



UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANA PAULA DE MELO DA COSTA

**Uma desigualdade de Minkowski e
soluções exatas para o espaço-tempo
estático de Einstein-Maxwell**

Goiânia
2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Ana Paula de Melo da Costa

3. Título do trabalho

Uma desigualdade de Minkowski e soluções exatas para o espaço-tempo estático de Einstein-Maxwell

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Ana Paula De Melo Da Costa, Discente**, em 24/02/2023, às 17:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Benedito Leandro Neto, Professor do Magistério Superior**, em 01/03/2023, às 13:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3549020** e o código CRC **C3DF4861**.

ANA PAULA DE MELO DA COSTA

Uma desigualdade de Minkowski e soluções exatas para o espaço-tempo estático de Einstein-Maxwell

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor(a) em Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Benedito Leandro Neto.

Goiânia
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Costa, Ana Paula de Melo da

Uma desigualdade de Minkowski e soluções exatas para o espaço-tempo estático de Einstein-Maxwell [manuscrito] / Ana Paula de Melo da Costa. - 2023.

CIV, 104 f.

Orientador: Prof. Benedito Leandro Neto.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2023.

Bibliografia.

1. Equações de Einstein-Maxwell. 2. Sistema eletrovácuo. 3. Desigualdade de Minkowski. 4. Fluxo pela curvatura média inversa. 5. Assintoticamente plano. I. Neto, Benedito Leandro, orient. II. Título.

CDU 514.77



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE TESE

Ata nº **03** da sessão de Defesa de Tese de **Ana Paula de Melo da Costa**, que confere o título de Doutora em Matemática, **na área de concentração de Geometria**.

Ao vigésimo quarto dia do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e três, a partir das dez horas, via Web videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Tese intitulada "**Uma desigualdade de Minkowski e soluções exatas para o espaço-tempo estático de Einstein-Maxwell**." Os trabalhos foram instalados pelo Orientador e Presidente da banca, Professor Doutor **Benedito Leandro Neto - IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Levi Rosa Adriano - IME/UFG** - membro titular interno, Professor Doutor **Cícero Tiarlos Nogueira Cruz - DMAT/UFAL** - membro titular externo, Professora Doutora **Maria de Andrade Costa e Silva - DMAT/UFPI** - membro titular externa e o Professor Doutor **Rondinelle Marcolino Batista - DMAT/UFPI**, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Tese, tendo sido a candidata **APROVADA** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Benedito Leandro Neto - IME/UFG**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao vigésimo quarto dia do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e três.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Uma desigualdade de Minkowski e soluções exatas para o espaço-tempo estático de Einstein-Maxwell



Documento assinado eletronicamente por **Cícero Tiarlos Nogueira Cruz, Usuário Externo**, em 03/04/2023, às 17:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Benedito Leandro Neto, Professor do Magistério Superior**, em 03/04/2023, às 18:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Maria de Andrade Costa e Silva, Usuário Externo**, em 03/04/2023, às 19:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rondinelle Marcolino Batista, Usuário Externo**, em 03/04/2023, às 23:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Levi Rosa Adriano, Professor do Magistério Superior**, em 04/04/2023, às 07:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3643088** e o código CRC **E7593B6C**.

Referência: Processo nº 23070.004844/2023-04

SEI nº 3643088

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

Ana Paula de Melo da Costa

Licenciada em Matemática pelo Insituto Federal de Goiás (2013), mestra em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (2019).

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço à Deus, pois até aqui o Senhor me sustentou.

À minha família por todo apoio durante esses anos na vida acadêmica. Em especial aos meus pais, Solange e Deuselino, e à minha irmã, Ana Carolina, que ansiavam esse título comigo e estiveram ao meu lado dando todo apoio. Às minhas Marias que trouxeram a alegria, a leveza e o amor que precisava durante os dias difíceis. Eu amo vocês!!

Ao meu companheiro de vida, Rhyan, por me incentivar e acreditar (por vezes, até mais que eu) que seria possível a conclusão deste trabalho. Obrigada por caminhar ao meu lado! Você foi essencial neste processo.

Ao meu orientador, professor Dr. Benedito Leandro Neto, meus sinceros agradecimentos pela oportunidade de trabalharmos juntos, pelos ensinamentos e pela paciência durante esses anos de parceria.

Aproveito para agradecer aos professores membros da banca, Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz, Dra. Maria de Andrade Costa e Silva, Dr. Rondinelle Marcolino Batista e Dr. Levi Rosa Adriano por terem aceitado o convite e pelas muitas sugestões que fizeram melhorar o trabalho.

Aos meus amigos, matemáticos ou não, que estiveram comigo durante essa caminhada da jornada acadêmica desde a graduação até o doutorado. A cada um que me incentivou, contribuiu no meu crescimento e sonhou esse doutorado comigo, meus sinceros agradecimentos. Em especial às Annas (nosso trio ainda vive!!), Cícero, Danilo, Luana, Nathanni, Rafael, Raquel, Róbson e Thamara.

Obrigada aos professores e funcionários do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás.

Por fim, agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Através dos programas PROPG-CAPES e UNIVERSAL/CNPq - Bolsa 403349/2021-4, este trabalho recebeu apoio parcial financeiro.

What we are doing, of course, it's shaping the future. Maybe it will be used, I don't know, a hundred years from now. But it's still important.

Maryna Viazovska,
segunda mulher a receber o prêmio Medalha Fields 2022.

Resumo

Melo, Ana Paula . **Uma desigualdade de Minkowski e soluções exatas para o espaço-tempo estático de Einstein-Maxwell**. Goiânia, 2023. 104p. Tese de Doutorado . Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Estudamos o espaço-tempo estático de Einstein-Maxwell quando ele é conforme a um espaço pseudo-Euclidiano n -dimensional que é invariante sob a ação de um grupo de translação $(n - 1)$ -dimensional. Também fornecemos uma classificação completa desse espaço. Além disso, provamos uma desigualdade do tipo-Minkowski para um espaço-tempo estático de Einstein-Maxwell (eletrovácuo) assintoticamente plano usando como abordagem o fluxo de curvatura média inversa (IMCF).

Palavras-chave

Equações de Einstein-Maxwell, Sistema eletrovácuo, Métrica conforme, Desigualdade de Minkowski, Fluxo pela curvatura média inversa, Assintoticamente plano.

Abstract

Melo, Ana Paula . **A Minkowski inequality and exact solutions for static Einstein-Maxwell spacetime.** Goiânia, 2023. 104p. PhD. Thesis . Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

We study the static Einstein-Maxwell space when it is conformal to an n -dimensional pseudo-Euclidean space, which is invariant under the action of an $(n - 1)$ -dimensional translation group. We also provide a complete classification of such space. Moreover, we prove a Minkowski-like inequality for an asymptotically flat static Einstein-Maxwell (electrovacuum) space-time using as an approach the inverse mean curvature flow (IMCF).

Keywords

Einstein-Maxwell equations, Electrovacuum system, Conformal metric, Minkowski inequality, The inverse mean curvature flow, Asymptotically flat.

Sumário

1	Preliminares	19
1.1	Variedade pseudo-Riemanniana	19
1.2	Equação de Chini	22
1.3	Alguns resultados de análise geométrica	24
1.3.1	Métrica conforme	24
1.3.2	Teorema de Stokes	27
1.3.3	Fórmula da co-área	28
1.3.4	Lema de Hopf	28
1.4	Sistema eletrovácuo	30
1.4.1	A solução de Reissner-Nordström	33
1.4.2	A solução de Majumdar-Papapetrou	38
1.5	Fluxos geométricos	39
1.5.1	Fluxo de curvatura média inversa	41
1.5.2	Fluxo da exponencial normal	45
2	Espaço-tempo estático de Einstein-Maxwell invariante por translação	47
2.1	Principais resultados	47
2.2	Exemplos	65
3	Desigualdade de Minkowski para o espaço-tempo estático de Einstein-Maxwell	70
3.1	Caso null-homologous	73
3.2	Caso homologous	84
	Referências Bibliográficas	98

Introdução

Em 1905, Albert Einstein define a teoria da Relatividade Restrita ou Especial que propôs uma mudança nos conceitos de tempo e espaço absolutos. Numa sequência de três artigos, Einstein não só se consagrou como um dos principais cientistas do mundo, como deu início a uma das revoluções conceituais mais importantes, que contribuíram para compreensão do tempo e do espaço. Em 1915, numa outra sequência de artigos publicados, Einstein define a teoria da Relatividade Geral como uma teoria geométrica da gravitação, generalizando a Relatividade Restrita e a lei da gravitação de Newton. O desenvolvimento desta teoria é um dos marcos mais importantes para a história da ciência moderna. Seu princípio fundamental é descrever o universo por uma variedade Lorentziana (M^{3+1}, g) , onde M^{3+1} é uma variedade diferenciável de dimensão 4, três destas dimensões associadas ao espaço e a outra associada à dimensão temporal, e g uma métrica de Lorentz definida na variedade. Tais variedades são conhecidas como *espaço-tempo*.

A matematização da nova teoria da gravitação proposta pela Relatividade Geral é dada pelas *equações de campo de Einstein* (ou *equações de Einstein*) definidas por:

$$R_{uv} - \frac{1}{2}Rg_{uv} = 8\pi\frac{G}{c^4}T_{uv}, \quad (0-1)$$

onde R_{uv} , R e g_{uv} denotam, respectivamente, o tensor de Ricci, a curvatura escalar e o tensor métrico da variedade. Mais ainda, G é a constante gravitacional de Newton, c a velocidade da luz e T o tensor energia-momento. É importante observar que estas equações permitem relacionar a curvatura do espaço-tempo, descrito pelo lado esquerdo da igualdade, com a distribuição da massa, energia, momento e pressão distribuídos no universo, descrito do lado direito da igualdade. Embora o cenário da natureza física seja compatível com soluções de sistemas de dimensão igual a 4, exemplos para a equação de Einstein em dimensões superiores chamaram a atenção dos físicos com o desenvolvimento de novas teorias (por exemplo, a teoria das cordas).

A não linearidade das equações de campo de Einstein gera uma dificuldade em determinar soluções exatas. Porém, o físico alemão Schwarzschild, pouco tempo depois da publicação de Einstein sobre Relatividade Geral, propôs a primeira e mais importante solução para as equações de campo [77]. Tal solução levou o seu nome e hoje é conhecida

como *solução de Schwarzschild*. Para essa solução temos o tensor energia-momento nulo. A solução de Schwarzschild descreve um sistema gravitacional isolado que depende somente da massa.

A partir desta solução, duas propriedades matemáticas importantes foram observadas: a existência de singularidade (geometricamente, podemos entender como geometricamente incompleta) e de uma região na qual partículas e nem mesmo a luz podem escapar. Estas regiões são chamadas de *buracos negros*. A massa não é o único parâmetro para descrever os buracos negros, como acontece na solução de Schwarzschild. Existem soluções onde a carga elétrica e o momento angular (rotação) são outros parâmetros utilizados. Podemos citar, por exemplo, as métricas de: *Reissner-Nordström* que será abordada com mais detalhes neste trabalho e descreve um buraco negro esfericamente simétrico, com massa e eletricamente carregado; Kerr, que descreve a região em torno de um buraco negro com momento angular e a de Kerr-Newman que é uma generalização da métrica de Kerr e descreve buracos negros com carga elétrica, momento angular e massa.

Após acreditar que o universo estaria em expansão, Einstein acrescentou a equação (0-1) uma constante Λ que é chamada *constante cosmológica*. Estudos apontam que esta constante é diferente de zero. Porém, isso não influencia para a descrição de buracos negros [18]. Portanto, ao longo do trabalho, vamos considerar $\Lambda = 0$ e $8\pi G/c^4 = 1$, de modo que a equação de Einstein se torne

$$R_{uv} - \frac{1}{2}Rg_{uv} = T_{uv}.$$

Este trabalho ocupa-se em estudar o sistema eletrovácuo que, brevemente, podemos definir como um espaço-tempo estático padrão que satisfaz as equações de Einstein, onde T é o tensor energia-momento eletromagnético (tensor de Faraday). A geometria desse modelo espacial é determinada por uma variedade Riemanniana (M^n, g) e duas funções suaves definidas na variedade que satisfazem as equações de Einstein-Maxwell. Trataremos com mais detalhes do sistema eletrovácuo na Seção 1.4. A variedade de Reissner-Nordström é um exemplo de solução para este sistema. Vale ressaltar que ao considerar uma relação entre massa e carga elétrica, a solução de Reissner-Nordström descreve um sistema gravitacional que não é necessariamente isolado, possibilitando a multiplicidade de buracos negros. Iremos discutir este caso extremo adiante [ver Seção 1.4.1].

Ao explorar o sistema eletrovácuo sob algumas perspectivas geométricas apresentamos aqui os resultados encontrados na estrutura de três capítulos, onde dois deles são adaptados dos trabalhos [46] e [47]. No Capítulo 1, apresentamos as principais definições, notações e resultados básicos utilizados para o desenvolvimento dos capítulos seguintes.

No Capítulo 2, determinamos uma classificação completa para as soluções do sistema eletrovácuo quando o fator espacial M do espaço-tempo é conforme a um

espaço pseudo-Euclidiano e invariante sob ação de um grupo de translação. A ideia para obter esta família de soluções foi de transformar um sistema de equações diferenciais parciais, obtido a partir da definição do sistema eletrovácuo, em um sistema de equações diferenciais ordinárias. Mais precisamente, consideramos (Ω, g) um espaço pseudo-Euclidiano padrão com métrica g e coordenadas cartesianas (x_1, \dots, x_n) em que $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $1 \leq i, j \leq n$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e $\varepsilon_i = \pm 1$. Tomamos $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, um invariante de translação. Deste modo, obtemos condições necessárias e suficientes para funções suaves φ , f e ψ , definidas no aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, serem invariantes pela ação de um grupo de translação $(n-1)$ -dimensional de modo que $(\Omega, \bar{g}, f, \psi)$ seja uma solução para o sistema eletrovácuo com métrica $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$.

Este método foi usado com sucesso antes para fornecer uma classificação completa para sólitons, métricas estáticas e variedades quase-Einstein. Em [3], Barbosa, Pina e Tenenblat apresentaram uma classificação completa para os sólitons de Ricci gradiente. Além disso, eles provaram que existem infinitos sólitons de Ricci gradiente conformes a métrica pseudo-Euclidiana padrão. Para os sólitons de Yamabe gradiente, um resultado semelhante foi provado por Leandro e Tenenblat [58], onde um exemplo geodesicamente completo de sóliton de Yamabe foi fornecido. Leandro e Santos [48] provaram um invariante mais geral que reduz o sistema de equações diferenciais parciais, que descrevem os sólitons de Ricci gradiente conformes a um espaço pseudo-Euclidiano, a um sistema de equações diferenciais ordinárias. Esta mesma ideia de encontrar o invariante mais geral para reduzir os sólitons de Ricci gradiente também foi utilizada em [25], onde os autores conseguiram recuperar a solução tradicional de Tangherlini-Schwarzschild. Ribeiro Jr. e Tenenblat [68] forneceram uma classificação completa para métricas quasi-Einstein conformes a um espaço pseudo-Euclidiano e invariante por translações.

A classificação das soluções eletrostáticas para a equação de Einstein já foi fornecida na literatura considerando algumas condições adequadas de contorno iniciais (ver [13, 17, 41] e suas referências). Chruściel e Tod classificaram os espaços eletrovácuos, sob algumas condições assintóticas, no caso tridimensional [20]. Além disso, podemos seguir os passos da prova dada por [9] para concluir que um espaço-tempo estático de Einstein-Maxwell assintoticamente plano deve ser uma variedade de Reissner-Nordström.

No terceiro capítulo, exploramos o sistema eletrovácuo sob a perspectiva da análise geométrica. Analisamos como a desigualdade de Minkowski provada por [8, 53, 56, 81] pode ser generalizada para o sistema eletrovácuo assintoticamente plano. De maneira sucinta, podemos dizer que um sistema eletrovácuo é assintoticamente plano se, fora de um conjunto compacto, a variedade eletrostática é difeomorfa ao complemento de uma bola unitária fechada e sua métrica tende a métrica Euclidiana plana no infinito.

A desigualdade de Minkowski é uma estimativa por baixo da curvatura média total de uma hipersuperfície em uma variedade Riemanniana. Se considerarmos uma

hipersuperfície Σ convexa em \mathbb{R}^n , então a clássica desigualdade de Minkowski [57] afirma que

$$\int_{\Sigma} H d\mu \geq (n-1) |\Sigma|^{\frac{n-2}{n-1}} |\mathbb{S}^{n-1}|^{\frac{1}{n-1}},$$

onde H e $|\Sigma|$ denotam, respectivamente, a curvatura média e a área da hipersuperfície Σ e $|\mathbb{S}^{n-1}|$ a área da esfera padrão $(n-1)$ -dimensional de raio 1.

Fisicamente, a desigualdade de Minkowski tem aplicações importantes na teoria da Relatividade Geral e está relacionada com a desigualdade de Penrose, proposta por Roger Penrose em 1973. A desigualdade de Penrose no caso Riemanniano tridimensional estima a massa de um buraco negro, denotada por m , em termos de sua área A [37, 38, 63]. Isto é,

$$m \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi}}.$$

Gibbons [30] observou que a desigualdade de Penrose é equivalente à desigualdade de Minkowski.

Com o interesse em generalizar a desigualdade de Minkowski para espaços diferentes do Euclidiano foram obtidas desigualdades desse tipo em diversos espaços. Por exemplo, variedades de Schwarzschild [81], variedades anti-de Sitter-Schwarzschild [8], variedades estáticas assintoticamente planas em geral [56], entre outras. Os fluxos geométricos têm sido boas ferramentas para obter desigualdades desse tipo. Aqui utilizamos dois fluxos geométricos extrínsecos para obtermos uma desigualdade do tipo-Minkowski para o espaço-tempo estático de Einstein-Maxwell assintoticamente plano com curvatura escalar subharmônica. Observamos que a variedade de Reissner-Nordström, importante solução do sistema eletrovácuo, tem a propriedade de curvatura escalar subharmônica [ver Seção 1.4.1].

Para um sistema eletrovácuo (M, g, f, ψ) assintoticamente plano com curvatura escalar subharmônica e um domínio limitado Ω em M^n analisamos duas situações. A primeira quando Ω tem somente uma componente de fronteira, isto é, $\partial\Omega = \Sigma$, neste caso dizemos que Σ é *null-homologous*. E a outra, quando há duas componentes de fronteira, $\partial\Omega = \Sigma \cup \partial M$. Então, dizemos que Σ é *homologous* ao horizonte ∂M . Quando Σ tem curvatura média positiva e é *null-homologous* mostramos que

$$\int_{\Sigma} f H dS - n(n-1) \int_{\Omega} f R dv \geq (n-1) (|\mathbb{S}^{n-1}|)^{\frac{1}{(n-1)}} |\Sigma|^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

Mais ainda, vale

$$\int_{\Sigma} f H dS - n(n-1) \int_{\Omega} f R dv \geq (n-1) |\mathbb{S}^{n-1}|^{\frac{1}{(n-1)}} |\Sigma|^{\frac{n-2}{n-1}} - 2m(n-1) |\mathbb{S}^{n-1}|,$$

quando Σ é *homologous*. Onde H , R e $|\Sigma|$ denotam, respectivamente, a curvatura média,

curvatura escalar e área de Σ . Além disso, $|\mathbb{S}^{n-1}|$ é a área da esfera padrão $(n-1)$ -dimensional de raio 1.

A desigualdade do tipo-Minkowski provada em [80] afirma que para hipersuperfície Σ compacta, *mean convex* e estrelada em uma variedade AdS-Reissner-Nordström, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} f H d\mu - n(n-1)\Lambda^2 \int_{\Omega} f d\text{vol} &\geq (n-1)|\mathbb{S}^{n-1}|^{\frac{1}{n-1}} (|\Sigma|^{\frac{n-2}{n-1}} - |\partial M|^{\frac{n-2}{n-1}}) \\ &+ (n-1)q^2 |\mathbb{S}^{n-1}|^{\frac{2n-3}{n-1}} (|\Sigma|^{-\frac{n-2}{n-1}} - |\partial M|^{-\frac{n-2}{n-1}}), \end{aligned}$$

onde Λ é a constante cosmológica e $|\partial M|$ a área do horizonte ∂M . A igualdade ocorre se, e somente se, Σ é uma esfera coordenada. Para provar essa desigualdade, o autor utiliza um processo semelhante ao que fizemos neste trabalho, porém o decaimento assintótico do modelo adotado é distinto de nossa condição assintótica (Schwarzschild). Com isso, a desigualdade encontrada por Wang em [80] é melhor. Contudo, ressaltamos que não escolhemos um modelo como foi feito por Wang.

Em [56], McCormick prova uma desigualdade de Minkowski para variedades estáticas assintoticamente planas. Mais precisamente, se $\Sigma \subset M^n$ é uma hipersuperfície *outward minimizing* com curvatura média positiva em uma variedade assintoticamente plana (M^n, g) de dimensão $3 \leq n \leq 7$, então vale a seguinte desigualdade do tipo-Minkowski

$$\frac{1}{(n-1)|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\Sigma} f H dS \geq \left(\frac{|\Sigma|}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} - 2m.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e só se, Σ é totalmente umbílica. Essa desigualdade generaliza a clássica desigualdade de Minkowski e a desigualdade para variedades de Schwarzschild. Sua demonstração, como acontece na prova de outras desigualdades de Minkowski, utiliza da monotonicidade de uma quantidade sob fluxo de curvatura média inversa e é baseada no trabalho [81], onde é obtida uma desigualdade de Minkowski para hipersuperfícies *outward minimizing* em uma variedade de Schwarzschild. Observamos que as condições assintóticas que assumimos neste trabalho são semelhantes às consideradas por McCormick, diferindo apenas da condição considerada sobre a curvatura escalar, que não foi essencial para nosso resultado contudo. Com isso, podemos entender nossa desigualdade como uma extensão da desigualdade mostrada em [56].

Preliminares

Nesta seção, trataremos de recordar, brevemente, alguns conceitos e resultados básicos de geometria que usaremos ao longo do trabalho. Além disso, estabeleceremos notações utilizadas nos capítulos posteriores. Assumimos aqui um conhecimento básico sobre teoria das variedades diferenciáveis por parte do leitor.

1.1 Variedade pseudo-Riemanniana

As variedades pseudo-Riemannianas, ou semi-Riemannianas como também são conhecidas, são fundamentais para o estudo da teoria da Relatividade Geral. O motivo é que podemos modelar os espaços-tempo como um caso particular dessas variedades. Nesta seção enunciamos somente os conceitos e resultados importantes sobre essa classe de variedades que foram utilizados no desenvolvimento do trabalho. Para o leitor interessado em mais informações acerca de variedades semi-Riemannianas, recomendamos consultar também [61] onde terá uma ampla abordagem sobre o assunto.

Considere $Q : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear definida em E , onde E é um espaço vetorial real de dimensão finita. Dizemos que Q tem *assinatura* ν se o maior subespaço de E que faz de Q uma forma negativa definida possui dimensão ν . Isto é, Q tem assinatura ν se H é o maior subconjunto de E tal que $Q(v, v) < 0$, para todo $v \in H$ e $\dim(H) = \nu$. Além disso, dizer que a forma bilinear Q é *não degenerada* significa que $Q(v, w) = 0, \forall w \in T_p M$ implica em $v = 0$.

Desta forma, podemos definir uma *variedade pseudo-Riemanniana* (ou *semi-Riemanniana*) como um par (M, g) onde M é uma variedade diferenciável e g é um $(0,2)$ -tensor simétrico, não degenerado cuja assinatura da forma bilinear g_p não dependa do ponto $p \in M$. Os principais exemplos de variedades pseudo-Riemannianas são as *variedades Riemannianas*, cuja assinatura é zero, e as *variedades Lorentzianas* que possui assinatura igual a 1. Dessa última classe, o *espaço de Minkowski* é o exemplo mais conhecido que consiste do espaço \mathbb{R}^4 munido da métrica $g = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$. O espaço de Minkowski é conhecido por ser a configuração matemática da teoria da

Relatividade de Einstein, isto é, a formulação matemática das equações relativísticas são mais adequadas neste espaço.

De agora em diante, a menos de menção contrária, (M, g) denota uma variedade pseudo-Riemanniana de dimensão n . Na métrica pseudo-Riemanniana, apesar de muito similar à métrica Riemanniana, o sinal de menos introduzido pela assinatura permite uma classificação dos campos de vetores de uma variedade munida dessa métrica. Para um vetor $v \in T_p M$, com $p \in M$, podemos classificá-lo de três maneiras:

- v é do *tipo-espaço*, se $g(v, v) > 0$.
- v é do *tipo-luz*, se $g(v, v) = 0$.
- v é do *tipo-tempo*, se $g(v, v) < 0$.

Essa classificação será importante nos resultados do Capítulo 2, onde estudamos o sistema eletrovácuo conforme ao espaço pseudo-Euclidiano e invariante por translação. Veremos que as condições sobre as funções suaves desse sistema dependem do tipo de vetor que escolhemos.

Seja $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ da variedade M . Dado um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, a partir da métrica g introduzimos a noção de como derivar um campo de vetores, para isso consideramos uma aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_Y X. \end{aligned}$$

Neste caso, chamamos ∇ de *conexão de Levi-Civita*. Em um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) em torno de um ponto $p \in M$, considerando um referencial coordenado $\{\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}\}$, como $\nabla_{\partial_{x_j}} \partial_{x_i}$ é um campo de vetores em M podemos escrevê-lo como combinação linear da base, isto é

$$\nabla_{\partial_{x_j}} \partial_{x_i} = \Gamma_{ij}^k \partial_{x_k},$$

onde $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ e Γ_{ij}^k denotam os símbolos de Christoffel que são definidos por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{mi} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \right\} g^{mk},$$

com g^{mk} indicando a inversa da métrica g_{mk} .

Associado a conexão ∇ , definimos *divergente* do campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ como a função $\operatorname{div}(X) : M \rightarrow \mathbb{R}$ dado pelo traço da aplicação linear $Y(p) \rightarrow \nabla_Y X(p)$, onde $p \in M$. Além disso, a conexão de Levi-Civita, permite introduzir a noção de curvatura a essas variedades que serão de extrema importância para o trabalho. Primeiramente,

definimos o *operador curvatura de Riemann* \mathbf{R} como uma aplicação que associa cada par de vetores (X, Y) da seguinte forma

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(X, Y) : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ \mathbf{R}(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z.\end{aligned}$$

Em coordenadas locais, o operador de curvatura é dado por

$$\mathbf{R}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^n \mathbf{R}^l_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

onde \mathbf{R}^l_{ijk} são os componentes do operador curvatura \mathbf{R} que podem ser expressos em termos dos símbolos de Christoffel

$$\mathbf{R}^s_{ijk} = \sum_l \Gamma^l_{ik} \Gamma^s_{jl} - \sum_l \Gamma^l_{jk} \Gamma^s_{il} + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma^s_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma^s_{jk}.$$

Associado ao operador de curvatura, podemos definir o *tensor de Ricci*, a *curvatura escalar* e a *curvatura seccional*. O *tensor de Ricci* é um $(0, 2)$ -tensor definido pelo traço do operador curvatura

$$\begin{aligned}\text{Ric} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty \\ \text{Ric}(X, Y) &= \text{tr}(\mathbf{R}).\end{aligned}$$

Se consideramos um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) , reescrevemos o tensor de Ricci como

$$\text{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = R_{ij} = \sum_k \mathbf{R}^k_{ikj}.$$

Já a *curvatura escalar* R é obtida a partir do traço do tensor de Ricci que, em coordenadas, é dada pela expressão

$$R = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij}.$$

Por fim, mas não menos importante, definimos a *curvatura seccional*.

Definição 1.1 *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p M$, o número real*

$$K(X, Y) = \frac{g(\mathbf{R}(X, Y)X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - (g(X, Y))^2},$$

é chamado curvatura seccional de σ em p , onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ são campos linearmente independentes e $\{X, Y\}$ é uma base qualquer para σ .

Para uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave definida em M , definiremos a seguir os operadores diferenciais gradiente, Hessiano e Laplaciano. Em cada uma das definições será conveniente escrevê-las em um sistema de coordenadas locais, isso nos ajudará nas demonstrações dos resultados obtidos no Capítulo 2. O subíndice nestes operadores indicará a métrica na qual a variedade está munida. Quando não houver ambiguidade quanto à métrica considerada, o subíndice será omitido.

Definição 1.2 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação suave em (M, g) . Então,*

(a) *o gradiente de f com respeito a métrica g é o vetor $\nabla_g f$ que satisfaz a relação*

$$g(\nabla_g f, X) = X(f) = df(X),$$

para $X \in \mathfrak{X}(M)$. Em coordenadas locais,

$$\nabla_g f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

(b) *o tensor Hessiano de f é um $(0,2)$ -tensor simétrico definido por*

$$(\nabla_g^2 f)(X, Y) = g(\nabla_X \nabla_g f, Y),$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Em coordenadas locais, escrevemos

$$\nabla_g^2 f \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

(c) *o Laplaciano de f com respeito a métrica g definimos por*

$$\Delta_g f = \text{tr}_g(\nabla_g^2 f),$$

onde tr_g denota o traço em relação à métrica g . Ou ainda, em coordenadas locais temos

$$\Delta_g f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right).$$

1.2 Equação de Chini

A equação de Chini foi peça fundamental na classificação das soluções do sistema eletrovácuo conforme a um espaço pseudo-Euclidiano e invariante sob ação de translação [ver Capítulo 2]. Essencialmente, ao reduzirmos o sistema de equações

diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias, pela ação de translação, após uma mudança de variáveis, obtemos um exemplo da família de equações de Chini. Aqui descrevemos a estratégia que usamos para resolver equações desse tipo. Vejamos inicialmente como podemos defini-la.

Considere a equação diferencial

$$y' = f(x)y(x)^n - g(x)y(x) + h(x), \quad (1-1)$$

onde $y' = \frac{dy}{dx}$ denota a derivada de y em relação à variável x , $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ são funções reais arbitrárias e n um número inteiro. O método mais geral que conhecemos para resolução desse tipo equação é utilizando um método descrito por E. Kamke em [42] devido aos trabalhos de Chini [15]. Por este motivo, nos referimos as equações descritas por (1-1) como *equações de Chini* ou *equações do tipo Chini*.

Esse tipo de equação diferencial ordinária generaliza algumas famílias de equações bastante conhecidas. Note que se $n = 1$ temos uma equação linear não homogênea. No caso de $n = 2$ recaímos num caso especial da chamada *equação de Riccati* e para $n = 3$ obtemos as *equações de Abel*. Este último tipo aparece na redução de ordem de outras famílias de equações de ordem superiores, portanto, são frequentemente utilizadas na modelagem de problemas reais em diversas áreas. Além disso, vale ressaltar que se tivermos $h \equiv 0$ a EDO (1-1) é, exatamente, a equação diferencial ordinária não linear de primeira ordem conhecida como *equação de Bernoulli*.

Ainda não existe uma solução geral para essa equação diferencial em questão, porém a partir dos métodos obtidos por M. Chini temos estratégias para esta resolução. O método propõe que, caso exista uma constante α tal que

$$z = [h(x)/f(x)]^{\frac{1}{n}}$$

seja solução da equação linear

$$z' - g(x) = \alpha h(x), \quad (1-2)$$

então a mudança de variável $y = z u(x)$ transforma a equação diferencial original (1-1) em uma equação diferencial de variáveis separáveis. Mais ainda, da relação (1-2) podemos escrever α da seguinte forma

$$\alpha = f(x)^{-n-1} h(x)^{-2n+1} [f(x)h'(x) - f'(x)h(x) - g(x)f(x)nh(x)]^n n^{-n}, \quad (1-3)$$

daí se tivermos α independente da variável x , então a substituição

$$y(x) = \left(\frac{h(x)}{f(x)} \right)^{1/n} u(x),$$

nos leva a uma equação de variáveis separáveis, e portanto, é possível resolvermos a equação diferencial inicial. Chamaremos α de *invariante de Chini*.

Na equação encontrada no Teorema 2.6 do Capítulo 2 vimos ser possível aplicar este método. Isto é, o invariante de Chini encontrado possibilitou uma mudança de variáveis separáveis, portanto, foi possível determinar explicitamente todas as soluções da equação diferencial inicial. Com isso, obtemos as soluções invariantes para o sistema eletrovácuo.

1.3 Alguns resultados de análise geométrica

1.3.1 Métrica conforme

O Capítulo 2 se dedica a estudar uma classe especial das variedades pseudo-Riemannianas: os espaços pseudo-Euclidianos com mudança conforme na métrica. Logo, convém exibirmos alguns resultados sobre métricas conformes que foram utilizados. Informações com mais detalhes a respeito desse tópico sugerimos [4].

Definição 1.3 Dadas g e \bar{g} duas métricas definidas em uma variedade semi-Riemanniana M , dizemos que tais métricas são conformes se existe uma função suave que não se anula $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\bar{g}(u, v) = \frac{1}{\varphi^2(p)} g(u, v),$$

para todo $p \in M$ e todo $u, v \in T_p M$.

Sabemos que se (M, g) é uma variedade semi-Riemanniana e $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$ uma métrica conforme, o tensor de Ricci e a curvatura escalar satisfazem as seguintes relações

$$\text{Ric}_{\bar{g}} - \text{Ric}_g = \frac{1}{\varphi^2} \{ (n-2) \varphi \nabla_g^2 \varphi + [\varphi \Delta_g \varphi - (n-1) |\nabla_g \varphi|^2] g \},$$

e

$$\mathbf{R}_{\bar{g}} - \varphi^2 \mathbf{R}_g = (n-1) (2\Delta_g \varphi - \eta |\nabla_g \varphi|^2),$$

onde $\text{Ric}_{\bar{g}}$ e $\mathbf{R}_{\bar{g}}$ denotam, respectivamente, o tensor de Ricci e a curvatura escalar na métrica \bar{g} .

De agora em diante, nos atentemos para o espaço pseudo-Euclidiano conforme. Primeiramente, definimos o *espaço pseudo-Euclidiano* de índice ν como (\mathbb{R}^n, g) onde o

tensor métrico g pode ser escrito da seguinte forma:

$$g = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i dx_i \otimes dx_i,$$

$$\text{com } \varepsilon_i = \begin{cases} -1, & \text{para } 1 \leq i \leq \nu \\ 1, & \text{para } \nu + 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Vale ressaltar que para um sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_n) em um espaço pseudo-Euclidiano (\mathbb{R}^n, g) as definições anteriores do gradiente, da Hessiana e do Laplaciano para f uma função suave são reescritas, respectivamente, como

$$\nabla_g f = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$\nabla_g^2 f \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{,ij},$$

e

$$\Delta_g f = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_{,ii},$$

onde as componentes da métrica $g_{ij} = \delta_{ij} \varepsilon_i$ e δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Considere uma mudança conforme para este espaço, isto é, considere (\mathbb{R}^n, \bar{g}) tal que $\bar{g} = g/\varphi^2$. Note que para este espaço o tensor de Ricci e a curvatura escalar na métrica conforme são dados por

$$\text{Ric}_{\bar{g}} = \frac{1}{\varphi^2} \{ (n-2)\varphi \nabla_g^2 \varphi + [\varphi \Delta_g \varphi - (n-1)|\nabla_g \varphi|^2] g \} \quad (1-4)$$

e

$$R_{\bar{g}} = (n-1) (2\varphi \Delta_g \varphi - n|\nabla_g \varphi|^2), \quad (1-5)$$

uma vez que Ric_g e R_g são nulos na métrica Euclidiana usual.

Agora, por definição, podemos escrever os símbolos de Christoffel na métrica \bar{g} como

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{g}_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{g}_{mi} - \frac{\partial}{\partial x_m} \bar{g}_{ij} \right\} \bar{g}^{mk},$$

onde \bar{g}^{mk} denota a inversa da métrica \bar{g}_{mk} . Observe que

$$\bar{g}_{mk} = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq k, \\ \frac{\varepsilon_k}{\varphi^2}, & \text{se } m = k \end{cases}$$

e

$$\bar{g}^{mk} = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq k, \\ \frac{\varphi^2}{\varepsilon_k}, & \text{se } m = k. \end{cases}$$

Então,

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{g}_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{g}_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{g}_{ij} \right\} \bar{g}^{kk}.$$

Assim, para índices i, j, k distintos temos

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = 0, \quad \bar{\Gamma}_{ij}^i = -\frac{\varphi_{,j}}{\varphi}, \quad \bar{\Gamma}_{ii}^k = \varepsilon_i \varepsilon_k \frac{\varphi_{,k}}{\varphi}, \quad \bar{\Gamma}_{ii}^i = -\frac{\varphi_{,i}}{\varphi}. \quad (1-6)$$

Desta forma, utilizando a definição da hessiana (1.2) e das relações anteriores dos símbolos de Christoffel obtemos

$$(\nabla_{\bar{g}}^2 f)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^n \bar{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} = \begin{cases} f_{,ij} + \frac{\varphi_{,j} f_{,i}}{\varphi} + \frac{\varphi_{,i} f_{,j}}{\varphi}, & \text{se } i \neq j \\ f_{,ii} + \frac{2\varphi_{,i} f_{,i}}{\varphi} - \frac{\varepsilon_i}{\varphi} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \varphi_{,k} f_{,k}, & \text{se } i = j. \end{cases} \quad (1-7)$$

Fazendo o mesmo para o operador Laplaciano, de (1.2) segue

$$\Delta_{\bar{g}} f = \sum_{i,j=1}^n \bar{g}^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^n \bar{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \{ \varphi^2 f_{,ii} - (n-2) \varphi \varphi_{,i} f_{,i} \}. \quad (1-8)$$

Para finalizar esta seção, vamos calcular a curvatura seccional para o espaço pseudo-Euclidiano conforme. Considere uma métrica conforme \bar{g} em uma variedade pseudo-Euclidiana cujas as componentes métricas são $\bar{g}_{ij} = \frac{\delta_{ij} \varepsilon_i}{\varphi^2}$. Nestas condições, em um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) , temos:

$$\frac{\partial \bar{g}_{ik}}{\partial x_j} = \frac{-2\delta_{ik} \varepsilon_i}{\varphi^3} \varphi_{,j}.$$

Na métrica conforme \bar{g} os coeficientes do operador curvatura são dados por

$$\mathbf{R}_{ijij} = \sum_l \mathbf{R}_{ijl}^l \bar{g}_{lj} = \mathbf{R}_{ijj}^j \frac{\varepsilon_j}{\varphi^2} = \frac{\varepsilon_j}{\varphi^2} \left(\sum_l \bar{\Gamma}_{ii}^l \bar{\Gamma}_{jl}^j - \sum_l \bar{\Gamma}_{ji}^l \bar{\Gamma}_{il}^j + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\Gamma}_{ii}^j - \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{\Gamma}_{ji}^j \right).$$

Usando a relação (1-6), podemos calcular as derivadas dos símbolos de Christoffel $\bar{\Gamma}_{ij}^k$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\Gamma}_{ii}^j = \varepsilon_j \varepsilon_j \left(\frac{\varphi_{,jj}}{\varphi} - \frac{\varphi_{,j}^2}{\varphi^2} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{\Gamma}_{jj}^i = \left(\frac{\varphi_{,i}}{\varphi} \right)^2 - \frac{\varphi_{,ii}}{\varphi}.$$

Combinando as identidades acima, reescrevemos os coeficientes da curvatura

$$\varphi^2 \varepsilon_j \mathbf{R}_{ijij} = - \sum_l \varepsilon_i \varepsilon_l \left(\frac{\varphi_{,l}}{\varphi} \right)^2 + \varepsilon_i \varepsilon_j \frac{\varphi_{,jj}}{\varphi} + \frac{\varphi_{,ii}}{\varphi}.$$

Agora, se os quatro índices i, j, k e l são distintos

$$\mathbf{R}_{ijkl} = \sum_s \mathbf{R}_{ijk}^s \bar{g}_{sl} = \mathbf{R}_{ijk}^l \bar{g}_{ll} = 0.$$

Finalmente, considere o caso em que temos três índices distintos:

$$\mathbf{R}_{ijk}^i = -\frac{\varphi_{,kj}}{\varphi}, \quad \mathbf{R}_{ijk}^j = \frac{\varphi_{,ki}}{\varphi} \quad \text{e} \quad \mathbf{R}_{ijk}^k = 0.$$

Portanto, a curvatura seccional do plano gerado por $\partial_{x_i}, \partial_{x_j}$ é

$$\mathbf{K}_{ij} = \varphi^2 \left(- \sum_l \varepsilon_i \varepsilon_l \left(\frac{\varphi_{,l}}{\varphi} \right)^2 + \varepsilon_i \varepsilon_j \frac{\varphi_{,jj}}{\varphi} + \frac{\varphi_{,ii}}{\varphi} \right) \varepsilon_i. \quad (1-9)$$

Com essa expressão obtemos a curvatura seccional para sistemas eletrovácuos conformes e invariantes sob ação de translação [ver Seção 2.2].

1.3.2 Teorema de Stokes

Nesta seção, apresentaremos dois teoremas conhecidos na integração de variedades: o Teorema de Stokes e o Teorema da divergência. O objetivo é apresentá-los, sem entrar em detalhes adicionais, a fim de manter o texto completo para que o leitor consulte-os durante a leitura do texto, caso necessário.

O primeiro deles é o *teorema de Stokes* que pode ser visto como uma generalização do teorema fundamental do cálculo e dos teoremas clássicos de cálculo vetorial. Pode ser enunciado como a seguir:

Teorema 1.4 [Teorema de Stokes, [52]] *Sejam M uma variedade orientada n -dimensional com fronteira e ω uma $(n-1)$ -forma em M com suporte compacto. Então,*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Vale ressaltar que no teorema estamos supondo que ∂M está com a orientação induzida. Se a variedade M tiver fronteira vazia, então o lado direito da igualdade dada pelo teorema é zero. Além disso, apesar de ω ser uma $(n-1)$ -forma em M , quando interpretada do lado direito de 1.4 estamos considerando ω restrita a fronteira ∂M .

Uma consequência imediata do Teorema de Stokes é o Teorema da Divergência.

Teorema 1.5 [Teorema da divergência, [52]] *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta, orientada e com fronteira ∂M . Para qualquer campo de vetor $X \in \mathfrak{X}(M)$ vale*

$$\int_M (\operatorname{div} X) dV_g = \int_{\partial M} \tilde{g}(X, N) dV_{\tilde{g}},$$

onde N é o campo vetorial normal unitário apontando para fora ao longo de ∂M e \tilde{g} a métrica Riemanniana induzida em ∂M .

1.3.3 Fórmula da co-área

Em [26, 27] Federer mostrou uma fórmula que generaliza, sob certas condições, o clássico teorema de Fubini. O autor se refere a essa fórmula integral como um complemento para a clássica fórmula da área. Nestes trabalhos, Federer nomeou essa fórmula como *fórmula da co-área*, nomenclatura que é utilizada desde então. Generalizar as fórmulas da área e da co-área são temas de pesquisa atual dentro da teoria geométrica da medida.

A fórmula da co-área foi uma ferramenta utilizada nos resultados do Capítulo 3, onde mostramos uma desigualdade do tipo-Minkowski. Através da fórmula da co-área, podemos relacionar a integral sobre uma variedade em termos de integrais sobre hipersuperfícies de nível. Enunciamos a fórmula da co-área da seguinte forma

Teorema 1.6 [Fórmula da co-área][73, Página 89] *Sejam M uma variedade Riemanniana compacta com bordo e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave em M . Então, para qualquer função mensurável não negativa u em M ,*

$$\int_M u = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\{f=\sigma\}} \frac{u}{|\nabla f|} \right) d\sigma.$$

1.3.4 Lema de Hopf

O *lema de Hopf* é um resultado fundamental na teoria das equações diferenciais parciais elípticas e na demonstração do princípio do máximo. Seu nome é em homenagem ao matemático e astrônomo alemão Eberhard Hopf. De maneira simples, este resultado afirma que se uma função é contínua em um domínio com bordo suave e atinge um

máximo neste domínio, então a derivada desta função na direção normal apontando para fora é estritamente positiva.

Dado um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que seu bordo $\partial\Omega$ satisfaz a *condição da esfera interior* em x_0 se existe uma bola aberta $B \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial B$. Podemos observar que isso ocorre, por exemplo, quando temos $\partial\Omega$ de classe C^2 . A derivada normal de uma função $u \in C(\overline{\Omega})$ em um ponto $x \in \Omega$ é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) := \nabla u(x) \cdot \eta(x),$$

onde $\eta = \eta(x)$ denota o vetor normal a Ω apontando para fora no ponto $x \in \Omega$. Na teoria de equações diferenciais parciais, já é sabido que para um ponto $x_0 \in \partial\Omega$ de máximo de uma certa função u a derivada normal é não negativa, isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) \geq 0.$$

Portanto, o lema de Hopf vai garantir que, sob certas condições, essa desigualdade é estrita.

Dizemos que um operador diferencial L é elíptico no ponto $x \in \Omega$ se a forma quadrática associada à matriz $A(x)$ é positiva definida, isto é, se escrevermos

$$L = \sum a_{ij} \partial_i \partial_j + \sum b_i \partial_i + c,$$

então a matriz (simétrica)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

é positiva. Ou ainda, quando todos os seus autovalores são positivos. O operador é elíptico em Ω se for elíptico em cada ponto de Ω . Por fim, dizemos que L é uniformemente elíptico em Ω se existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\lambda(x) \geq \epsilon_0, \forall x \in \Omega$, onde $\lambda(x)$ denota o menor autovalor de A .

Enunciamos o lema de Hopf da seguinte maneira:

Lema 1.7 [Lema de Hopf][31, Lema 3.4] *Sejam $B \subset \mathbb{R}^n$ uma bola aberta, L um operador uniformemente elíptico em B , $u \in C^2(B)$ e $Lu \geq 0$. Suponha que exista $x_0 \in \partial B$ tal que u é contínua em x_0 e $u(x) < u(x_0)$ para todo $x \in B$. Então,*

(i) *se $c \equiv 0$ em B e existe a derivada normal $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0)$, então*

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0.$$

(ii) se $c \leq 0$ em Ω e $u(x_0) \geq 0$ então vale o mesmo resultado do item anterior.

O Lema de Hopf foi utilizado nas limitações apresentadas nos resultados do Capítulo 3, onde o operador diferencial é o Laplaciano e a curvatura escalar como a função contínua na variedade.

1.4 Sistema eletrovácuo

A teoria geométrica por trás da Relatividade Geral descreve seus objetos através das variedades lorentzianas suaves (M^{n+1}, g) de dimensão $n + 1$, onde M uma variedade diferenciável conexa. Essas são conhecidas como *espaços-tempo*. O principal objetivo da teoria da Relatividade Geral é relacionar como a matéria e a energia de um espaço-tempo podem deformar a geometria do ambiente. Einstein propôs essa relação através das conhecidas *equações de campo* ou *equações de Einstein*, que conveniente neste trabalho, descrevemos como

$$\text{Ric} - \frac{1}{2} R g = T,$$

onde Ric e R são, respectivamente, o tensor de Ricci e a curvatura escalar do espaço-tempo (M^{n+1}, g) e T o tensor energia-momento. A princípio não temos informações sobre como deve ser o tensor T energia-momento, na verdade, este pode variar conforme o modelo estudado. O caso mais simples a ser considerado é quando tomamos o tensor nulo.

Do ponto de vista físico, as soluções mais interessantes e conhecidas para as equações de Einstein que representam um modelo físico para um buraco negro são: espaço-tempo de Schwarzschild, Reissner-Nordström e Kerr-Newman. O primeiro foi também a primeira solução exata não trivial para a equação de Einstein e modela um buraco negro com massa que não gira e não tem carga elétrica. A solução Kerr-Newman é um modelo para um buraco negro com massa, carga elétrica e momento angular. Como é esperado que um buraco negro gire, dada a natureza e o estado final de uma estrela em colapso, essa é uma solução mais natural a ser considerada, dadas as suas propriedades. No entanto, a solução de Reissner-Nordström representa uma classe de buracos negros que carregam massa e carga elétrica, portanto, pode ser muito útil na compreensão da teoria da Relatividade Geral. Essa é uma solução para o *sistema eletrovácuo*.

Para definirmos o sistema eletrovácuo, cujo modelo Reissner-Nordström é uma solução particular, primeiro considere (\mathcal{M}^{n+1}, g) um espaço-tempo estático padrão. Este tipo de espaço-tempo permite, em um sistema de coordenadas apropriados, uma decomposição da métrica na qual a parte espacial não evolui com o tempo. Isto é, para (M^n, g) uma variedade Riemanniana e f uma função suave positiva definida em M^n , podemos

escrever o espaço-tempo tal que

$$\mathfrak{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times M^n \quad \text{e} \quad \mathfrak{g} = -f^2 dt^2 + g.$$

Para este espaço-tempo estático padrão, considere F uma 2-forma em \mathfrak{M}^{n+1} que satisfaz as Equações de Maxwell

$$dF = 0, \quad \text{e} \quad \text{div}_{\mathfrak{g}} F = 0.$$

Associado a essa 2-forma F , definimos o tensor energia-momento eletromagnético ou tensor de Faraday descrito por

$$T = F \circ F - \frac{1}{4} |\nabla f|^2 g,$$

onde $(F \circ F)_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu}$ e $|F|^2 = g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu}$ é a norma Hilbert-Schmidt. Aqui as letras gregas denotam as coordenadas da variedade \mathfrak{M}^{n+1} . Portanto, se o espaço-tempo satisfaz a Equação de Einstein e o tensor de Faraday T satisfaz as Equações de Maxwell, dizemos que essa solução é uma solução *eletrovácuo* das equações acopladas de Einstein-Maxwell.

O tensor eletromagnético F admite uma única decomposição $F = E \wedge dt + B$, em termos do campo elétrico E e do campo magnético B . Vamos supor que o campo elétrico é tal que existe uma função potencial ψ suave em M^n de modo que $E = \nabla_g \psi / f$. E que o campo magnético B é nulo. Desta forma, podemos definir o sistema eletrovácuo como *slices* desse espaço-tempo estático padrão como construído anteriormente. Portanto, a geometria do espaço-tempo é determinada por (M^n, g, f, ψ) . Dedução com mais detalhes do sistema eletrovácuo, como solução das equações de Einstein-Maxwell, pode ser encontrado em [19, Apêndice], por exemplo.

Definimos o sistema eletrovácuo da seguinte maneira:

Definição 1.8 ([13, 41]) *Considere (M^n, g) , $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana. Sejam $f, \psi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções suaves tais que*

$$f \text{Ric}_g = \nabla_g^2 f - 2 \frac{\nabla_g \psi \otimes \nabla_g \psi}{f} + \frac{2}{(n-1)f} |\nabla_g \psi|^2 g, \quad (1-10)$$

$$\Delta_g f = \frac{2(n-2)}{(n-1)} \frac{|\nabla_g \psi|^2}{f}, \quad (1-11)$$

$$0 = \text{div} \left(\frac{\nabla_g \psi}{f} \right), \quad (1-12)$$

onde Ric_g e div denotam o tensor de Ricci e o divergente em relação à métrica g . Além disso, $f > 0$ em M^n e $\{f = 0\}$ fronteira de M^n . Então, (M^n, g, f, ψ) é chamado um sistema eletrovácuo.

As equações (1-10), (1-11) e (1-12) são também conhecidas como *equações estáticas de Einstein-Maxwell*. As funções suaves f , ψ e a variedade Riemanniana M^n são chamadas *função lapso*, *potencial elétrico* e *fator espacial* para o espaço-tempo Einstein-Maxwell, respectivamente. Ao longo do texto, podemos nos referir a M^n , como dada na definição anterior, como uma *variedade estática de Einstein-Maxwell*.

Observe que se tomarmos a função potencial elétrico constante em M^n , então $\nabla\psi = 0$ e as equações estáticas de Einstein-Maxwell se reduzem para as *equações estáticas de Einstein no vácuo*, isto é,

$$f \operatorname{Ric}_g = \nabla_g^2 f \quad \text{e} \quad \Delta_g f = 0.$$

Desta forma, observamos que o sistema eletrovácuo generaliza as equações estáticas do vácuo. O espaço-tempo estático de Einstein-Maxwell permite a existência de dois ou mais buracos negros distintos em equilíbrio, devido à carga elétrica. Essa é uma distinção importante.

Outra propriedade importante do sistema eletrovácuo é que podemos calcular sua curvatura escalar em termos das funções lapso e potencial elétrico. Esta relação segue imediatamente da Definição 1.8, isto é,

$$f^2 R_g = 2|\nabla_g \psi|^2, \quad (1-13)$$

onde R denota a curvatura escalar de (M^n, g) . De fato, contraindo a equação (1-10) temos:

$$f R_g = \Delta_g f - \frac{2}{f} |\nabla_g \psi|^2 + \frac{2n}{(n-1)f} |\nabla_g \psi|^2.$$

Combinando-a com (1-11) obtemos

$$f R_g = \frac{2(n-2)}{(n-1)} \frac{|\nabla_g \psi|^2}{f} - \frac{2}{f} |\nabla_g \psi|^2 + \frac{2n}{(n-1)f} |\nabla_g \psi|^2,$$

o que implica em

$$f^2 R_g = 2|\nabla_g \psi|^2.$$

Mais ainda, por esta relação, conclui-se que a curvatura escalar R_g das variedades estáticas de Einstein-Maxwell é não-negativa.

Como dito anteriormente, existem soluções para o sistema eletrovácuo que caracterizam o espaço-tempo estático de Einstein-Maxwell como um modelo para buracos negros. Classificar essas soluções é uma questão clássica na teoria da Relatividade Geral, levantada pela primeira vez e parcialmente respondida por Israel [40] em 1967. Além

da solução de Schwarzschild, que descreve um buraco negro estático com massa e sem carga elétrica, outra classe importante destas soluções é a solução de Reissner-Nordström. O espaço-tempo de Reissner-Nordström modela um buraco negro estático eletricamente carregado e com massa. O sistema gravitacional descrito por essa solução não é necessariamente isolado. Isto é, neste tipo de espaço-tempo é possível ter multiplicidade de buracos negros, o que ocorre devido à relação de equilíbrio entre força gravitacional (massa) e força eletromagnética (carga elétrica).

A seguir, veremos com mais detalhes as soluções de Reissner-Nordström e Majumdar-Papapetrou.

1.4.1 A solução de Reissner-Nordström

Reissner [67] e Nordström [59], em 1916 e 1918, respectivamente, obtiveram de modo independente uma solução exata para as equações de campo de Einstein. Essa solução é conhecida como *solução de Reissner-Nordström* ou *espaço-tempo de Reissner-Nordström*. Geometricamente, descrevemos o espaço-tempo de Reissner-Nordström de dimensão $(n+1)$ como a variedade $(\mathfrak{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathfrak{g})$ com

$$\mathfrak{g} = - \left(1 - \frac{2m}{r^{n-2}} + \frac{q^2}{r^{2(n-2)}} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r^{n-2}} + \frac{q^2}{r^{2(n-2)}} \right)^{-1} dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

onde $g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ denota a métrica padrão da esfera unitária $(n-1)$ -dimensional \mathbb{S}^{n-1} . Aqui, m e q são parâmetros reais que se relacionam com a massa (ADM) e a carga elétrica, respectivamente. Conforme a maneira que as grandezas m e q se relacionam é possível classificar essa solução para a equação de Einstein em: *subextremo* se $m^2 > q^2$, *extremo* se $m^2 = q^2$ e *superextremo* se $m^2 < q^2$.

A solução de Reissner-Nordström (RN) descreve o espaço-tempo em torno de um corpo esfericamente simétrico com massa, com carga elétrica e sem rotação e é mais geral que a solução de Schwarzschild, isto é, se tomarmos a carga $q = 0$ a solução RN se reduz a família Schwarzschild. Por outro lado, a solução RN pode ser generalizada para a métrica de Kerr-Newman que descreve um corpo massivo, eletricamente carregado com simetria axial e rotacionando.

O fator espacial $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, g)$ do espaço-tempo de Reissner-Nordström é uma solução para o sistema eletrovácuo com função lapso f e potencial elétrico ψ iguais a

$$f(r) = \left(1 - \frac{2m}{r^{n-2}} + \frac{q^2}{r^{2(n-2)}} \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \psi(r) = \frac{q}{\sqrt{\frac{2(n-2)}{n-1} r^{n-2}}},$$

onde $g = f^{-2} dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ e r a coordenada radial. Através de uma mudança de coorde-

nadas s que se relaciona com coordenada radial r pela identidade

$$r = s \left(1 + \frac{m+q}{2s^{n-2}} \right)^{\frac{1}{n-2}} \left(1 + \frac{m-q}{2s^{n-2}} \right)^{\frac{1}{n-2}}$$

é possível mostrar que

$$g = \varphi(s)^{\frac{2}{n-2}} \delta,$$

onde δ é a métrica Euclidiana e

$$\varphi(s) = \left(1 + \frac{m+q}{2s^{n-2}} \right) \left(1 + \frac{m-q}{2s^{n-2}} \right),$$

veja [41]. Neste caso, dizemos que a coordenada s introduz uma mudança de coordenadas isotrópicas na variedade. Além disso, podemos reescrever f e ψ como funções de s da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{\left(1 - \frac{m^2 - q^2}{4s^{2(n-2)}} \right)}{\left(1 + \frac{m+q}{2s^{n-2}} \right) \left(1 + \frac{m-q}{2s^{n-2}} \right)}; \\ \psi(s) &= \frac{q}{\sqrt{\frac{2(n-2)}{n-1}} s^{n-2} \left(1 + \frac{m+q}{2s^{n-2}} \right) \left(1 + \frac{m-q}{2s^{n-2}} \right)}. \end{aligned} \quad (1-14)$$

Usaremos essa mudança de coordenadas para demonstrar que o espaço-tempo de Reissner-Nordström tem curvatura escalar subharmônica dependendo das escolhas dos parâmetros envolvidos (i.é. $\Delta_g R_g \geq 0$) cuja curvatura escalar R_g é dada por

$$R_g = \frac{(n-1)(n-2)q^2}{r^{2(n-1)}},$$

onde q carga elétrica e r é a coordenada radial.

Vejamos primeiro como obter a curvatura escalar. Seja $M = (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, g)$ a variedade de Reissner-Nordström $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, g)$ com métrica $g = \varphi(s)^{\frac{2}{n-2}} \delta$ e curvatura escalar R . Como M é solução para o sistema eletrovácuo, uma consequência imediata da definição é

$$f^2 R_g = 2|\nabla_g \psi|^2.$$

Como g é uma mudança conforme (isotrópica), utilizamos (1.2) para calcular $|\nabla_g \psi|^2$. Assim, obtemos

$$|\nabla_g \psi|^2 = \varphi(s)^{\frac{-2}{n-2}} |\nabla_\delta \psi|^2,$$

onde $|\nabla_\delta \psi|^2$ denota a norma ao quadrado do gradiente de ψ na métrica Euclidiana δ .

Utilizando da expressão (1-14) temos que

$$\varphi(\mathbf{s})^{\frac{-2}{n-2}} = \frac{2^{\frac{4}{n-2}} \mathbf{s}^4}{(2\mathbf{s}^{n-2} + m + q)^{\frac{2}{n-2}} (2\mathbf{s}^{n-2} + m - q)^{\frac{2}{n-2}}}$$

e

$$|\nabla_{\delta}\psi|^2 = \frac{2^3(n-1)(n-2)q^2\mathbf{s}^{2(n-3)}}{(2\mathbf{s}^{n-2} + m + q)^4(2\mathbf{s}^{n-2} + m - q)^4} \left[(2\mathbf{s}^{n-2} + m + q)(2\mathbf{s}^{n-2} + m - q) - 4\mathbf{s}^{n-2}(2\mathbf{s}^{n-2} + m) \right]^2.$$

Assim,

$$|\nabla_g\psi|^2 = \frac{2^{\frac{3n-2}{n-2}}(n-1)(n-2)q^2\mathbf{s}^{2n-2}}{(2\mathbf{s}^{n-2} + m + q)^{\frac{2(2n-3)}{n-2}}(2\mathbf{s}^{n-2} + m - q)^{\frac{2(2n-3)}{n-2}}} \times \left[(2\mathbf{s}^{n-2} + m + q)(2\mathbf{s}^{n-2} + m - q) - 4\mathbf{s}^{n-2}(2\mathbf{s}^{n-2} + m) \right]^2.$$

Portanto,

$$\mathbf{R}_g = \frac{2^{\frac{4(n-1)}{n-2}}(n-1)(n-2)q^2\mathbf{s}^{2(n-1)}}{(2\mathbf{s}^{n-2} + m + q)^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(2\mathbf{s}^{n-2} + m - q)^{\frac{2(n-1)}{n-2}}}.$$

O que implica, utilizando a mudança $r = \mathbf{s} \left(1 + \frac{m+q}{2\mathbf{s}^{n-2}}\right)^{\frac{1}{n-2}} \left(1 + \frac{m-q}{2\mathbf{s}^{n-2}}\right)^{\frac{1}{n-2}}$, em

$$\mathbf{R}_g = \frac{(n-1)(n-2)q^2}{r^{2(n-1)}}.$$

O lema abaixo nos mostra que a curvatura escalar para o espaço de Reissner-Nordström extremo é subharmônica. Este lema será fundamental para o Capítulo 3, onde uma desigualdade de Minkowski será demonstrada para o sistema eletrovácuo.

Lema 1.9 *A variedade de Reissner-Nordström extremo $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, g)$ tem curvatura escalar subharmônica se, e somente se, $\mathbf{s} \geq \left(\frac{(n-2)m}{n}\right)^{\frac{1}{n-2}}$. Isto é,*

$$\Delta_g \mathbf{R}_g = \frac{2(n-1)^2(n-2)m^2\mathbf{s}^{2(n-2)}}{(\mathbf{s}^{n-2} + m)^{\frac{4(n-1)}{n-2}}} \left[n - \frac{(n-2)m}{\mathbf{s}^{n-2}} \right] \geq 0$$

se, e só se, $\mathbf{s} \geq \left(\frac{(n-2)m}{n}\right)^{\frac{1}{n-2}}$.

Prova. Primeiramente, lembramos que para uma variedade Riemanniana (M, \bar{g}) , onde

$\bar{g} = \varphi^{-2}g$, o laplaciano de uma função $h \in C^\infty(M)$, usando (1-8), é dado por

$$\Delta_{\bar{g}}h = \varphi^2\Delta_g h - (n-2)\varphi g(\nabla_g \varphi, \nabla_g h).$$

Considere a mudança de coordenadas isotrópicas $g = \varphi(s)^{\frac{2}{n-2}}\delta$ para o caso extremo, onde as coordenadas radiais se relacionam por $r = s\left(1 + \frac{m}{s^{n-2}}\right)^{\frac{1}{n-2}}$ e $s = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Então, o laplaciano da curvatura escalar R_g na métrica $g = \varphi^{\frac{2}{n-2}}\delta$ é dado por:

$$\begin{aligned} \Delta_g R_g &= \varphi^{\frac{-2}{n-2}}\Delta_\delta R - (n-2)\varphi^{\frac{-1}{n-2}}\delta(\nabla_\delta \varphi^{\frac{-1}{n-2}}, \nabla_\delta R) \\ &= \varphi^{\frac{-2}{n-2}}\Delta_\delta R + \varphi^{\frac{-n}{n-2}}\delta(\nabla_\delta \varphi, \nabla_\delta R) \\ &= \varphi^{\frac{-n}{n-2}}(\varphi\Delta_\delta R + \delta(\nabla_\delta \varphi, \nabla_\delta R)). \end{aligned} \quad (1-15)$$

Como vimos anteriormente, para essa mudança de coordenadas, o fator conforme φ e R_g são escritos como

$$\varphi(s) = \left(1 + \frac{m}{s^{n-2}}\right)$$

e

$$R_g = (n-1)(n-2)m^2 (s^{n-2} + m)^{\frac{-2(n-1)}{n-2}}.$$

A partir dessas relações, calcularemos cada um dos termos necessários para obter o laplaciano de R de acordo com (1-15). Note que,

$$\varphi(s)^{\frac{-n}{n-2}} = \frac{s^n}{(s^{n-2} + m)^{\frac{n}{n-2}}}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= -m \frac{\partial}{\partial x_i} s^{n-2} = \frac{-m(n-2)s^{n-3}}{s^{2(n-2)}} \frac{\partial s}{\partial x_i} \\ &= \frac{-m(n-2)s^n x_i}{s^{n-1}} \frac{1}{s} = \frac{-m(n-2)x_i}{s^n}. \end{aligned}$$

Onde usamos que $s = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ e $\frac{\partial s}{\partial x_i} = \frac{x_i}{s}$. Logo,

$$\nabla_\delta \varphi = \frac{-m(n-2)}{s^n}(x_1, \dots, x_n).$$

Para determinar $\nabla_\delta R$ e $\Delta_\delta R$ primeiro observe que

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial x_i} &= (n-1)(n-2)m^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left((s^{n-2} + m)^{\frac{-2(n-1)}{n-2}} \right) \\ &= -2(n-1)^2(n-2)m^2 s^{n-3} (s^{n-2} + m)^{\frac{-3n+4}{n-2}} \frac{\partial s}{\partial x_i} \\ &= -2(n-1)^2(n-2)m^2 s^{n-4} x_i (s^{n-2} + m)^{\frac{-3n+4}{n-2}}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 R}{\partial x_i^2} &= -2(n-1)^2(n-2)m^2 \left\{ \left(s^{n-4} + x_i \frac{\partial s^{n-4}}{\partial x_i} \right) (s^{n-2} + m)^{\frac{-3n+4}{n-2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(3n-4)}{n-2} (x_i s^{n-4}) (s^{n-2} + m)^{\frac{-4n+6}{n-2}} \frac{\partial s^{n-2}}{\partial x_i} \right\} \\ &= -2(n-1)^2(n-2)m^2 \left\{ \left(s^{n-4} + (n-4)x_i s^{n-5} \frac{x_i}{s} \right) (s^{n-2} + m)^{\frac{-3n+4}{n-2}} \right. \\ &\quad \left. - (3n-4)(n-2)x_i s^{2n-7} (s^{n-2} + m)^{\frac{-4n+6}{n-2}} \frac{x_i}{s} \right\} \\ &= -2(n-1)^2(n-2)m^2 \left\{ \left(s^{n-4} + (n-4)x_i^2 s^{n-5} \right) (s^{n-2} + m)^{\frac{-3n+4}{n-2}} \right. \\ &\quad \left. - (3n-4)(n-2)x_i^2 s^{2n-8} (s^{n-2} + m)^{\frac{-4n+6}{n-2}} \right\} \\ &= -2(n-1)^2(n-2)m^2 s^{n-4} (s^{n-2} + m)^{\frac{-3n+4}{n-2}} \left\{ 1 + (n-4)x_i^2 s^{-2} \right. \\ &\quad \left. - (3n-4)x_i^2 s^{n-4} (s^{n-2} + m)^{-1} \right\} \\ &= -2(n-1)^2(n-2)m^2 s^{n-4} (s^{n-2} + m)^{\frac{-3n+4}{n-2}} \\ &\quad - 2(n-1)^2(n-2)m^2 s^{n-4} (s^{n-2} + m)^{\frac{-3n+4}{n-2}} \left[\frac{n-4}{s^2} - \frac{(3n-4)s^{n-4}}{(s^{n-2} + m)} \right] x_i^2 \\ &= -2(n-1)^2(n-2)m^2 s^{n-4} (s^{n-2} + m)^{\frac{-3n+4}{n-2}} \\ &\quad + 2(n-1)^2(n-2)m^2 s^{n-6} (s^{n-2} + m)^{\frac{-3n+4}{n-2}} \left[\frac{(3n-4)s^{n-2}}{(s^{n-2} + m)} - (n-4) \right] x_i^2 \\ &= \frac{-2(n-1)^2(n-2)m^2 s^{n-4}}{(s^{n-2} + m)^{\frac{3n-4}{n-2}}} + \frac{2(n-1)^2(n-2)m^2 s^{n-6}}{(s^{n-2} + m)^{\frac{4n-6}{n-2}}} [2ns^{n-2} - (n-4)m] x_i^2.\end{aligned}$$

Portanto, das expressões anteriores obtemos

$$\nabla_\delta R = \frac{-2(n-1)^2(n-2)m^2 s^{n-4}}{(s^{n-2} + m)^{\frac{3n-4}{n-2}}} (x_1, \dots, x_n)$$

e, somando em i ,

$$\begin{aligned}\Delta_\delta R &= \frac{-2n(n-1)^2(n-2)m^2s^{n-4}}{(s^{n-2}+m)^{\frac{3n-4}{n-2}}} + \frac{2(n-1)^2(n-2)m^2s^{n-6}}{(s^{n-2}+m)^{\frac{4n-6}{n-2}}} [2ns^{n-2} - (n-4)m] \\ &= \frac{2(n-1)^2(n-2)m^2s^{n-4}}{(s^{n-2}+m)^{\frac{3n-4}{n-2}}} \left[-n + \frac{2ns^{n-2} - (n-4)m}{s^{n-2}+m} \right] \\ &= \frac{2(n-1)^2(n-2)m^2s^{n-4}}{(s^{n-2}+m)^{\frac{3n-4}{n-2}}} [ns^{n-2} - 2(n-2)m].\end{aligned}$$

Deste modo, por (1-15), segue que

$$\Delta_g R_g = \frac{s^n}{(s^{n-2}+m)^{\frac{n}{n-2}}} \left\{ \left(\frac{s^{n-2}+m}{s^{n-2}} \right) \frac{2(n-1)^2(n-2)m^2s^{n-4}}{(s^{n-2}+m)^{\frac{4n-6}{n-2}}} [ns^{n-2} - 2(n-2)m] + \frac{2(n-1)^2(n-2)^2m^3}{s^2(s^{n-2}+m)^{\frac{3n-4}{n-2}}} \right\}.$$

O que implica em

$$\Delta_g R_g = \frac{2(n-1)^2(n-2)m^2s^{n-4}}{(s^{n-2}+m)^{\frac{4(n-1)}{n-2}}} [ns^{n-2} - (n-2)m].$$

Finalmente, $\Delta_g R_g \geq 0$ se, e somente se, $s^{n-2} - (n-2)m \geq 0$. Ou ainda, se e só se,

$$s \geq \left(\frac{(n-2)m}{n} \right)^{\frac{1}{n-2}}.$$

□

1.4.2 A solução de Majumdar-Papapetrou

Em 1947, de modo independente, Majumdar [55] e Papapetrou [62] descobriram uma classe de soluções estáticas para as equações de Einstein-Maxwell. Em [33], os autores mostraram que essas soluções estáticas podem ser estendidas analiticamente e corresponde a um sistema de múltiplos buracos negros carregados em equilíbrio. O equilíbrio é devido à atração gravitacional exatamente equilibrada pela repulsão eletromagnética.

O espaço-tempo de Majumdar-Papapetrou [33, 45] é descrito pela variedade $\mathfrak{M}^{n+1} = (\mathbb{R}^n \setminus \{a_i\}_{i=1}^l) \times \mathbb{R}$ para um conjunto de pontos finitos $a_i \in \mathbb{R}^n$, onde

$$\frac{1}{f(x)} = 1 + \sum_{i=1}^l \frac{m_i}{r_i^{n-2}},$$

$r_i = |x - a_i|$ é a distância Euclidiana e o tensor métrico, em um sistema de coordenadas cartesianas $x = (x_1, \dots, x_n)$, é dado por

$$g = -f^2 dt^2 + f^{-2/(n-2)}(dx_1^2 + \dots + dx_n^2),$$

com constantes $m_i > 0$. Além disso, a função potencial elétrico satisfaz [45, Lema 1]

$$\pm \sqrt{\frac{2(n-2)}{(n-1)}} \psi = 1 - f.$$

Em [45] os autores, Kunduri e Lucietti, mostraram que qualquer solução estática assintoticamente plana para as equações de Einstein-Maxwell que seja extrema do sentido da seção anterior, ou seja, $m^2 = q^2$, deve ser uma solução Majumdar-Papapetrou. Assim, podemos entender que buraco negro Majumdar-Papapetrou padrão é um caso particular (extremo) de um buraco negro de Reissner-Nordström.

Este exemplo é relevante em si, mas também representa um modelo no qual temos a curvatura escalar subharmônica como mencionado na seção anterior. Isto será um exemplo importante para o Capítulo 3.

1.5 Fluxos geométricos

Os fluxos geométricos, também conhecidos como equações de evolução geométrica, é um campo de pesquisa dentro da análise geométrica que descreve a evolução de quantidades geométricas em termos de equações diferenciais parabólicas não lineares. A motivação para estudar fluxos geométricos surge de várias áreas como, por exemplo, topologia, física e processamento de imagens [11]. Do ponto de vista da Geometria Diferencial, podemos classificar os fluxos como extrínsecos ou intrínsecos, conforme a quantidade geométrica relacionada. Os fluxos geométricos intrínsecos são aqueles definidos por uma equação diferencial parcial que altera uma quantidade geométrica intrínseca. O exemplo mais conhecido desse tipo é o *fluxo de Ricci* introduzido por Hamilton em 1982. Este fluxo é dado por uma equação de evolução que faz a métrica evoluir na direção do tensor de Ricci. Mais precisamente, considerando (M, g) uma variedade Riemanniana, o fluxo de Ricci com a condição inicial g é dado pela equação de evolução

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = -2\text{Ric}_t,$$

onde $\{g_t\}$ é uma família de métricas Riemannianas definidas em M e Ric_t o tensor de Ricci na métrica g_t . O fluxo de Ricci ganhou maior interesse dos pesquisadores após ter

sido usado para provar a famosa Conjectura de Poincaré, em 2003, pelo matemático russo Perelman.

Já os fluxos extrínsecos são definidos usando quantidades geométricas extrínsecas, como a curvatura média. Aqui, daremos destaque para os fluxos extrínsecos de deformação normal em ambientes Riemannianos e codimensão 1. Seja $F : M^n \rightarrow N^{n+1}$ uma imersão suave de uma hipersuperfície em uma variedade Riemanniana. Consideramos a evolução de F segundo a equação

$$\frac{\partial F}{\partial t} = f(x, t)\nu, \quad (1-16)$$

onde f é uma função dependendo de quantidades extrínsecas [5]. A equação (1-16) nos diz que cada ponto da variedade M^n se move na direção da sua normal unitária ν com velocidade f . Assumimos que M^n é orientável de modo que exista um vetor normal unitário globalmente definido e variando de modo suave. Temos exemplos clássicos desse fluxo quando tomamos f uma função da curvatura média H de M^n em N^{n+1} . Quando $f = H$, temos o *fluxo de curvatura média* e se $f = -1/H$, com $H > 0$, definimos o *fluxo de curvatura média inversa* (IMCF). Este último será abordado com mais detalhes posteriormente.

Ao lidar com equações de evolução geométrica, um primeiro questionamento que devemos nos preocupar é quanto à existência de suas soluções. Huisken e Polden [5] asseguram essa existência, em um curto intervalo de tempo, para uma grande classe de equações de evolução geométrica. Quando consideramos f em (1-16) uma função homogênea e suave das curvaturas principais de M^n , o seguinte teorema afirma que temos solução para o fluxo em um intervalo pequeno.

Teorema 1.10 [5, Teorema 3.1] *Se $F_0 : M^n \rightarrow N^{n+1}$ é uma hipersuperfície suave e fechada tal que*

$$-\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} > 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1-17)$$

vale em $F_0(M^n)$, então (1-16) tem uma solução suave pelo menos em algum intervalo de tempo curto $[0, T)$ com $T > 0$.

Observe que para o fluxo de curvatura média inversa temos $-\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} = H^{-2}$, ou seja, satisfaz (1-17). Assim, para dados iniciais suaves com $H > 0$ existe uma solução pelo menos por um curto período.

Importantes propriedades decorrem da equação de evolução (1-16). São equações de evolução para quantidades geométricas que serão de grande valia na demonstração de resultados do Capítulo 3. São resultados conhecidos e por isso não apresentaremos demonstração. Porém, o leitor pode consultar [5, Seção 7] e [37] para maiores detalhes.

Lema 1.11 Para soluções $M_t = F(\cdot, t)(M^n)$ de (1-16), vale as seguintes relações:

(i) a métrica induzida em M^n evolui de acordo com

$$\frac{\partial}{\partial t} g = 2fh,$$

onde h denota a segunda forma fundamental de M_t .

(ii) o elemento de área evolui por

$$\frac{\partial}{\partial t} d\mu = fH d\mu,$$

onde H é a curvatura média da hipersuperfície M_t com relação a escolha da normal unitária.

(iii) a curvatura média H de uma solução M_t evolui

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\Delta f - f(|h|^2 + \text{Ric}(\nu, \nu)),$$

onde h é a segunda forma fundamental de M_t e Δ é o operador Laplace-Beltrami em relação à métrica induzida na hipersuperfície M_t .

O leitor pode consultar também, por exemplo, [16, 51, 61] para maiores detalhes sobre fluxos geométricos. Falaremos um pouco mais, a partir de agora, sobre dois fluxos extrínsecos usados na demonstração da desigualdade do tipo Minkowski, obtida no Capítulo 3. Daremos destaque nas próximas seções para dois exemplos de fluxos extrínsecos: o *fluxo de curvatura média inversa* e o *fluxo da exponencial normal*.

1.5.1 Fluxo de curvatura média inversa

Uma das principais motivações para o estudo do fluxo de curvatura média inversa (IMCF) surgiu da Relatividade Geral e de suas aplicações para resolução de problemas envolvendo desigualdades geométricas. Este fluxo foi uma importante ferramenta na demonstração da desigualdade Riemanniana de Penrose para variedades Riemannianas tridimensionais assintoticamente planas com curvatura escalar não negativa, provada por Huisken e Ilmanen em [38].

Para (M^n, g) uma variedade Riemanniana suave, definimos uma solução clássica do fluxo de curvatura média inversa como uma família suave $\mathbf{X} : \Sigma \times [0, T) \rightarrow M$ de hipersuperfícies $\Sigma_t = \mathbf{X}(\Sigma, \{t\})$ satisfazendo

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \frac{1}{H} \nu, \tag{1-18}$$

onde $H(x, t)$ (assumido aqui como positivo) é a curvatura média de Σ_t e ν a unidade normal unitária apontando para fora de Σ_t , veja [5, 38]. Denotamos $\Sigma_0 = \mathbf{X}(\Sigma, 0) := \Sigma$ como a condição inicial desse fluxo. Em outras palavras, uma família de hipersuperfícies Σ_t evolui pelo fluxo de curvatura média inversa se a velocidade de deformação na direção normal for igual ao inverso da curvatura média em cada ponto ao longo de cada hipersuperfície.

Huisken [35] mostrou que temos suavidade no IMCF desde que H permaneça estritamente positivo. Além disso, o Teorema 1.10 garante a existência do fluxo, pelo menos, em um intervalo de tempo pequeno. Para soluções Σ_t suaves do IMCF a evolução da área aumenta exponencialmente. Justificamos isto por um simples cálculo. Pela primeira fórmula de variação para Σ_t , ao longo do fluxo de curvatura média inversa, podemos escrever

$$\frac{d}{dt}|\Sigma_t| = \int_{\Sigma_t} \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}, \mathbf{H}\nu \right\rangle d\mu_t = \int_{\Sigma_t} d\mu_t = |\Sigma_t|,$$

onde $|\Sigma_t|$ denota a área de Σ_t . Integrando a relação anterior de 0 a t , obtemos

$$|\Sigma_t| = e^t |\Sigma_0|, \quad (1-19)$$

para $t \in [0, T)$. Com isso, vemos que a área de qualquer hipersuperfície Σ_t , ao longo do IMCF clássico, fica inteiramente determinada por sua área inicial e cresce exponencialmente.

Ao longo do IMCF clássico temos, pelo Lema 1.11, que o elemento de volume evolui na direção normal por

$$\frac{\partial}{\partial t} d\mu_t = d\mu_t$$

e a evolução da curvatura média de Σ_t é dada por

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\Delta^{\Sigma_t} H^{-1} - H^{-1}(|h|^2 + \text{Ric}(\nu, \nu)),$$

onde h é a segunda forma fundamental de Σ_t e Δ^{Σ_t} é o operador Laplaciano com respeito a métrica induzida na hipersuperfície Σ_t .

É possível observar que a não linearidade das equações dos fluxos geométricos permite que certas quantidades geométricas associadas à variedade em evolução cresce ou decresce de modo suficientemente grande em um tempo t , ocasionando uma singularidade no fluxo em algum instante. Em geral, sem boas condições iniciais, a suavidade do IMCF não pode ser preservada para todo instante t , podendo ter a curvatura média tendendo a zero em alguns pontos, gerando singularidades. Há pelo menos um exemplo de uma solução para este fluxo, observado primeiramente por Huisken e Ilmanen [38, Página

364], conhecida por desenvolver uma singularidade.

Para contornar o problema da suavidade do fluxo, consideramos o que chamamos de *solução fraca* [36, 37, 38]. Podemos dizer, brevemente, que essas são soluções que conseguem fluir além dessas singularidades. Ou ainda, que essa formulação fraca do IMCF "salta" corretamente os instantes onde o fluxo não é suave. Motivados pela dificuldade de tratar e compreender o IMCF em variedades assintoticamente planas, Huisken e Ilmanen desenvolveram, em [38], essa noção de solução fraca para o IMCF baseado nos conjuntos de nível. Neste caso, consideramos Σ_t como um conjunto de nível de uma função suave $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ que descreve o tempo em que o fluxo atinge um ponto x em M . Então, podemos escrever o fluxo de curvatura média inversa de Σ_t em termos da função u . Mais precisamente, considere $\nu = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ vetor normal apontando para fora de um conjunto de nível Σ_t . Se H é a curvatura média do conjunto de nível, sabemos que

$$H = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right).$$

Por outro lado, se consideramos o fluxo do conjunto de nível se movendo com velocidade f qualquer, isto é, $u(\mathbf{X}(x, t)) = t$ é tal que

$$\frac{\partial \mathbf{X}(x, t)}{\partial t} = f \nu.$$

Obtemos

$$1 = \frac{\partial}{\partial t} t = \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}(x, t)}{\partial t}, \nabla u \right\rangle = \left\langle f \nu(x, t), \nabla u \right\rangle = \left\langle f \frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \nabla u \right\rangle.$$

Assim,

$$f = |\nabla u|^{-1}.$$

Portanto, se $f = 1/H$, como no fluxo de curvatura média inversa, segue que

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = |\nabla u|. \quad (1-20)$$

Uma formulação fraca para este problema é generalizar a relação (1-20) de modo que possamos considerar menos suavidade para a função u . Este é o ponto de partida para o conceito de solução fraca. Huisken e Ilmanen, a partir desses conjuntos, observaram que a equação (1-20) pode ser vista como uma equação de Euler-Lagrange para um funcional, definido a partir da função u [38, Página 365]. Assim, o conceito fraco de solução para IMCF é baseado na minimização desse funcional, possibilitando traçar o fluxo além das singularidades, o que não ocorre na solução clássica. É possível mostrar que uma função u suave qualquer com gradiente não nulo é solução de (1-20) se, e somente se, u é

solução fraca do IMCF [50, Lema 4.30]. Neste trabalho não adentraremos a fundo sobre a regularidade ou não do fluxo IMCF. E assim, evitaremos condições gerais como a citada acima.

Para Σ_t soluções fracas do IMCF temos o crescimento exponencial da área, como dado em (1-19), desde que a hipersuperfície inicial seja *outward minimizing* [38, Lemma 1.6], veja também [81, Teorema 2.1]. Lembramos que um conjunto F é *outward minimizing* se ∂F tem área menor ou igual a todas as superfícies que o envolvem a partir de F , isto é, para todo E contendo F temos $|\partial F| \leq |\partial E|$. Em [38], os autores provaram diversas propriedades para existência, unicidade e regularidade da solução fraca que se aplicam para o espaço-tempo de Einstein-Maxwell.

Os detalhes técnicos do IMCF fraco não foram exigidos neste trabalho. Assumimos, a partir de agora, que o fluxo funcionará de acordo para evitar os detalhes técnicos que aparecem como em [53, 56, 81]. Portanto, aceitaremos que a hipersuperfície inicial é *outward minimizing* e estrelada com curvatura média positiva, assim obteremos $H(x, t) > 0$ para todo instante t . Vale ressaltar que se Σ é *outward minimizing* em uma variedade de dimensão $n < 8$, então, por Huisken-Ilmanen [38], o IMCF iniciando em Σ vai para o infinito graças ao "saltos" da formulação fraca. Para essa restrição na dimensão garantimos a existência e regularidade de soluções fracas [38, Teoremas 1.3 e 3.1] (ver também [81, Teorema 2.1]).

A proposição a seguir é válida para soluções fracas do IMCF e segue como consequência da fórmula da co-área [72, Proposição 9.1].

Proposição 1.12 *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e $\Sigma_t \subset M$ uma família de hipersuperfícies evoluindo pelo fluxo de curvatura média inversa fraco. Então, para qualquer função suave $\mathfrak{F} \in C^\infty(M)$ vale*

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \mathfrak{F} d\Omega_t \right) = \int_{\Sigma_t} \frac{\mathfrak{F}}{H} d\mu_t,$$

onde Ω_t é um domínio limitado em M e H a curvatura média de Σ_t .

Prova. Seja $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ a função suave definida pelo IMCF via conjuntos de nível $\Sigma_t = \{u(x) = t\}$ tal que gradiente de u é não nulo e $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = |\nabla u|$. Por outro lado, da teoria de geometria Riemanniana, sabemos que para uma variedade que é, pelo menos, localmente conjunto de nível, vale $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = H$, onde H a curvatura média de Σ_t . Logo, pela fórmula da co-área segue

$$\int_{\{u \leq t\}} \mathfrak{F} d\Omega_t = \int_0^t \left(\int_{\{u=t\}} \frac{\mathfrak{F}}{H} d\mu_t \right) dt.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \mathfrak{F} d\Omega_t \right) = \int_{\Sigma_t} \frac{\mathfrak{F}}{H} d\mu_t,$$

onde $\Omega_t = \{u \leq t\}$. □

1.5.2 Fluxo da exponencial normal

Nesta seção, trataremos de alguns fatos preliminares sobre o fluxo gerado pela exponencial normal, a partir de uma métrica conforme. Estes fatos foram utilizados por Brendle em [7], onde o autor utilizou desse fluxo para mostrar uma generalização do teorema clássico de Alexandrov no espaço Euclidiano. Galloway e Miao [28] utiliza esse argumento variacional para mostrar que, sob certas condições, o complemento de um corpo estático que envolve buracos negros não pode conter superfícies de área mínima. Além disso, os autores em [21, Seção 4] usam um fluxo semelhante para mostrar propriedades topológicas do sistema eletrovácuo. Neste trabalho, utilizaremos este fluxo para hipersuperfícies em variedades estáticas de Einstein-Maxwell.

Considere $\Sigma \subset M^n = N \times [0, r)$ uma hipersuperfície em uma variedade Riemanniana M^n , onde N é uma variedade compacta de dimensão $n - 1$. Considere, também, que Σ é conexa, então o complemento $M \setminus \Sigma$ tem exatamente duas componentes conexas. Portanto, existe uma única componente conexa Ω de $M \setminus \Sigma$ tal que $\Omega \subset N \times (0, r - \delta)$ para alguma constante positiva δ . Assim, ou temos $\partial\Omega = \Sigma$ ou $\partial\Omega = \Sigma \cup (N \times \{0\})$. Agora, tome $\bar{g} = g/f^2$ uma mudança conforme da métrica g , onde f é a função lapso definida da variedade eletrovácuo M . A variedade (M, \bar{g}) tem uma extremidade assintoticamente hiperbólica, que corresponde ao limite $N \times \{0\}$.

Seja $\Phi : \Sigma \times [0, \infty) \rightarrow \Phi(\Sigma_t) \subset \bar{\Omega}$ a aplicação exponencial normal com respeito a métrica \bar{g} , onde $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Assim, para cada ponto $x \in \Sigma$, temos $\gamma_x(t) = \Phi(x, t)$ é uma geodésica com respeito a \bar{g} tal que

$$\Phi(x, 0) = x \quad \text{e} \quad \Phi(x, t) = \exp_x(-tf(\gamma(t))\nu).$$

Portanto,

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, t) \right|_{t=0} = -f(x)\nu(x). \tag{1-21}$$

Aqui, $\nu(x)$ denota o vetor normal unitário a Σ apontando para fora.

Note que a geodésica γ tem velocidade unitária em relação à métrica \bar{g} . Uma vez

que ν é um vetor unitário, segue imediatamente da expressão anterior (1-21) que

$$\bar{g}(\gamma', \gamma') = \bar{g}(-f\nu, -f\nu) = \frac{1}{f^2} g(f\nu, f\nu) = g(\nu, \nu) = 1.$$

Para cada ponto $p \in \bar{\Omega}$, denotamos por $u(p) = \text{dist}_{\bar{g}}(p, \Sigma)$ a função distância de p a Σ com respeito a métrica \bar{g} . Deste modo, definimos os seguintes conjuntos:

$$A = \{(x, t) \in \Sigma \times [0, \infty) : u(\Phi(x, t)) = t\}$$

e

$$A_* = \{(x, t) \in \Sigma \times [0, \infty) : (x, t + \delta) \in A\}.$$

Em [7], baseado na discussão de [65, Páginas 139-141], o autor observou que a definição do conjunto A é análogo à definição de domínio do segmento em uma variedade Riemanniana e mostrou que os conjuntos A e A_* satisfazem as propriedades dadas na proposição a seguir.

Proposição 1.13 [7, Proposição 3.1] *Os conjuntos A e A_* satisfazem as seguintes propriedades*

- (i) *Se $(x, t_0) \in A$, então $(x, t) \in A$ para todo $t \in [0, t_0]$.*
- (ii) *O conjunto A é fechado e $\Phi(A) = \bar{\Omega}$.*
- (iii) *O conjunto A_* é um subconjunto aberto de $\Sigma \times [0, \infty)$ e a restrição de Φ ao conjunto A_* é um difeomorfismo.*

Para $t \in [0, \infty)$, definimos

$$\Sigma_t^* = \Phi(A_* \cap (\Sigma \times \{t\})). \quad (1-22)$$

Brendle, ainda em [7], observou que Σ_t^* é uma hipersuperfície suave contida no conjunto de níveis $\{u = t\}$. Assim, (1-21) define um fluxo suave de Σ por hipersuperfícies como em (1-22). Chamamos (1-21) de *fluxo da exponencial normal*. Neste trabalho não nos preocupamos com as questões técnicas desse fluxo, deste modo iremos usá-lo sem nos preocupar com tais formalismos e admitindo que é suave.

No Capítulo 3, utilizamos desse fluxo para garantir que se Σ é uma hipersuperfície em uma variedade estática de Einstein-Maxwell com curvatura média positiva, como considerada nesta seção, então Σ_t^* também tem curvatura média positiva para cada t (ver Lemas 3.2 e 3.9).

Espaço-tempo estático de Einstein-Maxwell invariante por translação

Este capítulo é baseado no artigo [47]. O objetivo é fornecer uma classificação completa para as soluções das equações estáticas de Einstein-Maxwell, Definição 1.8, quando a variedade M^n é conforme a um espaço pseudo-Euclidiano e invariante sob ação de um grupo de translação $(n-1)$ -dimensional. Para obter essa classificação, a técnica utilizada já é conhecida na literatura, sido usada com sucesso para fornecer uma classificação completa para sólitons [3, 48, 58], métricas estáticas [66] e variedades quasi-Einstein [68].

Ao longo do capítulo, considere (\mathbb{R}^n, g) um espaço pseudo-Euclidiano com componentes métricas $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $1 \leq i, j \leq n$, onde $\varepsilon_i = \pm 1$ e δ_{ij} é o delta de Kronecker. Para uma função suave qualquer $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ denotamos por

$$u_{,i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad u_{,ij} = \frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j}$$

as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de u , respectivamente, em um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) .

Na próxima seção estão enunciados e demonstrados os principais resultados desse capítulo.

2.1 Principais resultados

O primeiro teorema determina condições necessárias e suficientes que devem ser satisfeitas pelas funções φ , f e ψ para existir uma métrica conforme $\bar{g} = g/\varphi^2$, definida em um aberto Ω de \mathbb{R}^n , de modo que $(\Omega, \bar{g}, f, \psi)$ seja uma solução para o sistema eletrovácuo. Essas condições são determinadas por um sistema de equações diferenciais parciais.

Teorema 2.1 *Seja (\mathbb{R}^n, g) , $n \geq 3$, um espaço pseudo-Euclidiano com coordenadas cartesianas $x = (x_1, \dots, x_n)$ e componentes métricas $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $1 \leq i, j \leq n$, onde δ_{ij} é o delta de*

Kronecker e $\varepsilon_i = \pm 1$. Então, existe uma métrica $\bar{g} = g/\varphi^2$ tal que $(\Omega, \bar{g}, f, \psi)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, é solução do sistema eletrovácuo se, e somente se, as funções suaves φ , ψ e f satisfazem

$$(n-2)f\varphi_{,ij} - \varphi f_{,ij} - \varphi_{,i}f_{,j} - \varphi_{,j}f_{,i} + \frac{2\varphi}{f}\psi_{,i}\psi_{,j} = 0, \quad \text{para } i \neq j; \quad (2-1)$$

e para cada i

$$\begin{aligned} & \varphi \left[(n-2)f\varphi_{,ii} - \varphi f_{,ii} - 2\varphi_{,i}f_{,i} + 2\frac{\varphi}{f}(\psi_{,i})^2 \right] \\ & + \varepsilon_i \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \left[f\varphi\varphi_{,kk} + \varphi\varphi_{,k}f_{,k} - (n-1)f(\varphi_{,k})^2 - \frac{2\varphi^2}{(n-1)f}(\psi_{,k})^2 \right] = 0; \end{aligned} \quad (2-2)$$

$$\begin{aligned} & \varphi \left[(n-2)f\varphi_{,ii} - \varphi f_{,ii} - 2\varphi_{,i}f_{,i} + 2\frac{\varphi}{f}(\psi_{,i})^2 \right] \\ & + \varepsilon_i \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \left[f\varphi\varphi_{,kk} + \varphi\varphi_{,k}f_{,k} - (n-1)f(\varphi_{,k})^2 - \frac{2\varphi^2}{(n-1)f}(\psi_{,k})^2 \right] = 0; \end{aligned} \quad (2-3)$$

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \{ f\varphi\psi_{,kk} - (n-2)f\varphi_{,k}\psi_{,k} - \varphi\psi_{,k}f_{,k} \} = 0; \quad (2-4)$$

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \{ \varphi f f_{,kk} - (n-2)f\varphi_{,k}f_{,k} - \frac{2(n-2)}{(n-1)}\varphi(\psi_{,k})^2 \} = 0. \quad (2-5)$$

Prova. Suponha que exista a métrica conforme $\bar{g} = g/\varphi^2$. Então, pela definição do sistema eletrovácuo, equação (1-11), temos que

$$f \text{Ric}_{\bar{g}} = \nabla_{\bar{g}}^2 f - 2 \frac{\nabla_{\bar{g}}\psi \otimes \nabla_{\bar{g}}\psi}{f} + \frac{2}{(n-1)f} |\nabla_{\bar{g}}\psi|^2 \bar{g}.$$

Combinando a expressão do tensor de Ricci (1-4) na métrica conforme \bar{g} com a identidade anterior, obtemos

$$\begin{aligned} & f \left\{ \frac{1}{\varphi^2} \left[(n-2)\varphi \nabla_{\bar{g}}^2 \varphi + (\varphi \Delta_g \varphi - (n-1)|\nabla_g \varphi|^2) g \right] \right\} \\ & = \nabla_{\bar{g}}^2 f - \frac{2}{f} \nabla_{\bar{g}}\psi \otimes \nabla_{\bar{g}}\psi + \frac{2}{(n-1)f} |\nabla_{\bar{g}}\psi|^2 \bar{g} \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} & (n-2)f\varphi(\nabla_{\bar{g}}^2 \varphi)_{ij} + f \left[\varphi \Delta_g \varphi - (n-1)|\nabla_g \varphi|^2 \right] \delta_{ij} \varepsilon_i \\ & = \varphi^2 (\nabla_{\bar{g}}^2 f)_{ij} - \frac{2\varphi^2}{f} (\nabla_{\bar{g}}\psi \otimes \nabla_{\bar{g}}\psi)_{ij} + \frac{2}{(n-1)f} |\nabla_{\bar{g}}\psi|^2 \varepsilon_i \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (2-6)$$

Analisaremos dois casos para a expressão anterior: $i \neq j$ e $i = j$. Pelas relações de métricas

conforme e pseudo-Riemanniana, as funções φ e ψ satisfazem

$$|\nabla_g \varphi|^2 = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k (\varphi_{,k})^2, \quad \Delta_g \varphi = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \varphi_{,kk}, \quad (\nabla_g^2 \varphi)_{ij} = \varphi_{,ij}. \quad (2-7)$$

E

$$|\nabla_{\bar{g}} \psi|^2 = \varphi^2 \sum_{k=1}^n \varepsilon_k (\psi_{,k})^2, \quad (\nabla_{\bar{g}} \psi \otimes \nabla_{\bar{g}} \psi)_{ij} = \psi_{,i} \psi_{,j}. \quad (2-8)$$

Deste modo, se $i \neq j$ em (2-6), como $\delta_{ij} = 0$, obtemos

$$(n-2)f(\nabla_g^2 \varphi)_{ij} - \varphi(\nabla_{\bar{g}}^2 f)_{ij} + \frac{2\varphi}{f}(\nabla_{\bar{g}} \psi \otimes \nabla_{\bar{g}} \psi)_{ij} = 0. \quad (2-9)$$

Substituindo as expressões (2-7), (2-8) e (1-7) em (2-9), segue que

$$(n-2)f\varphi_{,ij} - \varphi f_{,ij} - \varphi_{,j} f_{,i} - \varphi_{,i} f_{,j} + \frac{2\varphi}{f} \psi_{,i} \psi_{,j} = 0.$$

Se $i = j$ reescrevemos (2-6) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} & (n-2)f\varphi(\nabla_g^2 \varphi)_{,ii} + f[\varphi\Delta_g \varphi - (n-1)|\nabla_g \varphi|^2] \varepsilon_i \\ &= \varphi^2(\nabla_{\bar{g}}^2 f)_{ii} - \frac{2\varphi^2}{f}(\nabla_{\bar{g}} \psi \otimes \nabla_{\bar{g}} \psi)_{ii} + \frac{2\varphi^2 \varepsilon_i}{(n-1)f} |\nabla_{\bar{g}} \psi|^2 \varepsilon_i \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Analogamente ao que fizemos no caso anterior, combinando (2-7), (2-8) e (1-7) com a expressão acima obtemos

$$\begin{aligned} & (n-2)f\varphi\varphi_{,ii} + f \left[\varphi \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \varphi_{,kk} - (n-1) \sum_{k=1}^n \varepsilon_k (\varphi_{,k})^2 \right] \varepsilon_i \\ &= \varphi^2 \left(f_{,ii} + 2 \frac{\varphi_{,i} f_{,i}}{\varphi} - \frac{\varepsilon_i}{\varphi} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \varphi_{,k} f_{,k} \right) - \frac{2\varphi^2}{f} \psi_{,i} \psi_{,j} + \frac{2\varphi^2 \varepsilon_i}{(n-1)f} \left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k (\psi_{,k})^2 \right). \end{aligned}$$

Implicando em

$$\begin{aligned} & \varphi \left[(n-2)f\varphi_{,ii} - \varphi f_{,ii} - 2\varphi_{,i} f_{,i} + \frac{2\varphi}{f} (\psi_{,i})^2 \right] \\ &+ \varepsilon_i \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \left[f\varphi\varphi_{,kk} + \varphi\varphi_{,k} f_{,k} - (n-1)f(\varphi_{,k})^2 - \frac{2\varphi^2}{(n-1)f} (\psi_{,k})^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Agora, de acordo com a equação (1-12) da definição do sistema eletrovácuo

temos $f^{-1} \operatorname{div}_{\bar{g}}(\nabla_{\bar{g}}\psi) + \bar{g}(\nabla_{\bar{g}}\psi, \nabla_{\bar{g}}f^{-1}) = 0$, ou ainda

$$f^{-1} \Delta_{\bar{g}}\psi - f^{-2} \bar{g}(\nabla_{\bar{g}}\psi, \nabla_{\bar{g}}f) = 0. \quad (2-10)$$

Como

$$\begin{aligned} \bar{g}(\nabla_{\bar{g}}\psi, \nabla_{\bar{g}}f) &= \bar{g}\left(\sum_{i,j} \bar{g}^{ij} \psi_{,i} \partial_j, \sum_{k,l} \bar{g}^{kl} f_{,k} \partial_l\right) \\ &= \frac{1}{\varphi^2} g\left(\sum_{i,j} \varphi^2 \varepsilon_i \delta_{ij} \psi_{,i} \partial_j, \sum_{k,l} \varphi^2 \varepsilon_k \delta_{kl} f_{,k} \partial_l\right) \\ &= \frac{1}{\varphi^2} g\left(\sum_i \varphi^2 \varepsilon_i \psi_{,i} \partial_i, \sum_k \varphi^2 \varepsilon_k f_{,k} \partial_k\right) \\ &= \frac{1}{\varphi^2} \varphi^4 \sum_{i,k} \varepsilon_k \varepsilon_i f_{,k} \psi_{,i} g(\partial_k, \partial_i) \\ &= \varphi^2 \sum_k \varepsilon_k \psi_{,k} f_{,k}, \end{aligned} \quad (2-11)$$

então substituindo (2-11) e (1-8) em (2-10), obtemos

$$\frac{1}{f} \left[\sum_{k=1}^n \varepsilon_k (\varphi^2 \psi_{,kk} - (n-2) \varphi \varphi_{,k} \psi_{,k}) \right] - \frac{\varphi^2}{f^2} \left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \psi_{,k} f_{,k} \right) = 0.$$

Daí,

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \{ f \varphi \psi_{,kk} - (n-2) f \varphi_{,k} \psi_{,k} - \varphi \psi_{,k} f_{,k} \} = 0.$$

Finalmente, combinando (1-11) com (1-8) e (2-8), segue que

$$f \left[\sum_{k=1}^n \varepsilon_k (\varphi^2 f_{,kk} - (n-2) \varphi \varphi_{,k} f_{,k}) \right] = \frac{2(n-2)}{(n-1)} \varphi^2 \left[\sum_{k=1}^n \varepsilon_k (\psi_{,k})^2 \right],$$

ou seja,

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \left[\varphi f f_{,kk} - (n-2) f \varphi_{,k} f_{,k} - \frac{2(n-2)}{(n-1)} \varphi (\psi_{,k})^2 \right] = 0.$$

Deste modo, concluímos a prova do teorema. \square

Queremos encontrar soluções para o sistema de equações diferenciais parciais dado pelo Teorema 2.1, porém isso pode ser uma questão difícil de ser resolvida. Uma forma de abordar este problema é utilizar a Teoria de Grupos de Simetria para equações diferenciais parciais, através da teoria proposta por Olver em [60]. O intuito é utilizarmos

invariantes, dados pela ação de um grupo de simetrias do espaço, de modo que consigamos reduzir o número de variáveis de uma equação diferencial parcial ou, até mesmo, reduzir tal sistema para um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Para isso, iremos buscar por soluções invariantes pela ação de um grupo de translação $(n-1)$ -dimensional. Ou seja, vamos considerar que nossas funções suaves são funções da forma $\varphi(\xi), \psi(\xi)$ e $f(\xi)$, onde $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, é o invariante do grupo de translação. Geometricamente, se considerarmos ξ constante, obtemos hiperplanos gerados pelos vetores α_i 's. Portanto, invariantes por translações geradas por esses vetores. Mais ainda, note que se a função f é tal que $f = f(\xi)$, isto é equivalente a dizer que f é constante sobre um hiperplano dado pela equação $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$.

O próximo resultado reduz o sistema original de equações diferenciais parciais definido pelas equações (2-1), (2-2), (2-3) e (2-4) para um sistema equivalente de equações diferenciais ordinárias (EDOs) na variável ξ . Veremos que as condições estabelecidas pelo sistema de EDOs dependem da direção do vetor $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \partial_{x_i}$.

No que segue F' denota a derivada de uma função suave $F = F(\xi)$ em relação à variável ξ . Isto é,

$$F' := \frac{dF}{d\xi}.$$

Teorema 2.2 *Seja (\mathbb{R}^n, g) , $n \geq 3$, um espaço pseudo-Euclidiano com coordenadas cartesianas $x = (x_1, \dots, x_n)$ e componentes métricas $g_{ij} = \delta_{ij} \varepsilon_i$, $1 \leq i, j \leq n$, onde $\varepsilon_i = \pm 1$. Considere as funções suaves $\varphi(\xi), \psi(\xi)$ e $f(\xi)$, onde $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i^2 = \varepsilon_{i_0}$. Então, existe uma métrica $\bar{g} = g/\varphi^2$ tal que $(\Omega, \bar{g}, f, \psi)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, satisfaz a Definição 1.8 se, e somente se, as funções φ , ψ e f satisfazem*

$$(n-2)\varphi''f - \varphi f'' - 2\varphi'f' + \frac{2\varphi}{f}(\psi')^2 = 0; \quad (2-12)$$

$$\varepsilon_{i_0} \left[\varphi \varphi'' f - (n-1)f(\varphi')^2 + \varphi \varphi' f' - \frac{2\varphi^2(\psi')^2}{(n-1)f} \right] = 0; \quad (2-13)$$

$$\varepsilon_{i_0} [\varphi f \psi'' - (n-2)\varphi' f \psi' - \varphi f' \psi'] = 0; \quad (2-14)$$

$$\varepsilon_{i_0} \left[\varphi f f'' - (n-2)f \varphi' f' - \frac{2(n-2)\varphi}{(n-1)}(\psi')^2 \right] = 0. \quad (2-15)$$

Além disso, se $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i^2 = 0$, então

$$(n-2)\varphi''f - \varphi f'' - 2\varphi'f' + \frac{2\varphi}{f}(\psi')^2 = 0.$$

Prova. Assumimos que $\psi(\xi)$, $\varphi(\xi)$ e $f(\xi)$ são funções de ξ . É sabido que as derivadas parciais de uma função suave $F := F(\xi)$ qualquer são da forma

$$F_{,i} = F' \alpha_i, \quad F_{,ij} = F'' \alpha_i^2, \quad F_{,ij} = F'' \alpha_i \alpha_j. \quad (2-16)$$

Utilizando dessas relações, pela equação (2-1) do Teorema 2.1, para $i \neq j$, obtemos

$$(n-2)f\varphi''\alpha_i\alpha_j - \varphi f''\alpha_i\alpha_j - \varphi'\alpha_j f'\alpha_i - \varphi'\alpha_j f'\alpha_i + \frac{2\varphi}{f}\psi'\alpha_i\psi'\alpha_j = 0,$$

o que é equivalente a

$$\left[(n-2)f\varphi'' - \varphi f'' - 2\varphi'f' + \frac{2\varphi}{f}(\psi')^2 \right] \alpha_i\alpha_j = 0.$$

Se existir $i \neq j$ tal que $\alpha_i\alpha_j \neq 0$, a equação acima torna-se

$$(n-2)f\varphi'' - \varphi f'' - 2\varphi'f' + \frac{2\varphi}{f}(\psi')^2 = 0. \quad (2-17)$$

Agora, considere a equação (2-2) do Teorema 2.1 e substitua as expressões de (2-16), logo

$$\begin{aligned} & \varphi \left[(n-2)f\varphi'' - \varphi f'' - 2\varphi'f' + \frac{2\varphi}{f}(\psi')^2 \right] \alpha_i^2 \\ & + \varepsilon_i \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \alpha_k^2 \left[f\varphi\varphi'' - (n-1)f(\varphi')^2 + \varphi\varphi'f' - \frac{2\varphi^2}{(n-1)f}(\psi')^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Observe que, por (2-17) e $\varepsilon_i \pm 1$, temos

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \alpha_k^2 \left[f\varphi\varphi'' - (n-1)f(\varphi')^2 + \varphi\varphi'f' - \frac{2\varphi^2}{(n-1)f}(\psi')^2 \right] = 0,$$

ou ainda,

$$\varepsilon_{i_0} \left[f\varphi\varphi'' - (n-1)f(\varphi')^2 + \varphi\varphi'f' - \frac{2\varphi^2}{(n-1)f}(\psi')^2 \right] = 0,$$

onde $\varepsilon_{i_0} = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \alpha_k^2$ denota a norma do vetor α .

Similarmente, pela equação (2-3) podemos deduzir que

$$\varepsilon_{i_0} [\varphi f\psi'' - (n-2)f\varphi'\psi' - \varphi f'\psi'] = 0.$$

Finalmente, por (2-4) obtemos

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \alpha_k^2 \left[\varphi f f'' - (n-2) f \varphi' f' - \frac{2(n-2)\varphi}{(n-1)} (\psi')^2 \right] = 0.$$

Por outro lado, se tivermos $\alpha_i \alpha_j = 0$, para todo $i \neq j$, então, sem perda de generalidade, podemos considerar $\xi = x_{i_0}$. Neste caso, pelas relações das derivadas parciais (2-16), segue que

$$\begin{aligned} \varphi_{;i_0} &= \varphi', & \varphi_{;i_0 i_0} &= \varphi'' \\ f_{;i_0} &= f', & f_{;i_0 i_0} &= f'', & \psi_{;i_0} &= \psi'. \end{aligned}$$

Sob estas condições a equação (2-12) é trivialmente satisfeita. Vejamos que as outras equações também são satisfeitas. Para isso, analisaremos dois casos: $i \neq i_0$ e $i = i_0$.

Se $i \neq i_0$ temos $\alpha_i = 0$ para todo $i \neq i_0$. Logo, da equação (2-2) temos

$$\varepsilon_i \varepsilon_{i_0} \left[f \varphi \varphi_{;i_0 i_0} - (n-1) f (\varphi_{;i_0})^2 + \varphi \varphi_{;i_0} f_{;i_0} - \frac{2\varphi^2}{(n-1)f} (\psi_{;i_0})^2 \right] = 0.$$

Ou seja,

$$\varepsilon_{i_0} \alpha_{i_0}^2 \left[f \varphi \varphi'' - (n-1) f (\varphi')^2 + \varphi \varphi' f' - \frac{2\varphi^2}{(n-1)f} (\psi')^2 \right] = 0.$$

Portanto, a equação (2-13) é satisfeita.

Analogamente, das equações (2-3) e (2-4) obtemos, respectivamente

$$\varepsilon_{i_0} \alpha_{i_0}^2 [f \varphi \psi'' - (n-2) f \varphi' \psi' - \varphi \psi' f'] = 0$$

e

$$\varepsilon_{i_0} \alpha_{i_0}^2 \left[f \varphi f'' - (n-2) f \varphi' f' - \frac{2(n-2)\varphi}{(n-1)} (\psi')^2 \right] = 0.$$

Se $i = i_0$ em (2-2), obtemos

$$\begin{aligned} & \varphi \left[(n-2) f \varphi_{;i_0 i_0} - \varphi f_{;i_0 i_0} - 2 \varphi_{;i_0} f_{;i_0} + \frac{2\varphi}{f} (\psi_{;i_0})^2 \right] \\ & + \varepsilon_{i_0} \varepsilon_{i_0} \left[f \varphi \varphi_{;i_0 i_0} - (n-1) f (\varphi_{;i_0})^2 + \varphi \varphi_{;i_0} f_{;i_0} - \frac{2\varphi^2}{(n-1)f} (\psi_{;i_0})^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \varphi \alpha_{i_0}^2 \left[(n-2)f\varphi'' - \varphi f'' - 2\varphi' f' + \frac{2\varphi}{f} (\psi')^2 \right] \\ + \varepsilon_{i_0}^2 \alpha_{i_0}^2 \left[f\varphi\varphi'' - (n-1)f(\varphi')^2 + \varphi\varphi' f' - \frac{2\varphi^2}{(n-1)f} (\psi')^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Combinando a equação acima com (2-17), segue que

$$\varepsilon_{i_0}^2 \alpha_{i_0}^2 \left[f\varphi\varphi'' - (n-1)f(\varphi')^2 + \varphi\varphi' f' - \frac{2\varphi^2}{(n-1)f} (\psi')^2 \right] = 0.$$

Do mesmo modo, considerando a equação (2-3), temos

$$\varepsilon_{i_0} [f\varphi\psi_{,i_0 i_0} - (n-2)f\varphi_{,i_0} \psi_{,i_0} - \varphi\psi_{,i_0} f_{,i_0}] = 0,$$

que resulta em (2-14). E finalmente, pela equação (2-4) obtemos (2-15).

Para finalizar, vale observar que se $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i^2 = 0$, isto é, se o vetor α é um vetor do tipo-luz, a única possibilidade que resta é (2-17). Portanto, o teorema fica totalmente provado. \square

O teorema a seguir mostrará que existem soluções para sistema eletrovácuo que são invariantes sob ação de um grupo de translação $(n-1)$ -dimensional quando α é o vetor do tipo-luz.

Teorema 2.3 *Sejam $\varphi(\xi)$ e $f(\xi)$ quaisquer funções diferenciáveis não nulas em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, com $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ e $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i^2 = 0$. Então, a função $\psi(\xi)$ dada por:*

$$\psi(\xi) = \pm \int \sqrt{f \left(\frac{f''}{2} + \frac{\varphi' f'}{\varphi} - (n-2) \frac{f \varphi''}{2\varphi} \right)} d\xi + c, \quad (2-18)$$

com $c \in \mathbb{R}$, satisfaz (2-12). Além disso, $(\Omega, \bar{g}, f, \psi)$ é uma solução para o sistema eletrovácuo com $\bar{g} = g/\varphi^2$.

Prova. A demonstração segue imediatamente do Teorema 2.2, equação (2-12). \square

Observação 1 *Vale observar que os espaços dados pelas soluções do Teorema 2.3 têm curvatura escalar zero. Com efeito, de (1-13) temos*

$$f^2 \mathbf{R}_{\bar{g}} = 2(|\nabla_{\bar{g}} \varphi|^2)_{ij} = 2\varphi^2 \sum_{k=1}^n \varepsilon_k (\psi_{,k})^2 = 2 \sum_{k=1}^n \varepsilon_k (\psi')^2 \alpha_k^2$$

o que implica

$$R_{\bar{g}} = 2\varphi^2 \left(\frac{\psi'}{f} \right)^2 \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \alpha_k^2.$$

Assim, se tomarmos α um vetor do tipo-luz temos $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \alpha_k^2 = 0$, obtemos curvatura escalar nula.

Uma vez garantida a existência de uma solução conforme para o sistema eletrovácuo, podemos obter condição necessária que as funções φ , f e ψ devem satisfazer. É o que nos diz o seguinte lema, que será fundamental para a prova do resultado principal desse capítulo.

Lema 2.4 *Seja (\mathbb{R}^n, g) , $n \geq 3$ um espaço pseudo-Euclidiano com coordenadas cartesianas $x = (x_1, \dots, x_n)$ e componentes métricas $g_{ij} = \delta_{ij} \varepsilon_i$, $1 \leq i, j \leq n$, onde $\varepsilon_i = \pm 1$. Considere as funções suaves $\varphi(\xi), \psi(\xi)$ e $f(\xi)$. Se existir uma métrica $\bar{g} = g/\varphi^2$ tal que $(\Omega, \bar{g}, f, \psi)$ é uma solução para o sistema eletrovácuo, então as funções devem satisfazer*

$$2(n-1)f\varphi'' - n(n-1)\frac{f}{\varphi}(\varphi')^2 - 2\frac{\varphi}{f}(\psi')^2 = 0, \quad (2-19)$$

para α um vetor do tipo-tempo ou do tipo-espaço.

Prova. Seja $(\Omega, \bar{g}, f, \psi)$ uma solução para o sistema eletrovácuo. Pela equação (1-13) da Definição 1.8 temos

$$f^2 R_{\bar{g}} = 2|\nabla_{\bar{g}}\psi|^2.$$

Por outro lado, para métrica conforme $\bar{g} = g/\varphi^2$, por (1-5) e (2-8), vimos que

$$R_{\bar{g}} = (n-1) \left(2\varphi \Delta_g \varphi - n|\nabla_g \varphi|^2 \right) \quad \text{e} \quad |\nabla_{\bar{g}}\psi|^2 = \varphi^2 \sum_{k=1}^n \varepsilon_k (\psi_{,k})^2.$$

Reescrevendo (1-13) em coordenadas e combinando com as relações acima obtemos

$$\begin{aligned} f^2 \left\{ (n-1) \left[2\varphi \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \varphi_{,kk} - n \sum_{k=1}^n \varepsilon_k (\varphi_{,k})^2 \right] \right\} &= 2\varphi^2 \sum_{k=1}^n \varepsilon_k (\psi_{,k})^2; \\ \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \left[2(n-1)f\varphi_{,kk} - n(n-1)\frac{f}{\varphi}(\varphi_{,k})^2 - \frac{2\varphi}{f}(\psi_{,k})^2 \right] &= 0. \end{aligned}$$

Assumindo que $\varphi(\xi)$ e $\psi(\xi)$ são funções de ξ , segue que

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \left[2(n-1)f\varphi'' \alpha_k^2 - n(n-1)\frac{f}{\varphi}(\varphi' \alpha_k)^2 - 2\frac{\varphi}{f}(\psi' \alpha_k)^2 \right] = 0.$$

Então,

$$\varepsilon_{i_0} \left[2(n-1)f\varphi'' - n(n-1)\frac{f}{\varphi}(\varphi')^2 - 2\frac{\varphi}{f}(\psi')^2 \right] = 0,$$

onde $\varepsilon_{i_0} = \sum_k \varepsilon_k \alpha_k^2$. O que implica

$$\varepsilon_{i_0} = 0 \quad \text{ou} \quad 2(n-1)f\varphi'' - n(n-1)\frac{f}{\varphi}(\varphi')^2 - 2\frac{\varphi}{f}(\psi')^2 = 0.$$

Mas, por hipótese, $\varepsilon_{i_0} \neq 0$. Portanto, o resultado segue. \square

Com esse resultado em mãos, antes de enunciar o teorema principal de classificação, fornecemos uma condição necessária satisfeita pelo fator conforme φ para que $(\Omega, \bar{g}, f, \psi)$ seja uma solução para o sistema eletrovácuo com $\bar{g} = g/\varphi^2$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Mais ainda, a partir desta condição conseguimos determinar as funções lapso e potencial elétrico em termos do fator conforme.

Teorema 2.5 *Seja (\mathbb{R}^n, g) , $n \geq 3$, um espaço pseudo-Euclidiano com coordenadas cartesianas $x = (x_1, \dots, x_n)$ e componentes métricas $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $1 \leq i, j \leq n$, onde $\varepsilon_i = \pm 1$. Considere as funções suaves $\varphi(\xi), \psi(\xi)$ e $f(\xi)$, onde $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i^2 = \varepsilon_{i_0}$, com $\varepsilon_{i_0} \in \{-1, 1\}$. Então, se $(\Omega, \bar{g}, f, \psi)$ é uma solução para o sistema eletrovácuo temos*

$$\varphi^2 \varphi''' - 3(n-1)\varphi \varphi' \varphi'' + n(n-1)(\varphi')^3 = 0. \quad (2-20)$$

Além disso,

$$f = k \frac{\varphi'}{\varphi} \quad e \quad \psi = k_1 \frac{\varphi^{n-2}}{n-2} + k_2, \quad (2-21)$$

onde $k, k_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k_2 \in \mathbb{R}$ e $\bar{g} = g/\varphi^2$.

Prova. Primeiramente, note que combinando as equações (2-13) e (2-19), obtemos

$$f\varphi\varphi'' - (n-1)f(\varphi')^2 + \varphi\varphi'f' - 2f\varphi\varphi'' + nf(\varphi')^2 = 0.$$

Depois de algumas manipulações algébricas, escrevemos

$$\frac{f'}{f} - \frac{\varphi''}{\varphi'} + \frac{\varphi'}{\varphi} = 0.$$

Como f e φ são funções de ξ , integrando a expressão acima em relação a ξ

$$\int \frac{f'}{f} d\xi = \int \left(\frac{\varphi''}{\varphi'} - \frac{\varphi'}{\varphi} \right) d\xi$$

onde obtemos que $f = k \frac{\varphi'}{\varphi}$, onde $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Agora, por (2-14), substituindo a expressão de f que encontramos acima, obtemos a seguinte equação diferencial

$$\frac{\psi''}{\psi'} = (n-2) \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{f'}{f}. \quad (2-22)$$

Mas, note que, como $f = k \frac{\varphi'}{\varphi}$ suas derivadas podem ser escritas como

$$f' = k \left(\frac{\varphi''}{\varphi} - \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right)^2 \right) \quad \text{e} \quad f'' = k \left(\frac{\varphi'''}{\varphi} - \frac{3\varphi'\varphi''}{\varphi^2} + 2 \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right)^3 \right). \quad (2-23)$$

Substituindo (2-23) em (2-22) segue

$$\frac{\psi''}{\psi'} = (n-2) \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\varphi}{k\varphi'} \left\{ k \left[\frac{\varphi''}{\varphi} - \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right)^2 \right] \right\}.$$

Ou seja,

$$\frac{\psi''}{\psi'} = (n-3) \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\varphi''}{\varphi'}.$$

Então, por integração

$$\psi' = k_1 \varphi' \varphi^{n-3},$$

onde $k_1 \in \mathbb{R}_+^*$. Portanto,

$$\psi = k_1 \frac{\varphi^{n-2}}{n-2} + k_2, \quad \text{com} \quad k_2 \in \mathbb{R}.$$

Considerando a equação (2-12), após manipulações algébricas, obtemos

$$\frac{n-2}{n-1} \varphi \varphi'' f - \frac{\varphi^2 f''}{n-1} - \frac{2}{n-1} \varphi \varphi' f' + \frac{2\varphi^2}{(n-1)f} (\psi')^2 = 0.$$

Combinando a expressão anterior com a equação (2-13), segue que

$$\frac{n-2}{n-1} \varphi \varphi'' f - \frac{\varphi^2 f''}{n-1} - \frac{2}{n-1} \varphi \varphi' f' + f \varphi \varphi'' - (n-1) f (\varphi')^2 + \varphi \varphi' f' = 0.$$

Ou equivalentemente,

$$\left(\frac{2n-3}{n-1} \right) \varphi'' f + \left(\frac{n-3}{n-1} \right) \varphi' f' - (n-1) \frac{f}{\varphi} (\varphi')^2 - \frac{\varphi f''}{n-1} = 0. \quad (2-24)$$

Por outro lado, pela equação (2-15), temos

$$-\varphi f'' + (n-2)\varphi' f' + \frac{2(n-2)}{(n-1)} \frac{\varphi}{f} (\psi')^2 = 0. \quad (2-25)$$

Agora, multiplicando a expressão (2-19) por $\frac{n-2}{n-1}$, obtemos

$$2(n-2)f\varphi'' - n(n-2)\frac{f}{\varphi}(\varphi')^2 - \frac{2(n-2)}{(n-1)} \frac{\varphi}{f} (\psi')^2 = 0. \quad (2-26)$$

Por fim, combinando (2-25) e (2-26) podemos mostrar que

$$-\varphi f'' + (n-2)\varphi' f' + 2(n-2)f\varphi'' - n(n-2)\frac{f}{\varphi}(\varphi')^2 = 0. \quad (2-27)$$

Assim, de (2-24) e (2-27), segue

$$\left[\frac{2n-3}{n-1} + 2(n-2) \right] f\varphi'' + \left[(n-2) + \frac{n-3}{n-1} \right] \varphi' f' - [n-1+n(n-2)] \frac{f}{\varphi} (\varphi')^2 - \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) \varphi f'' = 0.$$

Substituindo as expressões de $f = k \frac{\varphi'}{\varphi}$ e de suas derivadas dadas em (2-23), obtemos

$$\left[\frac{2n-3+2(n-2)(n-1)}{n-1} \right] k \frac{\varphi'}{\varphi} \varphi'' + \left[\frac{n-3+(n-2)(n-1)}{n-1} \right] \varphi' k \left[\frac{\varphi''}{\varphi} - \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right)^2 \right] - \frac{n}{n-1} \varphi k \left[\frac{\varphi'''}{\varphi} - \frac{3\varphi' \varphi''}{\varphi^2} + 2 \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right)^3 \right] - [n-1+n(n-2)] k \frac{\varphi'}{\varphi} \frac{(\varphi')^2}{\varphi} = 0.$$

Combinando os termos semelhantes, temos

$$\left[\frac{2n-3+2(n-2)(n-1)}{n-1} + \frac{n-3+(n-2)(n-1)}{n-1} + \frac{3n}{n-1} \right] \frac{\varphi' \varphi''}{\varphi} - \left[\frac{n-3+(n-2)(n-1)}{n-1} + \frac{2n}{n-1} + n(n-2) + (n-1) \right] \frac{(\varphi')^3}{\varphi^2} - \frac{n}{n-1} \varphi''' = 0.$$

Ou seja,

$$\frac{-n}{n-1} \varphi''' + 3n \frac{\varphi' \varphi''}{\varphi} - n^2 \frac{(\varphi')^3}{\varphi^2} = 0.$$

Portanto,

$$\frac{\varphi'''}{\varphi} - 3(n-1) \frac{\varphi' \varphi''}{\varphi^2} + n(n-1) \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right)^3 = 0$$

como queríamos demonstrar. \square

Finalmente, apresentamos a seguir o resultado principal desse capítulo. Nele caracterizamos todas as soluções das equações estáticas de Einstein-Maxwell que são conformes à métrica pseudo-Euclidiana e invariantes sob ação de um grupo de translação. A partir da solução de uma equação diferencial do tipo Chini [ver Seção 1.2], obtemos φ o fator conforme e, então, das relações do lema anterior determinamos as funções lapso e potencial elétrico.

Teorema 2.6 *Seja (\mathbb{R}^n, g) , $n \geq 3$, um espaço pseudo-Euclidiano com coordenadas cartesianas $x = (x_1, \dots, x_n)$ e componentes métricas $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $1 \leq i, j \leq n$, com $\varepsilon_i = \pm 1$. Considere funções suaves $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ e $f(\xi)$, onde $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i^2 = \varepsilon_{i_0}$ e $\varepsilon_{i_0} = \pm 1$. Então, $(\Omega, \bar{g}, f, \psi)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, é uma solução para o sistema eletrovácuo com $\bar{g} = g/\varphi^2$ se, e somente se, as funções φ , ψ e f satisfazem*

$$\varphi(\xi) = c_3 [1 - c_1^2 [c_2 + (n-2)\xi]^2]^{-1/(n-2)}, \quad (2-28)$$

$$\psi(\xi) = \frac{k_1 c_3^{n-2}}{n-2} [1 - c_1^2 [c_2 + (n-2)\xi]^2]^{-1} + k_2 \quad (2-29)$$

e

$$f(\xi) = \frac{2k c_1^2 [c_2 + (n-2)\xi]}{1 - c_1^2 [c_2 + (n-2)\xi]^2}, \quad (2-30)$$

onde $c_1^2 = \frac{k_1^2 c_3^{2(n-2)}}{2(n-1)(n-2)k^2}$ e $k, k_1, k_2, c_1, c_2, c_3$ são constantes reais não nulas. Além disso, essas soluções são definidas em $\Omega = \{1 - c_1^2 [c_2 + (n-2)\xi]^2 > 0\} \cap \{2k c_1^2 [c_2 + (n-2)\xi] > 0\}$.

Prova. Considere a mudança de variável $F = \varphi'/\varphi$ no Teorema 2.5. Note que tal escolha está relacionada com a função f . Esta mudança de variáveis nos permitirá integrar explicitamente a função conforme φ . Então, utilizando tal mudança, as derivadas de F em relação a ξ são

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = F' + F^2$$

e

$$\frac{\varphi'''}{\varphi} = F'' + 3FF' + F^3.$$

Substituindo as identidades acima em (2-20), obtemos a seguinte equação diferencial em F :

$$F'' + 3FF' + F^3 - 3(n-1)F(F' + F^2) + n(n-1)F^3 = 0,$$

isto é,

$$F'' - 3(n-2)FF' + (n-2)^2F^3 = 0. \quad (2-31)$$

Considerando $v(F) = \frac{dF(\xi)}{d\xi} = F'$, então observe que

$$\frac{d^2F(\xi)}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dF(\xi)}{d\xi} \right) = \frac{dv(F)}{dF} \frac{dF}{d\xi} = v'(F)v(F).$$

Assim, reescrevendo (2-31) com essa relação e, além disso, dividindo-a por $v(F)$, obtemos

$$v' = 3(n-2)F - (n-2)^2F^3v^{-1}. \quad (2-32)$$

Observe que $v(F) \neq 0$, pois $\varphi' \neq 0$. Caso contrário, teríamos φ constante o que tornaria um caso trivial, do qual não estamos interessados.

Podemos observar que a equação diferencial anterior é uma *Equação de Chini* [ver Seção 1.2] com

$$\mathcal{F}(F) = -(n-2)^2F^3, \quad \mathcal{G}(F) = 0, \quad \mathcal{H}(F) = 3(n-2)F \quad \text{e} \quad m = -1.$$

Assim,

$$\mathcal{F}'(F) = -3(n-2)^2F^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{H}'(F) = 3(n-2)$$

e o invariante de Chini (1-3) é dado por

$$\alpha = -3^3(n-2)^3F^3 [-3(n-2)^3F^3 + 9(n-2)^3F^3]^{-1} = \frac{-9}{2}.$$

Deste modo, temos α independente de F e, portanto, considerando a mudança

$$v(F) = \pm u(F) \left(\frac{3(n-2)F}{-(n-2)^2F^3} \right)^{-1},$$

isto é,

$$v(F) = \mp(n-2)F^2u(F). \quad (2-33)$$

Obtemos uma equação diferencial de variáveis separáveis, onde $u(F) := \frac{u(F)}{3}$. Note que, derivando $v(F)$ de acordo com a relação acima temos

$$v'(F) = \mp(n-2)f(2u + fu'). \quad (2-34)$$

Logo, combinando (2-32) juntamente com (2-33) e (2-34), vemos que

$$\begin{aligned}\mp(n-2)F(u'F+2u) &= 3(n-2)F - \frac{(n-2)^2F^3}{\mp u(n-2)F^2} \\ \mp(u'F+2u) &= 3 \pm \frac{1}{u}\end{aligned}$$

então,

$$\frac{uu'}{2u^2 \pm 3u + 1} = \frac{-1}{F}. \quad (2-35)$$

Podemos observar que

$$2u^2 \pm 3u + 1 = 2(u \pm 1)(u \pm 1/2)$$

e

$$\frac{udu}{2u^2 \pm 3u + 1} = \frac{du}{(u \pm 1)} - \frac{du}{(2u \pm 1)}.$$

Utilizando as identidades acima reescrevemos (2-35) da seguinte maneira

$$\frac{udu}{2u^2 \pm 3u + 1} = \frac{-dF}{F}.$$

Daí,

$$\frac{du}{(u \pm 1)} - \frac{du}{(2u \pm 1)} = \frac{-dF}{F},$$

onde $u' = \frac{du(F)}{dF}$. Então, por integração

$$F^{-1} = \frac{u \pm 1}{\sqrt{2u \pm 1}} c_1, \quad (2-36)$$

onde c_1 é uma constante real arbitrária não nula. Isolando u em (2-36), obtemos duas equações do segundo grau em u . A saber,

$$u^2 + 2u(1 - c_1^2 F^{-2}) + (1 - c_1^2 F^{-2}) = 0$$

e

$$u^2 - 2u(1 + c_1^2 F^{-2}) + (1 + c_1^2 F^{-2}) = 0.$$

Resolvendo as equações, segue que

$$u(F) = (c_1^2 F^{-2} \mp 1) \pm c_1 F^{-1} \sqrt{c_1^2 F^{-2} \mp 1}. \quad (2-37)$$

Observe que o sinal \pm que antecede a raiz quadrada na expressão anterior é consequência da resolução da equação do segundo grau em u . Assim, para cada escolha do primeiro sinal, teremos duas soluções para u . Isto é,

$$u(F) = (c_1^2 F^{-2} - 1) \pm c_1 F^{-1} \sqrt{c_1^2 F^{-2} - 1}$$

e

$$u(F) = (c_1^2 F^{-2} + 1) \pm c_1 F^{-1} \sqrt{c_1^2 F^{-2} + 1}.$$

A partir de agora é muito importante seguir cuidadosamente os sinais das equações. Substituindo $u(F)$, como descrito em (2-37), na expressão (2-33) e lembrando que $v(F) = \frac{dF(\xi)}{d\xi}$ temos

$$\frac{dF}{(c_1^2 \mp F^2) \pm c_1 \sqrt{c_1^2 \mp F^2}} = \mp(n-2)d\xi.$$

Assim, por integração obtemos que

$$\frac{\pm(c_1 \mp \sqrt{c_1^2 \mp F^2})}{c_1 F} = \mp(n-2)\xi + c_2,$$

onde $c_2 \in \mathbb{R}$. Da equação acima, segue

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = F = \frac{2c_1^2[c_2 \mp (n-2)\xi]}{1 \pm c_1^2[c_2 \mp (n-2)\xi]^2}.$$

Novamente, por integração em ξ , obtemos

$$\varphi(\xi) = c_3 [1 \pm c_1^2 [c_2 \mp (n-2)\xi]^2]^{-1/(n-2)}, \quad (2-38)$$

onde c_3 é uma constante real não nula.

Portanto, por (2-21) podemos concluir que

$$\psi(\xi) = \frac{k_1}{n-2} c_3^{n-2} [1 \pm c_1^2 [c_2 \mp (n-2)\xi]^2]^{-1} + k_2$$

e

$$f(\xi) = \frac{2kc_1^2[c_2 \mp (n-2)\xi]}{1 \pm c_1^2[c_2 \mp (n-2)\xi]^2},$$

onde c_1, c_2, c_3, k, k_1 e k_2 são constantes reais não nulas.

Agora, para a implicação contrária, precisamos garantir que as funções f, ψ

e φ obtidas formam uma solução $(\Omega, \bar{g}, f, \psi)$ para o sistema eletrovácuo. Para isso verificaremos que f , ψ e φ satisfazem o Teorema 2.2 e o Lema 2.4.

Observe que um cálculo direto mostra que φ satisfaz (2-20). Por outro lado, para obter (2-19) do Lema 2.4, ou as equações do Teorema 2.2, a seguinte identidade deve ser satisfeita

$$c_1^2 = \frac{\mp c_3^{2(n-2)} k_1^2}{2(n-1)(n-2)k^2}. \quad (2-39)$$

De fato, da equação (2-19), sabendo que $f = k \frac{\varphi'}{\varphi}$ e $\psi' = k_1 \varphi' \varphi^{n-3}$, obtemos

$$2(n-1) \frac{\varphi' \varphi''}{\varphi} - n(n-1) \frac{(\varphi')^3}{\varphi^2} - 2 \frac{k_1^2}{k^2} \varphi' \varphi^{2(n-2)} = 0. \quad (2-40)$$

Considerando φ como em (2-38) suas derivadas são dadas por

$$\varphi'(\xi) = \frac{2c_1^2 c_3 (c_2 \mp (n-2)\xi)}{[1 \pm c_1^2 [c_2 \mp (n-2)\xi]^2]^{(n-1)/(n-2)}}$$

e

$$\varphi''(\xi) = \frac{2c_1^2 c_3 [nc_1^2 (c_2 \mp (n-2)\xi)^2 \mp (n-2)]}{\{1 \pm c_1^2 [c_2 \mp (n-2)\xi]^2\}^{(2n-3)/(n-2)}}.$$

Portanto, substituindo as expressões das derivadas em (2-40), de um simples cálculo obtemos a seguinte identidade:

$$\frac{8c_1^4 c_3 (c_2 \mp (n-2)\xi)}{\{1 \pm c_1^2 [c_2 \mp (n-2)\xi]^2\}^{(3n-5)/(n-2)}} \left[\mp (n-1)(n-2) - \frac{k_1^2 c_3^{2(n-2)}}{2k^2 c_1^2} \right] = 0.$$

O que implica que

$$c_1^2 = \frac{\mp c_3^{2(n-2)} k_1^2}{2(n-1)(n-2)k^2}.$$

De maneira totalmente análoga, podemos verificar que f , ψ e φ satisfazem as equações do Teorema 2.2 se, e somente se, (2-39) é satisfeita. Daí, a única possibilidade para φ , ψ e f é aquela fornecida no enunciado desse teorema, isto é, as funções φ , ψ e f devem ser como (2-28), (2-29) e (2-30), respectivamente. \square

Observação 2 Em uma variedade pseudo-Euclidiana com métrica conforme $\bar{g} = g/\varphi^2$, se consideramos o fator conforme $\varphi = \varphi(\xi)$ como um função do invariante de translação $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, obtemos que

$$\varphi_{,i} = \varphi' \alpha_i, \quad \varphi_{,ii} = \varphi'' \alpha_i^2, \quad \varphi_{,ij} = \varphi'' \alpha_i \alpha_j.$$

Logo, por (1-9), a curvatura seccional gerada por ∂_{x_i} e ∂_{x_j} , na métrica conforme, é dada por

$$K_{ij} = -(\varphi')^2 \varepsilon_{i_0} + \varphi \varphi'' \varepsilon_j \alpha_j^2 + \varphi \varphi'' \varepsilon_i \alpha_i^2, \quad (2-41)$$

onde $\bar{g}_{ij} = \frac{\delta_{ij} \varepsilon_i}{\varphi^2}$ e $\varepsilon_{i_0} = \sum_{l=1}^n \varepsilon_l \alpha_l^2$, com $\varepsilon_{i_0} \in \{-1, 0, 1\}$. Note que a curvatura seccional depende da direção do vetor $\alpha = \sum_{l=1}^n \alpha_l \partial_{x_l}$.

Deste modo, para as soluções do sistema eletrovácuo conformes ao espaço pseudo-Euclidiano e invariantes por translação, obtidas pelo Teorema 2.6, temos que

$$\varphi(\xi) = c_3 [1 - c_1^2 [c_2 + (n-2)\xi]^2]^{-1/(n-2)},$$

$$\varphi'(\xi) = \frac{2c_1^2 c_3 (c_2 \mp (n-2)\xi)}{[1 \pm c_1^2 [c_2 \mp (n-2)\xi]^2]^{(n-1)/(n-2)}}$$

e

$$\varphi''(\xi) = \frac{2c_1^2 c_3 \{nc_1^2 (c_2 \mp (n-2)\xi)^2 \mp (n-2)\}}{[1 \pm c_1^2 [c_2 \mp (n-2)\xi]^2]^{(2n-3)/(n-2)}}.$$

Portanto, utilizando (2-41), concluímos que

$$K_{ij} = \frac{2c_1^2 c_3^2 \left\{ c_1^2 (c_2 + (n-2)\xi)^2 [n(\varepsilon_i \alpha_i^2 + \varepsilon_j \alpha_j^2) - 2\varepsilon_{i_0}] + (n-2)(\varepsilon_i \alpha_i^2 + \varepsilon_j \alpha_j^2) \right\}}{[1 - c_1^2 [c_2 + (n-2)\xi]^2]^{2(n-1)/(n-2)}}.$$

é a curvatura seccional gerada por ∂_{x_i} e ∂_{x_j} para o sistema eletrovácuo $(\Omega, \bar{g}, f, \psi)$ como definido no Teorema 2.6, onde $\bar{g} = g/\varphi^2$.

Mais ainda, por (1-13), sabemos que a curvatura escalar é dada em termos das funções lapso e potencial elétrico, isto é, $f^2 R_{\bar{g}} = 2|\nabla_{\bar{g}}\psi|^2$. Assim, como

$$|\nabla_{\bar{g}}\psi|^2 = \varphi^2 \sum_{k=1}^n \varepsilon_k (\psi_{,k})^2 \quad e \quad \psi_{,k} = \psi' \alpha_k,$$

segue

$$R_{\bar{g}} = \frac{2\varphi^2 (\psi')^2}{f^2} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \alpha_k^2.$$

Portanto, pelo Teorema (2.6), obtemos que

$$R_{\bar{g}} = \frac{4(n-1)(n-2)\varepsilon_{i_0} c_1^2 c_3^2}{[1 - c_1^2 [c_2 + (n-2)\xi]^2]^{2(n-1)/(n-2)}}.$$

É importante observar que se $\xi \rightarrow \frac{-c_2 c_1 \pm 1}{(n-2)c_1}$, a curvatura escalar $R_{\bar{g}}$ tende ao infinito. Além disso, se $\xi \rightarrow \pm\infty$, então $R_{\bar{g}} \rightarrow 0$.

2.2 Exemplos

O exemplo a seguir é de um espaço-tempo estático de Einstein-Maxwell tridimensional que é invariante pela ação de um grupo de translação.

Exemplo 1 *Se considerarmos $n = 3$, $\varepsilon_i = 1$ e $\alpha_i = 1$ para $1 \leq i \leq 3$ no Teorema 2.6, então temos que*

$$\psi(\xi) = k_1 c_3 [1 - c_1^2 [c_2 + (x_1 + x_2 + x_3)]^2]^{-1} \quad e \quad f(\xi) = \frac{2kc_1^2 [c_2 + (x_1 + x_2 + x_3)]}{1 - c_1^2 [c_2 + (x_1 + x_2 + x_3)]^2}.$$

Consequentemente, $(\widehat{M}^{3+1}, \widehat{g}) = (\mathbb{R}^3, g) \times_f (\mathbb{R}, dt^2)$ tal que

$$\widehat{g}(x, t) = g(x) - f^2(x) dt^2; \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

é um espaço-tempo estático de Einstein-Maxwell, onde

$$\widehat{g} = \frac{1}{c_3^2} [1 - c_1^2 [c_2 + (x_1 + x_2 + x_3)]^2]^2 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - \frac{4k^2 c_1^4 [c_2 + (x_1 + x_2 + x_3)]^2}{\{1 - c_1^2 [c_2 + (x_1 + x_2 + x_3)]^2\}^2} dt^2.$$

Utilizando o Teorema 2.3, construímos, a partir do fator conforme e da função lapso, uma solução n -dimensional para o sistema eletrovácuo. Soluções para a equação de Einstein com assinaturas não convencionais podem representar um avanço na análise da Relatividade Geral.

Exemplo 2 *Sejam $\varphi(\xi) = \frac{\xi^2}{2} + 1$ e $f(\xi) = k\xi^{\frac{n-2}{2}}$, onde $k \in \mathbb{R}_+^*$, com $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ e $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i^2 = 0$. Deste modo, as suas derivadas são dadas por*

$$\varphi'(\xi) = \xi, \quad \varphi''(\xi) = 1,$$

$$f'(\xi) = \frac{(n-2)k}{2} \xi^{\frac{n-4}{2}} \quad e \quad f''(\xi) = \frac{(n-2)(n-4)k}{4} \xi^{\frac{(n-6)}{2}}.$$

Substituindo as relações anteriores em (2-18) obtemos

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= \pm \int \sqrt{\frac{(n-2)(n-4)k^2}{8} \xi^{(n-4)}} d\xi + c \\ &= \pm \frac{k}{2} \sqrt{\frac{(n-2)(n-4)}{2}} \int \xi^{\frac{(n-4)}{2}} d\xi + c, \end{aligned}$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é a constante de integração obtida no Teorema 2.3. Logo,

$$\psi(\xi) = \pm k \sqrt{\frac{(n-4)}{2(n-2)} \xi^{\frac{n-2}{2}} + \tilde{c}},$$

onde \tilde{c} é uma constante arbitrária de integração. Portanto, do Teorema 2.3, $(\mathbb{R}^n, \bar{g}, f, \psi)$ é solução do sistema eletrovácuo com $\bar{g} = g/\varphi^2$. Mais ainda, utilizando a relação (1-9), concluímos que sua curvatura seccional é dada por

$$\begin{aligned} K_{ij} &= -(\varphi')^2 \varepsilon_{i_0} + (\varepsilon_j \alpha_j^2 + \varepsilon_i \alpha_i^2) \varphi \varphi'' \\ &= \left(\frac{\xi^2}{2} + 1 \right) (\varepsilon_j \alpha_j^2 + \varepsilon_i \alpha_i^2) \\ &= \varphi (\varepsilon_j \alpha_j^2 + \varepsilon_i \alpha_i^2). \end{aligned}$$

Observação 3 Se tomarmos $n = 4$ no exemplo anterior obtemos uma solução para as equações do vácuo estático, i.e., em dimensão 4 temos $\psi = 0$ e o sistema eletrovácuo dado na definição 1.8 se reduz a

$$f \text{ Ric}_g = \nabla_g^2 f \quad \text{e} \quad \Delta_g f = 0.$$

Portanto, nesse caso recuperamos um espaço estático de Einstein no vácuo [25].

Em variedades semi-Riemannianas a completude geodésica está relacionada com as singularidades na Relatividade Geral. Na geometria Riemanniana, essa completude é respondida pelo teorema de Hopf-Rinow, porém não há um análogo quando consideramos a geometria semi-Riemanniana, isto ocorre, pois o tensor métrico não permite definir uma função distância. Deste modo, para verificar a completude da variedade semi-Riemanniana é necessário, em geral, considerar as geodésicas. Para produtos torcidos do tipo $\widehat{M} = (B, g_B) \times_f (F, g_F)$, com tensor métrico $\widehat{g} = g_B + f^2 g_F$, uma curva γ pode ser escrita como

$$\gamma(s) = (\sigma(s), \beta(s)),$$

onde σ e β são projecções da curva γ em B e em F , respectivamente. A proposição a seguir mostra um critério para que a curva γ seja uma geodésica em \widehat{M} [ver [49] e [61]].

Proposição 2.7 [Proposição 38, [61]] Uma curva $\gamma(s) = (\sigma(s), \beta(s))$ é geodésica em $\widehat{M} = (B, g_B) \times_f (F, g_F)$ se, e somente se

- (i) $\sigma''(s) = g_F(\beta'(s), \beta'(s)) f(\sigma(s)) (\nabla_{g_B} f)$ em B ,
- (ii) $\beta''(s) = -\frac{2}{f(\sigma(s))} \frac{d(f(\sigma(s)))}{ds} \beta'(s)$ em F .

Usaremos a proposição anterior para determinar as geodésicas de um espaço-tempo estático de Einstein-Maxwell definido como no Teorema 2.6.

Exemplo 3 Considere as funções suaves $\varphi(\xi) = ke^\xi$ e $f(\xi) = e^{\frac{n-2}{2}\xi}$ com $k \in \mathbb{R}_+^*$. Suas derivadas são dadas por

$$\varphi'(\xi) = \varphi''(\xi) = ke^\xi$$

e

$$f'(\xi) = \frac{(n-2)}{2} e^{\frac{(n-2)}{2}\xi}, \quad f''(\xi) = \frac{(n-2)^2}{4} e^{\frac{(n-2)}{2}\xi}.$$

Assim, de (2-18) obtemos

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= \pm \int \sqrt{e^{\frac{(n-2)}{2}\xi} \left[\frac{(n-2)^2}{8} e^{\frac{(n-2)}{2}\xi} + \frac{(n-2)}{2} e^{\frac{(n-2)}{2}\xi} - \frac{(n-2)}{2} e^{\frac{(n-2)}{2}\xi} \right]} d\xi + c \\ &= \pm \frac{(n-2)}{2\sqrt{2}} \int e^{\frac{(n-2)}{2}\xi} d\xi + c \end{aligned}$$

com $c \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\psi(\xi) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{(n-2)}{2}\xi} + \tilde{c}$$

onde \tilde{c} é uma constante arbitrária de integração. Vamos determinar as geodésicas desse espaço-tempo $\hat{M} = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f \mathbb{R}$ com tensor métrico $\hat{g} = \bar{g} - f^2 dt^2$. Primeiramente, observe que

$$\nabla_{\bar{g}} f = \frac{(n-2)k^2}{2} e^{\frac{n+2}{2}\xi} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Seja $\gamma(s) = (\sigma(s), \beta(s))$ uma curva em $\hat{M} = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f \mathbb{R}$. Da estrutura do produto torcido, podemos inferir que

$$\sigma(s) = (x_1(s), \dots, x_n(s)) \quad \text{e} \quad \beta = x_{n+1}(s).$$

Assim,

$$x_i''(s) = \varepsilon_i \alpha_i \frac{(n-2)k^2}{2} (\beta'(s))^2 e^{n\xi}, \quad \forall \quad 1 \leq i \leq n.$$

Por outro lado, pela Proposição 2.7 temos

$$\sigma''(s) = \frac{(n-2)k^2}{2} (\beta'(s))^2 e^{n\xi} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

e

$$\beta''(s) = -(n-2) \sum_{i=1}^n \alpha_i x'_i(s) \beta'.$$

Fazendo $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_i = 1$ para $i \neq 1$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_i = 0$ para $3 \leq i \leq n$, obtemos

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i^2 = 0 \quad \text{e} \quad \xi = x_1 + x_2.$$

Consequentemente,

$$\begin{cases} x_1''(s) = -\frac{(n-2)k^2}{2} (\beta'(s))^2 e^{n\xi}, \\ x_2''(s) = \frac{(n-2)k^2}{2} (\beta'(s))^2 e^{n\xi} \\ x_l''(s) = 0, \quad \text{para } 3 \leq l \leq n, \\ \beta''(s) = -(n-2) (x_1'(s) + x_2'(s)) \beta'. \end{cases} \quad (2-42)$$

Da primeira e segunda equação do sistema acima, temos

$$x_1'(s) + x_2'(s) = k_1$$

então,

$$x_1(s) + x_2(s) = k_1 s + k_2, \quad (2-43)$$

onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Agora, considerando a quarta equação de (2-42) juntamente com (2-43) obtemos

$$\frac{\beta''(s)}{\beta'(s)} = -(n-2)k_1$$

o que implica em

$$\beta'(s) = \bar{k}_3 e^{-(n-2)k_1 s},$$

onde \bar{k}_3 é uma constante não nula. Portanto,

$$\begin{cases} \beta(s) = -\frac{\bar{k}_3}{(n-2)k_1} e^{-(n-2)k_1 s} + k_4, \quad \text{se } k_1 \neq 0 \text{ e } k_4 \in \mathbb{R}, \\ \beta(s) = k_3 s + k_5, \quad \text{se } k_1 = 0 \text{ e } k_3, k_5 \in \mathbb{R}, \\ x_l(s) = k_6 s + k_7, \quad \text{com } k_6, k_7 \in \mathbb{R} \text{ e } 3 \leq l \leq n. \end{cases} \quad (2-44)$$

Além disso, pela primeira equação de (2-42) e (2-43), obtemos

$$x_1''(s) = -\frac{(n-2)k^2}{2} (\beta'(s))^2 e^{n(k_1 s + k_2)}. \quad (2-45)$$

Assim, para $k_1 \neq 0$ segue que

$$x_1(\mathbf{s}) = \begin{cases} -\frac{(n-2)k^2\bar{k}_3^2}{2(4-n)^2k_1^2}e^{nk_2}e^{(4-n)k_1s} + k_8s + k_9, & \text{para } n \neq 4 \text{ e } k_8, k_9 \in \mathbb{R}, \\ -\frac{k^2\bar{k}_3^2}{2}e^{4k_2}s^2 + k_{10}s + k_{11}, & \text{para } n = 4 \text{ e } k_{10}, k_{11} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Por outro lado, se $k_1 = 0$, para a segunda equação de (2-44) e (2-45), temos

$$x_1(\mathbf{s}) = -\frac{(n-2)k^2\bar{k}_3^2}{4}e^{nk_2}s^2 + k_{12}s + k_{13},$$

onde k_{12} e $k_{13} \in \mathbb{R}$. Mais ainda, se $k_3 = 0$ segue que $x_1(\mathbf{s})$ é linear. No entanto, como $x_1(\mathbf{s}) + x_2(\mathbf{s}) = k_1\mathbf{s} + k_2$, podemos ver que, em qualquer caso, as geodésicas são definidas para a reta real.

Além disso, utilizando (1-9), a curvatura seccional gerada por $(\partial_{x_i}, \partial_{x_j})$ desse espaço é

$$K_{ij} = k^2 e^{2\xi} (\varepsilon_j \alpha_j^2 + \varepsilon_i \alpha_i^2).$$

Desigualdade de Minkowski para o espaço-tempo estático de Einstein-Maxwell

Este capítulo é baseado em [46]. O objetivo é fornecer uma desigualdade do tipo-Minkowski para um espaço de Einstein-Maxwell estático assintoticamente plano com curvatura escalar subharmônica. A condição de curvatura escalar subharmônica é satisfeita por algumas classes de variedades de Reissner-Nördstrom como mostramos no Lema 1.9.

Em geral, dizemos que uma variedade Riemanniana (M^n, g) é assintoticamente plana se, fora de um conjunto compacto, a variedade é difeomorfa ao complemento de uma bola unitária fechada e sua métrica decai no infinito o suficiente para a métrica g se aproximar da métrica Euclidiana. Formalmente, definimos uma variedade eletrovácuo assintoticamente plana da seguinte maneira:

Definição 3.1 [45, 56, 71, 83] *Uma solução (M^n, g, f, ψ) para (1-10), (1-11) e (1-12) é assintoticamente plana com um fim se M^n , menos um conjunto compacto, é difeomorfa a \mathbb{R}^n menos uma bola fechada centrada na origem, e a métrica g e a função lapso f satisfazem as seguintes expansões assintóticas no infinito*

(I) *Sejam $r^2 = |x|$, $x \in M$, δ uma métrica plana e $\eta_{ij}(x) = o(r^{2-n})$ com $r \rightarrow \infty$,*

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij}(x) + \eta_{ij}(x).$$

(II) *Para $\omega = o(r^{2-n})$, $r \rightarrow \infty$,*

$$f = 1 - \frac{m}{r^{n-2}} + \omega.$$

(III) *Além disso,*

$$\partial_i \eta_{ij} = o(r^{1-n}); \quad \partial_i \omega = o(r^{-n}) \quad e \quad \partial_i \partial_j \omega = o(r^{-(n+1)}),$$

Onde $1 \leq i, j \leq n$ e $m \in \mathbb{R}$ é a massa.

Observação 4 Para esse espaço-tempo assintoticamente plano, podemos garantir que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}(r)} g(\nabla f, \nu) dS = (n-2)m|\mathbb{S}^{n-1}|, \quad (3-1)$$

onde ν é o campo vetorial normal externo da $\mathbb{S}(r)$ esfera padrão $(n-1)$ -dimensional de raio r e $|\mathbb{S}^{n-1}|$ a área da esfera padrão $(n-1)$ -dimensional de raio 1 [2, 56]. O cálculo desenvolvido acima apresentaria um termo dependente da carga q , para função lapso da solução de RN. Aqui, podemos logo perceber que existe uma fragilidade em nossa condição de o espaço ser assintoticamente plano.

Com efeito, pela definição anterior considerando que (M^n, g, f, ψ) é um sistema eletrovácuo assintoticamente plano temos, para $\omega = o(r^{2-n})$ e r suficientemente grande, que a função potencial é dada por

$$f = 1 - \frac{m}{r^{n-2}} + \omega.$$

Então, podemos considerar apenas os termos dominantes no infinito. Logo,

$$\nabla_g f = \frac{m(n-2)}{r^{n-1}} \nabla_g r.$$

Além disso, podemos escrever $g = \delta + \eta$, onde δ é a métrica Euclidiana e $\eta = o(r^{2-n})$. Ou ainda, para r suficientemente grande

$$g(\nabla_g f, \nu) = \langle \nabla_g f, \nu \rangle_\delta.$$

Assim,

$$g(\nabla_g f, \nu) = \langle \nabla_g f, \nu \rangle_\delta = \frac{(n-2)m}{r^{n-1}} \langle \nabla_g r, \nabla_g r \rangle_\delta = \frac{(n-2)m}{r^{n-1}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}(r)} g(\nabla_g f, \nu) dS &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}(r)} \langle \nabla_g f, \nu \rangle_\delta dS \\ &= m(n-2) \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\mathbb{S}(r)} dS = m(n-2)|\mathbb{S}^{n-1}|. \end{aligned}$$

A clássica desigualdade de Minkowski, proposta em 1903 por Minkowski [57], é uma estimativa por baixo para a curvatura média total de uma hipersuperfície convexa fechada em \mathbb{R}^3 . Isto é, se Σ é uma hipersuperfície convexa e fechada em \mathbb{R}^3 , então

$$\int_{\Sigma} H d\mu \geq \sqrt{16\pi|\Sigma|},$$

onde H e $|\Sigma|$ denotam, respectivamente, a curvatura média e a área da hipersuperfície Σ .

A desigualdade de Minkowski é exemplo de uma classe de desigualdades conhecidas como desigualdades geométricas e está relacionada com outra desigualdade bastante importante na Física: a desigualdade de Penrose [63, 38]. Essa última, no caso Riemanniano, afirma que: se (M^3, g) é uma variedade assintoticamente plana que possui curvatura escalar não-negativa, então

$$m \geq \sqrt{\frac{|A|}{16\pi}},$$

onde $|A|$ é a área do horizonte A e m a massa ADM de (M^3, g) . Além disso, a igualdade vale se, e somente se, M^3 é isométrica a solução de Schwarzschild. Gibbons [30] observou que a desigualdade de Minkowski é um caso particular para a desigualdade de Penrose. Geroch mostrou que se pode usar o fluxo da curvatura média inversa para provar a desigualdade de Penrose no caso Riemanniano e, portanto, o Teorema da Massa Positiva, desde que o fluxo permaneça suave [29, 38].

Atualmente, é grande o interesse em provar versões da desigualdade de Minkowski para variedades diferentes de \mathbb{R}^n . A abordagem utilizando fluxos geométricos, principalmente o fluxo de curvatura média inversa, tem sido eficaz para determinar essas desigualdades. Podemos citar [81], onde o autor obteve uma desigualdade de Minkowski para uma hipersuperfície *outward minimizing* em um espaço de Schwarzschild. Brendle, Hung e Wang [8] mostraram uma desigualdade *sharp* para hipersuperfícies na variedade Anti-deSitter-Schwarzschild. Mais tarde, Wang, em sua tese [80], estendeu este resultado provando uma desigualdade (*sharp*) do tipo-Minkowski para hipersuperfícies em variedades Reissner-Nordström-Anti-deSitter (AdS) de dimensão $n \geq 3$. Vale ressaltar também o trabalho de McCormick [56]. Nele o autor mostrou uma desigualdade do tipo-Minkowski válida para variedades estáticas assintoticamente planas em geral. Recentemente, Agostiniani, Fogagnolo e Mazzieri [1], baseados na Teoria do Potencial Não Linear, mostraram uma versão estendida da desigualdade de Minkowski válida para subconjuntos limitados e suaves em \mathbb{R}^n , para $n \geq 3$.

Ao longo do capítulo, considere Ω um domínio limitado com fronteira suave em (M^n, g) em uma variedade eletrostática com curvatura escalar subharmônica. Discutiremos dois casos:

- quando Ω tem apenas uma componente de fronteira $\Sigma = \partial\Omega$ e neste caso dizemos que Σ é *null-homologous*;
- quando Ω tem duas componentes de fronteira $\Sigma \cup \partial M = \partial\Omega$. Neste caso, Σ é *homologous* ao horizonte ∂M . Aqui, $\partial M = \{f = 0\} \cup E_\infty$, onde E_∞ é o fim assintótico da variedade.

O objetivo é mostrar para cada um desses casos uma desigualdade do tipo-Minkowski, usando como abordagem o fluxo de curvatura média inversa e o fluxo pela

aplicação exponencial normal a partir de uma métrica conforme.

3.1 Caso null-homologous

A prova da desigualdade de Minkowski é construída em duas partes. No primeiro momento, para uma métrica conforme $\bar{g} = g/f^2$, consideramos uma variação de Σ pelo fluxo dado pela exponencial normal, como definido na Seção 1.5.2, tal que $\Sigma = \partial\Omega$ é *null-homologous* com curvatura média positiva. Mais precisamente, considere $\Phi : \Sigma \times [0, \infty) \rightarrow \Phi(\Sigma_t) \subset \bar{\Omega}$ é a aplicação exponencial normal com respeito a métrica \bar{g} de modo que

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, t) \right|_{t=0} = -f(x)\nu(x),$$

onde

$$\Phi(x, 0) = x \quad \text{e} \quad \Phi(x, t) = \exp_x(-tf(\gamma(t))\nu).$$

Mais ainda, ν é o vetor normal de Σ com respeito a métrica g apontando para fora e $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Definimos, como nas preliminares, sobre o fluxo exponencial normal os conjuntos

$$A = \{(x, t) \in \Sigma \times [0, \infty) : u(\Phi(x, t)) = t\}$$

e

$$A_* = \{(x, t) \in \Sigma \times [0, \infty) : (x, t + \delta) \in A\},$$

onde $u(p) = \text{dist}_{\bar{g}}(p, \Sigma)$ é a função distância de $p \in \bar{\Omega}$ a Σ com respeito à métrica \bar{g} . Apesar de usarmos a métrica auxiliar \bar{g} para definir nossa variação Σ_t nossos cálculos posteriores estão na métrica induzida g .

O primeiro resultado mostra que, sob o fluxo da exponencial normal, é possível garantir que cada hipersuperfície $\Sigma_t^* = \Phi(\Sigma_t^* \cap (\Sigma \times \{t\}))$, tem curvatura média positiva, desde que a condição inicial Σ também tenha.

De agora em diante, por simplicidade, assuma que $\Sigma_t^* = \Sigma_t$. Denotamos por H a curvatura média e h a segunda forma fundamental de Σ_t com respeito a métrica g .

Lema 3.2 *Seja (M^n, g, f, ψ) uma variedade estática de Einstein-Maxwell com curvatura escalar subharmônica. Considere $\Sigma^{n-1} \subset M^n$ uma hipersuperfície com curvatura média positiva. Então, a hipersuperfície Σ_t tem curvatura média positiva para cada t e satisfaz a desigualdade diferencial*

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{fR}{H} \right) \leq \frac{-f^2 R}{(n-1)}.$$

Prova. Observe que pela evolução do fluxo exponencial

$$\frac{\partial f}{\partial t} = d(f \circ \Phi)(\partial_t) = g \left(\nabla f, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -fg(\nabla f, \nu). \quad (3-2)$$

e

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -fg(\nabla R, \nu).$$

Logo, diferenciando em t e utilizando as relações anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{fR}{H} \right) &= \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial t} (fR) - \frac{fR}{H^2} \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \frac{-fR}{H} g(\nabla f, \nu) - \frac{f^2}{H} g(\nabla R, \nu) - \frac{fR}{H^2} \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned}$$

Para as hipersuperfície Σ_t sabemos que [10, Lema 2.9]

$$\Delta^{\Sigma_t} f + \nabla^2 f(\nu, \nu) = \Delta f - H g(\nabla f, \nu).$$

Pela definição do sistema eletrovácuo, Definição 1.8, segue

$$\begin{aligned} \Delta^{\Sigma_t} f + \left[f \operatorname{Ric}(\nu, \nu) + \frac{2\nabla\psi \otimes \nabla\psi(\nu, \nu)}{f} - \frac{2|\nabla\psi|^2}{(n-1)f} g(\nu, \nu) \right] \\ = \frac{2(n-2)|\nabla\psi|^2}{(n-1)f} - H g(\nabla f, \nu) \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\Delta^{\Sigma_t} f + f \operatorname{Ric}(\nu, \nu) + \frac{2}{f} (g(\nabla\psi, \nu)^2 - |\nabla\psi|^2) = -H g(\nabla f, \nu).$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz garante que

$$\Delta^{\Sigma_t} f \geq -f \operatorname{Ric}(\nu, \nu) - H g(\nabla f, \nu). \quad (3-3)$$

Por outro lado, sabemos que curvatura média H de Σ_t satisfaz a equação de

evolução [Lema 1.11]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \Delta^{\Sigma_t} f + f(|h|^2 + \text{Ric}(\nu, \nu)).$$

Daí, de (3-3), temos

$$\Delta^{\Sigma_t} f = \frac{\partial H}{\partial t} - f(|h|^2 + \text{Ric}(\nu, \nu)) \geq -f \text{Ric}(\nu, \nu) - H g(\nabla f, \nu).$$

O que implica em

$$\frac{\partial H}{\partial t} \geq -H g(\nabla f, \nu) + f|h|^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{fR}{H} \right) &= \frac{-fR}{H} g(\nabla f, \nu) - \frac{f^2}{H} g(\nabla R, \nu) - \frac{fR}{H^2} \frac{\partial H}{\partial t} \\ &\leq -\frac{fR}{H} g(\nabla f, \nu) - \frac{f^2}{H} g(\nabla R, \nu) + \frac{fR}{H^2} [-f|h|^2 + H g(\nabla f, \nu)]. \end{aligned}$$

Como $(n-1)|h|^2 \geq H^2$ segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{fR}{H} \right) &\leq -\frac{f^2}{H} g(\nabla R, \nu) - \frac{f^2 R |h|^2}{H^2} \\ &\leq -\frac{f^2}{H} g(\nabla R, \nu) - \frac{f^2 R}{(n-1)}. \end{aligned}$$

Por hipótese temos $\Delta R \geq 0$ e $R \geq 0$, então, pelo Lema de Hopf 1.7, a derivada normal de R existe e é positiva, isto é, $\frac{\partial R}{\partial \nu} = g(\nabla R, \nu) > 0$. Então,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{fR}{H} \right) \leq \frac{-f^2 R}{(n-1)}.$$

Agora, vejamos que Σ_t tem curvatura média positiva para cada instante t . Por um cálculo similar ao feito anteriormente, utilizando novamente Lema 1.11 e (3-2), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{H}{f} \right) = \frac{1}{f} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{H}{f^2} \frac{\partial f}{\partial t} \geq \frac{1}{f} (-H g(\nabla f, \nu) + f|h|^2) - \frac{H}{f^2} (-f g(\nabla f, \nu))$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{H}{f} \right) \geq |h|^2 \geq \frac{H^2}{(n-1)},$$

para todo ponto em Σ_t . Integrando a desigualdade anterior

$$\frac{H}{f}(x, \tau) - \frac{H}{f}(x, 0) \geq \int_0^\tau \frac{H^2}{(n-1)} dt,$$

onde $x \in \Sigma$ e $\tau \in [0, \infty)$. Como a hipersuperfície inicial Σ tem curvatura média positiva e $f > 0$ em $\text{int}(M)$, concluímos que a hipersuperfície Σ_t tem curvatura média positiva. \square

O próximo resultado é uma aplicação da fórmula da co-área para a função distância u na métrica conforme $\bar{g} = g/f^2$. Utilizaremos este resultado na demonstração do Lema 3.4.

Lema 3.3 *Suponha que Ω seja um domínio limitado com bordo suave em uma variedade Riemanniana (M^n, g) tal que $\partial\Omega = \Sigma$ (null-homologous). Então,*

$$\int_{\{u \leq \tau\}} f R \, dv = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\{u=\tau\}} f^2 R \, d\mu_t \right) dt.$$

Prova. Considere $\bar{g} = g/f^2$ uma métrica conforme a g e a função distância $u = \text{dist}_{\bar{g}}(p, \Sigma)$ de p a Σ com respeito a métrica \bar{g} . Portanto,

$$|\nabla_g u|_g = \frac{|\nabla_{\bar{g}} u|_{\bar{g}}}{f} = \frac{1}{f}.$$

Utilizando a fórmula da co-área com a função distância u , obtemos

$$\int_{\{u \leq \tau\}} f R \, dv = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\{u=\tau\}} \frac{f R}{|\nabla_g u|_g} d\mu_t \right) dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\{u=\tau\}} f^2 R \, d\mu_t \right) dt.$$

\square

Para um potencial estático limitado f definimos, em cada $\Sigma_t^* = \Sigma_t$, o funcional

$$\tilde{Q}(t) := (n-1) \int_{\Sigma_t} \frac{f R}{H} d\mu_t,$$

onde R denota a curvatura escalar da hipersuperfície inicial Σ . Observe que o funcional \tilde{Q} está bem definido, uma vez que o lema anterior garante $H(\cdot, t) > 0$ para todo t . Pelas equações de evolução do fluxo, é possível estimar essa quantidade. Vejamos o lema a seguir:

Lema 3.4 *Suponha que Ω seja um domínio limitado com bordo suave em um sistema eletrovácuo (M^n, g, f, ψ) com curvatura escalar subharmônica tal que $\partial\Omega = \Sigma$ (null-homologous) tenha curvatura média positiva. Então,*

$$(n-1) \int_{\Sigma} \frac{f R}{H} d\mu \geq n \int_{\Omega} f R \, dv.$$

Prova. Pela relação de evolução do elemento de área

$$\frac{\partial}{\partial t}(d\mu_t) = -fH d\mu_t,$$

assim, ao diferenciar o funcional $\tilde{Q}(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\tilde{Q}(t) &= (n-1) \int_{\Sigma_t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{fR}{H} \right) d\mu_t + (n-1) \int_{\Sigma_t} \left(\frac{fR}{H} \right) \frac{\partial}{\partial t}(d\mu_t) \\ &= (n-1) \int_{\Sigma_t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{fR}{H} \right) d\mu_t - (n-1) \int_{\Sigma_t} f^2 R d\mu_t. \end{aligned}$$

Por outro lado, a estimativa dada no Lema 3.2 implica em

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{Q}(t) \leq (n-1) \int_{\Sigma_t} \frac{-f^2 R}{(n-1)} - (n-1) \int_{\Sigma_t} f^2 R d\mu_t = -n \int_{\Sigma_t} f^2 R d\mu_t.$$

Então, integrando de 0 a τ , com $\tau \in [0, \infty)$, a desigualdade acima temos

$$\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t}\tilde{Q}(t) dt = \tilde{Q}(\tau) - \tilde{Q}(0) \leq -n \int_0^\tau \left(\int_{\Sigma_t} f^2 R d\mu_t \right) dt,$$

ou seja,

$$\tilde{Q}(0) - \tilde{Q}(\tau) \geq n \int_0^\tau \left(\int_{\Sigma_t} f^2 R d\mu_t \right) dt.$$

Mas pelo Lema 3.3, podemos garantir que

$$\int_0^\tau \left(\int_{\Sigma_t} f^2 R d\mu_t \right) dt = \int_{\{u \leq \tau\}} fR dv,$$

portanto,

$$\tilde{Q}(0) - \tilde{Q}(\tau) \geq n \int_{\{u \leq \tau\}} fR dv.$$

Observe que como $f > 0$, $H > 0$ e $R \geq 0$, temos $\tilde{Q}(\tau) \geq 0$. Então,

$$\tilde{Q}(0) - n \int_{\{u \leq \tau\}} fR dv \geq 0,$$

ou seja,

$$\tilde{Q}(0) \geq n \int_{\{u \leq \tau\}} fR dv.$$

Por fim, tomando o limite $\tau \rightarrow \infty$

$$(n-1) \int_{\Sigma} \frac{fR}{H} d\mu \geq n \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\{u \leq \tau\}} fR dv = n \int_{\Omega} fR dv.$$

□

Passaremos, agora, para a segunda parte desta seção onde utilizamos a abordagem da solução fraca do IMCF, discutida na Seção 1.5.1. Suponha que, a partir de $\Sigma = \partial\Omega$, exista a solução fraca para o IMCF dada pelos conjuntos de nível

$$\Sigma_t = \{u(x) = t\}$$

definidos por uma função suave $u : M \rightarrow \mathbb{R}$, com gradiente não-nulo, tal que a condição inicial $\Sigma = \Sigma_0$ tenha curvatura média positiva, isto é, $H(x, 0) > 0$. Além disso, assumimos que Σ é *outward minimizing* e estrelada, portanto Σ_t tem curvatura média positiva para todo instante, ao longo do IMCF.

Para cada solução fraca do IMCF, Σ_t , definimos o funcional

$$Q(t) := |\Sigma_t|^{-\frac{n-2}{n-1}} \left(\int_{\Sigma_t} fH d\mu_t - n(n-1) \int_{\Omega_t} fR dv_t \right),$$

onde $|\Sigma_t|$ denota a área da hipersuperfície Σ_t e $\Omega_t = \{u(x) \leq t\}$. A monotonicidade e a análise do limite no infinito desse funcional foram fundamentais para obtermos a desigualdade do tipo-Minkowski. Este tipo de abordagem é comum para demonstrar desigualdades geométricas e foi usada anteriormente para fornecer as desigualdades de Minkowski em variedades Schwarzschild [81], Kottler [53], Schwarzschild-AdS [8] e espaços-tempo estáticos do vácuo assintoticamente planos em geral [56].

A seguinte proposição é fundamental para a prova da desigualdade de Minkowski. É neste resultado que conseguimos mostrar a monotonicidade do funcional Q definido anteriormente.

Proposição 3.5 *Seja Σ_t uma solução fraca para IMCF (1-18) tal que $\Sigma = \Sigma_0$ tenha curvatura média positiva em uma variedade estática de Einstein-Maxwell (M, g, f, ψ) com curvatura escalar subharmônica. Então, se Σ (outward minimizing) é a fronteira de um conjunto $\Omega \subset M$, isto é, $\Sigma = \partial\Omega$ é null-homologous, temos*

$$Q(t_2) \leq Q(t_1),$$

para $0 < t_1 < t_2 < T$.

Prova. Vimos pelo Lema 1.11 que, ao longo do IMCF, o elemento de área de Σ_t e a sua curvatura média evoluem, respectivamente, pelas equações

$$\frac{\partial d\mu_t}{\partial t} = d\mu_t$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\Delta^{\Sigma_t} \mathbf{H}^{-1} - \mathbf{H}^{-1}(|\mathbf{h}|^2 + \text{Ric}(\nu, \nu)).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_t} f \mathbf{H} d\mu_t &= \int_{\Sigma_t} \left[\frac{\partial}{\partial t} (f \mathbf{H}) d\mu_t + (f \mathbf{H}) \frac{\partial}{\partial t} (d\mu_t) \right] \\ &= \int_{\Sigma_t} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t} \mathbf{H} + f \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) d\mu_t + (f \mathbf{H}) d\mu_t \right] \\ &= \int_{\Sigma_t} \left[\mathbf{H} \frac{\partial f}{\partial t} + f \left(-\Delta^{\Sigma_t} \mathbf{H}^{-1} - \mathbf{H}^{-1}(|\mathbf{h}|^2 + \text{Ric}(\nu, \nu)) \right) + f \mathbf{H} \right] d\mu_t. \end{aligned}$$

Pela evolução do fluxo de curvatura média inversa, equação (1-18), temos que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathbf{H}^{-1} g(\nabla f, \nu).$$

Então,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_t} f \mathbf{H} d\mu_t = \int_{\Sigma_t} \left[g(\nabla f, \nu) - f \Delta^{\Sigma_t} \mathbf{H}^{-1} - f \mathbf{H}^{-1} \text{Ric}(\nu, \nu) - f \mathbf{H}^{-1} |\mathbf{h}|^2 + f \mathbf{H} \right] d\mu_t.$$

Como $(n-1)|\mathbf{h}|^2 \geq \mathbf{H}^2$ e Σ_t é fechado, segue que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_t} f \mathbf{H} d\mu_t \leq \int_{\Sigma_t} \left[g(\nabla f, \nu) - \mathbf{H}^{-1} \left(\Delta^{\Sigma_t} f + f \text{Ric}(\nu, \nu) \right) + \frac{n-2}{n-1} f \mathbf{H} \right] d\mu_t. \quad (3-4)$$

Observe que por (1-11) e (1-12) da definição do sistema eletrovácuo, temos

$$\nabla^2 f(\nu, \nu) = f \text{Ric}(\nu, \nu) + \frac{2}{f} \left(g(\nabla \psi, \nu)^2 - \frac{|\nabla \psi|^2}{n-1} \right)$$

e

$$\Delta f = \frac{2}{f} \left(\frac{n-2}{n-1} \right) |\nabla \psi|.$$

Combinando tais relações com $\Delta^{\Sigma_t} f + \nabla^2 f(\nu, \nu) = \Delta f - \mathbf{H} g(\nabla f, \nu)$ segue

$$\Delta^{\Sigma_t} f + f \text{Ric}(\nu, \nu) = \frac{-2}{f} \left(g(\nabla \psi, \nu)^2 - |\nabla \psi|^2 \right) - \mathbf{H} g(\nabla f, \nu).$$

Portanto, de (3-4) e da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_t} f \mathbf{H} d\mu_t &\leq \int_{\Sigma_t} \left[2g(\nabla f, \nu) + \frac{n-2}{n-1} f \mathbf{H} + \frac{2}{f \mathbf{H}} \left(g(\nabla \psi, \nu)^2 - |\nabla \psi|^2 \right) \right] d\mu_t \\ &\leq 2 \int_{\Sigma_t} g(\nabla f, \nu) d\mu_t + \frac{n-2}{n-1} \int_{\Sigma_t} f \mathbf{H} d\mu_t, \end{aligned}$$

já que pela desigualdade de Cauchy-Schwarz vale que $g(\nabla\psi, \nu)^2 - |\nabla\psi|^2 \leq 0$.

Como $\Sigma_t = \partial\Omega_t$ é null-homologous, pelo Teorema 1.5 vemos que

$$\int_{\Sigma_t} g(\nabla f, \nu) d\mu_t = \int_{\Omega_t} \Delta f dv_t.$$

Mas pelas relações (1-11) e (1-13) da definição do sistema eletrovácuo, escrevemos

$$\Delta f = \frac{n-2}{n-1} fR.$$

Logo,

$$\int_{\Sigma_t} g(\nabla f, \nu) d\mu_t = \frac{n-2}{n-1} \int_{\Omega_t} fR dv_t.$$

Donde conclui-se que,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_t} fH d\mu_t \leq \frac{2(n-2)}{n-1} \int_{\Omega_t} fR dv_t + \frac{n-2}{n-1} \int_{\Sigma_t} fH d\mu_t.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Sigma_t} fH d\mu_t - n(n-1) \int_{\Omega_t} fR dv_t \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Sigma_t} fH d\mu_t \right) - n(n-1) \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega_t} fR dv_t \right) \\ &\leq \frac{n-2}{n-1} \int_{\Sigma_t} fH d\mu_t + \frac{2(n-2)}{(n-1)} \int_{\Omega_t} fR dv_t - n(n-1) \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega_t} fR dv_t \right). \end{aligned}$$

Mas pela Proposição 1.12, e neste ponto vemos a necessidade da existência de uma solução fraca para o fluxo, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega_t} fR dv_t \right) = \int_{\Sigma_t} \frac{fR}{H} d\mu_t.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Sigma_t} fH d\mu_t - n(n-1) \int_{\Omega_t} fR dv_t \right) \\ \leq \frac{n-2}{n-1} \int_{\Sigma_t} fH d\mu_t + \frac{2(n-2)}{(n-1)} \int_{\Omega_t} fR dv_t - n(n-1) \int_{\Sigma_t} \frac{fR}{H} d\mu_t. \end{aligned}$$

Por hipótese, temos que Σ_t tem curvatura média positiva, desta forma podemos, pelo Lema 3.4, concluir que

$$n \int_{\Omega_t} fR dv_t \leq (n-1) \int_{\Sigma_t} \frac{fR}{H} d\mu_t.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Sigma_t} fH d\mu_t - n(n-1) \int_{\Omega_t} fR dv_t \right) \\
& \leq \frac{n-2}{n-1} \int_{\Sigma_t} fH d\mu_t + \frac{2(n-2)}{(n-1)} \int_{\Omega_t} fR dv_t - n \left[n \int_{\Omega_t} fR dv_t \right] \\
& = \frac{n-2}{n-1} \int_{\Sigma_t} fH d\mu_t + \left[\frac{2(n-2)}{n-1} - n^2 \right] \int_{\Omega_t} fR dv_t \\
& = \frac{n-2}{n-1} \left[\int_{\Sigma_t} fH d\mu_t + \left(2 - \frac{n^2(n-1)}{n-2} \right) \int_{\Omega_t} fR dv_t \right].
\end{aligned}$$

Note que, para $n \geq 3$,

$$\left[2 - \frac{n^2(n-1)}{(n-2)} \right] < -n(n-1).$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Sigma_t} fH d\mu_t - n(n-1) \int_{\Omega_t} fR dv_t \right) \leq \frac{n-2}{n-1} \left(\int_{\Sigma_t} fH d\mu_t - n(n-1) \int_{\Omega_t} fR dv_t \right).$$

Definindo

$$P(t) = \int_{\Sigma_t} fH d\mu_t - n(n-1) \int_{\Omega_t} fR dv_t,$$

podemos concluir que

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t) \leq \left(\frac{n-2}{n-1} \right) P(t).$$

Integrando a desigualdade para $0 \leq t_1 \leq t_2$ obtemos

$$P(t_2) \leq P(t_1) e^{\frac{n-2}{n-1}(t_2-t_1)}. \tag{3-5}$$

Como a condição inicial Σ é *outward minimizing*, vale $|\Sigma_t| = e^t |\Sigma|$, para todo t . Assim, um simples cálculo nos mostra que

$$|\Sigma_{t_2}| = e^{t_2-t_1} |\Sigma_{t_1}|.$$

Combinando este fato com (3-5) temos

$$P(t_2) \leq P(t_1) \left(\frac{|\Sigma_{t_2}|}{|\Sigma_{t_1}|} \right)^{\frac{n-2}{n-1}},$$

ou ainda,

$$|\Sigma_{t_2}|^{-\frac{n-2}{n-1}} P(t_2) \leq |\Sigma_{t_1}|^{-\frac{n-2}{n-1}} P(t_1).$$

Portanto,

$$Q(t_2) \leq Q(t_1).$$

□

Nas mesmas condições da proposição anterior, podemos assumir que para uma variedade assintoticamente plana o seguinte lema é verdadeiro. Sua demonstração pode ser encontrada em [81, Proposição 5.1]. Este fato também foi observado por McCormick em [56, página 9] onde ele mostrou que tal resultado por ser estendido para uma variedade estática em geral, e não só para variedades de Schwarzschild como em [81].

Lema 3.6 *Seja Σ_t uma solução fraca para IMCF a partir de Σ uma hipersuperfície em uma variedade eletrostática (M^n, g, f, ψ) assintoticamente plana. Então,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Sigma_t|^{-\frac{n-2}{n-1}} \left(\int_{\Sigma_t} f H d\mu_t \right) = (n-1) |\mathbb{S}^{n-1}|^{1/(n-1)},$$

onde $|\mathbb{S}^{n-1}|$ denota a área da esfera unitária $(n-1)$ -dimensional.

Com posse desse resultado, estamos prontos para provar que o funcional $Q(t)$ é limitado por baixo. Ressaltamos que neste resultado a limitação na dimensão da variedade eletrostática é fundamental. Como observamos na Seção 1.5.1, se Σ é *outward minimizing*, o fluxo iniciando em Σ existe e vai para o infinito graças ao "saltos" da solução fraca. Logo, é possível tomar o limite quando $t \rightarrow \infty$.

Lema 3.7 *Seja Σ_t uma solução fraca para IMCF tal que $\Sigma_0 = \Sigma$ (outward minimizing) é uma hipersuperfície com curvatura média positiva em M^n uma variedade estática de Einstein-Maxwell assintoticamente plana com curvatura escalar subharmônica, onde $3 \leq n \leq 7$. Então, temos*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) \geq (n-1) |\mathbb{S}^{n-1}|^{1/(n-1)}.$$

Prova. Dado as condições assintóticas, podemos inferir que, no infinito, temos $|\Sigma_t| = |\mathbb{S}^{n-1}| r(t)^{n-1}$. Aqui, $r(t) \rightarrow \infty$ para $t \rightarrow \infty$. Tomando o limite de $Q(t)$ no infinito, vemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} |\Sigma_t|^{-\frac{n-2}{n-1}} \left(\int_{\Sigma_t} f H d\mu_t \right) - n(n-1) \lim_{t \rightarrow \infty} |\Sigma_t|^{-\frac{n-2}{n-1}} \left(\int_{\Omega_t} f R dv_t \right).$$

Como o Lema 3.6 garante que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Sigma_t|^{-\frac{n-2}{n-1}} \left(\int_{\Sigma_t} f H d\mu_t \right) = (n-1) |\mathbb{S}^{n-1}|^{1/(n-1)},$$

então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = (n-1) |\mathbb{S}^{n-1}|^{1/(n-1)} - n(n-1) \lim_{t \rightarrow \infty} |\Sigma_t|^{-\frac{n-2}{n-1}} \left(\int_{\Omega_t} f R dv_t \right).$$

Das relações (1-11) e (1-13) da definição do sistema eletrovácuo, temos

$$\Delta f = \frac{n-2}{n-1} f R.$$

Utilizando o Teorema 1.5 e o fato anterior obtemos:

$$\int_{\Sigma_t} g(\nabla f, \nu) d\mu_t = \int_{\Omega_t} \Delta f dv_t = \frac{n-2}{n-1} \int_{\Omega_t} f R dv_t.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz segue

$$\int_{\Sigma_t} |\nabla f| d\mu_t \geq \int_{\Sigma_t} g(\nabla f, \nu) d\mu_t = \frac{n-2}{n-1} \int_{\Omega_t} f R dv_t.$$

Assim, de (3.1) e da desigualdade acima concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) \geq (n-1) (|\mathbb{S}^{n-1}|)^{1/(n-1)} - \frac{n(n-1)^2}{n-2} \lim_{t \rightarrow \infty} |\Sigma_t|^{-\frac{n-2}{n-1}} \int_{\Sigma_t} |\nabla f| d\mu_t.$$

Mas a condição assintótica de f , dada na Definição 3.1, implica que no infinito

$$|\nabla f| = (n-2) \frac{m}{r^{n-1}}; \quad (r \rightarrow \infty).$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) \geq (n-1) (|\mathbb{S}^{n-1}|)^{1/(n-1)} - nm(n-1)^2 \lim_{t \rightarrow \infty} (|\Sigma_t|)^{-\frac{n-2}{n-1}} \int_{\Sigma_t} \frac{1}{r^{n-1}} d\mu_t.$$

Como $|\Sigma_t| = |\mathbb{S}^{n-1}| r(t)^{n-1}$, concluímos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) &\geq (n-1) (|\mathbb{S}^{n-1}|)^{1/(n-1)} \\ &- nm(n-1)^2 (|\mathbb{S}^{n-1}|)^{-\frac{n-2}{n-1}} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[r(t)^{-(n-2)} \int_{\Sigma_t} r(t)^{-(n-1)} d\mu_t \right] \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) \geq (n-1)(|\mathbb{S}^{n-1}|)^{1/(n-1)} - nm(n-1)^2(|\mathbb{S}^{n-1}|)^{1/(n-1)} \lim_{t \rightarrow \infty} r(t)^{-(n-2)}.$$

Portanto, assumindo que $r \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) \geq (n-1)(|\mathbb{S}^{n-1}|)^{1/(n-1)}.$$

□

O teorema a seguir é o resultado principal desta seção. Mostramos uma desigualdade do tipo-Minkowski para uma variedade estática de Einstein-Maxwell assintoticamente plana cuja curvatura escalar é subharmônica. Sua demonstração segue como consequência direta da monotonicidade e do comportamento limitado do funcional $Q(t)$ ao longo do IMCF.

Teorema 3.8 *Considere (M^n, g, f, ψ) , $3 \leq n \leq 7$, uma variedade estática de Einstein-Maxwell assintoticamente plana com curvatura escalar subharmônica. Seja $\Omega \subset M$ uma região limitada pela hipersuperfície Σ , null-homologous e outward minimizing, com curvatura média H positiva. Então, temos*

$$\int_{\Sigma} fH dS - n(n-1) \int_{\Omega} fR dv \geq (n-1)(|\mathbb{S}^{n-1}|)^{\frac{1}{(n-1)}} |\Sigma|^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

Prova. Na Proposição 3.5 mostramos que o funcional $Q(t)$ é monótono decrescente. Assim, utilizando este fato e a limitação dada no Lema 3.7, obtemos

$$Q(0) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) \geq (n-1)(|\mathbb{S}^{n-1}|)^{1/(n-1)}.$$

Portanto,

$$|\Sigma|^{-\frac{n-2}{n-1}} \int_{\Sigma} fH dS - n(n-1) \int_{\Omega} fR dv \geq (n-1)(|\mathbb{S}^{n-1}|)^{\frac{1}{(n-1)}}.$$

□

3.2 Caso homologous

Nesta seção vamos considerar que $\Sigma \subset M$ é uma hipersuperfície em uma variedade eletrovácuo M tal que $\Sigma \cup \partial M = \partial \Omega$, isto é, Σ é homologous ao horizonte

$\partial M = \{f = 0\} \cup E_\infty$, onde E_∞ representa o fim assintótico. O objetivo é mostrar que também obtemos uma desigualdade do tipo-Minkowski para este caso.

A partir da métrica conforme $\bar{g} = g/f^2$, de modo análogo ao que fizemos para o caso *null-homologous*, para cada ponto $x \in \Sigma$, como discutido na Seção 1.5.2, considere a evolução de Φ dada por

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, t) \right|_{t=0} = -f(x)\nu(x),$$

onde

$$\Phi(x, 0) = x \quad \text{e} \quad \Phi(x, t) = \exp_x(-tf(\gamma(t))\nu).$$

Mais ainda, ν é a unidade normal apontando para fora de Σ_t com respeito a métrica g . Admita que a hipersuperfície Σ tenha curvatura média positiva em relação a essa escolha da unidade normal. Considere também os conjuntos definidos a partir da função distância $u = \text{dist}_{\bar{g}}(p, \Sigma)$ $p \in \bar{\Omega}$ a Σ com respeito a \bar{g} . A saber,

$$A = \{(x, t) \in \Sigma \times [0, \infty) : u(\Phi(x, t)) = t\}$$

e

$$A_* = \{(x, t) \in \Sigma \times [0, \infty) : (x, t + \delta) \in A\}.$$

Vimos que para cada $t \in [0, \infty)$, a hipersuperfície $\Sigma_t^* = \Phi(\Sigma_t^* \cap (\Sigma \times \{t\}))$ é suave e está contida no conjunto de nível $\{u = t\}$. O primeiro resultado para o caso *homologous* ao horizonte ∂M , apresentado abaixo, é análogo ao Lema 3.2. Podemos observar que na demonstração apresentada na seção anterior nada mudará. Pois o resultado é válido para uma hipersuperfície de M com curvatura média positiva em geral.

Para fixar a notação, denotaremos por H a curvatura média e h a segunda forma fundamental de Σ_t^* com respeito a métrica g .

Lema 3.9 *Seja (M^n, g, f, ψ) uma variedade estática de Einstein-Maxwell com curvatura escalar subharmônica. Considere $\Sigma^{n-1} \subset M^n$ uma hipersuperfície curvatura média positiva. Então, a hipersuperfície Σ_t^* tem curvatura média positiva para cada t e satisfaz a desigualdade diferencial*

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{fR}{H} \right) \leq \frac{-f^2 R}{(n-1)}.$$

Defina, como na seção anterior, para cada potencial estático limitado f , o funci-

onal

$$\tilde{Q}(t) := (n-1) \int_{\Sigma_t^*} \frac{fR}{H} d\mu_t,$$

onde R denota a curvatura escalar da hipersuperfície inicial Σ . O próximo lema mostra, assim como fizemos na seção anterior, que é possível estimar essa quantidade quando a hipersuperfície Σ (*homologous*) evolui ao longo do fluxo exponencial normal.

Lema 3.10 *Seja Ω um domínio limitado com bordo suave em (M^n, g, f, ψ) um sistema eletrovácuo com curvatura escalar subharmônica tal que $\partial\Omega = \Sigma \cup \partial M$. Se Σ (*homologous a fronteira ∂M*) tem curvatura média positiva, então*

$$(n-1) \int_{\Sigma} \frac{fR}{H} d\mu \geq n \int_{\Omega} fR dv.$$

Prova. Por simplicidade, denote $\Sigma_t^* = \Sigma_t$. Sabemos, pelo Lema 1.11, que $\frac{\partial}{\partial t}(d\mu_t) = -fH d\mu_t$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{Q}(t) &= (n-1) \int_{\Sigma_t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{fR}{H} \right) d\mu_t + (n-1) \int_{\Sigma_t} \left(\frac{fR}{H} \right) \frac{\partial}{\partial t} (d\mu_t) \\ &= (n-1) \int_{\Sigma_t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{fR}{H} \right) d\mu_t - (n-1) \int_{\Sigma_t} f^2 R d\mu_t. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{Q}(t) = (n-1) \int_{\Sigma_t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{fR}{H} \right) d\mu_t - (n-1) \int_{\Sigma_t} f^2 R d\mu_t.$$

Utilizando o Lema 3.9, analogamente ao que observamos na demonstração do Lema 3.4, temos que o funcional \tilde{Q} satisfaz a desigualdade diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{Q}(t) \leq -n \int_{\Sigma_t} f^2 R d\mu_t.$$

Assim, integrando a desigualdade acima de 0 a τ , com $\tau \in [0, \infty)$, temos

$$\tilde{Q}(\tau) - \tilde{Q}(0) \leq -n \int_0^\tau \left(\int_{\Sigma_t} f^2 R d\mu_t \right) dt.$$

Por outro lado, pela aplicação da fórmula da co-área dada no Lema 3.3, temos

$$\int_{\{u \leq \tau\}} fR dv_\tau = \int_0^\tau \left(\int_{\Sigma_t} f^2 R d\mu_t \right) dt,$$

logo

$$\tilde{Q}(0) - \tilde{Q}(\tau) \geq n \int_{\{u \leq \tau\}} fR \, dv_\tau.$$

O que implica em

$$\tilde{Q}(0) \geq n \int_{\{u \leq \tau\}} fR \, dv_\tau,$$

uma vez que temos $\tilde{Q}(\tau) \geq 0$, por definição. Portanto,

$$(n-1) \int_{\Sigma} \frac{fR}{H} \, d\mu \geq n \int_{\{u \leq \tau\}} fR \, dv_\tau.$$

Finalmente, tomando o limite com $\tau \rightarrow \infty$,

$$(n-1) \int_{\Sigma} \frac{fR}{H} \, d\mu \geq n \int_{\Omega} fR \, dv.$$

□

Porém, vamos considerar no que se segue apenas um funcional restrito a Σ . E então, concluir a desigualdade de Minkowski relativamente a curvatura média H de Σ . Veja o funcional $Q(t)$ definido a seguir. Mais ainda, os próximos resultados seguirão do fluxo de curvatura média inversa. Considere que, a partir de Σ *homologous* ao horizonte ∂M , exista uma solução fraca para IMCF dada pelos conjuntos de nível

$$\Sigma_t = \{u(x) = t\},$$

onde $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave com gradiente não-nulo e $\Sigma = \Sigma_0$ tenha curvatura média positiva. Além disso, assumimos que Σ é *outward minimizing* e estrelada, portanto Σ_t obtemos curvatura média positiva para todo instante, ao longo do IMCF.

Para cada solução fraca Σ_t do IMCF, definimos o funcional

$$Q(t) := |\Sigma_t|^{-\frac{n-2}{n-1}} \left(2m(n-1)|\mathbb{S}^{n-1}| + \int_{\Sigma_t} fH \, d\mu_t - n(n-1) \int_{\Omega_t} fR \, dv_t \right).$$

onde $|\Sigma_t|$ denota a área de Σ_t e $\Omega_t = \{u(x) \leq t\}$. A definição desse funcional é baseada em [81, Teorema 3.2], onde o autor mostrou a monotonicidade de uma quantidade semelhante quando Σ_t é solução suave para o IMCF em um espaço de Schwarzschild.

Na proposição a seguir obtemos a monotonicidade de Q . A demonstração é similar com o caso *null-homologous*. Porém, vamos repetir todos os cálculos para conveniência do texto.

Proposição 3.11 *Seja Σ_t uma solução fraca para IMCF tal que $\Sigma = \Sigma_0$ tenha curvatura média positiva em uma variedade estática de Einstein-Maxwell (M, g, f, ψ) com curvatura escalar subharmônica. Se Σ (outward minimizing) é homologous ao horizonte ∂M , isto é, $\partial\Omega = \Sigma \cup \partial M$, onde $\Omega \subset M$ é um domínio limitado de M , então*

$$Q(t_2) \leq Q(t_1),$$

para $0 < t_1 < t_2 < T$.

Prova. Pelo Lema 1.11 temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_t} fH d\mu_t &= \int_{\Sigma_t} \left[\frac{\partial}{\partial t} (fH) d\mu_t + (fH) \frac{\partial}{\partial t} (d\mu_t) \right] \\ &= \int_{\Sigma_t} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t} H + f \frac{\partial H}{\partial t} \right) d\mu_t + (fH) d\mu_t \right] \\ &= \int_{\Sigma_t} \left[H \frac{\partial f}{\partial t} + f \left(-\Delta^{\Sigma_t} H^{-1} - H^{-1} (|h|^2 + \text{Ric}(\nu, \nu)) \right) + fH \right] d\mu_t. \end{aligned}$$

Pela evolução do fluxo de curvatura média inversa, equação (1-18), temos que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = H^{-1} g(\nabla f, \nu).$$

Então,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_t} fH d\mu_t = \int_{\Sigma_t} \left[g(\nabla f, \nu) - f\Delta^{\Sigma_t} H^{-1} - fH^{-1} \text{Ric}(\nu, \nu) - fH^{-1} |h|^2 + fH \right] d\mu_t.$$

Como $(n-1)|h|^2 \geq H^2$ e Σ_t é fechado, segue que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_t} fH d\mu_t \leq \int_{\Sigma_t} \left[g(\nabla f, \nu) - H^{-1} \left(\Delta^{\Sigma_t} f + f \text{Ric}(\nu, \nu) \right) + \frac{n-2}{n-1} fH \right] d\mu_t. \quad (3-6)$$

Observe que por (1-11) e (1-12) da definição do sistema eletrovácuo temos

$$\nabla^2 f(\nu, \nu) = f \text{Ric}(\nu, \nu) + \frac{2}{f} \left(g(\nabla \psi, \nu)^2 - \frac{|\nabla \psi|^2}{n-1} \right)$$

e

$$\Delta f = \frac{2}{f} \left(\frac{n-2}{n-1} \right) |\nabla \psi|.$$

Combinando tais relações com $\Delta^{\Sigma_t} f + \nabla^2 f(\nu, \nu) = \Delta f - H g(\nabla f, \nu)$, segue

$$\Delta^{\Sigma_t} f + f \text{Ric}(\nu, \nu) = \frac{-2}{f} \left(g(\nabla \psi, \nu)^2 - |\nabla \psi|^2 \right) - H g(\nabla f, \nu). \quad (3-7)$$

Portanto, de (3-6) e da igualdade acima (3-7), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_t} f H d\mu_t &\leq \int_{\Sigma_t} \left[2g(\nabla f, \nu) + \frac{n-2}{n-1} f H + \frac{2}{f H} (g(\nabla \psi, \nu)^2 - |\nabla \psi|^2) \right] d\mu_t \\ &\leq 2 \int_{\Sigma_t} g(\nabla f, \nu) d\mu_t + \frac{n-2}{n-1} \int_{\Sigma_t} f H d\mu_t, \end{aligned}$$

já que pela desigualdade de Cauchy-Schwarz vale que $g(\nabla \psi, \nu)^2 - |\nabla \psi|^2 \leq 0$.

Pelo Teorema 1.5 vemos que

$$\int_{\partial \Omega_t} g(\nabla f, \nu) d\mu_t = \int_{\Omega_t} \Delta f dv_t.$$

Mas pelas relações (1-11) e (1-13) da definição do sistema eletrovácuo, escrevemos

$$\Delta f = \frac{n-2}{n-1} f R.$$

Logo,

$$\int_{\partial \Omega_t} g(\nabla f, \nu) d\mu_t = \frac{n-2}{n-1} \int_{\Omega_t} f R dv_t.$$

Por outro lado, como Σ é homologous

$$\int_{\Sigma_t} g(\nabla f, \nu) d\mu_t = \frac{n-2}{n-1} \int_{\Omega_t} f R dv_t - \int_{\partial M} g(\nabla f, \nu) d\mu.$$

Agora, teremos cuidado com os sinais dos vetores normais. Vamos considerar o vetor normal à $\{f=0\}$ apontando para “dentro” e o vetor normal do fim assintótico da variedade apontando para “fora”. Em resumo, pela identidade (3-1) temos

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} g(\nabla f, \nu) d\mu &= \int_{\{f=0\}} g(\nabla f, \nu) d\mu - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}(r)} g(\nabla f, \nu) dS \\ &= \int_{\{f=0\}} g(\nabla f, \nu) d\mu - m(n-2) |\mathbb{S}^{n-1}|. \end{aligned}$$

Donde conclui-se que,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t} g(\nabla f, \nu) d\mu &= m(n-2) |\mathbb{S}^{n-1}| - \int_{\{f=0\}} g(\nabla f, \nu) d\mu + \frac{n-2}{n-1} \int_{\Omega_t} f R dv_t \\ &\leq m(n-2) |\mathbb{S}^{n-1}| + \frac{n-2}{n-1} \int_{\Omega_t} f R dv_t, \end{aligned} \quad (3-8)$$

onde na última desigualdade o lema de Hopf foi aplicado. Essa última desigualdade é a principal diferença que encontraremos entre a prova do caso *null-homologous* e o caso

homologous, que estamos discutindo. Desta forma, como no caso null-homologous, temos

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Sigma_t} fH d\mu_t - n(n-1) \int_{\Omega_t} fR dv_t \right) \leq \int_{\Sigma_t} \left[2g(\nabla f, \nu) + \frac{n-2}{n-1} fH \right] d\mu_t \\
& - n(n-1) \int_{\Sigma_t} \frac{fR}{H} d\mu_t \\
& \leq \frac{n-2}{n-1} \int_{\Sigma_t} fH d\mu_t + 2 \frac{(n-2)}{(n-1)} \int_{\Omega_t} fR dv_t + 2m(n-2)|\mathbb{S}^{n-1}| - n(n-1) \int_{\Sigma_t} \frac{fR}{H} d\mu_t \\
& \leq \frac{n-2}{n-1} \int_{\Sigma_t} fH d\mu_t + \left[\frac{2(n-2)}{(n-1)} - n^2 \right] \int_{\Omega_t} fR dv_t + 2m(n-2)|\mathbb{S}^{n-1}| \\
& = \frac{n-2}{n-1} \left(\int_{\Sigma_t} fH d\mu_t + \left[2 - \frac{n^2(n-1)}{(n-2)} \right] \int_{\Omega_t} fR dv_t \right) + 2m(n-2)|\mathbb{S}^{n-1}| \\
& \leq \frac{n-2}{n-1} \left(\int_{\Sigma_t} fH d\mu_t - n(n-1) \int_{\Omega_t} fR dv_t + 2m(n-1)|\mathbb{S}^{n-1}| \right).
\end{aligned}$$

Para o cálculo acima, sugerimos ao leitor ver os detalhes do *caso null-homologous*.

Definindo

$$P(t) = \frac{n-2}{n-1} \left(\int_{\Sigma_t} fH d\mu_t - n(n-1) \int_{\Omega_t} fR dv_t + 2m(n-1)|\mathbb{S}^{n-1}| \right),$$

podemos concluir que

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t) \leq \left(\frac{n-2}{n-1} \right) P(t).$$

Integrando a desigualdade para $0 \leq t_1 \leq t_2$ obtemos

$$P(t_2) \leq P(t_1) e^{\frac{n-2}{n-1}(t_2-t_1)}.$$

Como a condição inicial Σ é *outward minimizing* vale $|\Sigma_t| = e^t |\Sigma|$, para todo t . Assim, um simples cálculo nos mostra que

$$|\Sigma_{t_2}| = e^{t_2-t_1} |\Sigma_{t_1}|.$$

Combinando este fato com (3-5) temos

$$P(t_2) \leq P(t_1) \left(\frac{|\Sigma_{t_2}|}{|\Sigma_{t_1}|} \right)^{\frac{n-2}{n-1}},$$

ou ainda,

$$|\Sigma_{t_2}|^{-\frac{n-2}{n-1}} P(t_2) \leq |\Sigma_{t_1}|^{-\frac{n-2}{n-1}} P(t_1).$$

Portanto,

$$Q(t_2) \leq Q(t_1).$$

□

Antes de anunciarmos a desigualdade de Minkowski, vejamos que para o caso em que Σ é *homologous* ao horizonte ∂M o funcional $Q(t)$ tem um comportamento limitado no infinito ao longo do fluxo de curvatura média inversa. A limitação da dimensão juntamente com o fato de que Σ é *outward minimizing*, nos garante que o fluxo vai para o infinito graças aos "saltos", portanto é possível tomarmos o limite quando $t \rightarrow \infty$.

Lema 3.12 *Seja Ω um domínio limitado de um espaço eletrovácuo (M^n, g, f, ψ) , $3 \leq n \leq 7$, assintoticamente plano com curvatura escalar subharmônica. Suponha que a fronteira $\partial\Omega = \Sigma \cup \partial M$ e Σ é *outward minimizing* com curvatura média positiva. Seja Σ_t uma solução fraca para o IMCF com condição inicial Σ . Então,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) \geq (n-1)(|\mathbb{S}^{n-1}|)^{1/(n-1)},$$

onde $|\mathbb{S}^{n-1}|$ denota a área da esfera unitária $(n-1)$ -dimensional.

Prova. De maneira análoga ao que fizemos no caso *null-homologous*, pelas condições assintóticas dadas, no infinito, considere que $|\Sigma_t| = |\mathbb{S}^{n-1}|r(t)^{n-1}$, onde $r \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Tomando o limite de $Q(t)$ no infinito, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) &= 2m(n-1)|\mathbb{S}^{n-1}| \lim_{t \rightarrow \infty} |\Sigma_t|^{-\frac{n-2}{n-1}} + \lim_{t \rightarrow \infty} |\Sigma_t|^{-\frac{n-2}{n-1}} \int_{\Sigma_t} fH d\mu_t \\ &\quad - n(n-1) \lim_{t \rightarrow \infty} |\Sigma_t|^{-\frac{n-2}{n-1}} \int_{\Omega_t} fR dv_t. \end{aligned} \quad (3-9)$$

Como o Lema 3.6 garante que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Sigma_t|^{-\frac{n-2}{n-1}} \left(\int_{\Sigma_t} fH d\mu_t \right) = (n-1)|\mathbb{S}^{n-1}|^{1/(n-1)}$$

e $|\Sigma_t| = |\mathbb{S}^{n-1}|r(t)^{n-1}$, da expressão (3-9), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) &= 2m(n-1) \lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbb{S}^{n-1}|^{\frac{1}{n-1}} r(t)^{-(n-2)} + (n-1)|\mathbb{S}^{n-1}|^{1/(n-1)} \\ &\quad - n(n-1) \lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbb{S}^{n-1}|^{-\frac{n-2}{n-1}} r(t)^{-(n-2)} \int_{\Omega_t} fR dv_t. \end{aligned}$$

Mais ainda, como $r \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$, segue

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = (n-1)|\mathbb{S}^{n-1}|^{1/(n-1)} - n(n-1) \lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbb{S}^{n-1}|^{-\frac{n-2}{n-1}} r(t)^{-(n-2)} \int_{\Omega_t} f \mathbf{R} d\nu_t. \quad (3-10)$$

Pela Proposição 3.11, equação (3-8), temos que

$$\int_{\Omega_t} f \mathbf{R} d\nu_t = \frac{n-1}{n-2} \int_{\Sigma_t} g(\nabla f, \nu) d\mu_t - m(n-1)|\mathbb{S}^{n-1}| + \int_{\{f=0\}} g(\nabla f, \nu) d\mu.$$

Pela desigualdade de Cauchy, segue que

$$\int_{\Omega_t} f \mathbf{R} d\nu_t \leq \frac{n-1}{n-2} \int_{\Sigma_t} |\nabla f| d\mu_t - m(n-1)|\mathbb{S}^{n-1}| + \int_{\{f=0\}} |\nabla f| d\mu.$$

Usando a condição de não degeneração, ou seja, $\kappa = |\nabla f|$ é constante não nula em $\{f=0\}$ [41, Proposição 18], reescrevemos a desigualdade acima como

$$\int_{\Omega_t} f \mathbf{R} d\nu_t \leq \frac{n-1}{n-2} \int_{\Sigma_t} |\nabla f| d\mu_t - m(n-1)|\mathbb{S}^{n-1}| + \kappa \Gamma,$$

onde Γ denota a área de $\{f=0\}$. Logo, por (3-10), temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) &\geq (n-1)|\mathbb{S}^{n-1}|^{1/(n-1)} - \frac{n(n-1)^2}{n-2} |\mathbb{S}^{n-1}|^{\frac{-(n-2)}{(n-1)}} \lim_{t \rightarrow \infty} r(t)^{-(n-2)} \int_{\Sigma_t} |\nabla f| d\mu_t \\ &\quad + mn(n-1)^2 |\mathbb{S}^{n-1}|^{\frac{1}{(n-1)}} \lim_{t \rightarrow \infty} r(t)^{-(n-2)} - \frac{n(n-1)^2 \kappa \Gamma}{n-2} |\mathbb{S}^{n-1}|^{\frac{-(n-2)}{(n-1)}} \lim_{t \rightarrow \infty} r(t)^{-(n-2)}. \end{aligned}$$

A condição assintótica de f , dada na Definição 3.1, implica que, no infinito,

$$|\nabla f| = (n-2) \frac{m}{r^{n-1}}; \quad (r \rightarrow \infty).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) &\geq (n-1)|\mathbb{S}^{n-1}|^{1/(n-1)} - nm(n-1)^2 |\mathbb{S}^{n-1}|^{\frac{1}{(n-1)}} \lim_{t \rightarrow \infty} r(t)^{-(n-2)} \\ &\quad + mn(n-1)^2 |\mathbb{S}^{n-1}|^{\frac{1}{(n-1)}} \lim_{t \rightarrow \infty} r(t)^{-(n-2)} - \frac{n(n-1)^2 \kappa \Gamma}{n-2} |\mathbb{S}^{n-1}|^{\frac{-(n-2)}{(n-1)}} \lim_{t \rightarrow \infty} r(t)^{-(n-2)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) \geq (n-1)|\mathbb{S}^{n-1}|^{1/(n-1)}.$$

□

A desigualdade de Minkowski quando a hipersuperfície Σ é *homologous*

(*outward minimizing*) ao horizonte ∂M do espaço eletrovácuo assintoticamente plano com curvatura escalar subharmônica é dada no teorema abaixo.

Teorema 3.13 *Considere (M^n, g, f, ψ) , $3 \leq n \leq 7$, um espaço eletrovácuo assintoticamente plana com curvatura escalar é subharmônica. Seja $\Omega \subseteq M$ um domínio limitado com bordo suave tal que $\partial\Omega = \Sigma \cup \partial M$. Se Σ é outward minimizing com curvatura média H positiva. Então, temos*

$$\int_{\Sigma} f H dS - n(n-1) \int_{\Omega} f R dv \geq (n-1) |\mathbb{S}^{n-1}|^{\frac{1}{(n-1)}} |\Sigma|^{\frac{n-2}{n-1}} - 2m(n-1) |\mathbb{S}^{n-1}|.$$

Prova. A demonstração segue imediatamente, como no caso *null-homologous*, da monotonicidade do funcional $Q(t)$, dada pela Proposição 3.11, e de seu comportamento limitado no infinito mostrado no Lema 3.12. \square

Observação 5 *O Teorema 3.13 é uma generalização natural da desigualdade de Minkowski para hipersuperfícies convexa Σ em \mathbb{R}^n , que afirma que*

$$\int_{\Sigma} H dS \geq (n-1) |\mathbb{S}^{n-1}|^{\frac{1}{(n-1)}} |\Sigma|^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

Observação 6 *Note que se considerarmos $H = 0$ no Teorema 3.13 para variedade eletrovácuo tridimensional, temos*

$$-6 \int_{\Omega} f R dv \geq 2(4\pi |\Sigma|)^{\frac{1}{2}} - 16m\pi.$$

Ou ainda,

$$m \geq \sqrt{\frac{|\Sigma|}{16\pi}} + \frac{3}{8\pi} \int_{\Omega} f R dv.$$

Então, se $R = 0$ obtemos a desigualdade de Penrose.

Inspirados em [22, Teorema 1.1], fornecemos uma desigualdade do tipo Penrose para o espaço eletrovácuo tridimensional assintoticamente plano com curvatura escalar subharmônica (ver Teorema 3.15). Em [22], os autores utilizam o fluxo de curvatura média inversa para obter desigualdades do tipo Penrose para conjuntos de dados iniciais de Einstein-Maxwell *time-symmetric* que podem ser adequadamente mergulhados como uma hipersuperfície no espaço euclidiano.

Antes de demonstrarmos a desigualdade obtida, precisaremos da seguinte proposição.

Proposição 3.14 *Seja Σ_t uma solução fraca para IMCF tal que $\Sigma_0 = \Sigma$ (outer-minimizing) tem curvatura média positiva em uma variedade M^3 estática de Einstein-*

Maxwell. Então,

$$\int_{\Omega_t} fR \geq 32\pi^2 q^2 \left(\int_{\Sigma} \frac{H}{f} \right)^{-1}.$$

Prova. Primeiramente, lembre-se que para uma hipersuperfície Σ em uma variedade estática de Einstein-Maxwell com dimensão n temos

$$|\mathbb{S}^{n-1}|q = \int_{\Sigma} g(E, \nu),$$

onde q denota a carga elétrica e $E = \frac{\nabla\psi}{f}$ o campo elétrico. Além disso, se $n = 3$, então $|\mathbb{S}^{3-1}| = 4\pi$.

Assim, como pela definição do sistema eletrovácuo temos $f^2 R = 2|\nabla\psi|^2$, obtemos

$$\int_{\{u \leq t\}} fR = 2 \int_{\{u \leq t\}} f|E|^2.$$

Pela fórmula da co-área e a desigualdade de Cauchy segue que

$$\int_{\{u \leq t\}} fR = 2 \int_{\{u \leq t\}} f|E|^2 = 2 \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} \left(\int_{\{u=t\}} \frac{f}{H} |E|^2 \right) \geq 2 \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{f}{H} g(E, \nu)^2 \right).$$

Portanto, pela desigualdade de Holdër temos

$$\int_{\{u \leq t\}} fR \geq 2 \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} \left[\left(\int_{\Sigma_t} \frac{H}{f} \right)^{-1} \left(\int_{\Sigma_t} g(E, \nu) \right)^2 \right] = 2(|\mathbb{S}^{3-1}|q)^2 \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{H}{f} \right)^{-1}.$$

Ou ainda,

$$\int_{\{u \leq t\}} fR \geq 32\pi^2 q^2 \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{H}{f} \right)^{-1}. \quad (3-11)$$

Por outro lado, pela equação de evolução do IMCF (1-18) e utilizando que $\frac{\partial}{\partial t}(d\mu_t) = d\mu_t$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_t} \frac{H}{f} &= \int_{\Sigma_t} \left(f \frac{\partial H}{\partial t} - H \frac{df}{dt} \right) \frac{1}{f^2} d\mu_t + \int_{\Sigma_t} \frac{H}{f} d\mu_t \\ &= \int_{\Sigma_t} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{1}{f^2} g(\nabla f, \nu) \right) + \int_{\Sigma_t} \frac{H}{f}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.11, sabemos que a curvatura média H satisfaz

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\Delta^{\Sigma_t} H^{-1} - H^{-1}(|h|^2 + \text{Ric}(\nu, \nu)),$$

logo

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t} \frac{1}{f} \frac{\partial H}{\partial t} &= \int_{\Sigma_t} \left[-\frac{1}{H} \Delta^{\Sigma} f^{-1} - \frac{1}{Hf} (|h|^2 + \text{Ric}(\nu, \nu)) \right] \\ &= \int_{\Sigma_t} \left[\frac{1}{Hf^2} \left(\Delta^{\Sigma} f - 2 \frac{|\nabla^{\Sigma} f|^2}{f} \right) - \frac{1}{Hf} (|h|^2 + \text{Ric}(\nu, \nu)) \right]. \end{aligned}$$

De (3-7) e do Teorema de Stokes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t} \frac{1}{f} \frac{\partial H}{\partial t} &= \int_{\Sigma_t} \left[\frac{1}{Hf^2} \left(\frac{-2}{f} (g(\nabla \psi, \nu)^2 - |\nabla \psi|^2) - Hg(\nabla f, \nu) - 2 \frac{|\nabla^{\Sigma} f|^2}{f} \right) \right] \\ &\quad - \int_{\Sigma_t} \frac{1}{Hf} (|h|^2 + 2\text{Ric}(\nu, \nu)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_t} \frac{H}{f} &= \int_{\Sigma_t} \left[\frac{-2}{Hf^3} (g(\nabla \psi, \nu)^2 - |\nabla \psi|^2) - \frac{2}{f^2} g(\nabla f, \nu) - 2 \frac{|\nabla^{\Sigma} f|^2}{Hf^3} \right] \\ &\quad - \int_{\Sigma_t} \frac{1}{Hf} (|h|^2 + 2\text{Ric}(\nu, \nu)) + \int_{\Sigma_t} \frac{H}{f}. \end{aligned}$$

A equação de Gauss-Codazzi nos diz que $R = R^{\Sigma_t} + 2\text{Ric}(\nu, \nu) + |h|^2 - H^2$. Deste modo, concluímos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_t} \frac{H}{f} = \int_{\Sigma_t} \left[\frac{-2}{Hf^3} g(\nabla \psi, \nu)^2 - \frac{2}{f^2} g(\nabla f, \nu) - 2 \frac{|\nabla^{\Sigma} f|^2}{Hf^3} \right] + \int_{\Sigma_t} \frac{1}{Hf} R^{\Sigma_t}.$$

Agora, aplicando o Lema de Hopf 1.7 e usando a desigualdade de Newton-Maclaurin, podemos inferir que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_t} \frac{H}{f} \leq \int_{\Sigma_t} \frac{1}{Hf} R^{\Sigma_t} = 2 \int_{\Sigma_t} \frac{K}{Hf} \leq 2 \int_{\Sigma_t} \frac{H}{f},$$

onde K denota a curvatura de Gauss de Σ_t .

Então, por integração, temos

$$e^{-2t} \left(\int_{\Sigma} \frac{H}{f} \right)^{-1} \leq \left(\int_{\Sigma_t} \frac{H}{f} \right)^{-1}.$$

Como as soluções tridimensionais fracas para o IMCF são suaves, obtemos

$$\frac{1}{2} \left(\int_{\Sigma} \frac{H}{f} \right)^{-1} \leq \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{H}{f} \right)^{-1}.$$

Finalmente, o resultado segue por este fato acima e (3-11). \square

Com posse dessa proposição, podemos demonstrar a desigualdade do tipo Penrose dada pelo teorema a seguir.

Teorema 3.15 *Considere que (M^3, g, f, ψ) é um sistema eletrovácuo assintoticamente plano com curvatura escalar subharmônica. Seja $\Omega \subset M$ um região limitada por $\Sigma \cup \partial M$, onde Σ outer-minimizing com curvatura média positiva H . Então, temos*

$$m + \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} fH dS \geq \sqrt{\frac{|\Sigma|}{16\pi}} + 12\pi q^2 \left(\int_{\Sigma} \frac{H}{f} \right)^{-1}.$$

Prova. A prova seguirá da combinação do Teorema 3.13 com a Proposição 3.14. Com efeito, para $n = 3$ no Teorema 3.13 utilizando $|\mathbb{S}^{3-1}| = 4\pi$, temos

$$\int_{\Sigma} fH dS - 6 \int_{\Omega} fR dv \geq 2(4\pi)^{\frac{1}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} - 16\pi m.$$

Ou ainda,

$$\frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} fH dS \geq \sqrt{\frac{|\Sigma|}{16\pi}} - m + \frac{6}{16\pi} \int_{\Omega} fR dv.$$

Agora, pela Proposição 3.14 concluímos que

$$\frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} fH dS \geq \sqrt{\frac{|\Sigma|}{16\pi}} - m + 12\pi q^2 \left(\int_{\Sigma} \frac{H}{f} \right)^{-1}.$$

Portanto,

$$m + \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} fH dS \geq \sqrt{\frac{|\Sigma|}{16\pi}} + 12\pi q^2 \left(\int_{\Sigma} \frac{H}{f} \right)^{-1}.$$

□

Observação 7 *Para variedades estáticas de Einstein-Maxwell assintoticamente planas temos que a função lapso f é limitada, isto é, $0 < f \leq 1$. Logo, pelo teorema anterior, podemos observar que*

$$m \geq \sqrt{\frac{|\Sigma|}{16\pi}} + 12\pi q^2 \left(\int_{\Sigma} \frac{H}{f} \right)^{-1} - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} fH dS.$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} m &\geq \sqrt{\frac{|\Sigma|}{16\pi}} + 12\pi q^2 \left(\int_{\Sigma} \frac{H}{f} \right)^{-1} - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} f^2 \frac{H}{f} dS \\ &\geq \sqrt{\frac{|\Sigma|}{16\pi}} + 12\pi q^2 \left(\int_{\Sigma} \frac{H}{f} \right)^{-1} - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} \frac{H}{f} dS. \end{aligned}$$

Portanto,

$$m \geq \sqrt{\frac{|\Sigma|}{16\pi}} + \frac{1}{16\pi} \left(\int_{\Sigma} \frac{H}{f} \right)^{-1} \left[192\pi^2 q^2 - \left(\int_{\Sigma} \frac{H}{f} \right)^2 \right].$$

Pela relação acima, podemos concluir que m é positiva se

$$\int_{\Sigma} \frac{H}{f} \leq 8\sqrt{3}\pi q.$$

Além disso, se tivermos a igualdade, obtemos a clássica desigualdade de Penrose.

Referências Bibliográficas

- [1] AGOSTINIANI, V.; FOGAGNOLO, M.; MAZZIERI, L. **Minkowski inequalities via nonlinear potential theory.** *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 244(1):51–85, 2022.
- [2] AGOSTINIANI, V.; MAZZIERI, L. **On the geometry of the level sets of bounded static potentials.** *Comm. Math. Phys.*, 355(1):261–301, 2017.
- [3] BARBOSA, E.; PINA, R.; TENENBLAT, K. **On gradient Ricci solitons conformal to a pseudo-Euclidean space.** *Israel J. Math.*, 200(1):213–224, 2014.
- [4] BESSE, A. L. **Einstein manifolds.** Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008. ISBN 978-3-540-74120-6, MR2371700.
- [5] BETHUEL, F., E. A. **Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems.** Lectures Notes in Mathematics, Springer, Italy, 1996. MR0719023.
- [6] BRAY, H. L. **Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem.** *J. Differential Geom.*, 59(2):177–267, 2001. MR1908823.
- [7] BRENDLE, S. **Constant mean curvature surfaces in warped product manifolds.** *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci*, 117(1):247–269, 2013. MR3090261.
- [8] BRENDLE, S.; HUNG, P.-K.; WANG, M.-T. **A Minkowski inequality for hypersurfaces in the Anti–desitter–Schwarzschild manifold.** *Comm. Pure Appl. Math.*, 69(1):124–144, 2016. MR3433631.
- [9] BUNTING, G. L.; MASOOD-UL ALAM, A. K. M. **Nonexistence of multiple black holes in asymptotically Euclidean static vacuum space-time.** *Gen. Relativity Gravitation*, 19(2):147–154, 1987. MR0876598.
- [10] CAMINHA, A. **Tópicos de Geometria Diferencial**, volume 1. Coleção Fronteiras da Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2014.
- [11] Cao, H.-D.; Yau, S.-T., editors. **Surveys in differential geometry. Vol. XII. Geometric flows**, volume 12 de **Surveys in Differential Geometry.** International Press, Somerville, MA, 2008.

- [12] CARROLL, S. **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity**. Addison Wesley, San Francisco, 2004. ISBN 0-8053-8732-3 83-01, MR2329798.
- [13] CEDERBAUM, C.; GALLOWAY, G. **Uniqueness of photon spheres in electrovacuum spacetimes**. *Classical Quantum Gravity*, 33(7):075006 pp., 2016. MR3471730.
- [14] CEDERBAUM, C.; GALLOWAY, G. **Uniqueness of photon spheres via positive mass rigidity**. *Comm. Anal. Geom.*, 25(2):303–320, 2017. MR3690243.
- [15] CHINI, M. **Sull'integrazione di alcune equazioni differenziali del primo ordine**. *Rendiconti Istituto Lombardo*, 57(2):506–511, 1924.
- [16] CHOW, B.; LU, P.; NI, L. **Hamilton's Ricci flow**, volume 77. American Mathematical Soc., 2006, MR2274812.
- [17] CHRUSCIEL, P. T. **Towards a classification of static electrovacuum spacetimes containing an asymptotically flat spacelike hypersurface with compact interior**. *Class. Quantum Grav.*, 16(3):689–704, 1999. MR1682570.
- [18] CHRUSCIEL, P. T. **Elements of general relativity**. Compact Textbooks in Mathematics. Birkhäuser/Springer, Cham, [2019] ©2019.
- [19] CHRUSCIEL, P. T.; DELAY, E. **Non-singular space-times with a negative cosmological constant: II. Static solutions of the Einstein–Maxwell equations**. *Lett. Math. Phys.*, 107(8):1391–1407, MR3669238, 2017.
- [20] CHRUSCIEL, P. T.; TOD, P. **The classification of static electro-vacuum spacetimes containing an asymptotically flat spacelike hypersurface with compact interior**. *Comm. Math. Phys.*, 271(3):577–589, 2007.
- [21] CRUZ, T.; LIMA, V.; DE SOUSA, A. **Min-max minimal surfaces, horizons and electrostatic systems**. *arXiv preprint arXiv:1912.08600 (to appear in Journal of Differential Geometry)*, p. 1–47, 2022.
- [22] DE LIMA, L. L.; GIRÃO, F.; LOZÓRIO, W.; SILVA, J. **Penrose inequalities and a positive mass theorem for charged black holes in higher dimensions**. *Classical Quantum Gravity*, 33(3):035008, 14, 2016.
- [23] DO CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana**. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 5 edition, 2015. ISBN 978-85-244-0036-0, MR3791495.
- [24] DO CARMO, M. P. **Differential Geometry of Curves and Surfaces**. Dover Publications, Mineola, 2016. ISBN 978-0-486-80699-0, MR3837152.

- [25] DOS SANTOS, J. A. P.; LEANDRO, B. **Reduction of the n -dimensional static vacuum Einstein equation and generalized Schwarzschild solutions.** *J. Math. Anal. Appl.*, 469(2):882–896, 2019.
- [26] FEDERER, H. **Curvature measures.** *Trans. Amer. Math. Soc.*, 93:418–491, 1959.
- [27] FEDERER, H. **Geometric measure theory.** Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1969.
- [28] GALLOWAY, G.; MIAO, P. **Variational and rigidity properties of static potentials.** *Comm. Anal. Geom.*, 25(1):163–183, 2017. MR3663315.
- [29] GEROCH, R. **Energy extraction.** *Ann. New York Acad. Sci.*, 224:108–117, 1973.
- [30] GIBBONS, G. W. **Collapsing shells and the isoperimetric inequality for black holes.** *Class. Quantum Grav.*, 14(10):2905, 1997. MR1476553.
- [31] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order.** Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [32] HAMILTON, R. S. **Three-manifolds with positive Ricci curvature.** *J. Differential Geometry*, 17(2):255–306, 1982.
- [33] HARTLE, J. B.; HAWKING, S. W. **Solutions of the Einstein-Maxwell equations with many black holes.** *Comm. Math. Phys.*, 26(2):87–101, 1972.
- [34] HAWKING, S. W.; ELLIS, G. **The large scale structure of space-time.** Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, London-New York, 1973. ISBN 0-521-09906-4, MR0424186.
- [35] HUISKEN, G. **Inverse mean curvature flow and isoperimetric inequalities.** *Vídeo disponível em <https://www.ias.edu/video/marston-morse-inverse-mean-curvature-flow-and-isoperimetric-inequalities>*, 2009.
- [36] HUISKEN, G.; ILMANEN, T. **A note on inverse mean curvature flow.** Proc. of the Workshop on Nonlinear Part. Diff. Equ. (Saitama Univ. Sept. 1997), Saitama Univ., 1997.
- [37] HUISKEN, G.; ILMANEN, T. **The Riemannian Penrose inequality.** *Internat. Math. Res. Notices*, (20):1045–1058, 1997.
- [38] HUISKEN, G.; ILMANEN, T. **The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality.** *J. Differential Geom.*, 59(3):353–437, 2001.

- [39] HUISKEN, G.; ILMANEN, T. **Higher regularity of the inverse mean curvature flow.** *J. Differential Geom.*, 80(3):433–451, 2008.
- [40] ISRAEL, W. **Event horizons in static electrovac space-times.** *Comm. Math. Phys.*, 8(3):245–260, 1968.
- [41] JAHNS, S. **Photon sphere uniqueness in higher-dimensional electrovacuum spacetimes.** *Class. Quantum Grav.*, 36(23):235019, 2019.
- [42] KAMKE, E. **Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Teil I: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 6. Aufl.; Teil II: Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für eine gesuchte Funktion. 4. Aufl.** Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Band 18. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1959.
- [43] KÜHNEL, W. **Conformal transformations between Einstein spaces.** In: *Conformal geometry (Bonn, 1985/1986)*, Aspects Math., E12, p. 105–146. Friedr. Vieweg, Braunschweig, 1988.
- [44] KUHNEL, W. **Differential geometry. Curves-surfaces-manifolds.** American Mathematical Society, Providence, 3 edition, 2015. ISBN 978-1-4704-2320-9 , MR3443721.
- [45] KUNDURI, H. K.; LUCIETTI, J. **No static bubbling spacetimes in higher dimensional einstein–maxwell theory.** *Classical and Quantum Gravity*, 35(5):054003, 2018.
- [46] LEANDRO, B.; DE MELO, A. P.; PINA, H. **A minkowski inequality for the static einstein-maxwell space-time.** *arXiv preprint arXiv:2010.07187*, 2020.
- [47] LEANDRO, B.; DE MELO, A. P.; MENEZES, I.; PINA, R. **Static Einstein-Maxwell space-time invariant by translation.** *Gen. Relativity Gravitation*, 53(10):Paper No. 92, 21, 2021.
- [48] LEANDRO, B.; DOS SANTOS, J. A. P. **Reduction of gradient Ricci soliton equation.** *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 45(2):1003–1011, 2020.
- [49] LEANDRO, B.; PINA, R. **Invariant solutions for the static vacuum equation.** *J. Math. Phys.*, 58(7):072502, 10, 2017.
- [50] LEE, D. A. **Geometric relativity**, volume 201 de **Graduate Studies in Mathematics.** American Mathematical Society, Providence, RI, 2019.
- [51] LEE, J. M. **Introduction to smooth manifolds**, volume 218 de **Graduate Texts in Mathematics.** Springer, New York, second edition, 2013.

- [52] LEE, J. M. **Introduction to Riemannian manifolds**. Springer, 2018.
- [53] LI, H.; WEI, Y. **On inverse mean curvature flow in Schwarzschild space and Kottler space**. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 56(3):Paper No. 62, 21, 2017.
- [54] LUCIETTI, J. **All higher-dimensional Majumdar–Papapetrou Black Holes**. In: *Ann. Henri Poincaré*, p. 1–14. MR4285947. Springer, 2021.
- [55] MAJUMDAR, S. D. **A class of exact solutions of Einstein’s field equations**. *Physical Review*, 72(5):390–398, 1947.
- [56] MCCORMICK, S. **On a Minkowski-like inequality for asymptotically flat static manifolds**. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 146(9):4039–4046, 2018.
- [57] MINKOWSKI, H. **Volumen und oberfläche**. *Math. Ann.*, 57:447–495, 1903.
- [58] NETO, B. L.; TENENBLAT, K. **On gradient Yamabe solitons conformal to a pseudo-Euclidian space**. *J. Geom. Phys.*, 123:284–291, 2018.
- [59] NORDSTRÖM, G. **On the energy of the gravitational field in einstein’s theory**. *Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam*, 20(9-10):1238–1245, 1918.
- [60] OLVER, P. J. **Applications of Lie groups to differential equations**, volume 107 de **Graduate Texts in Mathematics**. Springer-Verlag, New York, second edition, 1993.
- [61] O’NEILL, B. **Semi-Riemannian geometry with applications to relativity**. Academic press, 1983.
- [62] PAPAPETROU, A. **A static solution of the equations of the gravitational field for an arbitrary charge-distribution**. *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, 51:191–204, 1947.
- [63] PENROSE, R. **Naked singularities**. *Ann. New York Acad. Sci.*, 224:125–134, 1973.
- [64] PETER, L. **Geometric analysis**. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 134. Cambridge University Press., Cambridge, 2012. ISBN 978-1-107-02064-1, MR2962229.
- [65] PETERSEN, P. **Riemannian geometry**, volume 171 de **Graduate Texts in Mathematics**. Springer, Cham, third edition, 2016.
- [66] PINA, R.; DOS SANTOS, J. A. P. **Group-invariant solutions for the Ricci curvature equation and the Einstein equation**. *J. Differential Equations*, 266(4):2214–2231, 2019.
- [67] REISSNER, H. **Über die eigengravitation des elektrischen feldesnach der einsteinschen theorie**. *Annalen der Physik*, 50:106–120, 1916.

- [68] RIBEIRO, JR., E.; TENENBLAT, K. **Noncompact quasi-Einstein manifolds conformal to a Euclidean space.** *Math. Nachr.*, 294(1):132–144, 2021.
- [69] ROBINSON, D. C. **A simple proof of the generalization of Israel’s theorem.** *Gen. Relativity Gravitation*, 8:695–698, 1977.
- [70] ROBINSON, D. C. **Four decades of black hole uniqueness theorems.** The Kerr spacetime. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009. MR2789145.
- [71] RUBACK, P. **A new uniqueness theorem for charged black holes.** *Classical Quantum Gravity*, 5(10):L155–L159, 1988.
- [72] SCHEUER, J.; XIA, C. **Locally constrained inverse curvature flows.** *Trans. Amer. Math. Soc.*, 372(10):6771–6803, 2019.
- [73] SCHOEN, R.; YAU, S.-T. **Lectures on differential geometry.** International Press, Cambridge, 1994. ISBN 1-57146-012-8, MR1333601.
- [74] SCHOEN, R.; YAU, S. T. **On the proof of the positive mass conjecture in general relativity.** *Comm. Math. Phys.*, 65(1):45–76, 1979. MR0526976.
- [75] SCHOEN, R. M. **Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics.** Topics in calculus of variations (Montecatini Terme, 1987), 120-154, Lecture Notes in Math., 1365, Springer, Berlin, 1989. MR0994021.
- [76] SCHOEN, R. M.; SHING-TUNG, Y. **Positive scalar curvature and minimal hypersurface singularities.** *arXiv:1704.0549*, 2017.
- [77] SCHWAZSCHILD, V. K. **Über das gravitaionsfeld eines massenpunktes nach der einstein’schen theorie.** *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, p. 189–196, 1916.
- [78] SHEN, Y. **A note on Fischer-Marsden’s conjecture.** *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125(3):901–905, 1997. MR1353399.
- [79] WALD, R. M. **General relativity.** University of Chicago Press, Chicago, 1984. ISBN 0-226-87032-4; 0-226-87033-2 , MR0757180.
- [80] WANG, Z. **A Minkowski-Type Inequality for Hypersurfaces in the Reissner-Nordstrom-Anti-deSitter Manifold.** Columbia University, Thesis PhD, 2015.
- [81] WEI, Y. **On the Minkowski-type inequality for outward minimizing hypersurfaces in Schwarzschild space.** *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 57(2):Paper No. 46, 17, 2018.

- [82] YANO, K. **Integral formulas in Riemannian geometry**. Pure and Applied Mathematics, New York, 1970. MR0284950.
- [83] YAZADJIEV, S.; LAZOV, B. **Uniqueness of the static Einstein–Maxwell spacetimes with a photon sphere**. *Classical Quantum Gravity*, 32(16):165021, 12, 2015.