

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DIÓSCOROS BRITO AGUIAR JÚNIOR

Tempo de Sobrevivência em um Modelo Estocástico para Evolução de Espécies

Goiânia
2014

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: ☒ Dissertação ☐ Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a): Dióscoros Brito Aguiar Júnior			
E-mail: dioscorosjunior@gmail.com			
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? ☒ Sim ☐ Não			
Vínculo empregatício do autor		Professor Substituto Pela UFG/IME	
Agência de fomento:		Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior	Sigla: CAPES
País:	Brasil	UF:GO	CNPJ: 33654831-0001/36
Título: Tempo de Sobrevivência em um Modelo Estocástico para Evolução de Espécies			
Palavras-chave: Modelo de Sobrevivência, Evolução, Cadeia de Nascimento e Morte			
Título em outra língua: Survival Time in a Stochastic Model for Species Evolution			
Palavras-chave em outra língua: Death and Birth Chains, Survival Model, Evolution			
Área de concentração:		Análise	
Data defesa: (dd/mm/aaaa)		27/02/2014	
Programa de Pós-Graduação:		Mestrado em Matemática	
Orientador (a): Valdivino Vargas Júnior			
E-mail:		vvjunior@ufg.br	
Co-orientador (a):*			
E-mail:			

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM ☐ NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Dióscoros Brito Aguiar Júnior
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 28 / 02 / 2014.

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

DIÓSCOROS BRITO AGUIAR JÚNIOR

Tempo de Sobrevivência em um Modelo Estocástico para Evolução de Espécies

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Programa de Pós-Graduação de Matemática da UFG.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Valdivino Vargas Júnior

Goiânia
2014

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
GPT/BC/UFG**

A282t Aguiar Júnior, Dióscoros Brito.
Tempo de Sobrevivência em um Modelo Estocástico
para Evolução de Espécies [manuscrito] / Dióscoros Brito
Aguiar Júnior. - 2014.
58 f. : il., figs.

Orientador: Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2014.
Bibliografia.

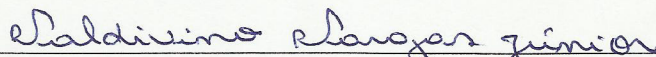
1. Evolução (espécies) – Modelos estocásticos
2. Evolução (espécies) – Nascimento e morte 3. Cadeia de
Nascimento e morte. I. Título.

CDU: 575.82

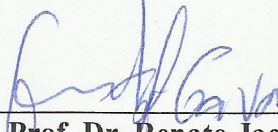
DIÓSCOROS BRITO AGUIAR JÚNIOR

**TEMPO DE SOBREVIVÊNCIA EM UM MODELO
ESTOCÁSTICO PARA EVOLUÇÃO DE ESPÉCIES**

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 27 de fevereiro de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Renato Jacob Gava
Departamento de Estatística - UFSCar



Prof. Dr. Tatiane Ferreira do Nascimento Melo da Silva
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Dióscoros Brito Aguiar Júnior

Graduou-se em Matemática na UFG - Universidade Federal de Goiás. Durante sua graduação, foi monitor no Instituto de Matemática e Estatística da UFG e durante seu mestrado, foi bolsista de produtividade da CAPES.

A minha família e amigos.

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que fizeram parte deste projeto pessoal. A minha família, que sempre esteve ao meu lado nas horas fáceis e difíceis, aos meus amigos, em particular, Bruno, Cid, Dassael, Marcos Túlio, Thiago, John, Mônica, Lucas, Adriana, Mailine, Pedro, Ricardo, Felipe, Navarro e Helen, estes que acompanharam de perto a minha trajetória nestes dois anos de mestrado. Agradeço também ao meu orientador, Valdivino, sempre disposto pra me ajudar e de bom humor. Agradeço também a todas as pessoas da UFG que me ajudaram desde a graduação para que eu chegasse a este ponto, e por último, a CAPES, o órgão que me deu o suporte financeiro necessário para um bom desenvolvimento do trabalho.

Born to Lose. Live to Win.

Ian Fraiser "Lemmy" Kilmister,
Motörhead.

Resumo

Aguiar Jr., Dióscoros Brito. **Tempo de Sobrevivência em um Modelo Estocástico para Evolução de Espécies**. Goiânia, 2014. 58p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho, vamos considerar dois modelos estocásticos para evolução de espécies. No primeiro, nascimentos e mortes ocorrem com probabilidades constantes. Cada espécie nova é associada a uma aptidão que provém de uma distribuição uniforme em $[0,1]$. Toda vez que ocorre um evento de morte, a espécie que morre é a que tem a menor aptidão. Mostraremos que existe uma rápida transição de fase quando a probabilidade de nascimento é maior do que a probabilidade de morte. O conjunto de espécies com aptidão maior que uma aptidão crítica se aproxima de uma distribuição uniforme. Por outro lado, todas as espécies com a aptidão menor que a crítica desaparecem após um tempo aleatório finito. No segundo modelo, uma nova espécie nasce com taxa λ e morre com taxa μ . Um número aleatório, oriundo de uma distribuição dada F , é associada com cada nova espécie e é assumida como sua aptidão, no seu instante de nascimento. Da mesma maneira do primeiro modelo, toda vez que ocorre um evento de morte, a espécie que morre é a que tem a menor aptidão. Iremos considerar o tempo de sobrevivência (aleatório) de uma espécie com uma aptidão dada f . Iremos mostrar que a distribuição do tempo de sobrevivência depende crucialmente de quando $f < f_c$, $f = f_c$ ou $f > f_c$, onde f_c é uma aptidão crítica calculada explicitamente.

Palavras-chave

Modelo de Sobrevivência, Evolução, Cadeia de Nascimento e Morte

Abstract

Aguiar Jr., Dióscoros Brito. **Survival time in a Stochastic Model for species evolution**. Goiânia, 2014. 58p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work, we will consider two stochastic models for evolution of species. First, births and deaths of species occur with constant probabilities. Each new species is associated with a fitness sampled from the uniform distribution on $[0,1]$. Every time there is a death event then the type is killed is the one with smallest fitness. We show that there is a sharp phase transition when the probability is larger than the death probability. The set of species with fitness higher than a certain critical value approach an uniform distribution. On the other hand all the species with fitness less than the critical disappear after a finite (random) time. The second model, we consider a stochastic model for species evolution. A new species is born at rate λ and a species dies at rate μ . A random number, sampled from a given distribution F , is associated with each new species and assumed as its fitness, at the time of birth. Likewise the first model, every time there is a death event, the species that is killed is the one with the smallest fitness. We consider the (random) survival time of a species with a given fitness f . We show that the survival time distribution depends crucially on whether $f < f_c$, $f = f_c$ or $f > f_c$ where f_c is a critical fitness that is computed explicit.

Keywords

Death and Birth Chain, Survival Model, Evolution

Sumário

1	Introdução	10
2	Preliminares	12
2.1	Introdução	12
2.2	Processo de Poisson	13
2.2.1	Definições preliminares	13
2.2.2	Processo de contagem	13
2.2.3	O processo	14
2.2.4	Processos de Markov	14
2.3	Processo de Poisson em duas dimensões	15
2.3.1	Projeções	16
2.4	Passeios aleatórios	16
2.5	Cadeia de Markov a tempo contínuo	18
2.5.1	Estrutura de uma cadeia de Markov a tempo contínuo	18
2.5.2	Classificação de estados	18
2.6	Processo de nascimento e morte	19
3	Um modelo estocástico de evolução	21
3.1	Introdução	21
3.2	Resultados principais	22
4	Um link entre sobrevivência de espécies no tempo em um modelo de evolução e as distribuições de Bessel	28
4.1	Introdução	28
4.2	Resultados principais	29
4.3	Provas	32
4.3.1	Construção do processo	32
4.3.2	Um acoplamento útil	34
4.3.3	Prova do Teorema 4.1	35
4.3.4	Prova do corolário 4.2	39
4.3.5	Prova da proposição 4.3	40
5	Simulações	42
6	Conclusão	53
	Referências Bibliográficas	54
A	Apêndice	55

Introdução

Um modelo de evolução de espécies é uma formalização matemática para uma série de estudos do meio ambiente onde em geral, se estuda a sobrevivência e morte de espécies, que nas palavras de Darwin, é a seleção natural das espécies que se adaptam melhor ao meio ambiente.

Os artigos a seguir provém basicamente do modelo de Bak-Sneppen([2]), um modelo proposto em 1993, onde um número fixo (N) de espécies, distribuídas em um círculo, cujas aptidões associadas provém de uma distribuição uniforme em $[0,1]$. A aptidão de uma espécie é um número aleatório associado a cada espécie no sentido que esta denota o quão a espécie é forte. Além disso, em cada tempo discreto, dentre o número fixo de espécies, a espécie que tiver a menor aptidão morre e além disso, as espécies vizinhas a esta (que estão imediatamente a esquerda e a direita) são trocadas por espécies cujas aptidões são de mesma distribuição das aptidões originais.

Tal modelo foi bastante difundido na sociedade matemática e inúmeros modelos de evolução provém deste. O primeiro texto a ser abordado é baseado neste, mas com diferenças significativas, como o número de espécies não sendo fixa e não havendo uma interação entre as espécies vizinhas que tem a menor aptidão, apenas a espécie que tem a menor aptidão morre, sem reposição.

Entretanto, as espécies que tem a aptidão entre $(f_c, 1)$, onde f_c é um valor crítico, tem uma distribuição assintótica uniforme, e espera-se que ocorra o mesmo comportamento no modelo de Bak-Sneppen ainda que não tenha sido provado.

O segundo texto, é uma continuação do primeiro, pois é um modelo mais completo, em tempo contínuo e além disso, usa-se o primeiro texto para provar uma proposição particular deste.

Este texto foi organizado em ordem cronológica. O primeiro artigo, *A Stochastic Model of Evolution*([8]), produzido por Guiol, H., Machado, F., Schinazi, R. é um modelo de sobrevivência que ocorre em tempo discreto. Faremos uma abordagem no Capítulo 3

O segundo texto, *On A Link Between A Species Survival Time In An Evolution Model And The Bessel Distributions*([9]), produzido por Guiol, H., Machado, F., Schi-

nazi, R . é um modelo de sobrevivência que ocorre em tempo contínuo. Faremos uma abordagem no Capítulo 4.

No capítulo 5, temos algumas simulações dos modelos acima, onde vemos que os resultados teóricos são compatíveis com os resultados obtidos nas simulações.

Preliminares

2.1 Introdução

Os resultados enunciados são encontrados em ([7],[15],[6],[14],[3],[11]).

Considere uma aplicação que associa a cada $\omega \in \Omega$ uma função real de um parâmetro t pertencente a um conjunto τ (em geral, associado ao tempo). Cria-se desta maneira uma família F de funções de t , $t \in \tau$. Este mapeamento chama-se processo estocástico. Em outras palavras, um processo estocástico é uma aplicação definida por

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow F \\ \omega &\mapsto X(t, \omega), \quad t \in \tau \end{aligned}$$

Pensando assim, um processo estocástico é uma função de duas variáveis ω e t , cujos domínios são Ω e $\mathbb{R}$, respectivamente. Cada função pertencente a família F é uma realização do processo estocástico. Formalizando :

Definição 1 *Um processo estocástico $X = \{X(t), t \in \tau\}$ é uma coleção de variáveis aleatórias. Isto é, para cada $t \in \tau$, $X(t)$ é uma variável aleatória. Frequentemente, t é interpretado como tempo e $X(t)$, nesse caso, é o estado do processo no tempo t . Se τ é um conjunto enumerável, X é um processo estocástico a tempo discreto. Se τ é um conjunto não enumerável, nós chamamos o processo de processo estocástico a tempo contínuo.*

Observação 1 *Da definição acima segue:*

i) *Interpretando t como o tempo e $X(t)$ como estado do processo definimos E como o conjunto de todos os estados possíveis do processo. E é chamado espaço de estados.*

ii) *Um processo estocástico a tempo discreto é também chamado sequência aleatória e é denotada por $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$.*

Exemplo 1 Seja $X(t)$ o número de eventos que ocorrem em $[0, t]$. $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ é um processo estocástico a tempo contínuo.

Exemplo 2 Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ e $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p, \forall n$. Defina

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, n = 1, 2, \dots \text{ e } S_0 = 0.$$

A coleção de variáveis aleatórias $S = \{S_n, n \geq 0\}$ é um processo estocástico chamado passeio aleatório simples em uma dimensão.

2.2 Processo de Poisson

2.2.1 Definições preliminares

Suponha que um experimento se inicia no tempo $t = 0$. Eventos de um tipo particular ocorrem aleatoriamente, a primeira ocorrência acontece no instante T_1 , a segunda no instante T_2 e assim por diante. A variável aleatória T_i denota o instante de tempo da i^{a} ocorrência do evento, e os valores t_i de T_i ($i = 1, 2, \dots$) são chamados pontos de ocorrência.

Sejam $Z_n = T_n - T_{n-1}$ e $T_0 = 0$.

A variável Z_n denota o tempo entre a $(n-1)^{\text{a}}$ ocorrência e a n^{a} ocorrência do evento. A sequência de variáveis aleatórias $\{Z_n, n \geq 1\}$ ordenadas é chamada processo entre chegadas. Em particular, se todas as variáveis aleatórias Z_n são identicamente distribuídas e independentes, então Z_n é chamado processo de renovação ou processo recorrente.

Note que $T_n = Z_1 + \dots + Z_n$ onde T_n denota o tempo até a ocorrência do n^{o} evento. A sequência $\{T_n, n \geq 0\}$ é chamada processo de chegada.

2.2.2 Processo de contagem

Um processo aleatório $\{X(t), t \geq 0\}$ é chamado processo de contagem se $X(t)$ representa o número total de eventos que ocorreram em $[0, t]$.

Um processo de contagem $X(t)$ satisfaz as seguintes condições :

- i) $X(t) \geq 0$ e $X(0) = 0$.
- ii) $X(t)$ é valor inteiro.
- iii) $X(s) \leq X(t)$ se $s < t$.
- iv) $X(t) - X(s)$ é igual ao número de eventos que ocorreram em $(s, t]$.

2.2.3 O processo

Definição 2 Uma função g é dita ser $o(h)$ se é uma função de h que vai para zero mais rápido que h , isto é,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0.$$

Observação 2 $o(h)$ satisfaz as identidades

- i) $o(h) + o(h) = o(h)$,
- ii) $ao(h) = o(h)$ para toda constante a .

Definição 3 Um processo de contagem $\{X(t), t \geq 0\}$ é dito ser um processo de Poisson com taxa $\lambda, \lambda > 0$ se

- i) $X(0) = 0$,
- ii) $X(t)$ tem incrementos estacionários e independentes,
- iii) $\mathbb{P}(X(h) = 1) = \lambda h + o(h)$,
- iv) $\mathbb{P}(X(h) \geq 2) = o(h)$.

Observação 3 Das condições iii) e iv)

$$\mathbb{P}(X(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h).$$

Ou seja, a probabilidade de nenhum evento ocorrer em qualquer intervalo pequeno aproxima-se 1 quando a duração do intervalo aproxima-se de zero.

Definição 4 Um processo de contagem $\{X(t), t \geq 0\}$ é dito ser um processo de Poisson com taxa $\lambda, \lambda > 0$ se

- i) $X(0) = 0$,
- ii) $X(t)$ tem incrementos independentes,
- iii) O número de eventos em qualquer intervalo de comprimento t tem distribuição de Poisson com média λt , isto é, para todo $s, t > 0$,

$$\mathbb{P}(X(t+s) - X(s) = n) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Temos que as definições 3 e 4 são equivalentes.

2.2.4 Processos de Markov

Definição 5 Um processo aleatório $\{X(t), t \in \tau\}$ é dito ser um processo de Markov se

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X(t_{n+1}) \leq x_{n+1} | X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_n) = x_n] \\ = \mathbb{P}[X(t_{n+1}) \leq x_{n+1} | X(t_n) = x_n] \end{aligned} \quad (2-1)$$

para qualquer escolha de $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$.

Em particular, se $\{X(t), t \in \tau\}$ é um processo com espaço de estados discretos temos uma cadeia de Markov.

Uma cadeia de Markov a tempo discreto $\{X_n, n \geq 0\}$ é um processo estocástico $\{x_n, n \geq 0\}$ que satisfaz

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i_n). \quad (2-2)$$

para qualquer escolha de estados $i_0, i_1, \dots, i_n, j$.

As equações acima são chamadas propriedades de perda de memória.

2.3 Processo de Poisson em duas dimensões

Vamos construir um conjunto aleatório em $\mathbb{R}^2$. Vamos começar com uma partição de $\mathbb{R}^2$ em retângulos finitos. Denote por $|A_i|$ a área de A_i . Nós temos

$$\bigcup_{i \in \mathbb{Z}}^\bullet A_i = \mathbb{R},$$

onde $\bigcup^\bullet$ significa união disjunta.

Para cada i , seja Y_i uma variável aleatória de Poisson com esperança $\lambda|A_i|$. Isto é,

$$\mathbb{P}(Y_i = k) = \frac{e^{-\lambda|A_i|} (\lambda|A_i|)^k}{k!}.$$

Assuma que as variáveis aleatórias definidas acima, são independentes. Finalmente, para cada i considere uma sequência de variáveis aleatórias independentes $(U_{i,j})_{j \geq 1}$ uniformemente distribuídas em A_i

$$\mathbb{P}(U_{i,j} \in (A \cap A_i)) = \frac{|A \cap A_i|}{|A_i|}.$$

O conjunto aleatório de interesse é :

$$S = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \bigcup_{j=1}^{Y_i} \{U_{i,j}\},$$

onde usamos a convenção $\bigcup_{j=1}^0 \{U_{i,j}\} = \emptyset$. Em outras palavras, colocamos Y_i pontos independentes uniformemente distribuídos nos retângulos A_i .

Definição 6 Para cada conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^2$, defina $M(A)$ sendo o número de pontos do conjunto $S \cap A$.

2.3.1 Projeções

Suponha que a medida aleatória $M(\bullet)$ descreva o processo bidimensional de parâmetro 1. Agora iremos construir um processo unidimensional de Poisson de parâmetro λ como função de $M(\bullet)$. Para cada intervalo $I \subset \mathbb{R}$ definimos

$$N(I) = M(I \times [0, \lambda]).$$

Em palavras, o número de pontos de $N(\bullet)$ no intervalo I será o mesmo que o número de pontos no retângulo $I \times [0, \lambda]$ para $M(\bullet)$. É a mesma coisa quando se projeta os pontos da faixa $\mathbb{R} \times [0, \lambda]$ em $\mathbb{R}$.

Algumas propriedades :

- i) O processo $N(\bullet)$ definido acima é um processo unidimensional de parâmetro λ .
- ii) Seja I um intervalo finito. O evento "Dois pontos do processo bidimensional são projetados sobre um único ponto de I " tem probabilidade zero.

2.4 Passeios aleatórios

Definição 7 Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que $E|X_i| < +\infty$. Seja $S_0 = c$ e

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1.$$

O processo $\{S_n, n \geq 0\}$ é chamado passeio aleatório. Em particular, se $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ e $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p = q$ temos um passeio aleatório simples.

Definição 8 Seja um passeio aleatório, onde $S_0 = i$. O tempo de primeira passagem é definido por

$$T_{i,k} = \min\{n > 0 : S_n = k\}.$$

Quando $i = k$, a variável aleatória $T_{k,k}$ é chamada tempo de recorrência de k . Neste caso, escrevemos simplesmente T_k .

Uma propriedade interessante do tempo de primeira passagem no caso de passeios aleatórios simples é que os passos após a primeira passagem em k é independente das passagens anteriores.

Definição 9 Sejam $X_1, X_2, \dots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes. Uma variável aleatória N é dita tempo de parada para esta sequência se o evento $\{N = n\}$ é independente de $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$ para todo $n=1, 2, \dots$

Teorema 2.1 (*Equação de Wald*) Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (v.a.i.i.d.), tais que $E|X_i| < +\infty$ e N um tempo de parada para $X_1, X_2, \dots$ com $E|N| < +\infty$. Então

$$E \left[\sum_{i=1}^N X_i \right] = E[N]E[X_1].$$

Prova. Ver ([15]). □

A partir dessas definições, chegamos aos seguintes resultados:

Teorema 2.2 Seja S_n o passeio aleatório simples apresentado na Definição 7. A distribuição de S_n é dada por :

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}, & \text{se } n+k \text{ for par;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prova. Ver ([7]). □

Teorema 2.3 (*Princípio da Dualidade*) Seja S_n o passeio aleatório simples apresentado na Definição 7. Então $(X_1, \dots, X_n)$ tem a mesma distribuição conjunta de $(X_n, X_{n-1}, \dots, X_1)$.

Prova. Ver ([7]). □

Teorema 2.4 (*Princípio de Reflexão*) Seja S_n o passeio aleatório simples apresentado na Definição 7. Se x e y são positivos então o número de realizações de $(0, x)$ para (n, y) que tocam o eixo x é igual ao número de realizações de $(0, -x)$ para (n, y) .

Prova. Ver ([7]). □

Teorema 2.5 (*Teorema do Primeiro acerto*) Seja S_n o passeio aleatório simples apresentado na Definição 7. Suponha $S_0 = 0$. Tome $b > 0$. Então:

$$\mathbb{P}(T_{0,b} = n) = \frac{b}{n} \mathbb{P}(S_n = b)$$

Prova. Ver ([7]). □

2.5 Cadeia de Markov a tempo contínuo

Definição 10 Considere um processo estocástico a tempo contínuo $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ com espaço de estados E finito ou enumerável. X é uma cadeia de Markov a tempo contínuo se e somente se

$$\mathbb{P}[X_{t+s} = j | X_s = i, X_u = x_u, 0 \leq u < s] = \mathbb{P}[X_{t+s} = j | X_s = i].$$

Além disso, se a probabilidade de transição entre dois estados depende somente do intervalo de tempo no qual ocorre a transição e não dos instantes de tempo nos quais a cadeia ocupa estes estados, isto é,

$$\mathbb{P}[X_{t+s} = j | X_s = i] = P_{i,j}(t),$$

então esta cadeia de Markov é homogênea.

2.5.1 Estrutura de uma cadeia de Markov a tempo contínuo

Definição 11 Para uma Cadeia de Markov a tempo contínuo defina

$$\omega_t(w) = \inf\{s \geq 0, \text{ tal que } X_{t+s}(w) \neq X_t(w)\}.$$

ω_t é o período de tempo que a cadeia permanece no estado que ela ocupa no instante t .

2.5.2 Classificação de estados

- i) i será chamado de estado instantâneo se $\mathbb{P}(\omega_t = 0 | X_t = i) = 1$. Neste caso a cadeia fica no estado i somente no instante em que ela chegou.
- ii) i será chamado de estado absorvente se $\mathbb{P}(\omega_t < \infty | X_t = i) = 0$. Neste caso, a cadeia permanece em i para sempre.
- iii) i será chamado de estado estável se $\mathbb{P}(0 < \omega_t < \infty | X_t = i) = 1$.

Toda vez que a cadeia chega num estado estável, ela fica nele um período de tempo finito.

Teorema 2.6 Seja $\{X_t\}_{t \geq 0}$ uma cadeia sem estados instantâneos. Para todo $i \in E$ e todo $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(\omega_t > u | X_t = i) = e^{-q_i u}, \quad u \geq 0$$

para algum número $q_i \in [0, +\infty)$.

Seja $\{X_t\}_{t \geq 0}$ uma cadeia com estados estáveis. Defina T_n = instante de tempo no qual a cadeia muda de estado pela n^{a} vez. Escreva $T_0 = 0$ por conveniência. Temos:

- i) $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_n < \dots$
- ii) Denotando por Y_n o estado visitado pela cadeia na n^{a} transição que ela faz

$$X_t = Y_n, T_n \leq t < T_{n+1}.$$

Nesse caso :

- a) Y_0 é o estado inicial
- b) $\omega_0 = T_1$,
- c) $T_1 | [Y_0 = i]$ tem uma distribuição exponencial de parâmetro q_i ,
- d) $T_{n+1} = T_n + \omega_{T_n}$,
- e) $T_{n+1} - T_n | [Y_n = i]$ tem uma distribuição exponencial de parâmetro q_i .

2.6 Processo de nascimento e morte

Uma cadeia de Markov a tempo contínuo com estados $0, 1, 2, \dots$ para a qual

$$P_{i,j}(t) = 0, \text{ se } |i - j| > 1$$

é chamada processo de nascimento e morte. Em outras palavras, um processo de nascimento e morte é uma cadeia de Markov a tempo contínuo com estados $0, 1, 2, \dots$ para a qual as transições do estado i ocorrem apenas para o estado $i + 1$ ou para o estado $i - 1$. O estado do processo é usualmente visto como o tamanho de alguma população e incrementar 1 significa ocorrer um nascimento e diminuir 1 significa ocorrer uma morte. Seja λ_i e μ_i dados por

$$\lambda_i = q_{i,i+1},$$

$$\mu_i = q_{i,i-1}.$$

Os valores $\{\lambda_i, i \geq 0\}$ e $\{\mu_i, i \geq 1\}$ são chamados de taxas de nascimento e taxas de morte, respectivamente.

Agora, vamos enunciar alguns resultados de análise que serão usados no decorrer do texto.

Teorema 2.7 (Teorema de Fubini-Tonelli) *Seja $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que as integrais abaixo converjam*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)| dx dy \text{ e } \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)| dy dx$$

Então, as integrais iteradas de f convergem e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy dx$$

Prova. Ver ([3]).

□

Corolário 2.8 *Se as funções $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são não-negativas $\forall n, x$, então*

$$\sum \int f_n(x) dx = \int \sum f_n(x) dx$$

Prova. Ver ([3]).

□

Teorema 2.9 (Derivação termo a termo) *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções deriváveis no intervalo $[a,b]$. Se para um certo $c \in [a,b]$, a sequência numérica $\{f_n(c)\}$ converge e se as derivadas f'_n convergem uniformemente em $[a,b]$ para uma função g , então $\{f_n\}$ converge uniformemente em $[a,b]$ para uma função derivável f , tal que $f' = g$.*

Prova. Ver ([11]).

□

Corolário 2.10 (Derivação termo a termo para séries) *Se a série $\sum f_k$, de aplicações deriváveis $f_k : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, converge em um ponto $c \in [a,b]$ e a série $\sum f'_k$ das derivadas converge de modo localmente uniforme em $[a,b]$, para a soma $g = \sum f'_k$, então tem-se convergência localmente uniforme $f = \sum f_k$ em $[a,b]$, a soma $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e $f' = g$.*

Prova. Ver ([11]).

□

O teste a seguir é uma boa forma de mostrar que uma série de funções converge uniformemente.

Proposição 2.11 (Teste de Weierstrass) *Se para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada $x \in [a,b]$, tem-se $|f_k(x)| \leq c_k$, onde $\sum c_k$ é uma série convergente de números reais positivos, então a série $\sum f_k$, cujos termos são aplicações $f_k : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, converge uniformemente em $\mathbb{R}$.*

Prova. Ver ([11]).

□

Um modelo estocástico de evolução

3.1 Introdução

Este artigo foi produzido originalmente por ([8])Guiol, H.; Machado, F.; Schinazi, R..

Considere um modelo a tempo discreto que começa do conjunto vazio. Ou seja, para cada instante $n \geq 1$, com probabilidade p temos um nascimento de uma nova espécie e com probabilidade $q = 1 - p$ temos a morte de uma espécie (se o sistema não estiver vazio). Assim, o número total de espécies vivas no tempo n é um passeio aleatório sobre os números inteiros positivos, onde cada salto ocorre para a direita com probabilidade p e para esquerda com probabilidade q , salientando que os passos são de uma em uma unidade, tanto para a direita quanto para a esquerda. Além disso, este passeio possui uma barreira em 0, ou seja, se o passeio estiver em 0, este se mantém em 0 com probabilidade q e vai para 1 com probabilidade p . Cada nova espécie é associada a um número aleatório. Este número provém de uma distribuição uniforme em $[0, 1]$. Além disso, tal número é associado a esta espécie como a aptidão da mesma, esta aptidão mede o quão forte é esta espécie no sistema. Estes números aleatórios são independentes entre si e de todo o resto do processo. Toda vez que ocorre um evento de morte, então a espécie que morre é a de menor aptidão.

Tome $p \in (\frac{1}{2}, 1)$ e defina

$$f_c := \frac{1-p}{p}.$$

Temos $f_c \in (0, 1)$. Sejam L_n e R_n os conjuntos de espécies vivas no tempo n cujas aptidões são menores e maiores que f_c , respectivamente. Como cada aptidão aparece no máximo uma vez quase certamente, podemos identificar cada espécie com sua aptidão e pensar em L_n e R_n como conjunto de pontos em $(0, f_c)$ e $(f_c, 1)$, respectivamente. Seja $|A|$ o número de elementos do conjunto A . Além disso, considere a seguinte definição:

Definição 12 *Em uma cadeia de Markov, um estado i é recorrente nulo se a probabilidade desta cadeia retornar ao estado i , dado que ela começou por i for 1, porém sendo o*

tempo esperado desta passagem infinito.

Agora estamos em condições de enunciar os principais resultados deste capítulo.

3.2 Resultados principais

Teorema 3.1 *Assuma que $p > \frac{1}{2}$. Tome $f_c = \frac{1-p}{p}$.*

- a) *O número $|L_n|$ de espécies cujas aptidões são menores que f_c é uma cadeia de nascimento e morte recorrente nula. Em particular, o conjunto L_n é vazio infinitas vezes com probabilidade um.*
- b) *Tome $f_c < a < b < 1$, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |R_n \cap (a, b)| = p(b-a) q.c.$$

Em palavras, temos uma transição de fase na aptidão f_c . Nenhuma espécie com aptidão inferior a f_c pode sobreviver para sempre. Por outro lado, as aptidões são assintoticamente uniformemente distribuídas em $(f_c, 1)$.

Temos que quanto maior for o valor p , mais receptivo a novas espécies será o meio ambiente. Se p está próximo de 0.5, então f_c está próximo de 1 e assim, apenas espécies com aptidões elevadas irão sobreviver. Por outro lado, se p está próximo de 1, então f_c está próximo de 0 e assim, até as espécies com aptidões relativamente pequenas podem sobreviver.

- a) A prova do Teorema 3.1 a) decorre diretamente da seguinte proposição (ver [16]):

Proposição 1 *Uma cadeia de nascimento e morte é recorrente nula se e somente se*

$$\sum_{k \geq 1} \frac{q_k q_{k-1} \dots q_1}{p_k p_{k-1} \dots p_1} = +\infty \text{ e } \sum_{i \geq 1} \frac{p_{i-1} p_{i-2} \dots p_0}{q_i q_{i-1} \dots q_1} = +\infty,$$

onde $p_i = p(i, i+1)$ e $q_i = q(i, i-1)$ são as probabilidades da cadeia ir do estado i para $i+1$, e de i para $i-1$ respectivamente.

Prova. Temos que a cadeia $|L_n|$ aumenta uma unidade com probabilidade pf_c e decresce uma unidade com probabilidade $1-p$. Temos que $pf_c = p \frac{1-p}{p} = 1-p$. Portanto

$$q_i = 1-p \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

$$p_i = 1-p \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Logo, para esta cadeia os somatórios acima divergem e assim, $|L_n|$ é uma cadeia de nascimento e morte recorrente nula. $\square$

b)

Prova. Seja t_n o número de vezes $k \leq n$ para o qual L_k é vazio. Isto é,

$$t_n = |\{1 \leq k \leq n : L_k = \emptyset\}|.$$

Vamos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, $t_n < n^{0.5+\varepsilon}$ q.c. para n suficientemente grande. O passo principal provém do seguinte Lema.

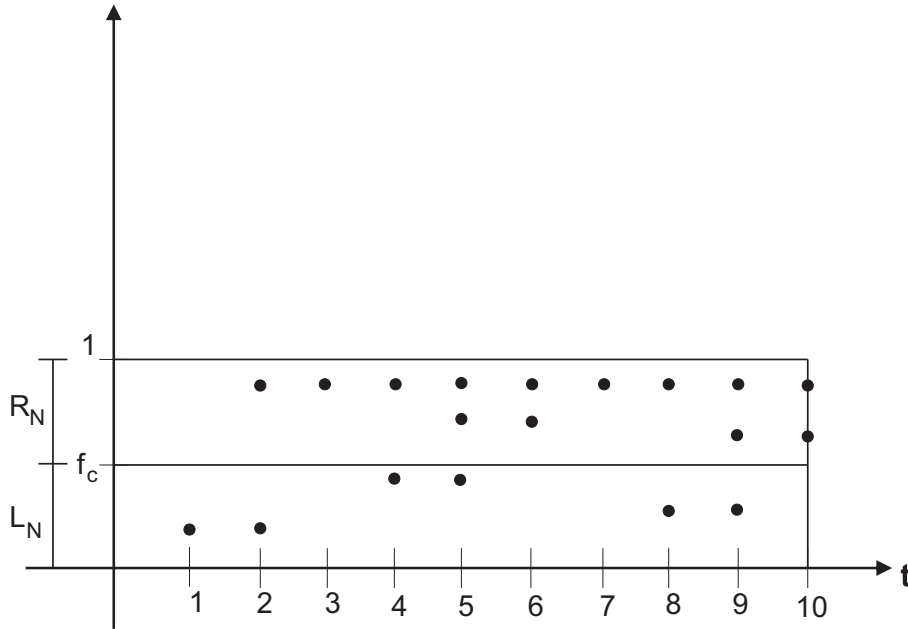


Figura 3.1: Um exemplo de realização do processo, onde em $n=10$, temos $t_{10} = 4$.

Lema 3.2 Existem constantes positivas α' e D tais que para todo $\varepsilon > 0$ temos

$$\mathbb{P}\left(t_n > \frac{2}{pf_c} n^{0.5+\varepsilon}\right) \leq D e^{-\alpha' n^\varepsilon}.$$

Prova do Lema:

Começamos do conjunto vazio. Se a primeira espécie aparece no tempo $t = k$, então temos $k - 1$ fracassos até aparecer o primeiro sucesso. Portanto, este tempo aleatório, denotado por G_0 , satisfaz uma distribuição geométrica cuja esperança é $\frac{1}{pf_c}$. Então:

$$G_0 = \min\{k \geq 1 : L_k \neq \emptyset\}.$$

Defina

$$E_1 = \min\{k \geq G_0 : L_k = \emptyset\}.$$

Assim, E_1 é o tempo que leva começando no tempo G_0 para $|L_n|$ retornar a 0. Geralmente, definimos para $i \geq 1$

$$G_i = \min\{k \geq G_0 + E_1 + \dots + G_{i-1} + E_i : L_k \neq \emptyset\}$$

e

$$E_{i+1} = \min\{k \geq G_0 + E_1 + \dots + E_i + G_i : L_k = \emptyset\}.$$

Note que $(G_i)_{i \geq 0}$ e $(E_i)_{i \geq 1}$ são duas sequências de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Além disso, G_i segue uma distribuição geométrica com esperança $\frac{1}{pf_c}$. Seja k_n o número de vezes que L_k atinge o conjunto vazio até o tempo n :

$$k_n = |\{2 \leq k \leq n : |L_{k-1}| = 1 \text{ e } |L_k| = 0\}|.$$

Isto é, k_n conta o número de vezes que L_k vai de uma para nenhuma espécie, com $k \leq n$. Note que se $k_n = 0$, então $t_n \leq G_0$. Seja $C = \frac{2}{pf_c}$. Agora computamos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(t_n > Cn^{0.5+\varepsilon}) &\leq \mathbb{P}(t_n > Cn^{0.5+\varepsilon}; k_n < n^{0.5+\varepsilon}) + \mathbb{P}(t_n > Cn^{0.5+\varepsilon}; k_n \geq n^{0.5+\varepsilon}) \\ &\leq \mathbb{P}(t_n > Cn^{0.5+\varepsilon}; k_n < n^{0.5+\varepsilon}) + \mathbb{P}(k_n \geq n^{0.5+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Para $k_n \geq 1$, temos

$$G_0 + G_1 + \dots + G_{k_n-1} \leq t_n \leq G_0 + \dots + G_{k_n} \quad (3-1)$$

e para $k_n = 0$, temos $t_n \leq G_0$. Assim

$$\mathbb{P}(t_n > Cn^{0.5+\varepsilon}; k_n < n^{0.5+\varepsilon}) \leq \mathbb{P}(G_0 + G_1 + \dots + G_{m_n} > Cn^{0.5+\varepsilon}),$$

onde m_n é a parte inteira de $n^{0.5+\varepsilon}$. A desigualdade acima faz sentido, pois se $k_n < n^{0.5+\varepsilon}$, temos $k_n = j$, para algum $j = 1, \dots, m_n$. Da desigualdade (3-1), temos

$$\{t_n > Cn^{0.5+\varepsilon}; k_n < n^{0.5+\varepsilon}\} \subset \{G_0 + G_1 + \dots + G_j > Cn^{0.5+\varepsilon}\}$$

$$\subset \{G_0 + G_1 + \dots + G_{m_n} > Cn^{0.5+\varepsilon}\}.$$

Agora, o valor esperado de $G_0 + G_1 + \dots + G_{m_n}$ é $\frac{m_n+1}{pf_c}$. Assim $G_1, \dots, G_n$ satisfaz as condições da Proposição (A.1), que implica (A-2). Então existe $\alpha > 0$ tal que

$$\mathbb{P}(G_0 + G_1 + \dots + G_{m_n} > Cn^{0.5+\varepsilon}) \leq e^{-\alpha m_n} \leq e^{-\alpha(n^{0.5+\varepsilon}-1)}. \quad (3-2)$$

Vamos trabalhar com o segundo termo da desigualdade. Note que as E_i são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, e que para $1 \leq i \leq k_n - 1$ todas são menores que n . De fato, suponha que $\{E_1 = n\}$, então $k_n = 0$, pois teríamos $G_0 + E_1 \geq n + 1$, isto é, a partir de G_0 , temos pelo menos uma espécie viva no sistema até o tempo n . Logo,

$$\mathbb{P}(k_n \geq n^{0.5+\varepsilon}) \leq \mathbb{P}(E_1 < n, E_2 < n, \dots, E_{m_n-1} < n) = \mathbb{P}(E_1 < n)^{m_n-1}.$$

Para estimar $P(E_1 < n)$, iremos comparar $|L_n|$ a um passeio aleatório simétrico simples W_n (onde o passeio salta uma unidade para a direita ou uma unidade a esquerda com probabilidade 0.5 a cada passo). Vamos construir W_n a partir de $|L_n|$ apagando os passos em que $|L_n|$ não muda. Se por exemplo, tivermos $|L_1| = |L_2| = 0$, $|L_3| = |L_4| = 1$ e $|L_5| = 2$ então definimos $W_1 = 0$, $W_2 = 1$ e $W_3 = 2$. Fazendo assim, construímos um passeio aleatório simétrico que visita os mesmos lugares (na mesma ordem) que $|L_n|$, mas em menos tempo. Assim, L_n leva mais tempo de 1 para 0 do que W_n . Seja T_0 o tempo que W_n leva para atingir 0. Temos

$$\mathbb{P}(k_n \geq n^{0.5+\varepsilon}) \leq \mathbb{P}(E_1 < n)^{m_n-1} \leq \mathbb{P}_1(T_0 < n)^{m_n-1}.$$

Temos que $\mathbb{P}_1(T_0 \geq n)$ é aproximadamente $\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi n}{2}}}$ (Capítulo 3, [5]). Assim, existem constantes α_1 e D_1 tais que

$$\mathbb{P}(k_n \geq n^{0.5+\varepsilon}) \leq \exp(\alpha_1 \frac{m_n-1}{n^{0.5}}) \leq D_1 \exp(-\alpha_1 n^\varepsilon). \quad (3-3)$$

Daí,

$$\mathbb{P}(k_n \geq n^{0.5+\varepsilon}) \leq e^{-\alpha_1 n^\varepsilon}. \quad (3-4)$$

De (3-2) e (3-4), temos:

$$D_1 e^{-\alpha_1 n^\varepsilon} + \frac{1}{e} e^{-\alpha n^\varepsilon} \leq 2 \max \left\{ \frac{1}{e}, D_1 \right\} e^{-\min\{\alpha, \alpha_1\} n^\varepsilon}.$$

Tomando $D = 2 \max\{\frac{1}{e}, D_1\}$ e $\alpha' = \min\{\alpha, \alpha_1\}$, obtemos o resultado desejado.

□

Com este lema em mãos, podemos terminar a prova da parte (b) do teorema. Seja N_n o número total de nascimentos no modelo até o tempo n . N_n tem distribuição binomial com parâmetros n e p . Seja $f_c < a < b < 1$, então

$$|R_n \cap (a, b)| \leq \sum_{i=1}^{N_n} 1_{(a,b)}(U_i),$$

onde $1_{(a,b)}$ é a função indicadora do conjunto (a, b) e $(U_i)_{i \geq 1}$ é a sequência de aptidões associadas aos nascimentos. Temos $U_i \sim \text{Uniforme}[0, 1]$ independentes entre si. Esta inequação nos diz que o número de pontos no conjunto (a, b) no tempo n é menor que o número de nascimentos que ocorreram até o tempo n no mesmo conjunto.

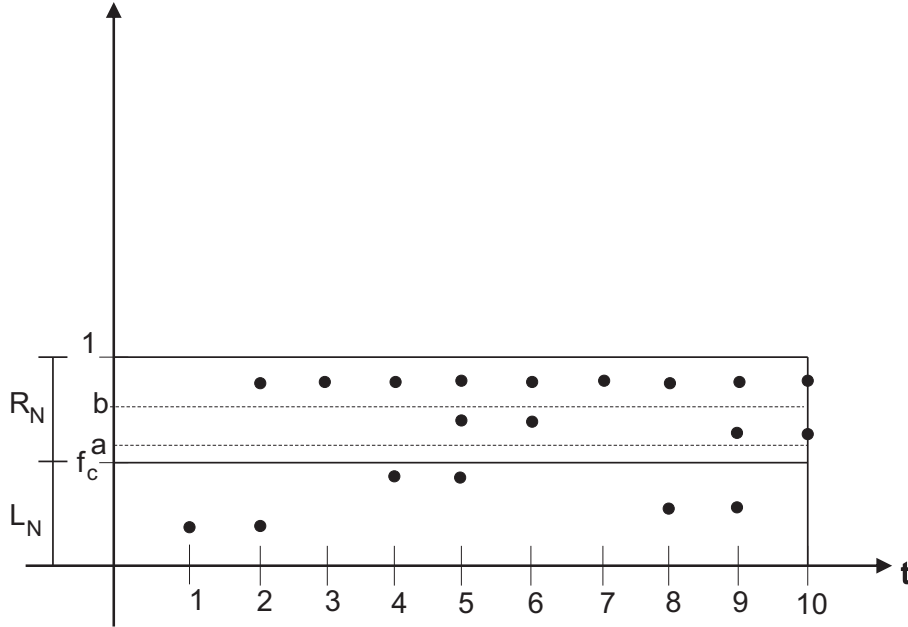


Figura 3.2: O mesmo exemplo da figura (3.1), com $k_{10} = 3$, $N_{10} = 6$ e $|R_{10} \cap (a, b)| = 1$.

Agora vamos limitar o número de mortes. Afirmamos que o número de mortes em $(f_c, 1)$ é no máximo t_n . Isto acontece por que podemos ter uma morte em $(f_c, 1)$ somente quando $(0, f_c)$ é vazio e t_n conta o número de vezes que isto acontece até o tempo n . Assim,

$$\sum_{i=1}^{N_n} 1_{(a,b)}(U_i) - t_n \leq |R_n \cap (a, b)| \leq \sum_{i=1}^{N_n} 1_{(a,b)}(U_i).$$

Pela Lei Forte dos Grandes Números (Teorema A.5, Apêndice):

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N_n} 1_{(a,b)}(U_i) = \frac{N_n}{n} \frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} 1_{(a,b)}(U_i)$$

converge quase certamente para $pE(1_{a,b}(U)) = p(b-a)$. Por outro lado, pelo Lema 3.2 e pelo Lema de Borel-Cantelli (Teorema A.3, Apêndice), existe quase certamente um natural N tal que $t_n \leq \frac{2}{pf_c} n^{0.5+\varepsilon}$ para $n \geq N$. Em particular, $\frac{t_n}{n}$ converge para 0 quase certamente (Proposição 2, Apêndice). Usando estes limites na desigualdade acima, concluímos que quase certamente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} |R_n \cap (a,b)| = p(b-a).$$

□

Um link entre sobrevivência de espécies no tempo em um modelo de evolução e as distribuições de Bessel

4.1 Introdução

Este artigo foi produzido originalmente por ([9]) Guiol, H.; Machado, F.; Schinazi, R..

Considere um modelo estocástico de evolução em espécies no qual espécies nascem com taxa λ e morrem com taxa μ . Um número aleatório, oriundo de uma distribuição F , é associado a cada nova espécie em seu instante de nascimento. Pensamos no número aleatório a uma dada espécie como sendo a aptidão da espécie. Estas aptidões são independentes entre si e de tudo o que acontece no processo. Toda vez que ocorre um evento de morte, a espécie que morre é a que tem a menor aptidão. Assumimos que F é uma função de distribuição absolutamente contínua. Vamos estudar o tempo de sobrevivência de um certo número de espécies iniciais com aptidão f . Mostraremos que existe uma aptidão f_c e uma transição de fase para o tempo de sobrevivência de espécies. Temos uma conexão forte entre este modelo e passeios aleatórios.

Definição 13 *F é uma função de distribuição absolutamente contínua se existe uma função de densidade φ em $\mathbb{R}$ tal que*

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(u) du.$$

Denote $Supp(F)$ a função suporte de F por:

$$Supp(F) = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) > 0\}.$$

O processo é iniciado com k espécies, com aptidões associadas $f_1 < \dots < f_k = f$, que estão em $Supp(F)$. Estas aptidões são independentes entre si e do resto do processo.

Denote por τ_f^k a variável aleatória que mede o tempo de sobrevivência destas k espécies neste contexto.

4.2 Resultados principais

Teorema 4.1 *O tempo de sobrevivência τ_f^k possui uma distribuição de Bessel :*

$$\mathbb{P}(\tau_f^k > t) = 1 - \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{k}{2}} \int_0^t e^{-(\mu+\lambda_f)u} \frac{k}{u} I_k(2\sqrt{\mu\lambda_f}u) du \quad (4-1)$$

com $\lambda_f := \lambda F(f) < \lambda$ e onde I_k é a função modificada de Bessel de primeira ordem com índice k definida por

$$I_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+k)!j!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+k}, x \in \mathbb{R}. \quad (4-2)$$

Observação 4 *Toda vez que $\lambda_f \leq \mu$, $\tau := \tau_f^k$ tem densidade de probabilidade*

$$\varphi_{\tau}(t) = \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{k}{2}} e^{-(\mu+\lambda_f)t} \frac{k}{t} I_k(2\sqrt{\mu\lambda_f}t), \forall t > 0. \quad (4-3)$$

No caso $\lambda_f > \mu$ a função acima não é densidade de probabilidade, pois

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{k}{2}} e^{-(\mu+\lambda_f)t} \frac{k}{t} I_k(2\sqrt{\mu\lambda_f}t) dt = \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^k < 1.$$

De fato, quando $\lambda_f > \mu$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{k}{2}} e^{-(\mu+\lambda_f)t} \frac{k}{t} I_k(2\sqrt{\mu\lambda_f}t) dt &= \int_0^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{k}{2}} e^{-(\mu+\lambda_f)t} \frac{k}{t} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+k)!l!} (\sqrt{\mu\lambda_f}t)^{2l+k} dt \\ &= \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{k}{2}} \int_0^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-(\mu+\lambda_f)t} \frac{k}{t} \frac{1}{(l+k)!l!} (\sqrt{\mu\lambda_f}t)^{2l+k} dt. \end{aligned}$$

Visando satisfazer a condição necessária para trocar a ordem entre a série e a integral (Corolário 2.8), temos de ter f_l não-negativa, o que ocorre, pois:

$$f_l = e^{-(\mu+\lambda_f)t} \frac{k}{t} \frac{1}{(l+k)!l!} (\sqrt{\mu\lambda_f}t)^{2l+k} \geq 0$$

para $t \in (0, +\infty)$ e $l \in \mathbb{N}$. Sendo assim

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{k}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\mu+\lambda_f)t} \frac{k}{t} \frac{1}{(l+k)!l!} (\sqrt{\mu\lambda_f}t)^{2l+k} dt \\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{k}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{\mu\lambda_f})^{2l+k}}{(l+k)!l!} k \int_0^{\infty} e^{-(\mu+\lambda_f)t} t^{2l+k-1} dt \\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{k}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k}{2l+k} \binom{2l+k}{l} \left(\frac{\sqrt{\mu\lambda_f}}{\mu+\lambda_f}\right)^{2l+k} \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{\lambda_f}{\mu}\right)^{\frac{k}{2}} \\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k}{2l+k} \binom{2l+k}{l} \left(\frac{\lambda_f}{\mu+\lambda_f}\right)^{l+k} \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda_f}\right)^l \\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k}{2l+k} \mathbb{P}(S_{2l+k} = k) \\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^k \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_{0,k} = 2l+k) \\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^k \\
&< 1.
\end{aligned}$$

Quando $\lambda_f \leq \mu$, temos :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{k}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\mu+\lambda_f)t} \frac{k}{t} \frac{1}{(l+k)!l!} (\sqrt{\mu\lambda_f}t)^{2l+k} dt \\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{k}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{\mu\lambda_f})^{2l+k}}{(l+k)!l!} k \int_0^{\infty} e^{-(\mu+\lambda_f)t} t^{2l+k-1} dt \\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{k}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k}{2l+k} \binom{2l+k}{l} \left(\frac{\sqrt{\mu\lambda_f}}{\mu+\lambda_f}\right)^{2l+k} \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{\lambda_f}{\mu}\right)^{\frac{k}{2}} \\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{\lambda_f}{\mu}\right)^{\frac{k}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k}{2l+k} \binom{2l+k}{l} \left(\frac{\lambda_f}{\mu+\lambda_f}\right)^l \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda_f}\right)^{l+k} \\
&= 1 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k}{2l+k} \mathbb{P}(S_{2l+k} = -k) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_{0,-k} = 2l+k) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Observação 5 O tempo de sobrevivência τ_f^k não é afetado por espécies com aptidões

menores que f . Além disso, temos

$$\tau_f^k = \sum_{j=1}^k (\tau_f^j - \tau_f^{j-1}),$$

tomando $\tau_f = 0$. Observe que τ_f^k são quase certamente tempos de parada finitos (quando $\mu > \lambda_f$) e da propriedade forte de Markov (Teorema A.4), $(\tau_f^j - \tau_f^{j-1})_{1 \leq j \leq k}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com a distribuição de $\tau_f = \tau_f^1$.

Ainda que (4-1) nos dê a distribuição exata do tempo de sobrevivência, não é tão simples concluir algo disto. O próximo resultado nos dá aproximações para a distribuição de τ_f^k .

Corolário 4.2 O tempo de sobrevivência τ_f^k satisfaz :

a) Se $\lambda_f < \mu$ então

$$\mathbb{P}(\tau_f^k > t) \sim C_k \frac{e^{-\alpha t}}{t^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{com } C_k = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{k}{2}} (\mu \lambda_f)^{-\frac{1}{4}} (\sqrt{\mu} - \sqrt{\lambda_f})^{-2} e^{-\alpha} \alpha = (\sqrt{\mu} - \sqrt{\lambda_f})^2.$$

b) Se $\lambda_f > \mu$ então

$$\mathbb{P}(\tau_f^k > t) \sim C_k \frac{e^{-\alpha t}}{t^{\frac{3}{2}}};$$

$$\mathbb{P}(\tau_f^k = +\infty) = 1 - \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^k.$$

c) Se $\lambda_f = \mu$ então

$$\mathbb{P}(\tau_f^k > t) \sim (k\pi\mu t)^{-\frac{1}{2}}.$$

Observação 6 Do corolário acima, se $\lambda > \mu$ existe uma transição de fase em f .

Note que uma espécie que nasce com uma aptidão menor que $f_c := F^{-1}(\frac{\mu}{\lambda})$ morre exponencialmente rápido enquanto uma espécie com uma aptidão maior que f_c tem probabilidade positiva de sobreviver para sempre. Quanto maior $\frac{\lambda}{\mu}$ for (temos que F^{-1} é não decrescente, mais receptivo é o meio-ambiente para novas espécies). Se $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, todas as espécies morrem exponencialmente rápido. Por outro lado, se $\frac{\lambda}{\mu} > 1$ até mesmo as espécies com aptidões relativamente baixas podem sobreviver.

Até agora discutimos o tempo de sobrevivência de k espécies com uma aptidão dada f . Em particular, é importante obter alguma informação sobre a distribuição destas espécies sobreviventes. Suponha que $\lambda > \mu$ e sejam L_t e R_t os conjuntos de espécies vivas no tempo t cujas aptidões são respectivamente menores que f_c e maiores que f_c . Como

cada aptidão que apareceu até o tempo t não deve aparecer novamente quase certamente, nós podemos identificar cada espécie com a sua aptidão e considerar L_t e R_t como o conjunto de pontos em $(-\infty, f_c)$ e (f_c, ∞) respectivamente. O resultado a seguir é uma aplicação direta do resultado principal do primeiro artigo abordado.

Proposição 4.3 *Suponha que $\lambda > \mu$. Então*

- a) *O número $|L_t|$ de espécies cujas aptidões são menores que f_c é uma cadeia de nascimento e morte recorrente nula. Em particular, o conjunto L_t é vazio infinitas vezes com probabilidade 1.*
- b) *Tome $f_c < a < b$, então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} |R_t \cap (a, b)| = \frac{\lambda(F(b) - F(a))}{\lambda + \mu} q.c.$$

4.3 Provas

4.3.1 Construção do processo

Para chegarmos aos resultados, devemos construir o processo. Primeiramente, considere o processo bivariado $Z_t = (Z_t^1, Z_t^2)$. A primeira coordenada nos dá o número de espécies vivas no tempo t e a segunda é o conjunto das aptidões associadas as espécies vivas no tempo t . Seja M um processo bidimensional de Poisson com parâmetro 1 em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. O eixo x será a linha do tempo associada ao processo de Poisson. Vamos supor que o processo começa com $k \geq 1$ espécies, tome $f_1, \dots, f_k$ k variáveis aleatórias independentes com distribuição F , independente de M . Tome $T_0 = 0$ e $Z_0 = (Z_0^1, Z_0^2) = (k, \{f_1, \dots, f_k\}) \in \mathbb{N} \times \mathbf{S}$ onde $\mathbf{S}$ é o conjunto dos subconjuntos finitos dos números reais em $[0, 1]^\mathbb{N}$. Defina

$$T_1 = \inf\{t > 0 : M([0, t] \times [0, \lambda + \mu]) > 0\}.$$

Isto é, T_1 é a primeira vez que o processo de Poisson marca um ponto na faixa $\mathbb{R}^+ \times [0, \lambda + \mu]$.

Denote por (T_1, Y_1) a coordenada da primeira ocorrência do processo de Poisson na região acima. Pelas propriedades do processo de Poisson, temos que Y_1 é uma variável aleatória uniforme em $[0, 1]$ independente de T_1 . Este processo define o nascimento ou a morte de uma espécie em Z_{T_1} dependendo da posição a qual Y_1 fica.

- Se $Y_1 \in [0, \lambda]$, uma nova espécie surge com aptidão associada $f_{k+1} = F^{-1}(\frac{Y_1}{\lambda})$ (com esta aptidão sendo uma variável aleatória com distribuição F e independente de T_1), portanto:

$$Z_{T_1} = (Z_0^1 + 1, Z_0^2 \cup \{f_{k+1}\}) = (k + 1, \{f_0, \dots, f_{k+1}\})$$

que representa o nascimento de uma nova espécie.

- Caso contrário, ou seja, quando $Y_1 \in]\lambda, \lambda + \mu]$, tome

$$Z_{T_1} = (Z_0^1 - 1, Z_0^2 \setminus \{\min\{Z_0^2\}\}) = (k - 1, \{f_0, \dots, f_k\} \setminus \{\min\{f_i : 1 \leq i \leq k\}\})$$

que representa a morte da espécie mais fraca.

Entre $[0, T_1[$ denote $Z_t = Z_0$. Assim o processo está bem definido até o tempo T_1

Para $n \geq 1$, denote por T_n o tempo da n^a marca do processo de Poisson M na faixa $\mathbb{R}^+ \times [0, \lambda + \mu]$, isto é:

$$T_n = \inf\{t > T_{n-1} : M([0, t] \times [0, \lambda + \mu]) > 0\}.$$

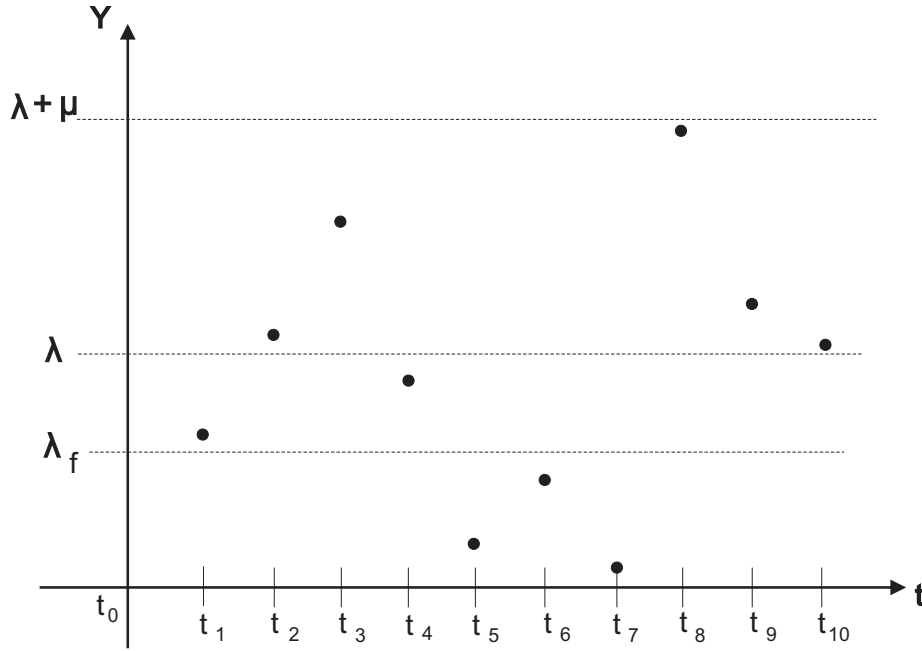


Figura 4.1: Uma ilustração do processo bidimensional.

Suponha que o processo Z_t esteja bem definido até o tempo T_n , $n \geq 1$. Como antes, denote por (T_{n+1}, Y_{n+1}) a coordenada da $(n+1)^a$ marca de Poisson.

- Se $Y_{n+1} \in [0, \lambda]$, uma nova espécie surge com aptidão associada $f_{k+n+1} = F^{-1}(\frac{Y_{n+1}}{\lambda})$ e escrevemos

$$Z_{T_{n+1}} = (Z_n^1 + 1, Z_n^2 \cup \{f_{k+n+1}\}).$$

- Caso contrário,

$$Z_{T_{n+1}} = (Z_n^1 - \mathbf{1}_{\{Z_n^1 > 0\}}, Z_n^2 \setminus \{\min\{Z_n^2\}\})$$

(com a convenção $\min \emptyset = \emptyset$) e então para todo $t \in [T_n, T_{n+1}[$ tome $Z_t = Z_{T_n}$. Em palavras, a espécie que tiver a menor aptidão morre, se no tempo T_n tivermos alguma espécie viva.

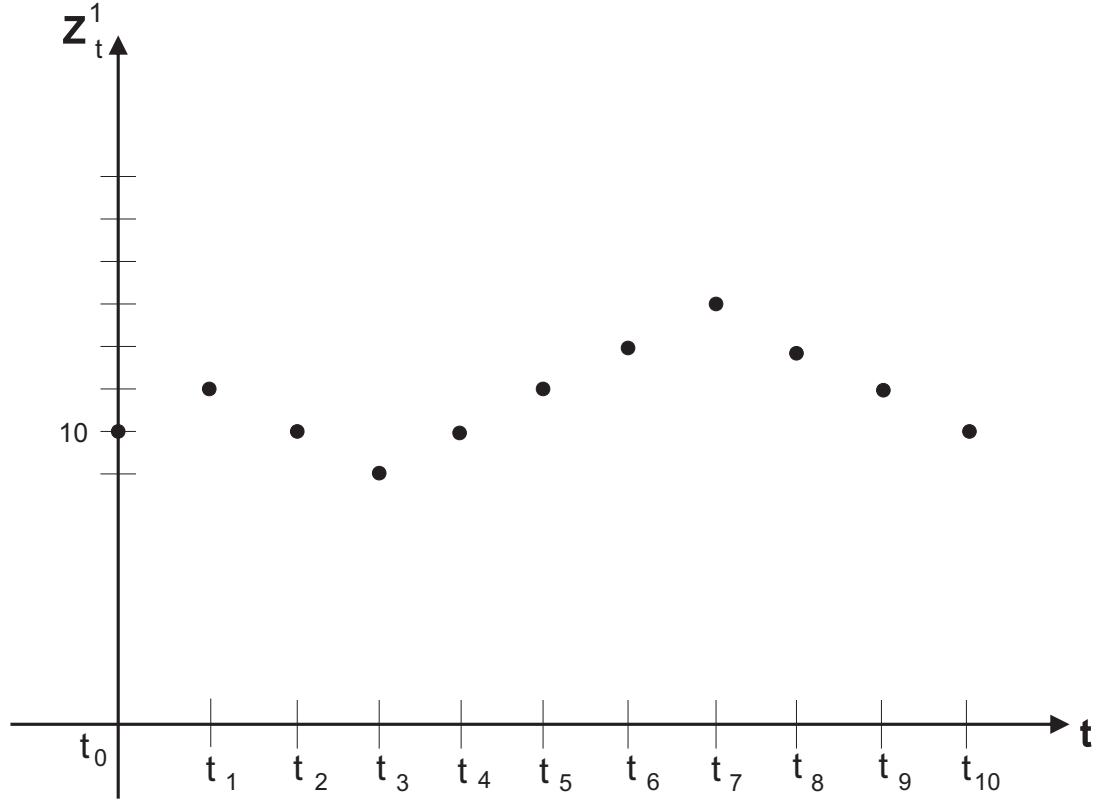


Figura 4.2: Uma ilustração do que acontece em Z_t^1 .

4.3.2 Um acoplamento útil

Estamos interessados na distribuição de τ_f^k . Um modo de obter esta distribuição é a partir de X_t , um processo acoplado ao processo Z_t , definido como o número de espécies cujas aptidões são menores ou iguais que f no tempo t . Observe que, pela construção, $X_0 = Z_0^1$. Além disso, em T_1

- Se $Y_1 \in [0, \lambda_f[\cup [\lambda, \lambda + \mu]$ então tome $X_{T_1} = Z_{T_1}$. Isto quer dizer que ocorre uma morte de uma espécie ou nasce uma espécie com uma aptidão menor que f para o processo Z .
- Caso contrário (quando $Y_1 \in]\lambda_f, \lambda]$) tome $X_t = X_0$. Neste caso, existe um nascimento no processo Z com aptidões associadas maior que f e assim, o processo X permanece inalterado.

Como antes, defina $X_t = X_0 \forall t \in [0, T_1[$.

Para todo conjunto A de números em $[0, 1]$, denote por

$$\phi_f(A) = \{x \in A : x \leq f\},$$

o conjunto dos pontos de A que são menores ou iguais a f .

Observe que $X_t = Z_t^1$ em $[0, T_1[, X_{T_1} = |\phi_f(Z_{T_1}^2)| \leq Z_{T_1}^1$. Para $n \geq 1$ suponha que X_t é construída até o tempo T_n . Se $X_{T_n} \neq 0$, então $|\phi_f(Z_{T_n}^2)| = X_{T_n}$.

- Se $Y_{n+1} \in [0, \lambda_f]$ (relembre que $f_{k+n+1} := F^{-1}(\frac{Y_{n+1}}{\lambda}) \leq f$) defina

$$X_{T_{n+1}} = X_{T_n} + 1,$$

- Se $Y_{n+1} \in [\lambda, \lambda + \mu]$ então defina

$$X_{T_{n+1}} = X_{T_n} - 1.$$

- Caso contrário, tome $X_{T_{n+1}} = X_{T_n}$;

No caso $X_{T_n} = 0$, tome $X_{T_{n+1}} = 0$.

Isto define uma sequência aleatória $(T_n, X_{T_n})_{n \geq 0}$, onde definimos o processo $(X_t)_{t \geq 0}$ como $X_t = X_{T_n} \forall t \in [T_n, T_{n+1}[$.

A prova do Teorema 3.1 decorre do seguinte Lema.

Lema 4.4 Para qualquer $k \geq 1$

$$\{\tau_f^k > t\} = \{X_t > 0\}.$$

Isto é, τ_f^k possui a mesma distribuição do que a primeira passagem de X_t em 0, o passeio aleatório simples de Bernoulli começando em k com taxa $c = \lambda_f + \mu$ e passos individuais equivalentes a 1 e -1 com respectivas probabilidades $p = \frac{\lambda_f}{c}$ e $q = \frac{\mu}{c}$.

Prova. Temos $X_0 = Z_0^1 = |\phi_f(Z_0^2)| = k > 0$. Desta construção, para todo $t < \tau_f^k$, temos $\min Z_t^2 \leq f$, o que implica $X_t > 0$. Reciprocamente, se $\tau_f^k \leq t$ temos que $\min Z_{\tau_f^k}^2 > f$ implicando $X_{\tau_f^k} = 0$. Portanto, $X_t^1 = 0$. $\square$

4.3.3 Prova do Teorema 4.1

Seja $(J_n)_{n \geq 0}$ denotando os tempos de saltos do processo $(X_t)_{t \geq 0}$ e defina $J_0 = 0$. A sequência aleatória $(X_{J_n})_{n \geq 0}$ é um passeio aleatório a tempo discreto sobre $\mathbb{N}$ com passos individuais iguais a 1 ou -1 com probabilidades p e q , respectivamente. Denote por H_0 o tempo de primeiro acerto de 0 por este passeio aleatório. Temos

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}, & \text{se } n+k \text{ for par,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

J_n tem distribuição Gama com parâmetros c e n , pois este processo tem apenas estados estáveis (Teorema 2.6), portanto:

$$[X_t = 0] = \bigcup_{n=k}^{+\infty} [J_n < t, [H_o = n | X_o = k]].$$

Daí

$$\mathbb{P}(X_t = 0) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} (J_n < t, [H_o = n | X_o = k])\right).$$

Como os eventos são disjuntos, temos:

$$\mathbb{P}(X_t = 0) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(J_n < t, [H_o = n | X_o = k]).$$

J_n é o tempo de espera até a n^{a} ocorrência do processo X_t , e temos X_{J_n} , um passeio aleatório que não interfere nos tempos de salto, pois J_n depende apenas de X_t . Então o evento $[H_o = n | X_o = k]$ não interfere em J_n , portanto:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_t = 0) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(J_n < t | [H_o = n | X_o = k]) \mathbb{P}([H_o = n | X_o = k]) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(J_n < t) \mathbb{P}([H_o = n | X_o = k]) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \int_0^t \frac{c^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-cu} \mathbb{P}([H_o = n | X_o = k]) du. \end{aligned}$$

Pelo Corolário (2.10), podemos trocar a ordem entre a série e a integral, pois

$$f_n(t) = \frac{c^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-cu} \mathbb{P}([H_o = n | X_o = k]) \quad (4-4)$$

são não negativas em $(0, t)$, $\forall t \in (0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Logo, temos que (4-4) é igual a

$$\int_0^t \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{c^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-cu} \mathbb{P}([H_o = n | X_o = k]) du. \quad (4-5)$$

Note que f_n não se anula quando $n = k + 2l$, $l \in \mathbb{N}$. Expandindo a série, obtemos que (4-5) é igual a

$$\int_0^t e^{-cu} \frac{k}{u} \left(\frac{c^k}{k!} u^k \binom{k}{0} q^k p^0 + \frac{c^{k+2}}{(k+2)!} u^{k+2} \binom{k+2}{1} q^{k+1} p^1 + \frac{c^{k+4}}{(k+4)!} u^{k+4} \binom{k+4}{2} q^{k+2} p^2 + \right.$$

$$\dots + \frac{c^{k+2i}}{(k+2i)!} u^{k+2i} \binom{k+2i}{i} q^{k+i} p^i + \dots) du. \quad (4-6)$$

Fazendo $j = k + i$, e observando que $2j - k = k + 2i$, obtemos que (4-6) vale e é igual a

$$\int_0^t e^{-cu} \frac{k}{u} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{(j-k)!j!} (cu)^{2j-k} q^j p^{j-k} du. \quad (4-7)$$

Fazendo novamente uma troca de índices, tomando $l = j - k$, temos que (4-7) é igual a

$$\int_0^t e^{-cu} \frac{k}{u} \sum_{l=0}^{+\infty} (cu)^{2l+k} q^{l+k} p^l du.$$

Pela definição da função de Bessel

$$\mathbb{P}(X_t = 0) = \int_0^t e^{-cu} \frac{k}{u} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{k}{2}} I_k(2cu\sqrt{pq}),$$

onde $c = \lambda_f + \mu$, $p = \frac{\lambda_f}{c}$ e $q = \frac{\mu}{c}$.

□

Como mencionado antes na observação 4, quando $\lambda_f < \mu$, a expressão (4-3) nos dá a função densidade de probabilidade de $\tau_f^1 = \tau_f$:

$$\Phi_{\tau_f}(t) = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda_f}} e^{-(\mu+\lambda)t} \frac{1}{t} I_1(2\sqrt{\mu\lambda_f t})$$

para $t > 0$. Isso nos permite calcular a função geradora de momentos. Seja

$$M_{\tau_f}(s) = E(e^{-Xs}) \quad (4-8)$$

• Denotando $\tau_f^1 = X$

$$\begin{aligned} M_{\tau_f}(s) = E(e^{-Xs}) &= \int_0^{+\infty} e^{-xs} e^{-(\lambda_f+\mu)x} \frac{1}{x} \frac{\mu}{\lambda_f} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{(l+1)!l!} \left(x\sqrt{\lambda_f\mu}\right)^{2l+1} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-(\lambda_f+\mu+s)x}}{x} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{(l+1)!l!} \left(x\sqrt{\lambda_f\mu}\right)^{2l+1} dx \\ &= \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{(l+1)!l!} \left(\sqrt{\lambda_f\mu}\right)^{2l+1} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_f+\mu+s)x} x^{2l+1-1} dx \\ &= \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l!}{(l+1)!l!} \left(\frac{\sqrt{\lambda_f\mu}}{\lambda_f + \mu + s}\right)^{2l+1}. \end{aligned}$$

Temos que a série acima converge para $s = 0$, além disso a série das derivadas converge uniformemente (Proposição 3, Apêndice) em $[0, 1]$. Assim, podemos derivar termo a termo a série acima

$$M'_{\tau_f}(s) = - \left(\frac{\mu}{\lambda_f} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\lambda_f \mu} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l!}{(l+1)!l!} (2l+1) \frac{(\sqrt{\lambda_f \mu})^{2l}}{(\lambda_f + \mu + s)^{2l+2}}$$

Aplicando em $s = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} M'_{\tau_f}(0) = -E(X) &= - \frac{\mu}{(\lambda_f + \mu)^2} \sum_{l=0}^{+\infty} \binom{2l+1}{l} \left(\frac{\lambda_f \mu}{(\lambda_f + \mu)^2} \right)^l \\ &= - \frac{\mu}{(\lambda_f + \mu)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\lambda_f \mu}{(\lambda_f + \mu)^2}}} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4\lambda_f \mu}{(\lambda_f + \mu)^2}}}{\frac{2\lambda_f \mu}{(\mu + \lambda_f)^2}} \\ &= - \frac{\mu}{(\lambda_f + \mu)^2} \frac{\mu + \lambda_f}{\mu - \lambda_f} \frac{1 - \frac{\mu + \lambda_f}{\mu - \lambda_f}}{\frac{2\lambda_f \mu}{(\mu + \lambda_f)^2}} \\ &= - \mu \frac{\mu + \lambda_f}{\mu - \lambda_f} \frac{\mu + \lambda_f - \mu - \lambda_f}{2\lambda_f \mu (\mu + \lambda_f)} \\ &= - \frac{1}{\mu - \lambda_f}. \end{aligned}$$

O que nos dá $E(\tau_f) = \frac{1}{\mu - \lambda_f}$. Com isso, obtemos que

$$E(\tau_f^k) = \frac{k}{\mu - \lambda_f}.$$

para todo $k \geq 0$. Podemos também obter a esperança de τ_f pelo modo tradicional:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{+\infty} x e^{-(\lambda_f + \mu)x} \frac{1}{x} \frac{\mu}{\lambda_f} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{(l+1)!l!} \left(x \sqrt{\lambda_f \mu} \right)^{2l+1} dx \\ &= \left(\frac{\mu}{\lambda_f} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{(l+1)!l!} \left(\sqrt{\lambda_f \mu} \right)^{2l+1} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_f + \mu)x} x^{2l+1} dx \\ &= \frac{\mu}{(\lambda_f + \mu)^2} \sum_{l=0}^{+\infty} \binom{2l+1}{l} \left(\frac{\lambda_f \mu}{(\lambda_f + \mu)^2} \right)^l \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda_f}. \end{aligned}$$

Onde usamos o seguinte resultado([17]):

$$\sum_{z=0}^{+\infty} \binom{2k+\alpha}{k} z^k = \frac{1}{\sqrt{1-4z}} \left(\frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} \right)^\alpha, |z| < \frac{1}{4}.$$

4.3.4 Prova do corolário 4.2

a) Quando $\lambda_f < \mu$, temos

$$\mathbb{P}(\tau_f^k > t) = \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{k}{2}} \int_t^{+\infty} e^{-(\mu+\lambda_f)u} \frac{k}{u} I_k \left(2\sqrt{\mu\lambda_f}u\right) du.$$

Para x grande o suficiente e v fixo, uma boa aproximação para $I_v(x)$ é (ver [1]):

$$\begin{aligned} I_v(x) \approx & \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 - \frac{4v^2 - 1}{8x} + \frac{(4v^2 - 1)(4v^2 - 9)}{2!8x} \right. \\ & \left. - \frac{(4v^2 - 1)(4v^2 - 9)(4v^2 - 25)}{3!(8x)^3} + \dots\right). \end{aligned}$$

Então, para todo $k \geq 1$

$$\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 - \frac{4v^2 - 1}{8x}\right) \leq I_k(x) \leq \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.$$

Fazendo $x = 2\sqrt{\mu\lambda_f}u$, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt[4]{\mu\lambda_f}} \frac{e^{-(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda_f})^2u}}{u^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{4k^2 - 1}{16\sqrt{\mu\lambda_f}u}\right) \\ & \leq \frac{e^{-(\mu+\lambda_f)}}{u} I_k \left(2\sqrt{\mu\lambda_f}u\right) \\ & \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt[4]{\mu\lambda_f}} \frac{e^{-(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda_f})^2u}}{u^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \tag{4-9}$$

Denotando $\alpha = (\sqrt{\mu} - \sqrt{\lambda_f})^2$, observe que

$$\left(\frac{1}{\alpha} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} - \frac{4k^2 - 1}{2\alpha^2} \frac{1}{t^{\frac{5}{2}}}\right) e^{-\alpha t} \leq \int_t^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u}}{u^{\frac{3}{2}}} du \leq \frac{1}{\alpha} \frac{e^{-\alpha t}}{t^{\frac{3}{2}}}. \tag{4-10}$$

De fato, integrando $\int_t^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u}}{u^{\frac{3}{2}}} du$, temos :

$$\begin{aligned} \int_t^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u}}{u^{\frac{3}{2}}} du &= \left| -\frac{e^{-\alpha u}}{\alpha u^{\frac{3}{2}}} \right|_t^{+\infty} - \frac{3}{2\alpha} \int_t^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u}}{u^{\frac{5}{2}}} du \\ &= \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha t^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2\alpha} \int_t^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u}}{u^{\frac{5}{2}}} du \\ &\leq \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha t^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2\alpha} \\ &\leq \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha t^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Para o outro fator, temos:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2\alpha} \int_t^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u}}{u^{\frac{5}{2}}} &= - \left| \frac{3}{2\alpha} \left(-\frac{e^{-\alpha u}}{\alpha u^{\frac{5}{2}}} \right) \right|_t^{+\infty} + \frac{3}{2\alpha^2} \frac{5}{2} \int_t^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u}}{u^{\frac{7}{2}}} du \\ &\geq - \left(\frac{3}{2\alpha^2} \left(-\frac{e^{-\alpha t}}{t^{\frac{5}{2}}} \right) \right) \\ &\geq - \left(\frac{4k^2 - 1}{2\alpha^2} \left(-\frac{e^{-\alpha t}}{t^{\frac{5}{2}}} \right) \right). \end{aligned}$$

Disto, segue-se a desigualdade acima para o limitante superior. Para o limitante inferior, fazendo $\theta = \frac{(4k^2-1)}{16\sqrt{\mu\lambda_f}}$, temos que

$$\int_t^{+\infty} \left(1 - \frac{\theta}{u} \right) \frac{e^{-\alpha u}}{u^{\frac{3}{2}}} du \geq \int_t^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u}}{u^{\frac{3}{2}}} du - \frac{\theta}{\alpha} \frac{e^{-\alpha t}}{t^{\frac{5}{2}}}. \quad (4-11)$$

Portanto, fazendo a ligação entre as desigualdades (4-9),(4-10),(4-11) em (4-1), concluimos que para t suficientemente grande :

$$\mathbb{P}(\tau_f^k > t) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt[4]{\mu\lambda_f}} \frac{k}{(\sqrt{\mu} - \sqrt{\lambda_f})^2} \frac{e^{-(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda_f})^2 t}}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

- b) Mesmas contas da prova acima junto com a observação 4.
- c) Quando $\lambda_f = \mu$, temos

$$\mathbb{P}(\tau_f^k > t) = \int_t^{+\infty} e^{-2\mu u} \frac{k}{u} (2\mu u) du.$$

Usando a desigualdade (4-9), obtemos

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\mu}} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{4k^2 - 1}{16\mu u} \right) \leq \frac{e^{-2\mu}}{u} I_k(2\mu u) \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu}} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}.$$

Além disso ,

$$\int_t^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu}} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} du = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu t}} \text{ e } \int_t^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu}} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{4k^2 - 1}{16\mu u} \right) du = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu t}} \left(1 - \frac{4k^2 - 1}{16\mu t} \right),$$

o que nos dá a aproximação desejada.

□

4.3.5 Prova da proposição 4.3

Para ver isto, observe que a Cadeia de Markov imersa para nosso processo é a definida no Capítulo 3, com $p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$. Ou seja, quando houver uma morte ou nascimento

no processo original, temos uma morte ou nascimento no processo imerso discreto. Considere que quando o número de espécies é 0, as marcas de morte na construção são ignoradas, e assim o número de espécies continua em 0 com probabilidade $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$.

Vamos definir o passeio aleatório de interesse, denotando-o por Q_n . Ele será definido da seguinte forma:

Para $t = 0$, façamos $Q_0 = k$. Seja (T_1, Y_1) a 1ª coordenada do processo bidimensional de Poisson M definido em 4.3.1. Para $t = 1$, temos:

$$Q_1 = Q_{T_1} = \begin{cases} Q_0 + 1 = k + 1, & \text{se } Y_1 \in [0, \lambda], \\ Q_0 - 1 = k - 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Suponha o processo Q_n construído até o tempo $t = n - 1$. Seja (T_n, Y_n) a n ª coordenada do processo bidimensional M. De modo análogo, para $t = n$, temos:

$$Q_n = Q_{T_n} = \begin{cases} Q_{n-1} + 1, & \text{se } Y_n \in [0, \lambda], \\ Q_{n-1} - 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim o processo está bem definido até o tempo n . No processo definido no Capítulo 3, as aptidões tem uma distribuição uniforme, mas poderiam obedecer outra distribuição, pois na prova dos teoremas, o fato das aptidões terem uma distribuição uniforme não interfere no resultado. Com as probabilidades p e q definidas acima, temos Q_n bem definida e similar ao processo definido no Capítulo 3, portanto o resultado que se deseja é uma aplicação direta do que foi provado no Teorema 3.1.

□

Simulações

Neste capítulo, temos algumas simulações dos dois modelos de sobrevivência.

Nas simulações do primeiro modelo, as simulações apenas confirmam o que já era dado pelo Teorema 3.1. Na figura 5.1, temos p próximo de 0.5, o que nos dá f_c próxima de 1. E assim, apenas as espécies com uma aptidão alta conseguem sobreviver até o tempo simulado.

Nas outras simulações deste processo 5.2, 5.3 e 5.4, temos que quanto maior for p , menor é f_c . E assim, um número maior de espécies com uma aptidão relativamente baixa consegue sobreviver até o tempo simulado. Em particular, em 5.4 temos que até as espécies com aptidões perto de 0 conseguem sobreviver até o tempo $t = 40.000$ (O tempo de duração da simulação do processo).

No segundo modelo, as simulações dão ideia de como funciona a distribuição de Bessel para alguns casos particulares. Em todas as simulações deste modelo, temos $\mu = 5$ e $\lambda = 2$.

Em 5.5, 5.6 e 5.7, a distribuição das aptidões é uma normal padrão.

Em 5.8, 5.9 e 5.10, a distribuição das aptidões é uma uniforme em $[0,1]$.

Em todas as simulações, usamos o R([13]) como software base.

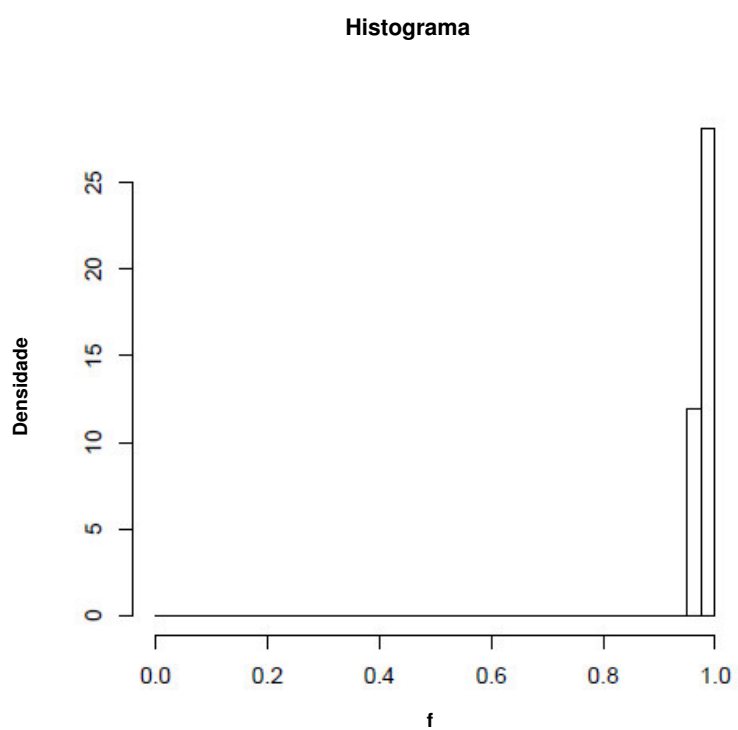


Figura 5.1: *Histograma das aptidões após 40000 nascimentos e mortes com $p = 0.51$. Logo, $f_c \sim 0.96$.*

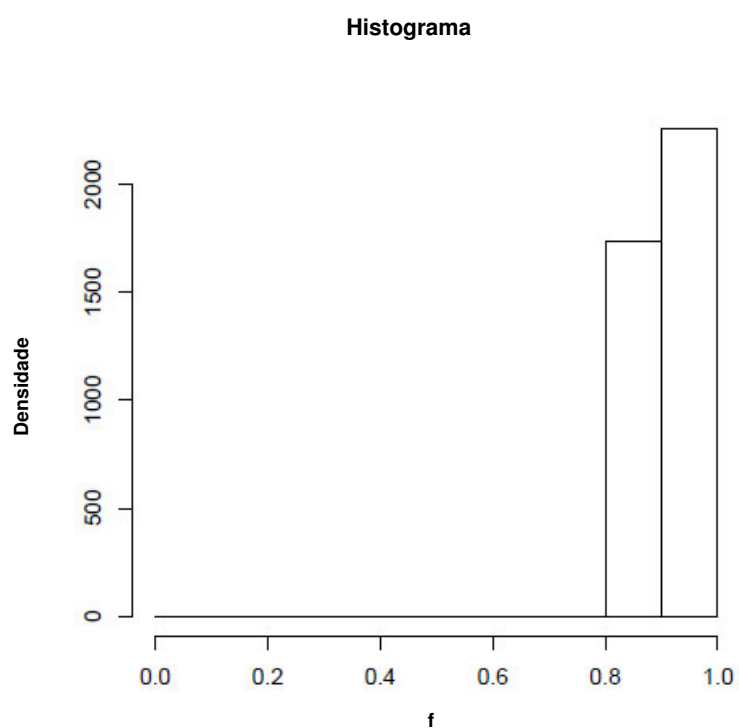


Figura 5.2: *Histograma das aptidões após 40000 nascimentos e mortes com $p = 0.55$. Logo, $f_c \sim 0.82$.*

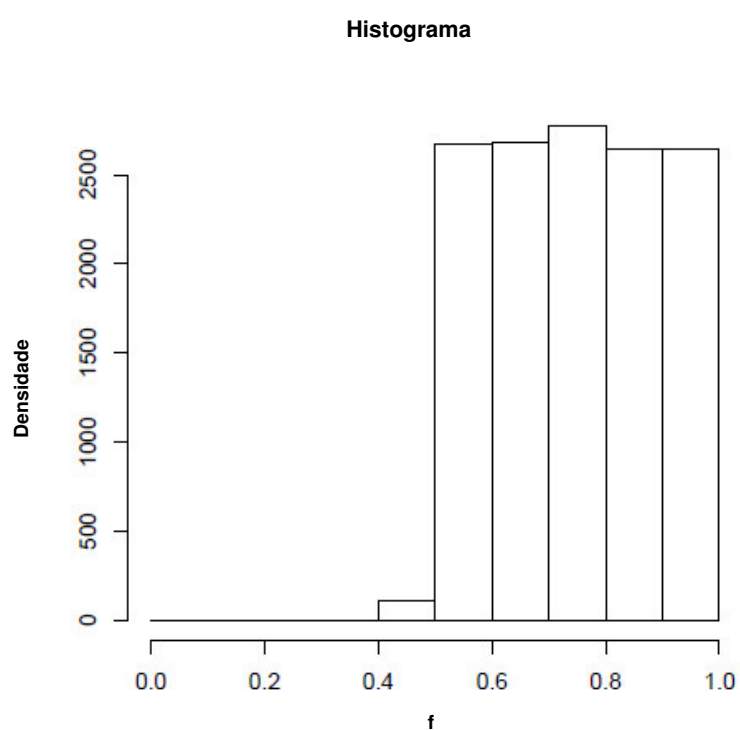


Figura 5.3: *Histograma das aptidões após 40000 nascimentos e mortes com $p = 0.67$. Logo, $f_c \sim 0.5$.*

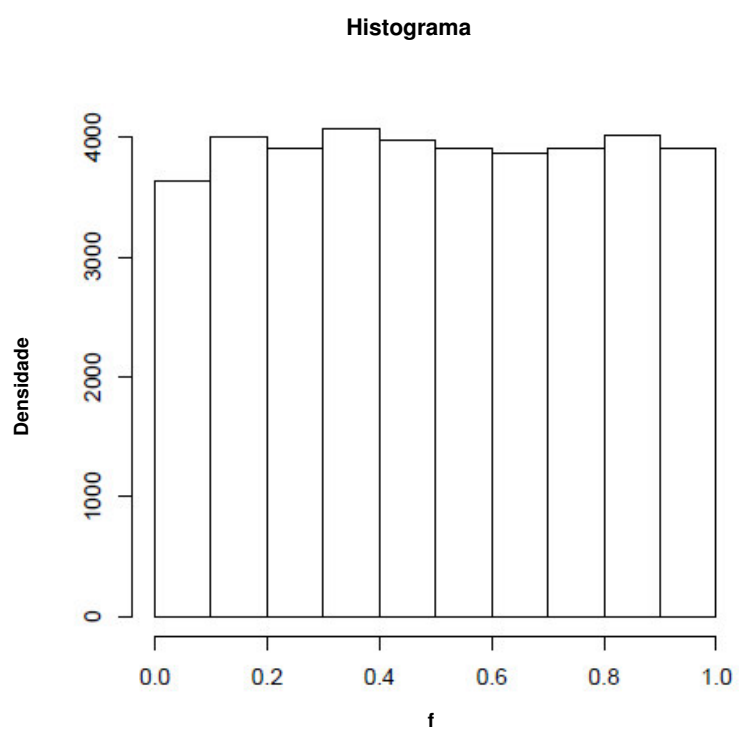


Figura 5.4: *Histograma das aptidões após 40000 nascimentos e mortes com $p = 0.99$. Logo, $f_c \sim 0.01$.*

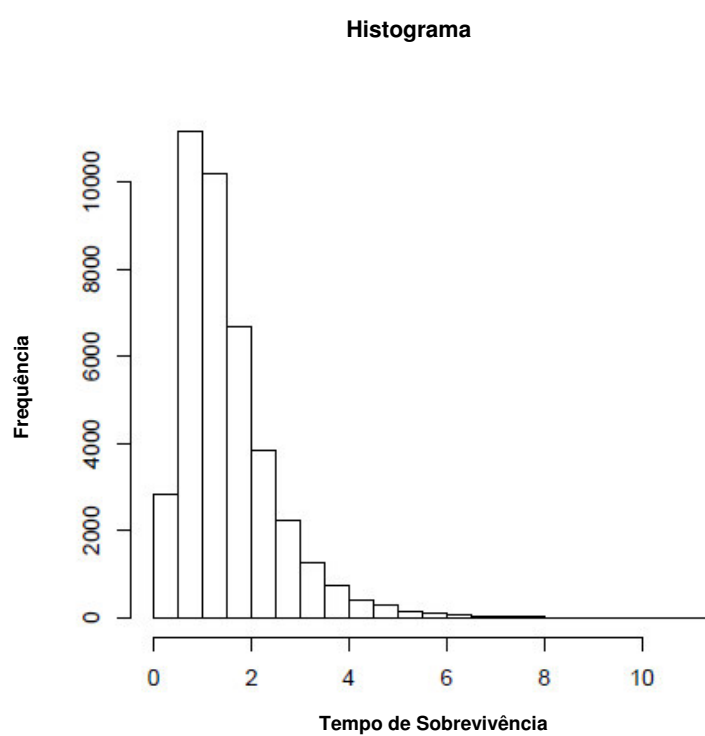


Figura 5.5: *Histograma do tempo de sobrevivência após 40000 simulações e com 5 espécies iniciais, com as aptidões tendo uma distribuição normal padrão.*

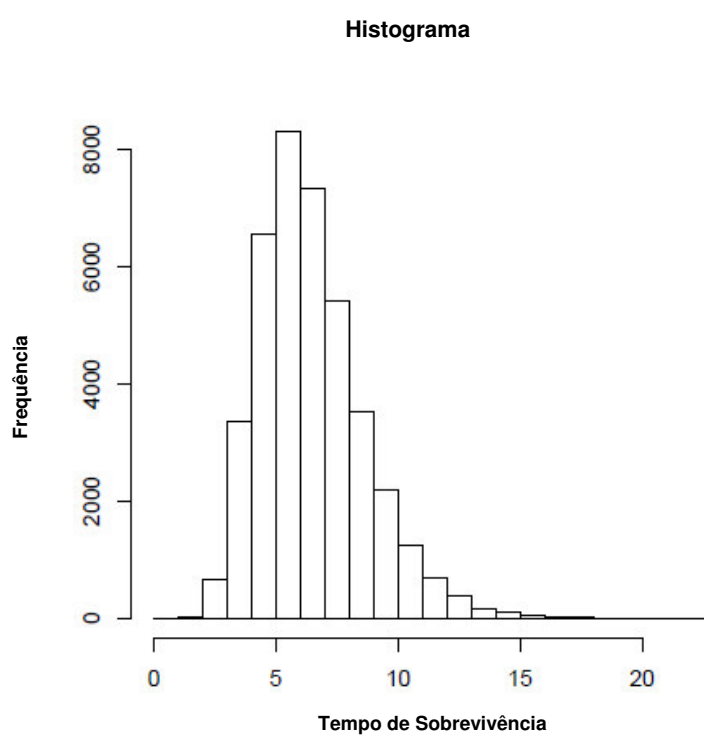


Figura 5.6: *Histograma do tempo de sobrevivência após 40000 simulações e com 20 espécies iniciais, com as aptidões tendo uma distribuição normal padrão.*

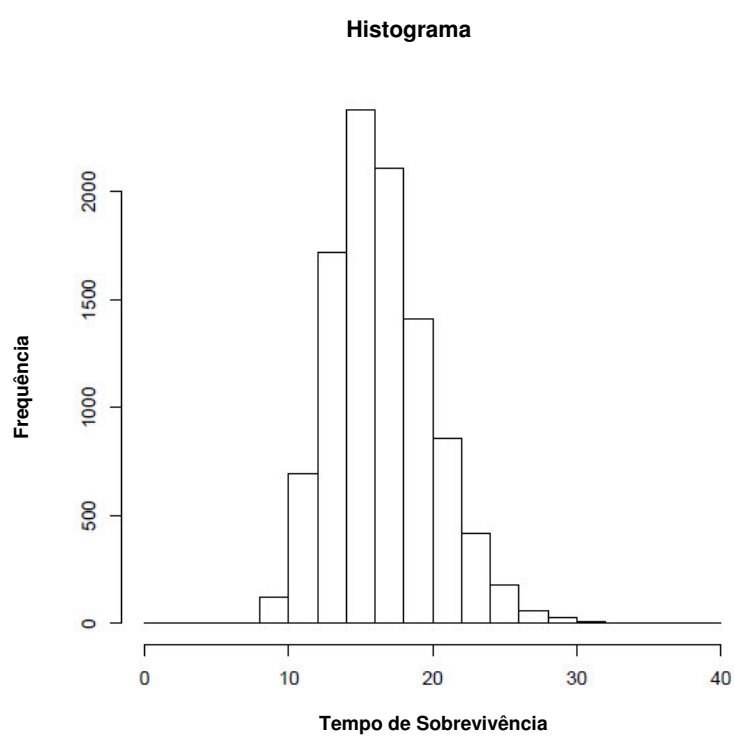


Figura 5.7: *Histograma do tempo de sobrevivência após 10000 simulações e com 50 espécies iniciais, com as aptidões tendo uma distribuição normal padrão.*

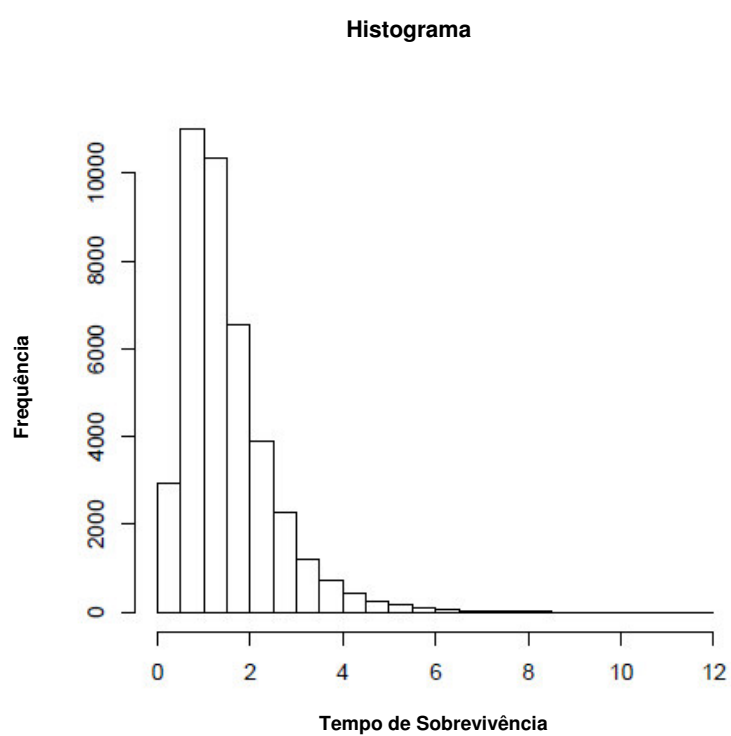


Figura 5.8: *Histograma do tempo de sobrevivência após 40000 simulações e com 5 espécies iniciais, com as aptidões tendo uma distribuição uniforme em $[0,1]$.*

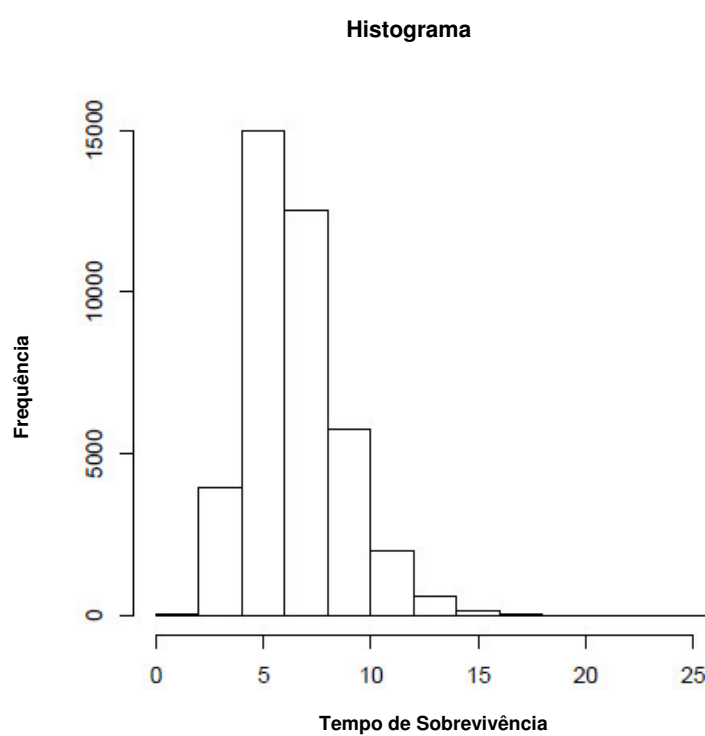


Figura 5.9: *Histograma do tempo de sobrevivência após 40000 simulações e com 20 espécies iniciais, com as aptidões tendo uma distribuição uniforme em $[0,1]$.*

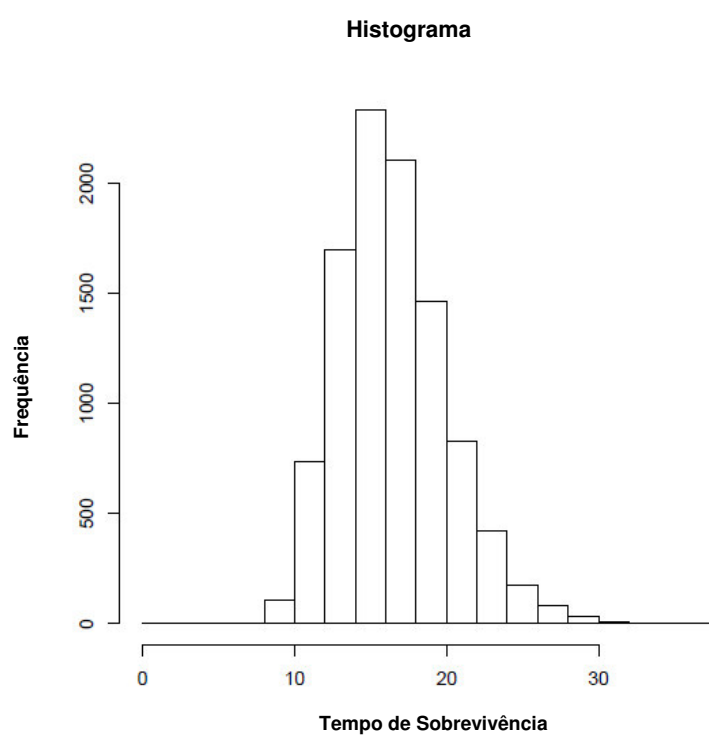


Figura 5.10: *Histograma do tempo de sobrevivência após 10000 simulações e com 50 espécies iniciais, com as aptidões tendo uma distribuição uniforme em $[0,1]$.*

Conclusão

Nestes dois artigos estudados, temos resultados interessantes do ponto de vista matemático.

No primeiro artigo, um modelo de evolução a tempo discreto, temos um processo de nascimento e morte onde nascimentos e mortes ocorrem com probabilidades constantes. Se a probabilidade de nascimento p for maior que 0.5, temos uma transição de fase neste processo no sentido de que todas as espécies que tem uma aptidão menor que a crítica tem probabilidade 1 de morrer em tempo finito. Além disso, as aptidões associadas a estas espécies tem distribuição uniforme em $[0,1]$ e se olharmos a distribuição assintótica destas aptidões, observamos que estas têm distribuição uniforme em $(f_c, 1)$. Simulando o processo, vemos que se $p \sim 0.5$, somente espécies com aptidões próximas de 1 sobrevivem até o tempo simulado. Caso $p \sim 1$, até espécies com aptidões relativamente baixas chegam a sobreviver até o tempo simulado.

O segundo artigo, é uma evolução do primeiro. De fato, segue basicamente os mesmos conceitos no quesito de nascimento e morte de espécies. Entretanto, no segundo artigo o processo é mais sofisticado. Agora, cada espécie possui uma aptidão associada cuja distribuição é absolutamente contínua. Além disso, o processo ocorre em tempo contínuo. Obtemos que a distribuição do tempo de sobrevivência das k espécies iniciais depende diretamente das taxas de nascimento e morte e da maior aptidão dentre as k espécies iniciais. Se $\lambda_f < \mu$, sua distribuição tem cauda leve e é simulável, pois a esperança do tempo de vida destas k espécies iniciais é finita. Se $\lambda_f = \mu$ ou $\lambda_f > \mu$, a esperança do tempo de vida destas k espécies é infinita e portanto, não simulável. No último caso, temos que a distribuição tem cauda pesada e existe a probabilidade positiva das k espécies iniciais sobreviverem.

Nas simulações dos dois processos, vemos que os resultados teóricos condizem com o que foi verificado nas simulações.

Os dois processos podem ser aprimorados. Podemos considerar as aptidões, bem como as taxas de nascimento e morte variando em função do tempo e então, obtemos modelos mais realísticos, mesmo que isso torne o estudo teórico mais complexo.

Referências Bibliográficas

- [1] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. **Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables**. Dover Publications, New York, 1972.
- [2] BAK, P.; SNEPPEN, K. **Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution**. 1993.
- [3] DE FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e EDP**. IMPA, 2012.
- [4] DURRETT, R. **Probability: theory and examples (second edition)**. Duxbury Press, 1996.
- [5] FELLER, W. **An Introduction to Probability Theory and Its Applications**. 1968.
- [6] FERRARI, P. A.; GALVES, A. **Construction of Stochastic Processes, Coupling and Regeneration**. 2001.
- [7] GRIMMETT, G.; STIRZAKER, D. **Probability and Random Process(third edition)**. Oxford University Press, 2001.
- [8] GUIOL, H.; MACHADO, F.; SCHINAZI, R. **A stochastic model of evolution**. 2008.
- [9] GUIOL, H.; MACHADO, F.; SCHINAZI, R. **On a link between a species survival time in an evolution model and the bessel distributions**. 2011.
- [10] JAMES, B. **Probabilidade: um curso em nível intermediário**. Projeto Euclides.
- [11] LIMA, E. L. **Curso de análise vol.2**. Projeto Euclides, 2010.
- [12] NORRIS, J. **Markov Chains**. Cambridge University Press, 1998.
- [13] **R Version 3.0.2**. The R Foundation for Statistical Computing.
- [14] ROSS, S. **Probabilidade: Um curso moderno com aplicações**. Bookman, 2010.
- [15] ROSS, S. M. **Stochastic processes(second edition)**. Wiley, 1996.
- [16] SCHINAZI, R. **Classical and spatial stochastic processes**. Birkhauser, 1999.
- [17] SEIDEN, S. **Theoretical computer science sheet**. 1994.

Apêndice

Proposição A.1 *Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas e seja $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Se a função geradora de momentos $M(s) = E[e^{sX_i}] < +\infty$ para algum $t > 0$, então $\mathbb{P}(S_n \geq na) \rightarrow 0$ exponencialmente rápido. Aqui $a > E[X_i]$, e iremos identificar*

$$\alpha(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq na). \quad (\text{A-1})$$

Prova. Ver ([4]). □

Observação 7 *O limite em (A-1) existe. De fato, seja $\pi_n = \mathbb{P}(S_n \geq na)$. Então*

$$\mathbb{P}(S_{m+n} \geq (m+n)a) \geq \mathbb{P}(S_m \geq ma, S_{m+n} - S_m \geq na) = \pi_n \pi_m,$$

pois S_n e $S_{m+n} - S_m$ são independentes. Tomando $\beta_n = \log \pi_n$, o Lema a seguir nos garante a existência do limite.

Lema A.2 *Se $\beta_{m+n} \geq \beta_m + \beta_n$, então quando $n \rightarrow +\infty$, $\frac{\beta_n}{n} \rightarrow \sup_m \frac{\beta_m}{m}$*

Prova. $\limsup \frac{\beta_n}{n} \leq \sup \frac{\beta_m}{m}$. Para completar a prova, é suficiente provar que para qualquer m , $\liminf \frac{\beta_n}{n} \geq \frac{\beta_m}{m}$. Escrevendo $n = km + l$ com $0 \leq l < m$ usando a hipótese acima temos $\beta_n \geq k\beta_m + \beta_l$. Dividindo por $n = km + l$ segue

$$\frac{\beta(n)}{n} \geq \left(\frac{km}{km+l} \right) \frac{\beta(m)}{m} + \frac{\beta_l}{n}.$$

Tomando $n \rightarrow +\infty$ e chamando $n = km + l$, $0 \leq l < m$ nos dá o resultado desejado. □

O lema anterior implica que se (A-1) existe, então $\beta(a) \leq 0$. Com isso, segue que

$$\mathbb{P}(S_n \geq na) \leq e^{n\alpha(a)} \quad (\text{A-2})$$

para n suficientemente grande.

Teorema A.3 (*Lema de Borel Cantelli*) Seja (E_n) uma sequência de eventos em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) < +\infty$, então $\mathbb{P}(E_n \text{ ocorre infinitas vezes}) = 0$

Prova. Temos

$$\{E_n \text{ infinitas vezes}\} = \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} E_n.$$

Defina $I_n = I_{E_n}$ como a variável aleatória indicadora do evento E_n . Tome

$$N = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n.$$

Assim $\mathbb{P}(E_n \text{ i.v.}) = 0$ se e somente se $\mathbb{P}(N < +\infty) = 1$. Por outro lado, se $E(N) < \infty$, então $\mathbb{P}(N < +\infty) = 1$. Agora observe que

$$E(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} E(I_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(I_n = 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n).$$

Assim, temos o resultado. □

Proposição 2 O conjunto W_n definido no Lema 3.2 ocorre infinitas vezes com probabilidade 0

Prova. Seja $W_n = \left\{ t_n > \frac{2}{pf_c} \right\}$. Do Lema 3.2, temos

$$\mathbb{P}(E_n) < D e^{-n^\varepsilon \alpha'}$$

com D, ε e α fixos. Então:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) < \sum_{n=1}^{+\infty} D e^{-n^\varepsilon \alpha'}.$$

Mas existe n_0 tal que

$$\frac{1}{e^{n^\varepsilon \alpha'}} \leq \frac{1}{e^{n^\varepsilon \alpha'}} \leq \frac{1}{2^{n^\varepsilon \alpha'}} \leq \frac{1}{2^n}$$

para todo $n \geq n_0$. Portanto,

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} D e^{-n^\varepsilon \alpha'} \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} D \frac{1}{2^n} < +\infty$$

Segue do Teorema A.3 que

$$\mathbb{P}(W_n \text{ infinitas vezes}) = 0.$$

Logo, $\frac{t_n}{n} \rightarrow 0$ para n suficientemente grande. $\square$

O teorema abaixo pode ser encontrado em ([12]):

Teorema A.4 (*Propriedade Forte de Markov*) *Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ uma cadeia de Markov e seja T um tempo de parada de $(X_n)_{n \geq 0}$. Então, condicionando em $\{T < \infty\}$ e $\{X_T = i\}$, $(X_{T+n})_{n \geq 0}$ é uma cadeia de Markov e independente de $X_0, X_1, \dots, X_T$.*

Prova. Se B é um evento determinado por $X_0, \dots, X_T$, então $B \cap \{T = m\}$ é determinado por $X_0, \dots, X_m$, daí temos:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, \dots, X_{T+n} = j_n\} \cap B | T < +\infty, X_T = i) \\ = & \frac{\mathbb{P}(\{X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, \dots, X_{T+n} = j_n\} \cap B \cap \{T < +\infty\} \cap \{X_T = i\})}{\mathbb{P}(T < +\infty, X_T = i)} \\ = & \frac{\sum_m \mathbb{P}(\{X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, \dots, X_{T+n} = j_n\} \cap B \cap \{T = m\} \cap \{X_T = i\})}{\sum_m \mathbb{P}(\{T = m\}, \{X_T = i\})} \end{aligned}$$

Pela propriedade de Markov no tempo m , temos:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, \dots, X_{T+n} = j_n\} \cap B \cap \{T = m\} \cap \{X_T = i\}) \\ = & \mathbb{P}_i(\{X_0 = j_0, X_1 = j_1, \dots, X_n = j_n\}) \mathbb{P}(B \cap \{T = m\} \cap \{X_T = i\}) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_m \mathbb{P}(\{X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, \dots, X_{T+n} = j_n\} \cap B \cap \{T = m\} \cap \{X_T = i\})}{\sum_m \mathbb{P}(\{T = m\}, \{X_T = i\})} \\ = & \sum_m \frac{\mathbb{P}_i(\{X_0 = j_0, X_1 = j_1, \dots, X_n = j_n\}) \mathbb{P}(B \cap \{T = m\} \cap \{X_T = i\})}{\sum_m \mathbb{P}(\{T = m\}, \{X_T = i\})} \\ = & \mathbb{P}_i(\{X_0 = j_0, X_1 = j_1, \dots, X_n = j_n\}) \frac{\sum_m \mathbb{P}(B \cap \{T = m\} \cap \{X_T = i\})}{\sum_m \mathbb{P}(\{T = m\}, \{X_T = i\})} \\ = & \mathbb{P}_i(\{X_0 = j_0, X_1 = j_1, \dots, X_n = j_n\}) \frac{\mathbb{P}(B \cap \{T < +\infty\} \cap \{X_T = i\})}{\mathbb{P}(\{T < +\infty\}, \{X_T = i\})} \\ = & \mathbb{P}_i(\{X_0 = j_0, X_1 = j_1, \dots, X_n = j_n\}) \mathbb{P}(B | \{T < +\infty\}, \{X_T = i\}). \end{aligned}$$

$\square$

Proposição 3 *Temos que $M_{\tau_f}(s)$, definida em (4-8) satisfaz as condições do Corolário 2.10*

Prova. A função de interesse é

$$M_{\tau_f}(s) = \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l!}{(l+1)!l!} \left(\frac{\sqrt{\lambda_f \mu}}{\lambda_f + \mu + s}\right)^{2l+1}$$

Então, tomando $s = 0$, obtemos $M_{\tau_f}(0) = 1$, por definição. Vamos mostrar que $M_{\tau_f}(s)$ satisfaz a Proposição 2.11

$$\begin{aligned} |M'_{\tau_f}(s)| &= \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\lambda_f \mu} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l!}{(l+1)!l!} (2l+1) \frac{(\sqrt{\lambda_f \mu})^{2l}}{(\lambda_f + \mu + s)^{2l+2}} \\ &\leq \left(\frac{\mu}{\lambda_f}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\lambda_f \mu} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l!}{(l+1)!l!} (2l+1) \frac{(\sqrt{\lambda_f \mu})^{2l}}{(\lambda_f + \mu)^{2l+2}} \\ &= \frac{\mu}{(\lambda_f + \mu)^2} \sum_{l=0}^{+\infty} \binom{2l+1}{l} \left(\frac{\lambda_f \mu}{(\lambda_f + \mu)^2}\right)^l \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda_f}. \end{aligned}$$

Portanto $M'_{\tau_f}(s)$ converge uniformemente para uma função g e assim podemos derivar termo a termo a função $M_{\tau_f}(s)$, como queríamos. $\square$

Teorema A.5 (*Lei Forte dos Grandes Números de Kolmogorov*) Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas e integráveis, com $E[X_n] = \mu$. Então

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \longrightarrow \mu \text{ quase certamente}$$

Prova. Ver ([10]). $\square$