

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Existência de Atratores Globais para Equações
de Evolução não Lineares**

por

Silvia Cristina Belo e Silva

Prof. Dr. Eduardo Arbieto Alarcon

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Goiânia, Goiás

2006



Termo de Ciência e de Autorização para Disponibilizar as Teses e Dissertações Eletrônicas (TEDE) na Biblioteca Digital da UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás-UFG a disponibilizar gratuitamente através da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações - BDTD/UFG, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1 1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

1 2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor(a):	Silvia Cristina Belo e Silva		
CPF:	92364748100	E-mail:	silvia.belo81@gmail.com
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não			
Vínculo Empregatício do autor			
Agência de fomento:	CNPq	Sigla:	
País:	Brasil	UF:Go	CNPJ: 33.654.831/0001-36
Título:	Existência de Atratores Globais para Equações de Evolução não Lineares		
Palavras-chave:	Existence of solutions, attractors		
Título em outra língua:	Existence of Global Attractors for Nonlinear Evolutions Equations		
Palavras-chave em outra língua:	existence of solutions, attractors		
Área de concentração:	Equações Diferenciais Parciais		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	05/05/2006		
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado em Matemática		
Orientador(a):	Eduardo Arbieto Alarcon		
CPF:		E-mail:	alarcon@impa.br
Co-orientador(a):			
CPF:		E-mail:	

3. Informações de acesso ao documento:

Liberação para disponibilização? total parcial

Em caso de disponibilização parcial, assinale as permissões:

Capítulos. Especifique: _____

Outras restrições: _____

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O Sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EXISTÊNCIA DE ATRADORES GLOBAIS PARA EQUAÇÕES DE
EVOLUÇÃO NÃO LINEARES

por

Silvia Cristina Belo e Silva

Área de Concentração: Equações Diferenciais Parciais

Orientador: Eduardo Arbieto Alarcon

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Conselho Diretor do Instituto de Matemática e Estatística, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Goiânia, Goiás

2006

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG**

Silva, Silvia Cristina Belo.

S586e Existência de atratores globais para equações de
evolução não lineares [manuscrito] / Silvia Cristina Belo e
Silva. – 2006.
77 f.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Arbieto Alarcon.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e
Matemática, 2006.

Bibliografia.

1. Equações não lineares. I. Título.

CDU: 517.911

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA-MESTRADO

**“EXISTÊNCIA DE ATRADORES GLOBAIS PARA EQUAÇÕES
DE EVOLUÇÃO NÃO LINEARES”**

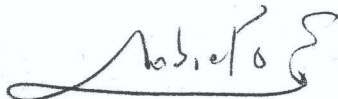
por

Silvia Cristina Belo e Silva

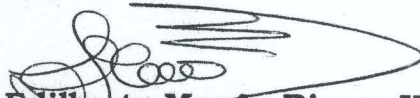
Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Conselho Diretor do Instituto de Matemática e Estatística, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Goiânia, 05 de maio de 2006.

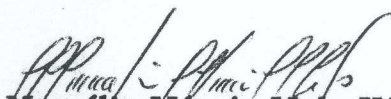
Banca Examinadora:



**Prof. Dr. Eduardo Arbieto Alarcon-IME/UFG
(Orientador)**



Prof. Dr. Jaime Edilberto Muñoz Rivera-UFRJ



Prof. Dr. Maurílio Márcio Melo-IME/UFG

Notações

- $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$; $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.
- $Y \hookrightarrow X$: o conjunto (espaço) Y está imerso denso e continuamente em X .
- $\mathcal{B}(Y, X)$: o espaço dos operadores limitados de Y em X .
- $\mathcal{B}(X)$: o espaço dos operadores limitados de X em X .
- $\rho(A)$: o conjunto resolvente do operador A .
- $\sigma(A)$: o conjunto espectral do operador A .
- $\sigma_e(A)$: o espectro essencial do operador A .
- $\sigma_d(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_e(A)$: O espectro discreto do operador A .
- $\hat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{-ix\xi} dx$: Transformada de Fourier.
- $\check{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{ix\xi} dx$: Inversa da Transformada de Fourier.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: espaço de Schwartz em \mathbb{R}^n .
- $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$: Dual do espaço de Schwartz em \mathbb{R}^n .
- $H^s(\mathbb{R}^n) = L^2_s(\mathbb{R}^n)$: espaço de Sobolev de ordem s com base em $L^2(\mathbb{R}^n)$.
- $H^s(\mathbb{R}^n) \times H^{s'}(\mathbb{R}^n)$: produto Cartesiano dos espaços de Sobolev de ordem s, s' .
- $\|\cdot\|_{s \times s'} = \|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^n) \times H^{s'}(\mathbb{R}^n)} = (\|\cdot\|_s^2 + \|\cdot\|_{s'}^2)^{\frac{1}{2}}$: norma de $H^s(\mathbb{R}^n) \times H^{s'}(\mathbb{R}^n)$.

Resumo

Neste trabalho desenvolvemos a teoria de atratores, para equações de diferenças parciais não lineares denominadas equações de evolução:

$$u_t + \frac{1}{2}(u_x)^2 + u_{xxx} + \eta(\mathcal{H}u_x + \mathcal{H}u_{xxx}) + \mu u = f(x), u(\cdot, 0) = \phi(\cdot)$$

e

$$z_t + zz_x + z_{xxx} + \eta(\mathcal{H}z_x + \mathcal{H}z_{xxx}) + \mu z = g(x), z(\cdot, 0) = \psi(\cdot)$$

onde \mathcal{H} denota a transformada de Hilbert

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{y-x} dy, f \in \mathbf{SR},$$

Estabelecemos a boa colocação global do problema de Cauchy para as equações acima, em diversos espaços de Sobolev. Mostramos a existência de atratores globais, isto é um conjunto invariante, compacto que atrai conjuntos limitados.

Abstract

In this work we develop the theory of global attractor for differential partial equation, denominated evolution equation :

$$u_t + \frac{1}{2}(u_x)^2 + u_{xxx} + \eta(\mathcal{H}u_x + \mathcal{H}u_{xxx}) + \mu u = f(x), u(\cdot, 0) = \phi(\cdot) \quad (1)$$

e

$$z_t + zz_x + z_{xxx} + \eta(\mathcal{H}z_x + \mathcal{H}z_{xxx}) + \mu z = g(x), z(\cdot, 0) = \psi(\cdot) \quad (2)$$

where \mathcal{H} denote the Hilbert transform

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{y-x} dy, \quad f \in \mathbf{S}(\mathbb{R}),$$

We show that above initial value problem are globally well-posed in Sobolev space. Moreover, we prove existence of global attractor, i.e. invariant set, compact set, which attracts every bounded set of initial conditions.

Sumário

1	Introdução	2
2	Preliminares	4
2.1	Problema de Cauchy para Equações de Evolução	4
2.2	Operadores Lineares	5
2.3	Resultados de Teoria da Medida	10
2.4	Transformada de Fourier	11
2.5	Espaços de Sobolev	14
2.6	Semigrupos de Operadores Lineares	17
2.7	Atratores	29
3	O Problema de Cauchy	34
3.1	O Problema de Cauchy na reta	34
3.1.1	Teoria Linear	34
3.1.2	Teoria Local	38
3.1.3	Teoria Global	45
3.2	O Problema de Cauchy no caso periodico	51
3.2.1	Caso Linear	51
3.2.2	Teoria Global	56
4	Existência de Atratores	63
4.1	Dominio Limitado	63
4.1.1	Existência de conjuntos absorventes	63

4.1.2	Compacidade	68
4.2	Domínio não limitado	69
4.2.1	Existência do conjunto absorvente	69
4.2.2	Compacidade	71

Capítulo 1

Introdução

Nesta dissertação mostraremos que os problemas de Cauchy

$$u_t + \frac{1}{2}(u_x)^2 + u_{xxx} + \eta(\mathcal{H}u_x + \mathcal{H}u_{xxx}) + \mu u = f(x), u(\cdot, 0) = \phi(\cdot) \quad (1.1)$$

$$z_t + z z_x + z_{xxx} + \eta(\mathcal{H}z_x + \mathcal{H}z_{xxx}) + \mu z = g(x), z(\cdot, 0) = \psi(\cdot) \quad (1.2)$$

são localmente e globalmente bem-postos. Temos que \mathcal{H} denota a transformada de Hilbert

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{y-x} dy, f \in \mathbf{S}(\mathbb{R}), \quad (1.3)$$

\mathcal{P} representa o valor principal da integral e o parâmetro η é um número positivo arbitrário. Algumas propriedades sobre a transformada de Hilbert \mathcal{H} que são usadas ao longo do texto são : $\mathcal{H} \in B(L^p(\mathbb{R}))$, $p \in (1, \infty)$ e $(\widehat{\mathcal{H}f})(\xi) = ih(\xi)\widehat{f}(\xi)$, para algum $f \in H^s(\mathbb{R})$, onde

$$h(\xi) = \begin{cases} -1, & \text{se } \xi < 0; \\ 1, & \text{se } \xi > 0; \end{cases} \quad (1.4)$$

O problema de Cauchy para $\mu = 0$, foi estabelecido por Borys Alvarez Samaniego (Tese de doutorado, IMPA) publicado em [13]. O autor prova que os problemas de valor inicial

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + \eta(\mathcal{H}u_x + \mathcal{H}u_{xxx}) = 0, u(\cdot, 0) = \phi(\cdot)$$

e

$$u_t + \frac{1}{2}(u_x)^2 + u_{xxx} + \eta(\mathcal{H}u_x + \mathcal{H}u_{xxx}) + \mu u = f(x), u(., 0) = \phi(.)$$

são localmente e globalmente bem postos em $H^s(\mathbb{R})$, onde $s \geq 1, \eta > 0$.

Além disso estuda o comportamento limite das soluções da primeira equação quando η tende a zero em $H^s(\mathbb{R})$ para $s \geq 2$. Também prova o Teorema de continuação única para a primeira equação em $\mathcal{F}_{3,3}(\mathbb{R}) = H^3(\mathbb{R}) \cap L^2_3(\mathbb{R})$, $\eta > 0$, o que implica a perda da propriedade de persistência.

No capítulo 3 mostraremos a existência e unicidade de soluções para as equações (1.1) e (1.2), primeiramente localmente no tempo e usando estimativas a priori estendemos globalmente para o tempo $t \geq 0$ com dados iniciais nos espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ e H^s_{per} .

No capítulo 4 mostramos a existência de conjuntos absorventes limitados, e como bacia de atração todo o espaço de fase. Provamos uma propriedade de compacidade do fluxo associado as equações, o qual implica a existência de atratores globais.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Problema de Cauchy para Equações de Evolução

Um problema da forma

$$\begin{cases} F \in C([0, T_0] \times Y, X) \\ \partial_t u = F(t, u), \quad t > 0 \\ u(0) = \phi \in Y, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde X e Y são espaços de Banach, é chamado um problema de Cauchy, ou de valor inicial, para uma equação de evolução, quando estuda-se as seguintes questões:

- a) *Existência local de soluções*: Existe $T \in (0, T_0]$ e $u \in C([0, T]; Y)$ tal que (2.1) é satisfeito.
- b) *Unicidade*: Existe $T_1 \in (0, T_0]$ tal que (2.1) possui no máximo uma solução em $[0, T_1]$.
- c) *Dependência dos dados iniciais*: A função $\phi \rightarrow u$ é contínua em relação às normas de Y e $C([0, T]; Y)$.

Se as hipóteses a), b) e c) anteriores forem verificadas, o problema (2.1) será dito *localmente bem colocado*. Se alguma das hipóteses anteriores não for verificada o problema (2.1) será dito *mal colocado*. Finalmente, se $F(t, \cdot)$ estiver definida em

$[0, \infty)$ e a), b) e c) forem verificadas para todo $T > 0$, o problema (2.1) será dito *globalmente bem colocado*.

2.2 Operadores Lineares

Sejam X e Y espaços de Banach. Uma aplicação T com domínio $D(T)$ é um operador linear de X em Y , se $D(T)$ é um subespaço de X e $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, u, v \in D(T)$.

T é dito limitado se

$$\sup\{\|Tu\|_Y : \|u\|_X \leq 1\} < \infty.$$

Teorema 2.2.1. *Seja um operador linear $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$, então T é limitado, se e somente se, T é contínuo.*

Se X e Y têm dimensão finita, então todo operador linear de X em Y é limitado. O mesmo não é válido em dimensão infinita, o operador H_0 definido na seção 2.4 deste capítulo é um exemplo de operador linear não limitado.

Um operador linear $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ é densamente definido se $\overline{D(T)} = X$.

Lema 2.2.1. *Se X é um espaço de Banach, então $C([0, T]; X)$ é um espaço de Banach munido da norma*

$$\|f\| = \max\{\|f(t)\|_X : t \in [0, T]\}.$$

Lema 2.2.2. *Sejam $T, M > 0$, $\phi \in X$, onde X é um espaço de Banach. Então*

$$\mathcal{X}(T) = \{f \in C([0, T]; X) : \sup_{[0, T]} \|f(t) - \phi\|_X \leq M\}$$

é um espaço métrico completo. Onde a distância em $\mathcal{X}(T)$ é induzida pela norma de $C([0, T]; X)$.

Demonstração A distância em $\mathcal{X}(T)$ é dada por

$$d(f, g) = \sup_{[0, T]} \|f(t) - g(t)\|_X.$$

É fácil ver que esta função define uma distância. Seja $\{f_n\} \subseteq \mathcal{X}(T)$, $\{f_n\}$ de Cauchy em relação a d . Então $\{f_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $C([0, T]; X)$. Pelo lema anterior existe $f \in C([0, T]; X)$ tal que $d(f_n, f) \rightarrow 0$. Temos $\|f_n(t) - \phi\|_X \leq M$, para todo $t \in [0, T]$, portanto $\sup_{[0, T]} \|f(t) - \phi\|_X \leq M$, então $f \in \mathcal{X}(T)$.

Proposição 2.2.1. (*Teorema do Ponto Fixo de Banach*). *Sejam M um espaço métrico completo e $f : M \rightarrow M$, uma contração. Então f possui um único ponto fixo em M .*

Para a demonstração, veja [20].

No restante desta seção \mathcal{H} será um espaço de Hilbert.

Teorema 2.2.2. (*Teorema de Representação de Riesz*) *Seja $\eta \in \mathcal{H}$, defina $\Lambda_\eta(\xi) = \langle \xi, \eta \rangle$, então $\Lambda_\eta \in \mathcal{H}^*$ e a aplicação*

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}^* \\ \eta &\longmapsto \Lambda_\eta \end{aligned}$$

é isométrica, antilinear e sobrejetiva.

Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, então pelo teorema de representação de Riesz existe um único operador $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, T^*\eta \rangle$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.

Definição 2.2.1. *O operador T^* acima é chamado o adjunto de T . Se $T = T^*$, T é chamado Auto-Adjunto (ou hermitiano, ou simétrico).*

$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é dito normal se

$$TT^* = T^*T.$$

Pode-se notar que os operadores Auto-Adjuntos e os operadores unitários (i.e. operadores lineares sobrejetivos em que $\|T\xi\| = \|\xi\|$) são também normais.

Os operadores lineares $T : D(T) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e $T_1 : D(T_1) \subseteq \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ são ditos unitariamente equivalentes se, existe um operador unitário $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_1$ tal que

$$V(D(T)) = D(T_1)$$

e

$$T_1 V \eta = V T \eta, \eta \in D(T).$$

O operador V é chamado entrelaçante, dizemos que T e T_1 são entrelaçados por V .

Definição 2.2.2. *Sejam (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. $L_\mu^p(X)$ é o espaço das funções mensuráveis $\psi : X \rightarrow \mathbb{C}$ tais que*

$$\|\psi\|_p = \left[\int_X |\psi(\omega)|^p d\mu(\omega) \right]^{1/p} < \infty,$$

onde identificamos as funções que são equivalentes q. t. p..

Sejam (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida e $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função mensurável. O operador maximal de multiplicação por g \mathcal{M}_g é definido por

$$D(\mathcal{M}_g) = \{\psi \in L_\mu^2(X) : g \cdot \psi \in L_\mu^2(X)\}$$

$$\mathcal{M}_g \psi = g \cdot \psi, \psi \in D(\mathcal{M}_g).$$

No próximo teorema precisaremos da seguinte definição, $M^b(X)$ é o conjunto das funções mensuráveis $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$\|\psi\|_\infty = \sup\{|\psi(x)| : x \in X\} < \infty.$$

Teorema 2.2.3. *(Teorema Espectral para Operadores Normais). Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, onde \mathcal{H} é separável. Então T é normal se, e só se, existem um espaço de medida (X, \mathcal{A}, μ) (separável e σ -finito) e uma função $g \in M^b(X)$ tais que T é unitariamente equivalente a \mathcal{M}_g , em $L_\mu^2(X)$.*

Definição 2.2.3. *Seja $T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$ um operador linear densamente definido. O operador T^* , chamado o adjunto de T é definido por*

$$D(T^*) = \{\eta \in \mathcal{H} : \exists \phi \in \mathcal{H} \mid \langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, \phi \rangle, \forall \xi \in D(T)\}$$

$$T^* \eta = \phi, \eta \in D(T^*).$$

Diremos que T é Auto-Adjunto se $T^* = T$.

Se $\eta \in D(T^*)$, $T^*\eta$ é o único vetor em \mathcal{H} tal que

$$\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, T^*\eta \rangle, \quad \forall \xi \in D(T).$$

Isto segue da densidade de $D(T)$.

Um operador $T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$ é dito simétrico se

$$\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, T\eta \rangle, \quad \forall \xi, \eta \in D(T).$$

A seguir, a imagem do operador $T + i$ será denotada por $\text{ran}(T + i)$. Se T é um operador simétrico densamente definido, então a sua transformada de Cayley $W = W(T)$ é definida por

$$D(W(T)) = \text{ran}(T + i)$$

$$W((T + i)\eta) = (T - i)\eta.$$

Seja $W : D(W) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Se $\|W\xi\| = \|\xi\|, \forall \xi \in D(W)$, W é dito uma isometria parcial.

Proposição 2.2.2. *T é Auto-Adjunto se, e só se, $W(T)$ é unitário.*

Lema 2.2.3. *Seja $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então*

i) $W(\mathcal{M}_g) = \mathcal{M}_z$, onde $z : X \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por

$$z(w) = (g(w) - i)(g(w) + i)^{-1}.$$

ii) \mathcal{M}_g é Auto-Adjunto.

Lema 2.2.4. *Se $W(T)$ e $W(T_1)$ são unitariamente equivalentes, então T em \mathcal{H} e T_1 em \mathcal{H}_1 , são unitariamente equivalentes.*

Teorema 2.2.4. *(Teorema Espectral para Operadores Auto-Adjuntos).*

$T : D(T) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é Auto-Adjunto se, e só se, T é unitariamente equivalente a um operador \mathcal{M}_g , onde g é uma função mensurável real.

Demonstração Pelo lema 2.2.3 \mathcal{M}_g é Auto-Adjunto. Um operador unitariamente equivalente a um operador Auto-Adjunto é Auto-Adjunto. Logo a condição é suficiente. Se T é Auto-Adjunto, então pela proposição 2.2.2 $W(T)$ é unitário, daí pelo teorema espectral para operadores unitários, $W(T)$ é unitariamente equivalente ao operador \mathcal{M}_z em $L^2_\mu(X)$, onde $z : X \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função mensurável. $z \neq 1$, q. t. p.. De fato, suponha que existe E , $\mu(E) > 0$, tal que $E \subseteq z^{-1}\{1\}$. Então $X_E \in L^2_\mu(X)$, $X_E \neq 0$ e

$$(1 - \mathcal{M}_z)X_E = (1 - z)X_E = 0.$$

Como $1 - W(T)$ é injetivo e $W(T)$ é unitariamente equivalente a \mathcal{M}_z temos que $1 - \mathcal{M}_z$ é injetivo, isto contradiz a igualdade acima.

Seja $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(w) = i(1 + z(w))(1 - z(w))^{-1},$$

g é definida q. t. p. em X .

Tem-se,

$$z(w) = (g(w) - i)(g(w) + i)^{-1}, \text{ q. t. p..}$$

Pela proposição 2.2.2 $\mathcal{M}_z = W(\mathcal{M}_g)$. Então $W(T)$ é unitariamente equivalente a $W(\mathcal{M}_g)$, daí pelo lema 2.2.4 T é unitariamente equivalente a \mathcal{M}_g .

Definição 2.2.4. *Seja T um operador Auto-Adjunto em \mathcal{H} , então T é dito não-negativo se*

$$\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0,$$

para todo $\xi \in D(T)$.

Proposição 2.2.3. *Seja T um operador Auto-Adjunto em \mathcal{H} , então T é não-negativo se, e só se, $Sp(T) \subseteq (-\infty, 0)$.*

2.3 Resultados de Teoria da Medida

Teorema 2.3.1. (*Teorema da Convergência Dominada*). Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida. Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis definidas em X tal que $f_n \rightarrow f$ q.t.p. em X . Suponha que $|f_n| \leq g$, onde g é integrável. Então f é integrável e

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Teorema 2.3.2. Suponha que para algum $t_0 \in [a, b]$, a função $x \rightarrow f(x, t_0)$ é integrável em X , $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe em $X \times [a, b]$ e existe g integrável tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x).$$

Então a função

$$F(t) = \int_X f(x, t) d\mu,$$

é derivável em $[a, b]$ e

$$\frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt} \int_X f(x, t) d\mu = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu.$$

Seja $L = L(X, \mathcal{A}, \mu)$, o conjunto das funções reais integráveis com respeito a medida μ . A relação

$$f \sim g, \text{ se } \mu\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = 0,$$

é uma relação de equivalência em L .

Definição 2.3.1. Se $1 \leq p < \infty$, o espaço $L^p = L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ consiste de todas as classes de equivalência de funções reais mensuráveis f tais que $|f|^p$ tem integral finita com respeito a medida μ sobre X . A norma em L^p será definida por

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f|^p d\mu \right\}^{1/p}.$$

Os espaços usados no capítulo três serão os $L^p(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \mu)$, com $p = 1$ ou 2 , onde $B(\mathbb{R})$ é a σ -álgebra de Borel em \mathbb{R} e μ é a medida de Lebesgue.

Teorema 2.3.3. *O espaço L^p é um espaço de Banach, com a norma acima.*

Definição 2.3.2. *O espaço $L^\infty = L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ consiste de todas as classes de equivalência de funções reais mensuráveis que são limitadas q. t. p..*

Se $f \in L^\infty$ e $N \in \mathcal{A}$, com $\mu(N) = 0$, definimos

$$S(N) = \sup\{|f(x)| : x \in N\}$$

e

$$\|f\|_\infty = \inf\{S(N) : N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0\}.$$

Teorema 2.3.4. *O espaço L^∞ é um espaço de Banach, com a norma acima.*

Teorema 2.3.5. *(Desigualdade de Holder). Sejam $p, q \geq 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então se $f \in L^p$ e $g \in L^q$ temos $fg \in L^1$ e*

$$\int_X |f(x)g(x)| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

No teorema a seguir (X, \mathcal{A}, μ) e (Y, \mathcal{B}, ν) são espaços de medida e $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ é a σ -álgebra gerada pelos conjuntos da forma $A \times B$, onde $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$.

Teorema 2.3.6. *(Teorema de Fubini). Sejam μ e ν medidas σ -finitas e f mensurável em relação a $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Então*

$$\int_X \left(\int_Y |f(x, y)| d\nu \right) d\mu < \infty$$

se, e só se,

$$\int_Y \left(\int_X |f(x, y)| d\mu \right) d\nu < \infty.$$

Se uma das desigualdades acima ocorrer as integrais repetidas são iguais.

2.4 Transformada de Fourier

Definição 2.4.1. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a transformada de Fourier de f é a função*

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx,$$

e a transformada de Fourier inversa de f é definida por

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \check{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

Onde $\xi \cdot x = \xi_1 \cdot x_1 \dots \xi_n \cdot x_n$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a convolução de f e g é a função

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Teorema 2.4.1. Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).$$

Sejam $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ então denotamos

$$\partial/\partial x_i = D_i, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \text{ e } x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

O espaço de Schwartz, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto das funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Seja $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ que são contínuas e tendem a zero com $|x| \rightarrow \infty$. Dizemos que f tem suporte compacto se o fecho de $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$ for compacto, seja $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções \mathcal{C}^∞ de suporte compacto, se $1 \leq p < \infty$ então $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ e é denso em $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$ na norma L^∞ .

Sejam $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\{f_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tais que $f_n \rightarrow f$ na norma de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Definimos

$$\hat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n.$$

Teorema 2.4.2. A função

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \\ f &\longmapsto \mathcal{F}f = \hat{f} \end{aligned}$$

é um operador unitário. \mathcal{F} é a transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.4.3. (*Identidade de Parseval*). Se $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle,$$

a igualdade anterior é equivalente a

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Considere o operador maximal de multiplicação por $|\xi|^2$ definido por

$$D(M_0) = \{g \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid |\xi|^2 g \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

$$(M_0g)(\xi) = |\xi|^2 g(\xi), g \in D(M_0).$$

O operador H_0 é definido por

$$D(H_0) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid |\xi|^2 \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

$$H_0f = \mathcal{F}^{-1}(M_0\mathcal{F}f), f \in D(H_0).$$

A seguir definiremos funções do operador H_0 . Seja $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, uma função mensurável, o operador maximal de multiplicação por $F(|\xi|^2)$, $F(M_0)$ é definido por

$$D(F(M_0)) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid F(|\cdot|^2)\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

$$(F(M_0)\varphi)(\xi) = F(|\xi|^2)\varphi(\xi), \varphi \in D(F(M_0)).$$

Definimos então $F(H_0)$ por

$$D(F(H_0)) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid F(|\cdot|^2)\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

$$F(H_0)f = \mathcal{F}^{-1}(F(M_0)\mathcal{F}f), f \in D(F(H_0)).$$

Teorema 2.4.4. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ então $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}.$$

Denotaremos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ o espaço dos operadores $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ tais que T é linear e contínuo. Os elementos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ são chamados *distribuições temperadas*. Se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $T\varphi$ será denotado por

$$T\varphi = \langle T, \varphi \rangle.$$

Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, então a transformada de Fourier de f é definida pela fórmula

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Analogamente a transformada inversa é definida por

$$\langle \check{f}, \varphi \rangle = \langle f, \check{\varphi} \rangle, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

2.5 Espaços de Sobolev

Na seção a seguir as referências sobre espaços de Sobolev podem ser encontradas em [21].

Definição 2.5.1. Os conjuntos $H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$, $s \in \mathbb{R}$ são chamados *espaços de Sobolev de tipo L^2 em \mathbb{R}^n* .

Se $s \in \mathbb{R}$ o espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$ munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi,$$

é um espaço de Hilbert. A norma de $H^s(\mathbb{R}^n)$ é

$$\|f\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Usando a identidade de parseval temos

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_s &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi) \overline{(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{g}(\xi)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} ((1 - \partial_x^2)^{s/2} f)^\wedge(\xi) \overline{((1 - \partial_x^2)^{s/2} g)^\wedge(\xi)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} ((1 - \partial_x^2)^{s/2} f)(x) \overline{((1 - \partial_x^2)^{s/2} g)(x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (J^s f)(x) \overline{(J^s g)(x)} dx. \end{aligned}$$

A norma de $H^s(\mathbb{R}^n)$ pode, portanto ser escrita como

$$\|f\|_s = \int_{\mathbb{R}^n} |(J^s f)(x)|^2 dx.$$

Teorema 2.5.1. *Se $s > n/2$, então $H^s(\mathbb{R}^n)$ está continuamente imerso em $\mathbb{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$*

e

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C(n, s) \|f\|_s,$$

onde

$$C(n, s) = (2\pi)^{-n/2} \left[\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi \right]^{1/2}.$$

Os próximos lemas serão muito usados no capítulo três.

Lema 2.5.1. *Se $\lambda \geq 0$ e $r \in [0, \infty)$, então*

$$C_1(1 + r^\lambda) \leq (1 + r)^\lambda \leq C_2(1 + r^\lambda),$$

onde $C_1 = \min\{1, 2^{\lambda-1}\}$ e $C_2 = \max\{1, 2^{\lambda-1}\}$.

Sugestão para a demonstração: Estude o comportamento da função

$$\varphi(r) = \frac{(1 + r)^\lambda}{1 + r^\lambda}.$$

Lema 2.5.2. *(Lema de Gronwall). Sejam $f, k \in L^1([0, T])$, $k, C \geq 0$, onde C é constante. Então se*

$$f(t) \leq C + \int_0^t k(s) f(s) ds, \quad (2.2)$$

temos que

$$f(t) \leq C \exp \left[\int_0^t k(s) ds \right].$$

Demonstração Se

$$R(t) = \int_0^t f(s) k(s) ds,$$

então

$$\frac{d}{dt} \left\{ R(t) \exp \left[- \int_0^t k(s) ds \right] \right\} \leq C k(t) \exp \left[- \int_0^t k(s) ds \right],$$

logo, integrando de 0 a t , $t \in [0, T]$, obtemos

$$\begin{aligned} R(t) \exp \left[- \int_0^t k(s) ds \right] &\leq C \int_0^t k(s) \exp \left[- \int_0^s k(\tau) d\tau \right] ds \\ R(t) &\leq C \int_0^t k(s) \exp \left[\int_s^t k(\tau) d\tau \right] ds \\ &= -C + C \exp \left[\int_0^t k(s) ds \right] \\ &\leq C \exp \left[\int_0^t k(s) ds \right], \end{aligned}$$

então de (2.2) obtemos

$$f(t) \leq C \exp \left[\int_0^t k(s) ds \right].$$

Se $m \in \mathbb{N}$, seja $C_0^m(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções de classe C^m de suporte compacto em \mathbb{R}^n .

Lema 2.5.3. (*Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg*). *Sejam q, r tais que $1 \leq q, r \leq \infty$, e α, β multi-índices satisfazendo $0 \leq |\alpha| < |\beta|$. Se $u \in C_0^{|\beta|}(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\frac{1}{p} = \frac{|\alpha|}{n} + \theta \left(\frac{1}{r} - \frac{|\beta|}{n} \right) + (1 - \theta) \frac{1}{q},$$

então

$$\|D^\alpha u\|_{L^p} \leq C \|D^\beta u\|_{L^r}^\theta \|u\|_{L^q}^{1-\theta}, \quad (2.3)$$

para todo θ no intervalo

$$\frac{|\alpha|}{|\beta|} \leq \theta \leq 1,$$

onde $C = C(n, |\alpha|, |\beta|, q, r)$ e $|\beta| - |\alpha| - \frac{n}{r}$ não é um inteiro não-negativo. Se $|\beta| - |\alpha| - \frac{n}{r}$ é um inteiro não-negativo então (2.3) é válido apenas para $\theta = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$.

Lema 2.5.4. (*Desigualdade de Young*). *Para quaisquer $a, b \geq 0$ e $\epsilon > 0$, se $1 < p < \infty$ e*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

então

$$ab \leq \epsilon a^p + C_\epsilon b^{p'},$$

onde $C_\epsilon = \epsilon^{-1/p-1}$.

Lema 2.5.5. *Se $s > 1/2$ e $f, g \in H^s(\mathbb{R})$ então $fg \in H^s(\mathbb{R})$ e*

$$\|fg\|_s \leq C(s)\|f\|_s\|g\|_s.$$

Veja em [20] uma versão generalizada.

Lema 2.5.6. *(Desigualdade de Kato-Ponce). Se $s > 1/2$ e $f, g \in H^s(\mathbb{R})$ então $fg \in H^s(\mathbb{R})$ e*

$$\|fg\|_s \leq C(\|f\|_{L^\infty}\|g\|_s + \|f\|_s\|g\|_{L^\infty}).$$

Veja em [20] uma versão generalizada.

Lema 2.5.7. *Sejam $\theta \geq 0$, $0 < \lambda < 2$ e $a \geq 0$, então*

$$-\theta^2 + a\theta^\lambda \leq C(\lambda)a^{\frac{2}{2-\lambda}}.$$

Sugestão para demonstração: Calcule o máximo da função

$$F(\theta) = -\theta^2 + a\theta^\lambda, \quad \theta \geq 0.$$

2.6 Semigrupos de Operadores Lineares

A teoria desta seção pode ser encontrada em [20].

Definição 2.6.1. *Um operador T de X em Y é dito fechado, se para qualquer sequência $\{u_n\} \subseteq D(T)$, com $u_n \rightarrow u$ e $Tu_n \rightarrow v$, tem-se*

$$u \in D(T) \quad e \quad v = Tu.$$

Definição 2.6.2. *Seja $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ um operador linear. O conjunto dos números complexos λ , tais que $(\lambda - T)^{-1}$ existe e é limitado é chamado o Conjunto Resolvente de T e é denotado por $\rho(T)$. O conjunto $Sp(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ é chamado o Espectro de T . A aplicação $R(\lambda, T) = (\lambda - T)^{-1}$ é chamada o Resolvente de T .*

Na próxima definição I é a identidade em X .

Definição 2.6.3. *Seja X um espaço de Banach. Uma família $T(t), 0 \leq t < \infty$, de operadores lineares limitados em X é chamada um semigrupo de operadores lineares limitados em X se*

$$a) T(0) = I.$$

$$b) T(t + s) = T(t)T(s), t, s \geq 0.$$

O operador linear definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X \mid \exists \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \right\}$$

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, x \in D(A)$$

é chamado o gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)$.

Definição 2.6.4. *Um semigrupo de operadores lineares limitados em X , $T(t)$, é uniformemente contínuo se*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\|_{\mathcal{B}(X)} = 0.$$

Teorema 2.6.1. *A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados $T(t)$ se, e somente se, A é um operador linear limitado. Além disso*

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Definição 2.6.5. *Seja X um espaço de Banach. Um semigrupo $T(t), 0 \leq t < \infty$ de Operadores Lineares Limitados em X é dito um semigrupo fortemente contínuo se*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x, \text{ para todo } x \in X.$$

Um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em X será chamado um semigrupo de classe C_0 ou um semigrupo C_0 .

Teorema 2.6.2. *Sejam $T(t)$ um semigrupo C_0 e A seu gerador infinitesimal.*

a) Se $x \in X$, então

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

b) Se $x \in X$, então

$$\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$$

e

$$A\left(\int_0^t T(s)x ds\right) = T(t)x - x$$

c) Se $x \in D(A)$, então $T(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{dT(t)x}{dt} = AT(t)x = T(t)Ax.$$

d) Se $x \in D(A)$, então

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau.$$

Corolário 2.6.1. Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 , $T(t)$, então A é fechado e densamente definido.

Demonstração Sejam $x \in X$ e

$$x_t = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds, \quad t > 0.$$

Pelas partes a) e b) do teorema anterior temos respectivamente, $x_t \rightarrow x$, com $t \downarrow 0$ e $x_t \in D(A)$, logo $D(A)$ é denso em X .

Seja $x_n \in D(A)$, tal que $x_n \rightarrow x$ e $Ax_n \rightarrow y$. Pela parte d) do teorema anterior temos

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds. \quad (2.4)$$

Se $s \in (0, t)$ notemos que

$$\begin{aligned} \|T(s)Ax_n - T(s)y\|_X &= \|T(s)(Ax_n - y)\|_X \\ &\leq \|T(s)\|_{\mathcal{B}(X)} \|Ax_n - y\|_X \\ &\leq Me^{\omega s} \|Ax_n - y\|_X \\ &\leq Me^{\omega t} \|Ax_n - y\|_X \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

com $n \rightarrow \infty$. Logo $T(s)Ax_n$ converge uniformemente para $T(s)y$ no intervalo $(0, t)$. Então tomando o limite nos dois lados de (2.4) temos

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y ds. \quad (2.6)$$

Dividindo os dois membros de (2.6) por $t > 0$ e fazendo $t \downarrow 0$, obtemos que $x \in D(A)$ e $Ax = y$, pela parte a) do teorema anterior.

Seja A um operador satisfazendo as condições:

- a) A é fechado e densamente definido.
- b) O conjunto resolvente de A $\rho(A) \supseteq (0, \infty)$ e para todo $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Usando as condições a) e b) anteriores provaremos os próximos lemas.

Lema 2.6.1. *Suponha que A satisfaz as hipóteses a) e b) acima, então $R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}$, satisfaz a igualdade*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall x \in X.$$

Demonstração

$$\begin{aligned} x \in D(A) \Rightarrow \|\lambda R(\lambda, A)x - x\|_X &= \|AR(\lambda, A)x\|_X \\ &= \|R(\lambda, A)Ax\|_X \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\|_X \rightarrow 0, \text{ com } \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Como $D(A)$ é denso em X e $\|\lambda R(\lambda, A)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq 1$, temos $\lambda R(\lambda, A)x \rightarrow x$, com $\lambda \rightarrow \infty$, $\forall x \in X$. De fato, sejam $x \in X$, $x_n \in D(A)$, $x_n \rightarrow x$.

Então, dado $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}$ tal que $n > N \Rightarrow \|x_n - x\|_X < \frac{\epsilon}{4}$. Fixemos $n_0 > N$, então

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\|_X &\leq 2\|x_{n_0} - x\|_X + \|\lambda R(\lambda, A)x_{n_0} - x_{n_0}\|_X \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \|\lambda R(\lambda, A)x_{n_0} - x_{n_0}\|_X, \forall \lambda > 0, x \in X. \end{aligned}$$

Fazendo $\lambda \rightarrow \infty$ acima obtemos a igualdade

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall x \in X.$$

Se $\lambda > 0$, $A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda$ é chamada a aproximação de Yosida de A .

Lema 2.6.2. *Suponha que A satisfaz as hipóteses a) e b) acima. Então se A_λ é a aproximação de Yosida de A , temos*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax, \quad \text{se } x \in D(A)$$

Demonstração

$$\begin{aligned} x \in D(A) \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} AR(\lambda, A)x \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} R(\lambda, A)Ax \\ &= Ax \end{aligned}$$

Lema 2.6.3. *Seja A satisfazendo as hipóteses a) e b) anteriores. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de contrações e^{tA_λ} .*

Além disso tem-se

$$\|e^{tA_\lambda} - e^{tA_\mu}\|_{\mathcal{B}(X)} \leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|_X, \quad \forall x \in X, \quad \lambda, \mu > 0.$$

Demonstração Pela definição temos que $A_\lambda \in \mathcal{B}(X)$, logo pelo teorema 2.14 A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo e^{tA_λ} . Temos também

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{B}(X)} &= \|e^{t(\lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda)}\|_{\mathcal{B}(X)} \\ &= \|e^{-t\lambda I} e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)}\|_{\mathcal{B}(X)} \\ &\leq \|e^{-t\lambda I}\|_{\mathcal{B}(X)} \|e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)}\|_{\mathcal{B}(X)} \\ &= \|e^{-t\lambda I}\|_{\mathcal{B}(X)} \|e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)}\|_{\mathcal{B}(X)} \\ &\leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{B}(X)}} \leq 1 \end{aligned}$$

Logo e^{tA_λ} é um semigrupo de contrações. Pelas definições temos que e^{tA_λ} , e^{tA_μ} , A_λ e A_μ comutam entre se. Então

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\|_X &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} (e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x) ds \right\|_X \\
&\leq \int_0^1 \|(tA_\lambda e^{tsA_\lambda} - e^{tsA_\lambda} tA_\mu) e^{t(1-s)A_\mu} x\|_X ds \\
&= \int_0^1 \|te^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} (A_\lambda x - A_\mu x)\|_X ds \\
&\leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|_X \int_0^1 \|e^{tsA_\lambda}\| \|e^{t(1-s)A_\mu}\| ds \\
&\leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|_X
\end{aligned}$$

Teorema 2.6.3. (Hille-Yosida). Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações $T(t)$, $t \geq 0$, se, e somente se

- A é fechado e densamente definido.
- O conjunto resolvente de A $\rho(A) \supseteq (0, \infty)$ e para todo $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração

Do corolário 2.6.1 obtemos a). Seja $\lambda > 0$. Defina

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt. \quad (2.7)$$

$t \rightarrow T(t)x$ é contínua, logo $e^{-\lambda t} T(t)x$ é integrável no sentido de Riemann em $[0, a]$ para todo $a > 0$. Temos também

$$\|R(\lambda)x\|_X \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)x\|_X dt \leq \frac{1}{\lambda} \|x\|_X,$$

logo (2.7) existe como integral imprópria de Riemann. Além disso, se $h > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t+h)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\
&= \frac{1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda t} e^{\lambda h} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\
&= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt.
\end{aligned} \quad (2.8)$$

Fazendo $h \downarrow 0$ em (2.7) obtemos $AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x$, $\forall x \in X$, logo se $x \in X$, então $R(\lambda)x \in D(A)$, e

$$(\lambda - A)R(\lambda) = I. \quad (2.9)$$

Se $x \in D(A)$, então

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)Ax dt \\ &= \int_0^\infty A(e^{-\lambda t} T(t)x) dt \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a A(e^{-\lambda t} T(t)x) dt \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} A\left(\int_0^a (e^{-\lambda t} T(t)x) dt\right) \\ &= A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt\right) \\ &= AR(\lambda)x. \end{aligned}$$

Onde na quarta igualdade usamos o fato de A se fechado. Então de (2.9) e da igualdade anterior obtemos

$$\begin{aligned} x \in D(A) \Rightarrow x = (\lambda - A)R(\lambda)x &= \lambda R(\lambda)x - AR(\lambda)x \\ &= \lambda R(\lambda)x - R(\lambda)Ax \\ &= R(\lambda)(\lambda - A)x. \end{aligned}$$

Logo

$$I = R(\lambda)(\lambda - A). \quad (2.10)$$

Portanto de (2.9) e (2.23) obtemos $R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$ e $(0, \infty) \subset \rho(A)$.

Provaremos a seguir que a condição é suficiente. Faremos duas provas distintas:

(1ª Prova)

Seja $x \in D(A)$, então usando o lema 2.6.3 temos

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\|_X &\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|_X \\ &\leq t\|A_\lambda x - Ax\|_X + t\|Ax - A_\mu x\|_X \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Logo $e^{tA_\lambda}x$, converge com $\lambda \rightarrow \infty$, $\forall x \in X$. Como $D(A)$ é denso em X e $\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{B}(X)} \leq 1$ temos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x, \forall x \in X. \quad (2.11)$$

A prova desta afirmação é análoga à demonstração do lema 2.6.3. O limite (2.11) é uniforme em intervalos limitados. De (2.11) segue que $T(t)$ satisfaz as propriedades de semigrupo, de fato

$$T(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{0A_\lambda}x = Ix = x.$$

logo $T(0) = I$.

$$\begin{aligned} T(t+s)x &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{(t+s)A_\lambda}x \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}(e^{sA_\lambda}x) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}(\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{sA_\lambda}x) \\ &= T(t)(T(s)x) \\ &= T(t)T(s)x. \end{aligned}$$

logo, $T(t+s) = T(t)T(s)$, $t, s \geq 0$. Temos que $\|T(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq 1$ e a função $t \rightarrow T(t)x$, $t \geq 0$ é contínua pois é o limite uniforme de funções contínuas $t \rightarrow e^{tA_\lambda}x$. Logo $T(t)$, é um semigrupo C_0 de contrações em X . Resta provar que A é o seu gerador infinitesimal. (2.7) e teorema 2.6.2 implicam que

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (e^{tA_\lambda}x - x) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda x ds \\ &= \int_0^t T(s)Ax ds. \end{aligned} \quad (2.12)$$

A última igualdade segue da convergência uniforme de $e^{sA_\lambda}A_\lambda x$ para $T(s)Ax$ em intervalos limitados. Sejam B o gerador infinitesimal de $T(t)$ e $x \in D(A)$. Então (1.9) implica que $x \in D(B)$ e $Bx = Ax$. Logo $B \supseteq A$. Como B é o gerador infinitesimal de $T(t)$ segue das condições necessárias que $1 \in \rho(B)$. Por outro lado temos

$1 \in \rho(A)$. Como $B \supseteq A$, temos $(1-B)D(A) = (1-A)D(A) = X$, logo $D(B) = (1-B)^{-1}X$

$= D(A)$, e portanto $A = B$.

(2ª Prova)

Por hipótese o resolvente $\rho(A) \supset \mathbb{R}^+$ e para cada $\lambda > 0$, o resolvente satisfaz a desigualdade

$$\|(A + \lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}, \lambda > 0 \quad (2.13)$$

Para ver isto notemos primeiro que (2.12) implica

$$\|(1 + \alpha A)^{-1}\| \leq 1, \alpha \geq 0 \quad (2.14)$$

Definimos

$$V_n(t) = (1 + \frac{t}{n}A)^{-n}, t \geq 0, n = 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

Seque-se por (2.13) que $\|V_n(t)\| \leq 1$ de forma que $V_n(t)$ é uniformemente limitada. Além disso, $V_n(t)$ é holomorfa em t para $t > 0$ pois $(A + \lambda)^{-1}$ é holomorfa em $\lambda > 0$; em particular

$$V_n'(t) = \frac{d}{dt}V_n(t) = -A(1 + \frac{t}{n}A)^{-n-1} \in \mathcal{B}(X), t > 0 \quad (2.16)$$

$V_n(t)$ não é necessariamente holomorfa em $t = 0$ (pois definimos resolvente para $t > 0$), mas é fortemente contínua, isto é,

$$V_n(t) \rightarrow V_n(0) = 1, \text{ quando } t \downarrow 0 \quad (2.17)$$

Esta propriedade segue-se por

$$(1 + \alpha A)^{-1} \rightarrow_s 1, \alpha \downarrow 0 \quad (2.18)$$

Para verificar a existência do limite $V_n(t)$, vamos estimar $V_n(t) - V_m(t)$

$$\begin{aligned} V_n(t) - V_m(t) &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} \frac{d}{ds} [V_m(t-s)V_n(s)u] ds \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} [-V_m'(t-s)V_n(s)u + V_m(t-s)V_n'(s)u] ds \end{aligned} \quad (2.19)$$

Então por

$$V'_n(t) = \frac{d}{dt}V_n(t) = A(1 + \frac{t}{n}A)^{-n-1} \in \mathcal{B}(X), t > 0 \quad (2.20)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} & V_n(t) - V_m(t)u \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} [-V'_m(t-s)V_n(s)u + V_m(t-s)V'_n(s)u]ds \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} [A(1 + \frac{(t-s)}{m}A)^{-m-1}(1 + \frac{s}{n}A)^{-n}u \\ &\quad - (1 + \frac{(t-s)}{m}A)^{-m}A(1 + \frac{s}{n}A)]ds \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} (1 + \frac{(t-s)}{m}A)^{-m-1}[A(1 + \frac{s}{n}A) \\ &\quad - (1 + \frac{(t-s)}{m}A)A(1 + \frac{s}{n}A)^{-n-1}(1 + \frac{s}{n}A)^{n+1}](1 + \frac{s}{n}A)^{-n-1}uds \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} (\frac{s}{n} - \frac{t-s}{m})(1 + \frac{t-s}{m}A)^{-m-1}A^2(1 + \frac{s}{n}A)^{-n-1}uds \end{aligned} \quad (2.21)$$

Estando $u \in D(A^2)$, e como o resolvente de A comuta com A , então por (2.20) segue-se que

$$\begin{aligned} V_n(t)u - V_m(t)u &= \int_0^t (\frac{s}{n} - \frac{t-s}{m})(1 + \frac{t-s}{m}A)^{-m-1}(1 \\ &\quad + \frac{s}{n}A)^{-n-1}A^2uds; \end{aligned} \quad (2.22)$$

Note por

$$(1 + \alpha A)^{-1} \rightarrow_s 1, \alpha \downarrow 0 \quad (2.23)$$

que o integrando é contínuo para $0 \leq s \leq t$. Seque-se por $\|(1 + \alpha A)^{-1}\| \leq 1, \alpha \geq 0$ que

$$\begin{aligned} \|V_n(t)u - V_m(t)u\| &\leq \|T^2u\| \int_0^t (\frac{s}{n} + \frac{t-s}{m})ds \\ &= \frac{t^2}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})\|A^2u\| \end{aligned} \quad (2.24)$$

Assim $V_n(t)$ forma uma sequência de Cauchy e o $\lim V_n(t)$ existe, uniformemente em t em cada intervalo finito, desde que $u \in D(T^2)$.

Como $V_n(t)$ é uma sequência de operadores limitados, isto é, $\|V_n(t)\| \leq 1$ e além disso como $\overline{D(A^2)} = X$, então o $\lim V_n(t)$ existe $\forall u \in X$, ié,

$$U(t) = s - \lim V_n(t) = s - \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{t}{n}A)^{-n}, t \geq 0, \quad (2.25)$$

Veremos agora que $U(t)$ satisfaz as propriedades de semigrupo

Desde que $V_n(t)u \rightarrow U(t)u$ uniformemente em t em cada intervalo finito e $V_n(t)$ é contínua em t então $U(t)u$ é contínua em t . Em outras palavras, $U(t)$ é fortemente contínua para $t \geq 0$. Além disso, temos que

$$\|U(t)\| \leq 1, U(0) = 1, \quad (2.26)$$

desde que $\|V_n(t)\| \leq 1$ e $V_n(0) = 1$

Agora seque-se por $V_n'(t) = \frac{d}{dt}V_n(t) = -A(1 + \frac{t}{n}A)$ que

$$\begin{aligned} V_n'(t) &= -A(1 + \frac{t}{n}A)^{-1}V_n(t) \\ &= -V_n(t)A(1 + \frac{t}{n}A)^{-1} \\ &= -AV_n(t)(1 + \frac{t}{n}A)^{-1} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Mas

$$A(1 + \frac{t}{n}A)^{-1}u = (1 + \frac{t}{n}A)^{-1}Au \rightarrow Au \quad (2.28)$$

para $u \in D(A)$ por $(1 + \alpha A)^{-1} \rightarrow 1$ quando $n \downarrow \infty$

Tomando o terceiro membro de (2.26) e aplicando a u temos

$$-V_n(t)A(1 + \frac{t}{n}A)u \rightarrow U(t)Au \quad (2.29)$$

Da mesma forma, tomando o fator depois de A no quarto membro e aplicando a u temos:

$$V_n(t)(1 + \frac{t}{n}A)^{-1}u \rightarrow U(t)u \quad (2.30)$$

pela mesma razão anterior; seque-se do fechamento de A que $AU(t)u$ existe e $AU(t)u = U(t)Au$. Em outras palavras A comuta com $U(t)$:

$$AU(t) \supset U(t)A \quad (2.31)$$

Seque-se por $V_n'(t) = -A(1 + \frac{t}{n}A)^{-n-1} \in \mathcal{B}(X)$, $t > 0$ e por $V_n(t) \rightarrow V_n(0) = 1$ quando $t \downarrow 0$ que

$$V_n(t)u - u = - \int_0^t (1 + \frac{s}{n}A)^{-n-1} A u ds, u \in D(T) \quad (2.32)$$

Desde que $(1 + \frac{t}{n}A)^{-n-1} = (1 + \frac{t}{n}A)^{-1} V_n(t) \rightarrow_s U(t)$ uniformemente em t em cada intervalo finito, quando passamos o limite com $n \rightarrow \infty$ dentro da integral (2.31) obtemos

$$U(t)u - u = - \int_0^t U(s) A u ds, u \in D(A) \quad (2.33)$$

Desde que $U(s)Au$ é contínua em t , (2.32) mostra que $U(t)u$ é diferenciável em t se $u \in D(A)$, com

$$\frac{d}{dt} U(t)u = -U(t)Tu = -TU(t)u, t \geq 0, u \in D(A) \quad (2.34)$$

Assim $u(t) = U(t)u_0$ é solução da equação diferencial

$$\frac{du}{dt} = -Au, \text{ com, } u_0 \in D(A) \quad (2.35)$$

Mostremos que a solução é única

Seja $u(t)$ qualquer solução de $\frac{du}{dt} = -Au$, onde $u(t)$ é contínua para $t \geq 0$, e a derivada $\frac{du}{dt}$ existe para $t > 0$, $u(t) \in D(A)$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} U(t-s)u(s) &= (\frac{d}{ds} U(t-s))u(s) + U(t-s) \frac{d}{ds} u(s) \\ &= U'(t-s)u(s) + U(t-s)u'(s) \\ &= U(t-s)Au(s) - U(t-s)Au(s) = 0, s < 0 \leq t \end{aligned} \quad (2.36)$$

Assim $U(t-s)u(s)$ é contínua para $0 \leq s \leq t$ Fazendo $s = t$ e $s = 0$, obtemos:

$$u(t) = U(t-s)u(s) = U(t)u(0), 0 \leq s \leq t \quad (2.37)$$

Aplicando (2.36) a solução $u(t) = U(t)u_0$, obtemos $U(t)u_0 = U(t-s)u(s) = U(t-s)U(s)u_0$. Desde que isto é verdade para $u_0 \in D(T)$, obtemos que $U(t) = U(t-s)U(s)$. Podemos pois, escrever

$$U(t+s) = U(t)U(s), s, t \geq 0 \quad (2.38)$$

Assim $U(t)$ forma um semigrupo a um-parâmetro. Desde que $\|U(t)\| \leq 1$, $U(t)$ é chamado semigrupo contração. $-A$ é chamado gerador infinitesimal do semigrupo. Escrevemos $U(t) = e^{-tA}$

2.7 Atratores

Definição 2.7.1. *Um conjunto $X \subset H$ é um funcional invariante de um semigrupo $S(t)$ se*

$$S(t)X = X, \forall t \geq 0 \quad (2.39)$$

Quando o operador $S(t)$ é injetor, a relação (2.39) implica que $S(-t)$ é definida em X , $\forall t > 0$ e

$$S(t)X = X, \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.40)$$

Definição 2.7.2. *Um atrator é um conjunto $\mathcal{A} \subset H$ se valem as seguintes propriedades:*

(i) \mathcal{A} é um conjunto invariante ($S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \forall t \geq 0$)

(ii) \mathcal{A} possui uma vizinhança \mathcal{U} tal que, para todo u_0 em \mathcal{U} , $S(t)u_0$ converge a \mathcal{A} quando $t \rightarrow \infty$:

$$\text{dist}(S(t)u_0, \mathcal{A}) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty \quad (2.41)$$

A distância em (ii) é a distância de um ponto a um conjunto

$$d(x, \mathcal{A}) = \inf_{y \in \mathcal{A}} d(x, y)$$

$d(x, y)$ denota a distância de x a y em H . Se \mathcal{A} é um atrator, o maior conjunto \mathcal{U} que satisfaz (ii) é chamado a base do atrator de \mathcal{A} . Alternativamente, nós expressamos dizendo que \mathcal{A} atrai os pontos de \mathcal{U} . Dizemos que \mathcal{A} atrai uniformemente o conjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ se

$$d(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty \quad (2.42)$$

onde $d(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ é a semidistância de dois conjuntos \mathcal{B}_0 e \mathcal{B}_1

$$d(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1) = \text{Sup}_{x \in \mathcal{B}_0} \text{Inf}_{y \in \mathcal{B}_1} d(x, y) \quad (2.43)$$

A convergência em (2.41) é equivalente ao seguinte: para cada $\epsilon > 0$, existe t_ϵ tal que para $t > t_\epsilon$, $S(t)\mathcal{B}$ é incluso em \mathcal{U}_ϵ , a ϵ vizinhança de \mathcal{A}

Definição 2.7.3. Dizemos que $\mathcal{A} \subset H$ é atrator global para um semigrupo $S(t)_{t \geq 0}$ se \mathcal{A} é um atrator compacto que atrai todo conjunto limitado de H .

Para estabelecer o conceito de atratores um conceito útil é o conceito relacionado com conjuntos absorventes.

Definição 2.7.4. Seja \mathcal{B} um subconjunto de H e \mathcal{U} um conjunto aberto contendo \mathcal{B} . Temos que \mathcal{B} é absorvente em \mathcal{U} se a órbita de algum conjunto limitado de \mathcal{U} entra em \mathcal{B} depois de um certo tempo

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{U}, \quad \mathcal{B}_0 \text{ limitado} \\ \exists t_1(\mathcal{B}_0); S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}, \quad \forall t \geq t_1(\mathcal{B}_0) \end{array} \right. \quad (2.44)$$

A existência de atrator global \mathcal{A} para um semigrupo $S(t)$ implica na existência de conjunto absorvente. De fato, para $\epsilon > 0$, seja \mathcal{V}_ϵ a ϵ vizinhança de \mathcal{A} . Então para cada conjunto limitado \mathcal{B}_0 , $d(S(t)\mathcal{B}_0, \mathcal{A}) \leq \epsilon/2$ para $t \geq t(\epsilon)$ e $S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{V}_\epsilon$ para tal t 's. Isto mostra que \mathcal{V}_ϵ é um conjunto absorvente. Reciprocamente mostramos que um semigrupo que possui conjunto absorvente e algumas outras propriedades possui um atrator.

Lema 2.7.1. Assuma que para algum subconjunto $\mathcal{A} \subset H$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$, e para algum $t_0 > 0$, o conjunto $\bigcup_{t \geq t_0} S(t)\mathcal{A}$ é relativamente compacto em H . Então $\omega\mathcal{A}$ é não vazio, compacto e invariante. Similarmente, se o conjuntos $S(t)^{-1}\mathcal{A}, t \geq 0$, são não vazios e para algum $t_0 > 0$, $\bigcup_{t \geq t_0} S(t)^{-1}\mathcal{A}$ é relativamente compacto, então $\alpha(\mathcal{A})$ é não vazio, compacto e invariante.

Demonstração Desde que \mathcal{A} é não vazio, os conjuntos $\bigcup_{t \geq t_s} S(t)\mathcal{A}$ são não vazios para algum $s \geq 0$. Consequentemente os conjuntos $\overline{\bigcup_{t \geq t_s} S(t)\mathcal{A}}$ são conjuntos compactos não vazios que decrescem quando s aumenta; esta interseção, igual a $\omega(\mathcal{A})$, é então um conjunto compacto. Pela caracterização de $\omega(\mathcal{A})$, é fácil de ver

que $S(t)\omega(\mathcal{A}) = \omega(\mathcal{A}), \forall t > 0$. Se $\psi \in S(t)\omega(\mathcal{A})$, então $\psi = S(t)\phi, \phi \in \omega(\mathcal{A})$, e usando a definição de semigrupo e as sequências ϕ_n, t_n , por $S(t_n)\phi_n$ quando $n \rightarrow \infty$ temos:

$$S(t)S(t_n)\phi_n = S(t+t_n)\phi_n \rightarrow S(t)\phi = \psi \quad (2.45)$$

que mostra que $\psi \in \omega(\mathcal{A})$. Reciprocamente, se $\phi \in \omega(\mathcal{A})$, consideramos novamente as sequências ϕ_n, t_n , dadas por $S(t_n)\phi_n$ quando $n \rightarrow \infty$ e observe que $t_n \geq t$, a sequência $S(t_n-t)\phi_n$ é relativamente compacta em H . Assim existe a subsequência $t_{n_i} \rightarrow \infty$ e $\psi \in H$ tal que

$$S(t_{n_i}-t)\phi_{n_i} \rightarrow \psi, \text{ quando } t \rightarrow \infty \quad (2.46)$$

Seque-se por $S(t_n)\phi_n$ quando $n \rightarrow \infty$ que $\psi \in \omega(\mathcal{A})$, e pela definição atratores temos que operadores $S\tau$,

$$S(t_{n_i})\phi_{n_i} = S(t)S(t_{n_i}-t)\phi_{n_i} \rightarrow S(t)\psi = \phi, \text{ quando } n_i \rightarrow \infty \quad (2.47)$$

assim $\phi \in S(t)\omega(\mathcal{A})$. A prova é totalmente similar para $\alpha(\mathcal{A})$

Lema 2.7.2. *Seja $S(t)$ um semigrupo que satisfaz as seguintes propriedades:*

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad S(t+s) = S(t)S(s), \forall s, t \geq 0 \\ (2) \quad S(0) = I \end{array} \right.$$

(3) $S(t)$ é um operador contínuo de H nele mesmo para todo $t \geq 0$

(4) $S(t)$ uniformemente compacto para t grande.

Então para todo conjunto limitado \mathcal{B}_0 de H , $w(\mathcal{B}_0)$ é não vazio, compacto, e invariante.

Demonstração Se assumirmos (3) então, $\bigcup_{t \geq t_0} S(t)\mathcal{B}_0$ é relativamente compacto e o Lema anterior é aplicado diretamente. Quando (4) é assumido, fazemos a seguinte observação que será usada repetidamente: Se ϕ_n é limitada e $t_n \rightarrow \infty$, então $S_2(t_n)\phi_n \rightarrow 0$ e $S_1(t_n)\phi_n$ é convergente se e somente se $S(t_n)\phi_n$ converge (em

em cada caso os limites são iguais). A norma $S_2(t_n)\phi_n$ é de fato limitada por $r_c(t)$ onde C é uma sequência $\phi_n, n \in \mathcal{N}$. Assim $S_2(t_n)\phi_n$ converge a 0, e

$$S(t_n)\phi_n = S_1(t_n)\phi_n + S_2(t_n)\phi_n$$

converge se e somente se $S_1(t_n)\phi_n$ converge. Usando a caracterização de conjunto ω -limite mostramos que o conjunto ω -limite de \mathcal{B}_0 para $S(t)$, $\omega\mathcal{B}_0$ é igual ao conjunto

$$\omega_1(\mathcal{B}_0) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S_1(t)\mathcal{B}_0} \quad (2.48)$$

A definição de $\omega_1(\mathcal{B}_0)$ se assemelha a de um conjunto ω -limite embora S_1 não seja um semigrupo. A propriedade similar é válida: $\phi \in \omega_1(\mathcal{B}_0)$ se e somente se existe uma sequência $\varphi_n \in \mathcal{B}_0$ e uma sequência $t_n \rightarrow \infty$, tal que

$$S_1(t_n)\mathcal{B}_0 \rightarrow \phi, \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (2.49)$$

Mostremos que $\omega(\mathcal{B}_0) = \omega_1(\mathcal{B}_0)$. Assuma que $\phi \in \omega(\mathcal{B}_0)$; então existe $\phi_n \in (\mathcal{B}_0)$ e uma sequência $t_n \rightarrow \infty$, tal que

$$S(t_n)\phi_n \rightarrow \phi, \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (2.50)$$

Temos que $S_1(t_n)\phi_n$ também converge a ϕ quando $n \rightarrow \infty$ e $\phi \in \omega_1(\mathcal{B}_0)$. A inclusão $\omega_1(\mathcal{B}_0) \subset \omega(\mathcal{B}_0)$ é obtida de forma similar, e finalmente

$$\omega(\mathcal{B}_0) = \omega_1(\mathcal{B}_0)$$

Na prova do lema anterior observamos que $\omega_1(\mathcal{B}_0)$, é não vazio e compacto desde que os conjuntos $\overline{\bigcup_{t \geq s} S_1(t)\mathcal{B}_0}$ são não vazios, fechados e decrescentes e $\overline{\bigcup_{t \geq t_0} S_1(t)\mathcal{B}_0}$ é compacto. Consequentemente $\omega(\mathcal{B}_0)$ é não vazio e compacto e resta mostrar que $\omega(\mathcal{B}_0)$ é invariante por S . A inclusão $S(t)\omega(\mathcal{B}_0), \forall t > 0$, é obtida exatamente pelo lema anterior. Seja $\varphi \in \omega(\mathcal{B}_0)$. Considerando as sequências φ_n, t_n , temos:

$$S(t)S(t_n)\varphi_n = S(t + t_n)\varphi_n \rightarrow S(t)\varphi = \psi$$

e assim $\psi \in \omega(\mathcal{B}_0)$. A inclusão oposta $\omega(\mathcal{B}_0) \subset S(t)\omega(\mathcal{B}_0)$ necessita de um argumento diferente. Seja $\varphi \in \omega(\mathcal{B}_0)$; existe uma sequência $\varphi \in (\mathcal{B}_0)$ e $t_n \rightarrow \infty$ tal que

$$S(t_n)\varphi_n \rightarrow \varphi, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

Para $t_n \geq t$ a sequência $S(t_n - t)\varphi_n$ é da forma

$$S(t_n - t)\varphi_n = S_1(t_n - t)\varphi_n + S_2(t_n - t)\varphi_n$$

A sequência $S_1(t_n - t)\varphi_n$ é relativamente compacta em h e contém uma subsequência convergente

$$S_1(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \rightarrow \psi, \text{ quando } n_i \rightarrow \infty$$

Temos que $S_2(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i}$ converge a 0 e assim

$$S(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \rightarrow \psi, \text{ quando } n_i \rightarrow \infty$$

Isto implica que $\psi \in \omega(\mathcal{B}_0)$ e

$$\varphi = \lim_{n_i \rightarrow \infty} S(t)S(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} = S(t)\psi$$

pertence a $S(t)\omega(\mathcal{B}_0)$.

Capítulo 3

O Problema de Cauchy

3.1 O Problema de Cauchy na reta

3.1.1 Teoria Linear

Neste capítulo consideraremos o problema de Cauchy associado à parte linear da equação (1.1), denotada por

$$v_t + v_{xxx} + \eta(\mathcal{H}v_x + \mathcal{H}v_{xxx}) + \mu v = 0, v(., 0) = \phi(.), \quad (3.1)$$

onde $\phi \in H^s$, para $s \in \mathbb{R}$, $\eta \geq 0$ e $\mu > 0$. Seja $t \geq 0$ e $\xi \in \mathbb{R}$. Aplicando a transformada de Fourier e integrando a expressão resultado entre 0 e t obtemos,

$$\widehat{v}(\xi, t) = \exp[(i\xi^3 + \eta(|\xi| - |\xi|^3) - \mu)t] \widehat{\phi}(\xi). \quad (3.2)$$

Para $t \geq 0$ e $\xi \in \mathbb{R}$, seja

$$F_{\eta,\mu}(t, \xi) = \exp[(i\xi^3 - \eta(|\xi|^3 - |\xi|) - \mu) t]. \quad (3.3)$$

Seja $(E_{\eta,\mu}(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo em $L^2(\mathbb{R})$ definido por

$$E_{\eta,\mu}(t)f = \mathcal{F}^{-1} \left(F_{\eta,\mu}(t, \cdot) \widehat{f} \right), f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (3.4)$$

Lema 3.1.1. *Seja $\eta > 0$ e $\mu > 0$. Então, $(E_{\eta,\mu}(t))_{t \geq 0}$ é um C^0 semigrupo em $H^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$. Além disso,*

$$\|E_{\eta,\mu}(t)\|_{B(H^s, H^s)} \leq e^{t(\mu-\eta)}. \quad (3.5)$$

Demonstração Segue-se pela definição de $E_{\eta,\mu}(t)$ que $E_{\eta,\mu}(0) = I$ e $E_{\eta,\mu}(t+t') = E_{\eta,\mu}(t)E_{\eta,\mu}(t')$. A continuidade do semigrupo é uma consequência da desigualdade

$$|F_{\eta,\mu}(\tau, \xi)| \leq e^{\eta(t+\frac{1}{2})}, \quad 0 \leq \tau \leq t + \frac{1}{2}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

e do teorema da Convergência Dominada. A relação (2.5) segue-se por,

$$e^{-2\eta t(|\xi|^3 - |\xi|)} \leq e^{2\eta t} \quad (3.7)$$

para algum $\xi \in \mathbb{R}$ e para $t \geq 0$.

Observação 3.1.1. *Seja $\phi \in H^s$. Então $v(\cdot, t) = E_{\eta,\mu}(t)\phi$ é a única solução de (2.1), na classe*

$$C(0, \infty; H^s) \cap C^1(0, \infty; H^{s-3}(\mathbb{R})).$$

O fato de $v(\cdot, t) \in C(0, \infty; H^s)$, segue-se diretamente da continuidade do semigrupo $E_{\eta,\mu}(t)$.

O fato de $v_t \in C(0, \infty; H^{s-3}(\mathbb{R}))$ é obtido como se segue. Seja $t, \tau \geq 0, \phi \in H^s$. Então,

$$\begin{aligned} \|v_t(t) - v_t(\tau)\|_{s-3} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \xi^2)^{s-3} |i\xi^3 - \eta(|\xi|^3 - |\xi|) - \mu|^2 \quad (3.8) \\ &|e^{t(i\xi^3 - \eta(|\xi|^3 - |\xi|) - \mu)} - e^{\tau(i\xi^3 - \eta(|\xi|^3 - |\xi|) - \mu)}|^2 |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Temos que $|i\xi^3 - \eta(|\xi|^3 - |\xi|) - \mu|^2 \leq c(\eta, \mu)(1 + \xi^2)^3$ e

$$|e^{t(i\xi^3 - \eta(|\xi|^3 - |\xi|) - \mu)} - e^{\tau(i\xi^3 - \eta(|\xi|^3 - |\xi|) - \mu)}| \leq 2e^{-(\mu-\eta)(t+\frac{1}{2})},$$

para $\tau \leq t + \frac{1}{2}$. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos que $\|v_t(t) - v_t(\tau)\|_{s-3} \rightarrow 0$ quando $\tau \rightarrow t$ e assim $v_t \in C(0, \infty; H^{s-3}(\mathbb{R}))$.

Usando as estimativas

$$\left| \frac{e^{h(i\xi^3 - \eta(|\xi|^3 - |\xi|) - \mu)} - 1}{h} \right| \leq c(\mu, \eta)(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}$$

e $|\xi^3 - \eta(|\xi|^3 - |\xi|) - \mu|^2 \leq c(\mu, \eta)(1 + \xi^2)^3$ e o Teorema da Convergência Dominada, obtemos que o

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{v(t+h) - v(t)}{h} + v_{xxx} + \eta(\mathcal{H}v_x + \mathcal{H}v_{xxx}) + \mu v \right\|_{s-3} = 0. \quad (3.9)$$

Lema 3.1.2. *Seja $t > 0$, $s \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$ e $\eta > 0$ dados. Então $E_{\eta, \mu}(t) \in B(H^s(\mathbb{R}), H^{s+\lambda}(\mathbb{R}))$. Além disso*

$$\|E_{\eta, \mu}(t)\phi\|_{s+\lambda} \leq c_\lambda [e^{(\eta-\mu)t} + e^{-\mu t} (1 + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{\lambda}{2}}}) e^{\frac{\eta t}{8}(\sqrt{3} + \sqrt{3 + \frac{8\sqrt{3}\lambda}{\eta t}})}] \|\phi\|_s.$$

Demonstração

Seja $\eta > 0$, $\mu > 0$, $t > 0$, $s \in \mathbb{R}$ e $\lambda \geq 0$. Então

$$\begin{aligned} \|E_{\eta, \mu}(t)\phi\|_{s+\lambda}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \xi^2)^{s+\lambda} |F_\eta(t, \xi) \widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{+\infty}^{-\infty} (1 + \xi^2)^{s+\lambda} e^{-2\eta t(|\xi^3 - |\xi||) - 2\mu t} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} [(1 + \xi^2)^\lambda e^{-2\eta t(|\xi^3 - |\xi||) - 2\mu t}] \|\phi\|_s^2 \\ &\leq c_\lambda \sup_{\xi \in \mathbb{R}} [e^{-2\eta t(|\xi^3 - |\xi||) - 2\mu t} + \xi^{2\lambda} e^{-2\eta t(|\xi^3 - |\xi||) - 2\mu t}] \|\phi\|_s^2 \\ &\leq c_\lambda [e^{2(\eta-\mu)t} + \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \xi^{2\lambda} e^{-2\eta t(|\xi^3 - |\xi||) - 2\mu t}] \|\phi\|_s^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

A função $\xi^{2\lambda} e^{-2\eta t(-|\xi| + |\xi|^3) - 2\mu t}$ é uma função par, portanto é suficiente majorar esta função para $\xi > 0$. Desde que $\xi^3 - \xi \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\xi^2 - \xi$, para $\xi \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$, então $\xi^{2\lambda} e^{-2\eta t(-|\xi| + |\xi|^3) - 2\mu t} \leq \xi^{2\lambda} e^{-2\eta t(\frac{1}{\sqrt{3}}\xi^2 - \xi) - 2\mu t} =: g(\xi)$. Logo,

$$\begin{aligned} g'(\xi) = 0 &\iff \xi^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\xi - \frac{\sqrt{3}}{2\eta t}\lambda = 0 \\ &\iff \xi = \frac{1}{4} \left[\sqrt{3} + \sqrt{3 + \frac{8\sqrt{3}\lambda}{\eta t}} \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Seja $\xi_0 := \frac{1}{4} \left[\sqrt{3} + \sqrt{3 + \frac{8\sqrt{3}\lambda}{\eta t}} \right] \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Segue-se pela definição de ξ_0 que,

$$-2\eta t \left(\frac{\xi_0^2}{\sqrt{3}} - \xi_0 \right) - 2\mu t = \frac{\sqrt{3}}{4}\eta t - \lambda + \frac{\eta t}{4} \sqrt{3 + \frac{8\sqrt{3}\lambda}{\eta t}} - 2\mu t. \quad (3.12)$$

Assim

$$\begin{aligned}
& \sup \xi^{2\lambda} e^{-2t\eta(-|\xi|+|\xi|^3)-2\mu t} \leq \\
& \leq c_\lambda e^{2\eta t} + \sup \xi^{2\lambda} e^{-2t\eta(\frac{\xi^2}{\sqrt{3}}-\xi)-2\mu t} \\
& \leq c_\lambda e^{2\eta t} + \xi_0^{2\lambda} e^{-2t\eta(-|\xi|+|\xi|^3)-2\mu t} \\
& \leq c_\lambda e^{2\eta t} + c_\lambda (3^\lambda + (3 + \frac{8\sqrt{3}\lambda}{\eta t})^\lambda) e^{\frac{\eta t}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{3}+\frac{8\sqrt{3}\lambda}{\eta t})-2\mu t} \\
& \leq c_\lambda e^{2\eta t} + (1 + \frac{1}{(\eta t)^\lambda}) e^{\frac{\eta t}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{3+\frac{8\sqrt{3}\lambda}{\eta t}})-2\mu t}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

As desigualdades acima implicam,

$$\|E_{\eta,\mu}(t)\psi\|_s \leq c_\lambda [e^{2(\eta-\mu)t} + e^{-2\mu t} (1 + \frac{1}{(\eta t)^\lambda}) e^{\frac{\eta t}{4}(\sqrt{3+\frac{8\sqrt{3}\lambda}{\eta t}})}] \|\phi_s\|^2. \tag{3.14}$$

Lema 3.1.3. *Seja $t > 0$, $s > -\frac{1}{2}$, $\eta > 0$ e $\mu > 0$ dados. Então, $E_{\eta,\mu}(t) \in B(L^1(\mathbb{R}), H^s(\mathbb{R}))$. Além disso,*

$$\|E_{\eta,\mu}(t)\psi\|_s \leq c_s e^{-\mu t} \left(e^{\eta t} + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{2s+1}{6}}} \right) \|\psi\|_{L^1}. \tag{3.15}$$

Demonstração Seja $t > 0$, $s > -\frac{1}{2}$, $\eta > 0$, $\mu > 0$ e $\psi \in L^1(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\|E_\eta(t)\psi\|_s^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \xi^2)^s |F_\eta(t, \eta)\psi(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq (2\pi)^{-1} \|\psi\|_{L^1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \xi^2)^s e^{-2\eta t(|\xi|^3-|\xi|)-2\mu t} d\xi.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Seja $I := \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \xi^2)^s e^{-2\eta t(|\xi|^3-|\xi|)-2\mu t} d\xi$. Então,

$$\begin{aligned}
I &= 2e^{-2\mu t} \left(\int_0^{+\infty} (1 + \xi^2)^s e^{-2\eta t(|\xi|^3-|\xi|)} d\xi \right) \\
&\leq 2e^{-2\mu t} \left(\int_0^{\sqrt{2}} 3^s e^{2\eta t} d\xi + \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} (2\xi^2)^s e^{-2\eta t(\xi^3-\xi)} d\xi \right) \\
&\leq e^{-2\mu t} (2^{\frac{3}{2}} 3^s e^{2\eta t} + 2^{s+1} \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \xi^{2s} e^{-\eta t \xi^3} d\xi),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

onde a segunda desigualdade de (2.17) é consequência da desigualdade $\xi^3 - \xi \leq \frac{\xi^3}{2}$ para $\xi \geq \sqrt{2}$. Fazendo a mudança de variável $y = \eta t \xi^3$ no lado direito da integral

acima, obtemos,

$$\begin{aligned}
I &\leq e^{-2\mu t} \left(2^{\frac{3}{2}} 3^s e^{2\eta t} + \frac{2^{s+1}}{3(\eta t)^{\frac{2s+1}{3}}} \int_0^{+\infty} y^{\frac{2s+1}{3}} e^{-s} dy \right) \\
&= e^{-2\mu t} \left(2^{\frac{3}{2}} 3^s e^{2\eta t} + \frac{2^{s+1}}{3(\eta t)^{\frac{2s+1}{3}}} \Gamma\left(\frac{2s+1}{3}\right) \right) \\
&\leq c_s e^{-2\mu t} \left(e^{2\eta t} + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{2s+1}{3}}} \right),
\end{aligned} \tag{3.18}$$

onde $c_s = \max \left\{ 2^{\frac{3}{2}} 3^s, \frac{2^{s+1}}{3} \Gamma\left(\frac{2s+1}{3}\right) \right\}$. Combinando (2.16) e (2.18), concluímos a demonstração.

3.1.2 Teoria Local

Neste capítulo usaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, para encontrar uma solução local para a equação integral equivalente a equação (1.1) em $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 1$.

Teorema 3.1.1. *Sejam $\eta > 0$, $\mu > 0$ e $\phi \in H^s$, onde $s \geq 1$. Então, existe $T_s(s, \|\phi\|_s, \eta) > 0$ e uma única função $u := u_{\eta, \mu} \in C(0, T_s; H^s(\mathbb{R}))$ satisfazendo a equação integral*

$$u(\cdot, t) = E_{\eta, \mu}(t)\phi(\cdot) - \frac{1}{2} \int_0^t E_{\eta, \mu}(t-t')(u_x)^2(\cdot, t') dt', \tag{3.19}$$

Demonstração Seja $M, T > 0$ fixos arbitrariamente onde T será escolhido convenientemente depois. Consideremos o caso $s \in [1, \frac{5}{2})$. Consideremos

$$(Af)(t) = E_{\eta, \mu}(t)\phi(\cdot) - \frac{1}{2} \int_0^t E_{\eta, \mu}(t-t')(f_x)^2(t') dt', \tag{3.20}$$

definido no espaço métrico completo

$$E_s(T) = \{f \in C(0, T, H^s(\mathbb{R})); \sup \|f(t) - E_{\eta}(t)\phi\|_s \leq M\}. \tag{3.21}$$

i.) Primeiro vamos provar que se $f \in E_s(T)$ então $Af \in C(0, T, H^s(\mathbb{R}))$. De fato, tomando $f \in E_s(T)$,

$$\begin{aligned}
\|(Af)(t) - (Af)(\tau)\|_s &\leq \|E_{\eta, \mu}(t)\phi - E_{\eta, \mu}(\tau)\phi\|_s \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\| \int_0^t E_{\eta, \mu}(t-t')(f_x)^2(t') dt' \right. \\
&\quad \left. - \int_0^\tau E_{\eta, \mu}(\tau-t')(f_x)^2(t') dt' \right\|_s.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

O primeiro termo do lado direito de (2.22) tende a zero quando $\tau \rightarrow t$ pois $E_{\eta,\mu}(t)$ é um C^0 semigrupo definido em H^s . Para estudar o segundo termo do lado direito de (2.22) vamos assumir sem perda de generalidade que $\tau > t > 0$. Então

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t E_{\eta,\mu}(t-t')(f_x)^2 dt' - \int_0^\tau E_{\eta,\mu}(\tau-t')(f_x)^2 dt' \right\|_s \\ & \leq \int_0^t \left\| (E_{\eta,\mu}(t-t') - E_{\eta,\mu}(\tau-t'))(f_x)^2(t) \right\|_s dt' \\ & \quad + \int_t^\tau \left\| E_{\eta,\mu}(\tau-t')(f_x)^2 dt' \right\|_s. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Denote por $I_1(t, \tau)$ e $I_2(t, \tau)$ o primeiro e segundo termo respectivamente do lado direito da expressão acima. Pelo Lema 2.1.3 segue-se que,

$$\begin{aligned} I_2(t, \tau) & \leq \int_t^\tau c_s e^{-\mu(\tau-t')} \left(e^{\eta(\tau-t')} + \frac{1}{(\eta(\tau-t'))^{\frac{2s+1}{6}}} \right) \|(f_x)^2(t')\|_{L^1} dt' \\ & \leq c_s \int_t^\tau \left(e^{(\eta-\mu)(\tau-t')} + \frac{e^{-\mu(\tau-t')}}{[\eta(\tau-t')]^{\frac{2s+1}{6}}} \right) \|f(t')\|_{L^1} dt' \\ & \leq c_s \int_t^\tau \left(e^{(\eta-\mu)(\tau-t')} + \frac{1}{[\eta(\tau-t)]^{\frac{2s+1}{6}}} \right) \|f(t')\|_{L^1} dt' \\ & = c_s \|f(t')\| \left[\int_t^\tau e^{(\eta-\mu)(\tau-t')} dt' + \int_t^\tau \frac{1}{[\eta(\tau-t)]^{\frac{2s+1}{6}}} dt' \right] \\ & \leq c_s (M^2 + e^{2\eta T} \|\phi\|_s^2) \int_t^\tau \left(e^{\eta(\tau-t')} + \frac{1}{(\eta(\tau-t))^{\frac{2s+1}{6}}} \right) dt' \\ & = c_s \frac{(M^2 + e^{2\eta T} \|\phi\|_s^2)}{\eta} \int_0^{\eta(\tau-t)} \left(e^r + \frac{1}{r^{\frac{2s+1}{6}}} \right) dr, \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde na segunda desigualdade usamos o fato que $\|(f_x)^2(t)\|_1^2 \leq \|f(t)\|_1^2$. Na terceira desigualdade o fato de que $e^{-\mu(\tau-t)} \leq 1$, com $t \leq t' \leq \tau$ e finalmente na quarta desigualdade o fato de que $e^{(\eta-\mu)(\tau-t')} = e^{\eta(\tau-t')} e^{\mu(\tau-t')} \leq e^{\eta(\tau-t')}$, com $t \leq t' \leq \tau$. Segue-se por (2.24) que $I_2(t, \tau)$ tende a zero quando $\tau \rightarrow t$. Por outro lado, usando o Lema 2.1.3 obtemos,

$$\begin{aligned} & \left\| (E_{\eta,\mu}(t-t')(f_x)^2 - E_{\eta,\mu}(\tau-t')(f_x)^2) \right\|_s \\ & \leq \|E_\eta(t-t')(f_x)^2(t')\|_s + \|E_\eta(\tau-t')(f_x)^2(t')\|_s \\ & \leq 2c_s \left(e^{(\eta-\mu)(T-t')} + \frac{1}{[\eta(t-t')]^{\frac{2s+1}{6}}} \right) \sup_{t' \in [0, T]} \|f(t')\|_1^2, \end{aligned}$$

onde este termo é uma função integrável para $t' \in [0, t]$.

Segue-se que o $\lim_{\tau \rightarrow t} \|(E_\eta(t-t') - E_\eta(\tau-t'))(f_x)^2(t)\|_s = 0$, para algum $t' \in [0, t]$. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada obtemos que $\lim_{\tau \rightarrow t} I_1(t, \tau) = 0$. Isto completa a prova que $Af \in C(0, T; H^s(\mathbb{R}))$.

ii.) Provaremos agora que é possível escolher $T = \tilde{T} > 0$ suficientemente pequeno tal que $A(E_s(\tilde{T})) \subset E_s(\tilde{T})$. Seja $u \in E_s(T)$. Então,

$$\begin{aligned}
& \|(Au)(t) - E_{\eta, \mu}(t)\phi\|_s \\
& \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|E_\eta(t-t')(u_x)^2(t)\|_s dt' \\
& \leq c_s \sup \|u(t)\|_1^2 \int_0^t e^{-\mu(t-t')} \left(e^{\eta(t-t')} + \frac{1}{(\eta(t-t'))^{\frac{2s+1}{6}}} \right) dt' \\
& \leq c_s \sup \|u(t)\|_1^2 \int_0^t \left(e^{(\eta-\mu)(t-t')} + \frac{1}{[\eta(t-t')]^{\frac{2s+1}{6}}} \right) dt' \\
& = c_s \sup \|u(t)\|_1^2 \int_0^t e^{(\eta-\mu)(t-t')} dt' + \int_t^\tau \frac{1}{[\eta(\tau-t)]^{\frac{2s+1}{6}}} dt' \\
& \leq c_s \sup \|u(t)\|_1^2 \int_0^t e^{\eta(t-t')} dt' + \frac{1}{[\eta(\tau-t)]^{\frac{2s+1}{6}}} dt' \\
& \leq c_s \sup \|u(t)\|_s^2 \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta t} \left(e^r + \frac{1}{r^{\frac{2s+1}{6}}} \right) dr \\
& \leq c_s (M^2 + e^{2\eta T} \|\phi\|_s^2) \left(\frac{e^{\eta T} - 1}{\eta} + \frac{6\eta^{-\frac{2s+1}{6}}}{-2s+5} T^{-\frac{2s+5}{6}} \right).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Escolhemos agora $T = \tilde{T} > 0$ suficientemente pequeno tal que o lado direito de (2.25) seja menor que M .

iii.) Finalmente vamos provar que existe $\hat{T} \in (0, \tilde{T}]$, tal que A seja contração em $E_s(\hat{T})$.

Seja $t \in [0, T]$, $u, v \in E_s(\tilde{T})$. Definindo

$$g(T) := \frac{e^{\eta T} - 1}{\eta} + \frac{6}{-2s+5} \eta^{-\frac{2s+1}{6}} T^{-\frac{2s+5}{6}}, \tag{3.26}$$

temos,

$$\begin{aligned}
\|Au(t) - Av(t)\|_s &\leq \frac{c_s}{2} \sup_{0 \leq t \leq \tilde{T}} \|(u_x)^2(t) - (v_x)^2(t)\|_{L^1} g(\tilde{T}) \\
&\leq \frac{c_s}{2} \sup_{0 \leq t \leq \tilde{T}} (\|u(t) - v(t)\|_1 (\|u(t)\|_1 + \|v(t)\|_1)) g(\tilde{T}) \\
&\leq c_s (M + e^{\eta \tilde{T} \|\phi\|_s}) g(\tilde{T}) \sup_{0 \leq t \leq \tilde{T}} \|u(t) - v(t)\|_s.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Fazendo $\hat{T} \in (0, \tilde{T}]$ tal que $c_s (M + e^{\eta \hat{T} \|\phi\|_s}) g(\hat{T}) < 1$, obtemos *iii.*)

Por i.), ii.) e iii.) segue-se que A possui um único ponto fixo $u \in E_s(\hat{T})$ que satisfaz a equação (3.19) onde $\hat{T} = T_s(s, \eta, \|\phi\|_s) > 0$. O fato de u ser a única solução da equação (2.19) na classe $u \in C(0, T_s; H^s(\mathbb{R}))$, é consequência da proposição 2.1.2 que será demonstrada posteriormente. Isto conclui a prova do teorema para $s \in [1, \frac{5}{2})$.

Teorema 3.1.2. *Sejam $\eta > 0$, $\mu > 0$ e $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, com $s > \frac{1}{2}$. Então existe $T_s(s, \|\phi\|_s, \eta) > 0$ e uma única função $u := u_{\eta, \mu} \in C(0, T_s; H^s(\mathbb{R}))$ satisfazendo a equação integral*

$$u(\cdot, t) = E_{\eta, \mu}(t) \phi(\cdot) - \frac{1}{2} \int_0^t E_{\eta, \mu}(t - t') (u^2)_x(\cdot, t') dt'$$

onde $E_{\eta, \mu}(t)$ é definida por (2.4).

Demonstração Similar a demonstração do teorema 2.1.1. Usamos o lema 2.1.2 (com $\lambda = 1$) e o fato que $\|(u^2)_x\|_{s-1} \leq \|(u^2)(t)\|_s \leq \|u(t)\|_s^2$, $s > \frac{1}{2}$.

Proposição 3.1.1. *O problema (1.1) (resp. (1.2)) é equivalente a equação integral (2.19). Mais precisamente, se $u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$ é solução de (1.1) (resp. (1.2)) então u satisfaz (2.19). Reciprocamente se $u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$ é solução de (2.19) então $u \in C^1([0, T]; H^{s-3}(\mathbb{R}))$ e satisfaz (1.1) (resp. (1.2)).*

Demonstração A primeira parte da prova esta demonstrada no Teorema 2.1.1 (resp. 2.1.2). A segunda parte é similar a demonstração do Teorema 4.19 (com $\lambda = 1$) em [41]

Na próxima proposição (prop. 2.1.2) provaremos a dependência contínua nos dados iniciais para os problemas (1.1) e (1.2). Porém antes disso vamos mencionar o seguinte resultado.

Lema 3.1.4. *Suponha $\beta > 0, \gamma > 0, \beta + \gamma > 1, a \geq 0, b \geq 0, u$ não negativa e $t^{\gamma-1}u(t)$ localmente integrável em $0 \leq t < T$. Se*

$$u(t) \leq a + b \int_0^t (t-s)^{\beta-1} s^{\gamma-1} u(s) ds$$

q.c em $(0, T)$, então

$$u(t) \leq a E_{\beta, \gamma}((b\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\nu}} t),$$

onde $\nu = \beta + \gamma - 1 > 0$

$$E_{\beta, \gamma}(s) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m s^{m\nu}, \quad (3.28)$$

com $c_0 = 1$ e $\frac{c_{m+1}}{c_m} = \frac{\Gamma(m\nu + \gamma)}{\Gamma(m\nu + \gamma + \beta)}$ para $m \geq 0$. Quando $s \rightarrow \infty$,

$$E_{\beta, \gamma}(s) = O(s^{1/2(\nu/\eta - \gamma)} \exp(\beta/\nu s^{\nu/\beta})).$$

Demonstração Lemma 7.1.2 em [34].

Proposição 3.1.2. *Seja $\phi, \psi \in H^s$ e seja $u, v \in C(0, T; H^s)$ soluções correspondentes da equação(2.19). Seja $M = \sup_{t' \in [0, T]} (\|u(t')\|_s + \|v(t')\|_s)$.*

1.) Se $s \in [1, 2)$, então

$$\|u(t) - v(t)\|_s \leq e^{\eta T} \|\phi - \psi\|_s E_{\frac{5-2s}{1}, 1}(\gamma t), \quad (3.29)$$

onde

$$\gamma = \left(\frac{c_s M e^{\eta T}}{2} \frac{(\eta T)^{\frac{2s+1}{6}}}{\eta^{\frac{2s+1}{6}}} \Gamma\left(\frac{5-2s}{6}\right) \right)^{\frac{6}{5-2s}},$$

e $E_{\frac{5-2s}{6}, 1}$ é dado por (2.29), (onde $\beta = \frac{5-2s}{6}$ e $\gamma = 1$).

2.) Se $s \geq 2$, então

$$\|u(t) - v(t)\|_s \leq e^{\eta T} \|\phi - \psi\|_s E_{\frac{1}{2}, 1}(\gamma t), \quad (3.30)$$

onde

$$\gamma = \left(c_1 M F(T, \eta) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right)^2, \quad (3.31)$$

e

$$F(T, \eta) = \left(\frac{2\sqrt{\eta T} + 1}{2\sqrt{\eta}} \right) e^{\eta T + \frac{1}{8}\sqrt{3(\eta T)^2 + 8\sqrt{3}\eta T}}. \quad (3.32)$$

A desigualdade (2.30) é verdade se $\phi, \psi \in H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{1}{2}$ e se $u, v \in C(0, T; H^s(\mathbb{R}))$, $s > \frac{1}{2}$ são as soluções correspondentes da equação (2.28).

Demonstração Seja ϕ, ψ, u, v dados.

Provemos 1.)

Seja $s \in [1, \frac{5}{2})$ e $w(t) = u(t) - v(t)$. Seja $M = \sup_{t' \in [0, T]} (\|u'\|_s + \|v'\|_s)$. Por (2.19) temos que

$$w(t) = E_{\eta, \mu}(t)(\phi - \psi) - \frac{1}{2} \int_0^t E_{\eta, \mu}(t - t') ((u_x)^2(\cdot, t') - (v_x)^2(\cdot, t')) dt'.$$

Por (2.5),(2.15) e pela de Cauchy-Schwarz obtemos:

$$\begin{aligned}
& \|w(t)\|_s \leq e^{(\eta-\mu)t} \|\phi - \psi\|_s \\
& + \frac{c_s}{2} \int_0^t e^{-\mu(t-t')} \left(e^{\eta(t-t')} + \frac{1}{(\eta(t-t'))^{\frac{2s+1}{6}}} \right). \\
& \|(v_x)^2(\cdot, t') - (u_x)^2(\cdot, t')\|_{L^1} dt' \\
& \leq e^{(\eta-\mu)t} \|\phi - \psi\|_s + \frac{c_s}{2} \int_0^t \left(e^{(\eta-\mu)(t-t')} + \frac{e^{-\mu(t-t')}}{(\eta(t-t'))^{\frac{2s+1}{6}}} \right) \\
& \|(v_x)^2(\cdot, t') - (u_x)^2(\cdot, t')\|_{L^1} dt' \\
& \leq e^{(\eta-\mu)t} \|\phi - \psi\|_s + \frac{c_s}{2} \int_0^t \left(e^{(\eta-\mu)(t-t')} + \frac{1}{(\eta(t-t'))^{\frac{2s+1}{6}}} \right) \|(v_x)^2 \\
& (\cdot, t') - (u_x)^2(\cdot, t')\|_{L^1} dt' \\
& \leq e^{(\eta-\mu)t} \|\phi - \psi\|_s \frac{c_s}{2} \int_0^t e^{(\eta-\mu)(t-t')} \|(v_x)^2(\cdot, t') - (u_x)^2(\cdot, t')\|_{L^1} dt' \quad (3.33) \\
& + \int_0^t \frac{1}{(\eta(t-t'))^{\frac{2s+1}{6}}} \|(v_x)^2(\cdot, t') - (u_x)^2(\cdot, t')\|_{L^1} dt' \\
& \leq e^{\eta T} \|\phi - \psi\|_s + \frac{c_s}{2} \int_0^t \left(e^{\eta(t-t')} + \frac{1}{(\eta(t-t'))^{\frac{2s+1}{6}}} \right). \\
& \|(v_x)^2(\cdot, t') - (u_x)^2(\cdot, t')\|_{L^1} dt' \\
& \leq e^{\eta T} \|\phi - \psi\|_s + \frac{c_s}{2} e^{\eta T} \int_0^t \left(1 + \frac{1}{(\eta(t-t'))^{\frac{2s+1}{6}}} \right). \\
& \|(v_x)^2(\cdot, t') - (u_x)^2(\cdot, t')\|_{L^1} dt' \\
& \leq e^{\eta T} \|\phi - \psi\|_s + M \frac{c_s}{2} e^{\eta T} \int_0^t \frac{(\eta T)^{\frac{2s+1}{6}} + 1}{\eta^{\frac{2s+1}{6}}} \frac{\|w(\cdot, t')\|_s}{(t-t')^{\frac{2s+1}{6}}} dt'.
\end{aligned}$$

Aplicando Lema (2.1.4) a (2.33), segue-se (2.29).

Provemos 2.)

Seja $s \geq 2$, $w(t)$ e M . Pelo Lema 3.1.2, com $\lambda = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\|w(t)\|_s & \leq e^{\eta T} \|\phi - \psi\|_s + \frac{c_1}{2} \int_0^t \left[e^{\eta(t-t')} + \left(\frac{1}{(\eta(t-t'))^{\frac{1}{2}}} \right) \right. \\
& \left. e^{\frac{(\eta(t-t'))}{8} (\sqrt{3} + \sqrt{3 + \frac{8\sqrt{3}}{\eta(t-t')}}})} \right] \|(v_x)^2(\cdot, t') - (u_x)^2(\cdot, t')\|_{s-1} dt'. \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Desde que $s - 1 \geq 1 > \frac{1}{2}$ obtemos por (2.34)

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_s &\leq e^{\eta T} \|\phi - \psi\|_s + \frac{c_1 M}{2} \int_0^t \left[e^{\eta(t-t')} + \left(\frac{1}{(\eta(t-t'))^{\frac{1}{2}}} \right) \right. \\ &\quad \left. e^{\frac{(\eta(t-t'))}{8} (\sqrt{3} + \sqrt{3 + \frac{8\sqrt{3}}{\eta(t-t')}})} \right] \|(w_x)^2(\cdot, t')\|_s dt'. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left[e^{\eta(t-t')} + \left(\frac{1}{(\eta(t-t'))^{\frac{1}{2}}} \right) e^{\frac{\eta(t-t')\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{3\eta^2(t-t')^2 + 8\sqrt{3}\eta(t-t')}} \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \left[e^{\eta(t-t')} + \left(\frac{1}{(\eta(t-t'))^{\frac{1}{2}}} \right) e^{\eta(t-t') + \frac{1}{8} \sqrt{3\eta^2(t-t')^2 + 8\sqrt{3}\eta(t-t')}} \right] \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{\eta(t-t')}} \right) e^{\eta T + \frac{1}{8} \sqrt{3(\eta T)^2 + 8\sqrt{3}\eta T}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Combinando (2.35) e (2.36),

$$\|\omega(t)\|_s \leq e^{\eta T} \|\phi - \psi\|_s + c_1 M F(T, \eta) \int_0^t \frac{\|w(\cdot, t')\|_s}{(t-t')^{\frac{1}{2}}} dt'. \quad (3.37)$$

Finalmente, aplicando o Lema 2.1.4 a (2.37), segue-se (2.30). Agora consideremos a equação (2.27). A desigualdade (2.30) é obtida similarmente para item 2.) para a equação (2.19). Usamos as desigualdades

$$\begin{aligned} \|(v^2(\cdot, t') - (u^2(\cdot, t'))\|_{s-1} &\leq \|v^2(\cdot, t') - u^2(\cdot, t')\|_s \\ &\leq M \|(v - u)(\cdot, t')\|_s, \end{aligned}$$

para obter as estimativas (2.35) para $\|\omega(t)\|_s$.

3.1.3 Teoria Global

Lema 3.1.5. *Seja u solução de (1.1) em $C([0, T]; H^1(\mathbb{R}))$ para $T > 0$. Então valem as seguintes estimativas:*

$$\|u(t)\|_0 \leq (\|\phi\|_0 + \sqrt{2T}(\sqrt{c_2} + \|f\|_0)) e^{(2+\eta)T} \quad (3.38)$$

$$\|u_x(t)\|_0 \leq (\|\psi\|_0 + T\|g\|_0) e^{(\eta-\mu)T}. \quad (3.39)$$

Demonstração

Seja $z = u_x$, então $z = z(x, t)$ satisfaz a equação

$$z_t + zz_x + z_{xxx} + \eta(\mathcal{H}z_x + \mathcal{H}z_{xxx}) + \mu z = f'(x). \quad (3.40)$$

Multiplicando (2.40) por z e integrando em \mathbb{R} , obtemos,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|_0^2 = \langle z, z_t \rangle_0 \\ & = \langle z, -zz_x - z_{xxx} - \eta(\mathcal{H}z_x + \mathcal{H}z_{xxx}) - \mu z + g \rangle_0 \\ & = -\eta \langle z, \mathcal{H}z_x \rangle_0 - \eta \langle z, \mathcal{H}z_{xxx} \rangle_0 - \mu \|z\|_0^2 + \langle z, g \rangle_0 \\ & = -\eta \int_{-\infty}^{+\infty} (-|\xi| + |\xi|^3) |\widehat{z}(\xi)|^2 d\xi - \mu \|z\|_0^2 + \langle z, g \rangle_0 \\ & \leq \eta \int_{|\xi| \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}} (|\xi| - |\xi|^3) |\widehat{z}(\xi)|^2 d\xi + \eta \int_{|\xi| > \frac{1+\sqrt{5}}{2}} (|\xi| - |\xi|^3) |\widehat{z}(\xi)|^2 d\xi \\ & \quad - \mu \|z\|_0^2 + \|z\|_0 \|g\|_0 \\ & \leq \eta \int_{|\xi| \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}} (|\xi| - |\xi|^3) |\widehat{z}(\xi)|^2 d\xi - \eta \int_{|\xi| > \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \xi^2 |\widehat{z}(\xi)|^2 d\xi \\ & \quad - \mu \|z\|_0^2 + \|z\|_0 \|g\|_0 \\ & = \eta \int_{|\xi| \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}} (|\xi| - |\xi|^3) |\widehat{z}(\xi)|^2 d\xi - \eta \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\widehat{z}(\xi)|^2 d\xi \\ & \quad + \eta \int_{|\xi| \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \xi^2 d\xi - \mu \|z\|_0^2 + \|z\|_0 \|g\|_0 \\ & = \eta \int_{|\xi| \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}} (|\xi| - |\xi|^3 + \xi^2) |\widehat{z}(\xi)|^2 d\xi \\ & \quad - \eta \|\partial_x^2 z\|_0^2 - \mu \|z\|_0^2 + \|z\|_0 \|g\|_0 \\ & \leq \eta \|z\|_0^2 - \eta \|\partial_x^2 z\|_0^2 - \mu \|z\|_0^2 + \|z\|_0 \|g\|_0 \\ & \leq (\eta - \mu) \|z\|_0^2 + \|z\|_0 \|g\|_0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Integrando $\frac{d}{dt} \|z\|_0 \leq (\eta - \mu) \|z\|_0 + \|g\|_0$ entre 0 e t com $0 \leq t \leq T$,

$$\|z(t)\|_0 \leq (\eta - \mu) \int_0^t \|z(t')\|_0 dt' + T \|g\|_0 + \|\psi\|_0.$$

Usando a desigualdade de Gronwall,

$$\|u_x(t)\|_0 \leq (\|\psi\|_0 + T \|g\|_0) e^{(\eta - \mu)t}, \quad (3.42)$$

onde $u_x = z$.

Para provar (2.38), usaremos (2.39). Multiplicando (1.1) por u e integrando em \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_0^2 = \langle u, u_t \rangle_0 \\
& = \langle u, -\frac{1}{2}(u_x)^2 - u_{xxx} - \eta(\mathcal{H}u_x + \mathcal{H}u_{xxx}) - \mu u + f \rangle_0 \\
& = \frac{-1}{2} \langle u, (u_x)^2 \rangle_0 - \eta \langle u, \mathcal{H}u_x \rangle_0 - \eta \langle u, \mathcal{H}u_{xxx} \rangle_0 \\
& \quad - \mu \|u\|_0^2 + \|u\|_0 \|f\|_0 \\
& \leq \frac{1}{2} \|u\|_{L^\infty} \|z\|_0^2 - \eta \|\partial_x^2 u\|_0^2 + \eta \|u\|_0^2 - \mu \|u\|_0^2 + \|u\|_0 \|f\|_0.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Usando a desigualdade,

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_0^{\frac{1}{2}} \|u_x\|_0^{\frac{1}{2}},$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_0^2 \leq \frac{1}{2} \|u\|_0^{\frac{1}{2}} \|z\|_0^{\frac{5}{2}} - \eta \|z_x\|_0^2 + \eta \|u\|_0^2 - \mu \|u\|_0^2 + \|u\|_0 \|f\|_0 \\
& \leq c_1(T, \|g\|_0, \|\psi\|_0) \|u\|_0^{\frac{1}{2}} + \eta \|u\|_0^2 + \|u\|_0^2 + \|f\|_0^2 \\
& \leq c_2(T, \|g\|_0, \|\psi\|_0) + \|u\|_0^2 + \eta \|u\|_0^2 + \|u\|_0^2 + \|f\|_0^2 \\
& = (2 + \eta) \|u\|_0^2 + (c_2 + \|f\|_0^2).
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Integrando

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_0^2 \leq (2 + \eta) \|u\|_0^2 + (c_2 + \|f\|_0^2),$$

entre 0 e t , onde $0 \leq t \leq T$,

$$\|u\|_0^2 \leq (4 + 2\eta) \int_0^t \|u(t')\|_0^2 dt' + 2T(c_2 + \|f\|_0^2) + \|\phi\|_0^2. \tag{3.45}$$

Por Gronwall,

$$\|u\|_0 \leq (\|\phi\|_0 + \sqrt{2T}(\sqrt{c_2} + \|f\|_0)) e^{(2+\eta)T}. \tag{3.46}$$

Lema 3.1.6. *Seja u solução de (1.1) em $C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$ para algum $T > 0$ e $s > 1$.*

Então $\forall t \in [0, T]$ vale a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_s &\leq c(s)[\|\phi\|_0 + \sqrt{2T}(\sqrt{c_2} + \|f\|_0)e^{(2+\eta)T} \\
&+ [(\|\psi\|_0 + T\|g\|_0)^{\frac{2s+7}{5}} e^{\frac{2s+7}{5}(\eta-\mu)T} \\
&+ (\|\psi\|_0 + T\|g\|_0)^{\frac{2}{s+3}} e^{\frac{2}{s+3}(\eta-\mu)T} + (\|\psi\|_0 + T\|g\|_0)e^{(\eta-\mu)T}]T^{\frac{1}{2}} \\
&+ \|\phi\|_s].
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Demonstração

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|_{s-1}^2 &= - \langle z, z z_x \rangle_{s-1} - \langle z, z_{xxx} \rangle_{s-1} \\
&- \eta \langle z, \mathcal{H}z_x + \mathcal{H}z_{xxx} \rangle_{s-1} \\
&- \mu \langle z, z \rangle_{s-1} + \langle z, g \rangle_{s-1} \\
&= - \langle z, z z_x \rangle_{s-1} + \eta \|z\|_{s-1}^2 - \eta \|\partial_x^2 z\|_{s-1}^2 - \mu \|z\|_{s-1}^2 \\
&+ \langle z, g \rangle_{s-1}.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|_{s-1}^2 + (\mu - \eta) \|z\|_{s-1}^2 &\leq \langle z, z z_x \rangle_{s-1} - \eta \|\partial_x^2 z\|_{s-1}^2 \\
&+ \|z\|_{s-1} \|g\|_{s-1}.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Temos,

$$\begin{aligned}
\langle z, z z_x \rangle_{s-1} &= \langle z, \frac{1}{2} (z^2)_x \rangle_{s-1} \\
&= -\frac{1}{2} \langle z_x, z^2 \rangle_{s-1},
\end{aligned} \tag{3.50}$$

e

$$\begin{aligned}
\|z^2\|_{s-1} &\leq c(s) \|z\|_{L^\infty} \|z\|_{s-1} \\
&\leq c(s) \|z\|_0^{\frac{1}{2}} \|z_x\|_0^{\frac{1}{2}} \|z\|_{s-1} \\
&\leq c(s) \|z\|_0^{\frac{1}{2}} \|z\|_1^{\frac{1}{2}} \|z\|_{s-1}.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Além do mais,

$$-\eta \|\partial_x^2 z\|_{s-1}^2 \text{ e } -\eta \|z\|_{s+1}^2 + \eta \|z\|_0^2, \tag{3.52}$$

são normas equivalentes.

Substituindo em (2.49),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|_{s-1}^2 + (\mu - \eta) \|z\|_{s-1}^2 &\leq c(s) \|z\|_s \|z\|_0^{\frac{1}{2}} \|z\|_1^{\frac{1}{2}} \|z\|_{s-1} \\ &- \eta \|z\|_{s+1}^2 + \eta \|z\|_0^2 + \|z\|_{s-1} \|g\|_{s-1}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Por interpolação,

$$\|z\|_1 \leq c(s) \|z\|_0^{\frac{s}{s+1}} \|z\|_{s+1}^{\frac{1}{s+1}}, \quad (3.54)$$

$$\|z\|_s \leq c(s) \|z\|_0^{\frac{1}{s+1}} \|z\|_{s+1}^{\frac{s}{s+1}}, \quad (3.55)$$

$$\|z\|_{s-1} \leq c(s) \|z\|_0^{\frac{2}{s+1}} \|z\|_{s+1}^{\frac{s-1}{s+1}}. \quad (3.56)$$

Além disso,

$$-\|z\|_{s+1}^2 + c_1(s) \|z\|_0^{\frac{2s+7}{2s+2}} \|z\|_{s+1}^{\frac{4s-1}{2s+2}} \leq c_3(s) \|z\|_0^{\frac{4s+14}{5}}, \quad (3.57)$$

$$-\|z\|_{s+1}^2 + c_2(s) \|z\|_0^{\frac{2}{s+1}} \|z\|_{s+1}^{\frac{s-1}{s+1}} \|g\|_{s-1} \leq c_4(s) \|z\|_0^{\frac{4}{s+3}}, \quad (3.58)$$

Substituindo (2.57) e (2.58),

$$\frac{d}{dt} \|z\|_{s-1}^2 \leq c_3(s) \|z\|_0^{\frac{4s+14}{5}} + c_4(s) \|z\|_0^{\frac{4}{s+3}} + 2\|z\|_0^2. \quad (3.59)$$

Integrando em $[0, t]$, com $0 \leq t \leq T$ e usando $(\|z\|_0)$,

$$\begin{aligned} \|z(t)\|_{s-1}^2 &\leq [c_3(s)(\|\psi\|_0 + T\|g\|_0)^{\frac{4s+14}{5}} e^{\frac{4s+14}{5}(\eta-\mu)T} + c_4(s)(\|\psi\|_0 \\ &+ T\|g\|_0)^{\frac{4}{s+3}} e^{\frac{4}{s+3}(\eta-\mu)T} + 2(\|\psi\|_0 + T\|g\|_0)^2 e^{(2\eta-\mu)t}]T + \|\phi\|_s^2. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Então,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_s &\leq c(s) [\|\phi\|_0 + \sqrt{2T}(\sqrt{c_2} + \|f\|_0) e^{(2+\eta)T} \\ &+ [(\|\psi\|_0 + T\|g\|_0)^{\frac{2s+7}{5}} e^{\frac{2s+7}{5}(\eta-\mu)T} \\ &+ (\|\psi\|_0 + T\|g\|_0)^{\frac{2}{s+3}} e^{\frac{2}{s+3}(\eta-\mu)T} \\ &+ \sqrt{2}(\|\psi\|_0 + T\|g\|_0) e^{(\eta-\mu)T}] T^{\frac{1}{2}} + \|\phi\|_s], \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\forall t \in [0, T].$$

Observação 3.1.2. *Seja $\psi \in H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 2$. Seja $z \in C([0, T]; H^s)$ solução de (1.2), para $T > 0$. Então pelos lemas 2.1.5 e 2.1.6 existe uma constante $c > 0$ independente de $\eta > 0$ tal que 2.39 e 2.47 são satisfeitas com u_x substituída por z e ϕ' por ψ .*

Teorema 3.1.3. *Seja $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 1$. Então, para cada $\eta > 0$, existe uma única $u \in C([0, \infty); H^s(\mathbb{R}))$ solução para o problema (1.1), tal que $\partial_t u \in C([0, \infty); H^{s-3}(\mathbb{R}))$.*

Demonstração *Se $s \in \mathbb{Z}^+$, o resultado segue pela teoria local e pelo Lema (3.1.5) e (2.1.6). Pela proposição 2.1.1, o problema (1.1) é equivalente a equação integral (2.19).*

Seja,

$$T^* := \{\sup T > 0; \exists! u \in C([0, T]; H^s), \text{ satisfazendo (2.19)}\}.$$

Mostraremos que $T^ = \infty$. Suponha que $T^* < \infty$. Pelo Lema (3.1.5) e (2.16),*

$$\|u(t)\|_s \leq K, \forall t \in [0, T^*),$$

onde $K = K(\|\phi\|_s, \eta, \mu, T^)$ é uma função contínua em T^* não decrescente. O objetivo é mostrar que existe $\lim_{t \uparrow T^*} u(t)$ em $H^s(\mathbb{R})$. De fato seja $t, \tau \in [0, T^*)$, e suponha $t < \tau$. Usando a equação integral (2.19),*

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(\tau)\|_s &\leq \|(E_{\eta, \mu}(t) - E_{\eta, \mu}(\tau))\phi\|_s \\ &+ \int_0^t \|(E_{\eta, \mu}(t - t') - E_{\eta, \mu}(\tau - t'))(u_x)^2(t')\|_s dt' \\ &+ \int_t^\tau \|E_{\eta}(\tau - t')(u_x)^2(t')\|_s dt'. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Usando cálculos similares para obter estimativas para (2.22), mas agora usando

$$\|u(t)\|_s \leq K, \forall t \in [0, T^*),$$

temos que o lado direito de (2.62) tende a zero quando $\tau, t \rightarrow T^$. Portanto usando o Critério de Cauchy, concluímos que existe $\lim_{t \uparrow T^*} u(t)$ em $H^s(\mathbb{R})$. Além disso, a*

última parte mostra que a integral representação (2.19) para $u(t)$, é válida para todo $t \in [0, T^*]$. Usando o Teorema 2.1.1, novamente, obtemos uma contradição com $T^* < \infty$.

Teorema 3.1.4. *Seja $\psi \in H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 1$. Então, para cada $\eta > 0$, existe uma única $u \in C([0, \infty); H^s(\mathbb{R}))$ solução para o problema (1.2), tal que $\partial_t u \in C([0, \infty); H^{s-3}(\mathbb{R}))$.*

Demonstração Análoga a demonstração do teorema 2.1.3.

3.2 O Problema de Cauchy no caso periodico

3.2.1 Caso Linear

Neste capítulo vamos considerar o problema de Cauchy associado á parte linear da equação (1.1), denotada por

$$v_t + v_{xxx} + \eta(\mathcal{H}v_x + \mathcal{H}v_{xxx}) + \mu v = f(x), v(., 0) = \phi(.), \quad (3.63)$$

onde $\phi \in H_{per}^s$, para $s \in \mathbb{R}$ e $\eta \geq 0$ Para $t \geq 0$ e $k \in \mathbb{Z}$, seja

$$F_{\eta k} = \exp[t(ik^3 - \eta(|k|^3 - |k|) - \mu)] \quad (3.64)$$

e define o semigrupo $E(t) : t > 0$ de operadores em $L^2(-\pi, \pi)$, por

$$E_{\eta, \mu}(t)f = \sum_{u \in \mathbb{K}} F_{\eta, \mu}(t) \hat{f}_k \exp(ik.) \quad (3.65)$$

Lema 3.2.1. *Seja $\eta > 0, \mu > 0$. Então, $(E_{\eta, \mu}(t))_{t \geq 0}$ é um C^0 semigrupo em H_{per}^s , $s \in \mathbb{R}$. Além disso ,*

$$\|E_{\eta, \mu}(t)\|_{B(H_{per}^s, H_{per}^s)} \leq e^{t(\mu - \eta)}$$

$$\|E_{\eta, \mu}(t)\|_{B(H_{per}^s, H_{per}^s)} \leq e^{t(\mu - \eta)} \quad (3.66)$$

Demonstração Seque-se pela definição de $E_{\eta, \mu}(t)$ que $E_{\eta, \mu}(0) = I$ e $E_{\eta, \mu}(t+t') = E_{\eta, \mu}(t)E_{\eta, \mu}(t')$. A continuidade do semigrupo é uma consequência da desigualdade

$$|F_{\eta k}(\tau)| \leq e^{\eta(t + \frac{1}{2})}, 0 \leq \tau \leq t + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}, \quad (3.67)$$

e o teorema da Convergência Dominada. Relação (2.66) segue-se do fato que

$$e^{-2\eta t(|k|^3 - |k|)} \leq e^{2\eta t} \quad (3.68)$$

para algum $k \in F$ e para $t \geq 0$.

Observação 3.2.1. 1. Seja $\phi \in H_{per}^s$, então $v(\cdot, t) = E_{\eta, \mu}(t)\phi$ é a única solução de (2.1), na classe $C(0, \infty; H_{per}^s) \cap C^1(0, \infty; H_{per}^{s-3}(\mathbb{R}))$. O fato que $v(\cdot, t) \in C(0, \infty; H_{per}^s)$ segue-se diretamente da continuidade do semigrupo $E_{\eta\mu}(t)$.

O fato que $v_t \in C(0, \infty; H_{per}^{s-3}(\mathbb{R}))$ é obtido como se segue. Seja $t, \tau \geq 0, \phi \in H^s$ então

$$\|v_t(t) - v_t(\tau)\|_{s-3}^2 = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)^{s-3} |ik^3 - \eta(|k|^3 - |k|) - \mu|^2 \quad (3.69)$$

$$|e^{t(ik^3 - \eta(|k|^3 - |k|) - \mu)} - e^{\tau(ik^3 - \eta(|k|^3 - |k|) - \mu)}|^2 |\widehat{\phi}_k|^2$$

Nós temos que $|ik^3 - \eta(|k|^3 - |k|) - \mu|^2 \leq c(\eta, \mu)(1 + k^2)^3$ e

$$|e^{t(ik^3 - \eta(|k|^3 - |k|) - \mu)} - e^{\tau(ik^3 - \eta(|k|^3 - |k|) - \mu)}| \leq 2e^{-(\mu - \eta)(t + \frac{1}{2})},$$

para $\tau \leq t + \frac{1}{2}$. Usando o Teorema da Convergência Dominada, temos que $\|v_t(t) - v_t(\tau)\|_{s-3} \rightarrow 0$, quando $\tau \rightarrow t$ e assim $v_t \in C(0, \infty; H_{per}^{s-3}(\mathbb{R}))$.

Usando as estimativas

$$\left| \frac{e^{h(ik^3 - \eta(|k|^3 - |k|) - \mu)} - 1}{h} \right| \leq c(\mu, \eta)(1 + k^2)^{\frac{3}{2}}$$

$|ik^3 - \eta(|k|^3 - |k|) - \mu|^2 \leq c(\mu, \eta)(1 + k^2)^3$ e o Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\lim \left\| \frac{v(t+h) - v(t)}{h} + v_{xxx} + \eta(\mathcal{H}v_x + \mathcal{H}v_{xxx}) \right\|_{s-3} = 0 \quad (3.70)$$

Lema 3.2.2. Seja $t > 0, s \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0, \mu > 0$ e $\eta > 0$ dados. Então $E_{\eta, \mu}(t) \in B(H^s(\mathbb{R}), H^{s+\lambda}(\mathbb{R}))$. Além disso

$$\begin{aligned} \|E_{\eta}(t)\phi\|_{s+\lambda} &\leq c_{\lambda} [e^{(\eta-\mu)t} \\ &+ e^{-\mu t} (1 + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{\lambda}{2}}}) e^{\frac{\eta t}{8}} (\sqrt{3} + \sqrt{3 + \frac{8\sqrt{3}\lambda}{\eta t}})] \|\phi\|_s \end{aligned}$$

Demonstração Seja $\eta > 0, \mu > 0, t > 0, s \in \mathbb{R}$ e $\lambda \geq 0$. Temos que

$$\begin{aligned}
 \|E_{\eta t}(t)\phi\|_{s+\lambda}^2 &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1+k^2)^{s+\lambda} |F_{\eta}(t, k)\widehat{\phi}_k|^2 \\
 &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1+k^2)^{s+\lambda} e^{-2\eta t(k^3-|k|)-2\mu t} |\widehat{\phi}_k|^2 \\
 &\leq 2\pi \sup_{k \in \mathbb{Z}} [(1+k^2)^{\lambda} e^{-2\eta t(|k^3-|k|)-2\mu t}] \|\phi\|_s^2 \\
 &\leq c_{\lambda} \sup [e^{-2\eta t(|k^3-|k|)-2\mu t} + k^{2\lambda} e^{-2\eta t(|k^3-|k|)-2\mu t}] \|\phi\|_s^2 \\
 &\leq c_{\lambda} [e^{2(\eta-\mu)t} + \sup e^{-2\eta t(|k^3-|k|)-2\mu t}] \|\phi\|_s^2
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

A função $k^{2\lambda} e^{-2\eta t(-|k|+|k|^3)-2\mu t}$ é uma função par, portanto é suficiente estudar o supremo desta função para $k > 0$. Desde que $k^3 - k \geq k^2 - k$, para $k \geq 1$, temos que $k^{2\lambda} e^{-2\eta t(-|k|+|k|^3)-2\mu t} \leq k^{2\lambda} e^{-2\eta t(k^2-k)-2\mu t} =: g(k)$, para $k \geq 1$. Defina a função $g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ onde $g(p) = p^{2\lambda} e^{-2\eta t(|p|^2-|p|)-2\mu t}$. Se $p > 0$, então

$$\begin{aligned}
 g'(p) = 0 &\iff p^2 - \frac{p}{2} - \frac{\lambda}{2\eta t} \\
 &\iff p = \frac{1}{4} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\lambda}{\eta t}} \right]
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Seja $p_0 := \frac{1}{4} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{8\lambda}{\eta t}} \right]$. Segue-se pela definição de g_0 que

$$-2\eta t \left(\frac{p_0^2}{\sqrt{3}} - p_0 \right) - 2\mu t = \frac{1}{4} \eta t - \lambda + \frac{\eta t}{4} \sqrt{1 + \frac{8\lambda}{\eta t}} \tag{3.73}$$

Assim

$$\begin{aligned}
 \sup p^{2\lambda} e^{-2\eta t(-|p|+|p|^3)-2\mu t} &\leq c_{\lambda} e^{2\eta t} + \sup k^{2\lambda} e^{-2\eta t(p^2-p)-2\mu t} \\
 &\leq c_{\lambda} e^{2\eta t} + p_0^{2\lambda} e^{-2\eta t(-|p|+|p|^3)-2\mu t} \\
 &\leq c_{\lambda} e^{2\eta t} + c_{\lambda} \left(1^{\lambda} + \left(1 + \frac{8\lambda}{\eta t} \right)^{\lambda} \right) e^{\frac{\eta t}{4} (1+1+\frac{8\lambda}{\eta t}) - 2\mu t} \\
 &\leq c_{\lambda} e^{2\eta t} + \left(1 + \frac{1}{(\eta t)^{\lambda}} \right) e^{\frac{\eta t}{4} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\lambda}{\eta t}} \right) - 2\mu t}
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

As desigualdades acima implicam

$$\|E_{\eta}(t)\psi\|_s \leq c_{\lambda} \left[e^{2(\eta-\mu)t} + e^{-2\mu t} \left(1 + \frac{1}{(\eta t)^{\lambda}} \right) e^{\frac{\eta t}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{8\lambda}{\eta t}} \right)} \right] \|\phi_s\|^2 \tag{3.75}$$

Lema 3.2.3. *Seja $t > 0$, $s > \frac{-1}{2}$ e $\eta > 0$ dados. Então, $E_{\eta,\mu}(t) \in B(L^1(\mathbb{R}), H^s(\mathbb{R}))$.*

Além disso,

Demonstração *Seja $t > 0, s > \frac{-1}{2}, \eta > 0, \mu > 0$ e $\psi \in L^1(\mathbb{R})$.*

$$\begin{aligned} \|E_{\eta}(t)\psi\|_s^2 &= 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |F_{\eta}(t, \eta)\psi_k|^2 \\ &\leq \|\psi\|_{L^1}^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s e^{-2\eta t(|k|^3-|k|-2\mu t)} \end{aligned} \quad (3.76)$$

Seja $I := 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s e^{-2\eta t(|k|^3-|k|-2\mu t)}$ Então,

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \sum_0^{+\infty} (1+k^2)^s e^{-2\eta t(|k|^3-|k|-2\mu t)} \\ &\leq 4\pi \left(\sum_0^{\sqrt{2}} 3^s e^{2\eta t} + \sum_{\sqrt{2}}^{+\infty} (2k^2)^s e^{-2\eta tk^3-k-2\mu t} \right) \\ &\leq 2^{\frac{5}{2}} 3^s e^{2\eta t} + 2^{s+1} \sum_{\sqrt{2}}^{+\infty} k^{2s} e^{-\eta tk^3} \end{aligned} \quad (3.77)$$

onde na desigualdade (5) usamos o fato que $\xi^3 - \xi \leq \frac{\xi^3}{2}$ para $\xi \geq \sqrt{2}$. Fazendo a mudança de variável $x = \eta t \xi^3$ no lado direito da integral de (4) nós obtemos

$$\begin{aligned} I &\leq 2^{\frac{3}{2}} 3^s e^{2\eta t} + \frac{2^{s+1}}{3(\eta t)^{\frac{2s+1}{3}}} \int_0^{+\infty} x^{\frac{2s+1}{3}} e^{-x} dx \\ &= 2^{\frac{3}{2}} 3^s e^{2\eta t} + \frac{2^{s+1}}{3(\eta t)^{\frac{2s+1}{3}}} \int_0^{+\infty} \Gamma\left(\frac{2s+1}{3}\right) \\ &\leq c_s \left(e^{2\eta t} + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{2s+1}{3}}} \right) \end{aligned} \quad (3.78)$$

Combinando(2.15) e (2.17), e fazendo uma mudança de variaveis na expressão resultado concluímos a demonstração. Neste capítulo usaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, para encontrar uma solução local para a equação integral (2.19). A proposição seguinte apresenta uma solução local para a equação (1.1) em H_{per}^s , $s \geq 1$.

Teorema 3.2.1. *Sejam $\eta > 0, \mu > 0$ e $\phi \in H^s$, onde $s \geq 1$. Então, existe $T_s(s, \|\phi\|_s, \eta) > 0$ e uma única função $u := u_{\eta,\mu} \in C(0, T_s; H_{per}^s)$ satisfazendo a equação integral,*

$$u(\cdot, t) = E_{\eta, \mu}(t)\phi(\cdot) - \frac{1}{2} \int_0^t E_{\eta, \mu}(t-t')(u_x)^2(\cdot, t')dt', \quad (3.79)$$

onde $E_{\eta, \mu}(t)$ é definida por (2.4).

Demonstração Análoga ao caso na reta.

Teorema 3.2.2. *Sejam $\eta > 0$, $\mu > 0$ e $\phi \in H_{per}^s$, com $s > \frac{1}{2}$. Então existe $T_s(s, \|\phi\|_s, \eta) > 0$ e uma única função $u := u_{\eta, \mu} \in C(0, T_s; H_{per}^s)$ satisfazendo a equação integral,*

$$u(\cdot, t) = E_{\eta, \mu}(t)\phi(\cdot) - \frac{1}{2} \int_0^t E_{\eta, \mu}(t-t')(u^2)_x(\cdot, t')dt', \quad (3.80)$$

onde $E_{\eta, \mu}(t)$ é definida por (2.4).

Demonstração Análoga ao caso na reta.

Proposição 3.2.1. *O problema (1.1)(resp.(1.2)) é equivalente a equação integral (3.79). Mais precisamente, se $u \in C([0, T]; H_{per}^s)$ é solução de (1.1) então u satisfaz (3.79). Reciprocamente se $u \in C([0, T]; H_{per}^s)$ é solução de (3.79) então $u \in C^1([0, T]; H_{per}^{s-3})$ e satisfaz (1.1).*

Demonstração Análoga ao caso na reta.

Lema 3.2.4. *Suponha $\beta > 0, \gamma > 0, \beta + \gamma > 1, a \geq 0, b \geq 0$, u não negativa e $t^{\gamma-1}u(t)$ localmente integrável em $0 \leq t < T$. Se*

$$u(t) \leq a + b \int_0^t (t-s)^{\beta-1} s^{\gamma-1} u(s) ds,$$

q.s em $(0, T)$, então

$$u(t) \leq a E_{\beta, \gamma}((b\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\nu}} t),$$

onde $\nu = \beta + \gamma - 1 > 0$.

$$E_{\beta, \gamma}(s) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m s^{m\nu}, \quad (3.81)$$

com c_0 e $\frac{c_{m+1}}{c_m} = \frac{\Gamma(m\nu + \gamma)}{\Gamma(m\nu + \gamma + \beta)}$ para $m \geq 0$. Quando $s \rightarrow \infty$,

$$E_{\beta, \gamma}(s) = O(s^{\frac{1}{2}}) \left(\frac{\nu}{\eta} - \gamma \right) \exp\left(\frac{\beta}{\nu} s^{\frac{\nu}{\beta}} \right).$$

Demonstração *Lemma 7.1.2 em [34].*

Proposição 3.2.2. *Seja $\phi, \psi \in H_{per}^s$ e seja $u, v \in C(0, T; H_{per}^s)$ as correspondentes soluções da equação (2.19). Seja $M = \sup_{t \in [0, T]} (\|u(t)\|_s + \|v(t)\|_s)$.*

1.) *Se $s \in [1, 2)$, então*

$$\|u(t) - v(t)\|_s \leq e^{\eta T} \|\phi - \psi\|_s E_{\frac{5-2s}{2}, 1}(\gamma t), \quad (3.82)$$

onde

$$\gamma = \left(\frac{c_s M e^{\eta T}}{2} \frac{(\eta T)^{\frac{2s+1}{6}}}{\eta^{\frac{2s+1}{6}}} \Gamma\left(\frac{5-2s}{6}\right) \right)^{\frac{6}{5-2s}}, \quad (3.83)$$

e $E_{\frac{5-2s}{6}, 1}$ é dado por (3.82) (onde $\beta = \frac{5-2s}{6}$ e $\gamma = 1$).

2.) *Se $s \geq 2$, então,*

$$\|u(t) - v(t)\|_s \leq e^{\eta T} \|\phi - \psi\|_s E_{\frac{1}{2}, 1}(\gamma t), \quad (3.84)$$

onde,

$$\gamma = (c_1 M F(T, \eta) \Gamma(\frac{1}{2}))^2, \quad (3.85)$$

e

$$F(T, \eta) = \left(\frac{2\sqrt{\eta T} + 1}{2\sqrt{\eta}} \right) e^{\eta T + \frac{1}{8}\sqrt{3(\eta T)^2 + 8\sqrt{3}\eta T}}. \quad (3.86)$$

A desigualdade (2.84) é verdade se $\phi, \psi \in H_{per}^s$, $s > \frac{1}{2}$ e se $u, v \in C(0, T; H_{per}^s)$, $s > \frac{1}{2}$ são as soluções correspondentes da equação (3.81).

Demonstração *Análoga ao caso na reta.*

3.2.2 Teoria Global

Lema 3.2.5. *Seja u solução de (1.1) em $C([0, T]; H_{per}^1)$ para $T > 0$. Então valem as seguintes estimativas:*

$$\|u(t)\|_0 \leq (\|\phi\|_0 + \sqrt{2T}(\sqrt{c_2} + \|f\|_0)) e^{(2+\eta)T} \quad (3.87)$$

$$\|u_x(t)\|_0 \leq (\|\psi\|_0 + T\|g\|_0) e^{2(\eta-\mu)t} \quad (3.88)$$

Demonstração Multiplicando a equação $z_t + zz_x + z_{xxx} + \eta(\mathcal{H}z_x + \mathcal{H}z_{xxx}) + \mu z = g$ por z e integrando em \mathbb{R} obtemos,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|_0^2 = \langle z, z_t \rangle_0 \\
 & = \langle z, -zz_x - z_{xxx} - \eta(\mathcal{H}z_x + \mathcal{H}z_{xxx}) - \mu z + g \rangle_0 \\
 & = -\eta \langle z, \mathcal{H}z_x \rangle - \eta \langle z, \mathcal{H}z_{xxx} \rangle - \mu \|z\|_0^2 + \langle z, g \rangle_0 \\
 & \leq 2\pi\eta \sum_{k=-1}^{k=1} (-|k| + |k|^3) |\widehat{z}_k|^2 + 2\pi\eta \sum_{k \geq 2} (|k| - |k|^3) |\widehat{z}_k|^2 - \mu \|z\|_0^2 \\
 & + \langle z, g \rangle_0 \\
 & \leq -2\pi\eta \sum_{|k| \geq 2} |\widehat{z}_k|^2 - \mu \|z\|_0^2 + \langle z, g \rangle_0 \tag{3.89} \\
 & \leq -2\pi\eta \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 \|z\|_0^2 + 2\pi\eta(0 + |\widehat{w}_1|^2 + |\widehat{w}_{-1}|^2) - \mu \|z\|_0^2 \\
 & + \|z\|_0 \|g\|_0 \\
 & \leq -2\pi\eta \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |\widehat{z}_k|^2 + 2\pi\eta(0 + |\widehat{w}_1|^2 + |\widehat{w}_{-1}|^2) - \mu \|z\|_0^2 \\
 & + \|z\|_0 \|g\|_0 \\
 & \leq -\eta \|\partial_x^2 z\|_0^2 + (\eta - \mu) \|z\|_0^2 + \|z\|_0 \|g\|_0 \\
 & \leq (\eta - \mu) \|z\|_0^2 + \|z\|_0 \|g\|_0.
 \end{aligned}$$

Integrando $\frac{d}{dt} \|z\|_0 \leq (\eta - \mu) \|z\|_0 + \|g\|_0$ entre 0 e t com $0 \leq t \leq T$,

$$\|z(t)\|_0 \leq (\eta - \mu) \int_0^t \|z(t')\|_0 dt' + T \|g\|_0 + \|\psi\|_0$$

Aplicando Gronwall,

$$\|z(t)\|_0 \leq (\|\psi\|_0 + T \|g\|_0) e^{(\eta - \mu)t}. \tag{3.90}$$

Para provar (2.87), usamos (2.88). Multiplicando (1.1) por u e integrando em \mathbb{R}

obtemos,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_0^2 = \langle u, u_t \rangle_0 \\
 & = \langle u, -\frac{1}{2}(u_x)^2 - u_{xxx} - \eta(\mathcal{H}u_x + \mathcal{H}u_{xxx}) - \mu u + f \rangle_0 \\
 & = \frac{-1}{2} \langle u, (u_x)^2 \rangle_0 - \eta \langle u, \mathcal{H}u_x \rangle_0 - \eta \langle u, \mathcal{H}u_{xxx} \rangle_0 \\
 & \quad - \mu \|u\|_0^2 + \|u\|_0 \|f\|_0 \\
 & \leq \frac{1}{2} \|u\|_{L^\infty} \|w\|_0^2 - \eta \|\partial_x^2 u\|_0^2 + \eta \|u\|_0^2 - \mu \|u\|_0^2 + \|u\|_0 \|f\|_0
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

Usando a desigualdade,

$$\|u\|_{L^\infty} \leq [\|u\|_0 + \|u\|_0^{\frac{1}{2}} \|u_x\|_0^{\frac{1}{2}}],$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_0^2 \leq C_1 [\|u\|_0 + \|u\|_0^{\frac{1}{2}} \|u_x\|_0^{\frac{1}{2}}] \|w\|_0^2 \\
 & \quad - \eta \|w_x\|_0^2 + \eta \|u\|_0^2 - \mu \|u\|_0^2 + \|u\|_0 \|f\|_0 \\
 & \leq C_1 \|u\|_0 \|z\|_0^2 + C_1 \|u\|_0^{\frac{1}{2}} \|u_x\|_0^{\frac{1}{2}} \|z\|_0^2 - \eta \|w_x\|_0^2 + \eta \|u\|_0^2 \\
 & \quad - \mu \|u\|_0^2 + \|u\|_0 \|f\|_0 \\
 & \leq C_1 \|u\|_0 + C \|u\|_0^{\frac{1}{2}} + \eta \|u\|_0^2 - \mu \|u\|_0^2 + \|u\|_0 \|f\|_0 \\
 & \leq C \|u\|_0 + C_2 + \|u\|_0^2 + \eta \|u\|_0^2 - \mu \|u\|_0^2 + \|u\|_0 \|f\|_0 \\
 & = (2 + \eta) \|u\|_0^2 + C \|u\|_0 + (C_2 + \|f\|_0^2) \\
 & = (3 + \eta) \|u\|_0^2 + (C_2 + \|f\|_0^2 + C_1^2).
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

Integrando,

$$\frac{d}{dt} \|u\|_0^2 \leq (3 + \eta) \|u\|_0^2 + (C_2 + \|f\|_0^2 + C_1^2),$$

entre 0 e t, onde $0 \leq t \leq T$,

$$\|u\|_0^2 \leq (6 + 2\eta) \int_0^t \|u(t')\|_0^2 dt' + 2T(C_2 + \|f\|_0^2 + C_1^2) + \|\phi\|_0^2. \tag{3.93}$$

Aplicando Gronwall,

$$\|u\|_0 \leq (\|\phi\|_0 + \sqrt{2T}(\sqrt{C_2} + \|f\|_0 + C_1))e^{(3+\eta)T}. \quad (3.94)$$

Lema 3.2.6. *Seja u solução de (1.1) em $C([0, T]; H_{per}^s)$ para algum $T > 0$ e $s > 1$.*

Então vale a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_s &\leq c(s)[\|\phi\|_0 + \sqrt{2T}(\sqrt{C_2} + \|f\|_0)]e^{(2+\eta)T} \\ &+ [(\|\psi\|_0 + T\|g\|_0)^{\frac{2s+7}{5}} e^{\frac{2s+7}{5}\eta T} \\ &+ (\|\psi\|_0 + T\|g\|_0)^{\frac{2}{s+3}} e^{\frac{2}{s+3}\eta T} + (\|\psi\|_0 + T\|g\|_0)^{\frac{2s-1}{6}} e^{\frac{2s-1}{6}\eta T} \\ &+ 2(\|\psi\|_0 + T\|g\|_0)e^{\eta T}]T^{\frac{1}{2}} + \|\phi\|_s \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Demonstração

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|_{s-1}^2 &= - \langle z, z z_x \rangle_{s-1} - \langle z, z_{xxx} \rangle_{s-1} \\ &- \eta \langle z, \mathcal{H}z_x + \mathcal{H}z_{xxx} \rangle_{s-1} - \mu \langle z, z \rangle_{s-1} + \langle z, g \rangle_{s-1} \\ &= - \langle z, z z_x \rangle_{s-1} + \eta \|z\|_{s-1}^2 - \eta \|\partial_x^2 z\|_{s-1}^2 - \mu \|z\|_{s-1}^2 \\ &+ \langle z, g \rangle_{s-1}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|_{s-1}^2 + (\mu - \eta) \|z\|_{s-1}^2 &\leq \langle z, z z_x \rangle_{s-1} - \eta \|\partial_x^2 z\|_{s-1}^2 \\ &+ \|z\|_{s-1} \|g\|_{s-1}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Temos,

$$\begin{aligned} \langle z, z z_x \rangle_{s-1} &= \langle z, \frac{1}{2} (z^2)_x \rangle_{s-1} \\ &= -\frac{1}{2} \langle z_x, z^2 \rangle_{s-1}, \end{aligned} \quad (3.98)$$

e

$$\begin{aligned} \|z^2\|_{s-1} &\leq c(s) \|z\|_{L^\infty} \|z\|_{s-1} \\ &\leq c(s) [\|z\|_0 + \|z\|_0^{\frac{1}{2}} \|z_x\|_0^{\frac{1}{2}}] \|z\|_{s-1} \\ &\leq c(s) [\|z\|_0 + \|z\|_0^{\frac{1}{2}} \|z\|_1^{\frac{1}{2}}] \|z\|_{s-1} \\ &\leq c(s) \|z\|_0 \|z\|_{s-1} + c(s) \|z\|_0^{\frac{1}{2}} \|z\|_1^{\frac{1}{2}} \|z\|_{s-1}, \end{aligned} \quad (3.99)$$

e além do mais

$$-\eta \|\partial_x^2 z\|_{s-1}^2 = -\eta \|z\|_{s+1}^2 + \eta \|z\|_0^2. \quad (3.100)$$

Substituindo as desigualdades em (2.97),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|_{s-1}^2 + (\mu - \eta) \|z\|_{s-1}^2 &\leq c(s) \|z\|_s \|z\|_0 \|z\|_{s-1} \\ &+ c(s) \|z\|_s \|z\|_0^{\frac{1}{2}} \|z\|_1^{\frac{1}{2}} \|z\|_{s-1} - 2\eta \|z\|_{s+1}^2 \\ &+ 2\eta \|z\|_0^2 + 2 \|z\|_{s-1} \|g\|_{s-1}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Por interpolação,

$$\|z\|_1 \leq c(s) \|z\|_0^{\frac{s}{s+1}} \|z\|_{s+1}^{\frac{1}{s+1}}, \quad (3.102)$$

$$\|z\|_s \leq c(s) \|z\|_0^{\frac{1}{s+1}} \|z\|_{s+1}^{\frac{s}{s+1}}, \quad (3.103)$$

$$\|z\|_{s-1} \leq c(s) \|z\|_0^{\frac{2}{s+1}} \|z\|_{s+1}^{\frac{s-1}{s+1}}. \quad (3.104)$$

Além disso,

$$-\frac{2}{3} \|z\|_{s+1}^2 + c_1(s) \|z\|_0^{\frac{2s+7}{2s+2}} \|z\|_{s+1}^{\frac{4s-1}{2s+2}} \leq c_4(s) \|z\|_0^{\frac{4s+14}{5}}, \quad (3.105)$$

$$-\frac{2}{3} \|z\|_{s+1}^2 + c_2(s) \|z\|_0^{\frac{2}{s+1}} \|z\|_{s+1}^{\frac{s-1}{s+1}} \|g\|_{s-1} \leq c_5(s) \|z\|_0^{\frac{4}{s+3}}, \quad (3.106)$$

$$-\frac{2}{3} \|z\|_{s+1}^2 + c_3(s) \|z\|_0^{\frac{s+4}{s+1}} \|z\|_{s+1}^{\frac{2s-1}{s+1}} \leq c_6(s) \|z\|_0^{\frac{2s-1}{3}}, \quad (3.107)$$

Substituindo (2.105) (2.106) e (2.107) obtemos,

$$\frac{d}{dt} \|z\|_{s-1}^2 \leq c_4(s) \|z\|_0^{\frac{4s+14}{5}} + c_5(s) \|z\|_0^{\frac{4}{s+3}} + c_6(s) \|z\|_0^{\frac{2s-1}{3}} + 2 \|z\|_0^2. \quad (3.108)$$

Integrando em $[0, t]$, com $0 \leq t \leq T$ e substituindo $\|z\|_0$ obtemos,

$$\begin{aligned} \|z(t)\|_{s-1}^2 &\leq [c_4(s) (\|\psi\|_0 + T \|g\|_0)^{\frac{4s+14}{s}} e^{\frac{4s+14}{s} \eta T} \\ &+ c_5(s) (\|\psi\|_0 + T \|g\|_0)^{\frac{4}{s+3}} e^{\frac{4}{s+3} \eta T} \\ &+ c_6(s) (\|\psi\|_0 + T \|g\|_0)^{\frac{2s-1}{3}} e^{\frac{2s-1}{3} \eta T} \\ &+ 2 (\|\psi\|_0 + T \|g\|_0)^2 e^{2\eta t}] T + \|\phi\|_s^2 \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \|u(t)\|_s &\leq c(s)[\|\phi\|_0 + \sqrt{2T}(\sqrt{c_2} + \|f\|_0)e^{(2+\eta)T} \\
 &+ [(\|\psi\|_0 + T\|g\|_0)^{\frac{2s+7}{5}} e^{\frac{2s+7}{5}\eta T} \\
 &+ (\|\psi\|_0 + T\|g\|_0)^{\frac{2}{s+3}} e^{\frac{2}{s+3}\eta T} + (\|\psi\|_0 \\
 &+ T\|g\|_0)^{\frac{2s-1}{6}} e^{\frac{2s-1}{6}\eta T} + 2(\|\psi\|_0 + T\|g\|_0)e^{\eta T}]T^{\frac{1}{2}} \\
 &+ \|\phi\|_s] \quad \forall t \in [0, T].
 \end{aligned} \tag{3.110}$$

Teorema 3.2.3. . *Sejam $\phi \in H_{per}^s$, $s \geq 1$ e $\mu > 0$. Então, para cada $\eta > 0$, existe uma única $u_\eta \in C([0, \infty); H_{per}^s)$ solução para o problema (1.1), tal que $\partial_t u_\eta \in C([0, \infty); H_{per}^{s-3})$*

Demonstração *Se $s \in \mathbb{Z}^+$ então o resultado segue-se pela teoria local e pelos lemas 2.2.5 e 2.2.6. Pela proposição (3.2.1), o problema (1.1) é equivalente a equação integral (3.80). Seja,*

$$T^* := \sup \{T > 0; \exists! u \in C([0, T]; H_{per}^s) \text{ satisfazendo (3.80)}\}.$$

Vamos mostrar que $T^ = \infty$. Suponha que $T^* < \infty$. Pelos Lemas 2.2.5 e 2.2.6 teremos que,*

$$\|u(t)\|_s \leq K, \forall t \in [0, T^*),$$

onde $K = K(\|\phi\|_s, \eta, T^)$ é função continua em T^* não decrescente. O objetivo é mostrar que $\lim_{t \uparrow T^*} u(t)$ em $H_{per}^s(\mathbb{R})$. De fato seja $t, \tau \in [0, T^*)$, e suponha $t < \tau$. Usando a equação integral (2.80) teremos que,*

$$\begin{aligned}
 \|u(t) - u(\tau)\|_s &\leq \|(E_{\eta, \mu}(t) - E_{\eta, \mu}(\tau))\phi\|_s \\
 &+ \int_0^t \|(E_{\eta, \mu}(t - t') - E_{\eta, \mu}(\tau - t'))(u_x)^2(t')\|_s dt' \\
 &+ \int_t^\tau \|E_{\eta, \mu}(\tau - t')(u_x)^2(t')\|_s dt'.
 \end{aligned} \tag{3.111}$$

Usando cálculos similares para obter estimativas para,

$$\begin{aligned}
 \|(Af)(t) - (Af)(\tau)\|_s &\leq \|E_{\eta, \mu}(t)\phi - E_{\eta, \mu}(\tau)\phi\|_s \\
 &+ \frac{1}{2} \left\| \int_0^t E_{\eta, \mu}(t - t')(f_x)^2(t') dt' - \int_0^\tau E_{\eta, \mu}(\tau - t')(f_x)^2(t') dt' \right\|_s,
 \end{aligned}$$

porém agora usando,

$$\|u(t)\|_s \leq K, \forall t \in [0, T^*),$$

teremos que o lado direito de (3.111) tende a zero quando $\tau, t \rightarrow T^*$. Então usando o Critério de Cauchy, concluímos que existe $\lim_{t \uparrow T^*} u(t)$ em $H_{per}^s(\mathbb{R})$. Além disso, a última parte mostra que a integral representação (3.80) para $u(t)$, é válida para todo $t \in [0, T^*]$. Usando o teorema 2.2.1, obteremos uma contradição com $T^* < \infty$.

Teorema 3.2.4. *Seja $\psi \in H_{per}^s(\mathbb{R})$, $s \geq 1$. Então, para cada $\eta > 0$, existe uma única $u \in C([0, \infty); H_{per}^s(\mathbb{R}))$ solução para o problema (1.2), tal que $\partial_t u \in C([0, \infty); H^{s-3}(\mathbb{R}))$.*

Demonstração Análoga a demonstração do teorema 2.2.3.

Capítulo 4

Existência de Atratores

4.1 Dominio Limitado

4.1.1 Existência de conjuntos absorventes

Proposição 4.1.1. *Seja $\mu > 0$ $\eta > 0$. Existe uma constante ρ_s tal que para todo $R > 0$ existe $T_s(R)$ tal que*

$$\|S(t)z_0\|_s \leq \rho_s, \forall z_0 \in H_{per}^s, \|z_0\|_s \leq R, \forall t \geq T_s(R), \quad (4.1)$$

onde $S(t)z_0 \equiv z(t)$ é solução da equação (1.2) que é dada por,

$$z_t + zz_x + z_{xxx} + \eta(\mathcal{H}z_x + \mathcal{H}z_{xxx}) + \mu z = g.$$

Demonstração

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|_s^2 = \langle z, z_t \rangle_s \\
& = \langle z, -zz_x - z_{xxx} - \eta(\mathcal{H}z_x + \mathcal{H}z_{xxx}) - \mu z + g \rangle_s \\
& = - \langle z, zz_x \rangle_s - \eta \langle z, \mathcal{H}z_x + \mathcal{H}z_{xxx} \rangle_s - \mu \|z\|_s^2 + \langle z, g \rangle_s \\
& \leq \frac{1}{2} \langle z_x, z^2 \rangle_s + 2\pi\eta \sum_{k=-1}^{k=1} (-|k| + |k|^3) |\widehat{z}_k|^2 \\
& + 2\pi\eta \sum_{k \geq 2} (|k| - |k|^3) |\widehat{z}_k|^2 - \mu \|z\|_s^2 + \langle z, g \rangle_s \\
& \leq \frac{1}{2} \langle z_x, z^2 \rangle_s - 2\pi\eta \sum_{|k| \geq 2} k^2 |\widehat{z}_k|^2 - \mu \|z\|_s^2 + \langle z, g \rangle_s \tag{4.2} \\
& \leq \frac{1}{2} \langle z_x, z^2 \rangle_s - 2\pi\eta \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |\widehat{z}_k|^2 + 2\pi\eta(0 + |\widehat{z}_1|^2 + \\
& + |\widehat{z}_{-1}|^2) - \mu \|z\|_s^2 + \|z\|_s \|g\|_s \\
& \leq \frac{1}{2} \langle z_x, z^2 \rangle_s + \eta \|z\|_s^2 - \eta \|\partial_x^2 z\|_s^2 - \mu \|z\|_s^2 + \langle z, g \rangle_s \\
& = \frac{1}{2} \langle z_x, z^2 \rangle_s + \eta \|z\|_s^2 - \eta \|z\|_{s+2}^2 + \eta \|z\|_0^2 - \mu \|z\|_s^2 \\
& + \langle z, g \rangle_s .
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \|z\|_s^2 + 2(\mu - \eta) \|z\|_s^2 \leq \langle z_x, z^2 \rangle_s - 2\eta \|z\|_{s+2}^2 + 2\eta \|z\|_0^2 \\
& + 2\|z\|_s \|g\|_s .
\end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned}
& | \langle z_x, z^2 \rangle_s | \leq \|z_x\|_s \|z^2\|_s \\
& \leq c_s \|z\|_{s+1} \|z\|_{L^\infty} \|z\|_s \\
& \leq c_s \|z\|_{s+1} [\|z\|_0 + \|z\|_0^{\frac{1}{2}} \|z_x\|_0^{\frac{1}{2}}] \|z\|_s \\
& \leq c_s \|z\|_{s+1} \|z\|_0 \|z\|_s + c(s) \|z\|_{s+1} \|z\|_0^{\frac{1}{2}} \|z\|_1^{\frac{1}{2}} \|z\|_s .
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Por interpolação,

$$\|z\|_s \leq c_s \|z\|_0^{\frac{2}{s+2}} \|z\|_{s+2}^{\frac{s}{s+2}} . \tag{4.4}$$

$$\|z\|_1 \leq c_s \|z\|_0^{\frac{s+1}{s+2}} \|z\|_{s+2}^{\frac{1}{s+2}}. \quad (4.5)$$

$$\|z\|_{s+1} \leq c_s \|z\|_0^{\frac{1}{s+2}} \|z\|_{s+2}^{\frac{s+1}{s+2}}. \quad (4.6)$$

Assim,

$$|\langle z_x, z^2 \rangle| \leq c_s \|z\|_0^{q_1} \|z\|_{s+2}^{p_1} + c_s \|z\|_0^{q_2} \|z\|_{s+2}^{p_2}, \quad (4.7)$$

onde,

$$p_1 = \frac{s+1}{s+2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+2} + \frac{s}{s+2} = \frac{4s+3}{2s+4}, \quad (4.8)$$

$$q_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{s+1}{s+2} + \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s+9}{2s+4}, \quad (4.9)$$

$$p_2 = \frac{1}{s+2} + 1 + \frac{2}{s+2} = \frac{s+5}{s+2}, \quad (4.10)$$

$$q_2 = \frac{s}{s+2} + 1 + \frac{s+1}{s+2} = \frac{2s+1}{s+2}. \quad (4.11)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|z\|_s^2 + 2(\mu - \eta) \|z\|_s^2 &\leq c_s \|z\|_0^{q_1} \|z\|_{s+2}^{p_1} + c_s \|z\|_0^{q_2} \|z\|_{s+2}^{p_2} \\ &\quad - 2\eta \|z\|_{s+2}^2 + 2\|z\|_s \|g\|_s + 2\eta \|z\|_0^2. \end{aligned}$$

Como,

$$2\|z\|_s \|g\|_s \leq c_s \|z\|_0^{\frac{2}{s+2}} \|z\|_{s+2}^{\frac{s}{s+2}} \|g\|_s. \quad (4.12)$$

substituindo na equação acima, obteremos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|z\|_s^2 + 2(\mu - \eta) \|z\|_s^2 &\leq c_1(s) \|z\|_0^{\frac{2s+9}{2s+4}} \|z\|_{s+2}^{\frac{4s+3}{2s+4}} \\ &\quad + c_2(s) \|z\|_{s+2}^{\frac{s+5}{s+2}} \|z\|_0^{\frac{2s+1}{s+2}} + c_3(s) \|z\|_0^{\frac{2}{s+2}} \|z\|_{s+2}^{\frac{s}{s+2}} \|g\|_s - 2\eta \|z\|_{s+2}^2 \\ &\quad + 2\eta \|z\|_0^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Além disso:

$$c_1 \|z\|_0^{q_1} \|z\|_{s+2}^{p_1} - \frac{2}{3} \eta \|z\|_{s+2}^2 \leq c_4(\eta, s) \|z\|_0^{\frac{4s+18}{5}}, \quad (4.14)$$

$$c_s \|z\|_0^{\frac{2}{s+2}} \|z\|_{s+2}^{\frac{s}{s+2}} \|g\|_s - \frac{2}{3} \eta \|z\|_{s+2}^2 \leq c_5(\eta, s) \|z\|_0^{\frac{4}{s+4}}, \quad (4.15)$$

$$c_3 \|z\|_0^{q_2} \|z\|_{s+2}^{p_2} - \frac{2}{3} \eta \|z\|_{s+2}^2 \leq c_6(\eta, s) \|z\|_0^{\frac{2s+1}{3}}. \quad (4.16)$$

Substituindo as três desigualdades acima em (3.13),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|z\|_s^2 + 2(\mu - \eta) \|z\|_s^2 &\leq c_4(\eta, s) \|z\|_0^{\frac{4s+18}{5}} + c_5(\eta, s) \|z\|_0^{\frac{4}{s+4}} \\ &\quad + c_6(\eta, s) \|z\|_0^{\frac{2s+1}{3}} + 2\eta \|z\|_0^2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Integrando entre 0 e t ,

$$\|z\|_s^2 \leq e^{-2(\mu-\eta)t} \|\psi\|_s^2 + e^{-2(\mu-\eta)t} \int_0^t e^{2(\mu-\eta)t'} F(t') dt', \quad (4.18)$$

$$\text{onde } F = c_4(\eta, s) \|z\|_0^{\frac{4s+18}{5}} + c_5(\eta, s) \|z\|_0^{\frac{4}{s+4}} + c_6(\eta, s) \|z\|_0^{\frac{2s+1}{3}} + 2\|z\|_0^2.$$

Proposição 4.1.2. . Seja $\mu > 0$, $\eta > 0$ dados. Então existe uma constante $\rho_s = \rho_s(\mu, \eta, \|g\|_s)$ tal que para todo $R > 0$ existe $T_s(R)$ tal que

$$\|S(t)z_0\|_0 \leq \rho_s, \forall z_0 \in H_{per}^s, \|z_0\|_0 \leq R, \forall t \geq T_s(R), \quad (4.19)$$

onde $S(t)z_0 \equiv z(t)$ é solução da equação (1.2).

$$z_t + zz_x + z_{xxx} + \eta(\mathcal{H}z_x + \mathcal{H}z_{xxx}) + \mu z = g.$$

Demonstração

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|_0^2 = \langle z, z_t \rangle_0 \\ & = \langle z, -zz_x - z_{xxx} - \eta(\mathcal{H}z_x + \mathcal{H}z_{xxx}) - \mu z + g \rangle_0 \\ & = - \langle z, zz_x \rangle_0 - \langle z, z_{xxx} \rangle_0 - \eta \langle z, \mathcal{H}z_x + \mathcal{H}z_{xxx} \rangle_0 \\ & \quad - \mu \|z\|_0^2 + \langle z, g \rangle_0 \\ & \leq 2\pi\eta \sum_{k=-1}^{k=1} (-|k| + |k|^3) |\widehat{z}_k|^2 + 2\pi\eta \sum_{|k| \geq 2} (|k| - |k|^3) |\widehat{z}_k|^2 \\ & \quad - \mu \|z\|_0^2 + \langle z, g \rangle_0 \quad (4.20) \\ & \leq -2\pi\eta \sum_{|k| \geq 2} k^2 |\widehat{z}_k|^2 - \mu \|z\|_0^2 + \langle z, g \rangle_0 \\ & \leq -2\pi\eta \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |\widehat{z}_k|^2 + 2\pi\eta(0 + |\widehat{z}_1|^2 + |\widehat{z}_{-1}|^2) - \mu \|z\|_0^2 \\ & \quad + \|z\|_0 \|g\|_0 \\ & \leq \eta \|z\|_0^2 - \eta \|\partial_x^2 z\|_0^2 - \mu \|z\|_0^2 + \langle z, g \rangle_0 \\ & = \eta \|z\|_0^2 - \mu \|z\|_0^2 + \langle z, g \rangle_0. \end{aligned}$$

Desta forma obteremos,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|_0^2 + (\mu - \eta) \|z\|_0^2 \leq \|z\|_0 \|g\|_0.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} \|z\|_0 + (\mu - \eta) \|z\|_0 \leq \|g\|_0.$$

Teremos então,

$$(\|z\|_0 e^{(\mu-\eta)t})' \leq \|g\|_0 e^{(\mu-\eta)t} \quad (4.21)$$

Integrando de 0 a t:

$$\begin{aligned} \|z(t)\|_0 e^{(\mu-\eta)t} &\leq \|z(0)\|_0 + \|g\|_0 \int_0^t e^{(\mu-\eta)t} dt \\ &\leq \|z(0)\|_0 + \frac{\|g\|_0}{(\mu-\eta)} [e^{(\mu-\eta)t} - 1]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Assim:

$$\|z(t)\|_0 \leq \|z(0)\|_0 e^{-(\mu-\eta)t} + \frac{\|g\|_0}{(\mu-\eta)} [1 - e^{-(\mu-\eta)t}] \quad (4.23)$$

Proposição 4.1.3. *Seja $\mu > 0$, $\eta > 0$ dados. Então existe uma constante $\rho_s = \rho_s(\mu, \eta, \|g\|_s)$ tal que para todo $R > 0$ existe $T_s(R)$ tal que*

$$\|S(t)u_0\|_0 \leq \rho_s, \forall u_0 \in H_{per}^s, \|u_0\|_0 \leq R, \forall t \geq T_s(R), \quad (4.24)$$

onde $S(t)u_0 \equiv u(t)$ é solução da equação (1.1)

$$u_t + \frac{1}{2}(u_x)^2 + u_{xxx} + \eta(\mathcal{H}u_x + \mathcal{H}u_{xxx}) + \mu u = f. \quad (4.25)$$

Demonstração

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_0^2 &= \langle u, -\frac{1}{2}(u_x)^2 - u_{xxx} - \eta(\mathcal{H}u_x + \mathcal{H}u_{xxx}) - \mu u + f \rangle_0 \\ &= \frac{-1}{2} \langle u, (u_x)^2 \rangle_0 - \langle u, u_{xxx} \rangle_0 - \eta \langle u, \mathcal{H}u_x + \mathcal{H}u_{xxx} \rangle_0 \\ &\quad - \mu \|u\|_0^2 + \langle u, f \rangle_0 \\ &\leq \frac{-1}{2} \langle u, (u_x)^2 \rangle_0 - \eta \|\partial_x^2 u\|_0^2 + \eta \|u\|_0^2 - \mu \|u\|_0^2 + \langle u, f \rangle_0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Como,

$$\|u\|_{L^\infty} \leq [\|u\|_0 + \|u\|_0^{\frac{1}{2}} \|u_x\|_0^{\frac{1}{2}}],$$

obteremos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_0^2 &\leq C_1 [\|u\|_0 + \|u\|_0^{\frac{1}{2}} \|u_x\|_0^{\frac{1}{2}}] \|z\|_0^2 - \eta \|z_x\|_0^2 + \eta \|u\|_0^2 \\
&\quad - \mu \|u\|_0^2 + \|u\|_0 \|f\|_0 \\
&\leq C_1 \|u\|_0 \|z\|_0^2 + C_1 \|u\|_0^{\frac{1}{2}} \|u_x\|_0^{\frac{1}{2}} \|z\|_0^2 - \eta \|z_x\|_0^2 + \eta \|u\|_0^2 \\
&\quad - \mu \|u\|_0^2 + \|u\|_0 \|f\|_0 \\
&\leq C_1 \|u\|_0 + C \|u\|_0^{\frac{1}{2}} + \eta \|u\|_0^2 - \mu \|u\|_0^2 + \|u\|_0 \|f\|_0 \\
&\leq C \|u\|_0 + C_2 + \|u\|_0^2 + \eta \|u\|_0^2 - \mu \|u\|_0^2 + \|u\|_0 \|f\|_0 \\
&= (2 + \eta) \|u\|_0^2 + C \|u\|_0 + (C_2 + \|f\|_0^2) \\
&= (3 + \eta) \|u\|_0^2 + (C_2 + \|f\|_0^2 + C_1^2).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Integrando,

$$\frac{d}{dt} \|u\|_0^2 - (6 + 2\eta) \|u\|_0^2 \leq (2C_2 + 2\|f\|_0^2 + 2C_1^2),$$

entre 0 e t , onde $0 \leq t \leq T$ obtemos,

$$\|u\|_0^2 \leq e^{(6+2\eta)t} \|\phi\|_0^2 + e^{(6+2\eta)t} \int_0^t e^{-(6+2\eta)t'} F(t') dt', \tag{4.28}$$

onde $F = (2C_2 + 2\|f\|_0^2 + 2C_1^2)$.

4.1.2 Compacidade

Proposição 4.1.4. . Dados $\mu > 0$ e $\eta > 0$, para todo conjunto limitado B de \dot{H}_{per}^s , $s \geq 1$, existe $T_s(B)$ tal que $\bigcup_{t \geq T_s} S(t)B$ é relativamente compacto em \dot{H}_{per}^s .

Demonstração Seja $\tilde{s} > s > 1$. Temos que,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|z\|_{\tilde{s}}^2 + 2(\mu - \eta) \|z\|_{\tilde{s}}^2 &\leq c_s \|z\|_{s+1} \|z\|_0 \|z\|_s \\
&\quad + c(s) \|z\|_{s+1} \|z\|_0^{\frac{1}{2}} \|z\|_1^{\frac{1}{2}} \|z\|_s \\
&\quad - 2\eta \|z\|_{\tilde{s}+2}^2 + 2\eta \|z\|_0^2 + 2\|z\|_{\tilde{s}} \|g\|_{\tilde{s}} \\
&\leq c_1(s) \|z\|_0^{\frac{2s+9}{2s+4}} \|z\|_{s+2}^{\frac{4s+3}{2s+4}} + c_2(s) \|z\|_0^{\frac{s+5}{s+2}} \|z\|_{s+2}^{\frac{2s+1}{s+2}} \\
&\quad + c_3(s) \|z\|_0^{\frac{2}{s+2}} \|z\|_{s+2}^{\frac{s}{s+2}} \|g\|_s - 2\eta \|w\|_{s+2}^2 + 2\eta \|w\|_0^2.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Usando as estimativas apriori, interpolação e a equação acima, existe uma constante não negativa $C(s, \tilde{s}, \eta, \mu, \|g\|_{\tilde{s}})$ tal que para todo $R > 0$ existe $T_s(R)$ tal que

$$\frac{d}{dt} \|z\|_{\tilde{s}}^2 + 2(\mu - \eta) \|z\|_{\tilde{s}}^2 \leq C(s, \tilde{s}, \eta, \|g\|_{\tilde{s}}), \quad (4.30)$$

para todo $t \geq T_s(R)$ e $\|z_0\|_s \leq R$

Multiplicando a equação acima por $e^{2(\mu-\eta)t}$ e integrando obteremos,

$$\|z(t)\|_{\tilde{s}}^2 \leq \|z(T_s)\|_{\tilde{s}}^2 e^{-2(\mu-\eta)(t-T_s)} + \frac{C}{2(\mu-\eta)} [1 - e^{-2(\mu-\eta)(t-T_s)}], \quad (4.31)$$

para todo $t \geq T_s$

Isto mostra que para todo conjunto limitado B em \dot{H}_{per}^s , existe $T_s(R)$ tal que $\bigcup_{t \geq T_s} S(t)B$ é um conjunto limitado em $\dot{H}_{per}^{\tilde{s}}$, devido o fato que a inclusão $\dot{H}_{per}^{\tilde{s}} \subset \dot{H}_{per}^s$ é compacta. Isto completa a demonstração.

Teremos como consequência o seguinte teorema:

Teorema 4.1.1. *Seja $\mu > 0$, $\eta > 0$, $f \in H_{per}^s$ e $s \geq 1$. Então o semigrupo associado com o problema de Cauchy da equação(1.2) possui um atrator global $\mathcal{A} = \omega(B)$ em H_{per}^s isto é, \mathcal{A} conjunto compacto em H_{per}^s que possui as seguintes propriedades:*

- (i) \mathcal{A} é um conjunto invariante, isto é, $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \forall t \geq 0$;
- (ii) Para cada conjunto $B \in H_{per}^s$, $d(S(t)B, \mathcal{A}) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, onde $d(S(t)B, \mathcal{A}) = \sup \inf \|g - h\|_s$.

4.2 Dominio não limitado

4.2.1 Existência do conjunto absorvente

Proposição 4.2.1. *Seja $\mu > 0$, $\eta > 0$. Então existe uma constante $\rho_s = \rho_s(\mu, \eta, \|z\|_0)$ tal que para todo $R > 0$ existe $T_s(R)$ tal que*

$$\|S(t)z_0\|_0 \leq \rho_s, \forall z_0 \in H^s, \|z_0\|_s \leq R, \forall t \geq T_s(R), \quad (4.32)$$

onde $S(t)z_0 \equiv z(t)$ é solução da equação (1.2) dada por,

$$z_t + zz_x + z_{xxx} + \eta(\mathcal{H}z_x + \mathcal{H}z_{xxx}) + \mu z = g.$$

Demonstração

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|_s^2 = \langle z, z_t \rangle_s \\ & = \langle z, -zz_x - z_{xxx} - \eta(\mathcal{H}z_x + \mathcal{H}z_{xxx}) - \mu z + g \rangle_s \\ & = -\langle z, zz_x \rangle_s - \eta \langle z, \mathcal{H}z_x + \mathcal{H}z_{xxx} \rangle_s - \mu \|z\|_s^2 + \langle z, g \rangle_s \quad (4.33) \\ & \leq \frac{1}{2} \langle z_x, z^2 \rangle_s + \eta \|z\|_s^2 - \eta \|\partial_x^2 z\|_s^2 - \mu \|z\|_s^2 + \langle z, g \rangle_s \\ & = \frac{1}{2} \langle z_x, z^2 \rangle_s + \eta \|z\|_s^2 - \eta \|z\|_{s+2}^2 + \eta \|z\|_0^2 - \mu \|z\|_s^2 + \langle z, g \rangle_s. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|z\|_s^2 + 2(\mu - \eta) \|z\|_s^2 \leq \langle z_x, z^2 \rangle_s - 2\eta \|z\|_{s+2}^2 + 2\eta \|z\|_0^2 \\ & + 2\|z\|_s \|g\|_s. \end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned} |\langle z_x, z^2 \rangle_s| & \leq \|z_x\|_s \|z^2\|_s \\ & \leq c_s \|z\|_{s+1} \|z\|_{L^\infty} \|z\|_s \\ & \leq c_s \|z\|_{s+1} \|z\|_0^{\frac{1}{2}} \|z_x\|_0^{\frac{1}{2}} \|z\|_s \\ & \leq c_s \|z\|_{s+1} \|z\|_0^{\frac{1}{2}} \|z\|_1^{\frac{1}{2}} \|z\|_s, \end{aligned} \quad (4.34)$$

e por interpolação,

$$\|z\|_s \leq c_s \|z\|_0^{\frac{2}{s+2}} \|z\|_{s+2}^{\frac{s}{s+2}}, \quad (4.35)$$

$$\|z\|_1 \leq c_s \|z\|_0^{\frac{s+1}{s+2}} \|z\|_{s+2}^{\frac{1}{s+2}}, \quad (4.36)$$

$$\|z\|_{s+1} \leq c_s \|z\|_0^{\frac{1}{s+2}} \|z\|_{s+2}^{\frac{s+1}{s+2}}, \quad (4.37)$$

teremos,

$$|\langle z_x, z^2 \rangle_s| \leq c_s \|z\|_0^q \|z\|_{s+2}^p, \quad (4.38)$$

onde,

$$p = \frac{s+1}{s+2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+2} + \frac{s}{s+2} = \frac{4s+3}{2s+4}, \quad (4.39)$$

e

$$q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{s+1}{s+2} + \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s+9}{2s+4}. \quad (4.40)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|z\|_s^2 + 2(\mu - \eta) \|z\|_s^2 &\leq c_s \|z\|_0^q \|z\|_{s+2}^p - \eta \|z\|_{s+2}^2 \\ &+ 2 \|z\|_s \|g\|_s - \eta \|z\|_{s+2}^2 + 2\eta \|z\|_0^2. \end{aligned}$$

Como,

$$2 \|z\|_s \|g\|_s \leq c_s \|z\|_0^{\frac{2}{s+2}} \|z\|_{s+2}^{\frac{s}{s+2}} \|g\|_s, \quad (4.41)$$

substituindo na equação acima, obteremos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|z\|_s^2 + 2(\mu - \eta) \|z\|_s^2 &\leq c_1(s) \|z\|_0^{\frac{2s+9}{2s+4}} \|z\|_{s+2}^{\frac{4s+3}{2s+4}} - \eta \|z\|_{s+2}^2 \\ &+ c_2(s) \|z\|_0^{\frac{2}{s+2}} \|z\|_{s+2}^{\frac{s}{s+2}} \|g\|_s - \eta \|z\|_{s+2}^2 + 2\eta \|z\|_0^2. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Além disso,

$$c_s \|z\|_0^q \|z\|_{s+2}^p - \eta \|z\|_{s+2}^2 \leq c_3(\eta, s) \|z\|_0^{\frac{4s+18}{5}}, \quad (4.43)$$

e

$$c_s \|z\|_0^q \|z\|_{s+2}^p - \eta \|z\|_{s+2}^2 \leq c_4(\eta, s) \|z\|_0^{\frac{4}{s+4}}. \quad (4.44)$$

Usando (4.43) e (4.44),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|z\|_s^2 + 2(\mu - \eta) \|z\|_s^2 &\leq c_3(\eta, s) \|z\|_0^{\frac{4s+18}{5}} + c_4(\eta, s) \|z\|_0^{\frac{4}{s+4}} \\ &+ 2 \|z\|_0^2. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Integrando entre 0 e t,

$$\|z\|_s^2 \leq e^{-2(\mu-\eta)t} \|\psi\|_s^2 + e^{-2(\mu-\eta)t} \int_0^t e^{2(\mu-\eta)t'} F(t') dt', \quad (4.46)$$

onde $F = c_3(\eta, s) \|z\|_0^{\frac{4s+18}{5}} + c_4(\eta, s) \|z\|_0^{\frac{4}{s+4}}$.

4.2.2 Compacidade

Dada a não compacidade da imersão $H^{\tilde{s}}(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R})$, para $\tilde{s} > s$, obteremos a existência de atratores na topologia fraca de $H^s(\mathbb{R})$.

Seja ω – limite de $B_s = \{v \in H^s(\mathbb{R}) : \|v\|_s \leq \rho_s\}$, então temos o seguinte teorema:

Teorema 4.2.1. *Seja $\mu > 0$, $\eta > 0$, $f \in H^\infty(\mathbb{R})$ e $s \geq 1$. Então o semigrupo $S(t)$ associado ao problema de Cauchy (1.2), possui atrator global $\mathcal{A} = \omega(B_s)$ na topologia fraca de $H^s(\mathbb{R})$ tal que:*

- (i) \mathcal{A} é limitado e fracamente fechado em $H^s(\mathbb{R})$,
- (ii) $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$,
- (iii) Para todo conjunto limitado C em $H^s(\mathbb{R})$, o conjunto $S(t)C$ converge a \mathcal{A} na topologia fraca de $H^s(\mathbb{R})$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Referências Bibliográficas

- [1] *Angulo, P.J.*, O Problema de Cauchy para um Sistema Dispersivo de Ondas Longas, *Tese de Doutorado, IMPA, RJ-Brasil, (1994)*.
- [2] *Alarcon, A.E, Angulo, J., Montenegro, F.J.*, Stability and Instability of Solitary Waves for a Nonlinear Dispersive System, *Nonlinear Anal. 36, no. 8, Ser. A: Theory Methods, 1015–1035, (1999)*.
- [3] *Alarcon, A. E.*, Existence of the global attractor for the n-dimensional Kuramoto-Sivashinsky equation, *52o Seminário brasileiro de análise, (2000)*.
- [4] *Alarcon, A.E.*, Existence and finite dimensionality of the global attractor for a class of nonlinear dissipative equations, *Proceedings of the Royal Society of Edinburg, 123 A, 893-916, (1993)*.
- [5] *Alarcon A.E., Iorio R.J.*, The existence of global attractors for a class of nonlinear dissipative evolution equations *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 135 , no. 5, 887–913, (2005)*.
- [6] *Alarcon A.E., Iorio R.J.*, On the Cauchy problem associated to the Brinkman flow: the one dimensional theory, *Mat. Contemp. 27 , 1–17, (2004)*.
- [7] *Albert, J.P., Bona, J.L., Henry, D.B.*, Sufficient Conditions for Stability of Solitary-wave Solutions of Model Equations for Long Waves, *Physica 24(D) pág 343-366, North-Holland. Amsterdam. (1986)*.

- [8] Benjamin, T., Bona, J.L., Mahony, J., Model Equations for Long Waves in Nonlinear Dispersive Systems, *Philos. Trans. Royal Soc. London A* 272, 47-78 (1972).
- [9] Berestycki, H., Lions, P.L., Nonlinear Scalar Field Equations I, Existence of a Ground State, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 82, 313-345 (1983).
- [10] I. Moise, R. Rosa and X. Wang, Attractors for non-compact semigroups via energy equations, *Nonlinearity* 11, 1369-1393, (1998).
- [11] Berezin F., Shubin M., The Schrodinger equation, *Mathematics and its Application. Kluwer Academic* (1991).
- [12] Bona, J.L., Ponce, G, Saut, J.C, and Tom, M.M., A Model System for Strong Interaction Between Internal Solitary Waves, *Comm. Math. Phys.* 143, 287-313, (1992).
- [13] Samaniego, A.J.B, On the Cauchy problem for a nonlocal perturbation of the KdV equation, *Differential Integral Equations* 16, no 10, 1249-1280, (2003).
- [14] Brézis, H., Análisis Funcional: Teoría y Aplicaciones, *Alianza Editorial, Madrid-España* (1984).
- [15] Coddington E., Levinson N., Theory of Ordinary Differential Equations, *McGraw-Hill, New York* (1955).
- [16] Dieudonné, J., Foundations of Modern Analysis, *Academic Press, New York*, (1960)
- [17] Fernandez, P., Medida e Integração, Projeto Euclides, *IMPA, RJ-Brasil*, (1976).
- [18] Folland, G. B., Introduction to Partial Differential Equations, *Princeton University Press and University of Tokyo, Press, Princeton, New Jersey*, (1976).

- [19] Grillakis, M., Shatah, J., Strauss, W., Stability Theory of Solitary Waves in the Presence of Symmetry I, *J. Funct. Analysis* 74, 160-197 (1987).
- [20] Íorio, J.R., Magalhães, I.V., Equações Diferenciais Parciais: uma introdução, *Projeto Euclides, IMPA, R.J-Brasil*, (1988).
- [21] Kato, T., Perturbation Theory for Linear Operators, *Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo* (1984).
- [22] Kenig, C.E., Ponce, G. and Vega, L. Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle. *Communications on pure and applied mathematics. Vol. XLVI. págs. 527-620* (1993).
- [23] Lions, P.L., The concentration compactness principle in the calculus of variations: The locally compact case, *parts 1 and 2, Ann. I.H.P. Analyse Non-linéaire, vol. 1, nro 2, 109-145* (1984).
- [24] Milla, M.M., Medeiros, L.A., Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais, *textos de métodos matemáticos Nro 25, IM-UFRJ R.J-Brasil*, (1993).
- [25] Montenegro, B.J., Sistemas de Equações de Evolução Não-lineares. Estudo Local, Global e Estabilidade de Ondas Solitárias, *Tese de doutorado, IMPA, RJ*, (1994).
- [26] Moraes, P.J., Estabilidade ou Instabilidade de Ondas Viajantes para Alguns Modelos Não Lineares de Evolução, *Tese de doutorado IM-UFRJ*.
- [27] Morse, M.P., Feshbach. H., Methods of Theoretical Physics, *Ap. Vol. I, New York* (1953).

- [28] Ponce, G., Notas Sobre el Problema de Valores Iniciales Asociado a la Ecuación de Onda. *III escuela de Verano en Geometría dif., Eq. Dif. Parciales y Análisis Numérico. Universidade de los Andes(1995).*
- [29] Reed S., Simon B., Methods of Modern Mathematical Physics: Analysis of Operator, *AP. Vol. IV (1975).*
- [30] Shatah, J., Strauss, W., Instability of Nonlinear Bound States. *Comm. Math. Phys 100, 173-190 (1985).*
- [31] Thayer, J., Operadores Auto-adjuntos e Equações Diferenciais parciais, *Projeto Euclides, IMPA, R.J -Brasil, (1987).*
- [32] Weinstein, M.I., Existence and Dynamic Stability of Solitary Wave Solutions of Equations Arising in Long Wave Propagation, *Comm. P.D.E. 12, 1133-1173 (1987).*
- [33] M. Blaszak, *Multi-Hamiltonian Theory of Dynamical Systems, Springer-Verlag, (1998).*
- [34] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics # 840, Springer-Verlag, (1981).*
- [35] R. J. Iorio, Jr., *On the Cauchy problem for the Benjamin - Ono equation, Comm. Partial Differential Equations 11 (1986), no. 10, 1031-1081.*
- [36] R. J. Iorio, Jr. and W. V. L. Nunes, *Introdução às Equações de Evolução não Lineares, 18º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, (1993).*
- [37] R. J. Iorio, Jr., *KdV, BO and Friends in Weighted Sobolev Spaces, in Function-Analytic Methods for Partial Differential Equations, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, vol. 1450 (1990) pp. 105-121.*
- [38] T. Kato and H. Fujita, *On the Non-stationary Navier-Stokes system, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 32 (1962), 243-260.*

-
- [39] T. Kato, *Weak solutions of infinite-dimensional Hamiltonian systems*, *Frontiers in Pure and Applied Mathematics*, R. Dautray ed., 133–149, North-Holland, Amsterdam, (1991).
- [40] M. Tom, *Smoothing of a class of fifth order model evolution equations*, *Differential and Integral Equations* 9, no. 1 (1996), 45-58.
- [41] R. J. Iorio, Jr. and V. M. Iorio, *Fourier Analysis and Partial differential Equations*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* 70, Cambridge, (2001).