

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS (UFG)  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA (IME)  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FERNANDA DOS ANJOS FÉLIX BECATTI

# **Ciclos limite de grande amplitude em sistemas lineares definidos por partes**

Goiânia  
2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

## TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

### E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

#### 1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação     Tese     Outro\*: \_\_\_\_\_

\*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

**Exemplos:** Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

#### 2. Nome completo do autor

Fernanda dos Anjos Félix Becatti

#### 3. Título do trabalho

Ciclos limite de grande amplitude em sistemas lineares definidos por partes

#### 4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento  SIM     NÃO<sup>1</sup>

**[1]** Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

**a)** consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

**b)** novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

**Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.**



Documento assinado eletronicamente por **Bruno Rodrigues De Freitas, Professor do Magistério Superior**, em 16/02/2023, às 10:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Fernanda Dos Anjos Felix Becatti, Usuário Externo**, em 16/02/2023, às 13:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3534391** e o código CRC **63039A3D**.

---

FERNANDA DOS ANJOS FÉLIX BECATTI

# **Ciclos limite de grande amplitude em sistemas lineares definidos por partes**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade Federal de Goiás (UFG), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Programa de Pós-Graduação em Matemática.

**Área de concentração:** Sistemas Dinâmicos.

**Orientador:** Prof. Bruno Rodrigues de Freitas.

Goiânia  
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do  
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Becatti, Fernanda dos Anjos Félix

Ciclos limite de grande amplitude em sistemas lineares definidos  
por partes [manuscrito] / Fernanda dos Anjos Félix Becatti. - 2023.  
66 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Bruno Rodrigues de Freitas.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto  
de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em  
Matemática, Goiânia, 2023.

Bibliografia. Apêndice.

1. Equações diferenciais. 2. Ciclos limite. 3. Aplicação de  
Deslocamento. 4. Foco Fraco. 5. Centro. I. Freitas, Bruno Rodrigues  
de, orient. II. Título.

CDU 517.938



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

### ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 10 da sessão de Defesa de Dissertação de **Fernanda dos Anjos Félix Becatti**, que confere o título de Mestra em Matemática, **na área de Sistemas Dinâmicos**.

Ao décimo dia do mês de janeiro do ano de dois mil e vinte e três, a partir das nove horas, via Web Videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada "**Ciclos limite de grande amplitude em sistemas lineares definidos por partes**." Os trabalhos foram instalados pelo presidente da banca e orientador, Professor Doutor **Bruno Rodrigues de Freitas - IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Rony Cristiano - IME/UFG**, membro titular interno e o Professor Doutor **Tiago de Carvalho FFCLP-USP Ribeirão Preto**, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Bruno Rodrigues de Freitas - IME/UFG**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao décimo dia do mês de janeiro do ano de dois mil e vinte e três.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

#### Ciclos limite de grande amplitude em sistemas lineares definidos por partes



Documento assinado eletronicamente por **Tiago de Carvalho, Usuário Externo**, em 16/02/2023, às 10:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Bruno Rodrigues De Freitas, Professor do Magistério Superior**, em 16/02/2023, às 10:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rony Cristiano, Professor do Magistério Superior**, em 16/02/2023, às 10:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3534375** e o código CRC **53BCF168**.



Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

**Fernanda dos Anjos Félix Becatti**

Licenciada em Matemática pelo Instituto Federal de Goiás - IFG em 2019

Dedico este trabalho a Deus e a minha família.

---

## Agradecimentos

---

Agradeço primeiramente a Deus por me dar a vida e a oportunidade de fazer minhas escolhas, por estar comigo sempre.

Agradeço a minha mãe Maria Aparecida dos Anjos que sempre me apoiou e me ajudou a chegar onde estou. Agradeço a ela por cada dia que acordava pela manhã e batalhava para que eu pudesse ter uma educação que ela nunca teve a oportunidade de ter. Agradeço a ela por me dar forças para chegar onde estou hoje e ainda onde poderei chegar.

Agradeço a minha irmã Soraya Aline dos Anjos Felix que me apoiou durante os momentos difíceis.

Agradeço a meu avó José Cicero Felix por ter me ajudado financeiramente em diversos momentos que eu precisava, principalmente durante a graduação que não foi nada fácil. Agradeço a ele por sempre me incentivar a estudar e a crescer através dos estudos.

Agradeço a meu namorado Matheus José Pires Becatti por me apoiar todos os dias, por estar ao meu lado, por me motivar e me mostrar cada dia que eu sou capaz de conquistar tudo que eu desejo nesse mundo. Agradeço a ele por nunca me deixar desistir, por estar comigo e oferecendo um abraço a cada momento que eu pensava que não iria conseguir.

Agradeço a meus amigos Jeferson e Eduardo por me ajudarem nos estudos, por cada dia que reuníamos em grupo para estudar o dia todo no IME ou na biblioteca. Agradeço a eles por tornarem essa caminhada mais leve, por me apoiarem por me ajudarem todas as vezes que eu tinha dúvidas e por compartilharem os momentos do mestrado comigo.

Agradeço a meus amigos Daniel Chu, Vitória Chaves, Alessandra e Gabriella Cristina pelo apoio pelos momentos de estudo.

Agradeço a meu orientador Bruno que com muita paciência me auxiliou em todas as dúvidas que surgiram (e que foram muitas) e por ter aceitado me orientar. Agradeço por me deixar ainda mais fascinada pela área de Sistemas Dinâmicos, por ter me mostrado essa teoria que me motiva a querer cada vez mais estudar.

Agradeço aos meus professores do IFG que tiveram um papel essencial para que eu estivesse aqui hoje, em especial, a Regina, José Eder e Iran.

Agradeço aos meus professores do IME-UFG que contribuíram essencialmente na minha formação, agradeço em especial aos professores, Ronaldo Garcia, Kamila e Otávio Gomide.

Agradeço a CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Se tivésseis fé como um grão de mostarda (...) nada vos seria impossível..

**Mateus 17:20**

---

## Resumo

---

Becatti, Fernanda dos Anjos Félix. **Ciclos limite de grande amplitude em sistemas lineares definidos por partes**. Goiânia, 2023. 82p. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Universidade Federal de Goiás (UFG).

Neste trabalho tratamos de uma família de sistemas lineares planares e suaves por partes com duas zonas, e estudamos sobre o número máximo de ciclos limite que podem ser obtidos ao estudar as órbitas no infinito. Partimos de uma forma canônica com 12 parâmetros e reduzimos para até 5 o número de parâmetros para a análise. Investigamos questões relacionadas a estabilidade, caracterização das órbitas e outras propriedades que podem ser obtidas ao estudar a família de sistemas considerada.

### Palavras-chave

Equações diferenciais, Ciclos limite, Aplicação de Deslocamento, Foco Fraco, Centro.

---

## Abstract

---

Becatti, Fernanda dos Anjos Félix. **Large-Amplitude Limit Cycles in Piecewise Linear Systems**. Goiânia, 2023. 82p. MSc. Dissertation. Programa de Pós Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Universidade Federal de Goiás (UFG).

In this paper we deal with a family of piecewise smooth planar linear systems with two zones, we study about the maximum number of limit cycles that can be obtained when studying the orbit at infinity. We start from a canonical form with 12 parameters and reduce the number of parameters to 5 for the analysis. We investigate questions related to stability, characterization of the orbits and other properties that can be obtained by studying the family of systems under consideration.

### Keywords

Differential Equations, Limit Cycles, Displacement Function, Weak Focus, Center.

---

# Sumário

---

Introdução	<b>15</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>18</b>
1.1 Sistemas Suaves por partes	18
1.2 Solução Local	19
1.3 Singularidades	24
1.4 Equivalência Topológica	25
<b>2 Sistemas lineares por partes no plano</b>	<b>26</b>
2.1 Forma Canônica	26
2.2 Forma canônica com monodromia no infinito	37
<b>3 Estudo dos ciclos limite de grande amplitude</b>	<b>47</b>
3.1 Aplicação de Poincaré	47
3.2 Mapa de Deslocamento	49
3.3 Cálculo dos coeficientes da expansão do mapa de deslocamento de Poincaré	50
3.4 Caracterização dos centros	55
3.5 Caracterização do Foco Fraco e suas perturbações	61
3.6 Ciclos Limite que bifurcam de centros	69
3.7 Exemplo	76
3.8 Conclusão	79
<b>A Teoremas e Lemas Fundamentais</b>	<b>80</b>
A.1 Definições e Teoremas	80
Referências Bibliográficas	<b>81</b>

---

## Introdução

---

A teoria qualitativa dos sistemas dinâmicos tem por objetivo estudar o comportamento de um sistema ao longo do tempo. O estudo da teoria qualitativa de sistemas dinâmicos, foi iniciado por Poincaré, Birkhoff, Smale, Palis, A. A. Andronov e outros, ver mais detalhes em [1], [15] e [17]. O famoso matemático, físico e filósofo de origem francesa Henri Poincaré percebeu que para certos sistemas é necessário fazer um estudo geométrico e por volta de 1881 surgem os primeiros indícios de estudo da teoria qualitativa das equações diferenciais apresenta por ele.

O estudo de tais sistemas veio da necessidade de estudar comportamentos caóticos que muitas vezes ocorrem quando se estuda fenômenos físicos. Podemos citar alguns dos problemas mais estudados na época do surgimento de tal teoria como por exemplo: problemas da astronomia e da mecânica celeste. Em mecânica celeste os estudiosos estavam instigados a avaliar o comportamento futuro dos planetas do sistema solar e prever se poderiam chocar uns com outros. Outros fenômenos físicos que estão associados a tais sistemas, podemos citar, a dinâmica populacional, deformações elásticas, modelagem de sistemas biológicos e diversos outros.

A primeira ideia sobre ciclos limite surge com alguns estudos de Poincaré (ver em [15]) mas apenas algum tempo depois por volta da década de 20 que Van der Pol, Liénard e Andronov, ao estudar os fenômenos físicos (em específico as oscilações não lineares) verificaram que de fato existiam tais ciclos limite.

O interesse por sistemas que exibem ciclos limite ampliou-se quando em 1900 em um congresso internacional matemático em Paris, Hilbert propôs uma lista contendo 23 problemas, dentre esses problemas um deles teve bastante atenção por parte dos matemáticos e físicos. O 16º problema de Hilbert, está dividido em duas partes e uma delas é de interesse em geometria algébrica e a outra em sistemas dinâmicos. O problema busca determinar uma cota máxima de ciclos limite para sistemas diferenciais polinomiais no plano e suas posições relativas. Este problema pode ser encontrado em [20]. Esse problema que é muito famoso não só na pesquisa matemática, mas também em outras áreas da ciência não foi resolvido ainda devido a sua complexidade. Dessa forma, com o tempo surgiram algumas versões simplificadas do problema como por exemplo: a equação de Abel, equação de Lienard, o problema infinitesimal de Hilbert, o problema de Hilbert-

Arnold [10].

Uma das primeiras classes de sistemas diferenciais a ser estudado foi a classe quadrática analítica. Em 1934 Bautin mostrou que no máximo 3 ciclos limite de pequena amplitude podem surgir ao perturbar pontos singulares do tipo centro, veja em [2]. Uma prova moderna deste resultado pode ser encontrada em [19]. Já a classe de sistemas cúbicos sem termos quadráticos foi estudado por Sibirski em [16], mas a prova completa de que apenas 5 ciclos limite de pequena amplitude bifurcam da origem foi provado por Zoladek em 1995, veja em [21].

Historicamente o estudo dos campos vetoriais suaves por partes surgem com a formulação teórica apresentada por volta de 1988 pelo matemático Filippov em seu trabalho publicado *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides* [3]. Uma das principais dificuldades que surge ao estudar campos de vetores suaves por partes é determinar uma forma canônica adequada, e outra dificuldade que surge é entender como se comportam as soluções que passam pela região de descontinuidade do sistema. Graças aos trabalhos de Filippov foi possível entender a dinâmica do campo na região de descontinuidade, mas mesmo com suas formulações o estudo desse tipo de sistema ainda é complicado.

Com o passar do tempo alguns pesquisadores começaram a desenvolver técnicas para estudar questões relacionadas a existência e estabilidade, desse tipo de sistema. Mais recentemente podemos citar o método de regularização de campos de vetores suaves por partes introduzido por Sotomayor e Teixeira, ver método em [18]. Uma técnica apresentada em [4] no estudo de sistemas lineares por partes no plano consiste em estudar o mapa de retorno de Poincaré perto da órbita periódica no infinito para determinar uma cota para o número máximo de ciclos limites. Normalmente a técnica mais utilizadas nestes casos é estudar o ideal de Bautin formado pelos coeficientes do mapa de deslocamento, que são conhecidos por coeficientes de Liapunov. Essa ideia foi apresentada anteriormente em [7].

Este trabalho tem como objetivo encontrar uma cota inferior para o número máximo de ciclos limite que são obtidos ao perturbar centro ou foco fraco partindo de um sistema linear por partes no plano. Usamos como principal referência o trabalho de Ponce et al [4].

A dissertação está organizada da seguinte maneira:

No Capítulo 1, apresentamos os conceitos essenciais para o estudo de um sistema linear planar descontínuo e algumas propriedades e definições. Focamos em apresentar os resultados mais importantes que serão utilizados no decorrer de toda a dissertação como por exemplo, como são definidas as regiões  $\Sigma^c$ ,  $\Sigma^e$  e  $\Sigma^s$ , as soluções locais e um pouco sobre equivalência topológica.

No Capítulo 2, buscamos estudar as formas canônicas consideradas no artigo

Ponce et al [4] e os tipos de retratos de fase possíveis para os centros. Apresentamos detalhadamente como são feitas as mudanças canônicas sempre preservando a dinâmica do sistema, essencialmente a região de descontinuidade  $\Sigma$ .

No Capítulo 3, analisamos a função deslocamento e a aplicação de Poincaré, em especial determinamos as condições para obter ciclos limite ao perturbar centros e focos fracos. Veremos que no máximo 3 ciclos limite podem bifurcar de um foco fraco ou centro no infinito.

## Preliminares

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos que serão fundamentais para o estudo de sistemas suaves por partes. Esses sistemas são conhecidos por Sistemas de Filippov. Buscamos apresentar definições e algumas propriedades desses sistemas, como por exemplo, as soluções locais e também as singularidades. Para maiores detalhes a base teórica pode ser encontrada em Guardia et al. (2010) [8].

### 1.1 Sistemas Suaves por partes

Seja  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^2$  que contém a origem e  $X$  e  $Y$  campos de vetores de classe  $C^k$  definidos em  $U$ . Defina  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$  que tem 0 como valor regular. Seja  $\Sigma = f^{-1}(0) \cap U$  a subvariedade diferenciável de dimensão um que divide  $U$  em duas regiões,

$$\begin{aligned}\Sigma^+ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) > 0\}, \\ \Sigma^- &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) < 0\}.\end{aligned}$$

Um sistema planar de Filippov é um campo suave por partes  $Z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por:

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) & (x, y) \in \Sigma^+, \\ Y(x, y) & (x, y) \in \Sigma^-. \end{cases} \quad (1-1)$$

Consideramos  $\Omega_\Sigma$  o espaço dos campos de vetores  $Z$  e  $\Omega$  o espaço dos campos de vetores  $X$  e  $Y$ . Aqui  $X$  e  $Y$  estão definidos em  $\overline{\Sigma^+}$  e  $\overline{\Sigma^-}$  respectivamente e  $\Sigma$  é a curva de descontinuidade do sistema. Assumiremos que o campo é de classe  $C^k$  em  $\Sigma^+$  e  $\Sigma^-$ , pois  $\Sigma$  é o único conjunto do plano onde o campo não é regular.

Queremos estabelecer a dinâmica dada pelo campo  $Z \in \Omega_\Sigma$ . Tomaremos, para simplificar as definições,  $f(x, y) = y$ , isto é, a descontinuidade é dada por  $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}$ .

**Definição 1.1**  $Xf(p) = X(p) \cdot \nabla f(p)$  é a derivada de Lie de  $f$  com respeito ao campo  $X$  no ponto  $p$  e  $Yf(p) = Y(p) \cdot \nabla f(p)$  é a derivada de Lie de  $f$  com respeito ao campo  $Y$  no ponto  $p$ .

**Definição 1.2** Os pontos de equilíbrio serão definidos como segue:

1. Um ponto  $p$  é dito ponto de equilíbrio para o campo  $X$  (resp.  $Y$ ) quando  $X(p) = 0$  (resp.  $Y(p) = 0$ );
2. Um ponto  $p$  é dito ponto de equilíbrio real para o campo  $X$  (resp.  $Y$ ) quando  $p \in \Sigma^+$  e  $X(p) = 0$  (resp.  $p \in \Sigma^-$  e  $Y(p) = 0$ );
3. Um ponto  $p$  é dito ponto de equilíbrio virtual para o campo  $X$  (resp.  $Y$ ) quando  $p \in \Sigma^-$  e  $X(p) = 0$  (resp.  $p \in \Sigma^+$  e  $Y(p) = 0$ ).

**Observação 1.1** Um ponto  $p \in \Sigma$  é dito ponto de tangência para o campo  $X$  (resp.  $Y$ ) quando  $Xf(p) = 0$  (resp.  $Yf(p) = 0$ ). Se  $Xf(p) = 0$  mas  $X(p) \neq 0$  então a trajetória que passa por  $p$  é de fato tangente à  $\Sigma$ , mas  $Xf(p) = 0$  também inclui os pontos  $p \in \Sigma$  para os quais  $X(p) = 0$  que são os pontos críticos de  $X$  em  $\Sigma$  [12].

**Definição 1.3** Os pontos de tangência podem ser classificados da seguinte maneira:

1. Um ponto  $p \in \Sigma$  é dito uma dobra ou tangência quadrática para o campo  $X$  (resp.  $Y$ ) quando  $Xf(p) = 0$  e  $X^2f(p) \neq 0$  (resp.  $Yf(p) = 0$  e  $Y^2f(p) \neq 0$ );
2. Um ponto  $p$  é dito ponto de tangência (ou dobra) visível para o campo  $X$  (resp.  $Y$ ) se for ponto de tangência do campo  $X$  (resp.  $Y$ ) e  $X^2f(p) > 0$  (resp.  $Y^2f(p) < 0$ );
3. Um ponto  $p$  é dito ponto de tangência (ou dobra) invisível para o campo  $X$  (resp.  $Y$ ) se for ponto de tangência do campo  $X$  (resp.  $Y$ ) e  $X^2f(p) < 0$  (resp.  $Y^2f(p) > 0$ );
4. Um ponto  $p \in \Sigma$  é dito uma cúspide ou tangência cúbica para o campo  $X$  (resp.  $Y$ ) quando  $Xf(p) = X^2f(p) = 0$  e  $X^3f(p) \neq 0$  (resp.  $Yf(p) = Y^2f(p) = 0$  e  $Y^3f(p) \neq 0$ ).

A próxima seção será dedicada a estabelecer as soluções locais do sistema em  $\Sigma^+$  e  $\Sigma^-$ . Daremos mais atenção a estudar as órbitas que passam pelo conjunto de descontinuidade  $\Sigma$  e para isso utilizaremos a convenção de Filippov.

## 1.2 Solução Local

**Definição 1.4** Sejam  $X \subset U$ ,  $U$  aberto de  $\mathbb{R}^2$  e  $I$  intervalo da reta. Para todo  $t \in I$  a solução do campo  $X$  que passa pelo ponto  $p \in \overline{\Sigma^+}$  no tempo  $t = 0$  denotado por  $\varphi_X$  satisfaz,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi_X(t, p) = X(\varphi_X(t, p)), \\ \varphi_X(0, p) = p. \end{cases} \quad (1-2)$$

Analogamente definimos a solução do campo  $Y$  que passa pelo ponto  $p \in \overline{\Sigma^-}$  no tempo  $t = 0$ .

Podemos analisar a derivada de Lie de  $f$  na direção dos campos  $X(p)$  e  $Y(p)$  nos pontos de  $\Sigma$  de modo a determinar como as soluções de  $X(p)$  e  $Y(p)$  se comportam em  $\Sigma$ . Seja  $\gamma(s)$  uma parametrização local de  $\Sigma$  logo,

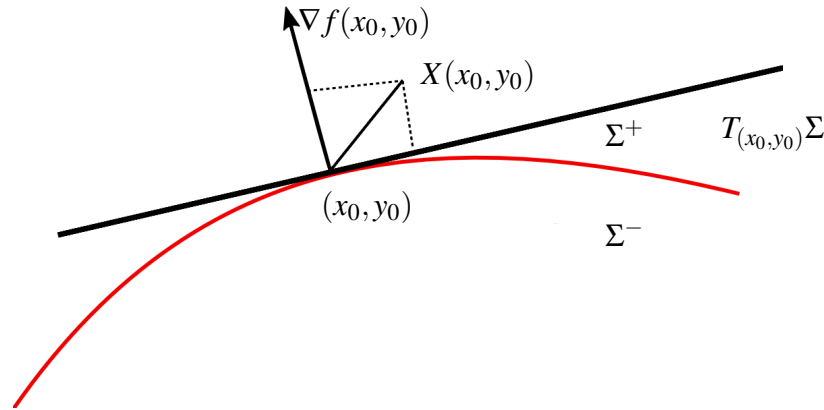
$$0 = \frac{d}{ds} f(\gamma(s))|_{s=0} = \nabla f(\gamma(s)) \cdot \dot{\gamma}'(0) = \nabla f(x_0, y_0) \dot{\gamma}'(0). \quad (1-3)$$

Como  $T_{(x_0, y_0)}\Sigma = \langle \dot{\gamma}'(0) \rangle$ , segue que  $\nabla f(x_0, y_0) \in T_{(x_0, y_0)}\Sigma^\perp$ . Assim obtemos um sistema ortogonal de coordenadas  $(x_0, y_0)$ , e assim podemos escrever o vetor  $X(x_0, y_0)$  como,

$$X(x_0, y_0) = \frac{\langle X(x_0, y_0), \nabla f(x_0, y_0) \rangle}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|^2} \nabla f(x_0, y_0) + \frac{\langle X(x_0, y_0), \dot{\gamma}'(0) \rangle}{\|\dot{\gamma}'(0)\|^2} \dot{\gamma}'(0). \quad (1-4)$$

Da mesma maneira podemos escrever o vetor  $Y(x_0, y_0)$  como,

$$Y(x_0, y_0) = \frac{\langle Y(x_0, y_0), \nabla f(x_0, y_0) \rangle}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|^2} \nabla f(x_0, y_0) + \frac{\langle Y(x_0, y_0), \dot{\gamma}'(0) \rangle}{\|\dot{\gamma}'(0)\|^2} \dot{\gamma}'(0). \quad (1-5)$$



**Figura 1.1:** Comportamento da curva  $\Sigma$  com relação ao vetor gradiente da função.

Logo podemos determinar as soluções locais como segue

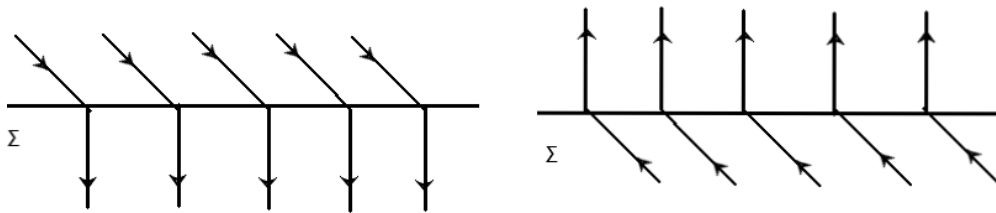
- (1) Se  $Xf(x_0, y_0) > 0$  e  $Yf(x_0, y_0) > 0$  então as soluções  $\phi_x, \phi_y$  em  $(x_0, y_0)$  apontam para a mesma direção de  $\Sigma^-$  para  $\Sigma^+$ .
- (2) Se  $Xf(x_0, y_0) < 0$  e  $Yf(x_0, y_0) < 0$  então as soluções  $\phi_x, \phi_y$  em  $(x_0, y_0)$  apontam para a mesma direção de  $\Sigma^+$  para  $\Sigma^-$ .
- (3) Se  $Xf(x_0, y_0) < 0$  e  $Yf(x_0, y_0) > 0$  então as soluções  $\phi_x, \phi_y$  em  $(x_0, y_0)$  apontam para direções opostas,  $\phi_x$  aponta de  $\Sigma^+$  para  $\Sigma^-$  e  $\phi_y$  aponta de  $\Sigma^-$  para  $\Sigma^+$  de modo que ambas as soluções apontam para  $\Sigma$ .

- (4) Se  $Xf(x_0, y_0) > 0$  e  $Yf(x_0, y_0) < 0$  então as soluções  $\varphi_x, \varphi_y$  em  $(x_0, y_0)$  apontam para direções opostas,  $\varphi_x$  aponta de  $\Sigma^-$  para  $\Sigma^+$  e  $\varphi_y$  aponta de  $\Sigma^+$  para  $\Sigma^-$  de modo que ambas as soluções apontam em direções opostas em relação a  $\Sigma$ .

Nas definições a seguir, distinguiremos as possíveis regiões em  $\Sigma$ .

**Definição 1.5** Um ponto  $p = (x, 0) \in \Sigma$  será dito de costura se  $Xf(p) \cdot Yf(p) > 0$ . O conjunto desses pontos será chamado de Região de costura e é dado por:

$$\Sigma^c = \{p \in \Sigma; Xf(p) \cdot Yf(p) > 0\}. \quad (1-6)$$

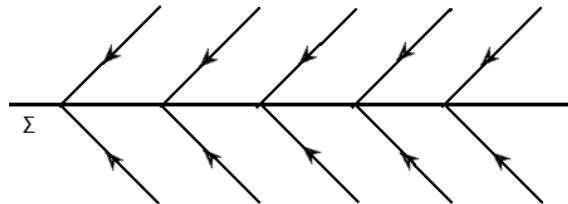


**Figura 1.2:** Região de costura.

Para o estudo das órbitas que chegam na linha de descontinuidade  $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}$  usaremos a definição a seguir.

**Definição 1.6** Um ponto  $p = (x, 0) \in \Sigma$  será dito de deslize se  $Xf(p) < 0, Yf(p) > 0$ . O conjunto desses pontos será chamado de Região de deslize e é dado por:

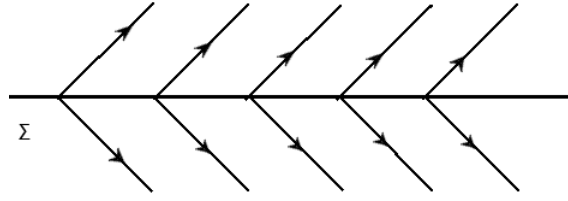
$$\Sigma^s = \{p \in \Sigma; Xf(p) < 0, Yf(p) > 0\}. \quad (1-7)$$



**Figura 1.3:** Região de deslize.

**Definição 1.7** Um ponto  $p = (x, 0) \in \Sigma$  será dito de escape se  $Xf(p) > 0, Yf(p) < 0$ . O conjunto desses pontos será chamado de Região de escape e é dado por:

$$\Sigma^e = \{p \in \Sigma; Xf(p) > 0, Yf(p) < 0\}. \quad (1-8)$$



**Figura 1.4:** Região de escape.

Utilizaremos neste trabalho a convenção de Filippov, dada na definição seguinte.

**Definição 1.8** Seja  $Z^s(p)$  tangente a  $\Sigma$  em  $p$ . Para  $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$  o campo vetorial deslizante é a combinação linear convexa dos campos  $X(p)$  e  $Y(p)$ ,

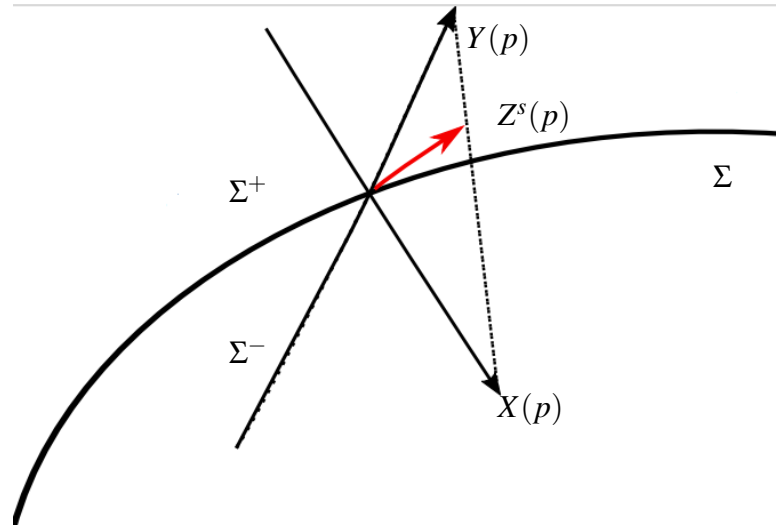
$$Z^s(p) = \{X(p)\lambda + Y(p)(1 - \lambda), \lambda \in [0, 1]\}. \quad (1-9)$$

Como  $Z^s(p)$  é tangente a  $\Sigma$  em  $p$  e  $T_p\Sigma = \langle \nabla f(p) \rangle^\perp$  logo temos que,

$$\begin{aligned} \langle Z^s(p), \nabla f(p) \rangle = 0 &\Leftrightarrow \langle X(p)\lambda + Y(p)(1 - \lambda), \nabla f(p) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle X(p), \nabla f(p) \rangle \lambda + \langle Y(p), \nabla f(p) \rangle (1 - \lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow Xf(p)\lambda + Yf(p)(1 - \lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow (Xf(p) - Yf(p))\lambda = -Yf(p) \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{Yf(p)}{Xf(p) - Yf(p)}, \end{aligned}$$

para algum  $\lambda \in [0, 1]$  e  $Xf(p) - Yf(p) \neq 0$ . Logo obtemos o **Campo Vetorial Deslizante**,

$$Z^s(p) = \frac{Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)}{Yf(p) - Xf(p)}. \quad (1-10)$$



**Figura 1.5:** Campo Vetorial Deslizante

**Definição 1.9** Dado o campo Vetorial Deslizante  $Z(x,y)$  definimos a trajetória local que passa por um ponto  $p$  da seguinte maneira:

1. Para um ponto  $p \in \Sigma^+, \Sigma^-$  tal que  $p$  não é ponto de tangência de  $X$  e  $Y$ , a trajetória local é dada por  $\Phi_X$  e  $\Phi_Y$  respectivamente.
2. Para um ponto  $p \in \Sigma^c$  com  $Xf(p) > 0$  e  $Yf(p) > 0$  a trajetória local é  $\Phi_Z(t,p) = \Phi_X(t,p)$  para todo  $t \in I \cap \{t \geq 0\}$  e  $\Phi_Z(t,p) = \Phi_Y(t,p)$  para todo  $t \in I \cap \{t \leq 0\}$ . Analogamente invertendo o tempo temos definido para  $Xf(p) < 0$  e  $Yf(p) < 0$ .
3. Para um ponto  $p \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$  onde  $Z^s(p) \neq 0$ ,  $\Phi_Z(t,p) = \Phi_{Z^s}(t,p)$  para  $t \in \mathbb{R}$  onde  $Z^s$  é o campo vetorial deslizante 1.8.
4. Para um ponto  $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$  tais que as definições de trajetórias para pontos em  $\Sigma$  em ambos os lados de  $p$  podem ser estendidas para  $p$  e coincidem, a trajetória por  $p$  é esta trajetória. Chamaremos estes pontos de pontos de tangência regulares.
5. Para os pontos que não foram contemplados nos itens acima, definimos  $\Phi_Z(t,p) = p$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Aqui estão os pontos de tangência não regulares, chamados tangências singulares, os pontos críticos de  $X$  e  $Y$  em  $\Sigma^+, \Sigma^-$  e pontos críticos do campo deslizantes  $Z^s$  em  $p \in \partial\Sigma^e \cup \partial\Sigma^s$ .

**Definição 1.10** A órbita local que passa por um ponto  $p \in U$  é dada por:

$$\gamma(p) = \{\Phi_Z(t,p) : t \in I\}. \quad (1-11)$$

## 1.3 Singularidades

Neste momento iremos nos dedicar a determinar as singularidades, e para isso será necessário estabelecer conceitos que são as chamadas singularidades distinguidas e não distinguidas que são utilizados para diferenciar os possíveis equilíbrios que possam surgir no sistema.

**Definição 1.11** *Se  $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$  então  $p$  é pseudo-equilíbrio de um Campo vetorial Deslizante quando  $Z^s(p) = 0$ . Podemos classificar esses pontos da seguinte maneira,*

1. Um ponto  $p \in \Sigma^s$  é dito pseudo estável quando  $Z^s(p) = 0$  e  $(Z^s)'(p) < 0$ .
2. Um ponto  $p \in \Sigma^e$  é dito pseudo instável quando  $Z^s(p) = 0$  e  $(Z^s)'(p) > 0$ .
3. Um ponto  $p \in \Sigma^e$  é dito pseudo sela quando  $Z^s(p) = 0$  e  $(Z^s)'(p) < 0$ .
4. Um ponto  $p \in \Sigma^s$  é dito pseudo sela quando  $Z^s(p) = 0$  e  $(Z^s)'(p) > 0$ .

**Observação 1.2** *Se  $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$  é um pseudo-equilíbrio, então pela equação de  $Z^s(p)$ , temos que  $Yf(p) \neq 0$  e  $Xf(p) \neq 0$ , e além disso  $Yf(p) - Xf(p) \neq 0$ . Logo  $Z^s(p) = 0 \Leftrightarrow X(p) = \frac{Xf(p)}{Yf(p)}Yf(p)$ , e portanto  $X(p)$  e  $Y(p)$  são anticolineares.*

**Definição 1.12** *As Singularidades de um Campo Vetorial de Filippov são,*

1. Os pontos  $p \in \Sigma^\pm$ , tal que  $p$  é um equilíbrio de um dos campos  $X$  ou  $Y$ .
2. Os pontos  $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ , tal que  $p$  é um pseudo equilíbrio.
3. Os pontos  $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ , tal que  $p$  é um ponto de tangência regular ou singular.

**Definição 1.13** *Podemos classificar as singularidades como:*

1. Singularidades distinguida, são pontos  $p$  tais que  $\gamma(p) = \{p\}$ ;
2. Singularidades não-distinguida, são os pontos  $p \in \Sigma$  que são pontos de tangência regulares e então, mesmo que eles não sejam pontos regulares, suas órbitas locais são homeomorfas a  $\mathbb{R}$ .

**Definição 1.14** *As singularidades distinguidas são classificados como segue.*

- (a) Pontos de equilíbrio do campo  $X$  ou do campo  $Y$ .
- (b) Os pseudo-equilíbrios.
- (c) Os pontos de tangência singular.

**Definição 1.15** *Seja  $p \in \Sigma$  e a trajetória  $\Phi_Z(t, q) \in \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ . Diremos que:*

1. o ponto  $p$  é um ponto de partida, se existe  $t_0 < 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \Phi_Z(t, q) = p$ ;
2. o ponto  $p$  é um ponto de chegada, se existe  $t_0 > 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \Phi_Z(t, q) = p$ .

## 1.4 Equivalência Topológica

Um dos questionamentos que surgem ao estudar sistemas suaves por partes é como estabelecer uma relação de equivalência entre dois sistemas deste tipo. Os resultados já estabelecidos para sistemas suaves não podem ser simplesmente trasladados para os sistemas de Filippov pois neste tipo de sistema existe uma região de descontinuidade onde a dinâmica do sistema comporta-se de uma maneira diferente. Precisamos estabelecer essa equivalência de modo a preservar toda a estrutura geométrica e dinâmica do sistema, e para isso é necessário fazer uma generalização dos conceitos já estudados em equações diferenciais. Vejamos a seguir as definições estabelecidas, e para maiores detalhes sugerimos uma consulta a Larrosa (2012) [12].

**Definição 1.16** *Sejam  $Z \subset \Omega_{\Sigma}(U)$  e  $\tilde{Z} \subset \Omega_{\Sigma}(\tilde{U})$  dois campos de Filippov com fronteiras de descontinuidade  $\Sigma \subset U$  e  $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$ . Dizemos que os dois campos são  $\Sigma$ -equivalentes (topologicamente) se existe um homeomorfismo  $h : U \rightarrow \tilde{U}$  que leva órbitas de  $Z$  em órbitas de  $\tilde{Z}$  preservando orientação e leva  $\Sigma$  em  $\tilde{\Sigma}$ .*

**Definição 1.17** *Um sistema  $Z_0 \in \Omega_{\Sigma}(U)$  é  $\Sigma$ -estruturalmente estável se existe uma vizinhança  $V \subset \Omega_{\Sigma}(U)$  de  $Z_0$  tal que para todo  $Z \in V$ ,  $Z$  e  $Z_0$  são  $\Sigma$ -equivalentes.*

**Definição 1.18** *Um sistema  $Z_0 \in \Omega_{\Sigma}(U)$ , é dito localmente  $\Sigma$ -estruturalmente estável em  $p$  se existe uma vizinhança  $V \subset U$  de  $p$  tal que  $Z_0|_V \in \Omega_{\Sigma}(V)$  é estruturalmente estável.*

## Sistemas lineares por partes no plano

Neste capítulo, iremos estudar uma classe de sistemas lineares por partes no plano e apresentaremos algumas formas canônicas que podem ser obtidas estudando tal sistema. Para essa classe consideramos que a descontinuidade é uma reta, que denotaremos por  $\Sigma$  e os campos  $X_L$  e  $X_R$  são lineares. Pretendemos ainda investigar a natureza dos pseudo-equilíbrio, pontos de tangência e equilíbrios real e virtual para o sistema.

### 2.1 Forma Canônica

Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x$ , partindo da Convenção de Filippov consideramos uma família de sistemas lineares por partes, separados pela reta  $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0\}$ . A princípio a forma geral desse sistema é dada por

$$Z(x, y) = \begin{cases} X_L = A_L x + b_L, & x \in \Sigma_L \cup \Sigma, \\ X_R = A_R x + b_R, & x \in \Sigma_R, \end{cases} \quad (2-1)$$

onde  $x = (x, y)^T$  é um vetor em  $\mathbb{R}^2$ ,  $A_R = (a_{ij}^R)$ ,  $A_L = (a_{ij}^L)$  são matrizes  $2 \times 2$  e  $b_L = (b_1^L, b_2^L)^T$ ,  $b_R = (b_1^R, b_2^R)^T$  são vetores constantes de  $\mathbb{R}^2$ . A reta  $\Sigma$  divide o plano em dois semiplanos

$$\begin{aligned} \Sigma_L &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0\}, \\ \Sigma_R &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}. \end{aligned}$$

Podemos agora analisar os sinais das componentes da derivada de Lie  $X_L f(0, y)$  e  $X_R f(0, y)$  e entender a dinâmica da região de costura, escape e deslize. Veja que,

$$X_L f(0, y) \cdot X_R f(0, y) = (a_{12}^L y + b_1^L)(a_{12}^R y + b_1^R), \quad (2-2)$$

e assim obtemos uma função quadrática de  $y$ . Se  $a_{12}^L a_{12}^R > 0$  a concavidade é voltada para a direita e se  $a_{12}^L a_{12}^R < 0$  a concavidade é voltada para a esquerda. Quando  $a_{12}^L a_{12}^R > 0$ , a

órbita cruza a linha de descontinuidade. Note que,

$$X_L f(0, y) \cdot X_R f(0, y) = (a_{12}^L y + b_1^L)(a_{12}^R y + b_1^R) = 0 \quad (2-3)$$

o que implica em,  $y = \frac{-b_1^R}{a_{12}^R}$  ou  $y = \frac{-b_1^L}{a_{12}^L}$ . Vamos estudar cada um dos casos  $a_{12}^L a_{12}^R > 0$ ,  $a_{12}^L a_{12}^R < 0$  e  $a_{12}^L a_{12}^R = 0$ , a seguir:

(I) Seja  $a_{12}^L > 0$  e  $a_{12}^R > 0$ . Suponha que,

(a)  $\frac{-b_1^R}{a_{12}^R} < \frac{-b_1^L}{a_{12}^L}$ , então

$$\Sigma^c = \{(x, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^L}{a_{12}^L} < y \text{ ou } y < \frac{-b_1^R}{a_{12}^R}\}$$

$$\Sigma^e = \{(x, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^R}{a_{12}^R} < y < \frac{-b_1^L}{a_{12}^L}\}.$$

(b)  $\frac{-b_1^L}{a_{12}^L} < \frac{-b_1^R}{a_{12}^R}$ , então

$$\Sigma^c = \{(x, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^R}{a_{12}^R} < y \text{ ou } y < \frac{-b_1^L}{a_{12}^L}\}$$

$$\Sigma^s = \{(x, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^L}{a_{12}^L} < y < \frac{-b_1^R}{a_{12}^R}\}.$$

(II) Seja  $a_{12}^L < 0$  e  $a_{12}^R < 0$ . Suponha que,

(a)  $\frac{-b_1^R}{a_{12}^R} < \frac{-b_1^L}{a_{12}^L}$ , então

$$\Sigma^c = \{(x, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^L}{a_{12}^L} < y \text{ ou } y < \frac{-b_1^R}{a_{12}^R}\}$$

$$\Sigma^s = \{(x, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^R}{a_{12}^R} < y < \frac{-b_1^L}{a_{12}^L}\}.$$

(b)  $\frac{-b_1^L}{a_{12}^L} < \frac{-b_1^R}{a_{12}^R}$ , então

$$\Sigma^c = \{(x, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^R}{a_{12}^R} < y \text{ ou } y < \frac{-b_1^L}{a_{12}^L}\}$$

$$\Sigma^e = \{(x, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^L}{a_{12}^L} < y < \frac{-b_1^R}{a_{12}^R}\}.$$

(III) Seja  $a_{12}^L > 0$  e  $a_{12}^R < 0$ . Suponha que,

$$(a) \frac{-b_1^R}{a_{12}^R} < \frac{-b_1^L}{a_{12}^L}, \text{ então}$$

$$\Sigma^c = \{(x, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^R}{a_{12}^R} < y < \frac{-b_1^L}{a_{12}^L}\}$$

$$\Sigma^s = \{(x, y) \in \Sigma; y > \frac{-b_1^L}{a_{12}^L}\}$$

$$\Sigma^e = \{(x, y) \in \Sigma; y < \frac{-b_1^R}{a_{12}^R}\}.$$

$$(b) \frac{-b_1^L}{a_{12}^L} < \frac{-b_1^R}{a_{12}^R}, \text{ então}$$

$$\Sigma^c = \{(x, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^L}{a_{12}^L} < y < \frac{-b_1^R}{a_{12}^R}\}$$

$$\Sigma^s = \{(x, y) \in \Sigma; y < \frac{-b_1^L}{a_{12}^L}\}$$

$$\Sigma^e = \{(x, y) \in \Sigma; y > \frac{-b_1^R}{a_{12}^R}\}.$$

(IV) Seja  $a_{12}^L < 0$  e  $a_{12}^R > 0$ . Suponha que,

$$(a) \frac{-b_1^R}{a_{12}^R} < \frac{-b_1^L}{a_{12}^L}, \text{ então}$$

$$\Sigma^c = \{(x, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^R}{a_{12}^R} < y < \frac{-b_1^L}{a_{12}^L}\}$$

$$\Sigma^s = \{(x, y) \in \Sigma; y < \frac{-b_1^R}{a_{12}^R}\}$$

$$\Sigma^e = \{(x, y) \in \Sigma; y > \frac{-b_1^L}{a_{12}^L}\}.$$

$$(b) \frac{-b_1^L}{a_{12}^L} < \frac{-b_1^R}{a_{12}^R}, \text{ então}$$

$$\Sigma^c = \{(x, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^L}{a_{12}^L} < y < \frac{-b_1^R}{a_{12}^R}\}$$

$$\Sigma^s = \{(x, y) \in \Sigma; y < \frac{-b_1^L}{a_{12}^L}\}$$

$$\Sigma^e = \{(x, y) \in \Sigma; y > \frac{-b_1^R}{a_{12}^R}\}.$$

(V) Seja  $a_{12}^L > 0$  e  $a_{12}^R = 0$ , então

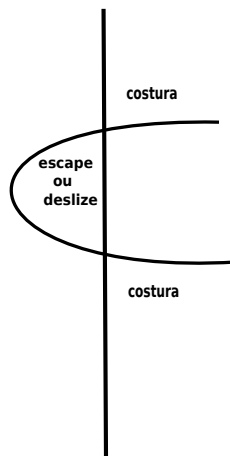
$$\Sigma^c = \{(x, y) \in \Sigma; y > \frac{-b_1^L}{a_{12}^L}\}.$$

(VI) Seja  $a_{12}^L = 0$  e  $a_{12}^R > 0$ , então

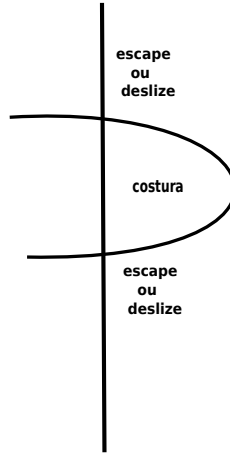
$$\Sigma^c = \{(x, y) \in \Sigma; y > \frac{-b_1^R}{a_{12}^R}\}.$$

Portanto podemos fazer as seguintes observações,

- (1) Se  $a_{12}^L a_{12}^R > 0$  a região de costura são dois intervalos abertos ilimitados, e os outros pontos que não são de costura estão escapando ou deslizando em uma região limitada do eixo  $y$ ;
- (2) Se  $a_{12}^L a_{12}^R < 0$  a região de costura é um intervalo aberto limitado, e os outros pontos que não são de costura estão escapando e deslizando em uma região ilimitada do eixo  $y$ ;
- (3) Se  $a_{12}^L a_{12}^R = 0$  o conjunto de costura são dois intervalos abertos ilimitados, e os outros pontos que não são de costura estão escapando ou deslizando em uma região também ilimitada do eixo  $y$ .



**Figura 2.1:** Caso  $a_{12}^L a_{12}^R > 0$ .



**Figura 2.2:** Caso  $a_{12}^L a_{12}^R < 0$ .

Veja que com a condição genérica  $a_{12}^L a_{12}^R > 0$  podem existir órbitas periódicas de costura. Mas no caso em que  $a_{12}^L a_{12}^R < 0$ , a órbita que sai de um ponto da região de costura nunca retorna para o mesmo ponto, o que exclui a possibilidade de existência de órbitas periódicas costurantes. Portanto estudaremos apenas o caso em que  $a_{12}^L a_{12}^R > 0$ .

Uma das principais dificuldades de estudar essa classe de sistema é a quantidade de parâmetros a serem analisados. Observe que no estudo inicial foi considerado uma classe de sistema com exatamente 12 parâmetros. Para contornar esse tipo de problema podemos reduzir ao máximo o número de parâmetros da forma canônica. A proposição a seguir irá estabelecer que para um certo homeomorfismo conveniente o sistema (2-1) se reduz a uma forma canônica com 7 parâmetros.

**Proposição 2.1** Considerando (2-1) podemos definir um homeomorfismo  $\bar{X} = h(X)$  dado por,

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{12}^R} \begin{pmatrix} a_{12}^L & 0 \\ a_{12}^L a_{22}^R & -a_{12}^L a_{12}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ b_1^L \end{pmatrix}, \quad (2-4)$$

e

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{12}^L} \begin{pmatrix} a_{12}^R & 0 \\ a_{12}^R a_{22}^L & -a_{12}^R a_{12}^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ b_1^L \end{pmatrix}, \quad (2-5)$$

se  $x > 0$  e  $x < 0$  respectivamente. Esse homeomorfismo  $h$  transforma o sistema (2-1) em uma forma canônica com 7 parâmetros,

$$Z = \begin{cases} X_L = \begin{pmatrix} T_L & -1 \\ D_L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ a_L \end{pmatrix}, & \bar{X} \in \Sigma_L \\ X_R = \begin{pmatrix} T_R & -1 \\ D_R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -b \\ a_R \end{pmatrix}, & \bar{X} \in \Sigma_R \end{cases} \quad (2-6)$$

onde  $T_L$  e  $D_L$ ,  $T_R$  e  $D_R$  correspondem ao traço e determinante das matrizes  $A_L$  e  $A_R$  respectivamente. Observe que as regiões de costura, deslize e os pontos de tangência e equilíbrios do sistema (2-1) são transformados pelo homeomorfismo  $h$  em conjuntos e pontos do mesmo tipo para o sistema (2-6). Obtemos uma equivalência topológica entre (2-1) e (2-6), considerando apenas órbitas costurantes [5].

*Prova.* Para o sistema do lado direito  $\Sigma_R$ , iremos considerar o seguinte homeomorfismo:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{12}^R} \begin{pmatrix} a_{12}^L & 0 \\ a_{12}^L a_{22}^R & -a_{12}^L a_{12}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ b_1^L \end{pmatrix}. \quad (2-7)$$

Considere a nova variável de tempo definida por  $T = I^R t$  e  $T = I^L t$  satisfazendo a condição  $I^R I^L > 0$ . Assim, sem perda de generalidade considere  $I^R = I^L = 1$ , logo  $\frac{dt}{dT} = 1$ . Derivando o homeomorfismo com respeito a  $t$  obtemos,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{a_{12}^L}{a_{12}^R} \dot{u}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{a_{12}^L a_{22}^R}{a_{12}^R} \dot{u} - \frac{a_{12}^L a_{12}^R}{a_{12}^R} \dot{v}. \end{cases} \quad (2-8)$$

Como,

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^R & a_{12}^R \\ a_{21}^R & a_{22}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1^R \\ b_2^R \end{pmatrix}, \quad (2-9)$$

temos que,

$$\frac{dx}{dT} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dT} = \frac{a_{12}^L}{a_{12}^R} \dot{u} = \frac{a_{12}^L}{a_{12}^R} (a_{11}^R u + a_{12}^R v + b_1^R), \quad (2-10)$$

$$\frac{dy}{dT} = \frac{dy}{dt} = \frac{a_{12}^L a_{22}^R}{a_{12}^R} \dot{u} - \frac{a_{12}^L a_{12}^R}{a_{12}^R} \dot{v} = \frac{a_{12}^L a_{22}^R}{a_{12}^R} (a_{11}^R u + a_{12}^R v + b_1^R) - \frac{a_{12}^L a_{12}^R}{a_{12}^R} (a_{21}^R u + a_{22}^R v + b_2^R). \quad (2-11)$$

Note que do homeomorfismo (2-7) obtemos,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{12}^R}{a_{12}^L} & 0 \\ \frac{a_{22}^R}{a_{12}^L} & -\frac{1}{a_{12}^L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{b_1^L}{a_{12}^L} \end{pmatrix}. \quad (2-12)$$

Substituindo (2-12) em (2-10) e (2-11) obtemos,

$$\frac{dx}{dT} = \frac{a_{12}^L}{a_{12}^R} \left( a_{11}^R \frac{a_{12}^R}{a_{12}^L} x + a_{12}^R \frac{a_{22}^R}{a_{12}^L} x - \frac{a_{12}^R}{a_{12}^L} y - \frac{a_{12}^R b_1^L}{a_{12}^L} + b_1^R \right), \quad (2-13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dT} = & \frac{a_{12}^L a_{22}^R}{a_{12}^R} \left( a_{11}^R \frac{a_{12}^R}{a_{12}^L} x + a_{12}^R \frac{a_{22}^R}{a_{12}^L} x - \frac{a_{12}^R}{a_{12}^L} y - \frac{a_{12}^R b_1^L}{a_{12}^L} + b_1^R \right) \\ & - \frac{a_{12}^L a_{12}^R}{a_{12}^R} \left( a_{21}^R \frac{a_{12}^R}{a_{12}^L} x + a_{22}^R \frac{a_{22}^R}{a_{12}^L} x - \frac{a_{22}^R}{a_{12}^L} y - \frac{a_{22}^R b_1^L}{a_{12}^L} + b_2^R \right). \end{aligned} \quad (2-14)$$

Daí temos que,

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^R + a_{22}^R & -1 \\ a_{11}^R a_{22}^R - a_{12}^R a_{21}^R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a_{12}^L b_1^R}{a_{12}^R} - b_1^L \\ \frac{a_{12}^L a_{22}^R b_1^R}{a_{12}^R} - a_{12}^L b_2^R \end{pmatrix}. \quad (2-15)$$

Segue que,

$$X_R(\bar{X}) = \begin{pmatrix} T_R & -1 \\ D_R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -b \\ a_R \end{pmatrix}, \bar{X} \in \Sigma_R, \quad (2-16)$$

onde denotamos,

$$\begin{aligned} b &= \frac{a_{12}^L}{a_{12}^R} b_1^R - b_1^L, \\ a_R &= \frac{a_{12}^L}{a_{12}^R} (a_{12}^R b_2^R - a_{22}^R b_1^R). \end{aligned}$$

Analogamente considerando o homeomorfismo (2.1) para o sistema do lado esquerdo  $\Sigma_L$  mostra-se que,

$$X_L(\bar{X}) = \begin{pmatrix} T_L & -1 \\ D_L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ a_L \end{pmatrix}, \bar{X} \in \Sigma_L. \quad (2-17)$$

Portanto, a região de descontinuidade  $\Sigma$  e os conjuntos  $\Sigma^L$  e  $\Sigma^R$  são invariantes por  $h$ . As regiões de costura e deslize, os pontos de tangência e os pontos de equilíbrio de fronteira associados ao sistema (2-1) são transformados pelo homeomorfismo  $h$  em regiões, conjuntos e pontos do mesmo tipo para o sistema (2-6). Além disso, existe uma equivalência topológica entre os sistemas (2-1) e (2-6) para todas as órbitas que não têm pontos em comum com o conjunto deslizante [5].  $\square$

**Observação 2.1** *De acordo com a Proposição 3.1 de [5], a mudança de variáveis usada na prova do teorema é um homeomorfismo definido em todo o plano e leva a uma conjugação linear para cada campo vetorial em  $\Sigma_R$  e  $\Sigma_L$ , separadamente. A equivalência topológica pode ser estendida a região de costura, de modo que as órbitas periódicas da região de costura no sistema inicial também são transformadas, de forma homeomórfica, em órbitas periódicas da região de costura da forma canônica. Quando migramos para teoria dos ciclos limites e consideramos o caso em que os ciclos limite são do tipo de costura, em geral, a restrição deste homeomorfismo à reta de descontinuidade  $\Sigma$  não*

produz uma conjugação, a mudança (2.1) (2-5) é não suave, de modo que não se pode garantir equivalência entre campos vetoriais deslizantes correspondentes. Esta falta de equivalência entre os dois campos vetoriais deslizantes não é relevante se não estamos interessados na dinâmica que envolve órbitas deslizantes, como é o caso da análise, então a definição dada em [8] se aplica sempre que excluimos o conjunto deslizante  $\Sigma^s$ . Veja mais detalhes sobre preservação da dinâmica de deslizamento em [5]. Quando  $\Sigma^s$  se torna um ponto, não há dinâmica de deslizamento e os sistemas (2-1) e (2-6) são trivialmente  $\Sigma$ -equivalentes.

Note que em geral, o homeomorfismo  $h$  dado no Teorema anterior não induz uma equivalência topológica entre os campos de Filippov correspondentes. Devido a definição natural de uma trajetória local por um ponto da região de costura concluímos que o homeomorfismo  $h$  é uma conjugação se restrito a  $\mathbb{R}^2/\Sigma^s$ .

**Observação 2.2** Os parâmetros  $T_\Lambda = \text{tr}(A_\Lambda)$  e  $D_\Lambda = \text{tr}(A_\Lambda)$  (onde  $\Lambda \in \{L, R\}$ ) são os invariantes lineares em cada zona  $b_L = b$  e  $b_R = -b$  (que correspondem a existência de um conjunto deslizante) e  $a_L$  e  $a_R$  estão relacionados à posição de equilíbrio.

Nas proposições a seguir iremos investigar a natureza dos pontos de equilíbrio, pontos de tangência e pseudo-equilíbrios do sistema (2-6),

**Proposição 2.2** No sistema (2-6) os pontos de equilíbrio e os pontos de tangência podem ser determinados da seguinte maneira:

1. Se  $a_L = 0$  então o ponto  $(0, -b)$  é um ponto de equilíbrio para o campo  $X_L$ . Se  $a_L \neq 0$  então o ponto  $(0, -b)$  é um ponto de tangência para o campo  $X_L$ . O ponto de tangência  $(0, -b)$  é visível quando  $a_L < 0$  e invisível quando  $a_L > 0$ ;
2. Se  $a_R = 0$  então o ponto  $(0, b)$  é um ponto de equilíbrio para o campo  $X_R$ . Se  $a_R \neq 0$  então o ponto  $(0, b)$  é um ponto de tangência para o campo  $X_R$ . O ponto de tangência  $(0, b)$  é visível quando  $a_R > 0$  e invisível quando  $a_R < 0$ .

*Prova.*

1. Podemos notar que,

$$X_L(x, y) = (T_L x - y - b, D_L x - a_L) \Rightarrow X_L(0, -b) = (T_L 0 + b - b, D_L 0 - a_L) = -a_L,$$

$$X_L \nabla f(0, -b) = \langle (b - b, -a_L), (1, 0) \rangle = 0.$$

Logo temos que o ponto  $(0, -b)$  é ponto tangência para o campo  $X_L$ . Quando  $a_L = 0$  o ponto  $(0, -b)$  é equilíbrio para o campo  $X_L$ . Veja ainda que,

$$X_L^2 f(0, -b) = \langle (0, -a_L), (T_L, -1) \rangle = a_L,$$

assim o ponto de tangência  $(0, -b)$  será visível quando  $a_L < 0$  e invisível quando  $a_L > 0$ .

2. Podemos notar que:

$$X_R(x, y) = (T_R x - y + b, D_R x - a_R) \Rightarrow X_R(0, b) = (T_L 0 - b + b, D_L 0 - a_R) = -a_R,$$

$$X_R \nabla f(0, b) = \langle (-b + b, -a_R), (1, 0) \rangle = 0.$$

Logo temos que o ponto  $(0, b)$  é ponto tangência para o campo  $X_R$ . Quando  $a_R = 0$  o ponto  $(0, b)$  é equilíbrio para o campo  $X_R$ . Veja ainda que,

$$X_R^2 f(0, b) = \langle (0, -a_R), (T_R, -1) \rangle = a_R,$$

assim o ponto de tangência  $(0, b)$  será visível quando  $a_R > 0$  e invisível quando  $a_R < 0$ .

□

**Observação 2.3** *Assumindo  $b > 0$  podemos determinar as regiões de costura, deslize e escape do sistema, veja que*

$$X_R f(0, y) X_L f(0, y) = y^2 - b^2 > 0 \Rightarrow |y| > b,$$

logo temos que,

$$\Sigma^c = \{(0, y) \in \Sigma; y > b\} \cup \{(0, y) \in \Sigma; y < -b\},$$

e também,

$$X_R f(0, y) X_L f(0, y) = y^2 - b^2 < 0 \Rightarrow |y| < b.$$

Assim,

$$\Sigma^e = \{(0, y) \in \Sigma; -b < y < b\},$$

$$\Sigma^s = \emptyset,$$

e por fim podemos calcular o campo deslizando, que é dado por

$$Z^s(0, y) = \left( 0, \frac{a_L - a_R}{2b} y - \frac{a_L + a_R}{2} \right). \quad (2-18)$$

**Proposição 2.3** *Assumindo  $b > 0$  no sistema (2-6) os pseudo-equilíbrios serão determinados como segue,*

1. Se  $a_L = a_R = 0$  então para qualquer ponto  $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ ,  $p$  é pseudo-equilíbrio do sistema.
2. Se  $a_L a_R < 0$  o ponto  $p = \left(0, \frac{(a_R + a_L)b}{a_L - a_R}\right)$  satisfaz  $Z^s(p) = 0$ . Segue que quando
  - (a)  $a_L < 0$  e  $a_R > 0$ , temos que  $(Z^s)'(p) < 0$  e o ponto  $p \in \Sigma^e$  é uma pseudo-sela.
  - (b)  $a_L > 0$  e  $a_R < 0$ , temos que  $(Z^s)'(p) > 0$  e o ponto  $p \in \Sigma^e$  é um pseudo-nó instável.
3. Se  $a_L a_R > 0$  não existe pseudo-equilíbrio.

*Prova.*

1. Se  $a_R = a_L = 0$  então para qualquer ponto  $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ , temos que  $Z^s(p) = 0$  e portanto todos os pontos  $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$  serão pseudo-equilíbrios.
2. Assumiremos que  $a_L a_R < 0$ , note que o ponto  $p = \left(0, \frac{(a_R + a_L)b}{a_L - a_R}\right)$  satisfaz  $Z^s(p) = 0$ .

- (a) Quando  $a_L < 0$  e  $a_R > 0$ , com  $a_L < -a_R$ , temos que

$$0 < \frac{(a_R + a_L)b}{a_L - a_R} < b,$$

$$(Z^s)'(p) = \left(0, \frac{(a_R + a_L)b}{a_L - a_R}\right) < 0,$$

portanto  $p \in \Sigma^e$  é pseudo-sela. Agora se  $a_L < 0$  e  $a_R > 0$ , com  $a_L > -a_R$ , temos que

$$-b < \frac{(a_R + a_L)b}{a_L - a_R} < 0,$$

$$(Z^s)'(p) = \left(0, \frac{(a_R + a_L)b}{a_L - a_R}\right) < 0,$$

e portanto  $p \in \Sigma^e$  também será pseudo-sela.

- (b) Quando  $a_L > 0$  e  $a_R < 0$ , com  $a_L < -a_R$ , temos que

$$-b < \frac{(a_R + a_L)b}{a_L - a_R} < 0,$$

$$(Z^s)'(p) = \left(0, \frac{(a_R + a_L)b}{a_L - a_R}\right) > 0,$$

portanto  $p \in \Sigma^e$  é pseudo-nó instável. Agora se  $a_L > 0$  e  $a_R < 0$ , com  $a_L > -a_R$ , temos que

$$0 < \frac{(a_R + a_L)b}{a_L - a_R} < b,$$

$$(Z^s)'(p) = \left(0, \frac{(a_R + a_L)b}{a_L - a_R}\right) > 0,$$

e portanto  $p \in \Sigma^e$  também será pseudo-nó instável.

3. Assumiremos que  $a_L a_R > 0$ , note que o ponto  $p = \left(0, \frac{(a_R + a_L)b}{a_L - a_R}\right)$  satisfaz  $Z^s(p) = 0$ . Fazendo a mesma análise anterior podemos observar que o ponto  $p$  não está definido na região  $\Sigma^e$ , logo não existem pseudo-equilíbrios.

□

**Proposição 2.4** *No sistema (2-6):*

1. Quando  $a_L D_L < 0$  ou  $D_L = a_L = 0$  podemos encontrar pontos de equilíbrio do sistema em  $\Sigma_L$ . Quando  $a_L D_L > 0$  ou  $D_L = 0$  e  $a_L \neq 0$  o sistema não tem pontos de equilíbrio em  $\Sigma_L$ ;
2. Quando  $a_R D_R > 0$  ou  $D_R = a_R = 0$  podemos encontrar pontos de equilíbrio em  $\Sigma_R$ . Quando  $a_R D_R < 0$  ou  $D_R = 0$  e  $a_R \neq 0$  o sistema não tem pontos de equilíbrio em  $\Sigma_R$ .

*Prova.*

1. Veja que os possíveis pontos de equilíbrio para o sistema (2-6) em  $\Sigma_L$  satisfaz,

$$X_L(x, y) = \begin{cases} \dot{x} = T_L x - y - b = 0, \\ \dot{y} = D_L x - a_L = 0. \end{cases}$$

- (a) Se  $a_L D_L < 0$  então o ponto,

$$p = \left( \frac{a_L}{D_L}, \frac{T_L a_L}{D_L} - b \right),$$

é ponto de equilíbrio do sistema em  $\Sigma_L$ . Se  $D_L = 0$  e  $a_L = 0$ , então os pontos tais que  $y = T_L x - b$ , com  $x < 0$  são pontos de equilíbrio do sistema em  $\Sigma_L$ .

- (b) É fácil ver que se  $a_L D_L > 0$  não é possível encontrar nenhum ponto que satisfaz  $X_L(x, y) = 0$  com  $x < 0$ . Se  $D_L = 0$  e  $a_L \neq 0$  não é possível encontrar nenhum ponto que satisfaz  $X_L(x, y) = 0$ .

2. Veja que os possíveis pontos de equilíbrio para o sistema (2-6) em  $\Sigma_R$  satisfazem:

$$X_R(x, y) = \begin{cases} \dot{x} = T_R x - y + b = 0, \\ \dot{y} = D_R x - a_R = 0. \end{cases}$$

- (a) Se  $a_R D_R > 0$  então o ponto,

$$p = \left( \frac{a_R}{D_R}, \frac{T_R a_R}{D_R} + b \right),$$

é ponto de equilíbrio do sistema em  $\Sigma_R$ . Se  $D_R = 0$  e  $a_R = 0$ , então os pontos tais que  $y = T_R x + b$ , com  $x > 0$  são pontos de equilíbrio do sistema em  $\Sigma_R$ .

- (b) Se  $a_R D_R < 0$  não existe nenhum ponto que satisfaz  $X_R(x, y) = 0$  com  $x > 0$ .  
 Se  $D_R = 0$  e  $a_R \neq 0$  não é possível encontrar nenhum ponto que satisfaz  $X_R(x, y) = 0$ .

□

## 2.2 Forma canônica com monodromia no infinito

Nesse momento apresentamos um teorema que garante sobre quais condições podemos reduzir o sistema (2-6) em um sistema com apenas 5 parâmetros. Veja que esse passo é muito importante uma vez que partimos de uma classe de sistemas com 12 parâmetros. O objetivo principal dessas mudanças consideradas é reduzir o número de casos a serem analisados durante todo estudo. Além disso, com essa nova forma simétrica poderemos caracterizar com mais facilidade as órbitas periódicas e determinar a estabilidade do sistema.

Estudamos os sistemas do tipo (2-6) tais que a dinâmica de ambos os campos da direita e esquerda são do tipo foco que está sob a condição  $T_\Lambda^2 - 4D_\Lambda < 0$  com  $D_\Lambda > 0$ .

**Teorema 2.1** *Dado o sistema (2-6) e assumindo a dinâmica do tipo foco ou centro em ambos os semiplanos, suponha que*

$$\gamma_L = \frac{\sigma_L}{\omega_L}, \gamma_R = \frac{\sigma_R}{\omega_R}, \alpha_L = \frac{a_L}{\omega_L}, \alpha_R = \frac{a_R}{\omega_R},$$

onde  $2\sigma_\Lambda = T_\Lambda$  e  $\omega_\Lambda > 0$  tal que  $4\omega_\Lambda^2 = 4D_\Lambda - T_\Lambda^2$  e  $\Lambda \in \{R, L\}$ . Então o sistema (2-6) é topologicamente equivalente ao seguinte sistema,

$$Z = \begin{cases} X_L = \begin{pmatrix} 2\gamma_L & -1 \\ 1 + \gamma_L^2 & 0 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} b \\ \alpha_L \end{pmatrix}, & X \in \Sigma_L, \\ X_R = \begin{pmatrix} 2\gamma_R & -1 \\ 1 + \gamma_R^2 & 0 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} -b \\ \alpha_R \end{pmatrix}, & X \in \Sigma_R. \end{cases} \quad (2-19)$$

*Prova.* Seja  $\omega_\Lambda > 0$  e  $\omega_\Lambda^2 = D_\Lambda - \frac{T_\Lambda^2}{4}$  e  $\sigma_\Lambda = \frac{T_\Lambda}{2}$  a mudança de parâmetros. Veja que,

$$\begin{aligned} \omega_\Lambda^2 &= D_\Lambda - \frac{T_\Lambda^2}{4} \Rightarrow D_\Lambda = \omega_\Lambda^2 + \frac{\sigma_\Lambda^2}{4}, \\ \sigma_\Lambda &= \frac{T_\Lambda}{2} \Rightarrow T_\Lambda = 2\sigma_\Lambda. \end{aligned}$$

Considerando a matriz associada ao sistema para  $x \geq 0$ , fazendo a mudança de parâmetros como acima temos que a matriz é dada por,

$$A_R = \begin{pmatrix} 2\sigma_R & -1 \\ 1 + \omega_R^2 + \sigma_R^2 & 0 \end{pmatrix},$$

onde obtemos que  $\lambda_R = \sigma_R \pm i\omega_R$  é o autovalor da matriz  $A_R$  e assim teremos então a dinâmica do tipo foco ou centro. Considere a mudança de variáveis  $X = \omega_R(x)x$ ,  $Y = y$  e  $\tau = \omega_R(x)t$  aplicada em  $\Sigma_R$  no sistema (2-6). Derivando com respeito a  $\tau$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= \frac{dX}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \omega_R \dot{x} \frac{1}{\omega_R} = \dot{x}, \\ \frac{dY}{d\tau} &= \frac{dY}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\omega_R} \dot{y}. \end{aligned}$$

Substituindo,

$$\begin{cases} \dot{x} = T_R x - y + b \\ \dot{y} = D_R x - a_R. \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= T_R x - y + b, \\ \frac{dY}{d\tau} &= \frac{1}{\omega_R} (D_R x - a_R), \end{aligned}$$

e fazendo a mudança de variáveis  $\frac{X}{\omega_R} = x$ ,  $Y = y$  obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= \frac{T_R}{\omega_R} X - Y + b, \\ \frac{dY}{d\tau} &= \frac{1}{\omega_R} \left( D_R \frac{X}{\omega_R} - a_R \right). \end{aligned}$$

Substituindo os novos parâmetros  $\frac{T_R}{\omega_R} = 2\gamma_R$  e  $\frac{D_R}{\omega_R^2} = \gamma_R^2 + 1$  obtemos o sistema para  $x \geq 0$ ,

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\gamma_R x - y + b, \\ \dot{y} = (1 + \gamma_R^2)x - \alpha_R. \end{cases}$$

Considerando a matriz associada ao sistema para  $x \leq 0$  e fazendo a mudança de parâmetros conveniente temos que a matriz  $A_L$  é dada por,

$$A_L = \begin{pmatrix} 2\sigma_L & -1 \\ 1 + \omega_L^2 + \sigma_L^2 & 0 \end{pmatrix},$$

onde obtemos que  $\lambda_L = \sigma_L \pm i\omega_L$  é o autovalor da matriz  $A_L$  e assim teremos então a dinâmica do tipo foco ou centro. Considere a mudança de variáveis  $X = \omega_L(x)x$ ,  $Y = y$  e  $v = \omega_L(x)t$  aplicada em  $\Sigma_L$  no sistema (2-6). Derivando com respeito a  $\tau$ ,

$$\begin{aligned}\frac{dX}{d\nu} &= \frac{dX}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \omega_L \dot{x} \frac{1}{\omega_L} = \dot{x}, \\ \frac{dY}{d\nu} &= \frac{dY}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\omega_L} \dot{y}.\end{aligned}$$

Substituindo,

$$\begin{cases} \dot{x} = T_L x - y - b \\ \dot{y} = D_L x - a_L. \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\frac{dX}{d\nu} &= T_L x - y - b, \\ \frac{dY}{d\nu} &= \frac{1}{\omega_L} (D_L x - a_L),\end{aligned}$$

e fazendo a mudança de variáveis  $\frac{X}{\omega_L} = x, Y = y$  obtemos,

$$\begin{aligned}\frac{dX}{d\nu} &= \frac{T_L}{\omega_L} X - Y - b, \\ \frac{dY}{d\nu} &= \frac{1}{\omega_L} \left( D_L \frac{X}{\omega_L} - a_L \right).\end{aligned}$$

Substituindo os novos parâmetros  $\frac{T_L}{\omega_L} = 2\gamma_L$  e  $\frac{D_L}{\omega_L^2} = \gamma_L^2 + 1$  obtemos o sistema para  $x \leq 0$ ,

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\gamma_L x - y - b, \\ \dot{y} = (1 + \gamma_L^2)x - \alpha_L. \end{cases}$$

□

Nesse momento iremos obter algumas formas canônicas que serão importantes para o nosso estudo, introduzimos notações e propriedades dos pontos de equilíbrio de (2-19) que são do tipo foco ou centro. Os pontos de equilíbrio são dados por,

$$\begin{aligned}(x_L, y_L) &= (x_L, 2\gamma_L x_L - b) = \left( \frac{\alpha_L}{1 + \gamma_L^2}, \frac{2\alpha_L \gamma_L}{1 + \gamma_L^2} - b \right), \\ (x_R, y_R) &= (x_R, 2\gamma_R x_R + b) = \left( \frac{\alpha_R}{1 + \gamma_R^2}, \frac{2\alpha_R \gamma_R}{1 + \gamma_R^2} + b \right),\end{aligned}$$

e assim podemos reescrever o sistema (2-19) da seguinte forma, para  $x \leq 0$  e  $x > 0$  respectivamente,

$$X_L = \begin{cases} \dot{x} = 2\gamma_L(x - x_L) - (y - y_L), \\ \dot{y} = (1 + \gamma_L^2)(x - x_L), \end{cases} \quad (2-20)$$

$$X_R = \begin{cases} \dot{x} = 2\gamma_R(x - x_R) - (y - y_R), \\ \dot{y} = (1 + \gamma_R^2)(x - x_R). \end{cases} \quad (2-21)$$

Note que o parâmetro  $b$  foi reescrito após a introdução das coordenadas de equilíbrio  $y_\Lambda$  e  $\alpha_\Lambda$  foram substituídas pelas abscissas de equilíbrio  $x_\Lambda$ , onde  $\Lambda \in \{L, R\}$ . Escrevemos os parâmetros  $\alpha_\Lambda$  e  $b$  da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \alpha_\Lambda &= (1 + \gamma_\Lambda^2)x_\Lambda, \\ b &= -(y_L - 2\gamma_L x_L) = y_R - 2\gamma_R x_R. \end{aligned}$$

**Observação 2.4** *Podemos também fazer uso de uma outra forma canônica associada ao sistema (2-19) e sua forma equivalente em termos dos pontos de equilíbrio anterior, que tem apenas 5 parâmetros para  $x \leq 0$  e  $x \geq 0$ ,*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\gamma_L x - y - b, \\ \dot{y} = (1 + \gamma_L^2)(x - x_L), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\gamma_R x - y + b, \\ \dot{y} = (1 + \gamma_R^2)(x - x_R). \end{cases}$$

Veja que o sistema (2-19) é invariante sob as seguintes transformações,

Transformação 1	Transformação 2	Transformação 3
$x \rightarrow -x$	$x \rightarrow x$	$x \rightarrow -x$
$y \rightarrow y$	$y \rightarrow -y$	$y \rightarrow -y$
$\tau \rightarrow -\tau$	$\tau \rightarrow -\tau$	$\tau \rightarrow \tau$
$\gamma_L \rightarrow -\gamma_R$	$\gamma_L \rightarrow -\gamma_L$	$\gamma_L \rightarrow \gamma_R$
$x_L \rightarrow -x_R$	$x_L \rightarrow x_L$	$x_L \rightarrow -x_R$
$b \rightarrow -b$	$b \rightarrow -b$	$b \rightarrow b$
$\gamma_R \rightarrow -\gamma_L$	$\gamma_R \rightarrow -\gamma_R$	$\gamma_R \rightarrow \gamma_L$
$x_R \rightarrow -x_L$	$x_R \rightarrow x_R$	$x_R \rightarrow -x_L$

Considere inicialmente a Transformação 2, isto é,  $(x, y, \tau) \rightarrow (x, -y, -\tau)$  e defina  $X = x$ ,  $Y = -y$  e  $T = -\tau$  então,

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= \frac{dX}{d\tau} \frac{d\tau}{dT} = -\dot{x}, \\ \frac{dY}{dT} &= \frac{dY}{d\tau} \frac{d\tau}{dT} = \dot{y}. \end{aligned}$$

Daí obtemos o seguinte sistema,

$$Z = \begin{cases} \begin{pmatrix} -2\gamma_R & -1 \\ 1 + \gamma_R^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ \alpha_R \end{pmatrix}, & (X, Y) \in \Sigma_R, \\ \begin{pmatrix} -2\gamma_L & -1 \\ 1 + \gamma_L^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -b \\ \alpha_L \end{pmatrix}, & (X, Y) \in \Sigma_L. \end{cases}$$

Considere a Transformação 1, isto é,  $(x, y, \tau) \rightarrow (-x, y, -\tau)$  e defina  $X = -x$ ,  $Y = y$  e  $T = -\tau$  então,

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= \frac{dX}{d\tau} \frac{d\tau}{dT} = \dot{x}, \\ \frac{dY}{dT} &= \frac{dY}{d\tau} \frac{d\tau}{dT} = -\dot{y}. \end{aligned}$$

Daí obtemos o seguinte sistema,

$$Z = \begin{cases} \begin{pmatrix} -2\gamma_L & -1 \\ 1 + \gamma_L^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ -\alpha_L \end{pmatrix}, & (X, Y) \in \Sigma_R, \\ \begin{pmatrix} -2\gamma_R & -1 \\ 1 + \gamma_R^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -b \\ -\alpha_R \end{pmatrix}, & (X, Y) \in \Sigma_L. \end{cases}$$

Considere a Transformação 3, isto é,  $(x, y, \tau) \rightarrow (-x, -y, \tau)$  e defina  $X = -x$ ,  $Y = -y$  e  $T = \tau$  então,

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= \frac{dX}{d\tau} \frac{d\tau}{dT} = -\dot{x}, \\ \frac{dY}{dT} &= \frac{dY}{d\tau} \frac{d\tau}{dT} = -\dot{y}. \end{aligned}$$

Daí obtemos o seguinte sistema,

$$Z = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2\gamma_L & -1 \\ 1 + \gamma_L^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -b \\ -\alpha_L \end{pmatrix}, & (X, Y) \in \Sigma_R, \\ \begin{pmatrix} 2\gamma_R & -1 \\ 1 + \gamma_R^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ -\alpha_R \end{pmatrix}, & (X, Y) \in \Sigma_L. \end{cases}$$

Note que as mudanças de variáveis mantem invariante o conjunto  $\Sigma$  e além disso nas Transformações 1 e 3 o sistema muda de posição, isto é,  $\Sigma_R$  é levado em  $\Sigma_L$  e  $\Sigma_L$  é levado em  $\Sigma_R$ . Essas propriedades são importantes pois reduzem o número de casos a

serem analisados no nosso estudo. Os resultados apresentados a seguir, serão importantes para algumas observações que faremos durante o trabalho.

**Definição 2.1** Dizemos que o sistema planar é reversível no tempo com respeito a  $x$  sempre que for invariante sob a mudança  $(x, y, \tau) \rightarrow (x, -y, -\tau)$ . De maneira análoga, dizemos que o sistema planar é reversível no tempo com respeito a  $y$  sempre que for invariante sob a mudança  $(x, y, \tau) \rightarrow (-x, y, -\tau)$ .

**Corolário 2.1** O sistema (2-19) é contínuo se e somente se  $b = 0$  e  $\alpha_L = \alpha_R$ . Dessa maneira escrevemos o sistema como,

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\gamma_L x - y, \\ \dot{y} = (1 + \gamma_L^2)x - \alpha, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\gamma_R x - y, \\ \dot{y} = (1 + \gamma_R^2)x - \alpha, \end{cases}$$

se  $x \leq 0$  e  $x > 0$  respectivamente.

*Prova.* Se o sistema (2-19) é contínuo então para  $p = (0, y) \in \Sigma$  temos que  $X_L(p) = X_R(p) \iff (-y - b, -\alpha_L) = (-y + b, -\alpha_R)$  logo  $b = 0$  e  $\alpha_L = \alpha_R$ . Reciprocamente se  $b = 0$  e  $\alpha_L = \alpha_R$  para os pontos  $p = (0, y) \in \Sigma$  temos que,

$$X_L(p) = (-y, \alpha),$$

$$X_R(p) = (-y, \alpha).$$

Isso implica que  $X_L(p) = X_R(p)$ , portanto o sistema (2-19) é contínuo.  $\square$

A partir de agora iremos trabalhar apenas com a forma canônica (2-19) ou equivalentemente com (2-20) e (2-21). Já que essas propriedades que estudamos permitiram que reduzíssemos o número de configurações possíveis para a análise. Estudaremos agora os pontos de equilíbrio e pontos de tangência para esse sistema.

**Proposição 2.5** Considere o sistema (2-19) ou equivalentemente os sistemas (2-20) e (2-21), suponha  $b = 0$  e  $\gamma_L = \gamma_R = 0$ , logo

1.  $\Sigma^e = \Sigma^s = \{\mathbf{0}\}$ .

2. Equilíbrio:

- (a) Se  $x_R = 0$  então a origem  $p_1 = (0, 0)$  é ponto de equilíbrio para o campo  $X_R$ ;
- (b) Se  $x_R \neq 0$  então  $p_2 = (x_R, 0)$  é ponto de equilíbrio para o campo  $X_R$ , quando  $x_R > 0$  o equilíbrio é real e quando  $x_R < 0$  o equilíbrio é virtual;

- (c) Se  $x_L = 0$  então a origem  $p_1 = (0,0)$  é ponto de equilíbrio para o campo  $X_L$ ;  
 (d) Se  $x_L \neq 0$  então  $p_3 = (x_L, 0)$  é ponto de equilíbrio para o campo  $X_L$ , quando  $x_L < 0$  o equilíbrio é real e quando  $x_L > 0$  o equilíbrio é virtual.

### 3. Tangência:

- (a) A origem  $p_1 = (0,0)$  é ponto de tangência para o campo  $X_R$ , quando  $x_R > 0$  a tangência é visível e quando  $x_R < 0$  a tangência é invisível;  
 (b) A origem  $p_1 = (0,0)$  é ponto de tangência para o campo  $X_L$ , quando  $x_L < 0$  a tangência é visível e quando  $x_L > 0$  a tangência é invisível.

*Prova.*

1. Podemos calcular a derivada de Lie dos dois campos  $X_L$  e  $X_R$ . Veja que,

$$X_L \nabla f(x, y) = \langle (-y, x - x_L), (1, 0) \rangle = -y,$$

$$X_R \nabla f(x, y) = \langle (-y, x - x_R), (1, 0) \rangle = -y,$$

assim temos que,

$$\Sigma^c = \{(0, y) \in \Sigma\},$$

$$\Sigma^e = \Sigma^s = \{\emptyset\}.$$

Logo o sistema possui apenas trajetórias periódicas de costura.

2. Note que,

$$X_L(x, y) = (-y, x - x_L),$$

$$X_R(x, y) = (-y, x - x_R),$$

segue que,

- (a) Se  $x_R = 0$  a origem  $p_1 = (0,0)$  é ponto de equilíbrio para o campo  $X_R$ , pois  $X_R(0,0) = (0,0)$ .  
 (b) Se  $x_R \neq 0$  o ponto  $p_2 = (x_R, 0)$  é ponto de equilíbrio para o campo  $X_R$ , pois  $X_R(x_R, 0) = (0,0)$ . Se  $x_R > 0$  o ponto  $p_2$  é equilíbrio real, já que  $p_2 \in \Sigma_R$  e  $X_R(x_R, 0) = (0,0)$ . Se  $x_R < 0$  o ponto  $p_2$  é equilíbrio virtual, já que  $p_2 \in \Sigma_L$  e  $X_R(x_R, 0) = (0,0)$ .  
 (c) Se  $x_L = 0$  a origem  $p_1 = (0,0)$  é ponto de equilíbrio para o campo  $X_L$ , pois  $X_L(0,0) = (0,0)$ .  
 (d) Se  $x_L \neq 0$  o ponto  $p_3 = (x_L, 0)$  é ponto de equilíbrio para o campo  $X_L$ , pois  $X_L(x_L, 0) = (0,0)$ . Se  $x_L < 0$  o ponto  $p_3$  é equilíbrio real, já que  $p_3 \in \Sigma_L$  e  $X_L(x_L, 0) = (0,0)$ . Se  $x_L > 0$  o ponto  $p_3$  é equilíbrio virtual, já que  $p_3 \in \Sigma_R$  e  $X_L(x_L, 0) = (0,0)$ .

3. Note que,

$$X_L^2 f(x, y) = \langle (-y, x - x_L), (0, -1) \rangle = -x + x_L,$$

$$X_R^2 f(x, y) = \langle (-y, x - x_R), (0, -1) \rangle = -x + x_R.$$

Segue que,

- (a) A origem  $p_1 = (0, 0)$  é ponto de tangência para o campo  $X_R$ , pois  $X_R \nabla f(0, 0) = 0$ . Se  $x_R > 0$  o ponto de tangência  $p_1$  é visível, pois  $X_R^2 f(0, 0) = x_R > 0$ . Se  $x_R < 0$  o ponto de tangência  $p_1$  é invisível, pois  $X_R^2 f(0, 0) = x_R < 0$ .
- (b) A origem  $p_1 = (0, 0)$  é ponto de tangência para o campo  $X_L$ , pois  $X_L \nabla f(0, 0) = 0$ . Se  $x_L < 0$  o ponto de tangência  $p_1$  é visível, pois  $X_L^2 f(0, 0) = x_L < 0$ . Se  $x_L > 0$  o ponto de tangência  $p_1$  é invisível, pois  $X_L^2 f(0, 0) = x_L > 0$ .

□

**Proposição 2.6** *Considere o sistema (2-19) ou equivalentemente os sistemas (2-20) e (2-21), suponha  $b = 0$ ,  $\gamma_L = -\gamma_R \neq 0$  e  $x_L = x_R = 0$ , assim:*

- 1. A origem  $p_1 = (0, 0)$  é ponto de equilíbrio para o campo  $X_R$  e  $X_L$ ;
- 2. O ponto  $p_1 = (0, 0)$  é ponto de tangência dupla dos campos  $X_L$  e  $X_R$ .

*Prova.*

1. Veja que,

$$X_L(x, y) = (2\gamma_L x - y, (1 + \gamma_L^2)x),$$

$$X_R(x, y) = (-2\gamma_L x - y, (1 + \gamma_L^2)x).$$

Logo temos que a origem  $p_1 = (0, 0)$  é ponto de equilíbrio para os campos  $X_R$  e  $X_L$  pois,  $X_R(0, 0) = (0, 0)$  e  $X_L(0, 0) = (0, 0)$ .

2. Note que,

$$X_L \nabla f(x, y) = \langle (2\gamma_L - y, (1 + \gamma_L^2)x), (1, 0) \rangle = 2\gamma_L x - y,$$

$$X_R \nabla f(x, y) = \langle (-2\gamma_L - y, (1 + \gamma_L^2)x), (1, 0) \rangle = -2\gamma_L x - y.$$

Logo temos que a origem  $p_1 = (0, 0) \in \Sigma$  é ponto de tangência dupla para os campos  $X_R$  e  $X_L$  pois,  $X_R \nabla f(0, 0) = 0$  e  $X_L \nabla f(0, 0) = 0$ .

□

**Proposição 2.7** *Considere o sistema (2-19) ou equivalentemente os sistemas (2-20) e (2-21), suponha  $b = 0$ ,  $\gamma_L = -\gamma_R \neq 0$  e  $x_L = -x_R \neq 0$ , segue que*

1. *Equilíbrio:*

- (a) *O ponto  $p_1 = (x_L, 2\gamma_L x_L)$  é ponto de equilíbrio para o campo  $X_L$ . Se  $x_L < 0$  o equilíbrio é real e se  $x_L > 0$  o equilíbrio é virtual.*
- (b) *O ponto  $p_2 = (-x_L, -2\gamma_L x_L)$  é ponto de equilíbrio para o campo  $X_R$ . Se  $x_L < 0$  (ou equivalentemente  $x_R > 0$ ) o equilíbrio é real e se  $x_L > 0$  (ou equivalentemente  $x_R < 0$ ) o equilíbrio é virtual.*

2. *Tangência:*

- (a) *O ponto  $p_2 = (0, 0)$  é ponto de tangência para o campo  $X_L$ . Se  $x_L < 0$  a tangência é visível, quando  $x_L > 0$  a tangência é invisível.*
- (b) *O ponto  $p_2 = (0, 0)$  é ponto de tangência para o campo  $X_R$ . Se  $x_L < 0$  a tangência é visível, quando  $x_L > 0$  a tangência é invisível.*

*Prova.*

1. *Veja que,*

$$X_L(x, y) = (2\gamma_L x - y, (1 + \gamma_L^2)(x - x_L)),$$

$$X_R(x, y) = (-2\gamma_L x - y, (1 + \gamma_L^2)(x + x_L)).$$

Logo temos que,

- (a) *O ponto  $p_1 = (x_L, 2\gamma_L x_L)$  é ponto de equilíbrio para o campo  $X_L$ , pois  $X_L(x_L, 2\gamma_L x_L) = (0, 0)$ . Se  $x_L < 0$  o ponto  $p_1$  é equilíbrio real, já que  $p_1 \in \Sigma_L$  e  $X_L(x_L, 2\gamma_L x_L) = (0, 0)$ . Se  $x_L > 0$  o ponto  $p_1$  é equilíbrio virtual, já que  $p_1 \in \Sigma_R$  e  $X_L(x_L, 2\gamma_L x_L) = (0, 0)$ .*
- (b) *O ponto  $p_2 = (-x_L, -2\gamma_L x_L)$  é ponto de equilíbrio para o campo  $X_R$ , pois  $X_R(-x_L, -2\gamma_L x_L) = (0, 0)$ . Se  $x_L < 0$  (ou equivalentemente  $x_R > 0$ ) o ponto  $p_2$  é equilíbrio real, já que  $p_2 \in \Sigma_R$  e  $X_R(-x_L, -2\gamma_L x_L) = (0, 0)$ . Se  $x_L > 0$  (ou equivalentemente  $x_R < 0$ ) o ponto  $p_2$  é equilíbrio virtual, já que  $p_2 \in \Sigma_L$  e  $X_R(-x_L, -2\gamma_L x_L) = (0, 0)$ .*

2. *Note que,*

$$X_L \nabla f(x, y) = \langle (2\gamma_L x - y, (1 + \gamma_L^2)(x - x_L)), (1, 0) \rangle = 2\gamma_L x - y,$$

$$X_R \nabla f(x, y) = \langle (-2\gamma_L x - y, (1 + \gamma_L^2)(x + x_L)), (1, 0) \rangle = -2\gamma_L x - y,$$

e também,

$$X_L^2 f(x, y) = \langle (2\gamma_L x - y, (1 + \gamma_L^2)(x - x_L)), (2\gamma_L, -1) \rangle,$$

$$X_R^2 f(x, y) = \langle (-2\gamma_L x - y, (1 + \gamma_L^2)(x + x_L)), (-2\gamma_L, -1) \rangle.$$

- (a) A origem  $p_3 = (0, 0)$  é ponto de tangência para o campo  $X_L$ , pois  $X_L \nabla f(0, 0) = 0$ . Se  $x_L < 0$  o ponto de tangência  $p_3$  é visível, pois  $X_L^2 f(0, 0) = (1 + \gamma_L^2)x_L < 0$ . Se  $x_L > 0$  o ponto de tangência  $p_3$  é invisível, pois  $X_L^2 f(0, 0) = (1 + \gamma_L^2)x_L > 0$ .
- (b) A origem  $p_3 = (0, 0)$  é ponto de tangência para o campo  $X_R$ , pois  $X_R \nabla f(0, 0) = 0$ . Se  $x_L < 0$  o ponto de tangência  $p_3$  é visível, pois  $X_R^2 f(0, 0) = -(1 + \gamma_L^2)x_L > 0$ . Se  $x_L > 0$  o ponto de tangência  $p_3$  é invisível, pois  $X_R^2 f(0, 0) = -(1 + \gamma_L^2)x_L < 0$ .

□

---

## Estudo dos ciclos limite de grande amplitude

---

Uma das principais ferramentas utilizadas para analisar órbitas periódicas e ciclos limite, bem como, estudar questões relacionadas a bifurcação e estabilidade de um sistema é a aplicação de Poincaré. Estudar ciclos limite é de grande importância pois estes modelam diversos fenômenos físicos em especial os fenômenos oscilatórios. Quando todas as trajetórias aproximam-se de um ciclo limite, este é classificado como estável ou atrativo; caso se afastem, é classificado como instável. A aplicação de Poincaré funciona da seguinte maneira: Inicialmente considere o sistema  $\dot{x} = f(x)$ , e  $f$  de classe  $C^1$  e tome uma órbita periódica  $\Gamma$  que passa por um ponto  $x_0$ . Considere  $\Sigma$  uma seção transversal a  $\Gamma$  em  $x_0$ . Sejam  $x$  um ponto de  $\Sigma$  próximo de  $x_0$  e  $\phi$  o fluxo que passa pelo ponto  $x$ , então existe  $\tau(x) > 0$  tal que  $\phi(\tau(x), x) \in \Sigma$ . Defini-se o ponto de interseção  $\pi(x_0)$  da órbita na seção transversal  $\Sigma$ . De modo geral, isto quer dizer que a solução se aproxima cada vez mais em  $\Sigma$  por um ponto  $P(x) = \phi(\tau(x), x)$ . A aplicação de Poincaré é definida por  $x \mapsto P(x)$ .

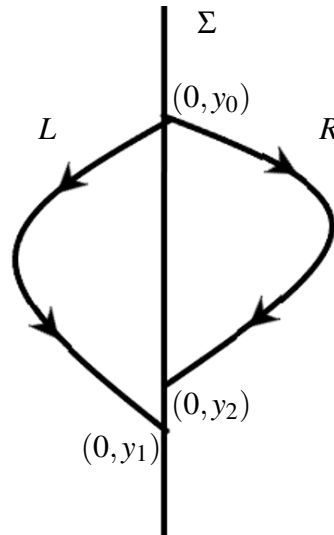
Observe que este resultado está relacionado a campos suaves, no que segue pretendemos apresentar como essa mesma ideia pode ser aplicada para o estudo de campos suaves por partes.

Este Capítulo está dividido em algumas seções. Primeiramente pretendemos apresentar a nossa principal ferramenta de estudo que é o mapa de deslocamento, em seguida determinaremos os coeficientes da expansão do mapa de deslocamento que serão essenciais para caracterização das órbitas periódicas. Em um terceiro momento estudaremos questões relacionadas a estabilidade das órbitas. E por fim, daremos mais ênfase aos resultados/ teoremas que vão nos dizer sobre quais condições o sistema exibe ciclos limite de grande amplitude considerando os casos: centro e o foco fraco.

### 3.1 Aplicação de Poincaré

Construiremos a aplicação de Poincaré do sistema suave por partes da seguinte maneira. Considere  $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2; x = 0\}$  a reta de descontinuidade do sistema. Através do fluxo na região  $\Sigma_L$  partimos de um ponto  $(0, y_0)$  com  $y_0 > 0$ , até chegar novamente na reta

vertical em um ponto da forma  $(0, y_1)$  com  $y_1 < 0$  suficientemente grande. Analogamente partindo da região do lado direito do sistema, através do fluxo tomando o sentido contrário no tempo na região  $\Sigma_R$  saímos do mesmo ponto  $(0, y_0)$  com  $y_0 > 0$ , até chegar novamente na reta vertical em um ponto da forma  $(0, y_2)$  com  $y_2 < 0$ .

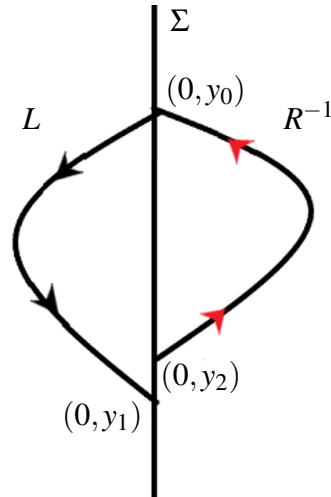


**Figura 3.1:** Aplicação de meio retorno.

Definimos uma nova variável  $u_0 = 1/y_0$ . Seja  $y_0$  grande então  $u_0$  está próximo de zero. Os pontos de interseção da órbita com a reta  $\Sigma$  ao sair do ponto  $(0, y_0)$  e retornar para a reta vertical  $\Sigma$  definimos como sendo,  $L(u_0) = 1/y_1$  que será a aplicação de meio retorno através do ponto  $(0, y_0)$  do sistema em  $\Sigma_L$  e  $R(u_0) = 1/y_2$  a aplicação de meio retorno através do ponto  $(0, y_0)$  do sistema em  $\Sigma_R$ .

Note que a órbita que passa pelo ponto  $(0, y_0)$  é a órbita que termina em um ponto da forma  $(0, y_1)$  após uma volta completa e que começa no ponto  $(0, y_2)$ , isto é, podemos tomar a aplicação de meio retorno  $R^{-1}(u_2)$  ao invés de  $R(u_2)$ . Desta maneira definimos a aplicação de Poincaré do sistema suave por partes por,

$$u_1 = \Pi(u_2) = (L \circ R^{-1})(u_2). \quad (3-1)$$



**Figura 3.2:** Aplicação de Poincaré do sistema com  $R^{-1}$ .

Pela regra da cadeia temos que,

$$\Pi'(u_2) = L'(R^{-1}(u_2)) \frac{1}{R'(R^{-1}(u_2))'}.$$

Observe que esses mapas de retorno permitirão determinar a estabilidade da órbita periódica no infinito e o nascimento de outras órbitas periódicas do infinito em uma bifurcação do tipo Hopf degenerada.

**Definição 3.1** A órbita periódica será estável quando para  $u_0 > 0$  pequeno temos  $y_1 - y_2 < 0$  e será instável quando  $y_1 - y_2 > 0$ .

## 3.2 Mapa de Deslocamento

Abordaremos uma maneira mais conveniente para estudar a dinâmica do sistema. Como pretendemos fazer uma análise das órbitas periódicas de grande amplitude tomamos a coordenada local  $u_0 = 1/y_0$  associada a um dos dois pontos de interseção da órbita com a reta de descontinuidade  $\Sigma$ . Para  $u_0 = 0$ , isto significa que este valor corresponde a órbita periódica no infinito. Assim determinamos inicialmente o mapa de deslocamento como sendo, para  $u_0 > 0$  pequeno

$$\Delta(u_0) = L(u_0) - R(u_0), \quad (3-2)$$

cujos zeros da função  $\Delta$  tenha uma correspondência bijetora com as órbitas periódicas perto do infinito. Estudando os coeficientes da expansão  $\Delta$  conseguiremos caracterizar as órbitas periódicas em centros ou foco fraco e determinaremos a estabilidade do sistema.

Reescrevendo o mapa de deslocamento de Poincaré,

$$\Delta(u_0) = \Delta_1 u_0 + \Delta_2 u_0^2 + \Delta_3 u_0^3 + \Delta_4 u_0^4 + \dots, \quad (3-3)$$

veremos que,

$$\begin{aligned} L(u_0) &= L_1 u_0 + L_2 u_0^2 + L_3 u_0^3 + L_4 u_0^4 + \dots, \\ R(u_0) &= R_1 u_0 + R_2 u_0^2 + R_3 u_0^3 + R_4 u_0^4 + \dots, \end{aligned}$$

no qual vale as seguintes igualdades,

$$\Delta_1 = L_1 - R_1 \quad (3-4)$$

$$\Delta_2 = L_2 - R_2 \quad (3-5)$$

$$\Delta_3 = L_3 - R_3 \quad (3-6)$$

$$\Delta_4 = L_4 - R_4 \quad (3-7)$$

$$\vdots \quad (3-8)$$

A seguir apresentamos algumas definições essenciais para o trabalho.

**Definição 3.2** *A órbita periódica será hiperbólica se  $L_1 - R_1 = L'(0) - R'(0) \neq 0$ . Quando  $L_1 - R_1 > 0$  é estável e quando  $L_1 - R_1 < 0$  será instável.*

**Definição 3.3** *Teremos um centro no infinito próximo à órbita periódica no infinito, caso exista  $\varepsilon > 0$  tal que  $\Delta(u_0) = 0$  para todo  $0 < u_0 < \varepsilon$ .*

**Definição 3.4** *Dizemos que a órbita periódica no infinito se comporta como um foco fraco quando todos coeficientes anteriores a  $\Delta_i$  se anulam, mas  $\Delta_i \neq 0$ . E a ordem de foco fraco é  $i - 1$ .*

### 3.3 Cálculo dos coeficientes da expansão do mapa de deslocamento de Poincaré

O ponto chave para determinar os coeficientes da função  $\Delta$  é introduzir novas variáveis de modo que seja possível trabalhar próximo ao infinito como se estivéssemos perto de um ponto de equilíbrio. Considere inicialmente o sistema (2-19) onde  $x \leq 0$ . A matriz associada a esse sistema é dada por,

$$A_L = \begin{pmatrix} 2\gamma_L & -1 \\ 1 + \gamma_L^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{A_L}(\lambda) = \det(A_L - \lambda I) = -2\gamma_L\lambda + \lambda^2 + 1 + \gamma_L^2 \Rightarrow \lambda = \gamma_L \pm i.$$

assim  $\lambda = \gamma_L \pm i$  são os autovalores da matriz  $A_L$ . A matriz de mudança de base é dada por

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\gamma_L & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \gamma_L & -1 \end{pmatrix}.$$

Assim a forma canônica de Jordan é,

$$A = P^{-1}A_L P = \begin{pmatrix} \gamma & -1 \\ 1 & \gamma \end{pmatrix},$$

logo a exponencial da matriz  $A_L$  é dada por:

$$e^{A_L t} = e^{\gamma_L t} \begin{pmatrix} \cos t + \gamma_L \sin t & -\sin t \\ (1 + \gamma_L^2) \sin t & \cos t - \gamma_L \sin t \end{pmatrix}.$$

Veja que ao invés de trabalhar com a solução do sistema podemos utilizar a propriedade de que a exponencial da matriz  $A_L$  na verdade é uma matriz fundamental e assim obtemos a seguinte relação entre o campo vetorial no ponto de chegada  $(0, y_1)$  e o campo vetorial no ponto inicial  $(0, y_0)$ ,

$$\begin{pmatrix} -y_1 - b \\ -\alpha_L \end{pmatrix} = e^{A_L \tau_L} \begin{pmatrix} -y_0 - b \\ -\alpha_L \end{pmatrix}, \quad (3-9)$$

onde  $\tau_L$  é o tempo decorrido entre dois pontos de uma determinada órbita. De fato, a equação (3-9) é sempre verdade, primeiro considere o seguinte sistema de equações diferenciais,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2\gamma_L x - y - b, \\ \dot{y}(t) = (1 + \gamma_L^2)x - \alpha_L, \end{cases}$$

queremos resolver essa equação diferencial com condição inicial  $x(0) = (0, y_0)$ , onde  $y_0 \geq 0$ . A solução é dada por,

$$x(t) = \frac{\alpha_L + e^{\gamma_L t} [-\alpha_L \cos t - [b + y_0 - \alpha_L \gamma_L + (b + y_0) \gamma_L^2] \sin t]}{1 + \gamma_L^2},$$

$$y(t) = \frac{2\alpha_L \gamma_L - b(1 + \gamma_L^2) + e^{\gamma_L t} W(t)}{1 + \gamma_L^2},$$

onde  $W(t) = (b + y_0 - 2\alpha_L \gamma_L + (b + y_0) \gamma_L^2) \cos t + (\alpha_L (-1 + \gamma_L^2) - (b + y_0) (\gamma_L + \gamma_L^3)) \sin t$ .  
Veja que não temos explicitamente o tempo de retorno  $t$ , mas sabemos que existe. Então

durante um tempo  $t^*$ , a curva solução retorna para reta  $x = 0$ , logo

$$\alpha_L = \frac{e^{t^*\gamma_L}(b + y_0)(1 + \gamma_L^2)\text{sin}t^*}{1 + e^{t^*\gamma_L}(-\text{cos}t^* + \gamma_L\text{sin}t^*)}.$$

Como o ponto de retorno é da forma  $(0, y_1)$ , temos que  $y(t) = y_1$  e substituindo o valor  $\alpha_L$  obtemos,

$$y_1 = \frac{b + e^{2t^*\gamma_L}(b + y_0) - e^{t^*\gamma_L}[(2b + y_0)\text{cos}t^* + y_0\gamma_L\text{sin}t^*]}{-1 + e^{t^*\gamma_L}(\text{cos}t^* - \gamma_L\text{sin}t^*)}.$$

Portanto vale a seguinte relação:

$$\begin{pmatrix} y_1 + b \\ \alpha_L \end{pmatrix} - e^{A_L\tau_L} \begin{pmatrix} y_0 + b \\ \alpha_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3-10)$$

o que prova a equação (3-9).

Os autores de [4] propõe uma mudança de variáveis adequada que irá permitir trabalhar próximo ao infinito como se estivessem trabalhando perto de um ponto de equilíbrio comum, sem necessidade de transformar a equação diferencial estudada. A ideia é introduzir as novas variáveis após escrever as equações de fechamento da órbita. Então uma vez escritas as equações de fechamento (3-10) defina as novas variáveis,  $u_0 = y_0^{-1}$ ,  $u_1 = y_1^{-1}$  e a nova variável de tempo  $S_L = \tau_L - \pi$ . Observe que é natural tomar  $S_L$  dessa maneira, pois o tempo  $\tau_L$  está próximo de  $\pi$  quando  $y_0$  é suficientemente grande (já que estamos estudando as órbitas próximo ao infinito). Fazendo as mudanças adequadas obtemos,

$$\begin{pmatrix} u_0 + bu_0u_1 \\ \alpha_L u_0u_1 \end{pmatrix} - e^{A_L(\pi + S_L)} \begin{pmatrix} u_1 + bu_0u_1 \\ \alpha_L u_0u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde  $u_0 > 0$ ,  $u_1 < 0$  e  $S_L$  é suficientemente pequeno. Observando que  $\exp(A_L\pi) = -\exp(\gamma_L\pi)I$  e multiplicando a equação acima por  $e_L^- = e^{-\gamma_L\pi}$ , temos que

$$e_L^- \begin{pmatrix} u_0 + bu_0u_1 \\ \alpha_L u_0u_1 \end{pmatrix} + e^{A_L S_L} \begin{pmatrix} u_1 + bu_0u_1 \\ \alpha_L u_0u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Retirando da segunda componente do fator trivial  $u_1$ , obtemos

$$e_L^- \begin{pmatrix} u_0 + bu_0u_1 \\ \alpha_L u_0u_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{A_L S_L} \begin{pmatrix} 1 + bu_0 \\ \alpha_L u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3-11)$$

Logo obtemos a matriz Jacobiana,

$$J(0,0,0) = \begin{pmatrix} e_L^- & 1 & 0 \\ (1+e_L^-)\alpha_L & 0 & 1+\gamma_L^2 \end{pmatrix}.$$

Note que precisamos resolver a equação (3-11) em uma vizinhança do ponto  $(u_0, u_1, S_L) = (0, 0, 0)$ . Como a matriz jacobiana  $J(0, 0, 0)$  tem posto 2, podemos aplicar o Teorema da Função Implícita (ver Teorema em Lages (2007) [13]) no ponto  $(u_0, u_1, S_L) = (0, 0, 0)$ , para garantir a existência de expansões únicas para  $u_1 = L(u_0)$  e  $S_L = \beta(u_0)$  em termos de  $u_0$ , a saber

$$\begin{aligned} u_1 = L(u_0) &= L_1 u_0 + L_2 u_0^2 + L_3 u_0^3 + L_4 u_0^4 + \dots \\ S_L = \beta(u_0) &= \beta_1 u_0 + \beta_2 u_0^2 + \beta_3 u_0^3 + \beta_4 u_0^4 + \dots \end{aligned}$$

$$e^{A_L S_L} = I + \beta_1 A_L u_0 + \left( \beta_2 A_L + \frac{\beta_1^2}{2} A_L^2 \right) u_0^2 + \left( \beta_3 A_L + \beta_1 \beta_2 A_L^2 + \frac{\beta_1^3}{6} A_L^3 \right) u_0^3 + \dots$$

Reescrevendo a equação (3-11) obtemos,

$$e_L^- \left[ u_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_L \end{pmatrix} + u_0 u_1 \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{A_L S_L} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_0 \begin{pmatrix} b \\ \alpha_L \end{pmatrix} \right].$$

Considerando a equação (3.3), fazemos os cálculos somente para os termos de grau 1 e assim,

$$e_L^- \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_1 \\ \alpha_L + (1+\gamma_L^2)\beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo a equação obtemos,

$$L_1 = -e_L^-, \quad (3-12)$$

$$\beta_1 = -(1+e_L^-)x_L. \quad (3-13)$$

Para os termos de grau 2 temos que,

$$e_L^- \begin{pmatrix} bL_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_2 + 2\gamma_L \beta_1 L_1 + bL_1 \\ (1+\gamma_L^2)(\beta_2 + b\beta_1 + \gamma_L \beta_1^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$L_2 = -e_L^- (1+e_L^-)y_L, \quad (3-14)$$

$$\beta_2 = -b\beta_1 - \gamma_L \beta_1^2, \quad (3-15)$$

E os termos de grau 3 e grau 4,

$$L_3 = e_L^-(1 + e_L^-) \left( (1 + \gamma_L^2) \frac{e_L^- - 1}{2} x_L^2 + (1 + e_L^-) y_L^2 \right), \quad (3-16)$$

$$L_4 = -e_L^-(1 + e_L^-) Q_L, \quad (3-17)$$

onde

$$Q_L = (1 + \gamma_L^2) \left( \frac{2\gamma_L(1 - e_L^- + (e_L^-)^2)x_L^3}{3} + \frac{(e_L^- - 1)(2e_L^- + 3)}{2} x_L^2 y_L \right) + (1 + e_L^-)^2 y_L^2.$$

E analogamente fazemos para o semiplano da direita. Considere o sistema (2-19) onde  $x \geq 0$ . A matriz associada a esse sistema é dada por:

$$A_R = \begin{pmatrix} 2\gamma_R & -1 \\ 1 + \gamma_R^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo obtemos a seguinte relação entre o campo vetorial no ponto de chegada  $(0, y_1)$  e o campo vetorial no ponto inicial  $(0, y_0)$ :

$$\begin{pmatrix} -y_1 + b \\ -\alpha_R \end{pmatrix} = e^{A_R \tau_R} \begin{pmatrix} -y_0 + b \\ -\alpha_R \end{pmatrix}.$$

Por simetria e fazendo a mudança de variável  $S_R = \tau_R - \pi$ ,  $u_0 = y_0^{-1}$ ,  $u_1 = y_1^{-1}$  e

$$e_R^+ = e^{\gamma_R \pi},$$

após alguns cálculos temos que para a expansão,

$$u_1 = R(u_0) = R_1 u_0 + R_2 u_0^2 + R_3 u_0^3 + R_4 u_0^4 + \dots$$

obtemos:

$$R_1 = -e_R^+, \quad (3-18)$$

$$R_2 = -e_R^+(1 + e_R^+) y_R, \quad (3-19)$$

$$R_3 = -e_R^+(1 + e_R^+) \left( (1 + \gamma_R^2) (e_R^+ - 1) \frac{x_R^2}{2} + (1 + e_R^+) y_R^2 \right), \quad (3-20)$$

$$R_4 = -e_R^+(1 + e_R^+) Q_R, \quad (3-21)$$

onde

$$Q_R = (1 + \gamma_R^2) \left( \frac{2\gamma_R(1 - e_R^+ + (e_R^+)^2)x_R^3}{3} + \frac{(e_R^+ - 1)(2e_R^+ + 3)}{2} x_R^2 y_R \right) + (1 + e_R^+)^2 y_R^2.$$

Na verdade os coeficientes  $R_i$  com  $i = 1, 2, 3, 4$  podem ser obtidos diretamente dos coeficientes  $L_i$  com  $i = 1, 2, 3, 4$ , apenas usando a seguinte transformação  $(\gamma_L, x_L, y_L, b, \gamma_R, x_R, y_R) \rightarrow (-\gamma_R, -x_R, y_R, -b, -\gamma_L, -x_L, y_L)$ . Portanto podemos escrever os primeiros termos da série de Taylor do mapa de deslocamento e assim caracterizar as órbitas periódicas.

**Lema 3.1** *Considerando os coeficientes  $L_1$  e  $R_1$  então,*

$$\text{sign}(L_1 - R_1) = \text{sign}(\gamma_L - \gamma_R).$$

*Prova.* Temos que,

$$L_1 - R_1 = e_R^+ - e_L^- = e^{\pi\gamma_R} - e^{-\pi\gamma_L} = e^{-\pi\gamma_L} \left( e^{\pi(\gamma_R + \gamma_L)} - 1 \right).$$

□

**Teorema 3.1** *A órbita periódica no infinito é hiperbólica estável quando  $\gamma_L + \gamma_R > 0$ , e será hiperbólica instável quando  $\gamma_L + \gamma_R < 0$ . No caso em que  $\gamma_L + \gamma_R = 0$  a órbita periódica no infinito é não hiperbólica e se comporta como foco fraco ou um centro.*

Esse Teorema é um resultado geral que será estudado nos Teoremas 3.4, 3.3 e 3.4.

### 3.4 Caracterização dos centros

Nesta seção pretendemos nos dedicar a caracterizar os centros e mostraremos os tipos de configurações possíveis. Além disso, buscamos apresentar um teorema que dará condições para que o sistema (2-6) tenha um centro no infinito.

**Teorema 3.2** *Considere o sistema (2-6), existe um centro no infinito se e somente se ocorrer um dos seguintes casos:*

1. Quando  $\gamma_L = \gamma_R = 0$  e  $b = 0$ .
2. Quando  $\gamma_L = -\gamma_R \neq 0$ ,  $x_L = x_R = 0$  e  $b = 0$ .
3. Quando  $\gamma_L = -\gamma_R \neq 0$ ,  $x_L = -x_R \neq 0$  e  $b = 0$ .

*Prova.* A primeira parte da demonstração consiste em mostrar as condições suficientes para que haja um centro no infinito, próximo a órbita periódica no infinito.

- (1) Suponha  $\gamma_L = \gamma_R = 0$  e  $b = 0$ , então o sistema reduz

$$X_L = \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x - x_L \end{cases} \quad x \leq 0 \quad e \quad X_R = \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x - x_R \end{cases} \quad x > 0.$$

Considere a Transformação  $(x, y, \tau) \rightarrow (x, -y, -\tau)$  e defina  $X = x, Y = -y$  e  $T = -\tau$  então,

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dT} &= \frac{dX}{d\tau} \frac{d\tau}{dT} = -\dot{x}, \\ \frac{dY}{dT} &= \frac{dY}{d\tau} \frac{d\tau}{dT} = \dot{y}.\end{aligned}$$

Daí obtemos o seguinte sistema,

$$X_L = \begin{cases} \dot{X} = -Y \\ \dot{Y} = X - x_L \end{cases} \quad x \leq 0 \quad e \quad X_R = \begin{cases} \dot{X} = -Y \\ \dot{Y} = X - x_R \end{cases} \quad x > 0$$

Assim o sistema torna-se invariante sob a mudança  $(x, y, \tau) \rightarrow (x, -y, -\tau)$ , portanto admite a reversibilidade no tempo. Logo  $L(u_0) = -u_0$  e  $R(u_0) = -u_0$  o que implica em  $\Delta(u_0) = 0$  para todo  $u_0 > 0$  e então temos um centro próximo ao infinito que é a junção de dois centros lineares (reais ou virtuais). A integral primeira desse sistema é dado por,

$$\begin{aligned}H_L(x, y) &= (x - x_L)^2 + y^2 \quad x \leq 0, \\ H_R(x, y) &= (x - x_R)^2 + y^2 \quad x > 0.\end{aligned}$$

De fato, note que

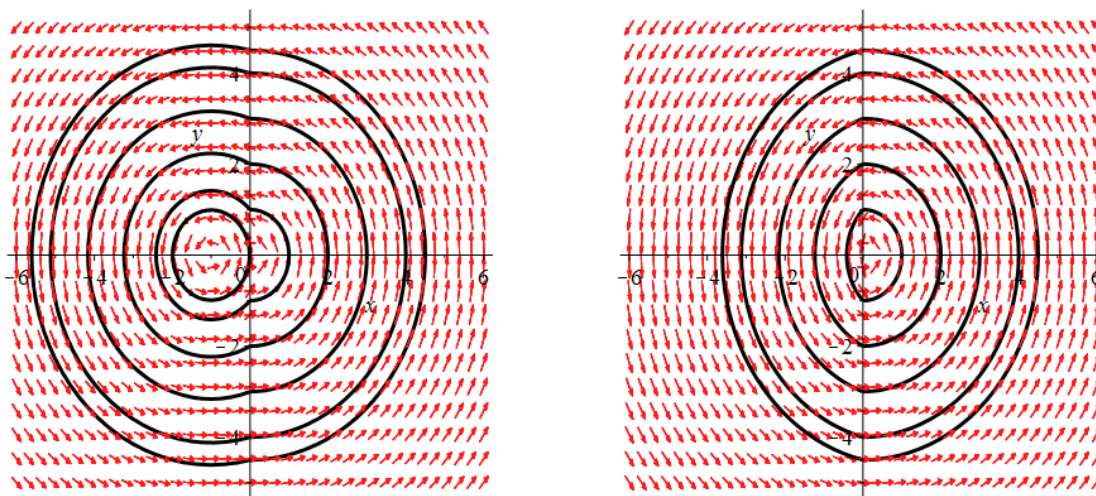
$$\begin{aligned}\frac{dH_L}{dt} &= H_{Lx}\dot{x} + H_{Ly}\dot{y} \\ &= 2(x - x_L)\dot{x} + 2y\dot{y} \\ &= -2y(x - x_L) + 2y(x - x_L) \\ &= 0.\end{aligned}$$

e

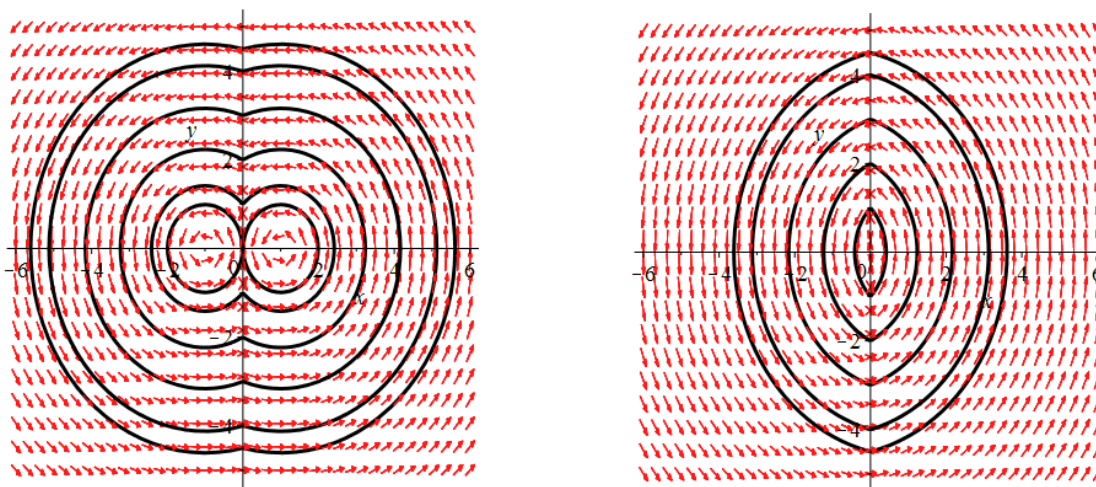
$$\begin{aligned}\frac{dH_R}{dt} &= H_{Rx}\dot{x} + H_{Ry}\dot{y} \\ &= 2(x - x_R)\dot{x} + 2y\dot{y} \\ &= -2y(x - x_R) + 2y(x - x_R) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Pela Proposição 2.5 podemos ter pontos de equilíbrios reais ou virtuais dependendo dos sinais de  $x_L$  e  $x_R$ , rodeados por órbitas periódicas fechadas que podem ser círculos contidos em um semiplano ou a concatenação de dois arcos. Note que se pelo menos um dos pontos de equilíbrio for virtual então o centro é global e além

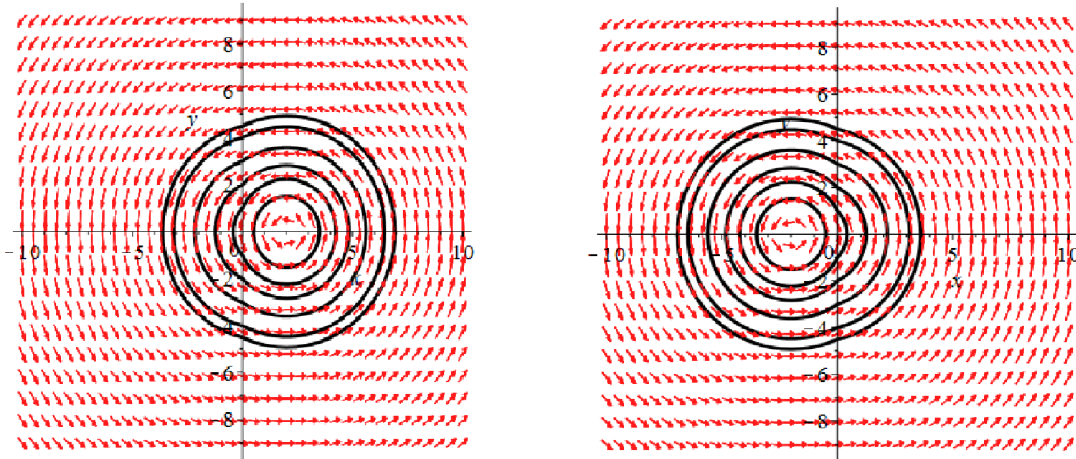
disso todas as configurações de centro para esse caso é linear. Vejamos os possíveis casos,



**Figura 3.3:** A esquerda  $x_R = 0$  e  $x_L = -1$  e à direita  $x_R = 0$  e  $x_L = 1$



**Figura 3.4:** A esquerda  $x_L = -1$  e  $x_R = 1$  e à direita  $x_L = 1$  e  $x_R = -1$ .



**Figura 3.5:** A esquerda  $x_R = 2$  e  $x_L = 1$  e à direita  $x_R = -1$  e  $x_L = -2$ .

(2) Suponha que  $\gamma_L = -\gamma_R \neq 0$ ,  $x_L = x_R = 0$  e  $b = 0$  então o sistema reduz,

$$X_L = \begin{cases} \dot{x} = 2\gamma_L x - y \\ \dot{y} = (1 + \gamma_L^2)x \end{cases} \quad x \leq 0 \quad e \quad X_R = \begin{cases} \dot{x} = -2\gamma_L x - y \\ \dot{y} = (1 + \gamma_L^2)x \end{cases} \quad x > 0.$$

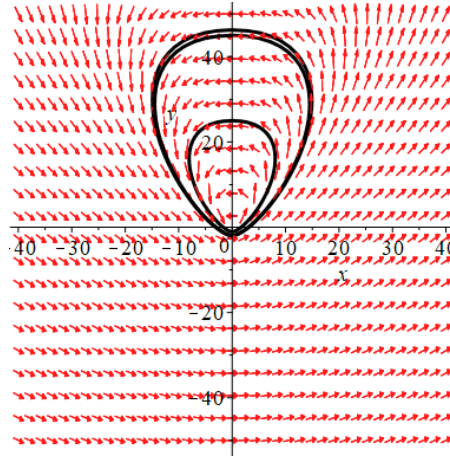
Considere a Transformação  $(x, y, \tau) \rightarrow (-x, y, -\tau)$  e defina  $X = -x$ ,  $Y = y$  e  $T = -\tau$  então,

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= \frac{dX}{d\tau} \frac{d\tau}{dT} = \dot{x}, \\ \frac{dY}{dT} &= \frac{dY}{d\tau} \frac{d\tau}{dT} = -\dot{y}. \end{aligned}$$

Daí obtemos o seguinte sistema,

$$X_L = \begin{cases} \dot{X} = -2\gamma_L X - Y \\ \dot{Y} = (1 + \gamma_L^2)X \end{cases} \quad x \leq 0 \quad e \quad X_R = \begin{cases} \dot{X} = 2\gamma_L X - Y \\ \dot{Y} = (1 + \gamma_L^2)X \end{cases} \quad x > 0.$$

Assim o sistema torna-se invariante sob a mudança  $(x, y, \tau) \rightarrow (-x, y, -\tau)$ , portanto admite a reversibilidade no tempo. Logo  $\Delta(u_0) = 0$  para todo  $u_0 > 0$  e então temos um centro linear global com um ponto de tangência dupla na origem como foi provado na Proposição 2.6.



**Figura 3.6:** *Caso:*  $b = 0$ ,  $\gamma_L = -1$ ,  $\gamma_R = 1$  e  $x_L = x_R = 0$ .

(3) Suponha  $\gamma_L = -\gamma_R \neq 0$ ,  $x_L = -x_R \neq 0$  e  $b = 0$  então o sistema reduz,

$$X_L = \begin{cases} \dot{x} = 2\gamma_L x - y \\ \dot{y} = (1 + \gamma_L^2)(x - x_L) \end{cases} \quad x \leq 0 \quad X_R = \begin{cases} \dot{x} = -2\gamma_L x - y \\ \dot{y} = (1 + \gamma_L^2)(x + x_L) \end{cases} \quad x > 0.$$

Considere a Transformação  $(x, y, \tau) \rightarrow (-x, y, -\tau)$  e defina  $X = -x$ ,  $Y = y$  e  $T = -\tau$  então,

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= \frac{dX}{d\tau} \frac{d\tau}{dT} = \dot{x}, \\ \frac{dY}{dT} &= \frac{dY}{d\tau} \frac{d\tau}{dT} = -\dot{y}. \end{aligned}$$

Dáí obtemos o seguinte sistema,

$$X_L = \begin{cases} \dot{X} = -2\gamma_L X - Y \\ \dot{Y} = (1 + \gamma_L^2)(X + x_L) \end{cases} \quad x \leq 0 \quad e \quad X_R = \begin{cases} \dot{X} = 2\gamma_L X - Y \\ \dot{Y} = (1 + \gamma_L^2)(X - x_L) \end{cases} \quad x > 0.$$

Assim o sistema torna-se invariante sob a mudança  $(x, y, \tau) \rightarrow (-x, y, -\tau)$ , portanto admite a reversibilidade no tempo. Logo  $\Delta(u_0) = 0$  para todo  $u_0 > 0$  e então temos um centro próximo ao infinito.

Pela Proposição 2.7 temos dois equilíbrios reais quando  $x_L < 0 < x_R$  e dois equilíbrios virtuais quando  $x_R < 0 < x_L$ . O plano de fase exibe um centro não linear global quando os pontos de equilíbrio são virtuais  $x_R < 0 < x_L$  e exibe um centro não linear e não global quando os pontos de equilíbrio são reais  $x_L < 0 < x_R$ , o centro para este caso se comporta como uma órbita homoclínica em formato de coração, cujo interior contém dois focos.

Agora iremos mostrar que quando o sistema tem um centro no infinito próximo a órbita periódica, estaremos sob as hipóteses dadas no item 1, 2 ou 3.

Devemos encontrar condições para que a função deslocamento se anule. Para tanto, considerando o Lema 3.3, sabemos que

$$\Delta_1 = L_1 - R_1 = 0 \iff \gamma_L + \gamma_R = 0.$$

Segue que,  $\gamma_R = -\gamma_L$  e portanto  $e_R^+ = e_L^-$ . Veja que seguindo o mesmo processo e assumindo a condição  $e_R^+ = e_L^-$  temos que,

$$\Delta_2 = L_2 - R_2 = e_L^-(1 + e_L^-)(y_R - y_L),$$

e então,

$$\Delta_2 = L_2 - R_2 = 0 \iff y_R - y_L = 0.$$

Assumindo  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ , isto é, as condições  $\gamma_R = -\gamma_L$  e  $y_R = y_L$  obtemos,

$$\Delta_3 = L_3 - R_3 = \frac{e_L^-}{2}(1 + (e_L^-)^2)(1 + \gamma_L^2)(x_L^2 - x_R^2),$$

e então três possibilidades surgem para que a equação anterior se anule. A primeira delas é o caso  $e_L^- = 1$ , o que implica em  $\gamma_L = 0$  e então vale  $\gamma_R = \gamma_L = 0$  e  $y_R = y_L$ , logo estamos sob as hipóteses do item 1. A segunda é o caso  $x_R = x_L$ , assumindo novamente as condições de  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  se anularem, obtemos:

$$\Delta_4 = -\frac{4e_L^-}{3}(1 + (e_L^-)^3)(1 + \gamma_L^2)\gamma_L x_L^3,$$

e a condição  $y_L = y_R = 0$ . Concluimos que  $\Delta_4 = 0$  apenas se  $\gamma_L = 0$ , e então estamos sob as hipóteses do item 1, ou se  $x_L = 0$ , estaremos então sob as hipóteses do item 2, onde temos novamente como consequência  $b = 0$ . A terceira possibilidade de  $\Delta_3 = 0$ , uma vez assumidas tais condições, é o caso  $x_R = -x_L$ , o que novamente implica  $b = 0$  e também  $y_L = y_R$ . Então estamos nas hipóteses do item 3. Portanto obtemos todas as condições dadas nas afirmações 1, 2 e 3.  $\square$

**Observação 3.1** *Em nosso caso,  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0 \Rightarrow \Delta = 0$ . O que ocorre é que uma vez assumidas as condições que anulam  $\Delta_1, \Delta_2$  o sistema torna-se invariante sob as seguintes mudanças  $(x, y, \tau) \rightarrow (x, -y, -\tau)$  e  $(x, y, \tau) \rightarrow (-x, y, -\tau)$ , logo o sistema é reversível no tempo.*

**Observação 3.2** *Podemos notar que os centros do tipo 1 e 2 são sempre contínuos, uma vez que satisfazem as condições do Corolário 2.1. Centros do tipo 1 são sempre contínuos e lineares e pelo Corolário 2.1 satisfazem a condição  $\alpha_L = \alpha_R$ , isto é, os equilíbrios estão localizados no mesmo ponto. Além disso, centros do tipo 2 são sempre contínuos mas*

não lineares. Já os centros do tipo 3 são sempre descontínuos pois não satisfazem as condições dadas no Corolário 2.1.

### 3.5 Caracterização do Foco Fraco e suas perturbações

Um dos principais problemas estudados em sistemas dinâmicos é determinar a quantidade de ciclos limites que pode bifurcar de um sistema diferencial linear planar descontínuo tendo inicialmente uma singularidade tipo foco fraco. A existência de ciclos limite após perturbações de foco fraco é um dos tópicos que abordaremos nesta seção, forneceremos um teorema que dará uma descrição sobre quando o sistema (2-19) exibe 1, 2 ou 3 ciclos limite que bifurcam das diferentes ordens de foco fraco. Veremos também nesta seção questões relacionadas a hiperbolicidade e estabilidade de órbitas periódicas, bem como, as possíveis ordens de foco fraco.

**Teorema 3.3** *Para o sistema (2-19) seguem os seguintes resultados:*

1. Se  $\gamma_L = -\gamma_R$  e  $y_L - y_R \neq 0$ , então a órbita periódica no infinito se comporta como um foco fraco de ordem 1. A órbita periódica é estável (instável) quando  $y_R - y_L > 0$  ( $y_R - y_L < 0$ );
2. Se  $\gamma_L = -\gamma_R \neq 0$ ,  $y_L = y_R$  e  $x_L^2 - x_R^2 \neq 0$ , então a órbita periódica no infinito se comporta como um foco fraco de ordem 2. A órbita periódica é estável (instável) quando  $\gamma_L(x_L^2 - x_R^2) > 0$  ( $\gamma_L(x_L^2 - x_R^2) < 0$ );
3. Se  $\gamma_L = -\gamma_R \neq 0$ ,  $y_L = y_R = 0$  e  $x_L = x_R \neq 0$ , então a órbita periódica no infinito se comporta como um foco fraco de ordem 3. A órbita periódica é estável (instável) quando  $\gamma_L x_L < 0$  ( $\gamma_L x_L > 0$ );
4. Se  $\gamma_L = -\gamma_R$ ,  $y_L = y_R$  e  $x_L = -x_R$ , de modo que  $b = 0$  então a órbita periódica no infinito é estável, mas não isolada e, portanto, não é assintoticamente estável.

*Prova.* Observe que a órbita periódica será estável (instável) quando  $u_2 - u_1 < 0$  ( $u_2 - u_1 > 0$ ), ou equivalentemente  $\Delta(u_0) > 0$  ( $\Delta(u_0) < 0$ ).

- (1) Assumindo  $\gamma_L = -\gamma_R$  então  $\gamma_L + \gamma_R = 0$  e pelo Lema 3.3 temos que,

$$\Delta_1 = L_1 - R_1 = 0 \Rightarrow e_R^+ = e_L^-.$$

Considerando o mapa de deslocamento  $\Delta_2$  e a condição  $e_R^+ = e_L^-$  obtemos,

$$\Delta_2 = L_2 - R_2 = e_L^-(1 + e_L^-)(y_R - y_L) \neq 0,$$

com  $y_R - y_L \neq 0$ . Logo o sistema exibe um foco fraco de ordem 1 e fica determinado:

- (a) Se  $y_R - y_L > 0$  a órbita periódica é estável, pois  $\Delta_2 = L_2 - R_2 > 0$ .  
 (b) Se  $y_R - y_L < 0$  a órbita periódica é instável, pois  $\Delta_2 = L_2 - R_2 < 0$ .

(2) Iremos assumir que  $\gamma_L = -\gamma_R \neq 0$  e  $y_L = y_R$ . Veja agora que  $\Delta_1 = 0$  e

$$\Delta_2 = L_2 - R_2 = e_L^-(1 + e_L^-)(y_R - y_L) = 0.$$

Considerando o mapa de deslocamento  $\Delta_3$  temos que,

$$\Delta_3 = L_3 - R_3 = \frac{e_L^-}{2}(1 + (e_L^-)^2)(1 + \gamma_L^2)(x_L^2 - x_R^2) \neq 0,$$

com  $x_L^2 - x_R^2 \neq 0$ . Logo o sistema exibe um foco fraco de ordem 2 e fica determinado:

- (a) Se  $\gamma_L(x_L^2 - x_R^2) > 0$  a órbita periódica é estável, pois  $\Delta_3 = L_3 - R_3 > 0$ .  
 (b) Se  $\gamma_L(x_L^2 - x_R^2) < 0$  a órbita periódica é instável, pois  $\Delta_3 = L_3 - R_3 < 0$ .

(3) Assumindo  $\gamma_L = -\gamma_R \neq 0$ ,  $y_R = y_L = 0$  e  $x_R = x_L \neq 0$ . Veja que  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$  e

$$\Delta_3 = L_3 - R_3 = \frac{e_L^-}{2}(1 + (e_L^-)^2)(1 + \gamma_L^2)(x_L^2 - x_R^2) = 0.$$

Considerando o mapa de deslocamento  $\Delta_4$  obtemos,

$$\Delta_4 = L_4 - R_4 = -\frac{4e_L^-}{3}(1 + (e_L^-)^3)(1 + \gamma_L^2)\gamma_L x_L^3 \neq 0,$$

com  $x_L = x_R \neq 0$ . Logo o sistema exibe um foco fraco de ordem 3 e fica determinado:

- (a) Se  $\gamma_L x_L < 0$  a órbita periódica é estável, pois  $\Delta_4 = L_4 - R_4 > 0$ ;  
 (b) Se  $\gamma_L x_L > 0$  a órbita periódica é instável, pois  $\Delta_4 = L_4 - R_4 < 0$ .

(4) Assumindo  $\gamma_L = -\gamma_R$ ,  $y_L = y_R$ ,  $x_L = -x_R$  e  $b = 0$  estamos nas hipóteses do Teorema 3.4 e assim temos que a órbita periódica é estável, mas não assintoticamente estável.

□

**Observação 3.3** Note que as afirmações 2 e 3 do Teorema correspondem a sistemas descontínuos uma vez que não satisfazem as condições do Corolário 2.1. Podemos concluir que para sistemas contínuos a órbita periódica no infinito se comporta como um foco fraco de ordem 1 enquanto em um sistema descontínuo a órbita periódica no infinito se comporta como um foco fraco de ordem 2 ou 3.

Podemos recordar da teoria de bifurcações que em um sistema de equações diferenciais uma bifurcação ocorre quando existe uma mudança qualitativa no sistema, mais precisamente, quando pequenas alterações nos parâmetros (passam por um valor crítico) provocam uma mudança topológica no sistema. Existem dois tipos de bifurcações, as bifurcações locais e as globais. Se os autovalores da matriz Jacobiana são complexos conjugados no ponto de bifurcação, então dizemos que o sistema linearizado sofreu uma bifurcação local, chamada por bifurcação de Hopf. A bifurcação de Hopf de um sistema implica no surgimento de um ciclo limite. Veja que o estudo deste tipo de bifurcação exige suavidade do problema, o que torna o estudo deste tipo de bifurcação mais complicado ao estudar sistemas não suaves. As bifurcações locais e algumas bifurcações globais de codimensão um para Sistemas Planares de Filippov foi inicialmente estabelecida por Yu A. Kuznetsov e posteriormente outros pesquisadores matemáticos estabeleceram as bifurcações de codimensão maior. Estudaremos neste trabalho somente a bifurcação local de Hopf.

**Observação 3.4** *O sistema (2-19) sofre uma bifurcação de Hopf degenerada no infinito para  $\gamma_L + \gamma_R = 0$ .*

A codimensão de uma bifurcação é o número mínimo de parâmetros que devem ser movidos para que ocorra a bifurcação. Então quando varia-se um único parâmetro na bifurcação de Hopf dizemos que essa bifurcação tem codimensão um. Quando varia-se dois parâmetros no sistema de modo que tenha dois pares de autovalores imaginário puros, então dizemos que essa bifurcação de Hopf tem codimensão dois [11]. Ao variar dois parâmetros, percorre-se a curva de bifurcação de Hopf no plano de parâmetros, e condições especiais desta bifurcação podem surgir, como por exemplo uma bifurcação HH (Hopf duplo), onde tem-se dois pares de autovalores da matriz Jacobiana complexo-conjugados com parte real nula caracterizando uma bifurcação de codimensão 2 [9]. Veja mais detalhes em [9].

**Teorema 3.4** *Para o sistema (2-19) as seguintes afirmações são válidas.*

1. *Se tomarmos  $\gamma_R$  como o único parâmetro de bifurcação, assumindo valores fixos para os parâmetros restantes, e a condição  $y_L - y_R = 0$  (equivalentemente,  $b - \gamma_L(x_L + x_R) = 0$ ) se mantém, então é hiperbólico estável (instável) e o ciclo limite bifurca do infinito para  $\gamma_L < -\gamma_R$  ( $\gamma_L > -\gamma_R$ ) desde que  $y_L - y_R < 0$  ( $y_L - y_R > 0$ ).*
2. *Se tomarmos  $(\gamma_R, b)$  como parâmetros de bifurcação, assumindo valores fixos para os parâmetros restantes, e a condição  $x_L^2 - x_R^2 \neq 0$  é válido, então o ponto crítico  $(\gamma_R, b) = (-\gamma_L, \gamma_L(x_L + x_R))$  é um ponto de bifurcação de codimensão dois. Consequentemente, até 2 ciclos limite podem bifurcar do infinito.*

3. Se assumirmos valores fixos para  $\gamma_L \neq 0$  e  $x_L \neq 0$ , então, dentro do espaço de três parâmetros  $(\gamma_R, b, x_R)$ , o ponto crítico  $(\gamma_R, b, x_R) = (-\gamma_L, 2\gamma_L x_L, x_L)$  é um ponto de bifurcação de codimensão três. Em particular, até três ciclos limite podem bifurcar do infinito, de modo que em uma vizinhança de um ponto crítico existem valores de parâmetros para os quais o sistema exhibe 3 ciclos limite de grande amplitude.

*Prova.*

1. Note inicialmente que,

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial \gamma_R} = \pi e^{\gamma_R \pi} \neq 0,$$

e assumindo o ponto de bifurcação  $\gamma_R = -\gamma_L$  temos que  $\Delta_1(z_0) = 0$  e  $\Delta_2(z_0) \neq 0$  onde  $z_0 = (\gamma_L, \gamma_R, b, x_R, x_L) = (\gamma_L, -\gamma_L, b, x_R, x_L)$ .

Como  $\frac{\partial \Delta_1}{\partial \gamma_R} \neq 0$ , podemos aplicar o Teorema da Função Implícita que vai garantir a existência de uma nova coordenada local  $\delta_1$  em uma vizinhança da origem no espaço de parâmetros, tal que  $\Delta_1(z_0) = \delta_1$ . Note que:

- (i)  $\Delta$  é uma função analítica;
- (ii) O T.F.I vai garantir a existência de uma nova coordenada local  $\delta_1$  em uma vizinhança da origem;
- (iii)  $\Delta(u, z_0) = \Delta_1(z_0)u_0 + \Delta_2(z_0)u_0^2 \neq 0$  já que  $\Delta_1(z_0) = 0$ , mas  $\Delta_2(z_0) \neq 0$ .

De (i), (ii) e (iii) podemos aplicar o Teorema da Preparação de Weierstrass, isto é, vai existir uma vizinhança da origem tal que  $\Delta$  é unicamente representável na forma:

$$\Delta(u, \delta) = q(u, \delta) \bar{\Delta}(u, \delta), \quad (3-22)$$

onde  $\bar{\Delta}(u, \delta)$  é uma função analítica não nula e  $q(u, \delta)$  é o polinômio de Weierstrass. Podemos escrever o polinômio de Weierstrass da seguinte maneira:

$$q(u, \delta) = \delta_1 u + u^2, \quad (3-23)$$

assim,

$$\Delta(u, \delta) = (\delta_1 u + u^2) \bar{\Delta}(u, \delta). \quad (3-24)$$

Portanto  $q$  possui uma única raiz positiva  $-\delta_1$  quando  $\delta_1 < 0$ , isto é, temos um ciclo limite de grande amplitude. Em particular a teoria de perturbações garante que sob tais condições o sistema possui 1 ciclo limite que bifurca do infinito.

2. Note que só precisamos calcular no ponto crítico (ponto de bifurcação)  $z_0 = (\gamma_L, -\gamma_L, \gamma_L(x_L + x_R), x_R, x_L)$  a seguinte matriz Jacobiana:

$$\frac{\partial(\Delta_1; \Delta_2)}{\partial(\gamma_R, b)} = \begin{pmatrix} e_L^- \pi & 0 \\ (e_L^-)^2 (2(1 + e_L^-) x_R + \pi \gamma_L (2 + e_L^-) (x_L - x_R)) & 2(e_L^-)^2 (1 + e_L^-). \end{pmatrix}$$

Portanto, obtemos que para a matriz jacobiana no ponto crítico  $z_0$ ,

$$\det \left( \frac{\partial(\Delta_1, \Delta_2)}{\partial(\gamma_R, b)} \right) = 2\pi(e_L^-)^3 + 2\pi(e_L^-)^2 \neq 0.$$

Logo a matriz Jacobiana tem posto 2. Assim podemos aplicar o Teorema da Função Implícita que vai garantir a existência de novas coordenadas locais  $\delta = (\delta_1, \delta_2)$  em uma vizinhança da origem no espaço de parâmetros, tal que  $\Delta_i(z_0) = \beta_i$ , para  $i = 1, 2$ . Note que:

- (i)  $\Delta$  é uma função analítica;
- (ii) O T.F.I vai garantir a existência de novas coordenadas locais  $\delta = (\delta_1, \delta_2)$  em uma vizinhança da origem;
- (iii)  $\Delta(u, z_0) = \Delta_1(z_0)u + \Delta_2(z_0)u^2 + \Delta_3(z_0)u^3 \neq 0$  já que  $\Delta_i(z_0) = 0$  para  $i = 1, 2$ , mas  $\Delta_3(z_0) \neq 0$ .

De (i), (ii) e (iii) podemos aplicar o Teorema da Preparação de Weierstrass, isto é, vai existir uma vizinhança da origem tal que  $\Delta$  é unicamente representável na forma:

$$\Delta(u, \delta) = q(u, \delta)\bar{\Delta}(u, \delta), \quad (3-25)$$

onde  $\bar{\Delta}(u, \delta)$  é uma função analítica não nula e  $q(u, \delta)$  é o polinômio de Weierstrass. Podemos escrever o polinômio de Weierstrass da seguinte maneira:

$$q(u, \delta) = \delta_1 u + \delta_2 u^2 + u^3, \quad (3-26)$$

e assim,

$$\Delta(u, \delta) = (\delta_1 u + \delta_2 u^2 + u^3)\bar{\Delta}(u, \delta). \quad (3-27)$$

Note que,

$$q(u, \delta) = u(\delta_1 + \delta_2 u + u^2).$$

Seja então,

$$p(u, \delta) = \delta_1 + \delta_2 u + u^2.$$

As raízes dessa equação são  $\frac{-\delta_2 + \sqrt{\delta_2^2 - 4\delta_1}}{2}$  e  $\frac{-\delta_2 - \sqrt{\delta_2^2 - 4\delta_1}}{2}$ . Portanto  $q$  possui 2 raízes positivas, isto é, temos 2 órbitas periódicas de grande amplitude. Em particular a teoria de perturbações garante que sob tais condições o sistema possui 2 ciclos limite que bifurcam do infinito.

3. A demonstração segue diretamente do Teorema 3.5 a seguir.

□

Veja que o caso 1 dado no Teorema 3.4 pode ser estudado apenas pela teoria clássica de sistemas contínuos onde é possível encontrar a bifurcação de um único ciclo limite que corresponde a um foco fraco de ordem 1. O caso mais degenerado a ser estudado é o caso 3 dado no Teorema 3.3, que ocorre quando a órbita periódica no infinito se comporta como um foco fraco de ordem 3. A seguir estudaremos resultados necessários para a demonstração do Teorema (3.4), que sob certas condições é possível determinar 3 órbitas periódicas de grande amplitude.

**Teorema 3.5** *Considerando o sistema (2-6) ou equivalentemente o sistema (2-19), seja  $\gamma_L \neq 0$  e  $x_L \neq 0$  fixo em uma vizinhança do ponto crítico  $(\gamma_R, b, x_R) = (-\gamma_L, 2\gamma_L x_L, x_L)$  onde a órbita periódica no infinito se comporta como um foco fraco de ordem 3, tal que os coeficientes  $\Delta_i(\gamma_R, b, x_R)$  para  $i = 2, 3$  satisfaz*

$$\Delta_i(-\gamma_L, 2\gamma_L x_L, x_L) = 0,$$

$$\Delta_4(-\gamma_L, 2\gamma_L, x_L) = -\frac{4e_L^-}{3}(1 + (e_L^-)^3)(1 + \gamma_L^2)\gamma_L x_L^3 \neq 0.$$

*Então até três ciclos limite podem bifurcar-se do infinito, de modo que em uma vizinhança de tal ponto crítico existem valores de parâmetros para os quais o sistema exibe 3 ciclos limite de grande amplitude.*

*Prova.* Calculando as derivadas dos coeficientes  $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$  em relação aos parâmetros  $(\gamma_R, b, x_R)$  no ponto crítico  $(-\gamma_L, 2\gamma_L x_L, x_L)$  temos:

(I)

$$\Delta_1 = L_1 - R_1 = -e_L^- + e_R^+ = -e_L^{-\gamma_L \pi} + e_R^{\gamma_R \pi},$$

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial b} = \frac{\partial \Delta_1}{\partial x_R} = 0,$$

(II)

$$\Delta_2 = L_2 - R_2 = e_L^-(1 + e_L^-)(y_R - y_L) = 0,$$

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial \gamma_R}(-\gamma_L, 2\gamma_L x_L, x_L) = 4e_L^-(1 + e_L^-)x_L,$$

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial b}(-\gamma_L, 2\gamma_L x_L, x_L) = 2e_L^-(1 + e_L^-),$$

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial x_R}(-\gamma_L, 2\gamma_L x_L, x_L) = -2e_L^-(1 + e_L^-)\gamma_L,$$

(III)

$$\Delta_3 = L_3 - R_3 = \frac{e_L^-}{2}(1 + (e_L^-)^2)(1 + \gamma_L^2)(x_L^2 - x_R^2),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta_3}{\partial b}(-\gamma_L, 2\gamma_L x_L, x_L) &= 0, \\ \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_R}(-\gamma_L, 2\gamma_L x_L, x_L) &= -e_L^-(1 + (e_L^-)^2)(1 + \gamma_L^2)x_L.\end{aligned}$$

Note que só precisamos calcular no ponto crítico a seguinte matriz Jacobiana:

$$\frac{\partial(\Delta_2; \Delta_3)}{\partial(b, x_R)} = \begin{pmatrix} 2e_L^-(1 + e_L^-) & -2e_L^-(1 + e_L^-)\gamma_L \\ 0 & -e_L^-(1 - (e_L^-)^2)(1 + \gamma_L^2)x_L. \end{pmatrix}$$

Portanto, obtemos que para a matriz jacobiana no ponto crítico  $(-\gamma_L, 2\gamma_L x_L, x_L)$ ,

$$\det \left( \frac{\partial(\Delta_1, \Delta_2; \Delta_3)}{\partial(\gamma_R, b, x_R)} \right) = -2\pi(e_L^-)^3(1 - e_L^-)^2(1 + e_L^-)^2(1 + \gamma_L^2)x_L \neq 0.$$

Logo a matriz Jacobiana tem posto 3. Então, podemos aplicar o Teorema da Função Implícita que vai garantir a existência de novas coordenadas locais  $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$  em uma vizinhança da origem no espaço de parâmetros, tal que  $\Delta_i(\gamma_R, b, x_R) = \beta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Note que,

- (i)  $\Delta$  é uma função analítica;
- (ii) O T.F.I vai garantir a existência de novas coordenadas locais  $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$  em uma vizinhança da origem;
- (iii) Seja  $z_0 = (-\gamma_L, 2\gamma_L x_L, x_L)$  então

$$\Delta(u, z_0) = \Delta_1(z_0)u + \Delta_2(z_0)u^2 + \Delta_3(z_0)u^3 + \Delta_4(z_0)u^4 \neq 0,$$

já que  $\Delta_i(z_0) = 0$  para  $i = 1, 2, 3$ , mas  $\Delta_4(z_0) \neq 0$ ,

De (i), (ii) e (iii) podemos aplicar o Teorema da Preparação de Weierstrass, isto é, vai existir uma vizinhança da origem tal que  $\Delta$  é unicamente representável na forma:

$$\Delta(u, \delta) = q(u, \delta)\bar{\Delta}(u, \delta), \quad (3-28)$$

onde  $\bar{\Delta}(u, \delta)$  é uma função analítica não nula e  $q(u, \delta)$  é o polinômio de Weierstrass. Podemos escrever o polinômio de Weierstrass da seguinte maneira:

$$q(u, \delta) = \delta_1 u + \delta_2 u^2 + \delta_3 u^3 + u^4, \quad (3-29)$$

e portanto:

$$\Delta(u, \delta) = (\delta_1 u + \delta_2 u^2 + \delta_3 u^3 + u^4)\bar{\Delta}(u, \delta).$$

Note que,

$$q(u, \delta) = u(\delta_1 + \delta_2 u + \delta_3 u^2 + u^3).$$

Seja então,

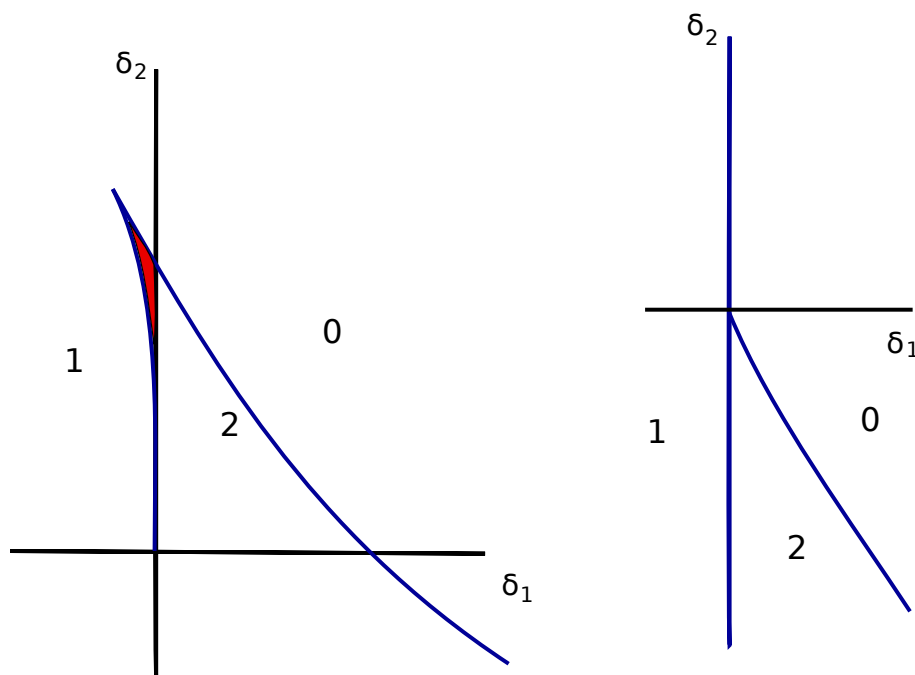
$$p(u, \delta) = \delta_1 + \delta_2 u + \delta_3 u^2 + u^3.$$

Assim o discriminante da função cúbica  $p(u, \delta)$  é dado por

$$4\delta_1\delta_3^3 - \delta_2^2\delta_3^2 - 18\delta_1\delta_2\delta_3 + 4\delta_2^3 + 27\delta_1^2 = 0.$$

Isto é, o ponto de cúspide está localizado em

$$(\delta_1, \delta_2) = \left( \frac{\delta_3^3}{27}, \frac{\delta_3^2}{3} \right).$$



**Figura 3.7:** O número de soluções positivas para  $q(u, \delta)$  no plano  $(\delta_1, \delta_2)$  para  $\delta_3 < 0$  (esquerda) e  $\delta_3 \geq 0$  (direita). A região em vermelho corresponde à existência de 3 soluções positivas.

Pela regra de Descartes o polinômio  $p(u, \delta)$  com  $\delta_3 < 0$ , possui três raízes positivas. De fato note que fazendo  $\delta_3 \rightarrow -\delta_3$  obtemos:

$$u^3 - \delta_3 u^2 + \frac{\delta_2^2}{3} u - \frac{\delta_3^3}{27},$$

logo possui 3 variações de sinais, portanto o polinômio tem 3 raízes positivas. Para  $\delta_3 > 0$ , veja que

$$u^3 + \delta_3 u^2 + \frac{\delta_2^2}{3} u + \frac{\delta_3^3}{27},$$

assim pela regra de Descartes o polinômio  $p(u, \delta)$  com  $\delta_3 > 0$ , não pode ter 3 raízes positivas.  $\square$

### 3.6 Ciclos Limite que bifurcam de centros

**Proposição 3.1** *Sejam  $\eta, \xi$  números reais não-nulos, considere o caso em que a órbita periódica no infinito se comporta como um centro, isto é, no caso em que  $\gamma_L = -\gamma_R = -\eta$ ,  $x_L = -x_R = -\xi$  e  $b = 0$ . Então a ciclicidade da órbita periódica no infinito quando perturbado na classe de sistema é no máximo 2.*

*Prova.* Note que sob tais condições dos parâmetros temos que  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$ , isto é, temos um centro. Inicialmente iremos perturbar o sistema da seguinte maneira,

$$(\gamma_L, \gamma_R, x_L, x_R, b) = (-\eta + \varepsilon_1, \eta, -\xi + \varepsilon_2, \xi, \varepsilon_3).$$

Agora calculamos a série de Taylor de primeira ordem de  $\Delta_i(\eta, \xi, \varepsilon)$  com  $i = 1, 2, 3, 4$  com relação a  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  e obtemos,

$$\begin{aligned} \Delta_1^1(\eta, \xi, \varepsilon) &= e^{\pi\eta}\pi\varepsilon_1 + O_2(\varepsilon), \\ \Delta_2^1(\eta, \xi, \varepsilon) &= 2(e^{\pi\eta} + e^{2\pi\eta})\varepsilon_3 + 2(e^{\pi\eta} + e^{2\pi\eta})\varepsilon_2\eta + 2e^{\pi\eta}\xi(1 + e^{\pi\eta} + \pi\eta + 2e^{\pi\eta}\pi\eta)\varepsilon_1 + O_2(\varepsilon), \\ \Delta_3^1(\eta, \xi, \varepsilon) &= 8e^{\pi\eta}(1 + e^{\pi\eta})^2\varepsilon_3\eta\xi + \varepsilon_2j_1(\eta, \xi) + \varepsilon_1j_2(\eta, \xi) + O_2(\varepsilon), \\ \Delta_4^1(\eta, \xi, \varepsilon) &= (e^{\pi\eta} + e^{2\pi\eta})\varepsilon_3j_3(\eta, \xi) + \varepsilon_2j_4(\eta, \xi) + O_2(\varepsilon), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} j_1(\eta, \xi) &= e^{\pi\eta}(1 + e^{\pi\eta})(-1 + e^{\pi\eta} + 7\eta^2 + 9e^{\pi\eta}\eta^2)\xi, \\ j_2(\eta, \xi) &= \frac{1}{2}e^{\pi\eta}(-\pi + 3e^{2\pi\eta}\pi + 14\eta + 32e^{\pi\eta}\eta + 18e^{2\pi\eta}\eta + 7\pi\eta^2 + 32e^{\pi\eta}\pi\eta^2 + 27e^{2\pi\eta}\pi\eta^2)\xi^2, \\ j_3(\eta, \xi) &= \xi^2(-3 + e^{\pi\eta} + 2e^{2\pi\eta} + 21\eta^2 + 49e^{\pi\eta}\eta^2 + 26e^{2\pi\eta}\eta^2), \\ j_4(\eta, \xi) &= e^{\pi\eta}(1 + e^{\pi\eta})^2\eta(-7 + 8e^{\pi\eta} + 17\eta^2 + 32e^{\pi\eta}\eta^2)\xi^2. \end{aligned}$$

Veja que o posto da matriz Jacobiana dos termos lineares de  $\Delta_i^1$ ,  $i = 1, 2, 3$  com respeito a  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  é 3 quando  $\eta, \xi \neq 0$  e o determinante da matriz é dado por

$$\det \left( \frac{\partial(\Delta_1^1, \Delta_2^1, \Delta_3^1)}{\partial(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)} \right) = -2\pi\xi e^{3\pi\eta}(-1 + e^{\pi\eta})(1 + e^{\pi\eta})^2(1 + \eta^2) \neq 0$$

Logo podemos aplicar o teorema da Função Implícita que vai garantir a existência de novas coordenadas locais  $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$  em uma vizinhança da origem no espaço de parâmetros tal que  $\Delta_i(\eta, \xi, \delta) = \delta_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ . Note que:

- (i)  $\Delta$  é uma função analítica;
- (ii) O T.F.I vai garantir a existência de uma nova coordenada local  $\delta$  em uma vizinhança da origem;
- (iii)  $\Delta^1(u, \delta) \neq 0$ .

De fato  $\Delta^1(u, \delta) \neq 0$ . Veja que,

$$\Delta_1^1(\eta, \xi, \varepsilon) = 0 \iff \varepsilon_1 = 0.$$

Assumindo  $\varepsilon_1 = 0$  temos que

$$\Delta_2^1(\eta, \xi, \varepsilon) = 0 \iff \varepsilon_3 = -\varepsilon_2\eta,$$

Assumindo  $\varepsilon_1 = 0$  e  $\varepsilon_3 = -\varepsilon_2\eta$  temos que

$$\Delta_3^1(\eta, \xi, \varepsilon) = e^{\pi\eta}(-1 + e^{2\pi\eta})\varepsilon_2(1 + \eta^2)\xi \neq 0.$$

Observe que se  $\varepsilon_2 = 0$  e assumindo as condições  $\varepsilon_1 = 0$  e  $\varepsilon_3 = -\varepsilon_2\eta$ , temos um centro já que  $\Delta_1^1 = \Delta_2^1 = \Delta_3^1 = \Delta_4^1 = 0$ , ou seja, voltamos ao caso original que perturbamos assim  $\varepsilon_2 \neq 0$  e portanto  $\Delta^1(u, \delta) \neq 0$ .

De (i), (ii) e (iii) podemos aplicar o Teorema da Preparação de Weierstrass, isto é, vai existir uma vizinhança da origem tal que  $\Delta$  é unicamente representável na forma:

$$\Delta(u, \delta) = q(u, \delta)\bar{\Delta}(u, \delta), \quad (3-30)$$

onde  $\bar{\Delta}(u, \delta)$  é uma função analítica não nula e  $q(u, \delta)$  é o polinômio de Weierstrass. Podemos escrever o polinômio de Weierstrass como,

$$q(u, \delta) = \delta_1 u + \delta_2 u^2 + u^3, \quad (3-31)$$

assim,

$$\Delta(u, \delta) = (\delta_1 u + u^2)\bar{\Delta}(u, \delta). \quad (3-32)$$

Logo  $q$  tem 2 zeros positivos e portanto temos 2 ciclos limite de grande amplitude. Observe que assumindo  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$  temos que  $\Delta_4^2 = 0$ , isto é, não podemos obter mais ciclos limite, considerando uma análise apenas de primeira ordem.  $\square$

**Proposição 3.2** *Sejam  $\eta, \xi$  números reais não-nulos, considere o caso em que a órbita periódica no infinito se comporta como um centro, isto é, no caso em que  $\gamma_L = \gamma_R = 0$ ,  $x_L = \eta$ ,  $x_R = \xi$  e  $b = 0$ . Então a ciclicidade da órbita periódica no infinito quando*

perturbado na classe de sistema é no máximo 1 se  $\eta = -\xi$ , no máximo 2 se  $\eta \neq \pm\xi$ , no máximo 3 se  $\eta = \xi$ .

*Prova.* Note que sob tais condições dos parâmetros temos que  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$ , isto é, temos um centro. Inicialmente iremos perturbar o sistema da seguinte maneira,

$$(\gamma_L, \gamma_R, x_L, x_R, b) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \eta, \xi, \varepsilon_3).$$

Agora calculamos a série de Taylor de primeira ordem de  $\Delta_i(\eta, \xi, \varepsilon)$  com  $i = 1, 2, 3, 4$  com relação a  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  e obtemos

$$\Delta_1^1(\eta, \xi, \varepsilon) = \pi\varepsilon_1 + \pi\varepsilon_2 + O_2(\varepsilon), \quad (3-33)$$

$$\Delta_2^1(\eta, \xi, \varepsilon) = -4\eta\varepsilon_1 + 4\xi\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 + O_2(\varepsilon), \quad (3-34)$$

$$\Delta_3^1(\eta, \xi, \varepsilon) = \pi\eta^2\varepsilon_1 + \pi\xi^2\varepsilon_2 + O_2(\varepsilon), \quad (3-35)$$

$$\Delta_4^1(\eta, \xi, \varepsilon) = -\frac{4}{3}\eta^3\varepsilon_1 + \frac{4}{3}\xi^3\varepsilon_2 + O_2(\varepsilon). \quad (3-36)$$

Veja que o posto da matriz Jacobiana dos termos lineares de  $\Delta_i^1$ ,  $i = 1, 2, 3$  com respeito a  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  é 3 e o determinante da matriz é dado por

$$\det \left( \frac{\partial(\Delta_1^1, \Delta_2^1, \Delta_3^1)}{\partial(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)} \right) = 4\pi^2(\eta^2 - \xi^2) \neq 0,$$

quando  $\eta, \xi \neq 0$ . Logo podemos aplicar o teorema da Função Implícita que vai garantir a existência de novas coordenadas locais  $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$  em uma vizinhança da origem no espaço de parâmetros tal que  $\Delta_i(\eta, \xi, \delta) = \delta_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ . Note que:

- (i)  $\Delta$  é uma função analítica;
- (ii) O T.F.I vai garantir a existência de uma nova coordenada local  $\delta$  em uma vizinhança da origem;
- (iii)  $\Delta^1(u, \delta) \neq 0$ .

De fato  $\Delta^1(u, \delta) \neq 0$ . Veja que,

$$\Delta_1^1(\eta, \xi, \varepsilon) = 0 \iff \varepsilon_1 = -\varepsilon_2.$$

Assumindo  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$  temos que

$$\Delta_2^1(\eta, \xi, \varepsilon) = 4\varepsilon_3 + 4\varepsilon_2(\eta + \xi).$$

Uma boa escolha é  $\varepsilon_3 = -\varepsilon_2(\eta + \xi)$ , logo  $\Delta_2^1 = 0$ . Assumindo  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3 = -\varepsilon_2(\eta + \xi)$  temos que,

$$\Delta_3^1(\eta, \xi, \varepsilon) = \pi\varepsilon_2(-\eta^2 + \xi^2) \neq 0.$$

Para  $\eta \neq \pm\xi$  e assumindo as condições  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3 = -\varepsilon_2(\eta + \xi)$  e  $\varepsilon_2 = 0$ , temos um centro já que  $\Delta_1^1 = \Delta_2^1 = \Delta_3^1 = \Delta_4^1 = 0$ , ou seja, voltamos ao caso original que perturbamos assim  $\varepsilon_2 \neq 0$  e portanto  $\Delta^1(u, \delta) \neq 0$ .

De (i), (ii) e (iii) podemos aplicar o Teorema da Preparação de Weierstrass, isto é, existirá uma vizinhança da origem tal que  $\Delta$  é unicamente representável na forma

$$\Delta(u, \delta) = q(u, \delta)\bar{\Delta}(u, \delta), \quad (3-37)$$

onde  $\bar{\Delta}(u, \delta)$  é uma função analítica não nula e  $q(u, \delta)$  é o polinômio de Weierstrass. Podemos escrever o polinômio de Weierstrass da seguinte maneira:

$$q(u, \delta) = \delta_1 u + \delta_2 u^2 + u^3. \quad (3-38)$$

Assim,

$$\Delta(u, \delta) = (\delta_1 u + \delta_2 u^2 + u^3)\bar{\Delta}(u, \delta). \quad (3-39)$$

Logo  $q$  tem 2 zeros positivos e portanto temos 2 ciclos limite de grande amplitude. Observe que assumindo  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$  temos que  $\Delta_4^2 = 0$ , isto é, não podemos obter mais ciclos limite, sendo necessário apenas uma análise de primeira ordem.

Seja agora  $\eta = -\xi$  então o posto da matriz jacobiana  $\Delta_i^1$ ,  $i = 1, 2$  com respeito a  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  é 2 e o determinante da matriz é dado por,

$$\det \left( \frac{\partial(\Delta_1^1, \Delta_2^1)}{\partial(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \right) = 4\pi \neq 0,$$

quando  $\eta, \xi \neq 0$ . Logo podemos aplicar o teorema da Função Implícita que vai garantir a existência de novas coordenadas locais  $\varepsilon_\delta = (\delta_1, \varepsilon_2, \delta_2, \varepsilon_4, \varepsilon_5)$  em uma vizinhança da origem no espaço de parâmetros tal que  $\Delta_i(\eta, \xi, \delta) = \delta_i$ , com  $i = 1, 2$ . Note que,

- (i)  $\Delta$  é uma função analítica;
- (ii) O T.F.I vai garantir a existência de uma nova coordenada local  $\delta$  em uma vizinhança da origem;
- (iii)  $\Delta^1(u, \delta) \neq 0$ .

De fato  $\Delta^1(u, \delta) \neq 0$ . Veja que,

$$\Delta_1^1(\eta, \xi, \varepsilon) = 0 \iff \varepsilon_1 = -\varepsilon_2.$$

Assumindo  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$  temos que

$$\Delta_2^1(\eta, \xi, \varepsilon) = 4\varepsilon_3 \neq 0.$$

Para  $\eta = -\xi$  e assumindo as condições  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3 = 0$ , temos um centro já que  $\Delta_1^1 = \Delta_2^1 = \Delta_3^1 = \Delta_4^1 = 0$ , ou seja, voltamos ao caso original que perturbamos assim  $\varepsilon_3 \neq 0$  e portanto  $\Delta^1(u, \delta) \neq 0$ .

De (i), (ii) e (iii) podemos aplicar o Teorema da Preparação de Weierstrass, isto é, existirá uma vizinhança da origem tal que  $\Delta$  é unicamente representável na forma:

$$\Delta(u, \delta) = q(u, \delta)\bar{\Delta}(u, \delta), \quad (3-40)$$

onde  $\bar{\Delta}(u, \delta)$  é uma função analítica não nula e  $q(u, \delta)$  é o polinômio de Weierstrass. Podemos escrever o polinômio de Weierstrass da seguinte maneira:

$$q(u, \delta) = \delta_1 u + u^2. \quad (3-41)$$

Assim,

$$\Delta(u, \delta) = (\delta_1 u + u^2)\bar{\Delta}(u, \delta). \quad (3-42)$$

Logo  $q$  tem 1 zero positivos e portanto temos 1 ciclo limite de grande amplitude. Observe que assumindo  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  temos que  $\Delta_3^2 = \Delta_4^2 = 0$ , isto é, não podemos obter mais ciclos limite, sendo necessário apenas uma análise de primeira ordem.

Seja agora  $\eta = \xi$  então o posto da matriz jacobiana  $\Delta_i^1$ ,  $i = 1, 2$  com respeito a  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  é 2 e o determinante da matriz é dado por,

$$\det \left( \frac{\partial(\Delta_1^1, \Delta_2^1)}{\partial(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \right) = 4\pi \neq 0,$$

quando  $\eta, \xi \neq 0$ . Logo podemos aplicar o teorema da Função Implícita que vai garantir a existência de novas coordenadas locais  $\varepsilon_\delta = (\delta_1, \delta_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5)$  em uma vizinhança da origem no espaço de parâmetros tal que  $\Delta_i(\eta, \xi, \delta) = \delta_i$ , com  $i = 1, 2$ . Note que,

- (i)  $\Delta$  é uma função analítica;
- (ii) O T.F.I vai garantir a existência de uma nova coordenada local  $\delta$  em uma vizinhança da origem;
- (iii)  $\Delta^1(u, \delta) \neq 0$ .

De fato  $\Delta^1(u, \delta) \neq 0$ . Veja que,

$$\Delta_1^1(\eta, \xi, \varepsilon) = 0 \iff \varepsilon_1 = -\varepsilon_2.$$

Assumindo  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$  temos que

$$\Delta_2^1(\eta, \xi, \varepsilon) = 4(\varepsilon_3 + 2\varepsilon_2\xi),$$

e uma boa escolha é  $\varepsilon_3 = -2\varepsilon_2\xi$ , logo  $\Delta_2^1 = 0$ . Assumindo  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3 = -2\varepsilon_2\xi$  temos que,

$$\begin{aligned}\Delta_3^1(\eta, \xi, \varepsilon) &= 0, \\ \Delta_4^1(\eta, \xi, \varepsilon) &= \frac{4}{3}\varepsilon_2(2 - 15\pi\varepsilon_2)\xi^3 \neq 0.\end{aligned}$$

Para  $\eta = \xi$  e assumindo as condições  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_2 = 0$ , temos um centro já que  $\Delta_1^1 = \Delta_2^1 = \Delta_3^1 = \Delta_4^1 = 0$ , ou seja, voltamos ao caso original que perturbamos assim  $\varepsilon_2 \neq 0$  e portanto  $\Delta^1(u, \delta) \neq 0$ .

De (i), (ii) e (iii) podemos aplicar o Teorema da Preparação de Weierstrass, isto é, existirá uma vizinhança da origem tal que  $\Delta$  é unicamente representável na forma:

$$\Delta(u, \delta) = q(u, \delta)\bar{\Delta}(u, \delta) \quad (3-43)$$

onde  $\bar{\Delta}(u, \delta)$  é uma função analítica não nula e  $q(u, \delta)$  é o polinômio de Weierstrass. Podemos escrever o polinômio de Weierstrass da seguinte maneira

$$q(u, \delta) = \delta_1 u + \delta_2 u^2 + \varepsilon_3 u^3 + u^4. \quad (3-44)$$

Assim,

$$\Delta(u, \delta) = (\delta_1 u + \delta_2 u^2 + \varepsilon_3 u^3 + u^4)\bar{\Delta}(u, \delta). \quad (3-45)$$

Logo  $q$  tem 3 zero positivos e portanto temos 3 ciclos limite de grande amplitude. Observe que assumindo  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  temos que  $\Delta_3^2 = \Delta_4^2 = 0$ , isto é, não podemos obter mais ciclos limite, sendo necessário apenas uma análise de primeira ordem.  $\square$

**Proposição 3.3** *Sejam  $\eta, \xi$  números reais não-nulos, considere o caso em que a órbita periódica no infinito se comporta como um centro, isto é, no caso em que  $\gamma_L = -\gamma_R = -\eta$ ,  $x_L = x_R = 0$  e  $b = 0$ . Então a ciclicidade da órbita periódica no infinito quando perturbado na classe de sistema é no máximo 3.*

*Prova.* Note que sob tais condições dos parâmetros temos que  $\Delta = 0$ , isto é, temos um centro. Inicialmente iremos perturbar o sistema da seguinte maneira,

$$(\gamma_L, \gamma_R, x_L, x_R, b) = (-\eta + \varepsilon_1, \eta, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4).$$

Agora calculamos a série de Taylor de primeira ordem de  $\Delta_i(\eta, \xi, \varepsilon)$  com  $i = 1, 2, 3, 4$  com

relação a  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$  e obtemos,

$$\begin{aligned}\Delta_1^1(\eta, \xi, \varepsilon) &= e^{\pi\eta}\pi\varepsilon_1 + O_2(\varepsilon), \\ \Delta_2^1(\eta, \xi, \varepsilon) &= 2e^{\pi\eta}(e^{\pi\eta} + 1)(\varepsilon_4 + \eta(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)) + O_2(\varepsilon), \\ \Delta_3^1(\eta, \xi, \varepsilon) &= O_2(\varepsilon), \\ \Delta_4^1(\eta, \xi, \varepsilon) &= O_2(\varepsilon).\end{aligned}$$

Veja que o posto da matriz Jacobiana dos termos lineares de  $\Delta_i^1$ ,  $i = 1, 2$  com respeito a  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  é 2 e o determinante da matriz é dado por

$$\det \left( \frac{\partial(\Delta_1^1, \Delta_2^1)}{\partial(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \right) = 2\pi\eta e^{2\pi\eta}(1 + e^{\pi\eta}) \neq 0.$$

Logo podemos aplicar o teorema da Função Implícita que vai garantir a existência de novas coordenadas locais  $\delta = (\delta_1, \delta_2)$  em uma vizinhança da origem no espaço de parâmetros tal que  $\Delta_i(\eta, \xi, \delta) = \delta_i$ , com  $i = 1, 2$ . Note que:

- (i)  $\Delta$  é uma função analítica;
- (ii) O T.F.I vai garantir a existência de uma nova coordenada local  $\delta$  em uma vizinhança da origem;
- (iii)  $\Delta^1(u, \delta) \neq 0$ .

De fato  $\Delta^1(u, \delta) \neq 0$ . Veja que,

$$\Delta_1^1(\eta, \xi, \varepsilon) = 0 \iff \varepsilon_1 = 0.$$

Assumindo  $\varepsilon_1 = 0$  temos que

$$\Delta_2^1(\eta, \xi, \varepsilon) = 0 \iff \varepsilon_4 = -(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\eta.$$

Assumindo  $\varepsilon_1 = 0$  e  $\varepsilon_4 = -(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\eta$  temos que

$$\Delta_3^1(\eta, \xi, \varepsilon) = 4e^{\pi\eta}(1 + e^{\pi\eta})^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\eta^2 \neq 0.$$

Observe que se  $\varepsilon_2 = \pm\varepsilon_3$  e assumindo as condições  $\varepsilon_1 = 0$  e  $\varepsilon_4 = -(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\eta$ , temos um centro já que  $\Delta = 0$ , ou seja, voltamos ao caso original que perturbamos assim  $\varepsilon_2 \neq \pm\varepsilon_3$  e portanto  $\Delta^1(u, \delta) \neq 0$ .

De (i), (ii) e (iii) podemos aplicar o Teorema da Preparação de Weierstrass, isto é, vai existir uma vizinhança da origem tal que  $\Delta$  é unicamente representável na forma:

$$\Delta(u, \delta) = q(u, \delta)\bar{\Delta}(u, \delta), \quad (3-46)$$

onde  $\bar{\Delta}(u, \delta)$  é uma função analítica não nula e  $q(u, \delta)$  é o polinômio de Weierstrass. Podemos escrever o polinômio de Weierstrass da seguinte maneira

$$q(u, \delta) = \delta_1 u + \delta_2 u^2 + u^3. \quad (3-47)$$

Assim,

$$\Delta(u, \delta) = (\delta_1 u + \delta_2 u^2 + u^3) \bar{\Delta}(u, \delta). \quad (3-48)$$

Logo  $q$  tem 2 zeros positivos e portanto temos 2 ciclos limite de grande amplitude. Podendo haver 3 ciclos limite para uma análise mais geral da expansão de Taylor dos coeficientes  $\Delta$ .

□

### 3.7 Exemplo

Nas proposições e teoremas anteriores determinamos o número máximo de ciclos limite para o sistema (2-6) que bifurcam de centros ou foco fracos. Nesta seção apresentamos um exemplo detalhado que exhibe 3 ciclos limite de grande amplitude. Considere o sistema (2-6) ou (2-20) e (2-21), e os seguintes valores dos parâmetros:

$$\gamma_L = -\gamma_R = -\frac{1}{8}, \quad b = -\frac{1}{4}, \quad x_L = x_R = 1.$$

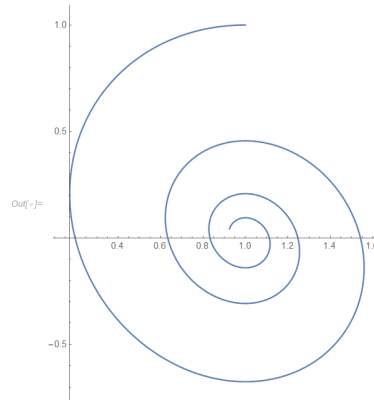
Assim, temos que  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$  e

$$\Delta_4 = \frac{65}{384} e^{\pi/8} (1 + e^{3\pi/8}).$$

Do sistema (2-20), substituindo os respectivos valores dos parâmetros verificamos que,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{2}{8}(x-1) - y, \\ \dot{y} &= \frac{65}{64}(x-1). \end{aligned}$$

com a condição inicial  $x(0) = 1$  e  $y(0) = 1$  obtemos o retrato de fase esboçado na Figura 3.7,

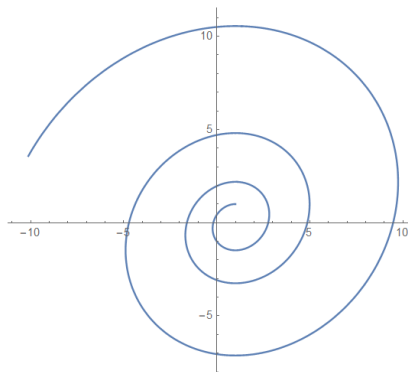


**Figura 3.8:** Retrato de fase do sistema (2-20) com os valores dos parâmetros, tendo uma órbita periódica no infinito que se comporta como um foco fraco de ordem 3.

Para o sistema (2-21), obtemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{2}{8}(x-1) - y \\ \dot{y} &= \frac{65}{64}(x-1)\end{aligned}$$

com a condição inicial  $x(0) = 1$  e  $y(0) = 1$  obtemos o retrato de fase equivalente esboçado na Figura 3.7,



**Figura 3.9:** Retrato de fase do sistema (2-21) com os valores dos parâmetros, tendo uma órbita periódica no infinito que se comporta como um foco fraco de ordem 3.

Podemos notar que ambos os retratos de fase apresentam foco virtual e real localizado no mesmo ponto  $(1,0)$ .

Agora consideremos a seguinte perturbação sobre os parâmetros de (2-20) e (2-

21), com

$$\begin{aligned}\gamma_L &= -\frac{1}{8}, \\ x_L &= 1, \\ \gamma_R &= \frac{1}{8} + \frac{e^{-\pi/8}}{\pi} \varepsilon_1, \\ b &= -\frac{1}{4} + \frac{1024 - 65\pi - (1024 - 195\pi)e^{\pi/4}}{1040\pi(e^{\pi/4} - 1)e^{\pi/8}} \varepsilon_1 + \frac{e^{-\pi/8}}{2(e^{\pi/8} + 1)} \varepsilon_2 - \frac{8e^{-\pi/8}}{65(e^{\pi/4} - 1)} \varepsilon_3, \\ x_R &= 1 + \frac{16 + 65\pi - (16 + 195\pi)e^{\pi/4}}{130\pi(e^{\pi/4} - 1)e^{\pi/2}} \varepsilon_1 + \frac{64e^{-\pi/8}}{65(e^{\pi/4} - 1)} \varepsilon_3.\end{aligned}$$

Calculamos a série de Taylor de primeira ordem de  $\Delta_i$  com  $i = 1, 2, 3, 4$  com relação a  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  e obtemos.

$$\begin{aligned}\Delta_1^1(\varepsilon) &= \varepsilon_1, \\ \Delta_2^1(\varepsilon) &= \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \left( \frac{-1 + 3e^{\pi/4}}{4(-1 + e^{\pi/8})} + \frac{e^{-\pi/8}(1 + 2e^{\pi/8})}{2(1 + e^{\pi/8})} \varepsilon_2 + \frac{8e^{-\pi/8}(16 + 16e^{\pi/8} + \pi + 2e^{\pi/8}\pi)\varepsilon_3}{65(-1 + e^{\pi/8})(1 + e^{\pi/8})\pi} \right), \\ \Delta_3^1(\varepsilon) &= \varepsilon_3 + \frac{16e^{-\pi/8}}{65(-1 + e^{\pi/8})} \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 P(\varepsilon_2, \pi), \\ \Delta_4^1(\varepsilon) &= \frac{65}{384} e^{\pi/8} (1 + e^{\pi/8})(1 - e^{\pi/8} + e^{\pi/4}) + \frac{(1 - e^{\pi/8} + e^{\pi/4})}{4(-1 + e^{\pi/8})} \varepsilon_3 + \varepsilon_2 Q(\varepsilon_3, \pi) + \varepsilon_1 R(\varepsilon_2, \pi),\end{aligned}$$

onde  $P(\varepsilon_2, \pi)$ ,  $Q(\varepsilon_3, \pi)$ ,  $R(\varepsilon_2, \pi)$  são termos de  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ . Portanto temos que,

$$\Delta_i(\gamma_R, b, x_R) = \varepsilon_i + O(\varepsilon^2),$$

para  $i = 1, 2, 3$ , onde  $O(\varepsilon^2)$  representa termos de ordem superior em  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ . Logo em uma vizinhança do ponto crítico  $(\gamma_R, b, x_R) = (1/8, -1/4, 1)$  o sistema apresenta um foco fraco de ordem 3 para a órbita periódica no infinito.

Estudando alguns valores aproximados para as perturbações,

$$\begin{aligned}\gamma_L &= -\frac{1}{8}, \quad x_L = 1, \quad \gamma_R = \frac{1638355}{13106841} \quad b = -\frac{260534}{1045519}, \quad x_R = \frac{552751}{556327}, \\ y_L &= -\frac{3383}{4182076} \approx -0,000808928 \quad y_R = -\frac{6084083513535748}{7623599948859945633} \approx -0,000798059.\end{aligned}$$

Calculamos a série de Taylor de primeira ordem de  $\Delta_i$  com  $i = 1, 2, 3, 4$

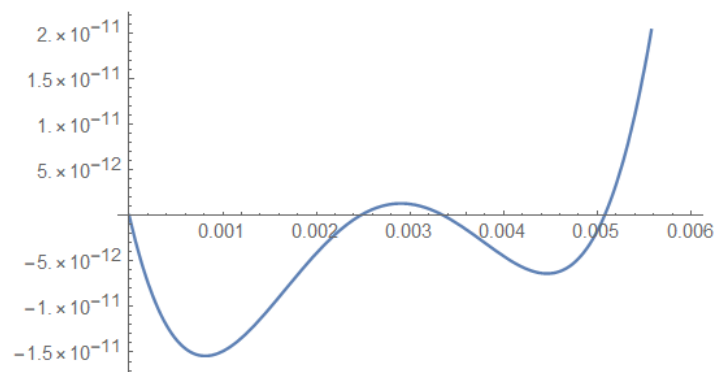
$$\begin{aligned}\Delta_1^1(\varepsilon) &= -4,4372 \times 10^{-8} \\ \Delta_2^1(\varepsilon) &= 0,0000399366 \\ \Delta_3^1(\varepsilon) &= -0,0115001 \\ \Delta_4^1(\varepsilon) &= 1,05487\end{aligned}$$

Logo obtemos a seguinte expansão,

$$\Delta(u_0) = -4,437 \cdot 10^{-8} u_0 + 3,99 \cdot 10^{-5} u_0^2 - 1,150 \cdot 10^{-2} u_0^3 + 1,054 u_0^4.$$

Resolvendo  $\Delta(u_0) = 0$  com respeito a  $u_0$  obtemos três zeros positivos,

$$\{197,00052; 297,764\dots; 405,27\dots\}. \quad (3-49)$$



**Figura 3.10:** *Truncamento de quarto grau da função  $\Delta(u_0)$  para o exemplo numérico após perturbar o foco fraco de ordem 3.*

Portanto, o sistema (2-20) e (2-21) com os valores dos parâmetros aproximados possui três ciclos limite.

### 3.8 Conclusão

Neste trabalho estudamos sobre o estudo de sistemas lineares planares suaves por partes, investigamos sobre o número máximo de ciclos limites que podem bifurcar de um centro ou foco-fraco. Para isto, estudamos uma técnica fornecida por [4] que consiste em trabalhar com a função deslocamento de Poincaré. Como vimos, tratar o infinito como se fosse um ponto de equilíbrio comum tornam os cálculos menos trabalhosos, pois neste caso podemos aproveitar de algumas propriedades das equações diferenciais, assim reduzir o número de manipulações matemáticas a serem feitas.

Apresentamos alguns teoremas e proposições que o fornecem condições para obter 1, 2 ou até 3 ciclos limite de grande amplitude que bifurcam de centros ou foco fraco. Até o momento não foram fornecidos exemplos nos quais um sistema linear planar suave por partes que possui quatro ciclos limite.

## Teoremas e Lemas Fundamentais

---

### A.1 Definições e Teoremas

**Definição A.1 (Polinômio de Weierstrass)** Uma função  $p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  é um polinômio de Weierstrass de grau  $k$  se existem funções holomorfas  $w_0, w_1, \dots, w_{k-1}$  em uma vizinhança de  $(0,0)$  que satisfazem,

- (i)  $w_j(0) = 0, j \in \{0, 1, \dots, k\}$ ,
- (ii)  $p(z, z_2, \dots, z_n) = z^k + \dots + w_1(z_2, \dots, z_n)z + w_0(z_2, \dots, z_n)$ .

**Teorema A.1 (Teorema da Preparação de Weierstrass)** Seja  $F(z, z_2, \dots, z_n)$  uma função analítica em uma vizinhança da origem tal que,

- (i)  $F(0,0) = 0$ ;
- (ii)  $\frac{\partial F(0,0)}{\partial z} = 0, \dots, \frac{\partial^{k-1} F(0,0)}{\partial^{k-1} z} = 0, \frac{\partial^k F(0,0)}{\partial^k z} \neq 0$ .

Então em alguma vizinhança da origem a função  $F$  é unicamente representável da seguinte forma,

$$F(z, z_2, \dots, z_n) = p(z, z_2, \dots, z_n)g(z, z_2, \dots, z_n), \quad (\text{A-1})$$

onde,  $g(z, z_2, \dots, z_n)$  é uma função analítica não nula e  $p(z, z_2, \dots, z_n)$  é o polinômio de Weierstrass [6].

**Definição A.2 (Ideal de Bautin)** Definimos o Ideal de Bautin  $I$  do desdobramento analítico  $X_\gamma$  como o ideal gerado pelos germes  $a_i$  no anel  $O_0(\mathbb{R}^n)$  de germes de funções analíticas em  $0 \in \mathbb{R}^n$ . A expansão do mapa de deslocamento em  $x = 0$  é,

$$\delta(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\lambda)x^i.$$

**Observação A.1** Este ideal é Noetherian, isto é, é gerado por um número finito de germes  $I = O(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_l)$ .

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] ANDRONOV, A. **Les cycles limites de poincaré et la théorie des oscillations autoentretenues.** *World Sci. Publ.*, (189):559–561, 1929.
- [2] BAUTIN, N. N. **On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or center type.** p. 1–19, 1954.
- [3] FILIPPOV, A. F. **Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides,** volume 18. Springer Science, 1988.
- [4] FREIRE, E.; PONCE, E.; TORREGROSA, J.; TORRES, F. **Limit cycles from a monodromic infinity in planar piecewise linear systems.** *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 496(2021):1–22, 2020.
- [5] FREIRE, E.; PONCE, E.; TORRES, F. **Canonical discontinuous planar piecewise linear systems.** p. 181–211, 2012.
- [6] GAIKO, V. A. **Global bifurcations of limit cycles in a holling-type dynamical system.** p. 1–19, 2015.
- [7] GINE, J.; GOUVEIA, L.; TORREGROSA, J. **Lower bounds for the local cyclicity for families of centers.** p. 447–479, 2020.
- [8] GUARDIA, M.; SEARA, T. M.; TEIXEIRA, M. A. **Generic bifurcations of low codimension of planar filippov systems.** *Journal of Differential Equations*, 250(2011):1967–2023, 2010.
- [9] HOFF, A. **Estruturas de bifurcação em sistemas dinâmicos quadridimensionais.** Master's thesis, Universidade do estado de Santa Catarina, Joinville, 2014.
- [10] ILYASHENKO, Y. **Centennial history of hilbert 16th problem.** p. 301–354, 2002.
- [11] KUZNETSOV, Y. A. **Elements of Applied Bifurcation Theory,** volume 112. Springer, 1998.
- [12] LARROSA, J. F. **Sistemas planares de filippov e bifurcações genéricas de baixa codimensão.** Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2012.

- 
- [13] LIMA, E. L. **Análise Real**, volume 2. Coleção Matemática Universitária, 2007.
- [14] PERKO, L. **Differential Equations and Dynamical Systems**, volume 1. Springer, 2002.
- [15] POINCARÉ, H. **Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle**. *Math. Pures Appl.*, (7):375–422, 2014.
- [16] SIBIRSKII, K. **On the number of limit cycles in the neighborhood of a singular point**. p. 53–66, 1965.
- [17] SMALE, S. **Differentiable dynamical systems**. *Amer. Math Soc.*, (73), 1967.
- [18] SOTOMAYOR, J; TEIXEIRA, M. A. **Regularization of discontinuous vector fields**. *World Sci. Publ.*, p. 207–223, 1998.
- [19] YAKOVENKO, S. **On functions and curves defined by ordinary differential equations**. p. 497–525, 1999.
- [20] YANDELL, B. H. **The Honors Class: Hilbert Problems and Their Solvers**, volume 1. A K Peters/CRC Press, 2003.
- [21] ZOLADEK, H. **On certain generalization of the bautin theorem**. p. 233–279, 1994.