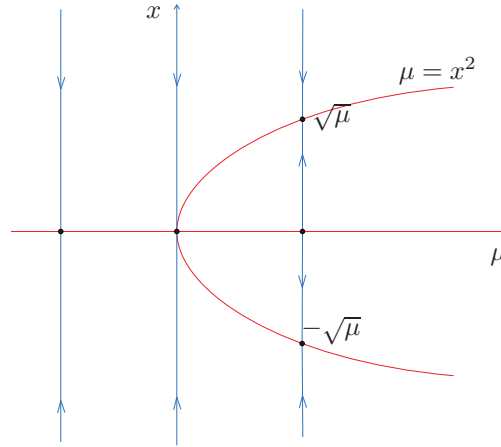


Figura 8.2: Bifurcação Forquilha

Lema 3. *O sistema $\dot{x} = \mu x - x^3 + O_\mu(x^4)$ é localmente topologicamente equivalente, perto da origem, ao sistema $\dot{x} = \mu x - x^3$.*

Demonstração. Considere o sistema $\dot{y} = \mu y - y^3 + O_\mu(y^4) = y(\mu - y^2 + O_\mu(y^3))$. Onde $O_\mu(y^4) = \psi(y, \mu)$ é uma função suave. $y = 0$ é sempre raiz do campo. Seja $F(y, \mu) = \mu - y^2 + O_\mu(y^3)$ e considere a variedade

$$\mathcal{M} = \{(y, \mu) : F(y, \mu) = 0\}$$

$F(0, 0) = 0 \implies (0, 0) \in \mathcal{M}$ e como $\frac{\partial F}{\partial \mu}(0, 0) = 1$, pelo Teorema da Função Implícita, $\mu = \mu(y) = y^2 + O_\mu(y^3) = O_\mu(y^2)$ e $F(y, \mu(y)) = 0$ para y pequeno. Então para $\mu > 0$ existem mais dois pontos singulares de f $y_1 = \sqrt{\mu + O_\mu(y^3)}$ e $y_2 = -\sqrt{\mu + O_\mu(y^3)}$ perto de $x_1 = \sqrt{\mu}$ e $x_2 = -\sqrt{\mu}$ respectivamente. Se $\mu \leq 0$ então $y = 0$ é o único ponto singular do campo f .

Construção do homeomorfismo $y = h_\mu(x)$. Se $\mu \leq 0$, então $y = h_\mu(x) = x$. Se $\mu > 0$, então $y = h_\mu(x) = a(\mu) + b(\mu)x$ onde $a(\mu)$ e $b(\mu)$ são unicamente determinados por $h_\mu(\sqrt{\mu}) = y_1$ e $h_\mu(-\sqrt{\mu}) = y_2 \implies a(\mu) = \frac{y_1 - y_2}{2\sqrt{\mu}}$ e $b(\mu) = \frac{y_1 + y_2}{2\mu}$ \square

Definição 2. Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita par se $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in A$. É dita ímpar se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$.

Lema 4. Se uma função real f é par e derivável, então f' é ímpar. E se f é ímpar e derivável, então f' é par.

Demonstração. Considere f par

$$f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = -f'(x)$$

Considerando f ímpar

$$f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-[f(x-h) - f(x)]}{-(-h)} = f'(x)$$

\square

Uma função real f ímpar é nula em 0, pois $f(0) = f(-0) = -f(0) \implies 2f(0) = 0 \implies f(0) = 0$. Portanto todas as derivadas de ordem par de f também são nulas em 0, visto que são funções ímpares.

$$\frac{d^{2k}f}{dx^{2k}}(-x) = -\frac{d^{2k}f}{dx^{2k}}(x) \implies \frac{d^{2k}f}{dx^{2k}}(0) = 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

Seja agora $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável uma função ímpar na primeira variável, ou seja, $f(-x, \alpha) = -f(x, \alpha)$, $\forall (x, \alpha) \in A$ tal que $(-x, \alpha) \in A$. Pelo lema anterior tem-se

$$\frac{\partial^{2k}f}{\partial x^{2k}}(-x, \alpha) = -\frac{\partial^{2k}f}{\partial x^{2k}}(x, \alpha) \implies \frac{\partial^{2k}f}{\partial x^{2k}}(0, \alpha) = 0, \quad \forall (0, \alpha) \in A$$

Além disso

$$\begin{aligned} f_\alpha(-x, \alpha) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x, \alpha+h) - f(-x, \alpha)}{h} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, \alpha+h) - f(x, \alpha)}{h} \\ &= -f_\alpha(x, \alpha) \end{aligned}$$

ou seja, a derivada na segunda variável não altera a paridade da função. Logo temos

$$\frac{\partial^{2k+M} f}{\partial x^{2k} \partial \alpha^M}(-x, \alpha) = -\frac{\partial^{2k+M} f}{\partial x^{2k} \partial \alpha^M}(x, \alpha) \implies \frac{\partial^{2k+M} f}{\partial x^{2k} \partial \alpha^M}(0, \alpha) = 0$$

Considere a EDO $\dot{x} = f(x, \alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ onde f é uma função ímpar. Então $f(0, 0) = 0$. Suponha que $(0, 0)$ seja um ponto singular não-hiperbólico, ou seja, $f_x(0, 0) = 0$. Fazendo a expansão de Taylor em torno de $(0, 0)$ obtemos

$$\begin{aligned} f(x, \alpha) = & f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_\alpha(0, 0)\alpha + f_{xx}(0, 0)\frac{x^2}{2} + f_{x\alpha}(0, 0)x\alpha + \\ & + f_{\alpha\alpha}(0, 0)\frac{\alpha^2}{2} + f_{xxx}(0, 0)\frac{x^3}{6} + f_{xx\alpha}(0, 0)\frac{x^2\alpha}{2} + f_{x\alpha\alpha}(0, 0)\frac{x\alpha^2}{2} + \\ & + f_{\alpha\alpha\alpha}(0, 0)\frac{\alpha^3}{2} + O(|(x, \alpha)|^4) \end{aligned} \quad (8.4)$$

Pelo fato de f ser uma função ímpar em x , tem-se:

$$f(0, 0) = f_\alpha(0, 0) = f_{xx}(0, 0) = f_{\alpha\alpha}(0, 0) = f_{xx\alpha}(0, 0) = f_{\alpha\alpha\alpha}(0, 0) = 0$$

Pela não hiperbolicidade de $(0, 0)$, tem-se $f_x(0, 0) = 0$, logo a equação (8.4) se reduz a

$$\begin{aligned} f(x, \alpha) = & f_{x\alpha}(0, 0)x\alpha + f_{xxx}(0, 0)\frac{x^3}{6} + f_{x\alpha\alpha}(0, 0)\frac{x\alpha^2}{2} + O(|(x, \alpha)|^4) \\ & [f_{x\alpha}(0, 0)x\alpha + O(\alpha^2)] + f_{xxx}(0, 0)\frac{x^3}{6} + O(|(x, \alpha)|^4) \end{aligned} \quad (8.5)$$

Então com cálculos análogos aos feitos na bifurcação sela-nó, chegamos ao seguinte resultado(ver [6]):

Teorema 17. Forma topológica normal para bifurcação Forquilha. *Considere a equação*

$$\dot{x} = f(x, \alpha)$$

tal que a origem $(0, 0)$ seja um ponto de equilíbrio não hiperbólico. Suponha também que f seja ímpar na variável x todo α perto de 0, ou seja,

$$f(-x, \alpha) = -f(x, \alpha)$$

e

$$f_{x\alpha}(0, 0) \neq 0 \quad f_{xxx}(0, 0) \neq 0$$

então perto da origem $(0, 0)$, o sistema é localmente topologicamente equivalente a uma das seguintes formas normais:

$$\dot{x} = x(\pm\mu - x^2)$$

Conclusão

Na primeira parte dessa dissertação, foi estudado o sistema de equações diferenciais dado por (2.1) e suas duas modificações (3.1) e (4.1). As análises concluíram que, para valores muito altos ou muito baixos de velocidade de rotação, os três sistemas se comportam de maneiras parecidas em G_R , na verdade, eles são topologicamente equivalentes se $0 < \omega < 2(\sqrt{2} - 1)\frac{v}{R}$ ou $\omega > \frac{v}{R}$ em $G_R \setminus F$. Para valores intermediários de ω ocorrem bifurcações diferentes em (2.1) e em (4.1) e não ocorre bifurcação em (3.1). A bifurcação em (2.1) não afeta a característica atratora do ponto de equilíbrio na região $G_R \setminus F$, já em (4.1) surgem dois pontos singulares atratores das órbitas em G_R de modo que, restrito a $G_R \setminus F$ os sistemas (2.1) e (3.2) continuam topologicamente equivalentes, mas (4.1) não. A última modificação do problema dos platelmintos com o acréscimo da velocidade radial mostra a possibilidade de haver órbita periódica no retrato de fase devido a bifurcação de Bogdanov-Takens para certos valores dos parâmetros, porém fora do disco G_R . Por último é analisado um critério de inexistência de órbitas periódicas que pode ser útil quando o teste da divergência de Bendixson é inconcluso.

Referências Bibliográficas

- [1] J. Carr, *Applications of centre manifold theory*, Sprignger-Verlag, New York 1981.
- [2] C. Chicone, *Ordinary Differential equations with applications*, Springer-Verlag, New York 1999.
- [3] R. A. Garcia, *Criterion for absence of periodic orbits*, 2008.
- [4] Y.A. Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theorhy-2^aed.*, Springer-Verlag, New York 1998.
- [5] A. Montesinos, <http://www.uv.es/montesin>, Universidade de Valência, Espanha.
- [6] A. Panfilov, *Non-linear dynamical systems*, Utrecht University, Utrecht, 2001.
- [7] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [8] R. Roussarie, *Bifurcations of planar vector fields and Hilbert's sixteenth problem*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1998.
- [9] J. Sotomayor -*On the motion under focal attraction in a rotating medium*, www.arXiv.org: 0801.4500, 2008.
- [10] J. Sotomayor, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA -CNPq, Rio de Janeiro, 1979.
- [11] H.K. Wilson, *Ordinary Differencial Equations*, Addison - Wesley, 1971.