



UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOTECNIA,
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

**Análise dinâmica não linear de cascas de dupla
curvatura**

FLÁVIO AUGUSTO XAVIER CARNEIRO PINHO

T0001E24
GOIÂNIA
2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

☐ Dissertação ☒ Tese ☐ Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Flávio Augusto Xavier Carneiro Pinho

3. Título do trabalho

Análise dinâmica não linear de cascas de dupla curvatura

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM ☐ NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Zenon Jose Guzman Del Prado, Professor do Magistério Superior**, em 08/01/2024, às 14:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Flávio Augusto Xavier Carneiro Pinho, Discente**, em 08/01/2024, às 14:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4202776** e o código CRC **437DD8C9**.

FLÁVIO AUGUSTO XAVIER CARNEIRO PINHO

Análise dinâmica não linear de cascas de dupla curvatura

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil, da Escola de Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Federal de Goiás, para a obtenção do título de Doutor em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil.

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Zenon Jose Guzman Del Prado

Coorientador: Frederico Martins Alves da Silva

T0001E24

GOIÂNIA

2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Pinho, Flávio Augusto Xavier Carneiro
Análise dinâmica não linear de cascas de dupla curvatura
[manuscrito] / Flávio Augusto Xavier Carneiro Pinho. - 2024.
279 f.: il.

Orientador: Prof. Zenon Jose Guzman Del Prado; co-orientador
Frederico Martins Alves da Silva.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Escola de
Engenharia Civil e Ambiental (EECA), Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil - Geotecnia, Estruturas e Construção Civil, Goiânia,
2024.

Bibliografia. Apêndice.

Inclui siglas, fotografias, gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de
tabelas.

1. cascas de dupla curvatura. 2. formulação tensorial. 3. dinâmica não
linear. 4. decomposição ortogonal própria. 5. subvariedade espectral. I.
Del Prado, Zenon Jose Guzman, orient. II. Título.

CDU 624



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

ATA DE DEFESA DE TESE

Ata nº **001** da sessão de Defesa de Tese de **Flávio Augusto Xavier Carneiro Pinho** que confere o título de Doutor(a) em **Geotecnia, Estruturas e Construção Civil**, na área de concentração em **Estruturas**.

Aos **treze dias do mês de dezembro de dois mil e vinte e três**, a partir das **oito horas**, por meio de **videoconferência**, realizou-se a sessão pública de Defesa de Tese intitulada **“Análise dinâmica não linear de cascas de dupla curvatura”**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor **Zenon Jose Guzman del Prado** (PPGGECON/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Paulo Batista Gonçalves (PUC-Rio)**, membro titular externo; Professor Doutor **José Manoel Balthazar (UNESP)**, membro titular externo; Professor Doutor **Elvidio Gavassoni Neto (UFPR)**, membro titular externo; Professora Doutora **Renata Machado Soares (PPGGECON/UFG)**, membro titular interno. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do **trabalho**. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Tese tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Zenon Jose Guzman del Prado**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos **treze dias do mês de dezembro de dois mil e vinte e três**.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Zenon Jose Guzman Del Prado, Professor do Magistério Superior**, em 09/01/2024, às 11:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Flávio Augusto Xavier Carneiro Pinho, Discente**, em 09/01/2024, às 11:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Renata Machado Soares, Professor do Magistério Superior**, em 09/01/2024, às 11:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Paulo Batista Gonçalves, Usuário Externo**, em 09/01/2024, às 20:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **JOSE MANOEL BALTHAZAR, Usuário Externo**, em 09/01/2024, às 21:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Elvidio Gavassoni Neto, Usuário Externo**, em 01/02/2024, às 08:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4305094** e o código CRC **2F3343D9**.

À minha esposa,

Sofia.

Ao meu pai,

José Alberto (in memoriam).

À minha mãe,

Maria Augusta.

Ao meu irmão,

Fernando.

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente ao meu pai, José Alberto Carneiro Pinho, que infelizmente faleceu enquanto eu desenvolvia a pesquisa que resultou nesta tese. Sem meu pai, este trabalho jamais seria possível. Ele sempre me deu suporte material e emocional para que eu trilhasse o caminho da pesquisa e da educação. Lembro que ele me apelidou orgulhosamente (e prematuramente) de *doutor* logo após a minha aprovação no vestibular. Para mim, este título nunca foi uma busca com um fim em si mesmo, e passei a entendê-lo como resultado natural do meu crescente interesse pela educação e pela pesquisa. Hoje, graças à lembrança feliz que tenho do meu pai, tenho muito orgulho em ser o seu filho e agora doutor de fato.

Agradeço à minha esposa, companheira, colega e parceira Sofia. Foi graças ao seu exemplo que eu passei a me interessar pela pesquisa, ainda na graduação. E foi graças à sua insistência que ingressei no mestrado, o que deu início a nossa vida acadêmica, resultando posteriormente nesta tese.

Agradeço à minha mãe, Maria Augusta, e ao meu irmão, Fernando, que, no período mais difícil da minha vida, fizeram grandes sacrifícios pessoais assumindo os negócios do meu pai e me dando tranquilidade para continuar o desenvolvimento desta tese. Eu tenho um orgulho enorme dos dois, além de uma dívida de gratidão que eu jamais poderei pagar. Estendo esses agradecimentos à minha cunhada, Laurie, e aos meus sobrinhos, Wolf, Augusto e Fee, que sempre me deram muito carinho e apoio.

Agradeço aos meus sogros, Eufrosina e Acelino, que me acolheram em sua casa durante o doutorado. Agradeço também à Olívia e ao Vincent que me ajudaram sempre que pedi em assuntos relacionado à tese.

Agradeço aos meus orientadores Zenón e Frederico, que considero não apenas meus queridos professores e orientadores, mas também meus grandes amigos.

Agradeço às instituições de ensino público e fomento à pesquisa do Brasil. Em especial, à Universidade Federal de Goiás e aos professores, servidores e colegas do PPG-GECON. Agradeço à Universidade Federal do Cariri e aos meus colegas professores e servidores do Centro de Ciências e Tecnologia. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) – Código de Financiamento 88881.689948/2022-01. Agradeço à CAPES pela bolsa e por me proporcionar a maravilhosa experiência do doutorado sanduíche no Canadá.

Agradeço também à McGill University, ao professor Marco Amabili e a todos os amigos que fiz durante o período do doutorado em Montreal.

Por fim, agradeço a todos os profissionais de saúde envolvidos no combate à pandemia.

Ah, para o prazer e para ser feliz, é que é preciso a gente saber tudo, formar alma, na consciência; para penar, não se carece: bicho tem dor, e sofre sem saber mais porquê. Digo ao senhor: tudo é pacto. Todo caminho da gente é resvaloso.

João Guimarães Rosa

RESUMO

Na literatura, as formulações analíticas e semianalíticas utilizadas para análise de cascas são baseadas majoritariamente em teorias próprias para cascas parametrizadas por superfícies ortogonais. Neste trabalho, são utilizadas teorias tensoriais, especialmente a teoria de Koiter, capazes de lidar também com superfícies não ortogonais, aplicadas à análise de cascas de dupla curvatura: painéis esféricos, paraboloides elípticos e hiperbólicos e conoides parabólicos. As cascas, feitas de material elástico linear, foram analisadas por meio de um modelo semianalítico derivado do método de Rayleigh-Ritz. Devido à complexidade da geometria e das condições de contorno das cascas analisadas – e, conseqüentemente, dos campos de deslocamentos –, os modelos construídos necessitam de muitos graus de liberdade para atingir a convergência numérica. Portanto, duas técnicas de redução de ordem foram utilizadas para análise das cascas, a Decomposição Ortogonal Própria e a Subvariedade Espectral. Foram determinadas as frequências naturais, modos de vibração, respostas estáticas não lineares e vibrações livres e forçadas não lineares de cascas abatidas e não abatidas de dupla curvatura. Os resultados demonstram que a formulação tensorial é superior às formulações ortogonais para cascas abatidas e não abatidas. As técnicas de redução de ordem utilizadas foram eficazes em diminuir o esforço computacional e tempo de processamento, sem comprometer os resultados das análises, dentro do limite de carga e deslocamento das suas formulações. Os resultados contribuem para o entendimento dos fenômenos não lineares presentes nessas estruturas.

Palavras-chave: cascas de dupla curvatura; formulação tensorial; dinâmica não linear; decomposição ortogonal própria; subvariedade espectral

ABSTRACT

In the literature, the analytical and semi-analytical formulations used for shell analysis are primarily based on theories designed for shells parameterized by orthogonal surfaces. In this work, tensor theories, especially Koiter's theory, capable of dealing with non-orthogonal surfaces as well, are employed for analyzing shells with double curvature: spherical panels, elliptical and hyperbolic paraboloids, and parabolic conoids. The shells, made of linear elastic material, are analyzed using a semi-analytical model derived from the Rayleigh-Ritz method. Due to the complexity of the geometry and boundary conditions of the analyzed shells – and consequently, the displacement fields – the constructed models require a significant number of degrees of freedom to achieve numerical convergence. Thus, two order-reduction techniques were used for shell analysis, the Proper Orthogonal Decomposition and the Spectral Submanifolds. The natural frequencies, vibration modes, non-linear static responses, and non-linear free and forced vibrations of shallow and non-shallow doubly curved shells were determined. The results show that the tensor formulation is superior to the orthogonal formulations for shallow and non-shallow shells. The order-reduction techniques used were effective in reducing computational effort and processing time, without compromising the results of the analyses, within the load and displacement limits of their formulations. The results contribute to the understanding of nonlinear phenomena present in these structures.

Keywords: doubly curved shells; tensor formulation; nonlinear dynamics; proper orthogonal decomposition; spectral submanifold

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Obras notáveis do Brasil que possuem estruturas de cascas	46
Figura 1.2	Aplicações de cascas em diferentes ramos da engenharia	47
Figura 1.3	Fábrica Kilcher em Rechterswil projetada por Heinz Isler	53
Figura 1.4	Construções que apresentam cascas de dupla curvatura como cobertura. (a) painel esférico, (b) hiperboloide parabólico e (c) conoide.	54
Figura 2.1	Casca de base retangular	65
Figura 2.2	Movimento da superfície média da casca da configuração de referência para a configuração atual	67
Figura 2.3	Superfície paralela à superfície média na configuração de referência . . .	72
Figura 2.4	Movimento da casca da configuração de referência para a configuração atual	75
Figura 2.5	Elemento infinitesimal de volume e de área da casca	87
Figura 2.6	Forças e momentos resultantes em uma seção infinitesimal da casca. Em (a) a força resultante em um elemento infinitesimal de área na seção trans- versal; e em (b) os esforços internos resultantes das tensões ao longo da espessura da casca	88
Figura 2.7	Casca submetida a uma carga distribuída q e condições de contorno atu- ando na curva c	93
Figura 2.8	Forças e momentos atuando em um elemento infinitesimal da casca. Em (a), a representação dos vetores normais à seção transversal da casca; em (b), a representação das forças internas e externas resultantes; em (c), os momentos internos resultantes; e em (d) as forças e momentos inerciais e as forças dissipativas.	95
Figura 3.1	Fluxograma do método de Rayleigh-Ritz	104
Figura 3.2	Representação gráfica da restrição de fase	107

Figura 4.1	Esquema dos três principais tipos de Modos Normais Não Lineares: (a) trivial, (b) periódico e (c) quase periódico) e as suas Subvariedades Espectrais correspondentes. As SVE são sempre tangentes aos MNNL.	132
Figura 4.2	Trajetórias de um sistema dinâmico atraídas a um ponto fixo. Em (a) para um sistema dinâmico linear, e, em (b) para um sistema dinâmico não linear	133
Figura 4.3	Parametrização utilizando o conceito de variedades invariantes	134
Figura 4.4	Sistema massa-mola com dois graus de liberdade	144
Figura 4.5	Relações frequência-amplitude para um sistema dinâmico discreto com 2 graus de liberdade	147
Figura 4.6	Variedade do Subcentro de Lyapunov para o sistema dinâmico da Figura 4.4. As curvas contínuas representam os MNNL do modelo de ordem reduzida, enquanto as curvas tracejadas representam os mesmo MNNL para o modelo completo.	147
Figura 4.7	Parametrização do sistema não autônomo utilizando o conceito de variedades invariantes	148
Figura 4.8	Relações frequência-amplitude para um sistema dinâmico discreto com 2 graus de liberdade	152
Figura 5.1	Geometrias da superfície média: (a) conoide parabólico; (b) parabolóide elíptico; e (c) parabolóide hiperbólico.	155
Figura 5.2	Valores de $\max \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 $ para (a) o conoide parabólico e (b) o parabolóide elíptico/hiperbólico. As linhas vermelhas representam o caso especial em que a casca é um painel parabólico.	158
Figura 5.3	Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz e MEF para um conoide parabólico (a): condições de contorno do caso A; (b) condições de contorno do caso B.	160
Figura 5.4	Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um conoide parabólico com as condições de contorno do caso A. ($a/b = 1$, $f_1/b = 0,2$, $f_2/b = 0$, $ab/h^2 = 10000$, $\nu = 0,15$)	161

Figura 5.5	Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um conoide parabólico com as condições de contorno do caso B. ($a/b = 1$, $f_1/b = 0,2$, $f_2/b = 0$, $ab/h^2 = 10000$, $\nu = 0,15$)	161
Figura 5.6	Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um parabolóide elíptico com as condições de contorno do caso A. ($a/b = 1$, $f_1/a = 0,1$, $f_2/b = 0,1$, $ab/h^2 = 10000$, $\nu = 0,15$)	162
Figura 5.7	Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um parabolóide elíptico com as condições de contorno do caso B. ($a/b = 1$, $f_1/a = 0,1$, $f_2/b = 0,1$, $ab/h^2 = 10000$, $\nu = 0,15$)	162
Figura 5.8	Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um parabolóide hiperbólico com as condições de contorno do caso A. ($a/b = 1$, $f_1/a = 0,1$, $f_2/b = 0,1$, $ab/h^2 = 10000$, $\nu = 0,15$)	163
Figura 5.9	Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um parabolóide hiperbólico com as condições de contorno do caso B. ($a/b = 1$, $f_1/a = 0,1$, $f_2/b = 0,1$, $ab/h^2 = 10000$, $\nu = 0,15$)	163
Figura 5.10	Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um conoide parabólico não abatido com as condições de contorno do Caso C. ($a/b = 4/3$, $f_1/b = 0,25$, $f_2/b = 0,5$, $ab/h^2 = 10000$, $\nu = 0,3$)	166
Figura 5.11	Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um conoide parabólico não abatido com as condições de contorno do Caso D. ($a/b = 4/3$, $f_1/b = 0,25$, $f_2/b = 0,5$, $ab/h^2 = 10000$, $\nu = 0,3$)	166
Figura 5.12	Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um parabolóide elíptico não abatido com as condições de contorno do Caso C. ($a/b = 4/3$, $f_1/a = 0,5$, $f_2/b = 0,25$, $ab/h^2 = 10000$, $\nu = 0,3$)	168

Figura 5.13	Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um parabolóide elíptico não abatido com as condições de contorno do Caso D. ($a/b = 4/3$, $f_1/a = 0,5$, $f_2/b = 0,25$, $ab/h^2 = 10000$, $\nu = 0,3$)	168
Figura 5.14	Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um parabolóide hiperbólico não abatido com as condições de contorno do Caso C. ($a/b = 4/3$, $f_1/a = 0,5$, $f_2/b = 0,25$, $ab/h^2 = 10000$, $\nu = 0,3$)	169
Figura 5.15	Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um parabolóide hiperbólico não abatido com as condições de contorno do Caso D. ($a/b = 4/3$, $f_1/a = 0,5$, $f_2/b = 0,25$, $ab/h^2 = 10000$, $\nu = 0,3$)	169
Figura 6.1	Geometria da superfície média: (a) painel esférico e (b) conóide parabólico.	172
Figura 6.2	Painel esférico abatido com a carga concentrada atuando no centro da casca. Em (a), com eixos com mesma escala, e em (b), com x^3 ampliado.	173
Figura 6.3	Coordenadas generalizadas de um painel esférico abatido submetido a um carregamento pontual no centro da casca determinadas por Amabili (2005) (preto) e obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz usando uma expansão em série de Fourier com 22 gdl (verde), 27 gdl (azul) e 48 gdl (vermelho). Em (a) a coordenada generalizada u_{311} ; (b) a coordenada generalizada u_{321} ; e (c) a coordenada generalizada u_{322}	175
Figura 6.4	Comparação entre das respostas não lineares do deslocamento vertical no centro da casca.	176
Figura 6.5	Painel esférico não abatido submetido a carga distribuída.	177
Figura 6.6	Comparação entre os caminhos não lineares de um painel esférico não abatido submetido a um carregamento distribuído. Em (a), utilizando a aproximação (2.62) para cascas abatidas; Em (b), utilizando a aproximação (2.61) para cascas não abatidas; e, em (c), a comparação entre as duas aproximações.	179
Figura 6.7	MOP e respectivos VOP do campo de deslocamento u_1 obtidos aplicando o método de Karhunen-Loève a partir dos resultados do MEF.	180

Figura 6.8	MOP e respectivos VOP do campo de deslocamento u_2 obtidos aplicando o método de Karhunen-Loève a partir dos resultados do MEF.	180
Figura 6.9	MOP e respectivos VOP do campo de deslocamento u_3 obtidos aplicando o método de Karhunen-Loève a partir dos resultados do MEF.	180
Figura 6.10	Comparação do deslocamento no centro do painel esférico na direção M^3 entre os resultados determinados no presente trabalho utilizando a decomposição de Karhunen-Loève e o Abaqus.	181
Figura 6.11	Conoide parabólico não abatido submetido a uma carga concentrada. . . .	182
Figura 6.12	MOP e respectivos VOP do campo de deslocamento u_1 obtidos aplicando o método de Karhunen-Loève a partir dos resultados do MEF.	183
Figura 6.13	MOP e respectivos VOP do campo de deslocamento u_2 obtidos aplicando o método de Karhunen-Loève a partir dos resultados do MEF.	183
Figura 6.14	MOP e respectivos VOP do campo de deslocamento u_3 obtidos aplicando o método de Karhunen-Loève a partir dos resultados do MEF.	184
Figura 6.15	Comparação do deslocamento do conoide parabólico submetido a uma carga concentrada no centro na direção e_3 entre os resultados obtidos pelo presente trabalho utilizando as decomposições por série de Fourier e Karhunen-Loève e os resultados obtidos pelo Abaqus. O deslocamento u_z representa o deslocamento vertical na direção e_3	184
Figura 7.1	Geometrias da superfície média: (a) painel esférico; (b) conoide parabólico e (c) parabolóide hiperbólico.	187
Figura 7.2	Amplitude máxima da vibração da coordenada generalizada $u_{311}(t)$ em relação à frequência normalizada ω/ω_1 da curva de comportamento do modo fundamental para um painel esférico abatido – em (a) para o modelo com 9 gdl; e em (b) para o modelo com 22 gdl; —, órbita periódica estável; ---, solução instável; NS, bifurcações de Neimark-Sacker; SN, bifurcações de ponto de sela; PD, bifurcações de Duplicação de Período. . .	189

Figura 7.3	Energia total versus frequência normalizada ω/ω_1 da relação frequência-amplitude do modo fundamental de um painel esférico abatido; —, órbita periódica estável do modelo com 9 gdl; —, órbita periódica estável do modelo com 22 gdl; - - -, solução instável do modelo com 22 gdl; —, órbita periódica estável do modelo com 27 gdl; - - -, solução instável do modelo com 27 gdl; ●—●, <i>backbone</i> obtida via Abaqus; NS, bifurcações de Neimark-Sacker; SN, bifurcações de ponto de sela; PD, bifurcações de Duplicação de Período.	190
Figura 7.4	Respostas no tempo em coordenadas modais para as orbitas periódicas dos pontos a-d da relação frequência-energia do painel esférico abatido. — modo 1; — modo 2; — modo 3; — modo 4.	191
Figura 7.5	Modos de vibração do painel esférico abatido.	192
Figura 7.6	<i>Backbones</i> para o painel esférico não abatido para os modelos com 48 gdl (—), 75 gdl (—), 108 gdl (—) e 147 gdl (—). ●—●, <i>backbone</i> obtida via Abaqus. Em (a), é apresentada a energia total em função da frequência normalizada, e em (b), a amplitude máxima da coordenada generalizada u_{311} em função da frequência normalizada. As curvas tracejadas representam soluções instáveis, enquanto as curvas contínuas representam soluções estáveis. NS, bifurcação de Neimark-Sacker.	194
Figura 7.7	Respostas no tempo em coordenadas modais para as orbitas periódicas dos pontos a-d da relação frequência-energia do painel esférico não abatido para o modelo com 108 gdl. — modo 1; — modo 3; — modo 40; — modo 44.	194
Figura 7.8	Modos de vibração do painel esférico não abatido.	195
Figura 7.9	<i>Backbones</i> do paraboloide hiperbólico para os modelos com 48 gdl (—), 75 gdl (—) e 108 gdl (—). ●—●, <i>backbone</i> obtida via Abaqus. Em (a), energia total versus frequência normalizada e, em (b), amplitude máxima da coordenada generalizada u_{322} versus frequência normalizada. As curvas tracejadas representam soluções instáveis, enquanto as curvas contínuas representam soluções estáveis. NS, bifurcação de Neimark-Sacker; SN, bifurcação de ponto de sela	197

Figura 7.10	Respostas no tempo em coordenadas modais para as órbitas periódicas dos pontos a-d para o parabolóide hiperbólico. — modo 1; — modo 12; — modo 26.	197
Figura 7.11	Modos de vibração do parabolóide hiperbólico.	198
Figura 7.12	<i>Backbones</i> do conóide parabólico para os modelos com 48 gdl (—), 75 gdl (—), 108 gdl (—) e 147 gdl (—). ●—●, <i>backbone</i> obtida via Abaqus. Em (a), energia total versus frequência normalizada, e, em (b), amplitude máxima da coordenada generalizada u_{312} versus frequência normalizada são apresentadas. As curvas tracejadas representam soluções instáveis, enquanto as curvas contínuas representam soluções estáveis. NS, bifurcação de Neimark-Sacker.	200
Figura 7.13	Respostas no tempo em coordenadas modais das órbitas periódicas dos pontos a-c da <i>backbone</i> do conóide parabólico. — modo 1; — modo 2; — modo 4.	200
Figura 7.14	Modos de vibração do conóide parabólico.	201
Figura 8.1	Painel cilíndrico abatido	206
Figura 8.2	Modos de vibração do painel esférico abatido.	207
Figura 8.3	Amplitude do deslocamento $u_3(a/4, b/2, t)$ do painel cilíndrico abatido em função da frequência de excitação, considerando uma carga de $\epsilon f = 10$ N. SN, bifurcações Ponto de sela; NS, bifurcação Neimark-Sacker. . .	208
Figura 8.4	Resultados da curva de ressonância do painel cilíndrico abatido obtidas pelo modelo completo com 147 gdl e pelos modelos de ordem reduzida via SVE.	209
Figura 8.5	Respostas no tempo em coordenadas modais para as orbitas periódicas dos pontos a-d da curva de ressonância do painel cilíndrico abatido. — modo 1; — modo 2. As linhas contínuas representam as respostas do modelo reduzido considerando uma SVE com $E = E_1 \oplus E_2$ e $O(5)$. As linhas tracejadas representam a resposta do modelo completo com 147 gdl. . . .	209
Figura 8.6	Geometria das cascas: (a) painel esférico abatido; (b) painel esférico não abatido; (c) parabolóide hiperbólico e (d) conóide parabólico. $Z(\xi^1, \xi^2)$ representa a elevação da superfície média. Os eixos dos gráficos estão na mesma escala e medidos em metros.	210

Figura 8.7	Amplitude máxima da resposta para a coordenada generalizada u_{311} em função da frequência de excitação para um painel esférico abatido sob uma carga de $\epsilon f = 31,2$ N. Em (a), para o modelo com 9 graus de liberdade, e em (b), para o modelo com 22 graus de liberdade. NS, bifurcações de Neimark-Sacker; SN, bifurcações de Sela-Nó; PD, bifurcações de Duplicação de Período.	213
Figura 8.8	Resultados das curvas de ressonância do painel esférico abatido obtidas pelo modelo completo com 22 gdl e pelos modelos de ordem reduzida via SVE.	214
Figura 8.9	Respostas no tempo em coordenadas modais para as orbitas periódicas dos pontos a-d da curva de ressonância do painel esférico abatido para $\epsilon f = 31,2$ N. — modo 1; — modo 2; — modo 4. As linhas contínuas representam as respostas do modelo reduzido considerando uma SVE com $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \oplus E_4$ e $O(11)$. As linhas tracejadas representam a resposta do modelo completo com 22 gdl.	214
Figura 8.10	Amplitude máxima do campo de deslocamento u_3 no centro do painel esférico não abatido em função da frequência de excitação considerando uma carga de $\epsilon f = 200$ N. Em (a), os resultados para modelos com 48, 75 e 108 graus de liberdade. Em (b), uma comparação entre os resultados obtidos usando o método do balanço harmônico e o método de força bruta para o modelo com 108 graus de liberdade. NS, bifurcações de Neimark-Sacker; SN, bifurcações de Sela-Nó.	216
Figura 8.11	Resultados das curvas de ressonância do painel esférico não abatido obtidas pelo modelo completo com 108 gdl e pelos modelos de ordem reduzida via SVE para $\epsilon f = 200$ N. Em (a), amplitude máxima da coordenada generalizada u_{311} em função da frequência de excitação, e, em (b), amplitude máxima do campo de deslocamento u_3 no centro da casca em função da frequência de excitação.	218

- Figura 8.12 Respostas no tempo em coordenadas modais para as orbitas periódicas dos pontos a-c da curva de ressonância do painel esférico não abatido. — modo 1; — modo 3; — modo 13. As linhas contínuas representam as respostas do modelo reduzido considerando uma SVE com $E = E_1 \oplus E_3 \oplus E_{13}$ e $O(9)$. As linhas tracejadas representam a resposta do modelo completo com 108 gdl. 219
- Figura 8.13 Máximo valor do deslocamento u_3 no centro do paraboloide hiperbólico não abatido para uma carga de $\epsilon f = 200$ N. (a) Resultados para modelos com 48, 75 e 108 graus de liberdade. (b) Comparação entre os métodos do balanço harmônico e força bruta para o modelo com 75 graus de liberdade. SN: Bifurcações Sela-Nó. 219
- Figura 8.14 Resultados das curvas de ressonância do paraboloide hiperbólico obtidas pelo modelo completo com 75 gdl e pelos modelos de ordem reduzida via SVE para $\epsilon f = 200$ N. Em (a), amplitude máxima da coordenada generalizada $u_{3_{22}}$ em função da frequência de excitação; Em (b), amplitude máxima do campo de deslocamento u_3 no centro da casca em função da frequência de excitação. 220
- Figura 8.15 Respostas no tempo em coordenadas modais para as orbitas periódicas dos pontos a-c da curva de ressonância do paraboloide hiperbólico. — modo 1; — modo 4; — modo 10; — modo 12. As linhas contínuas representam as respostas do modelo reduzido considerando uma SVE com $E = E_1$ e $O(9)$. As linhas tracejadas representam a resposta do modelo completo com 75 gdl. 221
- Figura 8.16 Amplitude máxima do campo de deslocamento u_3 no centro do conoide parabólico em função da frequência de excitação, considerando uma carga de $\epsilon f = 200$ N. Em (a), os resultados para modelos com 48, 75 e 108 graus de liberdade. Em (b), uma comparação entre os resultados obtidos usando o método do equilíbrio harmônico e o método de força bruta para o modelo com 108 graus de liberdade. NS, Neimark-Sacker; SN, Ponto de Sela; PD, duplicação de período. 223
- Figura 8.17 Atratores aperiódicos do conoide parabólico do modelo com 108 graus de liberdade para os valores de frequência de (a) $\omega/\omega_1 = 0,964$, (b) $\omega/\omega_1 = 0,980$ e (c) $\omega/\omega_1 = 0,985$. Em (d), o espectro de Lyapunov dos atratores mostrados em (a-c). 224

- Figura 8.18 Resultados das curvas de ressonância do conoide parabólico obtidas pelo modelo completo com 108 gdl e pelos modelos de ordem reduzida via SVE para $\epsilon f = 200$ N. Em (a), amplitude máxima da coordenada generalizada $u_{3_{12}}$ em função da frequência de excitação, e, em (b), amplitude máxima do campo de deslocamento u_3 no centro da casca em função da frequência de excitação. 225
- Figura 8.19 Respostas no tempo em coordenadas modais para as orbitas periódicas dos pontos a-c da curva de ressonância do conoide parabólico. — modo 1; — modo 2; — modo 4. As linhas contínuas representam as respostas do modelo reduzido considerando uma SVE com $E = E_1 \oplus E_2$ e $O(5)$. As linhas tracejadas representam a resposta do modelo completo com 108 gdl. 226

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1	Condições de contorno consideradas no presente trabalho.	156
Tabela 5.2	Frequência natural normalizada ($\bar{\omega} = \omega ab/h\sqrt{\rho/E}$) do conoide parabólico. A superfície média é definida pelos parâmetros adimensionais $a/b = 1$, $f_1/b = 0,2$, $f_2/b = 0$. A espessura da casca é determinada pela razão $ab/h^2 = 10000$ e o coeficiente de Poisson é $\nu = 0,15$	160
Tabela 5.3	Frequências naturais normalizadas ($\bar{\omega} = \omega ab/h\sqrt{\rho/E}$) para um parabolóide elíptico. A geometria da superfície média é definida pelo parâmetros adimensionais $a/b = 1$, $f_1/b = 0,1$, $f_2/b = 0,1$. A espessura da casca é determinada da razão $ab/h^2 = 10000$ e o coeficiente de Poisson é $\nu = 0,15$	164
Tabela 5.4	Frequências naturais normalizadas ($\bar{\omega} = \omega ab/h\sqrt{\rho/E}$) para o parabolóide hiperbólico. A superfície média é definida pelos parâmetros adimensionais $a/b = 1$, $f_1/b = 0,1$, $f_2/b = 0,1$. A espessura da casca é definida pela razão $ab/h^2 = 10000$ e o coeficiente de Poisson é $\nu = 0,15$	164
Tabela 5.5	Frequências naturais normalizadas ($\bar{\omega} = \omega ab/h\sqrt{\rho/E}$) para uma conoide parabólico não abatido. A geometria da superfície média é definida pelos parâmetros adimensionais $a/b = 4/3$, $f_1/b = 0,5$, $f_2/b = 0,25$. A espessura da casca é definida pela razão $ab/h^2 = 10000$ e o coeficiente de Poisson é $\nu = 0,3$	165
Tabela 5.6	Frequências naturais normalizadas ($\bar{\omega} = \omega ab/h\sqrt{\rho/E}$) para um parabolóide elíptico não abatido. A superfície média é definida pelos parâmetros adimensionais $a/b = 4/3$, $f_1/a = 0,5$, $f_2/b = 0,25$. A espessura da casca é dada pela razão $ab/h^2 = 10000$ e o coeficiente de Poisson é $\nu = 0,30$	167
Tabela 5.7	Frequências naturais normalizadas ($\bar{\omega} = \omega ab/h\sqrt{\rho/E}$) para um parabolóide hiperbólico não abatido. A superfície média é definida pelos parâmetros adimensionais $a/b = 4/3$, $f_1/a = 0,5$, $f_2/b = 0,25$. A espessura da casca é dada pela razão $ab/h^2 = 10000$ e o coeficiente de Poisson é $\nu = 0,30$	170

Tabela 7.1	Influência modal percentual dos dois modos mais influentes determinada para as órbitas periódicas dos pontos a-d da <i>backbone</i> da casca esférica abatida para o modelo com 22 gdl da Figura 7.3.	192
Tabela 7.2	Influência modal percentual dos dois modos mais influentes determinada para as órbitas periódicas dos pontos a-d da <i>backbone</i> do painel esférico não abatido para o modelo com 108 gdl da Figura 7.6(a).	195
Tabela 7.3	Influência modal percentual dos dois modos mais influentes determinada para as órbitas periódicas dos pontos a-c da <i>backbone</i> do paraboloide hiperbólico para o modelo com 75 gdl da Figura 7.9(a).	197
Tabela 7.4	Influência modal percentual dos dois modos mais influentes determinada para as órbitas periódicas dos pontos a-c da <i>backbone</i> do conoide parabólico da Figura 7.12(a).	200
Tabela 8.1	Influência modal percentual dos dois modos mais influentes determinada para as órbitas periódicas dos pontos a-d da curva de ressonância do painel cilíndrico abatido para o modelo com 147 gdl da Figura 8.3.	208
Tabela 8.2	Influência modal percentual dos dois modos mais influentes determinada para as órbitas periódicas dos pontos a-d da curva de ressonância da casca esférica abatida para o modelo com 22 gdl da Figura 8.7(b).	215
Tabela 8.3	Influência modal percentual dos dois modos mais influentes determinada para as órbitas periódicas dos pontos a-c da curva de ressonância da casca esférica não abatida para o modelo com 108 gdl da Figura 8.11.	217
Tabela 8.4	Influência modal percentual dos dois modos mais influentes determinada para as órbitas periódicas dos pontos a-c da curva de ressonância do paraboloide hiperbólico para o modelo com 75 gdl da Figura 8.14.	221
Tabela 8.5	Influência modal percentual dos dois modos mais influentes determinada para as órbitas periódicas dos pontos a-c da curva de ressonância do conoide parabólico para o modelo com 108 gdl da Figura 8.18(a).	224

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AFT	Frequência-Tempo Alternado (do inglês <i>Alternating Frequency-Time</i>)
DOP	Decomposição Ortogonal Própria
EDO	Equação Diferencial Ordinária
FN	Forma Normal
gdl	graus de liberdade
MBHA	Método do Balanço Harmônico Adaptativo
MEF	Método dos Elementos Finitos
MOP	Modo Ortogonal Próprio
MNL	Modos Normais Lineares
MNNL	Modos Normais Não Lineares
NS	Neimark-Sacker
PD	Duplicação de Período (do inglês <i>Period-Doubling</i>)
PPG-GECON	Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil
SN	Ponto de Sela (do inglês <i>Saddle-Node</i>)
SVE	Subvariedade Espectral
VOP	Valor Ortogonal Próprio
VSL	Variedade do Subcentro de Lyapunov

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos romanos:

a	Dimensão da projeção horizontal da cascas na direção de x_1
$\mathbf{a}$	Vetor aceleração da superfície média
$\mathbf{A}$	Matriz dos coeficientes lineares do vetor $\mathbf{z}$ do sistema dinâmico de primeira ordem
b	Dimensão da projeção horizontal da cascas na direção de x_2
$\mathbf{B}$	Matriz dos coeficientes lineares do vetor $\dot{\mathbf{z}}$ do sistema dinâmico de primeira ordem
c	Constante de amortecimento viscoso
$\mathcal{C}$	Contorno da superfície média $\mathcal{S}$
c_1, c_2	Coefficientes introduzidos na formulação para obter uma expressão genérica do tensor de flexão
$\mathbf{C}$	Matriz de amortecimento
$\mathbf{C}_i$	Matriz auxiliar para a determinação da equação de invariância
$C^{\alpha\beta\lambda\theta}$	Componentes contravariantes do tensor de constitutivo
$d\bar{A}$	Elemento infinitesimal de área da seção transversal da casca
$d\mathbf{f}$	Força resultante da seção transversal
$d\bar{\mathbf{f}}$	Força resultante em um elemento infinitesimal da seção transversal
$d\boldsymbol{\eta}$	Momento resultante da seção transversal
$\mathbf{D}_i$	Matriz auxiliar para a determinação da equação de invariância
$\mathbf{e}_i$	Vetores da base ortonormal na direção dos eixos cartesianos
E	Módulo de elasticidade (Capítulo 2)
	Subespaço espectral mestre (Seção 4.2)
$\mathbf{E}$	Tensor de deformação de Green-Lagrange
E_j	Subespaço gerado a partir do autovetor $\mathbf{v}_j$
E_j^*	Subespaço adjunto

$\mathbf{E}_{N_t H}, \mathbf{E}_{H N_t}^*$	Matrizes para transformadas direta e inversa de Fourier
f	Dimensão do vetor de frequências de excitação
$\mathbf{f}$	Função vetorial do sistema dinâmico de primeira ordem
f_1, f_2	Elevação das bordas da casca
$\mathbf{f}_e$	Vetor de forças externas
$\hat{\mathbf{f}}_e$	Vetor de forças externas no domínio da frequência
$\mathbf{f}_{nl}$	Vetor de forças internas não lineares
$\hat{\mathbf{f}}_{nl}$	Vetor de forças internas não lineares no domínio da frequência
$\tilde{\mathbf{f}}_{nl}$	Vetor de forças internas não lineares para diferentes instantes de tempo
F	Função de dissipação
$\mathbf{F}$	Gradiente de deformação (Capítulo 2)
	Forças internas não lineares do sistema de primeira ordem (Seção 4.2)
$\mathbf{F}_e$	Forças externas do sistema de primeira ordem
$\mathbf{F}_0$	Vetor de amplitude das forças externas para o caso de carga harmônica simples
$\mathbf{F}_{0,\kappa}$	Vetor de amplitude das forças externas para o caso geral de carga harmônica
$\mathcal{F}_{\hat{\mathbf{v}}}$	Filtro para seleção de harmônicos
g	Determinante do tensor métrico da superfície média na configuração atual
$\mathbf{g}$	Tensor métrico da superfície média na configuração atual
$\bar{\mathbf{g}}$	Tensor métrico da superfície paralela à superfície média na configuração atual
g_{ij}, g_j^i, g^{ij}	Componentes covariante, mista e contravariante do tensor $\mathbf{g}$
G	Determinante do tensor métrico da superfície média na configuração de referência
$\mathbf{G}$	Tensor métrico da superfície média na configuração de referência
$\bar{\mathbf{G}}$	Tensor métrico da superfície paralela à superfície média na configuração de referência
G_{ij}, G_j^i, G^{ij}	Componentes covariante, mista e contravariante do tensor $\mathbf{G}$
$\mathcal{G}_i$	Subespaço do estilo de parametrização gráfico
h	Espessura da casca
$\mathbf{h}_i$	Vetor auxiliar para a determinação da equação de invariância

$\mathbf{h}_{0,\kappa}$	Vetor auxiliar para determinação da parcela do carregamento do modelo reduzido
$\mathbf{h}_H$	Vetor de termos trigonométricos
H	Ordem de aproximação da expansão em série de Fourier
i	Unidade imaginária
$\mathbf{I}$	Tensor identidade
$\mathbf{I}_M$	Matriz identidade de dimensão $M \times M$
J	Determinante do gradiente de deformação
$\mathbf{J}_E$	Decomposição de Jordan da matriz Λ_E
$\tilde{\mathbf{J}}_{nl}$	Matriz jacobiana bloco diagonal das forças internas não lineares para diferentes instantes de tempo
k	Rigidez linear da mola do sistema massa-mola
$\mathcal{C}$	Subconjunto de $\Delta_{i,M}$
L	Função lagrangiana
$\mathbf{L}$	Tensor gradiente de velocidade
$\mathcal{L}_i$	Polinômio de Legendre de ordem i
$\mathcal{L}_i$	Operador coomológico de ordem i
$\mathcal{L}_{0,\kappa}$	Matriz auxiliar para determinação da parcela do carregamento do modelo reduzido
m	Massa do bloco do sistema massa-mola
m_k	Número de funções de forma na direção ξ^1 da expansão do campo de deslocamentos
$\mathbf{m}_i$	Vetores da base natural da superfície média na configuração atual (Capítulo 2)
	Autovetores à direita da matriz $\mathcal{L}_i$ (Seção 4.2)
$\mathbf{m}^i$	Vetores da base recíproca da superfície média na configuração atual
$\bar{\mathbf{m}}_i$	Vetores da base natural da superfície paralela à superfície média na configuração atual
$\bar{\mathbf{m}}^i$	Vetores da base recíproca da superfície paralela à superfície da superfície média na configuração atual
M	Dimensão do sistema dinâmico reduzido
$\mathbf{M}$	Tensor que mede os momentos internos da casca (Seção 2.4)

	Matriz de massa. (Seção 3.1)
$\mathbf{M}_i$	Vetores da base natural da superfície média na configuração de referência
$\mathbf{M}^i$	Vetores da base recíproca da superfície média na configuração de referência
$\bar{\mathbf{M}}_i$	Vetores da base natural da superfície paralela à superfície média na configuração de referência
$\bar{\mathbf{M}}^i$	Vetores da base recíproca da superfície paralela à superfície da superfície média na configuração de referência
$M^{\alpha\beta}$	Componentes contravariantes do tensor $\mathbf{M}$
n	Número de graus de liberdade
$\mathbf{n}$	Vetor unitário normal à seção transversal da casca (Seção 2.4) Vetor normal à curva c (Seção 2.6)
$\bar{\mathbf{n}}$	Vetor unitário normal a um elemento infinitesimal da seção transversal da casca.
n_k	Número de funções de forma na direção ξ^2 da expansão do campo de deslocamentos
$\mathbf{n}_i$	Autovetores à esquerda da matriz $\mathcal{L}_i$
N	Dimensão do sistema dinâmico de primeira ordem
N_t	Número de divisões da variável do tempo
$\mathbf{N}$	Matriz dimensão $n \times n$ não singular
$\mathbf{N}_i$	Matriz formadas pelos autovetores $\mathbf{n}_i$ linearmente independentes cujos autovalores correspondente são nulos
$\mathcal{N}_i$	Espaço nulo da matriz $\mathcal{L}_i$
O	Ordem de aproximação
$\mathbf{p}$	Vetor de coordenadas de parametrização (Seção 4.2.2)
$\mathbf{p}$	Vetor de parâmetros do método da continuação (Seção 3.2)
$\mathbf{p}_j$	Autovetores à direita da matriz $\mathbf{R}_1^T$
$\mathbf{p}_e$	Autovetores à direita da matriz $\mathbf{R}_{i,i}^T$
$\mathbf{P}_E$	Decomposição de Jordan da matriz $\mathbf{V}_E$
$\mathbf{q}$	Carregamento distribuído na superfície média da casca
$\hat{\mathbf{q}}$	Vetor que contém todos os coeficientes da expansão de Fourier
$\mathbf{q}_j$	Autovetores à esquerda da matriz $\mathbf{R}_1^T$

$\mathbf{q}_e$	Autovetores à esquerda da matriz $\mathbf{R}_{i,i}^T$
$\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_i^s, \mathbf{q}_i^c$	Coeficientes de Fourier
Q_{kij}	Forças generalizadas
$\mathbf{r}$	Vetor de parametrização da superfície média na configuração atual
$\mathbf{r}_i$	Resíduo do método do tiro
$\bar{\mathbf{r}}_i$	Resíduo do sistema expandido
$\mathbf{R}$	Vetor de parametrização da superfície média na configuração de referência (Capítulo 2)
	Resíduo do método da continuação (Seção 3.2)
	Função de parametrização do modelo dinâmico reduzido (Seção 4.2)
$\mathbf{R}_i$	Matriz dos coeficientes de ordem i da função $\mathbf{R}$
$\mathbf{R}_{i,i}$	Matriz auxiliar para a determinação da equação de invariância
$\mathbf{R}_k^*$	Matriz de correlação espacial
R_{rf}	Resíduo da restrição de fase
$\mathbf{R}_e$	Função de parametrização do modelo dinâmico reduzido para o caso não autônomo
$\mathfrak{s}$	Superfície média na configuração atual
$\bar{\mathfrak{s}}$	Superfície paralela à superfície média na configuração atual
$\mathbf{S}_{0,\kappa}$	Matriz dos coeficientes das expansão em série de Fourier de $\mathbf{S}_0$
$\mathbf{S}$	Função que representa a parcela do carregamento externo do modelo reduzido
$\mathcal{S}$	Superfície média na configuração de referência
$\hat{\mathbf{S}}$	Matriz de rigidez dinâmica
$\bar{\mathcal{S}}$	Superfície paralela à superfície média na configuração de referência
$\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_j$	Matrizes que surgem da expansão em série de Taylor de $\mathbf{S}$
t	Variável temporal
T	Energia cinética (Capítulo 2)
	Período da órbita periódica (Seção 4.2.2.4)
$\mathbf{T}$	Tensor que mede as forças internas da casca no plano da superfície média
$\mathbf{t}$	Vetor tangente do método da continuação
$T^{\alpha\beta}$	Componentes contravariantes do tensor $\mathbf{T}$
$\mathbf{u}$	Campo de deslocamentos da superfície média

u_i	Componentes do campo de deslocamentos da superfície média
$\mathbf{u}_j$	Autovetor à esquerda correspondente ao autovalor λ_j
$u_{k_{ij}}$	Coordenadas generalizadas
U	Energia de deformação
$\tilde{\mathbf{U}}$	Vetor que contém todas as coordenadas generalizadas
$\mathbf{U}$	Vetor que contém todas as coordenadas generalizadas em vários instantes de tempo
$\mathbf{U}_E$	Matriz contendo os autovetores à esquerda que compõem o subespaço E
$\mathbf{v}$	Vetor de velocidade
v	Volume da casca na configuração atual
v_i	Componentes do vetor de velocidade em relação à base $\mathbf{m}^i$
$\mathbf{v}_j$	Autovetor à direita correspondente ao autovalor λ_j
$\mathbf{V}$	Tensor que mede as forças internas da casca perpendiculares à superfície média
$\mathcal{V}$	Volume da casca na configuração de referência
V^β	Componentes do vetor $\mathbf{V}$
$\mathbf{V}_E$	Matriz contendo os autovetores à direita que compõem o subespaço E
$\mathbf{V}_k^*$	Varição da matriz de amostragem em relação ao seu valor médio
$\mathbf{w}_i$	Vetor resultante da vetorização da matriz $\mathbf{W}_i$
W	Energia potencial das cargas externas
$\mathbf{W}$	Função de parametrização da variedade $\mathcal{W}$
$\mathcal{W}$	Variedade invariante do sistema dinâmico
$\mathbf{W}_i$	Matriz dos coeficientes de ordem i da função $\mathbf{W}$
$\mathbf{W}_k^*$	Matriz de amostragem
$\mathbf{W}_\epsilon$	Função de parametrização da variedade $\mathcal{W}$ para o caso não autônomo
$\mathbf{x}$	Vetor posição de um ponto da casca na configuração atual (Capítulo 2) Vetor de variáveis do método da continuação (Seção 3.2)
$\mathbf{x}_{0,\kappa}$	Matriz dos coeficientes das expansões em série de Fourier de $\mathbf{X}_0$
x_i	Eixos cartesianos
$\mathbf{X}$	Vetor posição de um ponto da casca na configuração de referência Função que representa a parcela do carregamento externo da parametrização da variedade $\mathcal{W}$ (Seção 4.2.3)

$\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_j$	Matrizes que surgem da expansão de em série de Taylor $\mathbf{X}$ (Seção 4.2.3)
X, Y, Z	Funções que definem algebricamente a superfície média na configuração de referência
$\mathbf{z}$	Vetor de variáveis do sistema dinâmico de primeira ordem
$\mathbf{z}^m$	Autovetores
z_{kij}^m	Elementos do vetor $\mathbf{z}^m$
$\mathbf{Z}$	Matriz que contém todos os autovetores

Símbolos gregos:

α, β	Coeficientes de amortecimento de Rayleigh
α	Aceleração angular do vetor $\mathbf{m}_3$ (Seção 2.2.4)
	Matriz esparsa que contem os expoentes naturais α_{ij} dos monômios dos termos não lineares (Seção 3.1)
$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$	Símbolos de Christoffel da superfície média na configuração de referência
$\gamma_{\beta\gamma}^\alpha$	Símbolos de Christoffel da superfície média na configuração atual
$\gamma_{\alpha\beta}$	Componentes do tensor de alongamento
γ	Determinante das componentes do tensor de alongamento
γ_k	Autovalores da matriz $\mathcal{L}_i$
γ_ϵ	Torus invariante de pequena amplitude no espaço fase
δ	Operador variacional (Capítulo 2)
	Comprimento de passo do método da continuação (Seção 3.2)
δ_i^j	Delta de Kronecker
$\Delta_{i,M}$	conjunto formado pelos subconjuntos de tamanho i , classificados em ordem lexicográfica, e que contém valores no intervalo $1 \dots M$
ϵ	Parâmetro de magnitude das cargas externas
$\bar{\epsilon}$	Limiar para seleção de harmônicos
ϵ_{ijk}	Símbolo de Levi-Civita
$\hat{\epsilon}_{i,j}, \bar{\hat{\epsilon}}_{i,j}$	Funções utilizadas para seleção de harmônicos
ϵ_{ri}	número adimensional adotado suficientemente grande para considerar todas as possíveis ressonâncias internas do método das Subvariedades Espectrais

ζ	Variável adimensional que representa a magnitude das forças de amortecimento
η_k	Número de funções da expansão utilizada na Decomposição Ortogonal Própria
$\dot{\theta}$	velocidade angular ao longo da curva c na direção de $\mathbf{n}$
κ	Curvatura gaussiana da superfície média na configuração atual (Capítulo 2) Rigidez não linear da mola do sistema massa-mola (Seção 4.2.2.4)
$\boldsymbol{\kappa}$	Tensor de curvatura da superfície média na configuração atual (Capítulo 2) Vetores de números inteiros que representam os múltiplos harmônicos das variáveis angulares (Seção 4.2.3)
$\kappa_{\alpha\beta}, \kappa_{\cdot\beta}^{\alpha}, \kappa_{\alpha}^{\cdot\beta}, \kappa^{\alpha\beta}$	Componentes covariante, mistas e contravariantes do tensor $\boldsymbol{\kappa}$
$\mathring{\boldsymbol{\kappa}}$	Tensor que relaciona a variação da velocidade angular com a variação do vetor posição na configuração atual
$\mathring{\kappa}_{\alpha\beta}, \mathring{\kappa}_{\cdot\beta}^{\alpha}$	Componentes covariante e mista do tensor $\mathring{\boldsymbol{\kappa}}$
K	Curvatura gaussiana da superfície média na configuração de referência
$\mathbf{K}$	Tensor de curvatura da superfície média na configuração de referência
$K_{\alpha\beta}, K_{\cdot\beta}^{\alpha}, K_{\alpha}^{\cdot\beta}, K^{\alpha\beta}$	Componentes covariante, mistas e contravariantes do tensor $\mathbf{K}$
$\boldsymbol{\lambda}$	Tensor que relaciona as bases recíprocas da superfície paralela e da superfície média na configuração atual
$\boldsymbol{\lambda}_E$	Vetor que contém os elementos da diagonal de $\boldsymbol{\Lambda}_E$
λ_j	Autovalor do par de matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$
λ_{β}^{α}	Componentes mistas do tensor $\boldsymbol{\lambda}$
$\boldsymbol{\Lambda}$	Tensor que relaciona as bases recíprocas da superfície paralela e da superfície média na configuração de referência
Λ_{β}^{α}	Componentes mistas do tensor $\boldsymbol{\Lambda}$
$\boldsymbol{\Lambda}_E$	Matriz diagonal que contém os autovalores correspondentes ao subespaço mestre E
μ_j	Autovalores da matriz $\mathbf{R}_1^{\top}$ (Seção 4.2.2.2) Elementos do vetor $\boldsymbol{\mu}$ (Seção 7.1)
μ_k, μ^k	Componentes do vetor $\mathbf{m}_3$ nas bases $\mathbf{M}^k$ e $\mathbf{M}_k$ (Capítulo 2)

μ_e	Autovalores da matriz $\mathbf{R}_{i,i}^T$
μ_{k_j}	Coordenadas generalizadas da Decomposição Ortogonal Própria
$\dot{\mu}_\alpha, \dot{\mu}^\alpha$	Componentes covariante e contravariante do vetor velocidade angular nas bases $\mathbf{m}^\alpha, \mathbf{m}_\alpha$
$\ddot{\mu}_\alpha, \ddot{\mu}^\alpha$	Componentes covariante e contravariante do vetor aceleração angular
$\boldsymbol{\mu}$	Vetor da resposta no tempo das coordenadas modais
ν	Coefficiente de Poisson
ξ^1 e ξ^2	Coordenadas curvilíneas
ξ^3	Distância entre a superfície média e a superfície paralela
Π	Energia potencial total
ρ	Densidade da casca
$\rho_{\alpha\beta}$	Componentes do tensor de flexão
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensões de Cauchy
σ^{ij}	Componentes contravariantes do tensor de Cauchy
$\boldsymbol{\Sigma}$	Segundo tensor de Piola-Kirchhoff
$\Sigma^{\lambda\mu}$	Componentes contravariantes do tensor $\boldsymbol{\Sigma}$ na base $\mathbf{M}_\alpha$
$\bar{\Sigma}^{\lambda\mu}$	Componentes contravariantes do tensor $\boldsymbol{\Sigma}$ na base $\bar{\mathbf{M}}_\alpha$
τ	Variável temporal adimensional
$\boldsymbol{\tau}$	Vetor tangente à curva c
$\boldsymbol{\nu}$	Tensor que relaciona as bases naturais da superfície paralela e da superfície média na configuração atual
$\nu_{\cdot\alpha}^\beta$	Componentes mistas do tensor $\boldsymbol{\nu}$
Υ	Tensor que relaciona as bases naturais da superfície paralela e da superfície média na configuração de referência
$\Upsilon_{\cdot\alpha}^\beta$	Componentes mistas do tensor Υ
$\phi_{k_{ij}}$	Funções de forma
φ_{k_i}	Funções de forma da Decomposição Ortogonal Própria
$\boldsymbol{\phi}$	Vetor que representa a multiplicação entre $\boldsymbol{\Omega}$ e o tempo
Φ	Matriz de monodromia
ψ_k^m	Autofunção
ω	Frequência
ω_f	Frequência de excitação

ω_i	i -ésima frequência natural
ω	Vetor velocidade angular
Ω	Domínio das coordenadas curvilíneas
Ω	Vetor que contém as frequências de excitação das cargas dinâmicas

Outros símbolos:

∇, ∇_k e $\check{\nabla}$	Matrizes auxiliares para o cálculo das derivadas no tempo no método do balanço harmônico
---------------------------------------	--

SUMÁRIO

1	Introdução	45
1.1	Considerações gerais e aplicações das cascas	45
1.2	Teorias e soluções para o problema de cascas finas	48
1.3	Técnicas de redução de ordem	57
1.4	Histórico de pesquisas do PPG-GECON	61
1.5	Objetivos	62
1.6	Organização do texto	63
2	Formulação tensorial aplicada às cascas finas	65
2.1	Geometria diferencial da superfície média	66
2.1.1	Bases natural e recíproca	67
2.1.2	Tensor métrico	68
2.1.3	Equações de Gauss e Weingarten	70
2.1.4	Superfície paralela	72
2.2	Cinemática e deformação da casca	74
2.2.1	Tensor de deformações de Green-Lagrange	75
2.2.2	Relações deformação-deslocamento	79
2.2.3	Aproximações consideradas	82
2.2.4	Velocidade e aceleração da casca	84
2.2.5	Gradiente de velocidade	86
2.3	Elemento infinitesimal da casca	87
2.4	Tensões e esforços internos	88
2.5	Energia de deformação e energia cinética	92
2.6	Equações de equilíbrio	93
2.6.1	Abordagem newtoniana	94
2.6.2	Princípio das potências virtuais	94

3	Métodos para solução das equações de equilíbrio dinâmico	99
3.1	Método de Rayleigh–Ritz	99
3.2	Determinação de órbitas periódicas	104
3.2.1	Método do tiro simples	108
3.2.2	Método do tiro múltiplo	111
3.2.3	Método do balanço harmônico	114
4	Métodos para obtenção de modelos de ordem reduzida	125
4.1	Método de Karhunen-Loève	126
4.2	Variedades invariantes e seu modelo de ordem reduzida	127
4.2.1	Modos Normais Não Lineares e Subvariedades Espectrais	128
4.2.2	Subvariedades Espectrais de pontos fixos em coordenadas físicas	133
4.2.3	Subvariedades espectrais e seu modelo de ordem reduzida para sistemas dinâmicos submetidos a carregamentos não autônomos	148
5	Vibrações livres lineares em cascas finas	153
5.1	Geometria e condições de contorno	154
5.2	Cascas abatidas	158
5.3	Cascas não abatidas	165
6	Análise não linear estática de cascas finas	171
6.1	Painel esférico abatido submetido a uma carga concentrada	173
6.2	Painel esférico não abatido submetido à carga distribuída	176
6.3	Conoide parabólico não abatido submetido a uma carga concentrada	181
7	Vibrações livres não lineares de cascas de dupla curvatura	185
7.1	Decomposição modal	185
7.2	Resultados numéricos	187
7.2.1	Painel esférico abatido	188
7.2.2	Painel esférico não abatido	193
7.2.3	Paraboloide hiperbólico	196
7.2.4	Conoide parabólico	198
8	Análise das vibrações forçadas em cascas de dupla curvatura via SVE	203
8.1	Validação	205

8.2	Casca de dupla curvatura	209
8.2.1	Painel esférico abatido	210
8.2.2	Painel esférico não abatido	214
8.2.3	Paraboloide hiperbólico	217
8.2.4	Conoide parabólico	222
9	Conclusões e sugestões para trabalhos futuros	227
	Referências	231
	Glossário	245
A	Códigos em Matlab	251
A.1	Determinação dos funcionais de energia	251
A.2	Determinação das equações de equilíbrio	267
A.3	Método de continuação	270
A.4	Determinação do resíduo e da jacobiana pelo método do tiro simples	271
A.5	Determinação do resíduo e da jacobiana pelo método do tiro múltiplo	272
A.6	Determinação do resíduo e da jacobiana pelo método do balanço harmônico	273
A.7	Geração do arquivo de entrada para o Abaqus	276

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Considerações gerais e aplicações das cascas

Cascas são elementos estruturais presentes em vários ramos da engenharia, como a civil, naval, mecânica e aeroespacial. Devido à combinação entre a eficiência estrutural e a forma arquitetônica, esse tipo de estrutura foi largamente utilizada no Brasil por engenheiros civis e arquitetos que projetaram obras notáveis, como, por exemplo, a Igreja da Pampulha (Figura 1.1(a)), o Congresso Nacional (Figura 1.1(b)) e o Museu Nacional Honestino Guimarães (Figura 1.1(c)). Sobre essa característica, Oscar Niemeyer, ícone da arquitetura moderna brasileira, disse:

E lá em Brasília, quando uma estrutura se concluía, a arquitetura já estava presente. Quer dizer, Arquitetura e Estrutura como coisas que nascem juntas, e juntas devem se enriquecer (Oscar Niemeyer – a vida é um sopro, 2007).

A utilização do concreto armado como material estrutural foi essencial para dar forma às curvas presentes nessas obras. Como as estruturas em concreto são relativamente mais pesadas que as de aço e madeira, para torná-las economicamente viáveis, é indispensável a utilização de técnicas de análise estrutural que representem com precisão o comportamento real da estrutura, possibilitando a redução do peso próprio sem comprometer a segurança.

A concepção de estruturas mais leves e esbeltas também está presente nas outras áreas da engenharia, como a mecânica, a naval, a aeronáutica e a espacial, seja por questões ambientais, econômicas, ou limitações impostas pelo próprio projeto. As cascas, em especial, possuem uma eficiência estrutural natural oriunda da combinação das rigidezes de membrana e flexão, típica de estruturas curvas, o que possibilita o seu dimensionamento com espessuras relativamente pequenas quando comparadas aos vãos entre os apoios. Muitas vezes, essa redução de

Figura 1.1 – Obras notáveis do Brasil que possuem estruturas de cascas

FONTE: Santuário São Francisco de Assis¹

(a) Igreja da Pampulha

FONTE: Câmara dos deputados²

(b) Congresso Nacional

FONTE: Secretaria da Cultura do Distrito Federal³

(c) Museu Nacional Honestino Guimarães

espessura e massa pode levar a um aumento indesejável dos deslocamentos e das vibrações. Em muitos casos, a consideração dos efeitos não lineares é imprescindível, já que as cascas também estão susceptíveis à perda de estabilidade quando submetidas a cargas estáticas e dinâmicas. As Figuras 1.2 apresentam a aplicações de cascas em diferentes ramos da engenharia: em (a), o submarino SR-40 Riachuelo, desenvolvido pela marinha brasileira, cujo casco deve ser capaz de resistir a altas pressões, possibilitando sua submersão a uma profundidade máxima de 300 m; em (b), as torres de resfriamento do parque de geração de energia nuclear Dukovany, na República Tcheca, que são estruturas projetadas para dissipar o calor excessivo gerado durante a operação da usina; e em (c), a Starship, uma espaçonave cuja fuselagem é feita de aço inoxidável projetada para suportar condições extremas de temperatura e pressão em viagens espaciais.

¹ Disponível em: <https://santuariosaofranciscodeassis.arquidiocesebh.org.br/arquitetura/> (Acessado em 16/02/2022)

² Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/a-camara/visiteacamara/palacio-do-congresso-nacional> (Acessado em 16/02/2022)

³ Disponível em: <https://www.cultura.df.gov.br/museu-nacional-republica/> (Acessado em 16/02/2022)

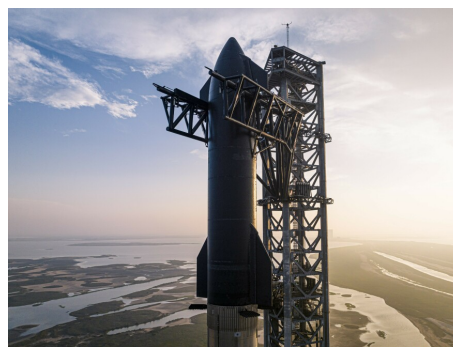
Figura 1.2 – Aplicações de cascas em diferentes ramos da engenharia



FONTE: Marinha do Brasil⁴
(a) Submarino SR-40 Riachuelo



FONTE: CEZ Group⁵
(b) Terres de resfriamento



FONTE: SpaceX⁶
(c) Espaçonave Starship

Em estruturas convencionais da engenharia civil, a perda de estabilidade, seja por fenômenos estáticos ou dinâmicos, geralmente resulta no colapso da estrutura. Materiais frágeis como o concreto normalmente não resistem às abruptas mudanças de deformação provocadas por essas instabilidades, levando a estrutura ao colapso. Em outros casos, vibrações excessivas podem não necessariamente levar à ruína da estrutura, mas tornam a sua utilização inviável em condições de serviço. Por outro lado, para desenvolver a próxima geração de estruturas de engenharia leves, pesquisadores e engenheiros estão buscando explorar, em vez de evitar, instabilidades elásticas. Tais projetos podem assumir a forma de estruturas otimizadas de cascas finas que operam com segurança no regime pós-flambagem e estruturas de morfologia que alternam entre diferentes configurações (*morphings*) (Groh; Avitabile; Pirrera, 2018). Em todo caso, prever com precisão o comportamento das cascas é fundamental para o dimensionamento adequado.

⁴ Disponível em: <https://www.marinha.mil.br/programas-estrategicos/prosub> (Acessado em 24/12/2023)

⁵ Disponível em: <https://www.cez.cz/en/energy-generation/nuclear-power-plants/dukovany> (Acessado em 24/12/2023)

⁶ Disponível em: <https://www.spacex.com/vehicles/starship/> (Acessado em 24/12/2023)

1.2 Teorias e soluções para o problema de cascas finas

As teorias de cascas finas são formulações matemáticas próprias para corpos bidimensionais não necessariamente planos – ou seja, corpos em que uma das dimensões é bem menor que as demais –, e são utilizadas para prever o comportamento de estruturas de superfície submetidas a ações externas. Tais corpos são representados geometricamente no espaço tridimensional a partir de uma *superfície média* equidistante às faces interna e externa da casca. Essas formulações matemáticas estabelecem uma relação aproximada entre os deslocamentos da superfície média e as deformações do corpo. Além disso, por meio da lei constitutiva do material e das relações cinemáticas, é possível calcular as tensões e os esforços internos da casca, que são as variáveis utilizadas na determinação do equilíbrio do corpo. De forma geral, pode-se dizer que as teorias de cascas são formulações matemáticas aproximadas da mecânica dos sólidos próprias para as estruturas bidimensionais.

Os trabalhos de [Leissa \(1973\)](#), [Ventsel e Krauthammer \(2001\)](#) e [Wempner e Talaslidis \(2002\)](#) trazem uma breve revisão da literatura sobre o desenvolvimento dessas teorias ressaltando os trabalhos históricos mais importantes. Nesses trabalhos, [Love \(1888\)](#) é apontado como o primeiro a desenvolver uma teoria consistente de cascas, baseada nos conceitos da elasticidade linear, adaptando com sucesso as hipóteses de Kirchhoff originalmente desenvolvidas para placas. Segundo as hipóteses de Kirchhoff: a) um segmento de reta perpendicular à superfície média da placa permanece reto e inextensível após a deformação; e b) a tensão normal transversal à superfície média é pequena se comparada às demais componentes de tensão e pode ser desprezada. Além dessas hipóteses, Love ainda considerou que: c) a espessura da casca é muito pequena se comparada com os raios de curvatura principal da superfície média; e d) as deformações e os deslocamentos da casca são muito pequenos, consequentemente os termos de ordem superior desses campos podem ser desprezados. Usualmente, ao referir-se às hipóteses de Kirchhoff-Love, aponta-se para as quatro hipóteses, a-d, anteriormente mencionadas.

Inicialmente, as teorias de cascas foram desenvolvidas para um sistema ortogonal de *coordenadas curvilíneas*. Isso significa que os vetores da base em qualquer ponto da superfície média da casca devem ser ortogonais entre si, ou, em outras palavras, que as coordenadas curvilíneas devem coincidir com as curvas das curvaturas principais da superfície média. Neste trabalho,

serão chamadas de *superfícies ortogonais* aquelas parametrizadas por um sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas; e as teorias baseadas nessa premissa serão chamadas de *teorias ortogonais*. Love (1888), Donnell (1933), Vlasov (1951) e Novozhilov (1953 *apud* Amabili, 2008) desenvolveram teorias ortogonais utilizando diferentes aproximações para descrever as relações cinemáticas da casca.

A premissa do sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas impõe uma restrição importante na forma como a superfície da casca é parametrizada. Embora a escolha desse sistema não seja única para cada superfície, em certos casos, a exigência de um sistema ortogonal pode tornar a análise algebricamente mais complexa. Por exemplo, a depender do sistema adotado, podem aparecer integrais com limites variáveis, o que dificulta a escolha de um conjunto de funções de forma na expansão do campo de deslocamentos e o cálculo das energias envolvidas no problema. Para algumas cascas, existem sistemas de coordenadas curvilíneas não ortogonais que surgem naturalmente e são, conseqüentemente, algebricamente mais simples.

Lur'e (1940 *apud* Axelrad, 1987) foi o primeiro autor a desenvolver uma teoria de cascas utilizando a notação tensorial e seu trabalho foi um marco no desenvolvimento da análise não linear para cascas. Niordson (1985) aponta a grande vantagem do uso da notação tensorial para a formulação de cascas. As equações tensoriais não se referem a nenhuma forma particular de sistemas de coordenadas, mas, na verdade, elas se referem a qualquer sistema. Desse importante fato para a teoria de cascas decorre que a imposição do uso de coordenadas curvilíneas ortogonais desaparece. Além de Lur'e, vários autores propuseram teorias de cascas baseadas na notação tensorial, como Gol'denveizer (1945 *apud* Gol'denveizer, 1961), Koiter (1960), Sanders (1959), Budiansky e Sanders (1962) e Flügge (1972). Neste trabalho, serão chamadas de *teorias tensoriais* aquelas que utilizam a notação tensorial na sua formulação, e as superfícies que não são parametrizadas por um sistema ortogonal serão chamadas de *superfícies não ortogonais*. Pode-se entender que as teorias ortogonais são casos particulares de teorias tensoriais quando a métrica da superfície média é ortogonal. Em geral, as relações cinemáticas de teorias tensoriais possuem termos que dependem de todas as componentes dos *tensores métrico* e de *curvatura*. Já nas teorias ortogonais, as relações cinemáticas dependem apenas das componentes diagonais desses tensores.

Determinar uma solução para o problema de cascas significa encontrar o campo de deslocamen-

tos que atende às equações de equilíbrio e às condições de contorno impostas. Existem várias técnicas e métodos para a determinação dessas soluções, que podem ser classificadas em *analíticas*, *semianalíticas* ou *numéricas*. Embora essa classificação não seja formalmente definida, ela é bastante utilizada na literatura. De maneira geral, pode-se dizer que soluções analíticas são de forma fechada, obtidas diretamente das equações de equilíbrio, e que podem ser expressas analiticamente em termos de funções elementares. Ou seja, obtém-se uma expressão matemática que satisfaz as condições de contorno e as equações de equilíbrio continuamente em todos os pontos do corpo e os instantes de tempo. Tais soluções só são conhecidas para pouquíssimos casos de cascas de condições de contorno e geometria particulares, como, por exemplo, as soluções de Navier e Levi para o problema de placas. Por outro lado, soluções numéricas oferecem aproximações que podem ser determinadas para uma ampla variedade de geometrias, condições de contorno, tipos de carregamento e materiais, abrangendo também descontinuidades de diversas naturezas. Essas soluções utilizam modelos numéricos que reduzem o sistema contínuo para um sistema discreto finito equivalente. A solução obtida não se apresenta na forma de uma única expressão matemática que possa ser substituída diretamente nas equações de equilíbrio. No entanto, por meio da solução numérica é possível determinar de forma aproximada o campo de deslocamentos em todos os pontos do corpo. A depender do problema, a determinação de uma solução numérica pode exigir um esforço computacional elevado, seja por conta do consumo de memória ou do tempo de processamento, para garantir a convergência do esquema de discretização adotado. Finalmente, pode-se dizer que as soluções semianalíticas são a combinação entre soluções numéricas e soluções analíticas. Por um lado, soluções semianalíticas são expressas analiticamente em termos de um número delimitado de funções elementares conhecidas, como as soluções analíticas. Por outro lado, elas são soluções aproximadas, obtidas por meio de métodos numéricos que também discretizam o problema em um número finito de graus de liberdade (gdl). As soluções semianalíticas não são tão flexíveis quanto as soluções numéricas, pois nem sempre é possível determinar um conjunto de funções que represente adequadamente os campos de deslocamentos. Mas também não são tão restritas quanto as soluções analíticas, pois o conjunto de funções adotado satisfaz as equações de equilíbrio de forma aproximada, dentro do critério de convergência adotado. Em geral, soluções semianalíticas requerem um número menor de graus de liberdade para garantir uma aproximação satisfatória em relação às soluções numéricas e, conseqüentemente, exigem um esforço computacional menor para sua obtenção.

A literatura que trata da análise das vibrações em cascas é bem extensa e, ainda na década de 70, [Leissa \(1973\)](#) apresentou uma revisão de diversos estudos sobre a vibração de cascas de diferentes geometrias, como cilindros, cilindros não circulares e cones. [Leissa \(1973\)](#) ainda fez um compilado de várias teorias de cascas finas, todas baseadas na premissa das coordenadas curvilíneas ortogonais. Um capítulo a parte foi dedicado a apresentar a revisão da literatura de cascas de outras geometrias, como esferas, elipsoides, paraboloides, torus e outras superfícies de revolução. Desde então, a maioria dos estudos que aplicam métodos para determinação de soluções semianalíticas – como, por exemplo, os métodos de Rayleigh-Ritz e Galerkin – ainda utilizam teorias ortogonais e são dedicados ao estudo de cascas cuja superfície média é ortogonal, como mostraram os trabalhos de revisão posteriores ([Amabili; Païdoussis, 2003](#); [Moussaoui; Benamar, 2003](#); [Alijani; Amabili, 2014](#)). A geometria mais estudada é a cilíndrica. Dentre esses trabalhos de revisão mencionados anteriormente, a formulação tensorial só é explicitamente mencionada por [Alijani e Amabili \(2014\)](#), citando trabalhos que propuseram novas formulações ou adaptações das teorias tensoriais clássicas ([Opoka; Pietraszkiewicz, 2004, 2009](#); [Berdichevsky, 2010](#); [Xiaoqin; Kaitai; Yang, 2010](#); [Pietraszkiewicz, 2012](#)). Recentemente, [Arbind, Reddy e Arun \(2021\)](#) notaram que a modelagem de cascas tem sido baseada em geometrias ortogonais específicas, e argumentam que isso se deve ao fato de que formulações gerais são extremamente complexas justamente por terem que lidar com bases não ortogonais.

Diferente dos métodos semianalíticos, devido à sua natureza generalista, o Método dos Elementos Finitos (MEF) tem sido aplicado em inúmeros trabalhos para estudar cascas de diferentes materiais, geometrias e condições de contorno, normalmente empregando uma formulação tensorial ([Arciniega; Reddy, 2007](#); [Xiaoqin; Kaitai; Yang, 2010](#); [Rafetseder; Zulehner, 2019](#); [Martínez Valle; Albanesi; Fachinotti, 2019](#); [Radenković; Borković; Marussig, 2021](#)). Todavia, métodos semianalíticos são muitas vezes preferidos para estudar as vibrações não lineares de cascas em regime de grandes deslocamentos devido ao alto nível de acoplamento entre as equações de equilíbrio, que necessitam de métodos específicos capazes de lidar com esse acoplamento. Nesses casos, o objetivo é a construir um modelo eficiente, não necessariamente generalista, que diminua o esforço computacional ([Touzé; Vizzaccaro; Thomas, 2021](#)).

Na literatura é possível encontrar vários trabalhos que empregam métodos semianalíticos para análise de vibrações de cascas, em regime linear e não linear, utilizando teorias ortogonais. Em análise lineares, o objetivo de vários estudos é encontrar uma solução que atenda a várias con-

dições de contorno para a determinação das frequências naturais e modos de vibração. Neste contexto, foram estudadas cascas formadas por superfícies ortogonais cilíndricas, de revolução, ou torus esféricos (Qin; Chu; Zu, 2017; Li *et al.*, 2018; Gong *et al.*, 2020). Dentre os trabalhos que empregam uma análise não linear, destaca-se o de Amabili (2003), que comparou quatro teorias ortogonais diferentes – Donnell-Mushtari-Vlasov, Sanders-Koiter, Flügge-Lur'e-Byrne e Novozhilov –, e analisou as vibrações forçadas de cascas cilíndricas em regime não linear utilizando uma abordagem energética (método de Rayleigh-Ritz). Foram estudadas tanto cascas vazias quanto cascas preenchidas com fluido. O autor determinou as *curvas de ressonância* de cascas cilíndricas preenchidas com fluido, e comparou os resultados teóricos com os experimentais, mostrando boa correlação entre eles. Amabili (2003) concluiu que, dentre as teorias estudadas, a teoria de Donnell é a menos precisa.

Teorias ortogonais de cascas, ou mesmo a teoria de placas, já foram adaptadas para o estudo de cascas formadas por superfícies não ortogonais por meio de métodos semianalíticos (Ghosh; Bandyopadhyay, 1990; Das; Bandyopadhyay, 1993; Stavridis, 1998; Leissa; Kadi, 1971; Amabili, 2005; Sayyad; Ghugal, 2021; Sofiyev; Turan, 2021). Nesses casos, considerou-se que a casca analisada é *abatida*. Vlasov (1964 *apud* Ventsel; Krauthammer, 2001) definiu uma casca abatida como uma casca cuja altura não ultrapassa $1/5$ da menor dimensão da casca no plano horizontal. Segundo Ventsel e Krauthammer (2001), uma casca é considerada abatida caso os ângulos dos vetores tangentes da superfície média e o plano horizontal não excedam o valor de $0,224$ radiano ou 13° . A Figura 1.3 apresenta um exemplo de casca esférica abatida utilizada na cobertura de uma fábrica na Suíça. Observa-se que a altura da casca é bem menor que as suas dimensões no plano horizontal.

Vorovich (1999) desenvolveu um critério universal e suficiente para a classificação de cascas segundo o abatimento: uma casca é abatida quando pode-se aproximar a *derivada covariante* do deslocamento transversal em relação a uma coordenada curvilínea apenas pela derivada em relação à mesma coordenada. Isso implica que: a) as curvaturas são pequenas o suficiente; e/ou b) a derivada do deslocamento transversal é significativamente maior que as demais componentes da derivada covariante. Normalmente as duas condições cooperam mutuamente para diminuir ou aumentar o grau de abatimento. Em casos especiais, uma casca pode ser considerada *fisicamente abatida* mesmo que a curvatura não seja necessariamente pequena; são os casos em que a condição b) possui uma relevância maior em relação à condição a). Quando os valores das

Figura 1.3 – Fábrica Kilcher em Rechterswil projetada por Heinz Isler



Fonte: Grupo Suíço da Federação Internacional do Concreto⁷

curvaturas são pequenos o suficiente, diz-se que a casca é *geometricamente abatida*. Por último, existem *cascas propriamente abatidas*, que são um caso particular de cascas geometricamente abatidas cuja superfície média é próxima de um plano. Essas cascas foram objeto de estudo das primeiras teorias de cascas abatidas, notadamente as teorias de Marguerre e Vlasov.

As cascas ainda podem ser categorizadas como *desenvolvíveis* ou *não desenvolvíveis* de acordo com a métrica da sua superfície média. Uma superfície é considerada desenvolvível quando sua *curvatura gaussiana* é zero, o que significa que ela pode ser gerada a partir de um plano através de deformações de flexão, sem sofrer distorções angulares ou *elongamentos*. Em termos matemáticos, essas superfícies são isométricas a um plano. Algumas simplificações podem ser consideradas nas relações cinemáticas quando a casca é desenvolvível (Vorovich, 1999). Por outro lado, superfícies não desenvolvíveis possuem curvatura gaussiana diferente de zero. Cascas com essa característica são frequentemente referidas como cascas de *dupla curvatura*, uma vez que ambas as curvaturas principais devem ser diferentes de zero para que a curvatura gaussiana também não seja nula. Nesse caso, elas ainda podem ser classificadas como *elípticas*, quando a curvatura é positiva, ou *hiperbólicas*, quando a curvatura é negativa. São exemplos de casca de dupla curvatura elípticas a casca esférica, o parabolóide elíptico e o conoide; enquanto exemplos de cascas hiperbólicas são o parabolóide hiperbólico, o hiperboloide e o *hypar*. Essas cascas são largamente aplicadas em coberturas de concreto, como mostram as Figuras 1.4. Segundo Reddy (2006), superfícies não desenvolvíveis são mais resistentes do que superfícies

⁷ Disponível em: https://fib-ch.epfl.ch/Pubs/2006/9_Biography.pdf (Acessado em 22/12/2023)

desenvolvíveis, porque exigem forças adicionais para colapsá-las em um plano. Por exemplo, a cobertura do Aquário Oceanográfico de Valência, ilustrado na Figura 1.4(b), foi construído em concreto armado e possui uma espessura de apenas 60 mm (Zingoni, 2017).

Figura 1.4 – Construções que apresentam cascas de dupla curvatura como cobertura. (a) painel esférico, (b) hiperboloide parabólico e (c) conoide.



FONTE: Alchetron⁸

(a) Estação Deitingen em Zurique



FONTE: Eisenbach e Grohmann (2017)

(b) Aquário oceanográfico de Valência



FONTE: designingbuildings⁹

(c) Estação Oxford, Manchester

Na literatura é possível encontrar alguns trabalhos que tratam da análise de cascas de dupla curvatura abatidas. Ghosh e Bandyopadhyay (1990) realizaram análises estáticas de conoides parabólicos por meio da teoria de Vlasov. Foram determinados os campos de deslocamentos e os esforços internos de cascas para várias condições de contorno utilizando o método de Galerkin. Segundo os autores, o método de Galerkin pode reduzir consideravelmente o esforço computacional em relação ao método dos elementos finitos, e é recomendado apenas em análises preliminares de cascas com geometria de dupla curvatura. Para resultados mais precisos, deve-se recorrer a métodos mais sofisticados como o método dos elementos finitos. Observa-se que, para os autores, a precisão dos resultados está relacionada à aplicação do método semianalítico e não necessariamente à teoria de cascas empregada.

⁸ Disponível em: <https://alchetron.com/Heinz-Isler> (Acessado em 22/12/2023)

⁹ Disponível em: https://www.designingbuildings.co.uk/wiki/Conoid_shell (Acessado em 22/12/2023)

Das e Bandyopadhyay (1993) utilizaram a teoria de Marguerre na análise estática de conoides parabólicos. O método das diferenças finitas foi empregado para a solução das equações diferenciais parciais de equilíbrio. Os resultados obtidos foram comparados com resultados experimentais. Os autores também argumentam que a vantagem da abordagem empregada em relação ao MEF é o relativo baixo esforço computacional.

Stavridis (1998) estudou diferentes tipos de cascas abatidas de dupla curvatura, todas com projeção retangular no plano cartesiano horizontal: conoide parabólico, parabolóide elíptico, parabolóide hiperbólico e *hypar*. O autor determinou as frequências naturais dessas cascas para diferentes condições de contorno, variando também os parâmetros geométricos das superfícies. O método de Galerkin foi utilizado para discretizar as equações de equilíbrio da teoria de Marguerre. Restrições na espessura e no abatimento foram impostas para atender ao domínio de validade da teoria. Foram adaptadas funções típicas de vigas para atender às condições de contorno nas duas direções cartesianas e os esforços de membrana foram calculados pelas funções de tensão de Airy. O autor constatou que, quanto maior é a relação entre as dimensões da projeção horizontal da casca, maior é a diferença entre os resultados teóricos e o MEF.

Amabili (2005) aplicou as teorias de Donnell e Novozhilov ao estudo de cascas abatidas, perfeitas e imperfeitas, de dupla curvatura, do tipo parabolóide hiperbólico e elíptico, submetidas a vibrações forçadas em regime de grandes deslocamentos. As análises de estabilidade estática e dinâmica foram realizadas usando o método da continuação. Por meio de diagramas de bifurcação e da determinação dos coeficientes de Lyapunov, o autor constatou que tais cascas estão sujeitas a diferentes fenômenos não lineares como: perda de estabilidade por *snap-through*; respostas sub-harmônicas; bifurcações por duplicação de período; e comportamento caótico.

Pradyumna e Bandyopadhyay (2011) estudaram cascas dos tipos conoide e *hypar* utilizando a teoria ortogonal de Sanders. Embora a notação tensorial não tenha sido adotada, considerou-se a inclusão das curvaturas de torção – ou seja, as componentes do tensor de curvatura fora da diagonal principal – nas relações cinemáticas da casca.

Sofiyev e Turan (2021) estudaram as vibrações livres não lineares de cascas abatidas heterogeneamente ortotrópicas utilizando uma teoria ortogonal de primeira ordem. Diversas geometrias foram estudadas, incluindo painéis cilíndricos, painéis esféricos, parabolóides hiperbólicos e placas. Os resultados de frequência natural foram comparados com a literatura mostrando boa

correlação. Um estudo sistemático foi realizado obtendo várias relações frequência-amplitude e comparando a sensibilidade da resposta dinâmica em relação às tensões de cisalhamento, a heterogeneidade do material e as diferentes características geométricas das cascas analisadas.

Zhai, Ma e Liang (2021) aplicaram uma teoria ortogonal ao estudo de casca abatidas e não abatidas, de dupla curvatura, e parametrizadas por coordenadas curvilíneas não ortogonais. Os resultados das cascas abatidas – frequências naturais e modos de vibração – foram validados com a literatura e com o método dos elementos finitos, mostrando boa correlação. Os autores concluíram que o grau de abatimento tem um grande impacto na resposta dinâmica da casca. Dado a importância do abatimento, não fica claro, nesse estudo, se a teoria ortogonal aplicada representaria com precisão o real comportamento dinâmico das cascas não abatidas.

Observa-se que a análise dinâmica não linear de cascas de dupla curvatura não abatidas ainda é pouco explorada na literatura. Teorias tensoriais são ideais para a análise dessas cascas, já que podem lidar com o sistema não ortogonal de coordenadas curvilíneas que é geralmente empregado para parametrização dessas superfícies. Deve-se ressaltar, contudo, que nessas teorias as relações cinemáticas possuem mais termos e, conseqüentemente, há um maior acoplamento entre as equações de equilíbrio do sistema. Neste sentido, Pinho, Del Prado e Silva (2021) estudaram as vibrações livres lineares de cascas de dupla curvatura abatidas e não abatidas – conóides parabólicos, paraboloides hiperbólicos e paraboloides elípticos – utilizando a teoria tensorial de Koiter. Os resultados, frequências naturais e modos de vibração, foram obtidos para diferentes condições de contorno e nível de abatimento por meio do método de Rayleigh-Ritz. Séries de Fourier e séries de polinômios de Legendre foram utilizadas na expansão dos campos de deslocamentos. Devido à complexidade da geometria da cascas e, conseqüentemente, dos modos de vibração, um número grande de coordenadas generalizadas foi necessário na expansão dos campos de deslocamentos, totalizando 144 gdl. Os resultados teóricos foram comparados com os resultados obtidos por Stavridis (1998) e com o método dos elementos finitos, provando que teoria tensorial de Koiter é mais precisa que a teoria de Marguerre para a análise de vibração livre, mesmo em cascas abatidas. Segundo os autores, em regime não linear, a expansão adotada seria computacionalmente inviável por conta do alto grau de acoplamento entre os termos não lineares das relações deformação-deslocamento e das equações de equilíbrio.

Da mesma forma, Gonçalves, Silva e Del Prado (2008) notaram que para capturar a resposta não

linear em cascas cilíndricas, modelos numéricos de alta ordem normalmente são empregados envolvendo um grande número de graus de liberdade, o que é muito custoso tanto em termos de memória quanto em termos de tempo de processamento. Para contornar esse problema, os autores apresentaram um modelo de baixa dimensão derivado de técnicas de perturbação em conjunto com a Decomposição Ortogonal Própria (DOP). Primeiramente, os modos de vibração lineares foram obtidos e os modos de alta-ordem foram calculados por meio de técnicas de perturbação, então a DOP foi aplicada para selecionar os modos mais importantes. Este procedimento foi implementado para estudar a resposta dinâmica de cascas em regime de grandes deslocamentos. [Amabili, Sarkar e Païdoussis \(2003\)](#) também estudaram vibrações em regime de grandes deslocamentos de cascas cilíndricas, perfeitas e imperfeitas, simplesmente apoiadas, submetidas à excitação harmônica. A teoria não linear de Donnell para cascas abatidas foi empregada. Para descrever o comportamento da casca com um modelo de baixa dimensão em torno das frequências de ressonância fundamentais, a DOP foi aplicada extraíndo os Modos Ortogonais Próprios (MOPs) do sistema.

[Pinho, Del Prado e Silva \(2022\)](#) empregaram a teoria de Koiter na análise não linear estática de cascas abatidas e não abatidas. Foram analisados conoides parabólicos e painéis esféricos simplesmente apoiados. Dois tipos de carregamentos foram considerados: carregamento uniformemente distribuído e carga pontual. Por meio do método de Rayleigh-Ritz, as equações diferenciais parciais de equilíbrio foram discretizadas em modelos de até 108 gdl. Na análise de um painel esférico abatido submetido a uma carga pontual, a teoria ortogonal de Koiter mostrou-se superior em prever a resposta de cascas em comparação com a teoria ortogonal de Donnell. A DOP foi empregada em um modelo reduzido, que mostrou-se eficiente em obter a resposta não linear em cascas não abatidas. Na análise do painel esférico não abatido, os autores puderam reduzir de 108 para 18 o número total de graus de liberdade necessários utilizando a DOP.

1.3 Técnicas de redução de ordem

Como foi observado, técnicas de redução de ordem são necessárias para tornar o modelo computacionalmente viável. [Touzé, Vizzaccaro e Thomas \(2021\)](#) fizeram uma revisão dos princi-

país métodos de redução de ordem em problemas dinâmicas com não linearidades geométricas. Como dito anteriormente, a Decomposição Ortogonal Própria já foi empregada em análises dinâmicas não lineares de cascas cilíndricas com sucesso (Gonçalves; Silva; Del Prado, 2008; Amabili; Sarkar; Païdoussis, 2003). Expansões utilizando o conceito de Derivadas Modais (DM) foram aplicadas em vigas, arcos e pórticos para determinação das relações frequência-amplitude (Sombroek *et al.*, 2018). Recentemente, técnicas derivadas da teoria das *variedades invariantes*, como, por exemplo, a abordagem por *Forma Normal* (FN), vêm sendo aplicadas em diversos estudos mostrando-se eficazes em reduzir significativamente a dimensão do modelo dinâmico mantendo a precisão dos resultados (Vizzaccaro *et al.*, 2021; Touzé; Vizzaccaro; Thomas, 2021). Essas técnicas estão intrinsecamente ligadas ao conceito de *Modos Normais Não Lineares* (MNNL), que podem ser entendidos como um tipo de variedade invariante que é utilizada na determinação desses modelos de ordem reduzida.

Kerschen *et al.* (2009) apresentaram uma revisão do conceito de MNNL. Segundo os autores, uma das principais características das vibrações livres não lineares é a dependência entre frequência e amplitude/energia de vibração. Essa dependência pode ser caracterizada pela determinação dos MNNL quando representados por meio de *backbones*. As *backbones*, ou seja, as relações de frequência-amplitude ou frequência-energia de sistemas dinâmicos autônomos não amortecidos, são curvas que relacionam a amplitude máxima (para um ponto ou uma coordenada generalizada específica) ou energia de uma órbita periódica do sistema com sua frequência. Elas descrevem, entre outras coisas, o grau de não linearidade do sistema dinâmico, indicando se há endurecimento ou amolecimento (tipicamente virando para endurecimento para amplitudes maiores). Algumas análises experimentais demonstram como sistemas dinâmicos amortecidos seguem de perto os MNNL do sistema não amortecido subjacente. Esta relação é exemplificada por experimentos realizados em vigas planas engastadas, empregando uma transformação *wavelet* contínua para rastrear a evolução temporal das frequências (Kerschen *et al.*, 2009). Experimentos também foram realizados em um painel cilíndrico de alumínio para identificar a resposta não linear do modo fundamental (Kurpa; Pilgun; Amabili, 2007).

Kerschen *et al.* (2009) descrevem várias aplicações onde os MNNL são úteis para a análise de sistemas dinâmicos: (a) a representação dos MNNL em uma relação frequência-energia é uma ferramenta robusta e precisa para decidir se a análise em regime linear ainda é aplicável e para determinar quais modos são sensíveis à não linearidade; (b) ressonâncias forçadas em sistemas

não lineares ocorrem nas proximidades dos MNNL e, portanto, fornecem informações valiosas sobre a estrutura das ressonâncias; (c) sistemas dinâmicos amortecidos seguem de perto os MNNL do sistema não amortecido subjacente; (d) o fato de que os MNNL confinam espacialmente a energia vibracional pode encontrar aplicações na mitigação de vibrações de sistemas mecânicos; (e) MNNL fornecem bases para a construção de modelos de ordem reduzida, como é o caso das técnicas baseadas na teoria das variedades invariantes.

A abordagem das *Subvariedades Espectrais* (SVE) é um exemplo de técnica baseada na teoria das variedades invariantes e vem sendo utilizada em vários trabalhos para o cálculo de *backbones* e curvas de ressonância em sistemas discretos e contínuos por meio de um modelo de ordem reduzida. O conceito foi inicialmente proposto por [Haller e Ponsioen \(2016\)](#), a SVE é a variedade mais suave de uma família de variedades invariantes tangente ao subespaço mestre na origem do sistema, e contém os MNNL do sistema. Os primeiros trabalhos sobre o assunto tratavam apenas da determinação de SVE bidimensionais de modelos dinâmicos descritos em coordenadas modais. [Breunung e Haller \(2018\)](#) determinaram as curvas de ressonância e *backbones* de sistemas mecânicos discretos de até 5 gdl utilizando SVE bidimensionais. [Ponsioen, Pedergnana e Haller \(2018\)](#) automatizaram o processo de determinação das SVE bidimensionais para ordens arbitrárias utilizando a notação tensorial. Com isso, os autores determinaram SVE bidimensionais até a quinta ordem. Essa metodologia foi aplicada na determinação de *backbones* de um modelo massa mola discreto de 2 gdl e de uma viga analisada pela teoria não linear de Timoshenko em um modelo de 16 gdl. [Ponsioen, Pedergnana e Haller \(2019\)](#) apresentaram uma metodologia eficiente para o cálculo das Subvariedades Espectrais bidimensionais utilizando notação de índice múltiplo. Os autores determinaram as curvas de ressonância de vigas modeladas pela teoria de Bernoulli acopladas a uma mola com rigidez não linear cúbica em um modelo de 50 gdl. Os autores utilizaram um modelo reduzido bidimensional de quinta ordem. As curvas de ressonância foram determinadas por meio do método do conjunto de nível zero (*zero-level set*), capaz de determinar trechos fechados isolados das curvas de ressonância. [Ponsioen, Jain e Haller \(2020\)](#) analisaram sistemas de alta dimensão por meio de SVE bidimensionais para extrair a curva ressonância em torno de um modo de interesse. Mais uma vez, por meio de uma SVE bidimensional, os autores determinaram um sistema de duas equações diferenciais pela parametrização das variáveis do modelo reduzido em coordenadas polares, cujos pontos fixos do sistema resultante correspondem a órbitas periódicas da curva de ressonância. Os autores analisaram vigas por modelos com até de 10.000 gdl, reduzindo consideravelmente

o tempo de processamento em relação aos métodos globais.

De acordo com Jain e Haller (2022), as duas principais limitações do cálculo de SVE nos trabalhos citados anteriormente são: (a) a dependência das equações de movimento escritas na base de autovetores dos sistemas linearizados, o que é inacessível para problemas de elementos finitos envolvendo um número muito grande de graus de liberdade, e (b) a dimensão do SVE é restrita a dois. Jain e Haller (2022) generalizaram a metodologia dos trabalhos anteriores para SVE de dimensão arbitrária determinada a partir de coordenadas físicas, capaz de lidar com vibrações periódicas e quase periódicas. Tanto a solução das *backbones* quanto das curvas de ressonância são obtidas analiticamente por meio da parametrização das variáveis do modelo reduzido em coordenadas cartesianas e polares. Os autores calcularam as curvas de ressonância de uma casca abatida submetida a carregamento harmônico. A casca foi discretizada utilizando o método dos elementos finitos em um modelo com 1320 gdl. O tempo necessário para o cálculo da curva de ressonância do modelo completo foi de mais de 52 horas, enquanto que nos modelos reduzidos das variedades invariantes foi de 3 segundos (ordem 3), 12 segundos (ordem 5) e 28 segundos (ordem 7). Os resultados analíticos desses trabalhos mostram que é possível determinar as curvas de ressonância e as *backbones* por meio da Forma Normal do sistema dinâmico reduzido via SVE.

Ressonâncias internas são essencialmente fenômenos de vibração não linear, e ocorrem quando a energia é transferida entre vários modos, fazendo com que os MNNL interajam durante um movimento geral do sistema. Muitos estudos exploram o fenômeno das ressonâncias internas ocorrendo entre modos de sistemas em que as frequências naturais lineares são comensuráveis. Nesses casos, é frequente a utilização de técnicas de perturbação que exploram essa propriedade para determinação da solução (Zhao *et al.*, 2021; Rodrigues; Silva; Gonçalves, 2020; Pellicano; Amabili; Vakakis, 2000). No entanto, as ressonâncias internas podem ocorrer sem que a razão entre as frequências naturais lineares seja inteira (Sun; Quan; Wang, 2018), de forma que fenômenos não lineares importantes podem ser desconsiderados ao aplicar técnicas de perturbação limitadas a movimentos de pequena amplitude (Kerschen *et al.*, 2009). Recentemente, Amabili e Balasubramanian (2020) utilizaram a teoria de Novozhilov para análise das vibrações livres não lineares de cascas do tipo tronco de cone. Para a discretização das equações diferenciais parciais de equilíbrio, foi utilizado o método de Rayleigh-Ritz, que resultou em um modelo com um número relativamente grande de coordenadas generalizadas – 59 gdl ao todo. Os resultados

mostraram que os troncos de cones apresentam importantes ressonâncias internas devido a sua simetria axial. Os autores concluíram que, a menos que existam imperfeições geométricas significativas capazes de quebrar essa simetria, o efeito das ressonâncias internas também deve ser incluído no estudo de vibrações forçadas. Além disso, ressonâncias internas, especificamente a ressonância interna 1:1:2, foram examinadas usando um método de perturbação no contexto da excitação forçada harmônica em cascas esféricas (Thomas; Touzé; Chaigne, 2005), e os resultados obtidos foram posteriormente validados por meio de experimentos (Thomas; Touzé; Luminais, 2007). Esses resultados numéricos e experimentais mostram que técnicas de redução de ordem baseadas na determinação dos MNNL devem considerar as ressonâncias internas para correta caracterização o modelo.

A redução de modelo via SVE em sistemas com ressonâncias internas, no entanto, só foi abordada recentemente por Li, Jain e Haller (2022). Os autores demonstraram a precisão e eficiência do método de redução de ordem por meio de sete exemplos. Em um deles, a curva de ressonância de uma casca abatida com 1320 gdl é obtida através de um SVE quadridimensional em apenas dois minutos, enquanto o método do tiro foi incapaz de determinar a curva de ressonância do sistema completo mesmo em uma semana inteira de tempo de computação. Li e Haller (2022) utilizaram a mesma metodologia para estudar bifurcações que levam a respostas quase periódicas em vigas e placas modeladas via MEF.

1.4 Histórico de pesquisas do PPG-GECON

O Programa de Pós Graduação em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil – PPG-GECON – possui experiência no estudo da dinâmica não linear de sistemas contínuos que data desde a sua criação em 2006. Dentre os estudos realizados, destacam-se a análise da instabilidade dinâmica de cascas cilíndricas submetidas a carregamento harmônico axial (Gonçalves; Silva; Del Prado, 2007b,a) e análise de cascas preenchidas com fluido (Silva; Gonçalves; Del Prado, 2011). Além disso, são feitas análises para determinação da interação entre os diferentes modos de vibração de cascas cilíndricas, perfeitas e imperfeitas, submetidas a carregamentos transversais e axiais (Rodrigues *et al.*, 2014; Morais; Silva, 2019; Rodrigues; Gonçalves; Silva, 2017; Rodrigues; Silva; Gonçalves, 2020).

Foram analisadas estruturas feitas de material ortotrópico (Del Prado; Gonçalves; Païdoussis, 2010; Del Prado *et al.*, 2014) e de material hiperelástico (Soares; Gonçalves, 2012, 2014, 2018; Soares *et al.*, 2020; Silva *et al.*, 2020). Modelos de ordem reduzida também foram empregados para análise não linear dinâmica de sistemas contínuos (Gonçalves; Silva; Del Prado, 2008; Del Prado; Gonçalves; Païdoussis, 2009; Gonçalves; Silva; Del Prado, 2016). Por fim, o grupo de pesquisa também possui experiência na análise não linear de sistemas dinâmicos sujeitos a incertezas e ruídos (Silva; Gonçalves, 2015).

Recentemente, foram realizadas análises em conoides abatidos e não abatidos (Silva; Soares; Morais, 2017; Soares; Moreira; Silva, 2022). A presente tese se insere neste contexto de pesquisas, estendendo a análise da dinâmica não linear de sistemas contínuos a cascas de diferentes geometrias, no desenvolvimento de modelos matemáticos capazes de estudar as vibrações em regime de grandes deslocamentos e na aplicação de técnicas de redução de ordem.

1.5 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é empregar uma formulação tensorial ao estudo de cascas de dupla curvatura, abatidas e não abatidas, feitas de material elástico linear, para a análise dinâmica não linear geométrica por meio de um modelo semianalítico de ordem reduzida.

Os objetivos específicos são:

- Validar a formulação tensorial em análise lineares e não lineares quando aplicada a cascas abatidas e não abatidas com trabalhos da literatura e com o método dos elementos finitos;
- Construir um modelo ordem reduzida capaz de descrever o comportamento estático e dinâmico das cascas em regime de deslocamentos moderados;
- Avaliar a resposta dinâmica não linear por meio das relações frequência-amplitude, curvas de ressonância e diagramas de bifurcação de cascas abatidas e não abatidas.

1.6 Organização do texto

Este trabalho possui nove capítulos, incluindo esta introdução, e é organizado da seguinte forma:

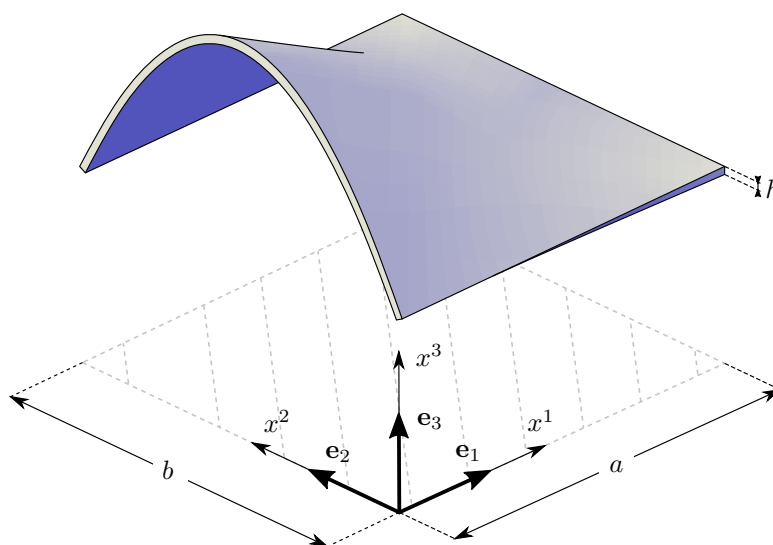
- No Capítulo 2, é deduzida uma teoria tensorial para cascas baseada nas hipóteses de Kirchhoff-Love;
- No Capítulo 3, são apresentados o método de Rayleigh-Ritz para discretização das equações de equilíbrio e os métodos do tiro simples, tiro múltiplo e balanço harmônico para determinação de órbitas periódicas;
- No Capítulo 4, são apresentadas as técnicas de redução de ordem por meio da Decomposição Ortogonal Própria e da determinação das Subvariedades Espectrais;
- No Capítulo 5, é feita a validação da teoria tensorial para o caso de vibração livre linear de cascas abatidas e não abatidas de diversas geometrias e condições de contorno;
- No Capítulo 6, a teoria tensorial é aplicada na análise estática não linear de cascas abatidas e não abatidas para validar as aproximações das relações cinemáticas. Além disso, a DOP é aplicada para reduzir a dimensão do modelo;
- No Capítulo 7, são apresentados os resultados das relações frequência amplitude e frequência energia de cascas abatidas e não abatidas de dupla curvatura. Os resultados da análise semianalítica são comparados com os resultados obtidos via MEF;
- No Capítulo 8, são apresentados resultados das análises de vibração forçada de cascas de dupla curvatura. A abordagem das Subvariedades Espectrais é utilizada para determinação das curvas de ressonância por meio do seu modelo de ordem reduzida;
- No Capítulo 9, são apresentadas conclusões gerais desta tese e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO TENSORIAL APLICADA ÀS CASCAS FINAS

Neste capítulo é apresentada uma dedução da formulação tensorial para casca finas que se baseia nas seguintes hipóteses de Kirchhoff-Love: a espessura da casca é muito pequena se comparada aos raios de curvatura principal; um seguimento de reta normal à superfície média permanece normal e inextensível após a deformação; as tensões perpendiculares à superfície média são muito pequenas se comparadas às demais componentes de tensões e podem ser desprezadas. Os campos de tensão e deformação, as relações cinemáticas, a energia de deformação, a energia cinética, os esforços internos e as equações de equilíbrio são derivados dessas hipóteses para uma casca fina, de espessura h , feita de material homogêneo isotrópico de módulo de elasticidade E , coeficiente de Poisson ν , densidade ρ e coeficiente de amortecimento viscoso linear c . A casca é exemplificada pelo conoide da Figura 2.1.

Figura 2.1 – Casca de base retangular



2.1 Geometria diferencial da superfície média

A teoria de casca finas busca reduzir para um problema bidimensional a análise de um corpo tridimensional e, desta forma, deduzir o comportamento mecânico do corpo a partir das deformações da sua superfície média. Por isso o estudo de casca finas começa pela descrição matemática da superfície média, dada pela *geometria diferencial*.

A geometria da *superfície média* $\mathcal{S}$ da casca na configuração de referência é descrita por meio das *coordenadas curvilíneas* ξ^1 e ξ^2 , que estão contidas no domínio Ω , e parametrizada pelo vetor $\mathbf{R}$, conforme mostra a equação (2.1).

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= X(\xi^1, \xi^2)\mathbf{e}_1 + Y(\xi^1, \xi^2)\mathbf{e}_2 + Z(\xi^1, \xi^2)\mathbf{e}_3 \\ (\xi^1, \xi^2) &\in \Omega\end{aligned}\tag{2.1}$$

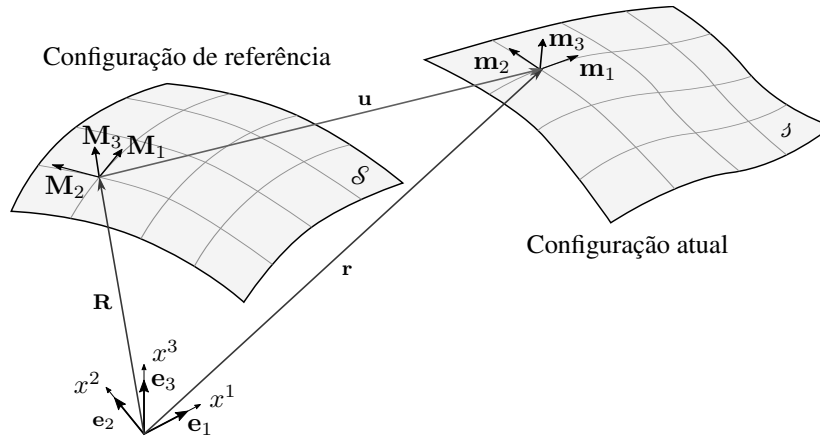
Os vetores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ formam a *base ortonormal canônica* na direção dos eixos cartesianos x^1 , x^2 e x^3 , como mostra a Figura 2.1. O vetor $\mathbf{R}$ aponta a posição de um ponto da superfície média na configuração de referência, conforme mostra a Figura 2.2. A equação (2.1) representa a transformação do domínio Ω , contido no espaço plano das coordenadas curvilíneas, na superfície tridimensional $\mathcal{S}$, que é definida algebricamente pelas funções X , Y e Z .

Ao deformar-se, uma partícula da superfície média $\mathcal{S}$ movimenta-se da posição inicial, descrita pelo vetor $\mathbf{R}$, e assume a posição $\mathbf{r}$ da superfície $\mathfrak{s}$ na configuração atual, conforme ilustra a Figura 2.2. O vetor $\mathbf{r}$ é determinado pela soma do vetor $\mathbf{R}$ com o deslocamento $\mathbf{u}$ da superfície média, como mostra a equação (2.2).

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{u}\tag{2.2}$$

Sempre que possível, a seguinte regra vai ser adotada na simbologia deste trabalho, as letras maiúsculas representam grandezas na configuração de referência, enquanto as letras minúsculas representam grandezas na configuração atual.

Figura 2.2 – Movimento da superfície média da casca da configuração de referência para a configuração atual



2.1.1 Bases natural e recíproca

Para compreender o comportamento mecânico da casca, é necessário introduzir as seguintes propriedades geométricas da superfície média: os vetores da base natural e recíproca; o tensor métrico; o tensor de curvatura e os símbolos de Christoffel (Borisenko; Tarapov, 1968). A *base natural* (ou tangente) da superfície é formada pelos vetores M_1 , M_2 e M_3 , ilustrados na Figura 2.2. Esses vetores são calculados pelas equações:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi^1} = X_{,1} \mathbf{e}_1 + Y_{,1} \mathbf{e}_2 + Z_{,1} \mathbf{e}_3 \\ M_2 &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi^2} = X_{,2} \mathbf{e}_1 + Y_{,2} \mathbf{e}_2 + Z_{,2} \mathbf{e}_3 \\ M_3 &= \frac{\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2}{|\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2|} \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde $Z_{,\alpha} = \partial Z / \partial \xi^\alpha$ e $|\mathbf{M}|$ é a norma Euclidiana do vetor $\mathbf{M}$. Os vetores M_1 e M_2 são tangentes à superfície $\mathcal{S}$ e não necessariamente perpendiculares entre si, enquanto o vetor M_3 é perpendicular a ambos, como mostra a Figura 2.2. Além disso, os vetores M_1 e M_2 não são necessariamente vetores unitários.

A *base recíproca* (ou cotangente) é composta pelos vetores M^1 , M^2 e M^3 e se relaciona com a base natural de acordo com a equação:

$$M_i \cdot M^j = \delta_i^j \quad (2.4)$$

em que δ_i^j é o delta de Kronecker. Os vetores M^j também são chamados de *covetores*. Pode ser deduzido das equações (2.3) e (2.4) que $M_3 = M^3$. Como consequência da equação (2.4), o

produto vetorial entre os vetores da base natural é dado pela equação (2.5a), enquanto o produto vetorial entre os vetores da base recíproca é dado pela equação (2.5b).

$$\mathbf{M}_i \times \mathbf{M}_j = \epsilon_{ijk} \sqrt{G} \mathbf{M}^k \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{M}^i \times \mathbf{M}^j = \frac{\epsilon_{ijk}}{\sqrt{G}} \mathbf{M}_k \quad (2.5b)$$

Nas equações (2.5), ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita, e $\sqrt{G} = |\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2|$. O valor de G também pode ser calculado como o determinante da matriz $[G_{ij}]$, formada pelas componentes do tensor métrico que será apresentado a seguir.

Qualquer vetor pode ser decomposto tanto na base natural quanto na base recíproca. Por exemplo, seja um vetor descrito na base natural como $\mathbf{V} = V^i \mathbf{M}_i$, suas *componentes contravariantes* são dadas por $V^i = \mathbf{V} \cdot \mathbf{M}^i$. Caso o vetor seja decomposto na base recíproca como $\mathbf{V} = V_i \mathbf{M}^i$, suas *componentes covariantes* são dadas por $V_i = \mathbf{V} \cdot \mathbf{M}_i$. Resumidamente, qualquer vetor pode ser decomposto nas duas bases ($\mathbf{V} = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{M}^i) \mathbf{M}_i = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{M}_i) \mathbf{M}^i$), que são utilizadas concomitantemente na decomposição e por isso são ambas necessárias. Em uma classe específica de superfícies, os vetores tangentes são ortogonais entre si, ou seja $\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 = 0$, e, neste caso, pode-se deduzir as equações da casca utilizando apenas uma única base ortonormal. Como foi dito anteriormente, muitas teorias de cascas foram derivadas a partir deste caso específico. Será adotada a seguinte notação na descrição das equações da casca, os índices romanos ($i, j, k \dots$) nas equações variam de 1 a 3, enquanto os índices gregos ($\alpha, \beta, \gamma \dots$) variam de 1 a 2. Tal regra será válida exceto quando uma definição contrária for apresentada. A notação de Einstein, que omite o somatório de índices repetidos, também será largamente utilizada seguindo a mesma regra.

2.1.2 Tensor métrico

O *tensor métrico* é um tensor de segunda ordem importante para a caracterização da superfície. Ele é definido pelo produto diádico $\mathbf{G} = \mathbf{M}_i \otimes \mathbf{M}^i$ e é utilizado, entre outras coisas, para calcular o comprimento de curvas que estão contidas na superfície $\mathcal{S}$. Ele pode ser decomposto de diversas formas e suas componentes covariantes (G_{ij}) e contravariantes (G^{ij}) são calculadas

pelas equações (2.6a) e (2.6b), respectivamente.

$$G_{ij} = \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{M}_j \quad (2.6a)$$

$$G^{ij} = \mathbf{M}^i \cdot \mathbf{M}^j \quad (2.6b)$$

A partir das equações (2.4) e (2.6), é possível deduzir uma importante propriedade do tensor métrico, ele pode ser utilizado para migrar das componentes covariantes para as componentes contravariantes de acordo com as duas relações $V_i = G_{ik}V^k$ e $V^i = G^{ik}V_k$.

Um tensor de segunda ordem qualquer $\mathbf{T}$ pode ser decomposto em quatro bases diferentes:

$$\mathbf{T} = T_{ij}\mathbf{M}^i \otimes \mathbf{M}^j \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{T} = T_i^{\cdot j}\mathbf{M}^i \otimes \mathbf{M}_j \quad (2.7b)$$

$$\mathbf{T} = T_{\cdot j}^i\mathbf{M}_i \otimes \mathbf{M}^j \quad (2.7c)$$

$$\mathbf{T} = T^{ij}\mathbf{M}_i \otimes \mathbf{M}_j \quad (2.7d)$$

onde a equação (2.7a) representa a decomposição na base natural, as equações (2.7b) e (2.7c) nas bases mistas, e a equação (2.7d) na base recíproca. O ponto (sobrescrito e subscrito) que aparece nas componentes mistas serve para diferenciá-las uma da outra e pode ser retirado desde que elas sejam simétricas. As componentes de cada uma dessas decomposições são dadas pelas equações:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_j \\ T_i^{\cdot j} &= \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}^j \\ T_{\cdot i}^j &= \mathbf{M}^j \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_i \\ T^{ij} &= \mathbf{M}^i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}^j \end{aligned} \quad (2.8)$$

sendo T_{ij} as componentes covariantes, $T_i^{\cdot j}$ e $T_{\cdot i}^j$ as *componentes mistas*, e T^{ij} as componentes contravariantes. Essas componentes são expressas entre si por meio do tensor métrico de acordo com as relações $T_{\cdot j}^i = G^{ik}T_{kj}$, $T_i^{\cdot j} = G^{jk}T_{ik}$, $T^{ij} = G^{jk}T_{\cdot k}^i$, $T^{ij} = G^{ik}T_k^{\cdot j}$, $T_k^{\cdot j} = G_{ik}T^{ij}$, $T_{\cdot k}^i = G_{jk}T^{ij}$, $T_{ik} = G_{jk}T_i^{\cdot j}$ e $T_{ki} = G_{jk}T_{\cdot i}^j$. Também é possível migrar de forma direta das componentes covariantes para as componentes contravariantes, e vice-versa, de acordo com $T_{ij} = G_{mi}G_{nj}T^{mn}$ e $T^{ij} = G^{mi}G^{nj}T_{mn}$.

Finalmente, vale ressaltar que o tensor métrico pode ser entendido como o tensor identidade, ou seja $\mathbf{G} \equiv \mathbf{I} \equiv \delta_{ij}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$. Essa equivalência é válida já que $G_{ij} = \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{M}_j =$

$\mathbf{M}_i \cdot (\delta_{mn} \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^n) \cdot \mathbf{M}_j = \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{M}_j$ atende à definição das componentes do tensor métrico dada na equação (2.6a). Dedução similar pode ser feita para as componentes G^{ij} . Neste sentido, as componentes mistas do tensor métrico são dadas por $G_i^j = G^{jk} G_{ik} = \mathbf{M}^j \cdot \mathbf{M}_i = \delta_i^j$, o que também está de acordo com a definição inicial $\mathbf{G} = \delta_i^j \mathbf{M}_i \otimes \mathbf{M}^j = \mathbf{M}_i \otimes \mathbf{M}^i$. Isso também quer dizer que a matriz formada pelas componentes covariantes de tensor métrico é igual à inversa da matriz formada pelas componentes contravariantes, ou seja $[G_{ij}] = [G^{ij}]^{-1}$.

2.1.3 Equações de Gauss e Weingarten

A variação infinitesimal do vetor posição da superfície média, $d\mathbf{R}$, depende dos vetores tangentes $\mathbf{M}_\alpha$ e dos infinitesimais $d\xi^\alpha$ das coordenadas curvilíneas, como mostra a equação (2.9).

$$d\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha = \mathbf{M}_\alpha d\xi^\alpha \quad (2.9)$$

O tensor $\mathbf{K}$, chamado de *tensor de curvatura*, relaciona a variação infinitesimal do vetor normal $d\mathbf{M}_3$ com a variação $d\mathbf{R}$, de acordo com a equação (2.10a). Ao decompô-lo nas bases recíproca ($\mathbf{K} = K_{\alpha\beta} \mathbf{M}^\alpha \otimes \mathbf{M}^\beta$) e mista ($\mathbf{K} = K_{\cdot\beta}^\alpha \mathbf{M}_\alpha \otimes \mathbf{M}^\beta$), pode-se reescrever a equação (2.10a) nas equações (2.10b) e (2.10c) que, por sua vez, relacionam as variações infinitesimais $d\mathbf{M}_3$ com os vetores tangentes nas bases natural e recíproca, respectivamente.

$$d\mathbf{M}_3 = \mathbf{K} \cdot d\mathbf{R} \quad (2.10a)$$

$$d\mathbf{M}_3 = K_{\alpha\beta} \mathbf{M}^\alpha d\xi^\beta \quad (2.10b)$$

$$d\mathbf{M}_3 = K_{\cdot\beta}^\alpha \mathbf{M}_\alpha d\xi^\beta \quad (2.10c)$$

Como a variação do vetor normal da superfície pode ser escrita como $d\mathbf{M}_3 = (\partial \mathbf{M}_3 / \partial \xi^\beta) d\xi^\beta$, pode-se deduzir os valores de $K_{\alpha\beta}$ e $K_{\cdot\beta}^\alpha$ que são, de acordo com as equações (2.11a) e (2.11b), as componentes covariante e mista do tensor de curvatura, respectivamente.

$$K_{\alpha\beta} = \mathbf{M}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{M}_3}{\partial \xi^\beta} = -\mathbf{M}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{M}_\alpha}{\partial \xi^\beta} = -\mathbf{M}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{M}_\beta}{\partial \xi^\alpha} \quad (2.11a)$$

$$K_{\cdot\beta}^\alpha = \mathbf{M}^\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{M}_3}{\partial \xi^\beta} = -\mathbf{M}^\beta \cdot \frac{\partial \mathbf{M}^\alpha}{\partial \xi^\beta} \quad (2.11b)$$

Como observado na equação (2.11a), as componentes $K_{\alpha\beta}$ são simétricas já que $\partial \mathbf{M}_\alpha / \partial \xi^\beta = \partial \mathbf{M}_\beta / \partial \xi^\alpha = \partial \mathbf{R} / (\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta)$. O mesmo não pode ser dito sobre as componentes $K_{\cdot\beta}^\alpha$, que não são necessariamente simétricas pois $\partial \mathbf{M}^\alpha / \partial \xi^\beta$ não é necessariamente igual a $\partial \mathbf{M}^\beta / \partial \xi^\alpha$.

As variações infinitesimais dos vetores $d\mathbf{M}_\alpha$ e $d\mathbf{M}^\alpha$ são dadas pelas equações (2.12a) e (2.12b).

$$d\mathbf{M}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{M}_\alpha}{\partial \xi^\beta} d\xi^\beta = \left(\frac{\partial \mathbf{M}_\alpha}{\partial \xi^\beta} \cdot \mathbf{M}^i \right) \mathbf{M}_i d\xi^\beta = \left(\frac{\partial \mathbf{M}_\alpha}{\partial \xi^\beta} \cdot \mathbf{M}^\gamma \right) \mathbf{M}_\gamma d\xi^\beta - K_{\alpha\beta} \mathbf{M}_3 d\xi^\beta \quad (2.12a)$$

$$d\mathbf{M}^\alpha = \frac{\partial \mathbf{M}^\alpha}{\partial \xi^\beta} d\xi^\beta = \left(\frac{\partial \mathbf{M}^\alpha}{\partial \xi^\beta} \cdot \mathbf{M}_i \right) \mathbf{M}^i d\xi^\beta = \left(\frac{\partial \mathbf{M}^\alpha}{\partial \xi^\beta} \cdot \mathbf{M}_\gamma \right) \mathbf{M}^\gamma d\xi^\beta - K_{\beta}^{\alpha} \mathbf{M}_3 d\xi^\beta \quad (2.12b)$$

Da equação (2.12a), defini-se os valores de $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$, que são os *símbolos de Christoffel* do segundo tipo, como mostra a equação (2.13).

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \mathbf{M}^\gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{M}_\alpha}{\partial \xi^\beta} \quad (2.13)$$

Pela definição da equação (2.4), como $\mathbf{M}^\alpha \cdot \mathbf{M}_\gamma$ é constante, sua variação ao longo das coordenadas curvilíneas é nula, ou seja:

$$\frac{\partial (\mathbf{M}^\alpha \cdot \mathbf{M}_\gamma)}{\partial \xi^\beta} = \frac{\partial \mathbf{M}^\alpha}{\partial \xi^\beta} \cdot \mathbf{M}_\gamma + \mathbf{M}^\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{M}_\gamma}{\partial \xi^\beta} = 0 \quad (2.14)$$

A partir da equação (2.14) deduz-se uma forma equivalente para o cálculo dos símbolos de Christoffel, dada pela equação (2.15) e que pode ser substituída na equação (2.12b).

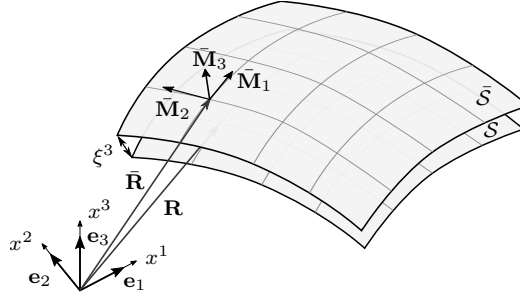
$$\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha = -\mathbf{M}_\gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{M}^\alpha}{\partial \xi^\beta} \quad (2.15)$$

Combinando as equações (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) e (2.15), obtêm-se as equações de (2.16) que são conhecidas como as relações de Gauss e Weingarten da superfície $\mathcal{S}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{M}_3}{\partial \xi^\beta} &= K_{\alpha\beta} \mathbf{M}^\alpha \\ \frac{\partial \mathbf{M}_3}{\partial \xi^\beta} &= K_{\beta}^{\alpha} \mathbf{M}_\alpha \\ \frac{\partial \mathbf{M}_\alpha}{\partial \xi^\beta} &= \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{M}_\gamma - K_{\alpha\beta} \mathbf{M}_3 \\ \frac{\partial \mathbf{M}^\alpha}{\partial \xi^\beta} &= -\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \mathbf{M}^\gamma - K_{\beta}^{\alpha} \mathbf{M}_3 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Analogamente ao que foi deduzido anteriormente para a superfície $\mathcal{S}$, o mesmo pode ser feito para a superfície $\mathcal{S}$, em que os tensores $\mathbf{g}$ e $\boldsymbol{\kappa}$ e os vetores $\mathbf{m}_i$ e $\mathbf{m}^i$ são respectivamente os tensores métrico e de curvatura e os vetores que compõem as bases natural e recíproca da superfície média na configuração atual. Os valores de $\gamma_{\beta\theta}^\alpha$ são os símbolos de Christoffel da superfície na configuração atual. Essas grandezas se relacionam com o vetor posição $\mathbf{r}$ da

Figura 2.3 – Superfície paralela à superfície média na configuração de referência



mesma forma que $\mathbf{G}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}_i$, $\mathbf{M}^i$ e $\Gamma_{\beta\theta}^\alpha$ se relacionam com $\mathbf{R}$, como mostram as equações:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha = \mathbf{m}_\alpha d\xi^\alpha \\ \kappa_{\alpha\beta} &= \mathbf{m}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_3}{\partial \xi^\beta} = -\mathbf{m}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_\alpha}{\partial \xi^\beta} = -\mathbf{m}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_\beta}{\partial \xi^\alpha} \\ \kappa_{\cdot\beta}^\alpha &= \mathbf{m}^\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_3}{\partial \xi^\beta} = -\mathbf{m}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{m}^\alpha}{\partial \xi^\beta} \\ \gamma_{\alpha\beta}^\lambda &= \mathbf{m}^\lambda \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_\alpha}{\partial \xi^\beta} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Além disso, é possível determinar as equações de Gauss e Weingarten para a superfície $\mathcal{S}$, a saber:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{m}_3}{\partial \xi^\beta} &= \kappa_{\alpha\beta} \mathbf{m}^\alpha \\ \frac{\partial \mathbf{m}_3}{\partial \xi^\beta} &= \kappa_{\cdot\beta}^\alpha \mathbf{m}_\alpha \\ \frac{\partial \mathbf{m}_\alpha}{\partial \xi^\beta} &= \gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{m}_\gamma - \kappa_{\alpha\beta} \mathbf{m}_3 \\ \frac{\partial \mathbf{m}^\alpha}{\partial \xi^\beta} &= -\gamma_{\gamma\beta}^\alpha \mathbf{m}^\gamma - \kappa_{\cdot\beta}^\alpha \mathbf{m}_3 \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.1.4 Superfície paralela

Outra superfície importante para a análise da casca é a superfície paralela $\bar{\mathcal{S}}$, caracterizada por estar distante ξ^3 da superfície média $\mathcal{S}$, como mostra a Figura 2.3. Os símbolos que são marcados com uma barra superior representam grandezas relacionadas à superfície paralela. O vetor posição da superfície paralela é dado pela equação (2.19).

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \xi^3 \mathbf{M}_3 \quad (2.19)$$

Combinando as equações (2.9), (2.10) e (2.19), é possível calcular a base natural da superfície paralela ($\bar{\mathbf{M}}_i$), que se relaciona com a base natural da superfície média na configuração de

referência de acordo com a equação (2.20).

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{M}}_\alpha &= \bar{\mathbf{R}}_{,\alpha} = (\delta_\alpha^\beta + \xi^3 K_{,\alpha}^\beta) \mathbf{M}_\beta \\ \bar{\mathbf{M}}_3 &= \bar{\mathbf{R}}_{,3} = \mathbf{M}_3\end{aligned}\quad (2.20)$$

Considerando o tensor $\Upsilon = \Upsilon_{,\alpha}^\beta \mathbf{M}_\beta \otimes \mathbf{M}^\alpha$, cujas componentes são $\Upsilon_{,\alpha}^\beta = \delta_\alpha^\beta + \xi^3 K_{,\alpha}^\beta$ e de modo que $\bar{\mathbf{M}}_\alpha = \Upsilon_{,\alpha}^\beta \mathbf{M}_\beta$, a equação (2.20) pode reescrita na forma (2.21).

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{M}}_\alpha &= \Upsilon \cdot \mathbf{M}_\alpha \\ \Upsilon &= \mathbf{G} + \xi^3 \mathbf{K}\end{aligned}\quad (2.21)$$

Da mesma forma que Υ relaciona os vetores das bases naturais $\bar{\mathbf{M}}_\alpha$ e $\mathbf{M}_\alpha$, pode-se introduzir o tensor $\Lambda = \Lambda_{,\beta}^\alpha \mathbf{M}^\beta \otimes \mathbf{M}_\alpha$, que relaciona os vetores das bases recíprocas $\bar{\mathbf{M}}^\alpha$ e $\mathbf{M}^\alpha$, como mostra a equação:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{M}}^\alpha &= \Lambda \cdot \mathbf{M}^\alpha \\ \bar{\mathbf{M}}^\alpha &= \Lambda_{,\beta}^\alpha \mathbf{M}^\beta \\ \bar{\mathbf{M}}^3 &= \mathbf{M}_3\end{aligned}\quad (2.22)$$

cujas componentes $\Lambda_{,\beta}^\alpha$ são deduzidas seguindo os passos das equações (2.23).

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{M}}_\gamma \cdot \bar{\mathbf{M}}^\alpha &= \bar{\mathbf{M}}_\gamma \cdot \Lambda \cdot \mathbf{M}^\alpha \\ \delta_\gamma^\alpha &= \Upsilon_{,\gamma}^\beta \mathbf{M}_\beta \cdot \Lambda \cdot \mathbf{M}^\alpha \\ \delta_\gamma^\alpha &= \Upsilon_{,\gamma}^\beta \Lambda_{,\beta}^\alpha\end{aligned}\quad (2.23)$$

As equações (2.23) mostram que a matriz formada pelas componentes de Λ é igual a inversa da matriz formada pelas componentes Υ , ou seja $[\Lambda_{,\beta}^\alpha] = [\Upsilon_{,\alpha}^\beta]^{-1}$. Expandindo $[\Upsilon_{,\alpha}^\beta]^{-1}$ em série de Taylor, chega-se a equação (2.24), que é uma forma alternativa para o cálculo dos coeficientes $\Lambda_{,\beta}^\alpha$.

$$\Lambda_{,\beta}^\alpha = \delta_\beta^\alpha - \xi^3 K_{,\beta}^\alpha + (\xi^3)^2 K_{,\gamma}^\alpha K_{,\beta}^\gamma - (\xi^3)^3 K_{,\gamma}^\alpha K_{,\theta}^\gamma K_{,\beta}^\theta + O[(\xi^3)^4] \quad (2.24)$$

Nos casos em que a superfície paralela é próxima à superfície média, ou seja, para pequenos valores de ξ^3 , pode-se aproximar a equação (2.24) na forma:

$$\Lambda_{,\beta}^\alpha \approx \delta_\beta^\alpha - \xi^3 K_{,\beta}^\alpha \quad (2.25)$$

A aproximação (2.25) será adotada na dedução das equações da casca por conta da consideração da hipótese das paredes finas. Analogamente à equação (2.5a), pode-se calcular a base recíproca $\bar{\mathbf{M}}^i$ da superfície paralela de acordo:

$$\bar{\mathbf{M}}_i \times \bar{\mathbf{M}}_j = \epsilon_{ijk} \sqrt{G} \bar{\mathbf{M}}^k \quad (2.26)$$

em que $\sqrt{\bar{G}}$ é a raiz do determinante das componentes covariantes do tensor métrico da superfície paralela, ou seja:

$$\sqrt{\bar{G}} = \sqrt{\det [\bar{\mathbf{M}}_i \cdot \bar{\mathbf{M}}_j]} = \sqrt{G} (1 + \xi^3 K_{,\alpha}^\alpha + (\xi^3)^2 K) \quad (2.27)$$

onde $K = K_{,1}^1 K_{,2}^2 - K_{,2}^1 K_{,1}^2$ é a *curvatura gaussiana* da superfície média.

A superfície $\bar{\mathfrak{s}}$ é paralela à superfície média $\mathfrak{s}$ na configuração atual, e possui propriedades análogas a $\bar{\mathfrak{S}}$, como mostram as equações (2.28):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{m}}_\alpha &= v_{,\alpha}^\beta \mathbf{m}_\beta \\ \bar{\mathbf{m}}^\alpha &= \lambda_\beta^\alpha \mathbf{m}^\beta \\ v_{,\alpha}^\beta &= \delta_\alpha^\beta + \xi^3 \kappa_{,\alpha}^\beta \\ \lambda_\beta^\alpha &\approx \delta_\beta^\alpha - \xi^3 \kappa_{,\beta}^\alpha \\ \sqrt{\bar{g}} &= \sqrt{g} (1 + \xi^3 \kappa_{,\alpha}^\alpha + (\xi^3)^2 \kappa) \\ \kappa &= \kappa_{,1}^1 \kappa_{,2}^2 - \kappa_{,2}^1 \kappa_{,1}^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

ou seja, os vetores $\bar{\mathbf{m}}_i$ e $\bar{\mathbf{m}}^i$ são calculados da mesma forma que os vetores $\bar{\mathbf{M}}_i$ e $\bar{\mathbf{M}}^i$, assim como os tensores $\mathbf{v}$ e $\boldsymbol{\lambda}$ são análogos aos tensores $\boldsymbol{\Upsilon}$ e $\boldsymbol{\Lambda}$. Os valores de $\sqrt{\bar{g}}$ e κ também são calculados de forma análoga aos valores de $\sqrt{G}$ e K .

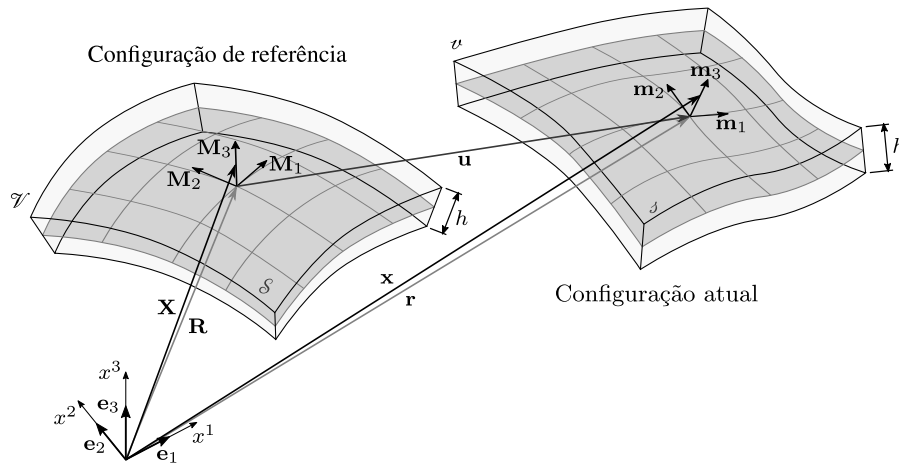
2.2 Cinemática e deformação da casca

Na configuração de referência, enquanto $\mathbf{R}$ representa a posição de um ponto na superfície média, $\mathbf{X}$ representa a posição de um ponto qualquer da casca. Analogamente, os vetores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{x}$ representam, respectivamente, a posição de um ponto na superfície média e a posição de um ponto qualquer da casca, na configuração atual, conforme ilustra a Figura 2.4.

Ao aplicar as hipóteses de Kirchhoff-Love, chega-se às expressões do vetor posição da casca em função do vetor posição da superfície média, conforme a equação (2.29).

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{R} + \xi^3 \mathbf{M}^3 \\ \mathbf{x} &= \mathbf{r} + \xi^3 \mathbf{m}^3 \\ -\frac{h}{2} &\leq \xi^3 \leq \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Figura 2.4 – Movimento da casca da configuração de referência para a configuração atual



Segundo as equações (2.2) e (2.29), para uma dada geometria da superfície média da casca na configuração de referência, definida pelo vetor $\mathbf{R}$, e um dado campo de deslocamento $\mathbf{u}$ da superfície média, pode-se determinar a posição $\mathbf{x}$ de qualquer ponto da casca na configuração atual. Os vetores posição $\mathbf{X}$ e $\mathbf{x}$ são mapeados no espaço tridimensional por meio das coordenadas curvilíneas ξ^1 e ξ^2 em conjunto com a coordenada perpendicular ξ^3 . Os volumes $\mathcal{V}$ e $\mathcal{v}$ contém todos os pontos da casca na configuração de referência e na configuração atual, respectivamente. Nota-se na equação (2.29) que, como $\mathbf{M}^3$ e $\mathbf{m}^3$ são vetores unitários, a espessura da casca permanece constante depois da deformação, seguindo a hipótese de Kirchhoff que diz que as deformações nas direções perpendiculares à superfície média são muito pequenas e podem ser desprezadas. Apesar das equações (2.19) e (2.29) serem semelhantes, optou-se por dar nomenclaturas diferentes a $\mathbf{X}$ e $\bar{\mathbf{R}}$. Enquanto o primeiro vetor diz respeito a um ponto qualquer no espaço do domínio da casca, o segundo diz respeito à superfície paralela à superfície média. Pode-se interpretar que o espaço da casca contém o conjunto de todas as superfícies paralelas ao longo da espessura da casca.

2.2.1 Tensor de deformações de Green-Lagrange

O tensor de Green-Lagrange é uma importante medida das deformações da casca e a chave para a sua dedução é o cálculo do tensor gradiente de deformação $\mathbf{F}$, que relaciona os vetores $d\mathbf{X}$ e $d\mathbf{x}$ de acordo com:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.30)$$

Combinando as equações (2.10), (2.12) e (2.29), é possível calcular um elemento infinitesimal $d\mathbf{X}$ arbitrário da casca na configuração de referência, conforme mostra a equação (2.31).

$$d\mathbf{X} = \bar{\mathbf{M}}_i d\xi^i = \Upsilon_{\alpha}^{\beta} \mathbf{M}_{\beta} d\xi^{\alpha} + \mathbf{M}_3 d\xi^3 \quad (2.31)$$

Analogamente, chega-se a uma expressão equivalente para um elemento infinitesimal $d\mathbf{x}$ arbitrário na configuração atual, conforme mostra a equação (2.32).

$$d\mathbf{x} = \bar{\mathbf{m}}_i d\xi^i = v_{\alpha}^{\beta} \mathbf{m}_{\beta} d\xi^{\alpha} + \mathbf{m}_3 d\xi^3 \quad (2.32)$$

O gradiente de deformação é determinado pelo produto diádico (2.33).

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{m}}_i \otimes \bar{\mathbf{M}}^i \quad (2.33)$$

Substituindo (2.20) e (2.22) em (2.33), e considerando a aproximação da equação (2.25), chega-se a uma expressão aproximada do tensor gradiente de deformação $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &\approx (\delta_{\gamma}^{\alpha} + \xi^3 \kappa_{\gamma}^{\alpha}) \mathbf{m}_{\alpha} \otimes (\delta_{\beta}^{\gamma} - \xi^3 K_{\beta}^{\gamma}) \mathbf{M}^{\beta} + \mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{M}^3 \\ &\approx \mathbf{m}_{\alpha} \otimes \mathbf{M}^{\alpha} + \xi^3 (\kappa_{\beta}^{\alpha} - K_{\beta}^{\alpha}) \mathbf{m}_{\alpha} \otimes \mathbf{M}^{\beta} + \mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{M}^3 \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde foram negligenciados os termos multiplicados por $(\xi^3)^2$. Leva-se em conta uma vez mais a hipótese de paredes finas de Kirchhoff-Love.

Finalmente, defini-se o tensor de deformação de Green-Lagrange por meio da equação (2.35).

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.35)$$

As equações (2.36) mostram o resultado das 9 componentes resultantes do produto $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$.

$$(\mathbf{M}^{\alpha} \otimes \mathbf{m}_{\alpha}) \cdot (\mathbf{m}_{\beta} \otimes \mathbf{M}^{\beta}) = g_{\alpha\beta} \mathbf{M}^{\alpha} \otimes \mathbf{M}^{\beta} \quad (2.36a)$$

$$(\mathbf{M}^{\alpha} \otimes \mathbf{m}_{\alpha}) \cdot (\mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{M}^3) = \mathbf{0} \quad (2.36b)$$

$$(\mathbf{M}^3 \otimes \mathbf{m}_3) \cdot (\mathbf{m}^{\alpha} \otimes \mathbf{M}_{\alpha}) = \mathbf{0} \quad (2.36c)$$

$$(\mathbf{M}^3 \otimes \mathbf{m}_3) \cdot (\mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{M}^3) = g_{33} \mathbf{M}^3 \otimes \mathbf{M}^3 \quad (2.36d)$$

$$(\mathbf{M}^{\alpha} \otimes \mathbf{m}_{\alpha}) \cdot (\xi^3 (\kappa_{\beta}^{\gamma} - K_{\beta}^{\gamma}) \mathbf{m}_{\gamma} \otimes \mathbf{M}^{\beta}) = \xi^3 (\kappa_{\beta}^{\gamma} - K_{\beta}^{\gamma}) g_{\alpha\gamma} \mathbf{M}^{\alpha} \otimes \mathbf{M}^{\beta} \quad (2.36e)$$

$$(\xi^3 (\kappa_{\alpha}^{\gamma} - K_{\alpha}^{\gamma}) \mathbf{M}^{\alpha} \otimes \mathbf{m}_{\gamma}) \cdot (\mathbf{m}_{\beta} \otimes \mathbf{M}^{\beta}) = \xi^3 (\kappa_{\alpha}^{\gamma} - K_{\alpha}^{\gamma}) g_{\beta\gamma} \mathbf{M}^{\alpha} \otimes \mathbf{M}^{\beta} \quad (2.36f)$$

$$(\xi^3 (\kappa_{\alpha}^{\gamma} - K_{\alpha}^{\gamma}) \mathbf{M}^{\alpha} \otimes \mathbf{m}_{\gamma}) \cdot (\xi^3 (\kappa_{\beta}^{\sigma} - K_{\beta}^{\sigma}) \mathbf{m}_{\sigma} \otimes \mathbf{M}^{\beta}) \approx \mathbf{0} \quad (2.36g)$$

$$(\xi^3 (\kappa_{\alpha}^{\beta} - K_{\alpha}^{\beta}) \mathbf{M}^{\alpha} \otimes \mathbf{m}_{\beta}) \cdot (\mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{M}^3) = \mathbf{0} \quad (2.36h)$$

$$(\mathbf{M}^3 \otimes \mathbf{m}_3) \cdot (\xi^3 (\kappa_{\beta}^{\alpha} - K_{\beta}^{\alpha}) \mathbf{m}_{\alpha} \otimes \mathbf{M}^{\beta}) = \mathbf{0} \quad (2.36i)$$

Até aqui, as deduções das equações seguem o que foi descrito primeiramente por [Bower \(2009\)](#). Todavia, na sua expressão do tensor de deformações, [Bower \(2009\)](#) assume que os valores das equações (2.36e) e (2.36f) são iguais. Isso vai contra o trabalho de [Flügge \(1972\)](#) que demonstrou que $K_{\beta}^{\gamma} g_{\alpha\gamma} \neq K_{\alpha}^{\gamma} g_{\beta\gamma}$. Além disso, ao se igualar essas duas equações, o tensor de deformações deixa de ser simétrico. A aproximação (2.36g) leva em conta a hipótese da cascas de paredes finas. Por último, o tensor identidade $\mathbf{I}$, quando descrito na base recíproca, assume a forma:

$$\mathbf{I} = \mathbf{G} = G_{\alpha\beta} \mathbf{M}^{\alpha} \otimes \mathbf{M}^{\beta} + G_{33} \mathbf{M}^3 \otimes \mathbf{M}^3 \quad (2.37)$$

Substituindo (2.36) e (2.37) em (2.35), chega-se a expressão final (2.38) do tensor de deformações de Green-Lagrange para cascas finas.

$$\mathbf{E} \approx \gamma_{\alpha\beta} \mathbf{M}^{\alpha} \otimes \mathbf{M}^{\beta} + \xi^3 \rho_{\alpha\beta} \mathbf{M}^{\alpha} \otimes \mathbf{M}^{\beta} \quad (2.38)$$

Como $\mathbf{m}_3$ e $\mathbf{M}_3$ são vetores unitários, conclui-se que $g_{33} = G_{33} = 1$. Por isso o termo $\frac{1}{2} (g_{33} - G_{33}) \mathbf{M}^3 \otimes \mathbf{M}^3$, que representa a variação da espessura da casca, é igual a zero – e também como consequência direta da aplicação das hipóteses de Kirchhoff-Love na equação (2.29). Assim como na definição do gradiente de deformação, também são negligenciados na equação (2.38) os termos em que aparece $(\xi^3)^2$. Os valores de $\gamma_{\alpha\beta}$ e $\rho_{\alpha\beta}$ são, respectivamente, as componentes dos tensores de alongamento (*stretching*) e de flexão (*bending*), dadas pelas equações (2.39a) e (2.39b).

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}) \quad (2.39a)$$

$$\rho_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta} - K_{\alpha\beta} - (c_1 K_{\alpha}^{\sigma} \gamma_{\beta\sigma} + c_2 K_{\beta}^{\sigma} \gamma_{\alpha\sigma}) \quad (2.39b)$$

Até aqui foi feita uma dedução utilizando uma abordagem mecânico geométrica por meio das hipóteses de Kirchhoff-Love e pelas aproximações típicas da mecânica dos sólidos. Não há controvérsia na definição do tensor de alongamento e todas as teorias concordam com a definição apresentada (2.39a). Todavia, o mesmo não acontece com as componentes do tensor de flexão. Expressões diferentes da que foi deduzida em (2.39b) podem ser encontradas na literatura e estão condensadas nas equações (2.40). Os parâmetros c_1 e c_2 foram introduzidos na expressão (2.39b) para obter uma expressão genérica que atenda tanto às expressões encontradas na literatura quanto à obtida neste trabalho. Seguindo a dedução apresentada neste seção, os valores desses coeficientes são $c_1 = c_2 = 1$.

$$\begin{aligned}
\rho_{\alpha\beta} &= (\kappa_{\alpha}^{\sigma} - K_{\alpha}^{\sigma}) g_{\sigma\beta} & (\text{Bower, 2009}) \\
\rho_{\alpha\beta} &= \kappa_{\alpha\beta} - K_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha}^{\sigma} \gamma_{\sigma\beta} & (\text{Flügge, 1972}) \\
\rho_{\alpha\beta} &= \kappa_{\alpha\beta} - K_{\alpha\beta} & (\text{Koiter, 1960}) \\
\rho_{\alpha\beta} &= \kappa_{\alpha\beta} - K_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (K_{\alpha}^{\sigma} \gamma_{\sigma\beta} + K_{\beta}^{\tau} \gamma_{\tau\alpha}) & (\text{Budiansky; Sanders, 1962})
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Em comum, cada uma dessas expressões em (2.40) busca calcular a variação da curvatura antes e após a deformação. Matematicamente, as definições apresentadas por Bower (2009) e Flügge (1972) são equivalentes, apesar dos autores terem chegado a elas de formas diferentes. Bower (2009) faz um procedimento similar ao que foi apresentado aqui, calculando o tensor de deformações por meio do gradiente de deformação; mas ele ignora a diferença entre as equações (2.36e) e (2.36e), como já foi discutido. Flügge (1972) argumenta que a melhor forma de representar o tensor de flexão é por meio da diferença entre as componentes mistas dos tensores de curvatura, já que nesse sistema de referência as componentes do tensor métrico independem da deformação. Ao propor isso, uma expressão muito parecida com (2.39b) é encontrada, onde $c_1 = 2$ e $c_2 = 0$. Em contrapartida, o tensor de flexão resultante não é simétrico, violando uma regra básica da teoria da elasticidade.

Budiansky e Sanders (1962) apresentam alternativas à expressão de Koiter (1960) para o tensor de flexão. Para os autores, apesar de não haver uma equação definitiva para a medida do tensor de flexão, o tensor de alongamento da superfície deveria, em tese, estar presente na fórmula. Os autores chegaram a uma expressão em que $c_1 = c_2 = 1/2$ na equação (2.39b), que está em acordo com às equações propostas anteriormente por Sanders (1959) para um sistema de coordenadas ortogonais. Por este e outros motivos, a teoria foi classificada por eles mesmos como a “melhor” para cascas finas.

Para deduzir sua teoria de cascas finas, Koiter (1960) parte de uma expressão da densidade de energia de deformação para um corpo submetido ao estado plano de tensões e descrito em coordenadas curvilíneas (ξ^1, ξ^2 e ξ^3). Ao expandir a densidade de energia em série de Taylor em torno de $\xi^3 = 0$, considerando que o corpo é uma casca fina, e eliminado os termos $(\xi^3)^i$ quando $i \geq 2$, o autor é capaz de deduzir sua expressão para o tensor de deformações. Ciarlet (2005) chegou à mesma expressão de Koiter, em que $c_1 = c_2 = 0$, por meio de uma análise assintótica do problema tridimensional da casca quando a espessura tende a zero. Ainda segundo Ciarlet (2005), é extraordinário que Koiter tenha chegado às mesmas equações da análise assintótica

tendo adotado premissas puramente mecânicas e geométricas.

Koiter (1960) traz uma importante discussão sobre as teorias que se propõem serem “melhores” que a sua, mas que também são derivadas das mesmas hipóteses de Kirchhoff-Love. Para ele, qualquer refinamento na teoria de cascas finas que não leve em consideração os efeitos das tensões transversais é insignificante, já que os efeitos da consideração do estado plano de tensões seriam mais importantes, do ponto de vista energético, do que os supostos melhoramentos na parcela de flexão do tensor de deformações.

2.2.2 Relações deformação-deslocamento

O tensor de deformações de Green-Lagrange deduzido anteriormente depende de propriedades geométricas da superfície média nas configurações de referência e atual – notadamente dos valores de $G_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}$ e $\kappa_{\alpha\beta}$ que aparecem nas expressões de $\gamma_{\alpha\beta}$ e $\rho_{\alpha\beta}$ nas equações (2.39). Na configuração de referência, essas propriedades dependem unicamente da geometria da superfície média na configuração de referência enquanto, na configuração atual, elas variam com o campo de deslocamentos $\mathbf{u}$ decomposto na base recíproca como:

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{M}^i \quad (2.41)$$

em que u_i são as componentes covariantes do vetor $\mathbf{u}$. A primeira derivada do vetor de deslocamentos é dada pela equação (2.42).

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{,\alpha} &= u_{i,\alpha} \mathbf{M}^i + u_i \mathbf{M}^i_{,\alpha} \\ &= (u_{\sigma,\alpha} - \Gamma_{\sigma\alpha}^\tau u_\tau + K_{\alpha\sigma} u_3) \mathbf{M}^\sigma + (u_{3,\alpha} - K_{\alpha}^\tau u_\tau) \mathbf{M}^3 \end{aligned} \quad (2.42)$$

A notação das *derivadas covariantes* é uma forma de se reduzir o tamanho das expressões que envolvem derivadas dos campos de superfície. Utilizando esse conceito, é possível reescrever (2.42) na forma compacta

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{,\alpha} &= u_{i|\alpha} \mathbf{M}^i \\ u_{\sigma|\alpha} &= u_{\sigma,\alpha} - \Gamma_{\sigma\alpha}^\tau u_\tau + K_{\alpha\sigma} u_3 \\ u_{3|\alpha} &= u_{3,\alpha} - K_{\alpha}^\tau u_\tau \end{aligned} \quad (2.43)$$

sendo $u_{i|\alpha}$ as componentes da derivada covariante, que é um tensor de segunda ordem que relaciona os vetores $\mathbf{u}_{,\alpha}$ e $\mathbf{M}^i$.

A segunda derivada do vetor de deslocamentos é dada pela equação

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{,\alpha\beta} = & \left(u_{\sigma,\alpha\beta} - (\Gamma_{\sigma\alpha}^\tau)_{,\beta} u_\tau - \Gamma_{\sigma\alpha}^\tau u_{\tau,\beta} + K_{\alpha\sigma,\beta} u_3 + K_{\alpha\sigma} u_{3,\beta} \right) \mathbf{M}^\sigma \\ & + (u_{\sigma,\alpha} - \Gamma_{\sigma\alpha}^\tau u_\tau + K_{\alpha\sigma} u_3) (-\Gamma_{\beta\lambda}^\sigma \mathbf{M}^\lambda - K_{\beta}^\sigma \mathbf{M}^3) \\ & + (u_{3,\alpha\beta} - K_{\alpha,\beta}^\tau u_\tau - K_{\alpha}^\tau u_{\tau,\beta}) \mathbf{M}^3 \\ & + (u_{3,\alpha} - K_{\alpha}^\tau u_\tau) (K_{\lambda\beta} \mathbf{M}^\lambda) \end{aligned} \quad (2.44)$$

que, por sua vez, também pode ser reescrita de forma compacta utilizando as derivadas covariantes, como mostra a equação (2.45).

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{,\alpha\beta} = & ((u_{\sigma|\alpha})_{,\beta} - \Gamma_{\beta\sigma}^\tau u_{\tau|\alpha} + K_{\sigma\beta} u_{3|\alpha}) \mathbf{M}^\sigma + ((u_{3|\alpha})_{,\beta} - K_{\beta}^\tau u_{\tau|\alpha}) \mathbf{M}^3 \\ = & u_{\sigma|\alpha\beta} \mathbf{M}^\sigma + u_{3|\alpha\beta} \mathbf{M}^3 = u_{i|\alpha\beta} \mathbf{M}^i \end{aligned} \quad (2.45)$$

O vetor de deslocamentos também pode ser decomposto na base natural, conforme mostra a equação:

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{M}_i \quad (2.46)$$

em que u^i são as componentes contravariantes do vetor de deslocamentos. Similar ao que foi demonstrado anteriormente, as derivadas do vetor de deslocamento podem ser descritas por expressões análogas às das equações (2.43) e (2.45), mas que envolvem as componentes contravariantes de $\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{,\alpha} &= u^i|_{\alpha} \mathbf{M}_i \\ \mathbf{u}_{,\alpha\beta} &= u^i|_{\alpha\beta} \mathbf{M}_i \end{aligned} \quad (2.47)$$

em que as componentes da derivada covariante são dadas por:

$$\begin{aligned} u^\sigma|_{\alpha} &= u_{,\alpha}^\sigma - \Gamma_{\alpha\tau}^\sigma u^\tau + K_{\alpha}^\sigma u_3 \\ u^3|_{\alpha} &= u_{,\alpha}^3 - K_{\tau\alpha} u^\tau \end{aligned} \quad (2.48)$$

Dadas as propriedades do tensor métrico apresentadas na Seção 2.1.2, pode-se deduzir que as componentes do tensor derivada covariante de $\mathbf{u}$ se relacionam entre si na forma $u^i|_{\alpha} = G^{ki} u_{k|\alpha}$ e $u_{i|\alpha} = G_{ki} u^k|_{\alpha}$. Também é possível provar que $u^3|_{\alpha} = u_{3|\alpha}$.

Os vetores tangentes da superfície média $\mathfrak{s}$ na configuração atual são calculados pelas equações (2.49).

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_\alpha &= \mathbf{M}_\alpha + \mathbf{u}_{,\alpha} \\ &= (\delta_\alpha^i + u^i|_{\alpha}) \mathbf{M}_i \\ &= (G_{\alpha i} + u_{i|\alpha}) \mathbf{M}^i \end{aligned} \quad (2.49)$$

O vetor normal $\mathbf{m}_3$ é calculado da mesma forma que $\mathbf{M}_3$, ou seja, é um vetor unitário perpendicular a $\mathbf{m}_1$ e $\mathbf{m}_2$, de acordo com a equação (2.50).

$$\mathbf{m}_3 = \frac{\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2}{\sqrt{g}} \quad (2.50)$$

As componentes de $\mathbf{m}_3$ em relação às bases $\mathbf{M}_i$ e $\mathbf{M}^i$ são dadas pelos valores de μ^k e μ_k , como mostra a equação (2.51).

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_3 &= \mu_k \mathbf{M}^k = \mu^k \mathbf{M}_k \\ \mu_k &= \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}} (\delta_1^i + u^i|_1) (\delta_2^j + u^j|_2) \epsilon_{ijk} \\ \mu^k &= G^{pk} \mu_p \end{aligned} \quad (2.51)$$

As componentes covariantes do tensor métrico g da superfície média na configuração atual aparecem no cálculo do tensor de alongamento e são calculadas pela equação:

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{m}_\alpha \cdot \mathbf{m}_\beta \quad (2.52)$$

que pode ser reescrita substituindo a equação (2.49) em (2.52), resultando na expressão (2.53).

$$g_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} + u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha} + u^p|_\alpha u_{p|\beta} \quad (2.53)$$

As componentes $\kappa_{\alpha\beta}$ aparecem na expressão do tensor de flexão e são calculadas de forma análoga à equação (2.11), ou seja:

$$\kappa_{\alpha\beta} = -\mathbf{m}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_\alpha}{\partial \beta} \quad (2.54)$$

e dependem das derivadas dos vetores tangentes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{m}_\alpha}{\partial \beta} &= \frac{\partial \mathbf{M}_\alpha}{\partial \beta} + \mathbf{u}_{,\alpha\beta} \\ &= \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{M}_\gamma - K_{\alpha\beta} \mathbf{M}_3 + u_{i|\alpha\beta} \mathbf{M}^i \end{aligned} \quad (2.55)$$

Substituindo (2.55) e (2.51) em (2.54), chega-se à expressão das componentes covariantes do tensor de curvatura da superfície média na configuração atual, dada por (2.56).

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta} &= -\mu_k \mathbf{M}^k \cdot (\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{M}_\gamma - K_{\alpha\beta} \mathbf{M}_3 + u_{m|\alpha\beta} \mathbf{M}^m) \\ &= -\mu_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + \mu_3 K_{\alpha\beta} - \mu^m u_{m|\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Os símbolos de Christoffel são determinados pela equação

$$\gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \mathbf{m}^\lambda \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_\alpha}{\partial \beta} \quad (2.57)$$

Finalmente, substituindo as equações (2.53) e (2.56) em (2.39), é possível calcular as componentes de alongamento e flexão do tensor de deformações em função dos deslocamentos da superfície média, dados por (2.58a) e (2.58b), respectivamente. Essas equações são exatas no sentido em que apenas as aproximações das hipóteses de Kirchhoff-Love foram consideradas para determiná-las.

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha} + u^p|_{\alpha} u_{p|\beta}) \quad (2.58a)$$

$$\rho_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta} (\mu_3 - 1) - \mu_{\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} - \mu^m u_{m|\alpha\beta} - (c_1 K_{\alpha}^{\sigma} \gamma_{\beta\sigma} + c_2 K_{\beta}^{\sigma} \gamma_{\alpha\sigma}) \quad (2.58b)$$

2.2.3 Aproximações consideradas

Apesar de as duas equações de (2.58) serem não lineares, a equação (2.58b) é especialmente complexa já que lida com termos não lineares de alta ordem e ainda envolve o cálculo de $\sqrt{g}$. Uma forma de simplificá-la é expandir as componentes $\rho_{\alpha\beta}$ em série de Taylor até os termos não lineares quadráticos. O resultado dessa expansão é:

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\beta} = & (\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} u_{3|\sigma} - u_{3|\alpha\beta}) (1 - u^{\tau}|_{\tau}) \\ & - (c_1 K_{\alpha}^{\sigma} \gamma_{\beta\sigma} + c_2 K_{\beta}^{\sigma} \gamma_{\alpha\sigma}) \\ & - K_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} (u^{\tau}|_{\tau})^2 - \frac{\gamma}{G} \right) \\ & - (u^{\tau}|_{\tau} u_{3|\alpha\beta} - u_{3|\tau} u^{\tau}|_{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (2.59)$$

em que γ é o determinante da matriz formada pelas componentes do tensor de alongamento $[\gamma_{\alpha\beta}]$.

Mesmo com a aproximação (2.59), o cálculo das deformações ainda seria muito custoso computacionalmente devido ao alto grau de acoplamento entre os campos de deslocamentos nos termos não lineares. Muitos autores negligenciam os termos não lineares do tensor de flexão argumentando que eles possuem uma pequena influência na resposta da casca quando a amplitude dos deslocamentos é da ordem de poucas vezes a espessura da casca (Yamaki; Simites, 1985; Amabili; Païdoussis, 2003; Amabili, 2005; Amabili; Balasubramanian, 2020). De fato, em casca finas, a influência energética do tensor de flexão neste nível de amplitude de deslocamentos é bem menor que a influência do tensor de alongamento. Aplicando essa aproximação,

chega-se às equações:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha} + u^p|_{\alpha} u_{p|\beta}) \quad (2.60a)$$

$$\rho_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} u_{3|\gamma} - u_{3|\alpha\beta} - (c_1 K_{\alpha}^{\sigma} \gamma_{\beta\sigma} + c_2 K_{\beta}^{\sigma} \gamma_{\alpha\sigma}) \quad (2.60b)$$

Além disso, outra aproximação válida em muitos casos consiste em considerar que a magnitude dos deslocamentos de membrana é muito menor que a espessura da casca e que a magnitude do deslocamento transversal, e, por isso, apenas os termos não lineares que dependem de u_3 são considerados, resultando na seguinte equação:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha} + G^{\sigma\lambda} K_{\alpha\sigma} K_{\beta\lambda} u_3^2 + u_{3,\alpha} u_{3,\beta}) \quad (2.61a)$$

$$\rho_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} u_{3|\gamma} - u_{3|\alpha\beta} - \frac{1}{2} (c_1 K_{\alpha}^{\sigma} (u_{\beta|\sigma} + u_{\sigma|\beta}) + c_2 K_{\beta}^{\sigma} (u_{\alpha|\sigma} + u_{\sigma|\alpha})) \quad (2.61b)$$

A hipótese descrita anteriormente – de que os deslocamentos de membrana são muito pequenos e, por isso, os termos não lineares que dependem deles podem ser desconsiderados nas componentes dos tensores de alongamento e flexão – é denominada por [Amabili \(2008\)](#) como *hipótese de Donnell*, visto que foi primeiramente introduzida por [Donnell \(1933\)](#). Embora [Donnell \(1933\)](#) tenha elaborado uma teoria para o estudo de cascas abatidas em que outras aproximações além desta foram consideradas, a hipótese de Donnell já foi aplicada ao estudo de cascas cilíndricas geometricamente não abatidas, apresentando resultados próximos aos de teorias que não consideram tal simplificação ([Amabili, 2003](#)).

Casca abatidas também são alvo de simplificações devido às suas particularidades ([Vorovich, 1999](#)). Nos casos de *cascas geometricamente abatidas*, além das aproximações consideradas em (2.61), assume-se que os valores das componentes de curvatura $K_{\beta\lambda}$ e K_{λ}^{β} são muito pequenos e, por isso, os termos que dependem deles podem ser desconsiderados. Por conseguinte, considera-se também válida a aproximação $u_{3|\alpha} \approx u_{3,\alpha}$, resultando em:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha} + u_{3,\alpha} u_{3,\beta}) \quad (2.62a)$$

$$\rho_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} u_{3,\gamma} - u_{3,\alpha\beta} \quad (2.62b)$$

Segundo [Vorovich \(1999\)](#), a aproximação empregada nas equações (2.62) também pode ser aplicada a *cascas fisicamente abatidas*, isto é, cascas em que a curvatura não é necessariamente pequena, mas cuja aproximação $u_{3|\alpha} \approx u_{3,\alpha}$ continua válida. Em outras palavras, pode-se dizer que cascas fisicamente abatidas são aquelas em que as deformações são carac-

terizadas por grandes rotações ($u_{3,\alpha}$) e pequenos deslocamentos (u_3) – e que, portanto, o termo $G^{\sigma\lambda}K_{\alpha\sigma}K_{\beta\lambda}u_3^2$, que aparece na equação (2.61b), pode ser negligenciado.

No estudo de cascas geometricamente abatidas, ainda há o caso particular de *cascas propriamente abatidas*, cuja superfície média é próxima do plano, e que foi a classe de cascas estudada pelos fundadores das primeiras teorias aplicadas cascas abatidas como as teorias de Marguerre, Vlasov, Chien e Feodos'ev (Vorovich, 1999). Nestes casos, a métrica da superfície média pode ser aproximada pela métrica do plano, levando a novas simplificações.

Por último, quando os deslocamentos são muito pequenos, ou seja, de magnitude muito menor que a espessura da casca, pode-se realizar uma análise linear, em que as deformações são dadas por:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) \quad (2.63a)$$

$$\rho_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} u_{3|\gamma} - u_{3|\alpha\beta} - (c_1 K_{\alpha}^{\sigma} \gamma_{\beta\sigma} + c_2 K_{\beta}^{\sigma} \gamma_{\alpha\sigma}) \quad (2.63b)$$

2.2.4 Velocidade e aceleração da casca

O vetor velocidade $\mathbf{v}$ de um ponto da superfície média da casca é dado pela derivada no tempo do vetor posição, ou seja

$$\mathbf{v} = \dot{u}_i \mathbf{M}^i \quad (2.64)$$

Apesar da equação (2.64) ser uma forma direta do cálculo do vetor velocidade, é conveniente na análise da casca decompô-lo na forma $\mathbf{v} = v_i \mathbf{m}^i$. Pode-se determinar como as componentes $\dot{u}_i$ e v_i se relacionam entre si combinando as equações (2.49) e (2.64), como mostra a equação (2.65).

$$\dot{u}_k = v_{\alpha} (G_{\alpha k} + u_{k|\alpha}) + v_3 \mu_k \quad (2.65)$$

Já a velocidade de um ponto qualquer da casca é dada pela derivada da equação (2.29), ou seja:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} + \xi^3 \dot{\mathbf{m}}_3 \quad (2.66)$$

O vetor $\mathbf{m}_3$ é por definição um vetor unitário e não sofre variações de magnitude ao longo do tempo. Por isso, seu movimento pode ser caracterizado como de corpo rígido, sendo sua

derivada no tempo quantificada por meio da velocidade angular ω , como mostra a equação:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{m}}_3 &= \omega \times \mathbf{m}_3 \\ \omega \cdot \mathbf{m}_3 &= 0\end{aligned}\tag{2.67}$$

Derivando $\mathbf{m}_3$ no tempo, chega-se a:

$$\dot{\mathbf{m}}_3 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2}{\sqrt{g}} \right) = \frac{\dot{\mathbf{m}}_1 \times \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_1 \times \dot{\mathbf{m}}_2}{\sqrt{g}} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right) \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2\tag{2.68}$$

que depende da derivada no tempo dos vetores tangentes, calculadas pela equação (2.69).

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{m}}_\alpha &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^\alpha} = \mathbf{v}_{,\alpha} = v_{\beta,\alpha} \mathbf{m}^\beta + v_{3,\alpha} \mathbf{m}^3 + v_\beta \mathbf{m}_{,\alpha}^\beta + v_3 \mathbf{m}_{,\alpha}^3 \\ &= \left(v_{\theta,\alpha} + v_3 \kappa_{\theta\alpha} - v_\beta \gamma_{\alpha\theta}^\beta \right) \mathbf{m}^\theta + \left(v_{3,\alpha} - v_\theta \kappa_{\cdot\alpha}^\theta \right) \mathbf{m}^3\end{aligned}\tag{2.69}$$

Como o vetor $\dot{\mathbf{m}}_3$ é perpendicular a $\mathbf{m}_3$, ele possui componentes apenas na direção dos vetores tangentes. Desta forma, substituindo (2.69) em (2.68), pode-se escrever os vetores $\dot{\mathbf{m}}_3$ e ω como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{m}}_3 &= \dot{\mu}_\alpha \mathbf{m}^\alpha = \dot{\mu}^\alpha \mathbf{m}_\alpha \\ \omega &= \dot{\mu}_\alpha \mathbf{m}_3 \times \mathbf{m}^\alpha = \dot{\mu}^\alpha \mathbf{m}_3 \times \mathbf{m}_\alpha \\ \dot{\mu}_\alpha &= -\mathbf{m}_3 \cdot \dot{\mathbf{m}}_\alpha = -\left(v_{3,\alpha} - v_\theta \kappa_{\cdot\alpha}^\theta \right) \\ \dot{\mu}^\alpha &= g^{\alpha\beta} \dot{\mu}_\beta\end{aligned}\tag{2.70}$$

em que $\dot{\mu}_\alpha$ e $\dot{\mu}^\alpha$ são as componentes covariante e contravariante da velocidade angular do vetor $\mathbf{m}_3$. Vale ressaltar que $\dot{\mu}_\alpha$ são as componentes de um vetor de velocidade, mas não são iguais as derivadas no tempo das componente μ_α .

As derivadas no tempo dos vetores da base $\bar{\mathbf{m}}_i$ da superfície paralela são dadas pelas equações:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{m}}}_\alpha &= \dot{\mathbf{x}}_{,\alpha} = \dot{\mathbf{m}}_\alpha + \xi^3 \dot{\mathbf{m}}_{3,\alpha} \\ \dot{\bar{\mathbf{m}}}_3 &= \dot{\mathbf{x}}_{,3} = \dot{\mathbf{m}}_3\end{aligned}\tag{2.71}$$

que dependem de $\dot{\mathbf{m}}_{3,\alpha}$. Para calcular esses vetores, é introduzido o tensor $\mathring{\kappa}$ que relaciona a variação $d\dot{\mathbf{m}}_3$ com a variação $d\mathbf{r}$ como mostra:

$$\begin{aligned}d\dot{\mathbf{m}}_3 &= \mathring{\kappa} \cdot d\mathbf{r} \\ d\dot{\mathbf{m}}_3 &= \mathring{\kappa}_{\cdot\beta}^\alpha d\xi^\beta \mathbf{m}_\alpha \\ d\dot{\mathbf{m}}_3 &= \mathring{\kappa}_{\alpha\beta} d\xi^\beta \mathbf{m}^\alpha\end{aligned}\tag{2.72}$$

onde as componentes de $\mathring{\kappa}$ são calculadas de acordo com a equação:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{m}}_3}{\partial \xi^\beta} = \mathring{\kappa}_{\alpha\beta} \mathbf{m}^\alpha = \mathring{\kappa}_{\cdot\beta}^\alpha \mathbf{m}_\alpha = \left(\dot{\mu}_{\alpha,\beta} - \dot{\mu}_\lambda \gamma_{\alpha\beta}^\lambda \right) \mathbf{m}^\alpha\tag{2.73}$$

Vale ressaltar que os valores de $\dot{\kappa}_{\alpha\beta}$ e $\dot{\kappa}_{\cdot\beta}^\alpha$ são as componentes covariante e mistas do tensor $\dot{\kappa}$, e não são as derivadas no tempo de $\kappa_{\alpha\beta}$ e $\kappa_{\cdot\beta}^\alpha$. Substituindo (2.73) em (2.71), chega-se a:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{m}}_\alpha &= \left(v_{\theta,\alpha} + v_3 \kappa_{\theta\alpha} - v_\beta \gamma_{\alpha\theta}^\beta + \xi^3 \dot{\kappa}_{\theta\alpha} \right) \mathbf{m}^\theta + \left(v_{3,\alpha} - v_\theta \kappa_{\cdot\alpha}^\theta \right) \mathbf{m}^3 \\ \dot{\mathbf{m}}_3 &= \dot{\mathbf{m}}_3\end{aligned}\quad (2.74)$$

A aceleração em um ponto qualquer da casca é a segunda derivada com relação ao tempo do vetor posição da casca:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{r}} + \xi^3 \ddot{\mathbf{m}}_3 \quad (2.75)$$

onde o vetor $\ddot{\mathbf{r}} = a^i \mathbf{m}_i = a_i \mathbf{m}^i$ é a aceleração da superfície média. Como o movimento do vetor $\mathbf{m}_3$ pode ser entendido como um movimento de corpo rígido, sua aceleração é dada por:

$$\ddot{\mathbf{m}}_3 = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{m}_3 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}_3) \quad (2.76)$$

onde $\boldsymbol{\alpha}$ é a aceleração angular do vetor $\mathbf{m}_3$, dada por:

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\mu}_\alpha \mathbf{m}_3 \times \mathbf{m}^\alpha = \ddot{\mu}^\alpha \mathbf{m}_3 \times \mathbf{m}_\alpha \quad (2.77)$$

Os valores de $\ddot{\mu}_\alpha$ e $\ddot{\mu}^\alpha$ são as componentes covariante e contravariante de $\boldsymbol{\alpha}$, respectivamente. Substituindo (2.77) e (2.70), a aceleração de $\mathbf{m}_3$ é dada por:

$$\ddot{\mathbf{m}}_3 = \ddot{\mu}^\beta \mathbf{m}_\beta - \dot{\mu}^\alpha \dot{\mu}_\alpha \mathbf{m}_3 \quad (2.78)$$

2.2.5 Gradiente de velocidade

O gradiente de velocidade $\mathbf{L}$ é um tensor importante na análise da casca por que forma um par energeticamente conjugado com o tensor de tensões de Cauchy. Esse tensor relaciona a variação da velocidade em um ponto da casca com a variação da sua posição na configuração atual, como mostra a equação (2.79).

$$d\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.79)$$

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{m}}_i \otimes \bar{\mathbf{m}}^i$$

Substituindo (2.71) e (2.22) em (2.79), pode-se reescrever o tensor gradiente de velocidade como:

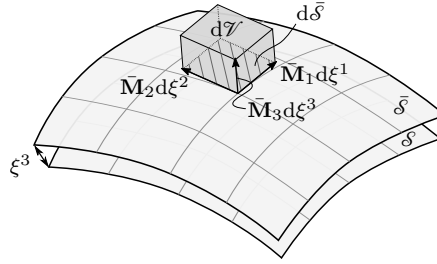
$$\mathbf{L} = (\dot{\mathbf{m}}_\alpha + \xi^3 \dot{\kappa}_{\alpha\beta} \mathbf{m}^\beta) \otimes (\mathbf{m}^\alpha - \xi^3 \kappa_{\cdot\alpha}^\beta \mathbf{m}^\beta) + \dot{\mathbf{m}}_3 \otimes \mathbf{m}^3 \quad (2.80)$$

que depende da velocidade e da posição da superfície média na configuração atual.

2.3 Elemento infinitesimal da casca

A Figura 2.5 mostra o elemento infinitesimal de volume $d\mathcal{V}$ da casca e o elemento infinitesimal de área $d\bar{\mathcal{S}}$ da superfície paralela na configuração de referência.

Figura 2.5 – Elemento infinitesimal de volume e de área da casca



Integrações ao longo do volume da casca, da área a superfície média ou da seção transversal são muitas vezes necessárias na análise da casca. A integral ao longo da superfície $\bar{\mathcal{S}}$ e $\mathcal{S}$ são dadas por:

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\mathcal{S}}} d\bar{\mathcal{S}} &= \iint_{\Omega} (\bar{\mathbf{M}}_1 \times \bar{\mathbf{M}}_2) \cdot \bar{\mathbf{M}}_3 d\xi^1 d\xi^2 = \iint_{\Omega} (1 + \xi^3 K_{,\alpha}^\alpha + (\xi^3)^2 K) \sqrt{G} d\xi^1 d\xi^2 \\ \int_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} &= \iint_{\Omega} (\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2) \cdot \mathbf{M}_3 d\xi^1 d\xi^2 = \iint_{\Omega} \sqrt{G} d\xi^1 d\xi^2 \end{aligned} \quad (2.81)$$

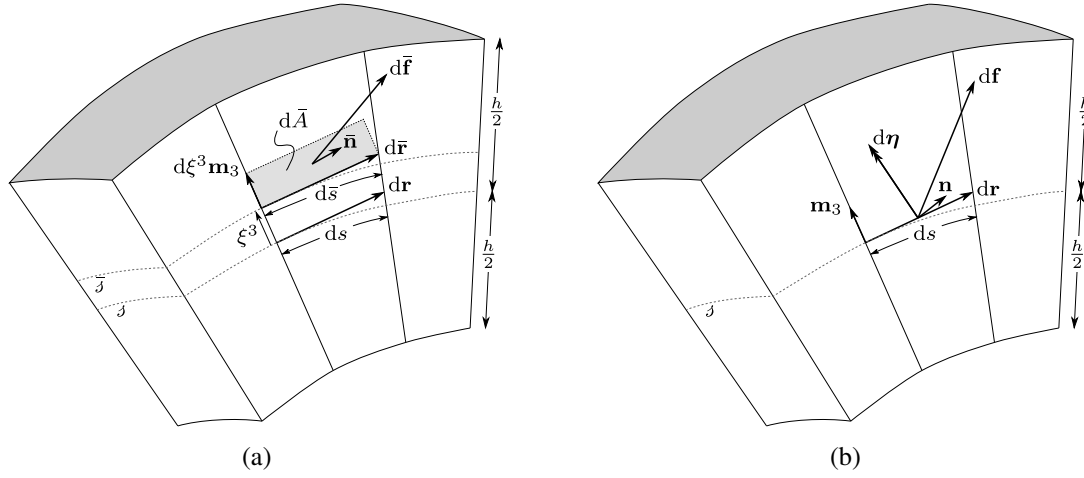
A integral no volume da casca é dada por:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} &= \iint_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{\mathbf{M}}_1 \times \bar{\mathbf{M}}_2) \cdot \bar{\mathbf{M}}_3 d\xi^3 d\xi^1 d\xi^2 \\ &= \int_{\mathcal{S}} \int_{-h/2}^{h/2} (1 + \xi^3 K_{,\alpha}^\alpha + (\xi^3)^2 K) d\xi^3 d\mathcal{S} \end{aligned} \quad (2.82)$$

De forma análoga, as mesmas integrais mostradas nas equações (2.81) e (2.82) podem ser avaliadas na configuração atual, resultando nas equações (2.83).

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\mathcal{S}}} d\bar{\mathcal{S}} &= \iint_{\Omega} (\bar{\mathbf{m}}_1 \times \bar{\mathbf{m}}_2) \cdot \bar{\mathbf{m}}_3 d\xi^1 d\xi^2 = \iint_{\Omega} (1 + \xi^3 \kappa_{,\alpha}^\alpha + (\xi^3)^2 \kappa) \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 \\ \int_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} &= \iint_{\Omega} (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2) \cdot \mathbf{m}_3 d\xi^1 d\xi^2 = \iint_{\Omega} \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 \\ \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} &= \iint_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{\mathbf{m}}_1 \times \bar{\mathbf{m}}_2) \cdot \bar{\mathbf{m}}_3 d\xi^3 d\xi^1 d\xi^2 \\ &= \int_{\mathcal{S}} \int_{-h/2}^{h/2} (1 + \xi^3 \kappa_{,\alpha}^\alpha + (\xi^3)^2 \kappa) d\xi^3 d\mathcal{S} \end{aligned} \quad (2.83)$$

Figura 2.6 – Forças e momentos resultantes em uma seção infinitesimal da casca. Em (a) a força resultante em um elemento infinitesimal de área na seção transversal; e em (b) os esforços internos resultantes das tensões ao longo da espessura da casca



2.4 Tensões e esforços internos

Os esforços internos medem as forças e momentos resultantes das tensões atuantes na casca na configuração atual. Seja um elemento de área infinitesimal de seção transversal da casca na configuração atual, conforme mostra a Figura 2.6(a). A força resultante na área $d\bar{A}$, proveniente das tensões σ , é dada pelo vetor $d\bar{\mathbf{f}}$ de acordo com a equação (2.84).

$$d\bar{\mathbf{f}} = \sigma \cdot \bar{\mathbf{n}} d\bar{A} \quad (2.84)$$

O tensor de tensões de Cauchy $\sigma = \sigma^{ij} \bar{\mathbf{m}}_i \otimes \bar{\mathbf{m}}_j$ mede o estado de tensões de um ponto do corpo em relação à configuração deformada. O vetor $\bar{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário perpendicular ao elemento de área $d\bar{A}$ e é calculado pela equação (2.85).

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{n}} d\bar{A} &= d\bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{m}_3 d\xi^3 \\ \bar{\mathbf{n}} d\bar{A} &= \bar{\mathbf{m}}_\alpha d\xi^\alpha \times \mathbf{m}_3 d\xi^3 \\ \bar{\mathbf{n}} d\bar{A} &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{\mathbf{m}}^\beta \sqrt{g} d\xi^\alpha d\xi^\beta \end{aligned} \quad (2.85)$$

Expandindo o tensor σ e substituindo as equações (2.20), (2.26) e (2.85) na equação (2.84), chega-se a equação (2.86).

$$\begin{aligned} d\bar{\mathbf{f}} &= \sigma^{ij} \bar{\mathbf{m}}_i \otimes \bar{\mathbf{m}}_j \cdot \epsilon_{\alpha 3 \beta} \bar{\mathbf{m}}^\beta \sqrt{g} d\xi^\alpha d\xi^3 \\ d\bar{\mathbf{f}} &= \sigma^{i\beta} \bar{\mathbf{m}}_i \epsilon_{\alpha 3 \beta} \sqrt{g} d\xi^\alpha d\xi^3 \\ d\bar{\mathbf{f}} &= \sigma^{\gamma\beta} (\delta_\gamma^\lambda + \xi^3 \kappa_{\gamma}^\lambda) \mathbf{m}_\lambda \epsilon_{\alpha 3 \beta} \sqrt{g} d\xi^\alpha d\xi^3 + \sigma^{3\beta} \mathbf{m}_3 \epsilon_{\alpha 3 \beta} \sqrt{g} d\xi^\alpha d\xi^3 \end{aligned} \quad (2.86)$$

Substituindo os valores de $\sqrt{g}$, pode-se reescrever a equação (2.86) na forma da equação (2.87).

$$\begin{aligned} d\bar{\mathbf{f}} &= \bar{f}^\lambda \mathbf{m}_\lambda + \bar{f}^3 \mathbf{m}_3 \\ \bar{f}^\lambda &= (\sigma^{\lambda\beta} + \xi^3 \sigma^{\gamma\beta} \kappa_{\gamma}^\lambda) (1 + \xi^3 \kappa_{\theta}^\theta + (\xi^3)^2 \kappa) \epsilon_{\alpha 3 \beta} \sqrt{g} d\xi^\alpha d\xi^3 \\ \bar{f}^3 &= \sigma^{3\beta} (1 + \xi^3 \kappa_{\theta}^\theta + (\xi^3)^2 \kappa) \epsilon_{\alpha 3 \beta} \sqrt{g} d\xi^\alpha d\xi^3 \end{aligned} \quad (2.87)$$

A força resultante das tensões atuantes na seção, ilustrada na Figura (2.6), é dada por $d\mathbf{f}$ e é calculada de acordo com a equação (2.88).

$$d\mathbf{f} = \int_{-h/2}^{h/2} d\bar{\mathbf{f}} \quad (2.88)$$

Uma outra forma de calcular a força resultante é pela equação (2.89). Os tensores $\mathbf{T}$ e $\mathbf{V}$ relacionam a força $d\mathbf{f}$ com o vetor $\mathbf{n}$, que é perpendicular à seção transversal como mostra a Figura 2.6(b).

$$\begin{aligned} d\mathbf{f} &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} ds + \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds \\ \mathbf{T} &= T^{\lambda\gamma} \mathbf{m}_\lambda \otimes \mathbf{m}_\gamma \\ \mathbf{V} &= V^\lambda \mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{m}_\lambda \end{aligned} \quad (2.89)$$

O tensor $\mathbf{T}$ mede as forças internas de membrana que esticam, comprimem ou cisalham a casca no plano da superfície média. O tensor $\mathbf{V}$ mede as forças de cisalhamento perpendiculares à superfície média. O vetor $\mathbf{n}$ é unitário e perpendicular ao plano da seção transversal, sendo calculado pela equação (2.90).

$$\begin{aligned} \mathbf{n} ds &= d\mathbf{r} \times \mathbf{m}_3 \\ \mathbf{n} ds &= \epsilon_{\alpha 3 \beta} \mathbf{m}^\beta \sqrt{g} d\xi^\alpha \end{aligned} \quad (2.90)$$

Substituindo a equação (2.90) em (2.89), chega-se a:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} ds &= T^{\lambda\beta} \mathbf{m}_\lambda \epsilon_{\alpha 3 \beta} \sqrt{g} d\xi^\alpha \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds &= V^\beta \mathbf{m}_3 \epsilon_{\alpha 3 \beta} \sqrt{g} d\xi^\alpha \end{aligned} \quad (2.91)$$

Finalmente, as forças internas normais e de cisalhamento da casca são dadas pelas equações (2.92).

$$\begin{aligned} T^{\lambda\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma^{\lambda\beta} + \xi^3 \sigma^{\gamma\beta} \kappa_{\cdot\gamma}^{\lambda}) (1 + \xi^3 \kappa_{\cdot\theta}^{\theta} + (\xi^3)^2 \kappa) d\xi^3 \\ V^{\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{3\beta} (1 + \xi^3 \kappa_{\cdot\theta}^{\theta} + (\xi^3)^2 \kappa) d\xi^3 \end{aligned} \quad (2.92)$$

Como a hipótese do estado plano de tensões foi inicialmente adotada, as tensões $\sigma^{\beta\beta}$ e, conseqüentemente, os esforços cortantes V^{β} são nulos. Todavia, assim como na teoria de vigas de Euler-Bernoulli, apesar de inicialmente as tensões transversais serem desprezadas, é possível calcular os esforços cortantes por meio das equações de equilíbrio e, depois, determinar a distribuição dessas tensões ao longo da espessura da casca.

O momento resultante $d\boldsymbol{\eta}$ na seção transversal da casca, ilustrado na Figura 2.6(b), é calculado pela equação (2.93).

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\eta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \xi^3 \mathbf{m}_3 \times d\bar{\mathbf{f}} \\ &= \epsilon_{3\lambda\theta} \sqrt{g} \mathbf{m}^{\theta} \epsilon_{\alpha 3\beta} \sqrt{g} d\xi^{\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \xi^3 (\sigma^{\lambda\beta} + \xi^3 \sigma^{\gamma\beta} \kappa_{\cdot\gamma}^{\lambda}) (1 + \xi^3 \kappa_{\cdot\theta}^{\theta} + (\xi^3)^2 \kappa) d\xi^3 \end{aligned} \quad (2.93)$$

O tensor $\mathbf{M}$ relaciona o momento resultante $d\boldsymbol{\eta}$ com o vetor unitário $\mathbf{n}$, como mostra a equação (2.94).

$$d\boldsymbol{\eta} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.94)$$

$$\mathbf{M} = M^{\lambda\gamma} (\mathbf{m}_3 \times \mathbf{m}_{\lambda}) \otimes \mathbf{m}_{\gamma}$$

Substituindo (2.90) em (2.94), chega-se a expressão (2.95).

$$d\boldsymbol{\eta} = M^{\lambda\beta} \epsilon_{3\lambda\theta} \sqrt{g} \mathbf{m}^{\theta} \epsilon_{\alpha 3\beta} \sqrt{g} d\xi^{\alpha} \quad (2.95)$$

Combinando as equações (2.93) e (2.95), chega-se aos valores de $M^{\lambda\beta}$, dados pela equação (2.96), que são os momentos internos resultantes na seção da casca.

$$M^{\lambda\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \xi^3 (\sigma^{\lambda\beta} + \xi^3 \sigma^{\gamma\beta} \kappa_{\cdot\gamma}^{\lambda}) (1 + \xi^3 \kappa_{\cdot\theta}^{\theta} + (\xi^3)^2 \kappa) d\xi^3 \quad (2.96)$$

O segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff mede as forças na configuração atual em relação às áreas da configuração de referência, e é decomposto nas formas $\boldsymbol{\Sigma} = \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^{\alpha\beta} \bar{\mathbf{M}}_{\alpha} \otimes \bar{\mathbf{M}}_{\beta} = \boldsymbol{\Sigma}^{\alpha\beta} \mathbf{M}_{\alpha} \otimes \mathbf{M}_{\beta}$. As componentes $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}^{\alpha\beta}$ e $\boldsymbol{\Sigma}^{\alpha\beta}$ se relacionam entre si de acordo com a equação:

$$\begin{aligned} \Sigma^{\lambda\mu} &= \bar{\Sigma}^{\alpha\beta} \Upsilon_{\cdot\alpha}^{\lambda} \Upsilon_{\cdot\beta}^{\mu} \\ \bar{\Sigma}^{\lambda\mu} &= \Sigma^{\alpha\beta} \Lambda_{\alpha}^{\cdot\lambda} \Lambda_{\beta}^{\cdot\mu} \end{aligned} \quad (2.97)$$

O tensor Σ é conjugado com o tensor de deformações de Green-Lagrange, e no caso de um material elástico-linear, homogêneo e isotrópico, vale a Lei de Hooke (2.98) para o estado plano de tensões.

$$\Sigma = \frac{E}{1+\nu} \left(\mathbf{E} + \frac{\nu}{1-\nu} (\mathbf{G} : \mathbf{E}) \mathbf{G} \right) \quad (2.98)$$

Expandindo os tensores de deformação de Green-Lagrange $\mathbf{E}$ e métrico $\mathbf{G}$, chega-se à equação (2.99) que relaciona as componentes dos tensores de tensão e deformação.

$$\begin{aligned} \Sigma^{\alpha\beta} &= C^{\alpha\beta\lambda\theta} (\gamma_{\lambda\theta} + \xi^3 \rho_{\lambda\theta}) \\ C^{\alpha\beta\lambda\theta} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} ((G^{\alpha\theta} G^{\beta\lambda} + G^{\alpha\lambda} G^{\beta\theta}) (1-\nu) + 2\nu G^{\alpha\beta} G^{\lambda\theta}) \end{aligned} \quad (2.99)$$

O tensor de tensões de Cauchy se relacionada com o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de acordo com a equação (2.100).

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.100)$$

O valor de J é o determinante do gradiente de deformação $\mathbf{F}$ e representa a variação do volume do material, conforme mostra a equação (2.101).

$$J = \frac{dv}{dV} = \frac{\sqrt{g} (1 + \xi^3 \kappa_{,\alpha}^\alpha + (\xi^3)^2 \kappa)}{\sqrt{G} (1 + \xi^3 K_{,\alpha}^\alpha + (\xi^3)^2 K)} \quad (2.101)$$

Expandindo os tensores Σ e $\mathbf{F}$ na equação (2.100), chega-se a equação:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= J^{-1} (\bar{\mathbf{m}}_i \otimes \bar{\mathbf{M}}^i) \cdot \bar{\Sigma}^{\alpha\beta} \bar{\mathbf{M}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{M}}_\beta \cdot (\bar{\mathbf{M}}^j \otimes \bar{\mathbf{m}}_j) \\ &= J^{-1} \bar{\Sigma}^{\alpha\beta} \bar{\mathbf{m}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{m}}_\beta \end{aligned} \quad (2.102)$$

que mostra que $\sigma^{\alpha\beta} = J^{-1} \bar{\Sigma}^{\alpha\beta}$.

Por meio da relação entre o tensor de tensões de Cauchy e o segundo tensor de Piola-Kirchhoff, é possível determinar os esforços internos em termos das componentes $\bar{\Sigma}^{\alpha\beta}$.

$$\begin{aligned} T^{\lambda\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{\Sigma}^{\lambda\beta} + \xi^3 \bar{\Sigma}^{\gamma\beta} \kappa_{,\gamma}^\lambda) (1 + \xi^3 K_{,\theta}^\theta + (\xi^3)^2 K) \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}} d\xi^3 \\ M^{\lambda\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \xi^3 (\bar{\Sigma}^{\lambda\beta} + \xi^3 \bar{\Sigma}^{\gamma\beta} \kappa_{,\gamma}^\lambda) (1 + \xi^3 K_{,\theta}^\theta + (\xi^3)^2 K) \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}} d\xi^3 \end{aligned} \quad (2.103)$$

Substituindo (2.99) e (2.97) em (2.103), os esforços internos podem ser determinados por meio

das componentes do tensor de deformações de Green-Lagrange:

$$\begin{aligned}
 T^{\alpha\beta} &= h C^{\alpha\beta\theta\lambda} \gamma_{\theta\lambda} \\
 &+ \frac{h^3}{12} C^{\gamma\mu\theta\lambda} \rho_{\theta\lambda} (\delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\mu K_{\cdot\sigma}^\sigma + \delta_\beta^\mu \kappa_{\cdot\alpha}^\gamma - \delta_\alpha^\gamma K_{\cdot\beta}^\mu - \delta_\beta^\mu K_{\cdot\alpha}^\gamma) \\
 &+ \frac{h^3}{12} C^{\gamma\mu\theta\lambda} \gamma_{\theta\lambda} [\delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\mu K + K_{\cdot\alpha}^\gamma K_{\cdot\beta}^\mu + K_{\cdot\sigma}^\sigma (\delta_\beta^\mu \kappa_{\cdot\alpha}^\gamma - \delta_\alpha^\gamma K_{\cdot\beta}^\mu - \delta_\beta^\mu K_{\cdot\alpha}^\gamma) \\
 &\quad - \delta_\beta^\mu K_{\cdot\alpha}^\sigma \kappa_{\cdot\sigma}^\gamma - K_{\cdot\beta}^\mu \kappa_{\cdot\alpha}^\gamma] \\
 M^{\alpha\beta} &= \frac{h^3}{12} C^{\alpha\beta\theta\lambda} \rho_{\theta\lambda} \\
 &+ \frac{h^3}{12} C^{\gamma\mu\theta\lambda} \gamma_{\theta\lambda} (\delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\mu K_{\cdot\sigma}^\sigma + \delta_\beta^\mu \kappa_{\cdot\alpha}^\gamma - \delta_\alpha^\gamma K_{\cdot\beta}^\mu - \delta_\beta^\mu K_{\cdot\alpha}^\gamma)
 \end{aligned} \tag{2.104}$$

Nas equações (2.104) foram desprezados os termos da ordem de $O(h^5)$, e considerou-se que a superfície média não sofre variações significativas de área, ou seja $\sqrt{G}/\sqrt{g} \approx 1$.

2.5 Energia de deformação e energia cinética

A energia de deformação da casa é calculada pela equação (2.105).

$$\begin{aligned}
 U &= \int_{\mathcal{V}} \frac{\Sigma : \mathbf{E}}{2} d\mathcal{V} \\
 &= \iiint_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} C^{\alpha\beta\theta\lambda} [(\gamma_{\alpha\beta} + \xi^3 \rho_{\alpha\beta}) (\gamma_{\theta\lambda} + \xi^3 \rho_{\theta\lambda})] \sqrt{G} (1 + \xi^3 K_{\cdot\alpha}^\alpha + (\xi^3)^2 K) d\xi^3 d\xi^1 d\xi^2
 \end{aligned} \tag{2.105}$$

Integrando a equação (2.105) em ξ^3 e eliminando os termos da ordem de $O(h^5)$, chega-se a:

$$U = \iint_{\Omega} C^{\alpha\beta\theta\lambda} \left[\frac{h}{2} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\theta\lambda} + \frac{h^3}{24} (\rho_{\alpha\beta} \rho_{\theta\lambda} + 2 K_{\cdot\nu}^\nu \rho_{\alpha\beta} \gamma_{\theta\lambda}) \right] \sqrt{G} d\xi^1 d\xi^2 \tag{2.106}$$

Segundo Bower (2009), a aproximação da equação (2.106) e apresentada em (2.107) é válida para praticamente todas as geometrias, exceto algumas especiais em que há variações significativas na curvatura da casca.

$$U = \iint_{\Omega} C^{\alpha\beta\theta\lambda} \left(\frac{h}{2} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\theta\lambda} + \frac{h^3}{24} \rho_{\alpha\beta} \rho_{\theta\lambda} \right) \sqrt{G} d\xi^1 d\xi^2 \tag{2.107}$$

A energia cinética é dada pela equação:

$$\begin{aligned}
 T &= \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}}{2} d\mathcal{V} \\
 T &= \iiint_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho}{2} (v^i v_i + 2 \xi^3 v^\lambda \dot{\mu}_\lambda + (\xi^3)^2 \dot{\mu}^\alpha \dot{\mu}_\alpha) \sqrt{G} (1 + \xi^3 K_{\cdot\alpha}^\alpha + (\xi^3)^2 K) d\xi^3 d\xi^1 d\xi^2
 \end{aligned} \tag{2.108}$$

que pode ser simplificada em:

$$T = \iint_{\Omega} \rho \left(\frac{h}{2} v^i v_i + \frac{h^3}{24} \dot{\mu}^\alpha \dot{\mu}_\alpha \right) \sqrt{G} d\xi^1 d\xi^2 \quad (2.109)$$

A segunda parcela da equação (2.109) representa a energia cinética rotacional e pode ser negligenciada no caso da análise de vibrações em cascas (Bower, 2009), resultando em:

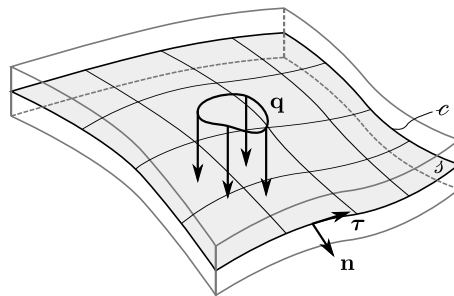
$$\begin{aligned} T &= \iint_{\Omega} \rho \frac{h}{2} v^i v_i \sqrt{G} d\xi^1 d\xi^2 \\ &= \iint_{\Omega} \rho \frac{h}{2} G^{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j \sqrt{G} d\xi^1 d\xi^2 \end{aligned} \quad (2.110)$$

2.6 Equações de equilíbrio

Seja uma casca submetida a uma carga distribuída $\mathbf{q}$ atuando sobre a superfície média como mostra a Figura 2.7. A casca possui condições de contorno atuando ao longo da curva c que é fechada, contínua e diferenciável em toda sua extensão. O vetor $\boldsymbol{\tau}$ é um vetor unitário tangente à curva c , enquanto o vetor $\mathbf{n}$ é unitário e perpendicular a ambos $\boldsymbol{\tau}$ e $\mathbf{m}_3$.

Há várias formas de se deduzir as equações de equilíbrio. Bower (2009) apresenta duas abordagens diferentes para a determinação das equações não lineares de equilíbrio dinâmico que serão apresentadas nesta seção: utilizando a segunda lei de Newton e por meio do princípio das potências virtuais. A vantagem dessas duas abordagens é que os esforços internos aparecem naturalmente nas equações, e as expressões complexas das relações deformação-deslocamentos não são necessárias.

Figura 2.7 – Casca submetida a uma carga distribuída $\mathbf{q}$ e condições de contorno atuando na curva c



2.6.1 Abordagem newtoniana

Seja um elemento infinitesimal da casca na configuração atual, conforme mostra a Figura 2.8. As forças e momentos internos atuando nas quatro bordas do elemento e carga externa resultante estão ilustrados na figura. Considerou-se que a casca está submetida a forças dissipativas em que c é o coeficiente de amortecimento viscoso. Aplicando a segunda lei de Newton, chega-se às seguintes equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{T} + \mathbf{V})}{\partial \xi^\alpha} \cdot \mathbf{m}^\alpha + \mathbf{q} &= \rho h \mathbf{a} + c h \mathbf{v} \\ \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \xi^\alpha} \cdot \mathbf{m}^\alpha + [(\mathbf{T} + \mathbf{V}) \cdot \mathbf{m}^\alpha] \times \mathbf{m}_\alpha &= \frac{\rho h^3}{12} \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{m}_3 \end{aligned} \quad (2.111)$$

Expandindo as equações (2.111), chega-se às equações de equilíbrio dinâmico em termos das componentes dos esforços internos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial \xi^\beta} + T^{\lambda\beta} \gamma_{\lambda\beta}^\alpha + T^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\lambda}^\lambda + V^\beta \kappa_{\beta}^\alpha + q^\alpha &= \rho a^\alpha + c h v^\alpha \\ \frac{\partial V^\beta}{\partial \xi^\beta} + V^\beta \gamma_{\beta\lambda}^\lambda - T^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} + q^3 &= \rho a^3 + c h v^3 \\ \frac{\partial M^{\alpha\beta}}{\partial \xi^\beta} + M^{\lambda\beta} \gamma_{\lambda\beta}^\alpha + M^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\lambda}^\lambda - V^\alpha &= \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\mu}^\alpha \\ T^{21} - T^{12} + M^{2\lambda} \kappa_{\lambda}^1 - M^{1\lambda} \kappa_{\lambda}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.112)$$

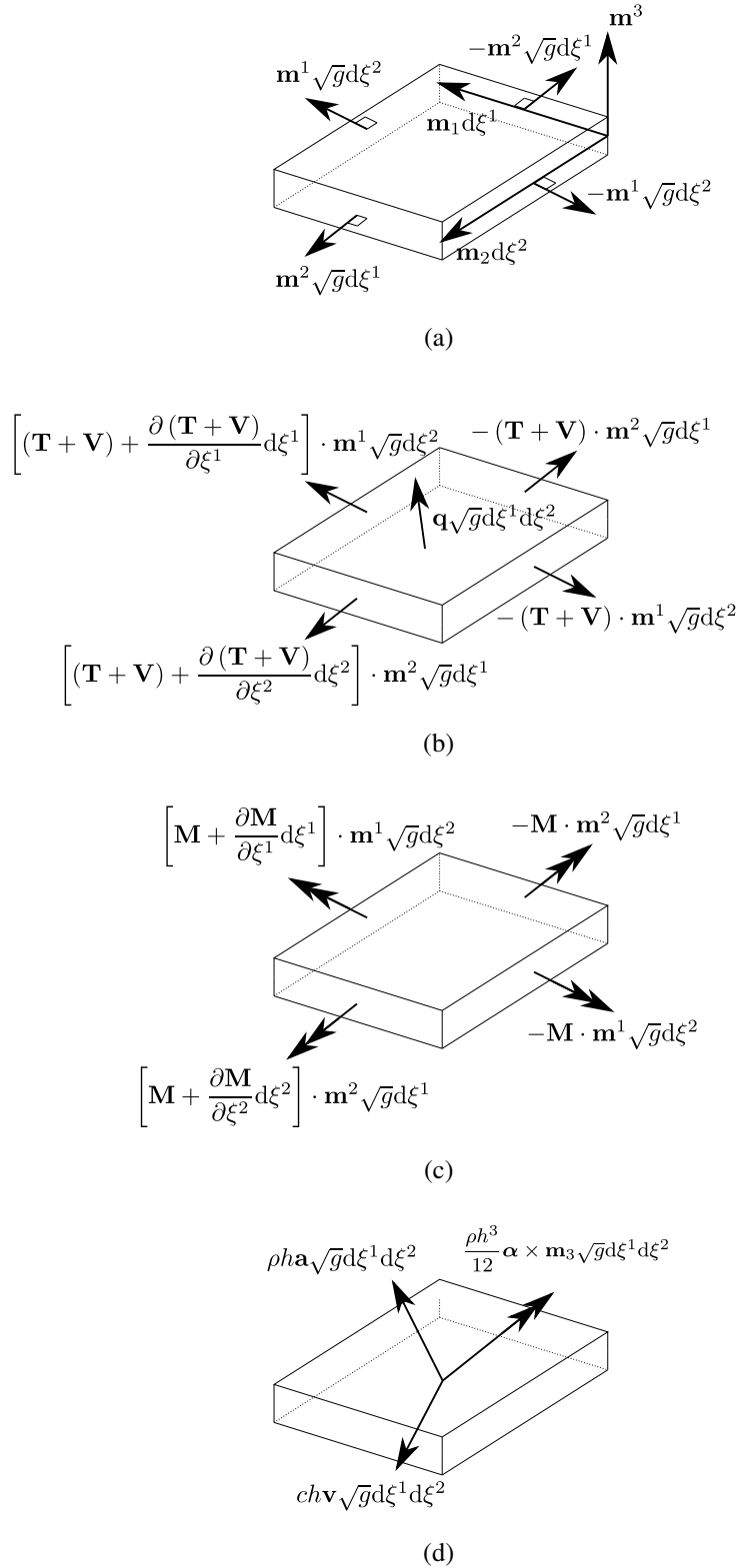
2.6.2 Princípio das potências virtuais

As equações de equilíbrio dinâmico e o conjunto de condições de contorno podem ser determinadas por meio do princípio das potências virtuais de acordo com a equação (2.113).

$$\int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{L} dv + \int_v \rho \ddot{\mathbf{x}} \cdot \delta \dot{\mathbf{x}} dv - \int_s \mathbf{q} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}} ds = 0 \quad (2.113)$$

Como as forças dissipativas são não conservativas, as forças de amortecimento não foram consideradas inicialmente, mas podem ser adicionadas posteriormente às equações de equilíbrio resultantes. Substituindo as equações (2.66) e (2.75), que descrevem, respectivamente, a velocidade e a aceleração em um ponto qualquer da casca, na segunda integral da equação (2.113),

Figura 2.8 – Forças e momentos atuando em um elemento infinitesimal da casca. Em (a), a representação dos vetores normais à seção transversal da casca; em (b), a representação das forças internas e externas resultantes; em (c), os momentos internos resultantes; e em (d) as forças e momentos inerciais e as forças dissipativas.



chega-se a:

$$\begin{aligned} \int_v \rho \ddot{\mathbf{x}} \cdot \delta \dot{\mathbf{x}} dv &= \int_v \rho \left(a^i \mathbf{m}_i + \xi^3 \left(\ddot{\mu}^\beta \mathbf{m}_\beta + \dot{\mu}^\alpha \dot{\mu}_\alpha \mathbf{m}_3 \right) \right) \cdot (v_k \mathbf{m}^k + \xi^3 \dot{\mu}_\theta \mathbf{m}_\theta) dv \\ &= \int_s \left(\rho h a^i \delta v_i + \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\mu}^\alpha \delta \dot{\mu}_\alpha \right) ds \end{aligned} \quad (2.114)$$

Expandindo a potência virtual da carga distribuída, tem-se:

$$\int_s \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{r} ds = \int_s q^i \delta v_i ds \quad (2.115)$$

A primeira integral da equação (2.113) representa a potência virtual das cargas internas. Substituindo as equações (2.74) e (2.80) no gradiente de velocidade, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{L} dv &= \int_v \sigma^{ij} \bar{\mathbf{m}}_i \otimes \bar{\mathbf{m}}_j : \delta \dot{\bar{\mathbf{m}}}_k \otimes \bar{\mathbf{m}}_k dv \\ &= \int_s \int_{-h/2}^{h/2} \left[(\sigma^{\alpha\beta} + \xi^3 \sigma^{\alpha\gamma} \kappa_{\gamma\beta}^\gamma) (\delta v_{\alpha,\beta} + \delta v_3 \kappa_{\alpha\beta} - \delta v_\nu \gamma_{\beta\alpha}^\nu) \right. \\ &\quad + \xi^3 (\sigma^{\alpha\beta} + \xi^3 \sigma^{\alpha\gamma} \kappa_{\gamma\beta}^\gamma) (\delta \dot{\mu}_{\alpha,\beta} - \delta \dot{\mu}_\lambda \gamma_{\alpha\beta}^\lambda) \\ &\quad + \sigma^{3\beta} (\delta v_{3,\beta} - \delta v_\theta \kappa_{\beta}^\theta) + \sigma^{\alpha 3} \delta \dot{\mu}_\alpha \\ &\quad \left. + \xi^3 \sigma^{\theta 3} \kappa_{\theta}^\alpha \delta \dot{\mu}_\alpha \right] (1 + \xi^3 \kappa_{\theta}^\theta + (\xi^3)^2 \kappa) d\xi^3 ds \end{aligned} \quad (2.116)$$

Para simplificar ainda mais a equação (2.116), pode-se substituir a definição dos esforços internos dada pelas equações (2.92) e (2.96), resultando em:

$$\begin{aligned} \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{L} dv &= \int_s \left[T^{\alpha\beta} (\delta v_{\alpha,\beta} - \delta v_\nu \gamma_{\beta\alpha}^\nu) + T^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} \delta v_3 \right. \\ &\quad + M^{\alpha\beta} (\delta \dot{\mu}_{\alpha,\beta} - \delta \dot{\mu}_\lambda \gamma_{\alpha\beta}^\lambda) \\ &\quad \left. + V^\beta (\delta v_{3,\beta} - \delta v_\theta \kappa_{\beta}^\theta) + V^\alpha \delta \dot{\mu}_\alpha \right] ds \end{aligned} \quad (2.117)$$

Na maioria das cascas, pode-se considerar que as tensões $\sigma^{\theta 3}$ têm uma distribuição quase parabólica ao longo da espessura da casca, por isso a integral $\int_{-h/2}^{h/2} \xi^3 \sigma^{\theta 3} \kappa_{\theta}^\alpha \delta \dot{\mu}_\alpha d\xi^3$ foi negligenciada na equação (2.117).

As expressões (2.118) são válidas e serão substituídas na equação (2.117).

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} (\delta v_{\alpha,\beta} - \delta v_\nu \gamma_{\beta\alpha}^\nu) &= \mathbf{T} : \left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \xi^\lambda} \otimes \mathbf{m}^\lambda \right) = \mathbf{m}^\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^\lambda} (\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) - \mathbf{m}^\lambda \cdot \left(\delta \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \xi^\lambda} \right) \\ M^{\alpha\beta} (\delta \dot{\mu}_{\alpha,\beta} - \delta \dot{\mu}_\lambda \gamma_{\alpha\beta}^\lambda) &= \mathbf{M} : \left(\frac{\partial \delta \dot{\boldsymbol{\mu}}}{\partial \xi^\lambda} \otimes \mathbf{m}^\lambda \right) = \mathbf{m}^\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^\lambda} (\delta \dot{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{M}) - \mathbf{m}^\lambda \cdot \left(\delta \dot{\boldsymbol{\mu}} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \xi^\lambda} \right) \\ V^\beta (\delta v_{3,\beta} - \delta v_\theta \kappa_{\beta}^\theta) &= \mathbf{V} : \left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \xi^\lambda} \otimes \mathbf{m}^\lambda \right) = \mathbf{m}^\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^\lambda} (\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}) - \mathbf{m}^\lambda \cdot \left(\delta \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi^\lambda} \right) \end{aligned} \quad (2.118)$$

Para simplificar ainda mais a equação (2.117), foi utilizado o teorema da divergência, dado pela equação (2.119).

$$\int_{\mathfrak{z}} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi^\alpha} \cdot \mathbf{m}^\alpha d\mathfrak{z} = \oint_{\mathfrak{c}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\mathfrak{c} \quad (2.119)$$

Aplicando o teorema da divergência (2.119) em cada uma das equações em (2.118), chega-se a:

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{z}} \mathbf{T} : \left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \xi^\lambda} \otimes \mathbf{m}^\lambda \right) d\mathfrak{z} &= \oint_{\mathfrak{c}} (\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} d\mathfrak{c} - \int_{\mathfrak{z}} \left(\delta \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \xi^\lambda} \right) \cdot \mathbf{m}^\lambda d\mathfrak{z} \\ \int_{\mathfrak{z}} \mathbf{M} : \left(\frac{\partial \delta \dot{\boldsymbol{\mu}}}{\partial \xi^\lambda} \otimes \mathbf{m}^\lambda \right) d\mathfrak{z} &= \oint_{\mathfrak{c}} (\delta \dot{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{n} d\mathfrak{c} - \int_{\mathfrak{z}} \left(\delta \dot{\boldsymbol{\mu}} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \xi^\lambda} \right) \cdot \mathbf{m}^\lambda d\mathfrak{z} \\ \int_{\mathfrak{z}} \mathbf{V} : \left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \xi^\lambda} \otimes \mathbf{m}^\lambda \right) d\mathfrak{z} &= \oint_{\mathfrak{c}} (\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} d\mathfrak{c} - \int_{\mathfrak{z}} \left(\delta \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi^\lambda} \right) \cdot \mathbf{m}^\lambda d\mathfrak{z} \end{aligned} \quad (2.120)$$

Expandindo as equações (2.120), chega-se às equações (2.121).

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{z}} T^{\alpha\beta} (\delta v_{\alpha,\beta} - \delta v_\nu \gamma_{\beta\alpha}^\nu) d\mathfrak{z} &= \oint_{\mathfrak{c}} \delta v_\alpha T^{\alpha\beta} n_\beta d\mathfrak{c} \\ &\quad - \int_{\mathfrak{z}} \left[\left(\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial \xi^\beta} + T^{\theta\beta} \gamma_{\theta\beta}^\alpha + T^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\theta}^\theta \right) \delta v_\alpha \right. \\ &\quad \left. - T^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} \delta v_3 \right] d\mathfrak{z} \end{aligned} \quad (2.121a)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{z}} M^{\alpha\beta} (\delta \dot{\mu}_{\alpha,\beta} - \delta \dot{\mu}_\nu \gamma_{\beta\alpha}^\nu) d\mathfrak{z} &= \oint_{\mathfrak{c}} \delta \dot{\mu}_\alpha M^{\alpha\beta} n_\beta d\mathfrak{c} \\ &\quad - \int_{\mathfrak{z}} \left(\frac{\partial M^{\alpha\beta}}{\partial \xi^\beta} + M^{\theta\beta} \gamma_{\theta\beta}^\alpha + M^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\theta}^\theta \right) \delta \dot{\mu}_\alpha d\mathfrak{z} \end{aligned} \quad (2.121b)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{z}} V^\beta (\delta v_{3,\beta} - \delta v_\nu \kappa_{\beta}^\nu) d\mathfrak{z} &= \oint_{\mathfrak{c}} \delta v_3 V^\beta n_\beta d\mathfrak{c} \\ &\quad - \int_{\mathfrak{z}} \left[\left(\frac{\partial V^\beta}{\partial \xi^\beta} + V^\beta \gamma_{\beta\theta}^\theta \right) \delta v_3 + V^\beta \kappa_{\beta}^\alpha \delta v_\alpha \right] d\mathfrak{z} \end{aligned} \quad (2.121c)$$

Substituindo a equação (2.70) na integral da equação (2.121b), tem-se:

$$\oint_{\mathfrak{c}} \delta \dot{\mu}_\alpha M^{\alpha\beta} n_\beta d\mathfrak{c} = \oint_{\mathfrak{c}} [M^{\alpha\beta} n_\beta \kappa_{\alpha}^\theta \delta v_\theta - M^{\alpha\beta} n_\beta \delta v_{3,\alpha}] d\mathfrak{c} \quad (2.122)$$

Como $\delta v_{3,\alpha}$ é avaliada ao longo do contorno $\mathfrak{c}$, é conveniente decompor esse termo nas direções de $\boldsymbol{\tau}$ e $\mathbf{n}$, de acordo com:

$$\delta v_{3,\alpha} = \frac{\partial \delta v_3}{\partial \mathfrak{c}} \tau_\alpha + \delta \dot{\theta} n_\alpha \quad (2.123)$$

em que $\partial \delta v_3 / \partial \mathfrak{c}$ e $\dot{\theta}$ são as velocidades angulares ao longo da curva $\mathfrak{c}$ nas direções de $\boldsymbol{\tau}$ e $\mathbf{n}$, respectivamente. Substituindo (2.123) em (2.122), obtém-se:

$$\oint_{\mathfrak{c}} \delta \dot{\mu}_\alpha M^{\alpha\beta} n_\beta d\mathfrak{c} = \oint_{\mathfrak{c}} \left[M^{\alpha\beta} n_\beta \kappa_{\alpha}^\theta \delta v_\theta + \frac{\partial (\tau_\alpha M^{\alpha\beta} n_\beta)}{\partial \mathfrak{c}} \delta v_3 - M^{\alpha\beta} n_\beta n_\alpha \delta \dot{\theta} \right] d\mathfrak{c} \quad (2.124)$$

sendo que na curva fechada $\mathfrak{c}$ pode-se aplicar a seguinte integração por partes:

$$\oint_{\mathfrak{c}} \frac{\partial (\tau_\alpha M^{\alpha\beta} n_\beta)}{\partial \mathfrak{c}} \delta v_3 d\mathfrak{c} = - \oint_{\mathfrak{c}} \tau_\alpha M^{\alpha\beta} n_\beta \frac{\partial \delta v_3}{\partial \mathfrak{c}} d\mathfrak{c}. \quad (2.125)$$

Finalmente, substituindo as equações (2.121) e (2.123) em (2.117), chega-se a uma expressão equivalente da potência das cargas internas:

$$\begin{aligned}
 \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{L} dv + \int_v \rho \ddot{\mathbf{x}} \cdot \delta \dot{\mathbf{x}} dv - \int_s \mathbf{q} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}} ds = \\
 - \int_s \left[\left(\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial \xi^\beta} + T^{\theta\beta} \gamma_{\theta\beta}^\alpha + T^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\theta}^\theta + V^\beta \kappa_{,\beta}^\alpha + q^\alpha - \rho h a^\alpha \right) \delta v_\alpha \right. \\
 + \left(\frac{\partial M^{\alpha\beta}}{\partial \xi^\beta} + M^{\theta\beta} \gamma_{\theta\beta}^\alpha + M^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\theta}^\theta - V^\alpha - \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\mu}^\alpha \right) \delta \dot{\mu}_\alpha \\
 + \left. \left(\frac{\partial V^\beta}{\partial \xi^\beta} + V^\beta \gamma_{\beta\theta}^\theta - T^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} + q^3 - \rho h a^3 \right) \delta v_3 \right] ds \\
 + \oint_c \left[(T^{\alpha\beta} n_\beta + M^{\theta\beta} n_\beta \kappa_{,\theta}^\alpha) \delta v_\alpha \right. \\
 + \left. \left(V^\beta n_\beta + \frac{\partial (\tau_\alpha M^{\alpha\beta} n_\beta)}{\partial c} \right) \delta v_3 + (M^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta) \delta \dot{\theta} \right] dc
 \end{aligned} \tag{2.126}$$

Das equações (2.114), (2.115) e (2.126), pode-se extrair as seguintes equações de equilíbrio dinâmico da casca:

$$\begin{aligned}
 \delta v_\alpha : \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial \xi^\beta} + T^{\theta\beta} \gamma_{\theta\beta}^\alpha + T^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\theta}^\theta + V^\beta \kappa_{,\beta}^\alpha - q^\alpha - \rho h a^\alpha &= 0 \\
 \delta \dot{\mu}_\alpha : \frac{\partial M^{\alpha\beta}}{\partial \xi^\beta} + M^{\theta\beta} \gamma_{\theta\beta}^\alpha + M^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\theta}^\theta - V^\alpha - \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\mu}^\alpha &= 0 \\
 \delta v_3 : \frac{\partial V^\beta}{\partial \xi^\beta} + V^\beta \gamma_{\beta\theta}^\theta - T^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} - q^3 - \rho h a^3 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.127}$$

cujas condições de contorno são:

$$\begin{aligned}
 (T^{\alpha\beta} n_\beta + M^{\theta\beta} n_\beta \kappa_{,\theta}^\alpha) \delta v_\alpha &= 0 \\
 \left(V^\beta n_\beta + \frac{\partial (\tau_\alpha M^{\alpha\beta} n_\beta)}{\partial c} \right) \delta v_3 &= 0 \\
 (M^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta) \delta \dot{\theta} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.128}$$

Observa-se que a última equação em (2.112) não aparece em (2.127). Essa equação pode ser derivada da simetria do tensor de tensões de Cauchy, em que $\sigma^{12} = \sigma^{21}$, e da definição dos esforços internos, como mostra a equação:

$$\begin{aligned}
 T^{12} - T^{21} &= \int_{-h/2}^{h/2} (\xi^3 \sigma^{\gamma 2} \kappa_{,\gamma}^1 - \xi^3 \sigma^{\gamma 1} \kappa_{,\gamma}^2) (1 + \xi^3 \kappa_{,\theta}^\theta + (\xi^3)^2 \kappa) d\xi^3 \\
 M^{\lambda 1} \kappa_{,\lambda}^2 - M^{\lambda 2} \kappa_{,\lambda}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \xi^3 (\sigma^{\lambda 1} \kappa_{,\lambda}^2 - \sigma^{\lambda 2} \kappa_{,\lambda}^1) (1 + \xi^3 \kappa_{,\theta}^\theta + (\xi^3)^2 \kappa) d\xi^3
 \end{aligned} \tag{2.129}$$

CAPÍTULO 3

MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DINÂMICO

Encontrar uma solução para o problema de cascas significa determinar as componentes do vetor deslocamento, u_i , que satisfaçam as condições de contorno e as equações de equilíbrio. As equações de equilíbrio (2.112) são equações diferenciais parciais em que as soluções analíticas só são conhecidas em pouquíssimos casos particulares com geometria e condições de contorno específicas. Na maioria dos casos, para se obter uma solução, recorre-se a métodos numéricos ou semianalíticos que reduzem para um número finito adequado os infinitos graus de liberdade da casca, e, além disso, transformando o sistema de equações diferenciais parciais (2.112) em um sistema de equações diferenciais ordinárias equivalente. Esses métodos devem ser capazes de representar de maneira precisa, dentro de um critério de convergência, o comportamento estrutural da casca.

3.1 Método de Rayleigh–Ritz

O método de Rayleigh–Ritz é um método semianalítico utilizado para aproximar as equações diferenciais parciais da mecânica do contínuo em um sistema de equações diferenciais ordinárias equivalente. O método remonta a 1870, com o trabalho seminal do Lord Rayleigh sobre problemas de vibração. A aproximação do deslocamento era originalmente limitada a uma função. Ritz generalizou o método ao construir uma aproximação do campo de deslocamento em termos de várias funções, cada uma associada a um grau de liberdade diferente e satisfazendo separadamente as condições de contorno essenciais (Géradin; Rixen, 2014). Nesse método, o movimento do corpo é aproximado ao expressar o campo de deslocamentos em função de *coordenadas generalizadas* dependentes do tempo. A representação resultante é chamada de

Ritz-Ansatz, que em sua forma original é dada por uma série de funções que são separadas no espaço e no tempo (Irschik; Schlacher, 2004). Aplicando esse método ao estudo de cascas, as componentes u_i do vetor de deslocamentos são aproximadas por:

$$u_k(\xi^1, \xi^2, t) \approx \sum_{i=1}^{m_k} \sum_{j=1}^{n_k} u_{k_{ij}}(t) \phi_{k_{ij}}(\xi^1, \xi^2) \quad (3.1)$$

onde $\phi_{k_{ij}}(\xi^1, \xi^2)$ são funções de forma no espaço que devem ser *cinematicamente admissíveis*, o que significa que devem satisfazer as condições internas de compatibilidade e as condições essenciais de contorno, por outro lado, não é necessário verificar as condições naturais, ou seja, para o princípio variacional sobre deslocamentos, não é necessário verificar as condições de equilíbrio (Géradin; Rixen, 2014); m_k e n_k são números naturais suficientemente grandes para garantir a convergência; e $u_{k_{ij}}(t)$ são as coordenadas generalizadas do sistema. Em análises dinâmicas o valor de t representa o tempo enquanto em análise estáticas t representa o comprimento da curva resposta carga-deslocamento de algum ponto da casca medido da configuração de referência até a configuração atual.

Em um problema estático, as equações de equilíbrio são determinadas por meio do princípio da energia potencial estacionária:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_{k_{ij}}} = 0 \quad (3.2)$$

em que $\Pi = U + W$ é a energia potencial total, sendo U a energia de deformação e W a energia potencial das cargas externas.

Nos problemas dinâmicos, o equilíbrio é dado pelas equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_{k_{ij}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_{k_{ij}}} + \frac{\partial F}{\partial \dot{u}_{k_{ij}}} = Q_{k_{ij}} \quad (3.3)$$

em que $L = T - \Pi$ é a função Lagrangiana da casca; $\Pi = U + W$ é a energia potencial total, sendo U a energia de deformação e W a energia potencial das cargas externas; F é a função de dissipação de Rayleigh; e $Q_{k_{ij}}$ são as forças generalizadas que não provém de nenhum potencial. Neste trabalho, o software Matlab será utilizado para a obtenção, manipulação e resolução das equações necessárias para a análise de cascas. O código em Matlab para determinação dos funcionais de energia envolvidos no problema se encontram no Apêndice A.1.

A equação (3.3) pode ser reescrita na sua forma matricial:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}(\zeta)\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{U}) = \epsilon \mathbf{f}_e(\mathbf{U}, \ddot{\mathbf{U}}, \Omega t) \quad (3.4)$$

em que $\mathbf{U} = [u_{kij}]$, $\dot{\mathbf{U}} = [\dot{u}_{kij}]$ e $\ddot{\mathbf{U}} = [\ddot{u}_{kij}]$ são, respectivamente, os vetores de deslocamento, velocidade e aceleração cujo número total de graus de liberdade é $n = m_k n_k$; $\mathbf{M}$ é a matriz de massa; $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez; $\mathbf{C}$ é a matriz de amortecimento linear função de um parâmetro adimensional de amortecimento ζ ; $\mathbf{f}_{nl}$ é o vetor de forças internas não lineares; $\epsilon \mathbf{f}_e$ é o vetor de forças externas cuja magnitude depende do parâmetro adimensional ϵ ; e Ω é um vetor de dimensão f que contém as frequências de excitação das cargas dinâmicas. Neste trabalho, considerou-se apenas forças externas conservativas, ou seja $\mathbf{f}_e = \mathbf{f}_e(\Omega t)$. Quando $f = 0$, o sistema dinâmico é autônomo, e quando $f = 1$ o sistema está submetido a um carregamento harmônico, tal que $\Omega = [\omega_f]$ sendo ω_f a frequência de excitação do carregamento externo. Em geral, podem haver situações em que haja mais de uma carga harmônica aplicada com diferentes frequências, mas esse tipo de carga não será estudada neste trabalho.

Existem diversas maneiras de expressar matematicamente e computacionalmente os termos não lineares da equação (3.4). Independentemente das funções que compõem o vetor $\mathbf{f}_{nl}$, pode-se, em geral, descrevê-lo como uma função polinomial das coordenadas generalizadas por meio de sua expansão em série de Taylor até a ordem desejada. Considerando isso, talvez a maneira mais direta de expressá-lo seja por meio de tensores de ordem superior, cuja expressão resultante em notação indicial é dada por:

$$f_i^{nl} = f_{ijk}^2 U_j U_k + f_{ijkl}^3 U_j U_k U_l + \dots \quad (3.5)$$

em que f_i^{nl} são as componentes do vetor $\mathbf{f}_{nl}$; e $\mathbf{f}^k$ são tensores de ordem $k + 1$ cujos elementos são dados por $f_{i\dots}^k$. A biblioteca *Tensor Toolbox* (Bader; Kolda, 2008) oferece ferramentas para manipulação e armazenamento desses tensores de forma otimizada em estruturas densas e esparsas no Matlab.

Outra forma de se expressar o vetor $\mathbf{f}_{nl}$ é por meio da vetorização da equação (3.5), que resulta em uma fórmula que envolve multiplicações entre matrizes esparsas e vetores. Primeiramente, considere o produto de Kronecker entre duas matrizes, dado por:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1M}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{K1}\mathbf{B} & \dots & a_{KM}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

em que $\mathbf{A}$ é de dimensão $K \times M$ e $\mathbf{B}$ é de dimensão $L \times P$. O resultado do produto de Kronecker $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ é uma matriz de dimensão $KL \times MP$. Não confundir o produto diádico $\otimes$

com o produto de Kronecker $\odot$, que são diferentes no contexto deste trabalho. O vetor $\mathbf{f}_{\text{nl}}$ pode ser descrito como:

$$\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{U}) = \sum_{k=2}^o \mathbf{f}_k \mathbf{U}^{\odot k} \quad (3.7)$$

em que $\mathbf{U}^{\odot k}$ é igual ao produto $\mathbf{U} \odot \cdots \odot \mathbf{U}$ (k vezes) e contém n monômios ordem k das coordenadas generalizadas. $\mathbf{f}_k$ é uma matriz de dimensão $n \times n^k$ que contém os coeficientes desses monômios. O valor de o representa a ordem máxima dos termos não lineares. Para exemplificar essa notação, considere um sistema dinâmico de dimensão $n = 2$ em que os termos não lineares sejam de ordem máxima de $o = 3$. Neste caso, a função vetorial $\mathbf{f}_{\text{nl}}$ é dada por:

$$\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} f_{211} & f_{212} & f_{213} & f_{214} \\ f_{221} & f_{222} & f_{223} & f_{224} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 U_1 \\ U_1 U_2 \\ U_2 U_1 \\ U_2 U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{311} & f_{312} & \cdots & f_{318} \\ f_{321} & f_{322} & \cdots & f_{328} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 U_1 U_1 \\ U_1 U_1 U_2 \\ U_1 U_2 U_1 \\ U_1 U_2 U_2 \\ U_2 U_1 U_1 \\ U_2 U_1 U_2 \\ U_2 U_2 U_1 \\ U_2 U_2 U_2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Tanto a notação tensorial quanto na notação utilizando o produto de Kronecker são equivalentes, e é possível migrar de uma para a outra utilizando a função reshape do Matlab. Neste sentido, os tensores $\mathbf{f}^k$ e as matrizes $\mathbf{f}_k$ possuem os mesmos elementos, mas armazenados de formas diferentes. Todavia, a segunda forma é a mais eficiente já que lida com operações de multiplicação entre matrizes esparsas e vetores que são muito eficientes no Matlab. Para expressões com ordens elevadas, ambas as notações são ineficientes pois há uma elevação exponencial da redundância dos monômios no cálculo dos termos não lineares com o aumento da ordem. Por exemplo, nos termos quadráticos da equação (3.8), o monômio $U_1 U_2$ é computado duas vezes; já nos termos cúbicos, o monômio $U_1 U_1 U_2$ computado três vezes. Caso sejam consideradas as aproximações da Seção 2.2.3 do tensor de deformação e as aproximações da Seção 2.5 da energia de deformação, ao aplicar a equação de Euler-Lagrange (3.3), a função vetorial $\mathbf{f}_{\text{nl}}$ será composta de polinômios de segunda e terceira ordem. Todavia, caso o sistema seja estudado por meio de modelos de ordem reduzida, como será apresentado no próximo capítulo, a ordem dos termos não lineares pode aumentar.

Como alternativa, pode-se utilizar a notação de *índice múltiplo*, cujo vetor de forças não lineares é dado por:

$$U_j^\alpha = \prod_{i=1}^n U_i^{\alpha_{ij}} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{U}) = \mathbf{f}\mathbf{U}^\alpha$$

em que α é uma matriz esparsa que contém os expoentes naturais α_{ij} dos monômios dos termos não lineares; $\mathbf{U}^\alpha$ é um vetor cujas componentes são U_j^α e armazena os monômios dos termos não lineares; e $\mathbf{f}$ é uma matriz esparsa que contém os coeficientes dos polinômios. Dentre as três formas apresentadas, esta é a mais eficiente de calcular o vetor $\mathbf{f}_{nl}$ caso os termos não lineares possuam ordens muito elevadas, pois elimina a redundância no cálculo dos monômios.

Pode-se reescrever o sistema dinâmico de segunda ordem da equação (3.4) na sua forma de primeira ordem e de dimensão $N = 2n$:

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{F}(\mathbf{z}) + \epsilon\mathbf{F}_e(\phi) \quad (3.10)$$

em que $\mathbf{z} = [\mathbf{U}^\top, \dot{\mathbf{U}}^\top]^\top \in \mathbb{R}^N$ e é um vetor real de dimensão N que contém as variáveis de estado do sistema; e $\phi = \Omega t$ tal que $\dot{\phi} = \Omega$. Há duas formas equivalentes para a determinação dos coeficientes desse sistema, e estão mostradas nas equações (3.11):

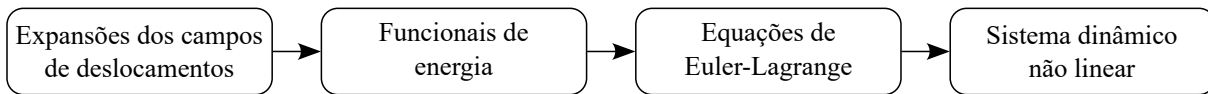
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{N} \\ -\mathbf{K} & -\mathbf{C}(\zeta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{f}_{nl} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_e(\phi) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_e(\phi) \end{bmatrix} \quad (3.11a)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\zeta) & \mathbf{M} \\ \mathbf{N} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} -\mathbf{f}_{nl} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_e(\phi) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_e(\phi) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.11b)$$

onde a matriz $\mathbf{N}$ é de dimensão $n \times n$ que pode ser escolhida como qualquer matriz não singular. A escolha mais comum para $\mathbf{N}$ é a matriz identidade, embora a escolha de $\mathbf{N} = -\mathbf{K}$ na equação (3.11a) e $\mathbf{N} = \mathbf{M}$ na equação (3.11b) resultem em matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ simétricas, o que pode ser vantajoso em algumas análises. Similar ao que foi definido na equação (3.7) para $\mathbf{f}_{nl}$, a função vetorial $\mathbf{F}(\mathbf{z})$ é dada por:

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \sum_{k=2}^o \mathbf{F}_k \mathbf{z}^{\odot k} \quad (3.12)$$

Figura 3.1 – Fluxograma do método de Rayleigh-Ritz



em que o é a ordem máxima dos termos não lineares das forças internas. Formula análoga pode ser determinada utilizando a notação tensorial e a notação de índice múltiplo.

Nos casos em que a matriz $\mathbf{B}$ pode ser invertida, o sistema (3.10) pode ser reescrito na forma condensada da equação (3.13):

$$\mathbf{z}' = \mathbf{f}(\tau, \mathbf{z}, \mathbf{p}) \quad (3.13)$$

em que $\mathbf{z}' = \partial \mathbf{z} / (\partial \tau)$, sendo a variável temporal t substituída pela variável adimensional $\tau = t/T$, onde T representa o período da órbita e se relaciona com a frequência na forma $T = 2\pi/\omega$ tal que o período da órbita seja sempre igual a 1; $\mathbf{f}$ é uma função vetorial que representa o sistema de primeira ordem equivalente ao sistema de equações diferenciais de segunda ordem (3.4) e possui período igual a $2\pi/\omega_f$; e $\mathbf{p}$ é um vetor de parâmetros do sistema não-linear (3.13). Ou o parâmetro T ou o equivalente ω deve necessariamente ser incluído no vetor de parâmetros $\mathbf{p}$. Neste trabalho, os parâmetros definidos para o estudo do sistema dinâmico são a frequência da resposta ω , a constante de amortecimento ζ , a frequência de excitação ω_f e a amplitude de excitação ϵ , tal que $\mathbf{p} = [\omega, \zeta, \omega_f, \epsilon]^T$. O Apêndice A.2 apresenta o código em Matlab em que o sistema (3.13) é deduzido a partir dos funcionais de energia e da equação de Euler-Lagrange (3.3). A Figura 3.1 ilustra os passos para a obtenção do sistema de equilíbrio dinâmico por meio do método semianalítico de Rayleigh-Ritz.

3.2 Determinação de órbitas periódicas

A determinação de órbitas periódicas é parte importante do estudo de sistemas dinâmicos como o da equação (3.13). Essas órbitas representam, entre outras coisas, o regime permanente das vibrações de estruturas submetidas a carregamentos periódicos. Em muitas análises procura-se entender como a variação de certos parâmetros, como frequência de excitação ou amplitude de cargas externas, influenciam a resposta permanente da estrutura. Em sistemas não-lineares, a variação desses parâmetros pode resultar em instabilidades dinâmicas de diversos tipos, o que torna a análise ainda mais importante. Existem várias ferramentas computacionais que foram

desenvolvidas para a determinação de famílias de órbitas periódicas em função da variação de certos parâmetros. Dentre essas ferramentas se destacam o Auto07p (Doedel *et al.*, 2012), Matcont (Dhooge; Govaerts; Kuznetsov, 2003), CoCo (Dankowicz; Schilder, 2013) e NLvib (Krack; Gross, 2019). Sendo as três últimas desenvolvidas em Matlab.

Órbitas periódicas são caracterizadas pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(\tau) &= \mathbf{z}(\tau + 1) \\ \mathbf{z}' &= \mathbf{f}(\tau, \mathbf{z}, \mathbf{p}) \\ 0 &\leq \tau \leq 1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Diferentes metodologias podem ser utilizadas para a determinação das órbitas periódicas e algumas delas serão apresentadas nesta seção: o *método do tiro simples*, o *método do tiro múltiplo* e o *método do balanço harmônico*. O objetivo comum desses métodos é encontrar uma órbita cuja trajetória é definida pela equação de movimento (3.13) transformando o problema de valor de contorno (3.14) em um problema de equações algébricas equivalente. Normalmente esses métodos são empregados em conjunto com um método de continuação, que são métodos iterativos discretos para determinação de uma família de soluções de certo sistema algébrico, geralmente não-linear, quando submetido à variação contínua de um ou mais parâmetros. Resumidamente, o objetivo desses métodos aplicados à determinação de órbitas periódicas é encontrar os valores do vetor de variáveis $\mathbf{x}$ que anule o resíduo $\mathbf{R}$, como mostra a equação (3.15)

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

A forma e o significado físico de $\mathbf{R}$ e $\mathbf{x}$ dependem do esquema adotado para transformação do problema de valor de contorno em um problema algébrico. Neste trabalho, foi utilizado um método da continuação do tipo preditor-corretor Euler-Newtoniano (Allgower; Georg, 2012). O método começa utilizando uma solução conhecida $[\mathbf{x}]_0$ para determinação de uma solução aproximada $\mathbf{w}$. Este passo é conhecido como preditor e é dado pela equação (3.16):

$$\mathbf{w} := [\mathbf{x}]_0 + \delta[\mathbf{t}]_0 \quad (3.16)$$

onde $[\]_0$ representa uma iteração anterior do método da continuação, tal que $[\mathbf{x}]_0$ é solução da equação (3.15); $[\mathbf{t}]_0 = \mathbf{t}(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{R}([\mathbf{x}]_0))$ é chamado de vetor tangente e é função da Jacobiana do resíduo da iteração anterior do método da continuação; e δ representa o tamanho do passo do preditor. Algumas técnicas podem ser aplicadas para modificar o valor de δ ao longo das

iterações do método da continuação otimizando o tamanho do passo e reduzindo o tempo de processamento (Allgower; Georg, 2012). A solução $\mathbf{w}$ é então refinada por meio de passos de correção até que a convergência seja atingida, de acordo com a equação (3.17):

$$\mathbf{w} := \mathbf{w} - \text{pinv}(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{R}(\mathbf{w}))\mathbf{R}(\mathbf{w}) \quad (3.17)$$

No passo de correção, o vetor $\mathbf{w}$ é atualizado subtraindo a pseudo-inversa da matriz Jacobiana $\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{R}(\mathbf{w})$ multiplicada pelo resíduo $\mathbf{R}(\mathbf{w})$. O processo é então repetido para uma nova solução $\mathbf{x} := \mathbf{w}$. A etapa do método de maior esforço computacional é a determinação da matriz Jacobiana, que representa a sensibilidade do resíduo $\mathbf{R}$ em relação ao vetor de variáveis $\mathbf{x}$. O Apêndice A.3 contém uma rotina em Matlab do método da continuação descrito.

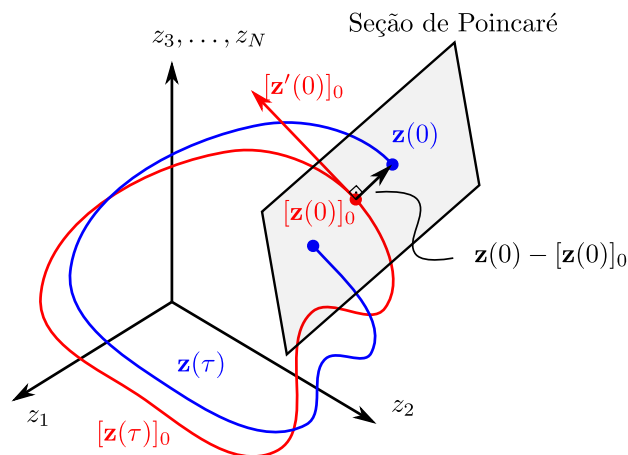
Em certos problemas, podem existir diferentes soluções $\mathbf{x}$ para a equação (3.15), mas que representam a mesma órbita periódica $\mathbf{z}(\tau)$. Isso ocorre quando há órbitas periódicas com defasagens do ângulo fase. Ou seja, há o risco de o método da continuação determinar uma nova solução $\mathbf{x}$ que representa a mesma órbita periódica da iteração anterior, e, dessa forma, ficar preso indefinitivamente em uma mesma solução. Nestes casos, não há no sistema algo que difira órbitas iguais com fases diferentes, e uma forma de se evitar esse problema é acrescentar uma nova equação ao sistema (3.15), chamada de *restrição de fase*. Existem várias equações de restrição de fase (Nayfeh; Balachandran, 2008), e, neste trabalho, será adotada a restrição da equação (3.18)

$$R_{\text{rf}} = (\mathbf{z}(0) - [\mathbf{z}(0)]_0) \cdot [\mathbf{z}'(0)]_0 \quad (3.18)$$

novamente, $[\]_0$ representa a iteração anterior do método da continuação, tal que $[\mathbf{z}(\tau)]_0$ é solução do problema, ou seja, $[\mathbf{z}(\tau)]_0 = [\mathbf{z}(\tau + 1)]_0$. Do ponto de vista geométrico, a restrição de fase da equação (3.18) busca encontrar uma nova órbita periódica $\mathbf{z}(\tau)$ cujos valores de $[\mathbf{z}(0)]_0$ e $\mathbf{z}(0)$ estejam contidos na mesma seção de Poincaré, que é perpendicular à órbita $[\mathbf{z}(\tau)]_0$ instante de tempo $\tau = 0$, como ilustrado na Figura 3.2.

Nos problemas de vibração livre, busca-se determinar as *relações frequência-amplitude* ou *relações frequência-energia* (também chamadas de *backbones* em inglês), que são curvas que relacionam a máxima amplitude ou energia de uma órbita periódica com a sua frequência. Neste caso, o sistema é autônomo, ou seja, $f = 0$, e inexistente carga externa, tal que $\epsilon = 0$. O parâmetro de amortecimento ζ e a frequência ω são variáveis no método da continuação. A medida que o método da continuação tenta encontrar uma nova solução, necessariamente o valor de ζ tenderá

Figura 3.2 – Representação gráfica da restrição de fase



a zero para que a órbita seja periódica. Como ω também é variável, uma família de órbitas periódicas de diferentes frequências e amplitudes são determinadas.

No problema de vibração forçada, busca-se encontrar uma família de soluções periódicas para diferentes valores de frequência de excitação ω_f . Neste caso, não há necessidade de imposição de uma restrição de fase pois o próprio carregamento harmônico já impõem que o sistema vibre em uma fase que está de acordo com a fase do carregamento. As curvas obtidas dessa análise são chamadas de *curvas de ressonância*, pois avaliam a ressonância entre as frequências da carga externa e da resposta do sistema dinâmico. Portanto, busca-se encontrar órbitas em que o carregamento é ressonante com a resposta do sistema, ω_f é uma das variáveis do método da continuação e é igual a ω , ou, se existirem bifurcações por duplicação de período, a um múltiplo inteiro de ω ; os demais parâmetros são fixados.

A estabilidade das órbitas periódicas pode ser avaliada por meio da teoria de Floquet (Nayfeh; Balachandran, 2008). A análise de estabilidade é conduzida localmente, examinando a evolução de perturbações $\mathbf{v}(\tau)$ do sistema nas proximidades da órbita periódica $\mathbf{z}(\tau)$ em análise, levando em consideração apenas o comportamento linear do sistema perturbado. A equação fundamental para avaliar a estabilidade é expressa pela seguinte equação:

$$\mathbf{v}'(\tau) = \partial_{\mathbf{z}} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{z}(\tau), \mathbf{p}) \mathbf{v}(\tau) \quad (3.19)$$

É possível obter N soluções linearmente independentes expressas na forma $\mathbf{v}_i(\tau)$, onde $\mathbf{V}(\tau) = [\mathbf{v}_1(\tau), \dots, \mathbf{v}_N(\tau)]^T$, e a evolução dessas soluções ao longo do período é descrita por:

$$\mathbf{V}(\tau + 1) = \mathbf{V}(\tau) \mathbf{\Phi} \quad (3.20)$$

onde Φ é uma matriz de coeficientes constantes. Considerando a condição inicial $\mathbf{V}(0) = \mathbf{I}_N$, a matriz de monodromia é dada por $\Phi = \mathbf{V}(1)$. Os autovalores $\rho_k \in \mathbb{C} (k = 1 \dots N)$ da matriz de monodromia são chamados de multiplicadores de Floquet. No caso não autônomo, quando nenhum dos multiplicadores está sobre o círculo unitário ($|\rho_k| \neq 1 \ \forall \ k = 1 \dots N$), a solução é chamada hiperbólica; caso contrário, ou seja, quando ao menos um dos multiplicadores está sobre o círculo unitário ($|\rho_k| = 1$), a solução é chamada de não hiperbólica. A solução é considerada assintoticamente estável quando todos os multiplicadores de Floquet estão contidos dentro do círculo complexo unitário, ou seja, $|\rho_k| < 1 \ \forall \ k = 1 \dots N$. Por outro lado, a solução é considerada instável quando pelo menos um dos multiplicadores de Floquet está fora do círculo unitário complexo, ou seja, $|\rho_k| > 1$. Caso a solução seja não hiperbólica, e nenhum dos multiplicadores está fora do círculo unitário, deve-se realizar uma análise não linear para avaliação da estabilidade. Uma bifurcação ocorre quando um ou mais multiplicadores de Floquet cruzam o círculo unitário, resultando na transição da solução de uma órbita estável para instável, ou vice-versa, em razão da variação de um parâmetro. Quando um multiplicador de Floquet cruza o círculo unitário sobre o eixo real no sentido positivo, tem-se uma bifurcação do tipo Ponto de Sela (SN, do inglês *Saddle-Node*). Quando um multiplicador de Floquet cruza o círculo unitário sobre o eixo real no sentido negativo, tem-se uma bifurcação do tipo Duplicação de Período (PD, do inglês *Period-Doubling*); órbitas com o período duplicado emanam deste ponto de bifurcação. Quando um par conjugado complexo cruza o círculo unitário, tem-se uma bifurcação do tipo Neimark-Sacker (NS); soluções aperiódicas surgem em decorrência dessa bifurcação.

3.2.1 Método do tiro simples

O método do tiro simples é, talvez, a forma mais direta de determinar a solução para o problema de valor de contorno (3.14). Nele, considera-se que as condições iniciais $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(0)$ são variáveis do problema. Os valores de $\mathbf{z}(\tau)$ são determinados por meio da integração numérica da do sistema dinâmico até o tempo $\tau = 1$ para as condições iniciais $\mathbf{z}_0$, de acordo com o problema de valor inicial (3.21).

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}'(\tau) &= \mathbf{f}(\tau, \mathbf{z}(\tau), \mathbf{p}) \\
\mathbf{z}(0) &= \mathbf{z}_0 \\
0 &\leq \tau \leq 1
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$\mathbf{z}(1)$ é chamado de *shooting point*. Para que a órbita seja periódica, o valor da condição inicial deve ser igual ao valor do *shooting point*, de forma que para encontrar uma solução periódica, basta encontrar a raiz da equação

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = [\mathbf{z}_0 - \mathbf{z}(1)] \tag{3.22}$$

em que as variáveis do problema são dadas por $\mathbf{x} = [\mathbf{z}_0^T, \mathbf{p}^T]^T$.

No método do tiro simples, a restrição de fase da equação (3.18) pode ser reescrita como:

$$R_{\text{rf}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{z}_0 - [\mathbf{z}_0]_0) \cdot \mathbf{f}(0, [\mathbf{z}_0]_0, [\mathbf{p}]_0) \tag{3.23}$$

tal que $[\]_0$ representa uma iteração anterior do método da continuação sendo $[\mathbf{x}]_0$ solução da equação (3.22).

A matriz Jacobiana para o resíduo da equação (3.22) pode ser dividida em submatrizes para facilitar o seu cálculo, conforme mostra a equação:

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \partial_{\mathbf{z}_0} \mathbf{R} & \partial_{\mathbf{p}} \mathbf{R} \end{bmatrix} \\
\partial_{\mathbf{x}} R_{\text{rf}} &= \begin{bmatrix} \partial_{\mathbf{z}_0} R_{\text{rf}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

A primeira submatriz, $\partial_{\mathbf{z}_0} \mathbf{R}$, captura a sensibilidade do resíduo $\mathbf{R}$ em relação às condições iniciais $\mathbf{z}_0$, e pode ser determinada pela seguinte equação:

$$\partial_{\mathbf{z}_0} \mathbf{R} = \mathbf{I}_N - \Phi \tag{3.25}$$

em que $\mathbf{I}_N$ é a matriz identidade e $\Phi = \partial_{\mathbf{z}_0} \mathbf{z}(1)$ é a sensibilidade das variáveis de estado $\mathbf{z}$, no instante de tempo $\tau = 1$, em relação à variação das condições iniciais $\mathbf{z}_0$. A matriz Φ pode ser determinada a partir da solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}'(\tau) &= \partial_{\mathbf{z}} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{z}(\tau), \mathbf{p}) \mathbf{V}(\tau) \\
\mathbf{V}(0) &= \mathbf{I}_N \\
0 &\leq \tau \leq 1
\end{aligned} \tag{3.26}$$

em que $\mathbf{V}(\tau) = \partial_{\mathbf{z}_0} \mathbf{z}(\tau)$ é uma matriz dependente do tempo determinada por meio de integração numérica. A trajetória de $\mathbf{z}(\tau)$ no intervalo $0 \leq \tau \leq 1$ é determinada previamente pela integração numérica do problema de valor inicial (3.21). A derivada $\partial_{\mathbf{z}} \mathbf{f}$ representa a sensibilidade da função vetorial $\mathbf{f}$ em relação às variáveis de estado $\mathbf{z}$.

De forma similar, pode-se calcular $\partial_{\mathbf{p}} \mathbf{R}$, que representa a sensibilidade da função resíduo em relação ao vetor de parâmetros $\mathbf{p}$, de acordo com a equação:

$$\partial_{\mathbf{p}} \mathbf{R} = \mathbf{W}(1) \quad (3.27)$$

em que $\mathbf{W}(\tau) = \partial_{\mathbf{p}} \mathbf{z}(\tau)$ é uma matriz dependente do tempo. A trajetória de $\mathbf{W}(\tau)$ é determinada pelo seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}'(\tau) &= \partial_{\mathbf{z}} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{z}(\tau), \mathbf{p}) \mathbf{W}(\tau) + \partial_{\mathbf{p}} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{z}(\tau), \mathbf{p}) \\ \mathbf{W}(0) &= \mathbf{0} \\ 0 &\leq \tau \leq 1 \end{aligned} \quad (3.28)$$

A matriz $\mathbf{W}(1)$ é determinada por meio de integração numérica para uma trajetória conhecida $\mathbf{z}(\tau)$.

Do ponto de vista de implementação computacional, as integrais numéricas das equações (3.21), (3.26), e (3.28) são computadas em conjunto. À medida em que a solução para $\mathbf{z}(\tau)$ é determinada por meio da equação (3.21), também são determinados as derivadas da matriz Jacobiana utilizando os valores encontrados para $\mathbf{z}(\tau)$.

A Jacobiana da restrição de fase depende apenas da órbita periódica determinada na iteração anterior do método da continuação, conforme a equação:

$$\partial_{\mathbf{z}_0} R_{\text{rf}} = \mathbf{f}(0, [\mathbf{z}_0]_0, [\mathbf{p}]_0) \quad (3.29)$$

Finalmente, a estabilidade das órbitas periódicas pode ser determinada via teoria de Floquet. A determinação da matriz de monodromia não necessita nenhum cálculo adicional pois seu valor é dado por Φ , de acordo com as equações (3.25) e (3.26). O Apêndice A.4 apresenta uma rotina em Matlab para determinação do resíduo e da matriz jacobiana do método do tiro simples.

Uma dificuldade que surge para certos problemas no método de tiro simples é a sensibilidade da solução ao palpite inicial. Esse fenômeno de instabilidade surge porque as soluções de cres-

cimento rápido dos problemas de valor inicial amplificam os erros de truncamento e arredondamento inerentes aos métodos de integração numérica aplicados à equação (3.21) (Na, 1979). A discretização temporal introduz naturalmente erros de aproximação. Esses erros podem se acumular e crescer indefinidamente (instabilidade numérica). Em outros casos, o erro leva a uma diminuição não física da energia (amortecimento numérico) ou redistribuição não física da energia dentro do sistema. Além disso, termos não suaves e não lineares nas equações diferenciais podem levar a descontinuidades abruptas na solução (Krack; Gross, 2019). Neste trabalho, na aplicação do método do tiro simples, foi utilizada a função ode45 do Matlab, que é baseado em uma integração explícita do tipo Range-Kutta (4,5), o par de Dormand-Prince (Dormand; Prince, 1980), para integração dos problemas de valor inicial no método do tiro simples.

3.2.2 Método do tiro múltiplo

O método do tiro múltiplo é uma alternativa caso o sistema estudado apresente instabilidades que método do tiro simples não é capaz de lidar. Nele, o intervalo de integração é dividido em N_t partes, de acordo com

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{N_t} = 1 \quad (3.30)$$

Para determinar os valores dos *shooting points* $\mathbf{z}(\tau_k)$, para uma dada condição inicial $\mathbf{z}(\tau_{k-1})$, N_t sistemas de equações ordinárias são resolvidas na forma do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'(\tau) &= \mathbf{f}(\tau, \mathbf{z}(\tau), \mathbf{p}) \\ \mathbf{z}(\tau_{k-1}) &= \mathbf{z}_k \\ \tau_{k-1} &\leq \tau \leq \tau_k \end{aligned} \quad (3.31)$$

em que $k = 1, \dots, N_t$, e os valores de $\mathbf{z}_k$ representam as condições iniciais nos instantes de tempo definidos pela equação (3.30). Neste trabalho, foi adotado o valor de $N_t = 40$, e as equações diferenciais ordinárias foram resolvidas em paralelo utilizando a função ode45 do Matlab.

O objetivo do método do tiro é determinar o vetor $\mathbf{Z} = [[\mathbf{z}_1]^T, \dots, [\mathbf{z}_{N_t}]^T]^T$, que armazena as condições iniciais $\mathbf{z}_k$. Em outras palavras, o objetivo do método da continuação é determinar a

raiz do resíduo (3.32)

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}(\tau_{N_t}) - \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}(\tau_1) - \mathbf{z}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{z}(\tau_{N_t-1}) - \mathbf{z}_{N_t} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

o que significa que todas as condições iniciais $\mathbf{z}_k$, e os correspondentes *shooting points* $\mathbf{z}(\tau_k)$, estão contidas em uma mesma órbita periódica $\mathbf{z}(\tau) = \mathbf{z}(\tau+1)$. Neste caso, o vetor de variáveis do método da continuação é dado por $\mathbf{x} = [\mathbf{Z}^\top, \mathbf{p}^\top]^\top$.

A restrição de fase da equação (3.18) pode ser aplicada de forma análoga em todos os instantes de tempo da equação (3.30), resultando na seguinte equação:

$$R_{\text{rf}}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_t} \{(\mathbf{z}_k - [\mathbf{z}_k]_0) \cdot \mathbf{f}(\tau_{k-1}, [\mathbf{z}_k]_0, [\mathbf{p}]_0)\} \quad (3.33)$$

onde $[\]_0$ representa a iteração anterior do método da continuação, tal que $[\mathbf{x}]_0$ é solução da equação (3.32). Do ponto de vista geométrico, a restrição de fase da equação (3.33) objetiva encontrar uma nova órbita periódica $\mathbf{z}(\tau)$ cujos valores de $[\mathbf{z}_k]_0$ e $\mathbf{z}_k$ estão contidos na mesma seção de Poincaré, que é perpendicular à órbita $[\mathbf{z}(\tau)]_0$ nos instantes de tempo $\tau = \tau_{k-1}$.

Novamente, a matriz Jacobiana, que representa a sensibilidade do resíduo em relação as variáveis, pode ser dividida nas seguintes submatrizes:

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \partial_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} & \partial_{\mathbf{p}} \mathbf{R} \end{bmatrix} \\ \partial_{\mathbf{x}} R_{\text{rf}} &= \begin{bmatrix} \partial_{\mathbf{Z}} R_{\text{rf}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.34)$$

A primeira submatriz, $\partial_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$, representa a sensibilidade do resíduo $\mathbf{R}$ em relação as condições iniciais $\mathbf{Z}$. Ela possui a seguinte estrutura:

$$\partial_{\mathbf{Y}} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_N & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \Phi_{N_t} \\ \Phi_1 & -\mathbf{I}_N & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2 & -\mathbf{I}_N & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \Phi_{N_t-1} & -\mathbf{I}_N \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Na matriz $\partial_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$, $\mathbf{I}_N$ representa a matriz identidade, e $\Phi_k = \partial_{\mathbf{z}_k} \mathbf{z}(\tau_k)$ representa a sensibilidade das variáveis de estado $\mathbf{z}$ no instante de tempo τ_k em relação à variação das condições iniciais

$\mathbf{z}_k$. A matriz $\Phi_k = \mathbf{C}_k(\tau_k)$ pode ser determinada por meio do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}'_k(\tau) &= \mathbf{C}_k(\tau) \partial_{\mathbf{z}} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{z}(\tau), \mathbf{p}) \\ \mathbf{C}_k(\tau_{k-1}) &= \mathbf{I}_N \\ \tau_{k-1} &\leq \tau \leq \tau_k\end{aligned}\tag{3.36}$$

em que $\mathbf{C}_k(\tau) = \partial_{\mathbf{z}_k} \mathbf{z}(\tau)$ é uma matriz dependente do tempo determinada por meio de integração numérica. A trajetória $\mathbf{z}(\tau)$ no intervalo de tempo $\tau_{k-1} \leq \tau \leq \tau_k$ é determinada previamente resolvendo o problema de valor inicial (3.31). A sensibilidade $\partial_{\mathbf{z}} \mathbf{f}$ representa a derivada da função vetorial $\mathbf{f}$ em relação às variáveis de estado $\mathbf{z}$.

De forma semelhante, pode-se determinar a submatriz $\partial_{\mathbf{p}} \mathbf{R}$, que representa a sensibilidade da função resíduo em relação ao vetor de parâmetros $\mathbf{p}$. Ela possui a seguinte estrutura:

$$\partial_{\mathbf{p}} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(\tau_{N_t}) \\ \mathbf{D}(\tau_1) \\ \vdots \\ \mathbf{D}(\tau_{N_t-1}) \end{bmatrix}\tag{3.37}$$

em que $\mathbf{D}(\tau) = \partial_{\mathbf{p}} \mathbf{z}(\tau)$ é uma matriz dependente no tempo calculada por meio do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}'(\tau) &= \partial_{\mathbf{z}} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{z}(\tau), \mathbf{p}) \mathbf{D}(\tau) + \partial_{\mathbf{p}} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{z}(\tau), \mathbf{p}) \\ \mathbf{D}(\tau_{k-1}) &= \mathbf{0} \\ \tau_{k-1} &\leq \tau \leq \tau_k\end{aligned}\tag{3.38}$$

de forma que $\mathbf{D}(\tau_k)$ seja determinada por meio de integração numérica, dada uma conhecida trajetória $\mathbf{z}(\tau)$.

Novamente, o ponto de vista de implementação computacional, as integrais dos problemas de valor inicial das equações (3.31), (3.36), e (3.38) são computadas em conjunto. À medida em que a solução de $\mathbf{z}(\tau)$ é encontrado por meio da equação (3.31), também são determinados os gradientes utilizando os mesmos valores determinados para $\mathbf{z}(\tau)$.

A Jacobiana da restrição de fase depende apenas da órbita periódica da iteração anterior do método da continuação, de acordo com a equação:

$$\partial_{\mathbf{Y}} R_{\text{rf}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\tau_0, [\mathbf{z}_1]_0, [\mathbf{p}]_0) & \dots & \mathbf{f}(\tau_{N_t-1}, [\mathbf{z}_{N_t}]_0, [\mathbf{p}]_0) \end{bmatrix}\tag{3.39}$$

Finalmente, a estabilidade das solução periódicas pode ser determinada pela teoria de Floquet. A determinação da matriz de monodromia não necessita de nenhum cálculo adicional já que pode-se utilizar as matrizes Φ_k , utilizadas no cálculo da matriz Jacobiana, para determinação da matriz de monodromia, de acordo com a equação:

$$\Phi = \prod_{k=1}^{N_t} \Phi_k \quad (3.40)$$

No método do tiro múltiplo, como o problema de valor inicial é dividido em N_t intervalos de tempo – cujas soluções são independentes entre si –, as instabilidade numéricas inerentes ao processo de integração numérica diminuem, tornando-o mais atrativo em relação ao método do tiro simples. Além disso, as integrações da equação (3.31) podem ser realizadas em paralelo, reduzindo o tempo de processamento. A desvantagem é que o sistema de equações algébricas (3.32) aumenta significativamente em relação ao sistema (3.22). O Apêndice A.5 apresenta uma rotina em Matlab para determinação do resíduo e da matriz jacobiana do método do tiro múltiplo.

3.2.3 Método do balanço harmônico

Uma órbita periódica pode ser representada por uma série de Fourier truncada. Em muitos casos, uma aproximação razoavelmente precisa é alcançada quando apenas um pequeno número de harmônicos é considerado. Portanto, uma abordagem natural é buscar uma solução aproximada na forma de uma série de Fourier truncada. Substituir essa aproximação no sistema equações diferenciais ordinárias de equilíbrio geralmente leva a um termo residual. Como a solução aproximada é periódica, o termo residual também é. O método do balanço harmônico requer que os coeficientes de Fourier do termo residual se anulem, até a ordem de truncamento da aproximação. Isso resulta em um sistema de equações algébricas em relação aos coeficientes de Fourier desconhecidos da aproximação (Krack; Gross, 2019). Nesta seção, o método do balanço harmônico será brevemente apresentado, para obter informações mais abrangentes, sugere-se a consulta ao trabalho de Krack e Gross (2019), que serve de base para este trabalho.

Primeiramente, a equação (3.4) pode ser reescrita considerando o tempo normalizado τ , ou seja

$$\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 \mathbf{M}\mathbf{U}''(\tau) + \frac{\omega}{2\pi} \mathbf{C}(\zeta)\mathbf{U}'(\tau) + \mathbf{K}\mathbf{U}(\tau) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{U}(\tau)) - \epsilon \mathbf{f}_e \cos(\eta 2\pi\tau) = \mathbf{0} \quad (3.41)$$

em que $\eta = \omega_f/\omega$ é a razão entre a frequência de excitação e a frequência da resposta. Considera-se, inicialmente, $\eta = 1$. Caso hajam bifurcações por duplicação de período, deve-se fazer uma outra análise considerando $\eta = 2, 4, \dots$, assim por diante.

Como dito anteriormente, no método do balanço harmônico, o vetor de deslocamentos é aproximado por meio da série de Fourier truncada até ordem H , conforme mostra a seguinte equação:

$$\mathbf{U}(\tau) \approx \mathbf{q}_0 + \sum_{i=1}^H [\mathbf{q}_i^c \cos(2\pi(\tau)(i)) + \mathbf{q}_i^s \sin(2\pi(\tau)(i))] \quad (3.42)$$

onde $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{q}_i^c$ e $\mathbf{q}_i^s$ são os coeficientes de Fourier da expansão. Uma representação concisa da expansão (3.42) é dada pela equação (3.43):

$$\mathbf{U}(\tau) \approx \mathbf{h}_H(\tau) \hat{\mathbf{q}} \quad (3.43)$$

Na equação (3.43), $\hat{\mathbf{q}}$ é um vetor que contém todos os coeficientes de Fourier da expansão, dispostos da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{q}} = \text{vec} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 & \mathbf{q}_1^c & \mathbf{q}_1^s & \dots & \mathbf{q}_H^c & \mathbf{q}_H^s \end{bmatrix} \right) \quad (3.44)$$

O vetor $\mathbf{h}_H(\tau)$ armazena os termos trigonométricos da seguinte maneira:

$$\mathbf{h}_H(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & \cos(2\pi\tau) & \sin(2\pi\tau) & \dots & \cos(H2\pi\tau) & \sin(H2\pi\tau) \end{bmatrix} \odot \mathbf{I}_n \quad (3.45)$$

Para obter os vetores de velocidade e aceleração, que aparecem na equação (3.41), basta diferenciar a equação (3.43) em relação ao tempo, resultando nas equações (3.46):

$$\mathbf{U}'(\tau) \approx \mathbf{h}_H(\tau) 2\pi \nabla \hat{\mathbf{q}} \quad (3.46a)$$

$$\mathbf{U}''(\tau) \approx \mathbf{h}_H(\tau) (2\pi)^2 \nabla^2 \hat{\mathbf{q}} \quad (3.46b)$$

A matriz ∇ , que aparece nas equações (3.46a) e (3.46b), contém os coeficientes que surgem das derivadas no tempo, e é determinada por meio da equação (3.47):

$$\nabla = \check{\nabla} \odot \mathbf{I}_n \quad (3.47)$$

em que

$$\check{\nabla} = \text{diag} \left[0, \nabla_1, \nabla_2, \dots, \nabla_H \right], \nabla_k = \begin{bmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Ao substituir as equações (3.43), (3.46a) e (3.46b) em (3.41), e realizar algumas manipulações matemáticas, chega-se à seguinte equação de equilíbrio:

$$\underbrace{(\check{\nabla}^2 \otimes \omega^2 \mathbf{M} + \check{\nabla}^1 \otimes \omega \mathbf{C}(\zeta) + \check{\nabla}^0 \otimes \mathbf{K})}_{\hat{\mathbf{S}}(\omega, \zeta)} \hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{f}}_{\text{nl}}(\hat{\mathbf{q}}) - \epsilon \hat{\mathbf{f}}_e = \mathbf{0} \quad (3.49)$$

A equação (3.49) representa a equação de equilíbrio das forças dinâmicas no domínio da frequência. Ela captura o equilíbrio entre as forças internas lineares, as forças internas não lineares e as forças externas. As forças internas lineares são expressas em termos da matriz de rigidez dinâmica $\hat{\mathbf{S}}(\omega, \zeta)$. O vetor $\hat{\mathbf{f}}_{\text{nl}}(\hat{\mathbf{q}})$ representa as forças internas não lineares, que neste caso dependem apenas dos deslocamentos. O vetor $\hat{\mathbf{f}}_e$ representa as forças externas. Como a excitação depende apenas da função harmônica $\cos(\eta 2\pi\tau)$, $\hat{\mathbf{f}}_e$ é dado pela equação (3.50):

$$\hat{\mathbf{f}}_e = \text{vec} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \overset{\text{posição } 2\eta}{\uparrow} \mathbf{f}_e & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \quad (3.50)$$

3.2.3.1 Esquema AFT

A determinação das forças internas lineares e das forças externas é relativamente direta em comparação com as forças internas não lineares. Neste trabalho, foi aplicado um esquema de *Alternating Frequency-Time* (AFT), que é o método mais popular e versátil para resolver forças não lineares dentro do método do balanço harmônico (Krack; Gross, 2019).

Para ilustrar o AFT, primeiramente considere a divisão do intervalo de tempo $0 \leq \tau \leq 1$ em N_t subintervalos, dados por:

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{N_t} = 1 \quad (3.51)$$

Suponha que o vetor de deslocamento $\mathbf{U}(\tau)$ seja conhecido em cada instante de tempo τ_i , resultando em um vetor $\tilde{\mathbf{U}}$ que contém todos os vetores de deslocamento nesses instantes, ou seja,

$$\tilde{\mathbf{U}} = \text{vec} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{U}(0) & \mathbf{U}(\frac{1}{N_t}) & \dots & \mathbf{U}(\frac{N_t-1}{N_t}) \end{bmatrix} \right) \quad (3.52)$$

É possível, usando a transformada discreta de Fourier, determinar o vetor de coeficientes $\hat{\mathbf{q}}$ a partir do vetor $\tilde{\mathbf{U}}$, como mostrado pela equação:

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{E}_{HN_t}^* \tilde{\mathbf{U}} \quad (3.53)$$

Além disso, é possível determinar o vetor $\tilde{\mathbf{U}}$ a partir do vetor de coeficientes de Fourier $\hat{\mathbf{q}}$ realizando a transformada de Fourier inversa, ou seja:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{E}_{N_t H} \hat{\mathbf{q}} \quad (3.54)$$

As matrizes $\mathbf{E}_{HN_t}^*$ e $\mathbf{E}_{N_t H}$ contêm os termos trigonométricos para realizar as transformadas de Fourier direta e inversa, conforme mostrado nas equações (3.55).

$$\mathbf{E}_{HN_t}^* = \frac{2}{N_t} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \\ \cos(\frac{2\pi(1)(0)}{N_t}) & \dots & \cos(\frac{2\pi(1)(N_t-1)}{N_t}) \\ \vdots & & \vdots \\ \sin(\frac{2\pi(H)(0)}{N_t}) & \dots & \sin(\frac{2\pi(H)(N_t-1)}{N_t}) \end{bmatrix} \odot \mathbf{I}_n \quad (3.55a)$$

$$\mathbf{E}_{N_t H} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\frac{2\pi(0)(1)}{N_t}) & \dots & \sin(\frac{2\pi(0)(H)}{N_t}) \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cos(\frac{2\pi(N_t-1)(1)}{N_t}) & \dots & \sin(\frac{2\pi(N_t-1)(H)}{N_t}) \end{bmatrix} \odot \mathbf{I}_n \quad (3.55b)$$

No esquema AFT, o vetor de deslocamento $\tilde{\mathbf{U}}$ é calculado a partir do vetor de coeficientes de Fourier $\hat{\mathbf{q}}$ por meio da transformada de Fourier inversa. Em seguida, as forças internas não lineares $\mathbf{f}_{nl}$ são determinadas para cada instante de tempo τ_i e armazenadas no vetor $\tilde{\mathbf{f}}_{nl}$ de acordo com a equação:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{nl}(\tilde{\mathbf{U}}) = \text{vec} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{U}(0)) & \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{U}(\frac{1}{N_t})) & \dots & \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{U}(\frac{N_t-1}{N_t})) \end{bmatrix} \right) \quad (3.56)$$

Por fim, a transformada de Fourier é aplicada às forças não lineares nos N_t instantes de tempo em que foram determinadas, resultando em um vetor de forças internas não lineares no domínio da frequência, conforme mostra a equação (3.57).

$$\hat{\mathbf{f}}_{nl}(\hat{\mathbf{q}}) = \mathbf{E}_{HN_t}^* \tilde{\mathbf{f}}_{nl}(\mathbf{E}_{N_t H} \hat{\mathbf{q}}) \quad (3.57)$$

Vale ressaltar que N_t deve ser grande o suficiente para que as transformadas de Fourier direta e inversa representem com precisão os deslocamentos e as forças internas não lineares nos domínios do tempo e da frequência.

3.2.3.2 Método da continuação aplicado ao método do balanço harmônico

No método do balanço harmônico, o resíduo é dado pela equação (3.49), ou seja:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{S}}(\omega, \zeta) \hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{f}}_{nl}(\hat{\mathbf{q}}) - \epsilon \hat{\mathbf{f}}_e \quad (3.58)$$

onde $\mathbf{x} = [\hat{\mathbf{q}}^\top, \mathbf{p}^\top]^\top$ representa as variáveis do método de continuação.

Novamente, a matriz Jacobiana pode ser dividida em duas submatrizes:

$$\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \partial_{\hat{\mathbf{q}}}\mathbf{R} & \partial_{\omega}\mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

A Jacobiana em relação a $\mathbf{p}$ é calculada diretamente a partir da derivada da equação (3.58), como segue:

$$\partial_{\mathbf{p}}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} (\ddot{\nabla}^2 \otimes 2\omega\mathbf{M} + \ddot{\nabla}^1 \otimes \mathbf{C}) \hat{\mathbf{q}} & (\ddot{\nabla}^1 \otimes \omega\partial_{\zeta}\mathbf{C}(\zeta)) \hat{\mathbf{q}} & -\hat{\mathbf{f}}_e \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

tal que o vetor de parâmetros neste caso é dado por $\mathbf{p} = [\omega, \zeta, \epsilon]^\top$, já que o parâmetro η , ou a frequência de excitação ω_f equivalente, deve ser constante para o cálculo do resíduo.

A matriz Jacobiana em relação ao vetor $\hat{\mathbf{q}}$ é dada por:

$$\partial_{\hat{\mathbf{q}}}\mathbf{R} = \hat{\mathbf{S}}(\omega, \zeta) + \partial_{\hat{\mathbf{q}}}\hat{\mathbf{f}}_{nl}(\hat{\mathbf{q}}) \quad (3.61)$$

sendo que a parcela da Jacobiana referente às forças internas não lineares $\partial_{\hat{\mathbf{q}}}\hat{\mathbf{f}}_{nl}(\hat{\mathbf{q}})$ também pode ser calculada por meio do esquema AFT, como segue:

$$\begin{aligned} \partial_{\hat{\mathbf{q}}}\hat{\mathbf{f}}_{nl}(\hat{\mathbf{q}}) &= \mathbf{E}_{HN_t}^* \tilde{\mathbf{J}}_{nl}(\mathbf{E}_{N_t H} \hat{\mathbf{q}}) \\ \tilde{\mathbf{J}}_{nl}(\tilde{\mathbf{U}}) &= \text{diag} \left(\left[\partial_{\mathbf{U}}\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{U}(0)) \quad \partial_{\mathbf{U}}\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{U}(\frac{1}{N_t})) \quad \dots \quad \partial_{\mathbf{U}}\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{U}(\frac{N_t-1}{N_t})) \right] \right) \end{aligned} \quad (3.62)$$

O resíduo da restrição de fase pode ser determinado substituindo as aproximações $\mathbf{U}$ e $\mathbf{U}'$, dadas respectivamente pelas equações (3.43) e (3.46a), no vetor de variáveis de estado $\mathbf{z}$ da equação (3.18), no instante de tempo $\tau = 0$, resultando em

$$R_{rf}(\mathbf{x}) = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{h}_H(0)\hat{\mathbf{q}} \\ \mathbf{h}_H(0)2\pi\nabla\hat{\mathbf{q}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{h}_H(0)\hat{\mathbf{q}} \\ \mathbf{h}_H(0)2\pi\nabla\hat{\mathbf{q}} \end{bmatrix}_0 \right) \cdot \mathbf{f} \left(0, \begin{bmatrix} \mathbf{h}_H(0)\hat{\mathbf{q}} \\ \mathbf{h}_H(0)2\pi\nabla\hat{\mathbf{q}} \end{bmatrix}_0, [\mathbf{p}]_0 \right) \quad (3.63)$$

Finalmente, a matriz Jacobiana da restrição de fase é dada por:

$$\partial_{\mathbf{x}}R_{rf} = \begin{bmatrix} \partial_{\hat{\mathbf{q}}}R_{rf} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

tal que o valor de $\partial_{\hat{\mathbf{q}}}R_{rf}(\mathbf{x})$ é dado pela seguinte equação:

$$\partial_{\hat{\mathbf{q}}}R_{rf}(\mathbf{x}) = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{h}_H(0) \\ \mathbf{h}_H(0)2\pi\nabla \end{bmatrix} \right) \cdot \mathbf{f} \left(0, \begin{bmatrix} \mathbf{h}_H(0)\hat{\mathbf{q}} \\ \mathbf{h}_H(0)2\pi\nabla\hat{\mathbf{q}} \end{bmatrix}_0, [\mathbf{p}]_0 \right) \quad (3.65)$$

O Apêndice A.6 apresenta uma rotina em Matlab para determinação do resíduo e da matriz jacobiana do método do balanço harmônico.

3.2.3.3 Método do balanço harmônico adaptativo

Nos métodos convencionais de balanço harmônico, o número de harmônicos H é assumido como constante durante o cálculo de órbitas periódicas utilizando o método de continuação. Alguns métodos foram desenvolvidos para selecionar os harmônicos dominantes no sistema e remover harmônicos desnecessários. Nessas abordagens, o número de harmônicos pode ser alterado com base nos critérios utilizados. O principal objetivo dos Método do Balanço Harmônico Adaptativo (MBHA) é aumentar a eficiência computacional durante o processo de solução.

Neste trabalho, foi utilizado o método adaptativo baseado em pseudo-resposta, desenvolvido por Sert e Cigeroglu (2019). Para demonstrar como o método funciona, considere um vetor inicial $\hat{\mathbf{v}}$ que contém os coeficientes de Fourier dos harmônicos até a ordem máxima H , em um sistema dinâmico com n graus de liberdade. O número total de coeficientes nesse caso é $n(2H + 1)$.

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}} &= \text{vec} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 & \mathbf{v}_1^c & \mathbf{v}_1^s & \dots & \mathbf{v}_H^c & \mathbf{v}_H^s \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{vec} \left(\begin{bmatrix} v_{1,0} & v_{1,1}^c & v_{1,1}^s & \dots & v_{1,H}^c & v_{1,H}^s \\ \vdots & & & & & \vdots \\ v_{n,0} & v_{n,1}^c & v_{n,1}^s & \dots & v_{n,H}^c & v_{n,H}^s \end{bmatrix} \right)\end{aligned}\quad (3.66)$$

Para determinar quais coeficientes de Fourier são mais relevantes para a análise, cada grau de liberdade é analisado separadamente. O valor de $\epsilon_{i,j}^{\hat{\mathbf{v}}}$ é calculado, representando a magnitude relativa dos coeficientes j em relação ao grau de liberdade i , de acordo com a seguinte equação:

$$\epsilon_{i,j}^{\hat{\mathbf{v}}} = \frac{\bar{\epsilon}_{i,j}^{\hat{\mathbf{v}}}}{\max[\bar{\epsilon}_{i,0}^{\hat{\mathbf{v}}}, \dots, \bar{\epsilon}_{i,H}^{\hat{\mathbf{v}}}]}\quad (3.67)$$

onde os valores de $\bar{\epsilon}_{i,j}^{\hat{\mathbf{v}}}$ são determinados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}_{i,0}^{\hat{\mathbf{v}}} &= |v_{i,0}| \\ \bar{\epsilon}_{i,j}^{\hat{\mathbf{v}}} &= \sqrt{(v_{i,j}^c)^2 + (v_{i,j}^s)^2} \quad \text{for } j > 0\end{aligned}\quad (3.68)$$

Na Eq. (3.68), $\bar{\epsilon}_{i,j}^{\hat{\mathbf{v}}}$ representa a magnitude do coeficiente de Fourier do harmônico j para o grau de liberdade i .

Os harmônicos cujos valores correspondentes de $\epsilon_{i,j}^{\hat{\mathbf{v}}}$ são menores que um limiar arbitrário $\bar{\epsilon}$ são removidos do problema. A equação (3.69) ilustra a aplicação do filtro. Nessa equação, o vetor $\hat{\mathbf{v}}$ é usado como critério de seleção, mas o filtro é aplicado para reduzir o vetor $\hat{\mathbf{w}}$, que também

é composto pelos mesmos harmônicos e, portanto, possui a mesma dimensão e estrutura que $\hat{\mathbf{w}}$.

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{w}} &= \mathcal{F}_{\hat{\mathbf{v}}}(\hat{\mathbf{w}}) \\ &= \text{vec} \left(\begin{bmatrix} w_{i,0} & \dots & w_{j,k}^c & w_{j,k}^s & \dots \end{bmatrix} \right) \quad \forall \epsilon_{i,0}^{\hat{\mathbf{v}}}, \epsilon_{j,k}^{\hat{\mathbf{v}}} \geq \bar{\epsilon}\end{aligned}\quad (3.69)$$

Pode-se observar que a dimensão do vetor resultante diminui após a aplicação do filtro, ou seja, $\dim(\bar{\mathbf{w}}) \leq \dim(\hat{\mathbf{w}})$. Da mesma forma, esse filtro também pode ser aplicado a matrizes, como a matriz $\hat{\mathbf{S}}$. Neste caso, as colunas e linhas correspondentes aos harmônicos selecionados são excluídas.

Uma operação inversa pode ser definida na forma da equação (3.70), que retorna um vetor cujos elementos de $\bar{\mathbf{w}}$ são armazenados em suas posições originais.

$$\hat{\mathbf{w}}^* = \mathcal{F}_{\hat{\mathbf{v}}}^{-1}(\bar{\mathbf{w}}) \quad (3.70)$$

Embora os vetores $\hat{\mathbf{w}}$ e $\hat{\mathbf{w}}^*$ tenham a mesma dimensão e compartilhem muitos elementos, eles não são iguais porque os elementos de $\hat{\mathbf{w}}$ que não satisfazem o critério (3.69) são definidos como zero em $\hat{\mathbf{w}}^*$.

O filtro $\mathcal{F}$ é aplicado para reduzir a dimensão do sistema de equações (3.49). Em uma determinada iteração do método de continuação, seja $[\hat{\mathbf{q}}]_0$ a solução conhecida do problema para um conjunto de parâmetros $[\mathbf{p}]_0$. O filtro é aplicado primeiro para reduzir a dimensão do sistema usando o vetor de forças internas não lineares $\hat{\mathbf{f}}_{\text{nl}} = \hat{\mathbf{f}}_{\text{nl}}([\hat{\mathbf{q}}]_0)$ como critério. Em outras palavras,

$$[\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{f}}_{\text{nl}}, \bar{\mathbf{f}}_{\text{e}}] = \mathcal{F}_{\hat{\mathbf{f}}_{\text{nl}}}([\hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{f}}_{\text{nl}}, \hat{\mathbf{f}}_{\text{e}}]) \quad (3.71)$$

Devido às operações não lineares, é natural que harmônicos de ordem superior tenham maior relevância em $\hat{\mathbf{f}}_{\text{nl}}$ em comparação com $\hat{\mathbf{q}}$. Isso torna seu uso como vetor critério desvantajoso para a redução do problema. Sert e Cigeroglu (2019) propõem o uso da pseudo-resposta $\bar{\mathbf{q}}_{\text{pr}}$, calculada pela equação (3.72), como critério.

$$\bar{\mathbf{q}}_{\text{pr}} = [\bar{\mathbf{S}}([\omega]_0, [\zeta]_0)]^{-1}([\epsilon]_0 \bar{\mathbf{f}}_{\text{e}} - \bar{\mathbf{f}}_{\text{nl}}) \quad (3.72)$$

Em outras palavras, o filtro $\mathcal{F}$ é aplicado duas vezes, primeiro ao vetor de forças não lineares e depois ao vetor de pseudo-resposta, como mostra a equação:

$$[\bar{\bar{\mathbf{S}}}, \bar{\bar{\mathbf{f}}}_{\text{nl}}, \bar{\bar{\mathbf{f}}}_{\text{e}}] = \mathcal{F}_{\bar{\mathbf{q}}_{\text{pr}}}([\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{f}}_{\text{nl}}, \bar{\mathbf{f}}_{\text{e}}]) \quad (3.73)$$

O sistema reduzido (3.74) é resolvido para o próximo passo do método de continuação, considerando o resíduo do sistema reduzido da equação (3.74):

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \bar{\bar{\mathbf{S}}}(\omega, \zeta) \bar{\bar{\mathbf{q}}} + \bar{\bar{\mathbf{f}}}_{\text{nl}}(\bar{\bar{\mathbf{q}}}) - \epsilon \bar{\bar{\mathbf{f}}}_{\text{e}} \quad (3.74)$$

Os novos coeficientes de Fourier são dados por

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathcal{F}_{\hat{\mathbf{q}}_{\text{pr}}}^{-1}(\bar{\bar{\mathbf{q}}}) \quad (3.75)$$

onde $\bar{\bar{\mathbf{q}}}$ é solução da equação (3.74).

Neste trabalho, além dos filtros propostos por Sert e Cigeroglu (2019), foi aplicado um terceiro filtro, que utiliza o vetor tangente $\hat{\mathbf{t}}$ do método de continuação como critério, semelhante ao método adaptativo proposto por Grolet e Thouverez (2012), conforme:

$$[\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{f}}_{\text{nl}}, \bar{\mathbf{f}}_{\text{e}}] = \mathcal{F}_{\hat{\mathbf{t}}}([\hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{f}}_{\text{nl}}, \hat{\mathbf{f}}_{\text{e}}]) \quad (3.76)$$

onde $\hat{\mathbf{t}}$ representa as componentes do vetor tangente relativas ao vetor $\hat{\mathbf{q}}$. O objetivo de aplicar este filtro é garantir que os harmônicos pertinentes, indicados pelo passo preditor, sejam preservados no próximo passo do algoritmo de continuação. Os harmônicos utilizados são aqueles resultantes da combinação dos filtros (3.73) e (3.76).

3.2.3.4 Análise da estabilidade

No método do balanço harmônico, pode-se utilizar o método de Hill como alternativa no domínio da frequência ao método de Floquet para determinação da estabilidade das órbitas periódicas. Seja $\mathbf{U}^*(\tau) = \mathbf{h}_H(\tau) \hat{\mathbf{q}}^*$ uma solução periódica para a equação (3.41). Para analisar se essa solução é estável, considere uma resposta perturbada em relação a solução periódica, ou seja:

$$\mathbf{U}(\tau) = \mathbf{U}^*(\tau) + \Delta \mathbf{U}(\tau) \quad (3.77)$$

Substituindo $\mathbf{U}(\tau)$ na equação (3.41) e expandindo a equação resultante em série de Taylor em torno da solução periódica $\mathbf{U}^*(\tau)$, chega-se a:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 \mathbf{M} \mathbf{U}^{*''}(\tau) + \frac{\omega}{2\pi} \mathbf{C}(\zeta) \mathbf{U}^{*'}(\tau) + \mathbf{K} \mathbf{U}^*(\tau) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{U}^*(\tau)) - \epsilon \mathbf{f}_{\text{e}} \cos(\eta 2\pi \tau) + \\ & [\mathbf{K} + \mathbf{J}_{\text{nl}}(\mathbf{U}^*(\tau))] \Delta \mathbf{U}(\tau) + \left[\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \mathbf{C}(\zeta) + \mathbf{K}\right] \Delta \mathbf{U}'(\tau) + \\ & \left[\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 \mathbf{M}\right] \Delta \mathbf{U}''(\tau) + O(\Delta^2) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.78)$$

A primeira linha da equação (3.78) é nula, já que $\mathbf{U}^*(\tau)$ é solução de (3.41). Considere que a parcela perturbada da trajetória $\mathbf{U}(\tau)$ é dada pela seguinte equação:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{U}(\tau) &= \mathbf{P}(\tau) \left(\frac{\exp(\sigma\tau + \Phi)}{2} \right) \\ \Delta \mathbf{U}'(\tau) &= (\mathbf{P}'(\tau) + \sigma \mathbf{P}(\tau)) \left(\frac{\exp(\sigma\tau + \Phi)}{2} \right) \\ \Delta \mathbf{U}''(\tau) &= (\mathbf{P}''(\tau) + 2\sigma \mathbf{P}'(\tau) + \sigma^2 \mathbf{P}(\tau)) \left(\frac{\exp(\sigma\tau + \Phi)}{2} \right)\end{aligned}\quad (3.79)$$

em que o termo exponencial indica se a perturbação vai diminuir ou aumentar com o tempo; e $\mathbf{P}(\tau)$ representa a parte periódica da perturbação, tal que $\mathbf{P}(\tau) = \mathbf{P}(\tau + 1)$, e também pode ser expandido em série de Fourier como:

$$\mathbf{P}(\tau) \approx \mathbf{h}_H(\tau) \hat{\mathbf{p}} \quad (3.80)$$

Substituindo (3.80) em (3.78) e analisando a equação resultante no domínio da frequência e negligenciando termos de ordem superior, chega-se ao seguinte problema de autovalor/autovetor quadrático:

$$\left[\sigma^2 (\check{\nabla}^0 \otimes \mathbf{M}) + \sigma^1 (\check{\nabla}^1 \otimes 2\omega \mathbf{M} + \check{\nabla}^0 \otimes \mathbf{C}(\zeta)) + \sigma^0 (\hat{\mathbf{S}}(\omega, \zeta) + \partial_{\hat{\mathbf{q}}^*} \hat{\mathbf{f}}_{nl}(\hat{\mathbf{q}}^*)) \right] \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (3.81)$$

Os autovalores σ_k derivados dessa equação fornecem critérios de estabilidade para a solução, tal que os multiplicadores de Floquet podem ser calculados como $\mu_k = \exp(\sigma_k T)$. Krack e Gross (2019) apresenta critérios para seleção dos autovalores σ_k que são redundantes por conta do aumento de escala do problema no domínio da frequência.

3.2.3.5 Método do tiro versus método do balanço harmônico

Os métodos do tiro simples e múltiplo requerem integrações numéricas no tempo que normalmente se baseiam em uma fórmula de quadratura que pode ser resolvida explicitamente para os estados desconhecidos no próximo nível de tempo, de modo que apenas avaliações da função f sejam necessárias para cada passo de tempo. Esse é o caso dos métodos da família Runge-Kutta, como o utilizado neste trabalho. Em alguns casos, esses métodos exigem passos de tempo relativamente pequenos para evitar o crescimento não físico e ilimitado do erro de aproximação (instabilidade numérica). Métodos implícitos, como o esquema Newmark de aceleração média constante, geralmente possuem estabilidade incondicional, permitindo passos de tempo comparativamente grandes, mas requerem a solução de um sistema de equações algébricas não

lineares para avançar de um nível de tempo para o próximo. Além disso, frequentemente há um amortecimento numérico, ou seja, uma diminuição não física da energia (Krack; Gross, 2019).

A abordagem por balanço harmônico não está intrinsecamente vinculada a nenhum esquema de passo de tempo. A tarefa não é resolver um problema de valor inicial, mas sim um problema de valor de contorno periódico. A aproximação é a priori periódica. Os coeficientes de Fourier desconhecidos são determinados pela resolução de um sistema de equações algébricas. A dimensão desse sistema de equações é $n(2H + 1)$, enquanto a dimensão do problema em um esquema de integração numérica é geralmente $2n$. Se o estado periódico for alcançado muito rapidamente e, ao mesmo tempo, for necessário um alto grau de truncamento H para aproximar a dinâmica com precisão suficiente, a integração numérica direta pode de fato ser mais eficiente (Krack; Gross, 2019).

CAPÍTULO 4

MÉTODOS PARA OBTENÇÃO DE MODELOS DE ORDEM REDUZIDA

Os métodos semianalíticos são frequentemente aplicados no estudo de estruturas em regime altamente não linear em que o objetivo é construir um modelo confiável e de dimensão relativamente baixa, diminuindo o esforço computacional. As funções de forma possuem um papel importante na construção desse modelo e não existe uma maneira direta de encontrar um conjunto dessas funções que gerem um modelo de baixa dimensão. A expansão em série de Fourier, por exemplo, é uma maneira simples e confiável de gerar essas funções, mas pode ser bem ineficiente (Pinho; Del Prado; Silva, 2022). Quanto mais complexo são a geometria, as condições de contorno e os campos de deslocamentos, mais funções trigonométricas são necessárias e não existe, diretamente na expansão por série de Fourier. A estratégia adotada em muitos trabalhos é começar com funções com menos semiondas e adicionar funções com mais semiondas até atingir um critério de convergência. Essa estratégia pode ser inviável do ponto de vista computacional em análises dinâmicas não lineares.

Neste sentido, técnicas de redução de ordem são necessárias para tornar o modelo computacionalmente viável. Segundo Touzé, Vizzaccaro e Thomas (2021), a maior parte dos métodos de redução de ordem podem ser visto como métodos lineares, em que o objetivo é achar a melhor base ortogonal das variáveis do problema para representar o comportamento da estrutura. A decomposição de Karhunen-Loève é um exemplo de método linear fundamentado em técnicas estatísticas e será tratada na próxima seção. Técnicas não lineares, por outro lado, definem um novo conjunto de variáveis que são relacionadas de forma não linear às variáveis iniciais, ao invés de produzir uma mudança de base linear. Na seção 4.2 será apresentada uma técnica não linear baseada nas variedades invariantes do sistema dinâmico.

4.1 Método de Karhunen-Loève

Uma maneira de se obter um modelo de ordem reduzida¹ em sistemas complexos é usando o método de Karhunen-Loève, também conhecido como *Decomposição Ortogonal Própria* (DOP) (Sirovich, 1987a,b,c). O método é baseado na análise de pontos da resposta do sistema (selecionados na posição t_i) obtida ou de uma solução matemática altamente confiável, ou de um resultado experimental, ou de um experimento numérico via MEF, como usado neste trabalho.

O primeiro passo do método é construir a matriz de amostragem $\mathbf{W}_k^*$, dada pela equação (4.1), composta por um conjunto de deslocamentos nodais ao longo da resposta obtida pelo MEF.

$$\mathbf{W}_k^* = \begin{bmatrix} u_{k_1}(t_1) & u_{k_2}(t_1) & u_{k_3}(t_1) & \cdots & u_{k_C}(t_1) \\ u_{k_1}(t_2) & u_{k_2}(t_2) & u_{k_3}(t_2) & \cdots & u_{k_C}(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k_1}(t_L) & u_{k_2}(t_L) & u_{k_3}(t_L) & \cdots & u_{k_C}(t_L) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

A dimensão da matriz $\mathbf{W}_k^*$ é $L \times C$. A DOP é realizada em cada campo de deslocamento independentemente, representado pelo índice k . O número de colunas C é igual ao número de nós da malha do MEF, e o número de linhas L é igual ao número de pontos colhidos da resposta do sistema. O valor médio do campo de deslocamento em cada nó é obtido adicionando todas as componentes de $\mathbf{W}_k^*$ e dividindo o resultado por L . A variação de $\mathbf{W}_k^*$ em relação ao valor médio é dada pela matriz $\mathbf{V}_k^*$, determinada como:

$$\mathbf{V}_k^* = \mathbf{W}_k^* - \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^L u_{k_1}(t_i) & \sum_{i=1}^L u_{k_2}(t_i) & \sum_{i=1}^L u_{k_3}(t_i) & \cdots & \sum_{i=1}^L u_{k_C}(t_i) \\ \sum_{i=1}^L u_{k_1}(t_i) & \sum_{i=1}^L u_{k_2}(t_i) & \sum_{i=1}^L u_{k_3}(t_i) & \cdots & \sum_{i=1}^L u_{k_C}(t_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^L u_{k_1}(t_i) & \sum_{i=1}^L u_{k_2}(t_i) & \sum_{i=1}^L u_{k_3}(t_i) & \cdots & \sum_{i=1}^L u_{k_C}(t_i) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

A matriz de correlação espacial $\mathbf{R}_k^*$ é dada por:

$$\mathbf{R}_k^* = \frac{1}{M} (\mathbf{V}_k^*)^T (\mathbf{V}_k^*) \quad (4.3)$$

que é uma matriz simétrica positiva definida.

¹Tradução amplamente utilizada do termo em inglês *reduced-order model*. Talvez um termo mais apropriado fosse *modelo de dimensão reduzida*. Ao longo desta tese, o termo *modelo reduzido* também será empregado.

Os autovetores da matriz $\mathbf{R}_k^*$ são conhecidos como Modos Ortogonais Próprios (MOP) e os autovalores são conhecidos como Valores Ortogonais Próprios (VOP). Os MOP são ortogonais entre si devido à simetria de $\mathbf{R}_k^*$, já os VOP representam a energia do sistema associada a cada MOP. Os MOP são classificados de acordo com a quantidade de energia e são usados como funções de forma (φ_{k_j}) usando série de Fourier. Cada campo de deslocamento u_k é expandido usando os MOP com maior quantidade de energia associada, de acordo com:

$$u_k(\xi^1, \xi^2, t) \approx \sum_{j=1}^{\eta_k} \mu_{k_j}(t) \varphi_{k_j}(\xi^1, \xi^2) \quad (4.4)$$

onde μ_{k_j} são as coordenadas generalizadas e η_k é o número total de modos considerados na expansão de forma a garantir convergência numérica do método.

Aplicando a expansão da equação (4.4), o princípio da energia potencial estacionária (3.2) pode ser reescrito como:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mu_{k_i}} = 0 \quad (4.5)$$

e as equações de Euler-Lagrange como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mu}_{k_i}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mu_{k_i}} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\mu}_{k_i}} = Q_{k_{ij}} \quad (4.6)$$

4.2 Variedades invariantes e seu modelo de ordem reduzida

Em sistemas dinâmicos, uma *variedade invariante* é uma variedade topológica que é invariante sob a ação do sistema dinâmico. Para ilustrar essa definição, considere o sistema dinâmico autônomo:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}) \quad (4.7)$$

em que $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$ e $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. Considere que o sistema possui como solução a trajetória $\mathbf{z}(t) = \phi_t(\mathbf{z}_0)$, em que $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(0)$ é o vetor de condições iniciais. O conjunto $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^N$, subconjunto de $\mathbb{R}^N$, é chamado de invariante do sistema dinâmico se, para todo $\mathbf{z}_0 \in \mathcal{W}$, a solução $t \rightarrow \phi_t(\mathbf{z}_0)$ possui sua imagem em $\mathcal{W}$. Isso significa que, para um determinado conjunto de condições iniciais $\mathbf{z}_0 \in \mathcal{W}$, toda a trajetória do sistema também pertence ao subconjunto $\mathcal{W}$. O subconjunto $\mathcal{W}$ é uma variedade de dimensão M caso possa ser localmente representado por um função suave de um subespaço de dimensão M contido em $\mathbb{R}^N$.

Segundo Jain e Haller (2022), a classe mais importante de variedades invariantes são aquelas contidas em subespaços do espaço fase que atraem outras trajetórias e, portanto, sua própria dimensão interna reduzida pode ser usada como modelo reduzido do sistema dinâmico completo.

Os métodos para o cálculo das variedades invariantes podem ser divididos em duas categorias: locais e globais. Os métodos locais aproximam uma variedade invariante na vizinhança de um conjunto invariante mais simples, como, por exemplo, pontos fixos e órbitas periódicas. As aproximações locais são determinadas por meio de expansões em série de Taylor em torno dos pontos fixos ou expansões em séries de Fourier-Taylor em torno das órbitas periódicas. Os métodos globais, por outro lado, buscam variedades invariantes globais no espaço fase. Técnicas globais normalmente utilizam continuação numérica que vão aumentando a variedade a partir de uma aproximação local normalmente utilizando técnicas de linearização, como os métodos apresentados na Seção 3.2.

Nesta seção será apresentada a metodologia proposta por Jain e Haller (2022) para a determinação das aproximações locais das variedades invariantes e de seus modelos de ordem reduzida. A grande vantagem desta abordagem é a utilização direta das coordenadas generalizadas físicas do problema – ou seja, os deslocamentos $u_{k_{ij}}$ e velocidades $\dot{u}_{k_{ij}}$ da casca – para o cálculo das variedades invariantes. Outras abordagens utilizam coordenadas modais, fazendo com que as matrizes e tensores do modelo dinâmico deixem de ser esparsas, o que aumenta significativamente o gasto de memória e o tempo de processamento. A simbologia apresentada por Jain e Haller (2022) será adotada nesta seção, portanto, alguns símbolos matemáticos que foram utilizados nos capítulos e nas seções anteriores passam a ter um significado novo neste capítulo e serão redefinidos quando se fizer necessário.

4.2.1 Modos Normais Não Lineares e Subvariedades Espectrais

Considere, primeiramente, a situação particular em que o sistema (3.10) é autônomo, ou seja $\epsilon = 0$:

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{F}(\mathbf{z}) \quad (4.8)$$

cujas linearização em torno de $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ é:

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} \quad (4.9)$$

A análise de sistemas dinâmicos lineares é relativamente simples, já que é possível desacoplar o sistema em um conjunto de coordenadas modais ortogonais entre si. O movimento do sistema pode ser obtido pela superposição dos *Modos Normais Lineares* (MNL), dados pelos autovetores $\mathbf{v}_j$ e $\mathbf{u}_j$ determinados pelos seguintes problemas de autovalor:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{B}) \mathbf{v}_j &= \mathbf{0}, \quad j = 1 \dots N \\ \mathbf{u}_j^* (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{B}) &= \mathbf{0}, \quad j = 1 \dots N \end{aligned} \quad (4.10)$$

em que $\mathbf{v}_j$ e $\mathbf{u}_j$ são, respectivamente, os autovetores à direita e à esquerda correspondentes ao autovalor λ_j ; $\mathbf{u}_j^*$ é o vetor transposto conjugado do vetor $\mathbf{u}_j$. Tanto λ_j quanto $\mathbf{v}_j$ e $\mathbf{u}_j$ são formados por números complexos, ou seja $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $\mathbf{v}_j \in \mathbb{C}^N$ e $\mathbf{u}_j \in \mathbb{C}^N$. Os autovalores λ_j são classificados em ordem crescente em relação à sua parte real, ou seja, $\text{Re}(\lambda_1) < \text{Re}(\lambda_2) < \dots < \text{Re}(\lambda_N)$. Os autovetores são determinados de forma a satisfazer a seguinte condição de normalização:

$$\mathbf{u}_i^* \mathbf{B} \mathbf{v}_j = \delta_{ij} \quad (4.11)$$

Os MNL são invariantes, o que significa que se uma trajetória começa no espaço vetorial gerado por um dos MNL, ela permanece neste espaço para sempre. Isso também significa que as frequências naturais e os respectivos modos de vibração independem da amplitude de vibração. Ou seja, os MNL podem ser entendidos como movimentos oscilatórios do sistema como um todo com propriedades similares a de um oscilador harmônico simples. Do ponto de vista geométrico, os MNL são representados por planos no espaço fase.

Sejam $\text{alg}(\lambda_j)$ e $\text{geo}(\lambda_j)$, respectivamente, a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica do autovalor λ_j . A multiplicidade algébrica é definida como o número de vezes em que λ_j aparece como raiz do polinômio característico, já a multiplicidade geométrica representa a dimensão do subespaço vetorial gerado pelo autovetor correspondente a λ_j . Quando as matrizes $\mathbf{B}$ e $\mathbf{A}$ são semissimples, a igualdade $\text{alg}(\lambda_j) = \text{geo}(\lambda_j)$ é válida para todos dos autovalores λ_j . Para cada autovalor λ_j , existe um *autoespaço* $E_j \subset \mathbb{R}^N$ gerado pela combinação linear entre as partes reais e imaginárias do correspondente autovetor $\mathbf{v}_j$. A dimensão de E_j é $\dim(E_j) = \text{alg}(\lambda_j)$ para os casos em que a parcela imaginária de λ_j é nula, ou seja $\text{Im}(\lambda_j) = 0$. Nos casos em que λ_j é complexo, ou seja, $\text{Im}(\lambda_j) \neq 0$, a dimensão de E_j é $\dim(E_j) = 2 \times \text{alg}(\lambda_j)$. Nestes casos, λ_j é complexo conjugado de λ_{j+1} , ou seja, $\text{conj}(\lambda_j) = \lambda_{j+1}$, consequentemente, $E_j = E_{j+1}$ e as partes reais de λ_j e λ_{j+1} são iguais, ou seja $\text{Re}(\lambda_j) = \text{Re}(\lambda_{j+1})$. A equação (4.12) mostra como os autoespaços E_j são gerados a partir

dos MNL.

$$\begin{aligned} E_j = E_{j+1} &= \text{span} \{ \text{Re}(\mathbf{v}_j), \text{Im}(\mathbf{v}_j) \} \quad \text{para } \text{Im}(\lambda_j) \neq 0 \text{ e } \text{conj}(\lambda_j) = \lambda_{j+1} \\ E_j &= \text{span} \{ \mathbf{v}_j \} \quad \text{para } \text{Im}(\lambda_j) = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde $\text{span} \{ \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \}$ denota o subespaço vetorial gerado pelo conjunto de vetores $\mathbf{v}_i$.

Como os autoespaços são gerados pelos MNL, eles também são invariantes para o sistema linear (4.9), e qualquer subespaço gerado pela combinação linear dos autoespaços também é invariante. Uma forma genérica de representar esses subespaços é conhecida como *subespaço espectral*, que é obtida pela equação:

$$E_{j_1, \dots, j_q} = E_{j_1} \oplus \dots \oplus E_{j_q} \quad (4.13)$$

em que $\oplus$ representa a soma dos espaços vetoriais, e $E_{j_1, \dots, j_q}$ é o subespaço espectral obtido dos autoespaços $E_{j_1}, \dots, E_{j_q}$ para $q \in \mathbb{N}$. Propriedade análoga pode ser definida para os autoespaços adjuntos E_j^* associados aos autovetores $\mathbf{u}_j$.

Os MNL são geralmente utilizados para reduzir a ordem de sistemas lineares quando o interesse da análise está limitado a intervalos de frequência específicos. Nesses casos, modos cujas frequências estão muito distantes do intervalo de frequência de interesse contribuem muito pouco com a resposta do sistema e podem ser retirados da análise. Os MNL utilizados na análise formam o *subespaço espectral mestre* $E \subset \mathbb{R}^N$ que contém todas as trajetórias aproximadas do sistema reduzido, tal que:

$$\dim(E) = M < N \quad (4.14)$$

onde o subespaço E também é conhecido simplesmente como *subespaço mestre* e possui a dimensão reduzida M .

A linearização é uma idealização, uma exceção à regra, e as vibrações não lineares são frequentes em aplicações reais da engenharia. Uma das principais características das vibrações não lineares é justamente a dependência entre a frequência e os modos de vibração. Assim, os *Modos Normais Não Lineares* (MNNL) oferecem uma ferramenta teórica e matemática para interpretar a classe de fenômenos não lineares relacionadas a essa característica.

O conceito de MNNL foi introduzido primeiramente por Rosenberg (1962) e pode ser entendido como uma ampliação direta do conceito de MNL expandido para o caso não linear. Segundo

Rosenberg (1962), os MNNL são *vibrações uníssonas* compostas por órbitas periódicas, cujas coordenadas atingem a posição máxima no mesmo instante. Tal definição possui semelhanças com a definição de MNL, mas também algumas limitações. Em primeiro lugar, ela abrange apenas sistemas conservativos. Em segundo lugar, na presença de ressonâncias internas, algumas coordenadas podem ter uma frequência dominante diferente de outras coordenadas, fazendo com que o sistema vibre de forma não uníssona.

Outra definição dos MNNL foi apresentada por Shaw e Pierre (1993), que aproveitaram o conceito de variedade invariante do teorema da variedade central. Segundo os autores, enquanto os MNL são geometricamente representados por planos no espaço fase, os MNNL são variedades invariantes de duas dimensões no espaço fase. Tal variedade é invariante já que qualquer trajetória que começa em um dos MNNL, permanece nele para sempre. Desta forma, o sistema se comporta como um sistema não linear de um único grau de liberdade. Ao contrário da definição apresentada por Rosenberg, a definição de Shaw e Pierre (1993) também pode ser utilizada para sistemas não conservativos e de vibrações não uníssonas.

Recentemente, Haller e Ponsioen (2016) revisitaram o conceito de Modos Normais Não Lineares estabelecendo uma abordagem unificada sobre o assunto. Segundo os autores, um MNNL é um conjunto fechado composto pelas soluções de múltipla frequência do sistema não linear (3.10) na forma:

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{|\mathbf{m}|=1}^{\infty} \mathbf{z}_{\mathbf{m}} \exp(i(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Omega})t) \quad (4.15)$$

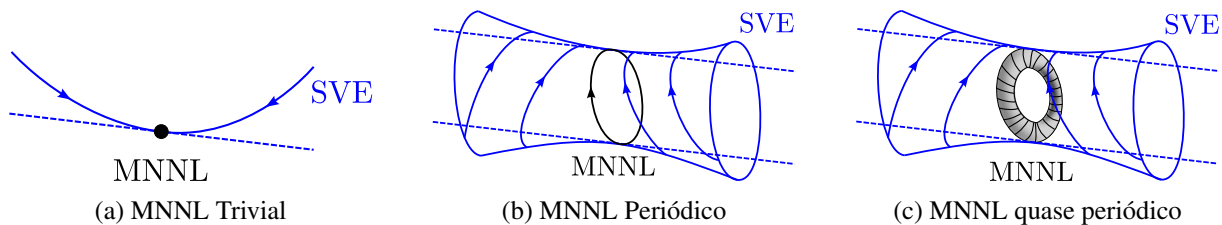
onde $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^f$ é um vetor de números naturais de mesma dimensão que o vetor $\boldsymbol{\Omega}$, ou seja $\dim(\mathbf{m}) = \dim(\boldsymbol{\Omega}) = f$; $|\mathbf{m}| = m_1 + \dots + m_f$; $\mathbf{z}_{\mathbf{m}}$ são os vetores das amplitudes de Fourier complexas da solução real $\mathbf{z}(t)$ em relação às frequências do vetor $\boldsymbol{\Omega}$; e i é a unidade imaginária.

Os casos especiais dos MNNL são:

- *MNNL trivial* ($f = 0$): ponto fixo;
- *MNNL periódico* (ou $f = 1$ ou para $f > 1$ e os elementos de $\boldsymbol{\Omega}$ são racionalmente comensuráveis): órbita periódica;
- *MNNL quase periódico* ($f \geq 1$ e os elementos de $\boldsymbol{\Omega}$ são racionalmente incomensuráveis): torus invariante de dimensão f .

A definição apresentada por [Haller e Ponsioen \(2016\)](#) unifica as definições apresentados por [Rosenberg \(1962\)](#) e [Shaw e Pierre \(1993\)](#) e a amplia para o caso de vibrações forçadas com finitas frequências de excitação. [Haller e Ponsioen \(2016\)](#) ainda elaboram o novo conceito de *Subvariedade Espectral* (SVE), que é um conceito análogo ao conceito de subespaço espectral, presente em sistemas lineares, expandido a sistemas não lineares. A SVE é a variedade mais suave de uma família de variedades invariantes, tangente ao subespaço espectral do sistema linear na origem. Assim como os subespaços espectrais, as Subvariedades Espectrais podem ser utilizadas para a redução de ordem do sistema. A Figura 4.1 ilustra, de forma esquemática, a relação entre os MNNL e as SVE para os três casos especiais citados anteriormente.

Figura 4.1 – Esquema dos três principais tipos de Modos Normais Não Lineares: (a) trivial, (b) periódico e (c) quase periódico e as suas Subvariedades Espectrais correspondentes. As SVE são sempre tangentes aos MNNL.



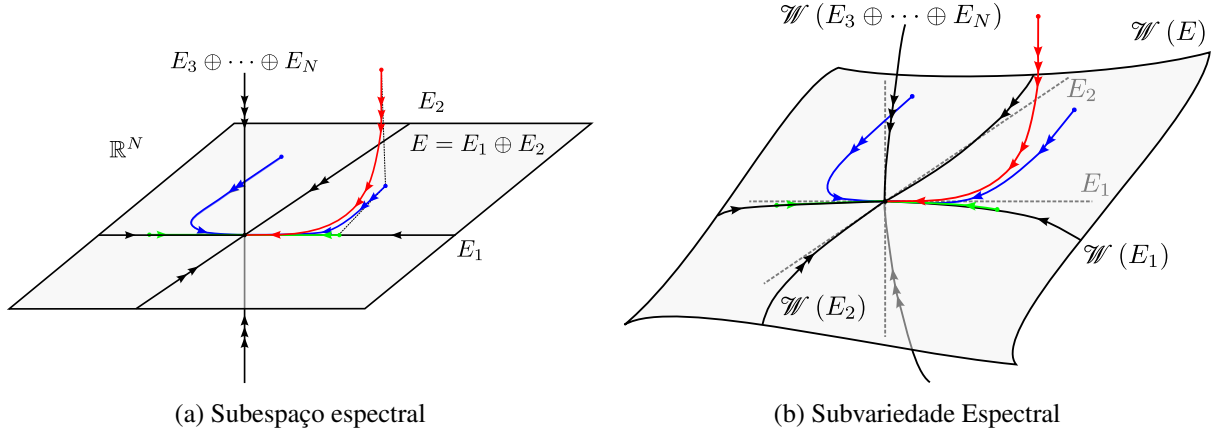
FONTE: [Haller e Ponsioen \(2016\)](#)

A Figura 4.2(a) ilustra de forma esquemática como as trajetórias próximas a um ponto de equilíbrio estável são atraídas ao subespaço espectral mestre E formado pelas espaços vetoriais E_1 e E_2 em um sistema dinâmico linear de um sistema de dimensão N . As curvas em cor verde representam trajetórias que começam em E_1 e permanecem nesse subespaço para sempre. Pode-se dizer que E_1 representa um Modo Normal Linear do sistema. A curva em cor vermelha representa uma trajetória próxima a um ponto fixo estável fora do subespaço mestre, mas que é rapidamente atraída a ele. As curvas em cor azul ilustram como as trajetórias contidas no espaço mestre permanecem nele para sempre. A curva em cor azul à direita pode representar a trajetória equivalente do modelo reduzido do sistema à trajetória em cor vermelha, contida apenas no espaço mestre.

A Figura 4.2(b) mostra como as trajetórias próximas a um ponto fixo estável são atraídas a ele em um sistema dinâmico não linear. As curvas em cor verde representam trajetórias que começam em $\mathcal{W}(E_1)$ e permanecem para sempre em $\mathcal{W}(E_1)$, de forma que $\mathcal{W}(E_1)$ e $\mathcal{W}(E_2)$ podem representar os Modos Normais Não Lineares do sistema. As trajetórias contidas no SVE permanecem nela, como mostram as curvas em cor azul. Analogamente ao subespaço

espectral mestre, a subvariedade espectral $\mathcal{W}(E)$ pode ser utilizada em um modelo reduzido do sistema, já que atrai as órbitas próximas, como mostra a curva em cor vermelha e a curva em cor azul à direita, que seria a trajetória equivalente do modelo reduzido.

Figura 4.2 – Trajetórias de um sistema dinâmico atraídas a um ponto fixo. Em (a) para um sistema dinâmico linear, e, em (b) para um sistema dinâmico não linear



4.2.2 Subvariedades Espectrais de pontos fixos em coordenadas físicas

Para determinar uma aproximação local do sistema (4.8) em torno do ponto fixo $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, considere a variedade invariante $\mathcal{W}(E)$ desse sistema, que é tangente ao subespaço espectral mestre E na origem, como mostra a Figura 4.3. O subespaço mestre E é gerado pelos autovetores que compõem a matriz $\mathbf{V}_E = [\mathbf{v}_1^E, \dots, \mathbf{v}_M^E] \in \mathbb{C}^{N \times M}$, tal que o sobrescrito E representa os modos mestres adotados, tal que λ_i^E , $\mathbf{v}_i^E$ e $\mathbf{u}_i^E$ são autovalores e autovetores solução do problema (4.10). A variedade $\mathcal{W}(E)$ possui a mesma dimensão de E , ou seja, $\dim(\mathcal{W}(E)) = \dim(E) = M < N$. Analogamente, o subespaço mestre adjunto E^* é gerado pelos autovetores que compõem a matriz $\mathbf{U}_E = [\mathbf{u}_1^E, \dots, \mathbf{u}_M^E] \in \mathbb{C}^{N \times M}$

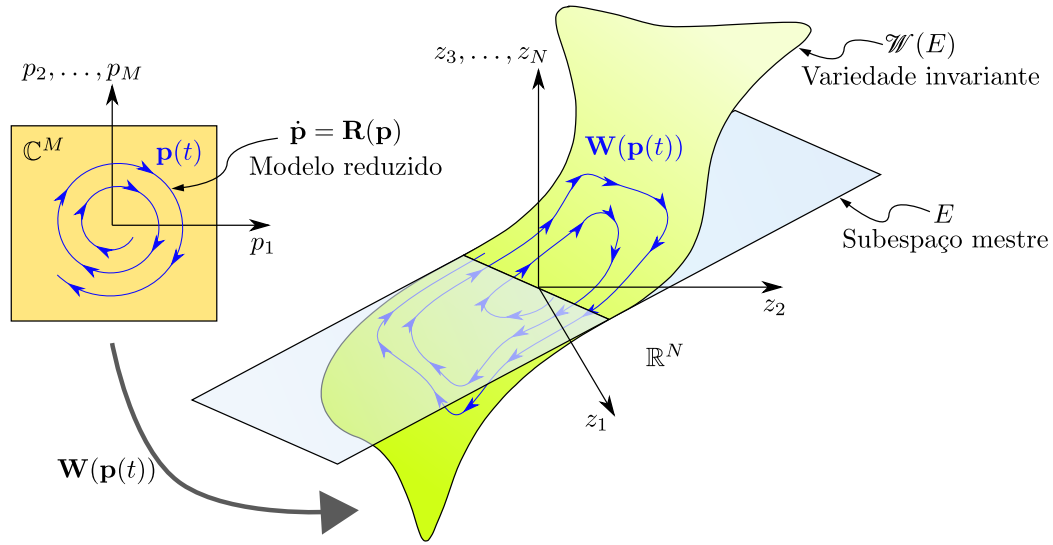
Utilizando o problema de autovalor (4.10), obtém-se as seguintes relações entre as matrizes $\mathbf{V}_E$ e $\mathbf{U}_E$:

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_E = \mathbf{B}\mathbf{V}_E\mathbf{\Lambda}_E \quad (4.16a)$$

$$\mathbf{U}_E^*\mathbf{A} = \mathbf{\Lambda}_E\mathbf{U}_E^*\mathbf{B} \quad (4.16b)$$

em que $\mathbf{\Lambda}_E = \text{diag}(\lambda_1^E, \dots, \lambda_M^E)$ é uma matriz cuja diagonal principal é formada pelos autovalores correspondentes aos autovetores das matrizes $\mathbf{V}_E$ e $\mathbf{U}_E$.

Figura 4.3 – Parametrização utilizando o conceito de variedades invariantes



FONTE: Adaptado de Jain e Haller (2022)

Para calcular a variedade invariante $\mathcal{W}(E)$ tangente ao subespaço espectral E na origem do sistema (4.8), considere a função vetorial $\mathbf{W} : \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$ que parametriza a variedade $\mathcal{W}(E)$, conforme mostra a equação:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{W}(\mathbf{p}(t)) \quad (4.17)$$

em que $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^M$ é o vetor que contém as coordenadas de parametrização. O mapeamento $\mathbf{W}$ recebe o vetor de coordenadas de parametrização $\mathbf{p}$, complexo e de dimensão M , e retorna o vetor $\mathbf{z}$, real de dimensão N . A função vetorial $\mathbf{R} : \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^M$ define a trajetória do modelo dinâmico de ordem reduzida, de acordo com a equação:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}(\mathbf{p}) \quad (4.18)$$

ou seja, $\mathbf{R}$ recebe o vetor de coordenadas de parametrização $\mathbf{p}$ e retorna o vetor de velocidades $\dot{\mathbf{p}}$.

Substituindo (4.17) em (4.8), e derivando no tempo, é possível obter a *equação de invariância* da variedade $\mathcal{W}(E)$, dada por:

$$\mathbf{B} \frac{d\mathbf{W}}{d\mathbf{p}} \mathbf{R}(\mathbf{p}) = \mathbf{A}\mathbf{W}(\mathbf{p}) + \mathbf{F}(\mathbf{W}(\mathbf{p})) \quad (4.19)$$

Para resolver a equação de invariância (4.19), é preciso determinar as funções de parametrização $\mathbf{W}$ e $\mathbf{R}$. Jain e Haller (2022) consideram que as duas funções vetoriais são formadas por

polinômios das componentes do vetor de parametrização $\mathbf{p}$, como mostra a equação:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}(\mathbf{p}) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{W}_i \mathbf{p}^{\odot i} \\ \mathbf{R}(\mathbf{p}) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{R}_i \mathbf{p}^{\odot i}\end{aligned}\quad (4.20)$$

em que $\mathbf{W}_i \in \mathbb{C}^{N \times M^i}$ e $\mathbf{R}_i \in \mathbb{C}^{M \times M^i}$, ou seja, $\mathbf{W}_i$ e $\mathbf{R}_i$ são matrizes complexas cujas respectivas dimensões são $N \times M^i$ e $M \times M^i$.

Usando as expansões (4.20), a equação invariante se transforma em uma equação polinomial, que pode ser resolvida de forma independente para cada grau do polinômio, ou seja:

$$\left[\mathbf{B} \frac{d\mathbf{W}}{d\mathbf{p}} \mathbf{R}(\mathbf{p}) \right]_i = [\mathbf{A}\mathbf{W}(\mathbf{p}) + \mathbf{F}(\mathbf{W}(\mathbf{p}))]_i \quad (4.21)$$

em que $[\mathbf{x}]_i$ é uma operação que retorna apenas coeficientes dos polinômios de grau i da função vetorial $\mathbf{x}$.

Para $i = 1$, a equação (4.21) é simplesmente:

$$\mathbf{B}\mathbf{W}_1\mathbf{R}_1 = \mathbf{A}\mathbf{W}_1 \quad (4.22)$$

A determinação de $\mathbf{W}_1$ e $\mathbf{R}_1$ não é única e, a princípio, ambas as matrizes são complexas. Adota-se um valor para a matriz $\mathbf{R}_1$ para, em seguida, determinar $\mathbf{W}_1$. Observa-se que existe uma semelhança entre a equação (4.16a) e a equação (4.22), por isso, uma escolha direta seria:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_1 &= \mathbf{V}_E \\ \mathbf{R}_1 &= \mathbf{\Lambda}_E\end{aligned}\quad (4.23)$$

Todavia, tal escolha levaria a $\mathbf{W}_1$ e $\mathbf{R}_1$ complexos, o que dobraria o consumo de memória na análise já que são computadas as partes reais e imaginárias. Uma outra escolha possível é a utilização das matrizes $\mathbf{P}_E \in \mathbb{R}^{N \times M}$ e $\mathbf{J}_E \in \mathbb{R}^{M \times M}$, resultantes da decomposição real canônica de Jordan das matrizes $\mathbf{V}_E$ e $\mathbf{\Lambda}_E$, tal que:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{J}_E = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & \lambda_i^E & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \text{Re}(\lambda_j^E) & \text{Im}(\lambda_j^E) & \\ & & & -\text{Im}(\lambda_j^E) & \text{Re}(\lambda_j^E) & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.24a)$$

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{P}_E = \begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{v}_i^E & \cdots & \text{Re}(\mathbf{v}_j^E) & \text{Im}(\mathbf{v}_j^E) & \cdots \end{bmatrix} \quad (4.24b)$$

em que λ_i^E é um autovalor com parte imaginária nula ($\text{Im}(\lambda_i^E) = 0$); λ_j^E é um autovalor com parte imaginária diferente de zero ($\text{Im}(\lambda_j^E) \neq 0$) e é complexo conjugado do autovalor λ_{j+1}^E , ou seja $\text{conj}(\lambda_j^E) = \lambda_{j+1}^E$. O autovetor $\mathbf{v}_i^E$ corresponde ao autovalor λ_i^E e possui apenas componentes reais. Já o autovetor $\mathbf{v}_j^E$ possui componentes imaginárias e é complexo conjugado do autovetor $\mathbf{v}_{j+1}^E$. Os demais autovalores e autovetores são usados na decomposição de Jordan de maneira análoga a λ_i^E , λ_j^E , $\mathbf{v}_i^E$ e $\mathbf{v}_j^E$, tal que $\dim(\mathbf{J}_E) = \dim(\mathbf{\Lambda}_E)$ e $\dim(\mathbf{P}_E) = \dim(\mathbf{V}_E)$. A escolha de $\mathbf{W}_1 = \mathbf{P}_E$ e $\mathbf{R}_1 = \mathbf{J}_E$ é válida já que a decomposição real de Jordan mantém a igualdade da equação (4.16a), de forma que:

$$\mathbf{A}\mathbf{P}_E = \mathbf{B}\mathbf{P}_E\mathbf{J}_E \quad (4.25)$$

É importante enfatizar que, embora o uso da decomposição real de Jordan minimize o consumo de memória, a escolha da parametrização da equação (4.24) aumenta consideravelmente o acoplamento dos termos não lineares de $\mathbf{W}$ e $\mathbf{R}$ em relação a alternativa complexa (4.23). Isso se deve ao fato da matriz $\mathbf{\Lambda}_E$ ser diagonal enquanto a matriz $\mathbf{J}_E$ não o é. Dado que a matriz $\mathbf{R}_1$ afeta todos os termos de ordens superiores nas funções de parametrização para $\mathbf{W}$ e $\mathbf{R}$, pode haver uma grande diferença entre os tempos de processamento ao aplicar as expansões (4.20). Assim, a parametrização complexa pode ser computacionalmente mais eficiente, especialmente para ordens elevadas.

Para as ordens superiores $i \geq 2$, o lado esquerdo da equação (4.21) pode ser simplificado como:

$$\left[\mathbf{B} \frac{d\mathbf{W}}{d\mathbf{p}} \mathbf{R}(\mathbf{p}) \right]_i = \mathbf{B}\mathbf{W}_i + \mathbf{B} \sum_{j=2}^i \mathbf{W}_j \mathbf{R}_{i,j} \quad (4.26)$$

em que:

$$\mathbf{R}_{i,j} = \sum_{k=1}^j \underbrace{\mathbf{I}_M \odot \cdots \odot \mathbf{I}_M \odot \mathbf{R}_{i-j+1} \odot \mathbf{I}_M \odot \cdots \odot \mathbf{I}_M}_{j\text{-termos}} \quad (4.27)$$

↑
posição k

Já os termos do lado direito da equação (4.21) são dados pelas equações:

$$[\mathbf{A}\mathbf{W}(\mathbf{p})]_i = \mathbf{A}\mathbf{W}_i \quad (4.28a)$$

$$[\mathbf{F}(\mathbf{W}(\mathbf{p}))]_i = \sum_{j=2}^i \left(\mathbf{F}_j \sum_{\substack{\mathbf{q} \in \mathbb{N}^j \\ |\mathbf{q}|=i}} \mathbf{W}_{q_1} \odot \cdots \odot \mathbf{W}_{q_j} \right) \quad (4.28b)$$

A equação (4.21) é rearranjada na forma da equação (4.29), coletando os termos contendo $\mathbf{W}_i$ do lado esquerdo, e os termos de ordem inferior a i do lado direito, resultando em:

$$\mathbf{B}\mathbf{W}_i\mathbf{R}_{i,i} - \mathbf{A}\mathbf{W}_i = \mathbf{C}_i - \mathbf{B}\mathbf{W}_1\mathbf{R}_i \quad (4.29)$$

onde:

$$\mathbf{C}_i = [\mathbf{F}(\mathbf{W}(\mathbf{p}))]_i - \mathbf{B} \sum_{j=2}^{i-1} \mathbf{W}_j \mathbf{R}_{i,j} \quad (4.30)$$

Finalmente, o sistema (4.29) é resolvido de forma recursiva para $i \geq 2$ por meio de sua forma vetorizada, dada pela equação (4.31):

$$\mathcal{L}_i \mathbf{w}_i = \mathbf{h}_i(\mathbf{R}_i) \quad (4.31)$$

em que:

$$\mathbf{w}_i = \text{vec}(\mathbf{W}_i) \in \mathbb{C}^{NM^i} \quad (4.32a)$$

$$\mathcal{L}_i = (\mathbf{R}_{i,i}^\top \bullet \mathbf{B}) - (\mathbf{I}_{M^i} \bullet \mathbf{A}) \in \mathbb{C}^{NM^i \times NM^i} \quad (4.32b)$$

$$\mathbf{h}_i(\mathbf{R}_i) = \text{vec}(\mathbf{C}_i) - \mathbf{D}_i \text{vec}(\mathbf{R}_i) \in \mathbb{C}^{NM^i} \quad (4.32c)$$

$$\mathbf{R}_{i,i} = \sum_{j=1}^i (\mathbf{I}_M)^{\bullet j-1} \bullet \mathbf{R}_1 \bullet (\mathbf{I}_M)^{\bullet i-j} \in \mathbb{C}^{M^i \times M^i} \quad (4.32d)$$

$$\mathbf{D}_i = (\mathbf{I}_M \bullet \mathbf{B}\mathbf{W}_1) \in \mathbb{C}^{NM \times NM^i} \quad (4.32e)$$

A matriz $\mathcal{L}_i$ é chamada de operador *coomológico* de ordem i induzido pelo fluxo linear (4.9) e o subespaço mestre E . Para qualquer ordem i da expansão, os coeficientes de $\mathcal{L}_i$ são completamente determinados apenas pelas parcelas lineares do sistema dinâmico completo e do sistema reduzido, ou seja, pelas matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{R}_1$. Caso a parametrização da decomposição real de Jordan (4.24) seja adotada, $\mathcal{L}_i$ resulta em uma matriz de coeficientes reais.

4.2.2.1 Forma normal

Nota-se que o sistema (4.31) possui mais variáveis – $\mathbf{W}_i$ e $\mathbf{R}_i$ – do que equações. Essa indeterminação acaba sendo vantajosa, pois permite a escolha de um estilo de parametrização particular dependendo do contexto. Quando a matriz $\mathcal{L}_i$ é não singular, a equação (4.31) possui apenas uma única solução $\mathbf{W}_i$ para qualquer escolha de $\mathbf{R}_i$, sendo que a forma mais simples e desejável para o modelo reduzido é a trivial, dada por:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{0} \quad \forall \quad i \geq 2 \quad (4.33)$$

e que leva a um sistema dinâmico linear. Todavia, $\mathcal{L}_i$ pode ser singular, tornando a parametrização (4.33) impossível. Ainda assim, o sistema (4.31) pode ser determinado desde que se escolha uma parametrização apropriada. A *Forma Normal* (FN) é um estilo de parametrização que resulta em um modelo dinâmico reduzido não linear que é tão simples quanto possível. Isso é alcançado removendo sistematicamente todos os termos não essenciais das expansões (4.20). Utilizando a FN, obtém-se tanto o modelo reduzido $\mathbf{R}$ quanto a função de parametrização $\mathbf{W}$, como será mostrado a seguir.

Seja γ_j , $\mathbf{m}_j$ e $\mathbf{n}_j$, respectivamente, os autovalores e os autovetores correspondentes à direita e à esquerda da matriz $\mathcal{L}_i$, e seja $\mathcal{N}_i$ o *espaço nulo* da matriz $\mathcal{L}_i$, obtido pela equação:

$$\mathcal{N}_i = \text{kernel} \{ \mathcal{L}_i^T \} = \text{span} \{ \text{Re}(\mathbf{n}_k), \text{Im}(\mathbf{n}_k) \mid \gamma_k = 0 \} \quad \text{para } \mathcal{L}_i \in \mathbb{R}^{NM^i \times NM^i} \quad (4.34a)$$

$$\mathcal{N}_i = \text{kernel} \{ \mathcal{L}_i^T \} = \text{span} \{ \mathbf{n}_k \mid \gamma_k = 0 \} \quad \text{para } \mathcal{L}_i \in \mathbb{C}^{NM^i \times NM^i} \quad (4.34b)$$

onde a operação $\text{kernel} \{ \mathbf{M}^T \}$ retorna o espaço nulo à esquerda da matriz $\mathbf{M}$. O espaço nulo $\mathcal{N}_i$ é gerado pelos vetores das colunas da matriz $\mathbf{N}_i$, composta pelos autovetores $\mathbf{n}_i$ cujos autovalores são nulos e que são linearmente independentes entre si, sendo $r_i = \dim(\mathcal{N}_i)$ igual ao número de *ressonâncias internas* de $\mathcal{L}_i$, como será mostrado adiante. Os coeficientes da parametrização por FN são escolhidos projetando a equação de invariância (4.31) em $\mathbf{N}_i$, como mostra a equação:

$$\mathbf{N}_i^T \mathcal{L}_i \mathbf{w}_i = \mathbf{N}_i^T \mathbf{h}_i(\mathbf{R}_i) \quad (4.35)$$

O lado esquerdo da equação (4.35) é igual a zero, já que as colunas de $\mathbf{N}_i$ pertencem ao espaço nulo de $\mathcal{L}_i^T$, ou seja:

$$\mathbf{N}_i^T \mathcal{L}_i = \mathbf{0} \quad (4.36)$$

Desta forma, como o lado direito da equação também é igual a zero, é possível determinar os valores de $\mathbf{R}_i$ resolvendo o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_i^T \mathbf{h}_i(\mathbf{R}_i) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_i^T \text{vec}(\mathbf{C}_i) &= \mathbf{N}_i^T \mathbf{D}_i \text{vec}(\mathbf{R}_i) \end{aligned} \quad (4.37)$$

ou seja:

$$\text{vec}(\mathbf{R}_i) = [\mathbf{N}_i^T \mathbf{D}_i]^{-1} \mathbf{N}_i^T \text{vec}(\mathbf{C}_i) \quad (4.38)$$

Adotando o estilo de parametrização por Forma Normal, a parte indeterminada do sistema (4.35) se torna identicamente satisfeita, tornando-o possível e determinado.

4.2.2.2 Autoestrutura da matriz $\mathcal{L}_i$

A determinação do espaço nulo $\mathcal{N}_i$ pode ser computacionalmente inviável caso todos os autovalores e autovetores da matriz $\mathcal{L}_i$ tenham que ser calculados de forma direta. Jain e Haller (2022) propuseram uma metodologia para o cálculo indireto de apenas os autovetores que possuem autovalores nulos com base na estrutura da matriz $\mathcal{L}_i$, determinando, assim, o espaço nulo $\mathcal{N}_i$.

Tal abordagem começa pela definição do conjunto ordenado $\Delta_{i,M}$, formado por todos os subconjuntos $\boldsymbol{\ell}_j \subset \mathbb{N}^i$ de tamanho i , classificados em ordem lexicográfica, e que contém apenas valores no intervalo $1, \dots, M$, ou seja:

$$\Delta_{i,M} = \{\boldsymbol{\ell}_1, \dots, \boldsymbol{\ell}_{M^i} \in 1, \dots, M^i \subset \mathbb{N}^i\} \quad (4.39)$$

Por exemplo, para $i = 3$ e $M = 2$, o conjunto $\Delta_{3,2}$ é dado por:

$$\Delta_{3,2} = \{\{1, 1, 1\}, \{1, 1, 2\}, \{1, 2, 1\}, \{1, 2, 2\}, \{2, 1, 1\}, \{2, 1, 2\}, \{2, 2, 1\}, \{2, 2, 2\}\} \quad (4.40)$$

Essencialmente, cada $\boldsymbol{\ell} \in \Delta_{i,M}$ corresponde a um monômio de grau i do vetor de variáveis reduzidas $\mathbf{p}$.

Partindo da definição da equação (4.32d), é possível determinar os autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{R}_{i,i}^\top$ em função dos autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{R}_1^\top$. Seja μ_j , $\mathbf{p}_j$ e $\mathbf{q}_j$, respectivamente, os autovalores e os correspondentes autovetores à direita e à esquerda da matriz $\mathbf{R}_1^\top$, de forma que:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1^\top \mathbf{p}_j &= \mu_j \mathbf{p}_j, \quad j = 1, \dots, M \\ \mathbf{q}_j^* \mathbf{R}_1^\top &= \mu_j \mathbf{q}_j^*, \quad j = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (4.41)$$

Pode-se provar que os autovalores $\mu_{\boldsymbol{\ell}}$, os autovetores à direita $\mathbf{p}_{\boldsymbol{\ell}}$ e os autovetores à esquerda $\mathbf{q}_{\boldsymbol{\ell}}$ da matriz $\mathbf{R}_{i,i}^\top$ são dados por:

$$\begin{aligned} \mu_{\boldsymbol{\ell}} &= \mu_{\ell_1} + \dots + \mu_{\ell_i} \\ \mathbf{p}_{\boldsymbol{\ell}} &= \mathbf{p}_{\ell_1} \odot \dots \odot \mathbf{p}_{\ell_i} \\ \mathbf{q}_{\boldsymbol{\ell}} &= \mathbf{q}_{\ell_1} \odot \dots \odot \mathbf{q}_{\ell_i} \\ \boldsymbol{\ell} &\in \Delta_{i,M} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Para verificar se μ_{ℓ} é um autovalor de $\mathbf{R}_{i,i}^{\top}$ com o autovetor associado $\mathbf{p}_{\ell}$, parte-se da equação (4.32d), como mostra a equação:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{i,i}^{\top} \mathbf{p}_{\ell} &= \left[\sum_{j=1}^i \underbrace{\mathbf{I}_M \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_M \otimes \mathbf{R}_1^{\top} \otimes \mathbf{I}_M \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_M}_{i\text{-termos}} \right] [\mathbf{p}_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{p}_{\ell_i}] \\
 &= \sum_{j=1}^i \mathbf{p}_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{R}_1^{\top} \mathbf{p}_{\ell_j} \otimes \cdots \otimes \mathbf{p}_{\ell_i} \\
 &= \sum_{j=1}^i \mathbf{p}_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{\ell_j} \mathbf{p}_{\ell_j} \otimes \cdots \otimes \mathbf{p}_{\ell_i} \\
 &= \sum_{j=1}^i \mu_{\ell_j} [\mathbf{p}_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{p}_{\ell_i}] \\
 &= \mu_{\ell} \mathbf{p}_{\ell}
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Dedução análoga pode ser feita para os autovetores $\mathbf{q}_j$, de forma que:

$$\mathbf{q}_{\ell}^* \mathbf{R}_{i,i}^{\top} = \mu_{\ell} \mathbf{q}_{\ell}^* \tag{4.44}$$

A equação (4.32d) mostra que a matriz $\mathcal{L}_i$ depende de outras quatro matrizes – $\mathbf{I}_M$, $\mathbf{R}_{i,i}^{\top}$, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Pode-se determinar o espaço nulo da matriz $\mathcal{L}_i$ por meio dos autovalores e autovetores dos pares $(\mathbf{I}_M, \mathbf{R}_{i,i}^{\top})$ e $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, cujos problemas de autovalor são:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \mathbf{v}_j &= \lambda_j \mathbf{B} \mathbf{v}_j, \quad j = 1 \dots N \\
 \mathbf{u}_j^* \mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{u}_j^* \mathbf{B} &, \quad j = 1 \dots N
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_M \mathbf{p}_{\ell} &= \frac{1}{\mu_{\ell}} \mathbf{R}_{i,i}^{\top} \mathbf{p}_{\ell}, \quad \ell \in \Delta_{i,M} \\
 \mathbf{q}_{\ell}^* \mathbf{I}_M &= \frac{1}{\mu_{\ell}} \mathbf{q}_{\ell}^* \mathbf{R}_{i,i}^{\top}, \quad \ell \in \Delta_{i,M}
 \end{aligned}$$

Verifica-se que λ_j / μ_{ℓ} é autovalor do par de matrizes $(\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{A}, \mathbf{R}_{i,i}^{\top} \otimes \mathbf{B})$, e tem como autovetor correspondente o vetor $(\mathbf{p}_{\ell} \otimes \mathbf{v}_j)$, como mostra a equação:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{A}) (\mathbf{p}_{\ell} \otimes \mathbf{v}_j) &= (\mathbf{I}_M \mathbf{p}_{\ell}) \otimes (\mathbf{A} \mathbf{v}_j) \\
 &= \left(\frac{1}{\mu_{\ell}} \mathbf{R}_{i,i}^{\top} \mathbf{p}_{\ell} \right) \otimes (\lambda_j \mathbf{B} \mathbf{v}_j) \\
 &= \frac{\lambda_j}{\mu_{\ell}} (\mathbf{R}_{i,i}^{\top} \otimes \mathbf{B}) (\mathbf{p}_{\ell} \otimes \mathbf{v}_j)
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

De forma análoga, propriedade semelhante pode ser demonstrado para o autovetor à esquerda $(\mathbf{q}_{\ell} \otimes \mathbf{u}_j)$:

$$(\mathbf{q}_{\ell} \otimes \mathbf{u}_j)^* (\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{A}) = \frac{\lambda_j}{\mu_{\ell}} (\mathbf{q}_{\ell} \otimes \mathbf{u}_j)^* (\mathbf{R}_{i,i}^{\top} \otimes \mathbf{B}) \tag{4.47}$$

Finalmente, quando $\lambda_j/\mu_\ell = 1$, pode-se substituir a definição de $\mathcal{L}_i$ nas equações (4.46) e (4.47), resultando em:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_i(\mathbf{p}_\ell \otimes \mathbf{v}_j) &= [(\mathbf{R}_{i,i}^\top \otimes \mathbf{B}) - (\mathbf{I}_{M^i} \otimes \mathbf{A})](\mathbf{p}_\ell \otimes \mathbf{v}_j) = \mathbf{0} \\ (\mathbf{q}_\ell \otimes \mathbf{u}_j)^* \mathcal{L}_i &= (\mathbf{q}_\ell \otimes \mathbf{u}_j)^* [(\mathbf{R}_{i,i}^\top \otimes \mathbf{B}) - (\mathbf{I}_{M^i} \otimes \mathbf{A})] = \mathbf{0}\end{aligned}\quad (4.48)$$

Ou seja, os vetores $(\mathbf{q}_\ell \otimes \mathbf{u}_j)$ geram o espaço nulo da matriz $\mathcal{L}_i$ na presença de *ressonâncias internas* e *cruzadas*² ($\lambda_j/\mu_\ell = 1$), que são caracterizadas como:

$$\begin{aligned}\text{Ressonâncias internas: } \mu_\ell &= \lambda_j^E, \quad \ell \in \Delta_{i,M}, \quad j \in \{1, \dots, M\} \\ \text{Ressonâncias cruzada: } \mu_\ell &= \lambda_j, \quad \ell \in \Delta_{i,M}, \quad j \in \{M+1, \dots, N\}\end{aligned}\quad (4.49)$$

Tanto as ressonâncias internas quanto cruzadas resultam no operador coomológico $\mathcal{L}_i$ singular. A grande diferença entre essas ressonâncias é que a equação de invariância (4.31) pode ser resolvida na presença de ressonâncias internas ajustando a escolha de parametrização $\mathbf{R}_i$, como mostrado na Forma Normal. Na presença de ressonâncias cruzadas, o lado direito da equação (4.31) não pode ser ajustado para eliminar as indeterminações de $\mathcal{L}_i$, de tal forma que a equação de invariância não tem solução. Nesse caso, a solução é incluir no subespaço mestre os modos cujos autovalores apresentam ressonâncias cruzadas.

Pode-se, então, reescrever as equações (4.34), que representam o espaço nulo da matriz $\mathcal{L}_i$, como:

$$\mathcal{N}_i = \text{span} \left\{ \text{Re}(\mathbf{q}_\ell \otimes \mathbf{u}_j^E), \text{Im}(\mathbf{q}_\ell \otimes \mathbf{u}_j^E) \mid \mu_\ell = \lambda_j^E, \quad \ell \in \Delta_{i,M}, \quad j \in \{1, \dots, M\} \right\} \quad (4.50a)$$

para $\mathcal{L}_i \in \mathbb{R}^{NM^i \times NM^i}$, ou

$$\mathcal{N}_i = \text{span} \left\{ (\mathbf{q}_\ell \otimes \mathbf{u}_j^E) \mid \mu_\ell = \lambda_j^E, \quad \ell \in \Delta_{i,M}, \quad j \in \{1, \dots, M\} \right\} \quad (4.50b)$$

para $\mathcal{L}_i \in \mathbb{C}^{NM^i \times NM^i}$.

Sistemas dinâmicos não lineares podem apresentar ressonâncias internas, que são caracterizadas pela transferência de energia entre diferentes modos de vibração no movimento geral do sistema. Esse fenômeno foi largamente estudado quando em situações em que as frequências naturais lineares possuem razão inteira entre si, fazendo com que os respectivos modos de vibração interajam. Todavia, podem existir ressonâncias internas mesmo que as frequências naturais

²Em inglês, alguns autores utilizam *inner resonances* e *outter resonances* em vez de *internal resonances* e *cross resonances* para diferenciar esses termos do conceito clássico de ressonâncias internas (*internal resonances*). Apesar de conceitos correlatos, eles possuem significado diferente no contexto da dinâmica não linear.

não sejam comensuráveis. Para que o modelo reduzido consiga capturar esse comportamento, é necessário considerar os possíveis acoplamentos entre os modos no modelo reduzido, mesmo que suas frequências não seja comensuráveis. Por exemplo, imagine que exista uma ressonância interna entre os dois primeiros modos de um sistema cuja razão entre as suas frequências seja $\omega_2 = 2,3\omega_1$. O movimento geral do sistema pode fazer com que a estrutura vibre com uma combinação entre os dois primeiros modos, com o primeiro modo vibrando na frequência ω e o segundo na frequência 2ω . Também pode acontecer do segundo modo vibrar na frequência 3ω . Tal fenômeno é discutido em mais detalhes nos Capítulos 7 e 8. Nesses casos, os espaços nulos $\mathcal{N}_2$ e $\mathcal{N}_3$ devem incluir as seguintes ressonâncias internas:

$$\begin{aligned}\mu_{\{1,1\}} &\approx \lambda_2^E \\ \mu_{\{1,1,1\}} &\approx \lambda_2^E\end{aligned}\tag{4.51}$$

Como é impraticável avaliar as possíveis ressonâncias internas de um problema caso a caso, são consideradas todas as ressonâncias internas aproximadas $\mu_{\ell} \approx \lambda_j$ no intervalo

$$\frac{|\mu_{\ell} - \lambda_j^E|}{|\lambda_1^E|} \leq \epsilon_{ri}\tag{4.52}$$

tal que ϵ_{ri} é um número adimensional adotado suficientemente grande para considerar todas as possíveis ressonâncias internas, mas pequeno para que o modelo não se torne excessivamente complexo e inclua ressonâncias que não são relevantes.

4.2.2.3 Estilo de parametrização gráfico

Uma alternativa à FN é o *estilo de parametrização gráfico*, em que o modelo dinâmico reduzido $\mathbf{R}$ é resultado da expressão da variedade como um gráfico sobre o subespaço mestre E . Neste estilo, a equação de invariância (4.31) é projetada no subespaço $\mathcal{G}_i$:

$$\mathcal{G}_i = \text{span} \left\{ \text{Re}(\mathbf{q}_{\ell} \odot \mathbf{u}_j^E), \text{Im}(\mathbf{q}_{\ell} \odot \mathbf{u}_j^E) \mid \ell \in \Delta_{i,M}, j \in \{1, \dots, M\} \right\}\tag{4.53a}$$

para $\mathcal{L}_i \in \mathbb{R}^{NM^i \times NM^i}$, ou

$$\mathcal{G}_i = \text{span} \left\{ (\mathbf{q}_{\ell} \odot \mathbf{u}_j^E) \mid \ell \in \Delta_{i,M}, j \in \{1, \dots, M\} \right\}\tag{4.53b}$$

para $\mathcal{L}_i \in \mathbb{C}^{NM^i \times NM^i}$.

Observa-se que, no caso da existência de ressonâncias internas, $\mathcal{N}_i \subset \mathcal{G}_i$. No estilo gráfico, considera-se que todos os MNL do subespaço mestre são internamente ressonantes. Similar

ao estilo de parametrização FN, pode-se construir uma matriz $\mathbf{G}_i$ cujas colunas são formadas pelos vetores $(\mathbf{q}_\ell \otimes \mathbf{u}_j^E)$, de forma que as matrizes $\mathbf{R}_i$ são determinadas ao resolver a seguinte equação:

$$\text{vec}(\mathbf{R}_i) = [\mathbf{G}_i^T \mathbf{D}_i]^{-1} \mathbf{G}_i^T \text{vec}(\mathbf{C}_i) \quad (4.54)$$

Em contraste ao estilo de parametrização FN, em que apenas uma quantidade mínima de termos não lineares são considerados no modelo reduzido, o estilo de parametrização gráfico geralmente implica em um modelo mais complexo. Todavia, o estilo gráfico resulta na expressão mais simples possível de parametrização $\mathbf{W}(\mathbf{p})$ da variedade, como será mostrado adiante (Haro *et al.*, 2016). Caso seja considerada a representação complexa (4.23), o resultado da equação (4.54) é simplesmente:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{U}_E^* \mathbf{C}_i \quad (4.55)$$

Substituindo a equação (4.55) em (4.29), observa-se que o lado direito da equação é nulo, já que $\mathbf{B} \mathbf{V}_E \mathbf{U}_E^* \mathbf{C}_i = \mathbf{C}_i$, resultando em uma equação de invariância (4.29) homogênea cuja solução trivial é

$$\mathbf{W}_i = \mathbf{0} \quad (4.56)$$

Nota-se que o estilo de parametrização gráfico é incapaz de representar possíveis dobras da variedade invariante, que é representada linearmente em termos das variáveis $\mathbf{p}$ (Touzé; Vizzaccaro; Thomas, 2021).

4.2.2.4 Variedade do Subcentro de Lyapunov

Pode-se dizer que as relações frequência-amplitude representam os Modos Normais Não Lineares periódicos para diferentes valores de frequência. O objetivo desta seção é apresentar uma metodologia para o cálculo das relações frequência-amplitude por meio de um modelo de ordem reduzida via SVE. O primeiro passo para o cálculo da SVE é a linearização do sistema expandido (3.10) em torno do ponto fixo $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, cujos MNL são determinados a partir do problema de autovalor (4.10), em que os autovalores e autovetores são dados por:

$$\begin{aligned} \lambda_{2j-1} &= i\omega_j, \quad \text{conj}(\lambda_{2j}) = \lambda_{2j-1}, \quad j = 1 \dots n \\ \mathbf{v}_{2j-1} &= \begin{bmatrix} \varphi_j \\ \lambda_{2j-1} \varphi_j \end{bmatrix}, \quad \text{conj}(\varphi_{2j}) = \varphi_{2j-1}, \quad j = 1 \dots n \end{aligned} \quad (4.57)$$

Caso uma das frequências naturais ω_j não seja ressonante com as demais frequências naturais, pode-se determinar uma variedade invariante bidimensional – e uma família de soluções periódicas contidas nessa variedade – que é tangente ao autoespaço gerado pelos autovetores correspondentes a essa frequência. Essa variedade bidimensional é conhecida como *Variedade do Subcentro de Lyapunov* (VSL) (De La Llave; Kogelbauer, 2019). A VSL é um caso particular de SVE e pode ser utilizada para a determinação das relações frequência-amplitude em um modelo de ordem reduzida cujas órbitas periódicas são próximas ao ponto fixo. Nesse caso, o subespaço espectral mestre E é gerado pelos autovetores $\mathbf{v}_{2j-1}$ e $\mathbf{v}_{2j}$, correspondentes a uma das frequências naturais ω_j .

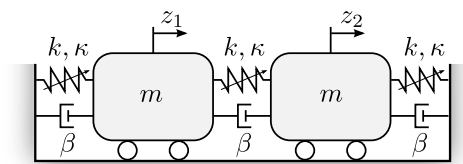
Utilizando o esquema de parametrização complexo (4.23), as matrizes de primeira ordem das expansões (4.18) e (4.17) são dadas por:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} i\omega_j & 0 \\ 0 & -i\omega_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_1 = [\mathbf{v}_{2j-1} \quad \mathbf{v}_j] \quad (4.58)$$

e atendem à equação de invariância de primeira ordem $\mathbf{A}\mathbf{R}_1 = \mathbf{B}\mathbf{R}_1\mathbf{W}_1$. Escolhe-se uma das frequências ω_j para a determinação da VSL. As demais matrizes $\mathbf{W}_i$ e $\mathbf{R}_i$ para $i \geq 2$ são calculadas pela Forma Normal, como apresentado na seção 4.2.

Para ilustrar como é feito o cálculo das relações frequência-amplitude, considere o modelo dinâmico discreto da Figura 4.4. Nesse modelo, há dois blocos de massa m , três molas, cuja constante de rigidez linear é k e a constante de rigidez cúbica é κ , e três amortecedores lineares cuja constante de amortecimento é β . O amortecimento foi introduzido artificialmente para o cálculo da curva de relação frequência-amplitude pelo método do tiro, como mostrado na Seção 3.2, mas possui valor nulo para a determinação das órbitas periódicas das relações frequência-amplitude. Considerou-se os valores de $m = 1$, $k = 1$ e $\kappa = 0,1$.

Figura 4.4 – Sistema massa-mola com dois graus de liberdade



O sistema de equações de equilíbrio dinâmico é dado pela equações (4.59),

$$\begin{aligned} m\ddot{z}_1 + \beta(2\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k(2z_1 - z_2) + \kappa(z_1^3 - (z_2 - z_1)^3) &= 0 \\ m\ddot{z}_2 + \beta(2\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + k(2z_2 - z_1) + \kappa(z_2^3 + (z_2 - z_1)^3) &= 0 \end{aligned} \quad (4.59)$$

que pode ser reescrito na sua forma de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 - z_3 &= 0 \\ \dot{z}_2 - z_4 &= 0 \\ m\dot{z}_3 + z_5(2z_3 - z_4) + k(2z_1 - z_2) + \kappa(z_1^3 - (z_2 - z_1)^3) &= 0 \\ m\dot{z}_4 + z_5(2z_4 - z_3) + k(2z_2 - z_1) + \kappa(z_2^3 + (z_2 - z_1)^3) &= 0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

em que $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2]^T$ é o vetor de variáveis de estado.

Para aplicar a metodologia proposta por Jain e Haller (2022), o sistema (4.60) deve ser reescrito na forma (4.8), em que as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são dadas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2k & k & 0 & 0 \\ k & -2k & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

As forças internas não lineares do sistema (4.60) são expressas por meio da função vetorial $\mathbf{F}$, como mostra a equação (3.12). Neste exemplo, a parcela quadrática dessa função é nula, enquanto a parcela cúbica é dada pela equação (4.62).

$$\mathbf{F}_3 \mathbf{z}^{\otimes 3} = \kappa \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & -1 & \cdots & -1 & 1 & \cdots & -1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & -1 & 2 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 z_1 z_1 \\ z_1 z_1 z_2 \\ \vdots \\ z_1 z_2 z_1 \\ z_1 z_2 z_2 \\ \vdots \\ z_2 z_1 z_1 \\ z_2 z_1 z_2 \\ \vdots \\ z_2 z_2 z_1 \\ z_2 z_2 z_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

$\mathbb{R}^{4 \times 64}$ $\mathbb{R}^{64}$

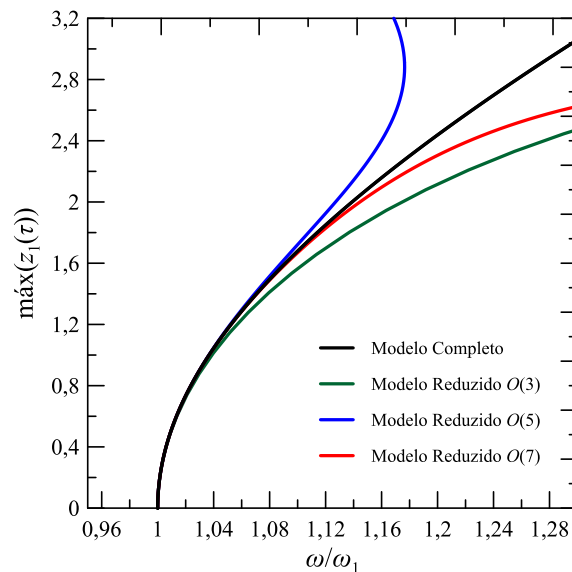
Observa-se que as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{F}_i$ são esparsas, sendo essencial a utilização de um esquema de armazenamento que considere isso para evitar estouro de memória computacional e diminuir o tempo de processamento das operações entre essas matrizes.

A partir dos autovalores e autovetores, determina-se o subespaço espectral mestre E , gerado a partir das partes reais e imaginárias de autovalor $\mathbf{v}_j$, que são correspondentes à frequência de vibração ω_j . Neste exemplo, a VSL será determinada para a primeira frequência natural, ou seja:

$$E = \text{span}\{\text{Re}(\mathbf{v}_1), \text{Im}(\mathbf{v}_1)\} \quad (4.63)$$

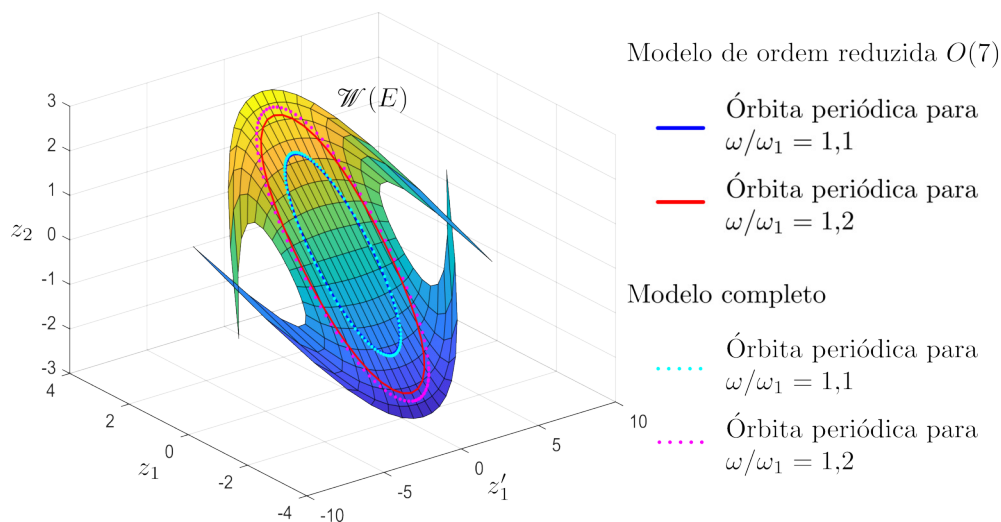
Desta forma, utilizando a decomposição complexa (4.58), são determinadas as matrizes de primeira ordem $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{W}_1$, e, em seguida, as matrizes $\mathbf{R}_i$ e $\mathbf{W}_i$, que armazenam os coeficientes dos termos de ordem superior das funções de parametrização $\mathbf{R}$ e $\mathbf{W}$. Neste exemplo, foi aplicando o esquema de parametrização por Forma Normal. Pôde-se obter as relações frequência-amplitude da Figura 4.5 para o modelo completo e para os modelos de ordem reduzida parametrizados até as ordens $O(3)$, $O(5)$ e $O(7)$. Observa-se que as curvas são muito próximas para pequenos valores de amplitude. À medida em que os valores de amplitude aumentam, os modelos reduzidos não conseguem reproduzir o comportamento apresentado pelo modelo completo. A Figura 4.6 ilustra a Subvariedade do Subcentro de Lyapunov $\mathcal{W}(E)$ para a frequência natural ω_1 . Nessa variedade, estão contidas todas as órbitas periódicas referentes aos MNL que nascem do MNL da primeira frequência natural do modelo. As curvas contínuas em cor vermelha e

Figura 4.5 – Relações frequência-amplitude para um sistema dinâmico discreto com 2 graus de liberdade



azul mostram o MNNL conservativo para diferentes valores de frequência. As curvas tracejadas em cor ciano e magenta mostram as trajetórias correspondentes do modelo completo em relação às curvas contínuas de cor azul e vermelha, respectivamente, do modelo de ordem reduzida.

Figura 4.6 – Variedade do Subcentro de Lyapunov para o sistema dinâmico da Figura 4.4. As curvas contínuas representam os MNNL do modelo de ordem reduzida, enquanto as curvas tracejadas representam os mesmos MNNL para o modelo completo.

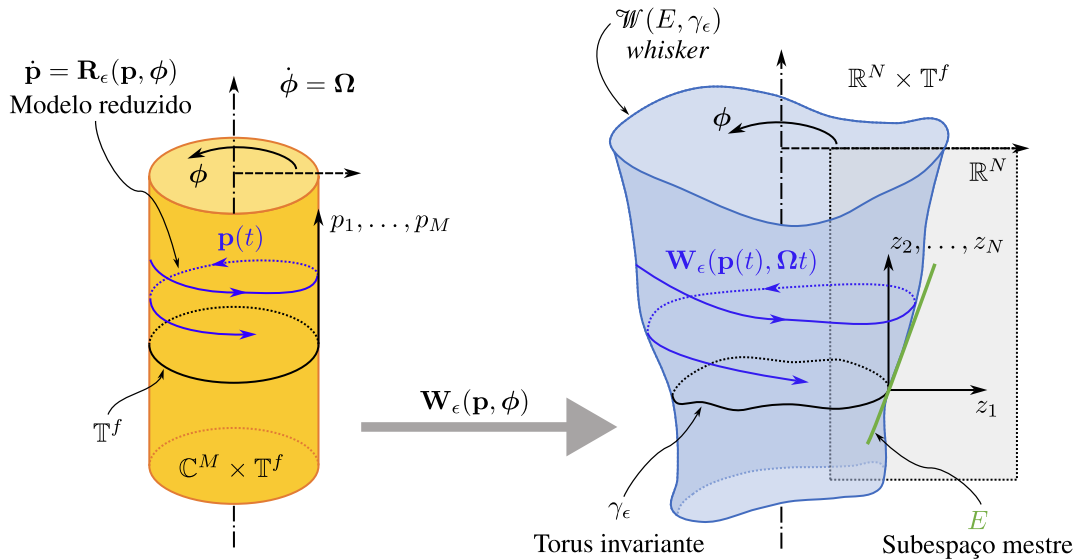


Observa-se que para $\omega/\omega_1 = 1,1$ as trajetórias do modelo completo e do modelo reduzido coincidem. Isso também é observado pelas relações frequência-amplitude da Figura 4.5. À medida que a frequência aumenta, as curvas do modelo reduzido e do modelo completo se afastam. Para $\omega/\omega_1 = 1,2$, há uma pequena diferença entre as *backbones*, o que também pode ser observado pelas trajetórias em cor vermelho e magenta da Figura 4.6.

4.2.3 Subvariedades espectrais e seu modelo de ordem reduzida para sistemas dinâmicos submetidos a carregamentos não autônomos

Jain e Haller (2022) também apresentaram uma metodologia para o cálculo de Subvariedades Espectrais em sistemas submetidos a carregamentos não autônomos. Para estes sistemas, ou seja, para $\epsilon > 0$ na equação (3.10), o ponto fixo é substituído por um torus invariante criado pelo termo quase periódico $\epsilon F_e(\phi)$. Para valores de $\epsilon > 0$ suficientemente pequenos, existe um torus invariante γ_ϵ de pequena amplitude no espaço fase estendido do sistema (3.10) caso a origem seja um ponto fixo hiperbólico. Nesse cenário, existe uma variedade invariante $\mathcal{W}(E, \gamma_\epsilon)$ que, diferentemente da variedade invariante $\mathcal{W}(E)$ do sistema autônomo, é ligada ao torus invariante γ_ϵ em vez da origem, como mostra a Figura 4.7. O torus é parametrizado pelas variáveis angulares $\phi \in \mathbb{T}^f$, correspondentes ao vetor de frequências $\Omega \in \mathbb{R}^f$, tal que $\phi = \Omega t$.

Figura 4.7 – Parametrização do sistema não autônomo utilizando o conceito de variedades invariantes



FONTE: Adaptado de Jain e Haller (2022)

Aplicando o método de parametrização ao sistema dinâmico (3.10) para $\epsilon > 0$, é possível obter a função de parametrização $\mathbf{W}_\epsilon(\mathbf{p}, \phi)$ da variedade $\mathcal{W}(E, \gamma_\epsilon)$, ou *whisker*, que possui dimensão $\dim(\mathcal{W}(E, \gamma_\epsilon)) = \dim(E) + \dim(\gamma_\epsilon) = M + f$ e é determinada pela perturbação do sistema linear (4.9) no subespaço mestre E em conjunto com a adição dos termos de ordem $O(\epsilon)$ do sistema (3.10). Além disso, é possível determinar o seguinte um modelo reduzido:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}_\epsilon(\mathbf{p}, \phi) \quad (4.64)$$

de forma que a função de parametrização $\mathbf{W}_\epsilon(\mathbf{p}, \phi)$ também mapeie a trajetória do modelo

reduzido $\mathbf{p}(t)$ para uma trajetória do modelo completo contida no *whisker*, ou seja:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{W}_\epsilon(\mathbf{p}(t), \Omega t) \quad (4.65)$$

Jain e Haller (2022) apresentam uma metodologia para determinação de $\mathbf{R}_\epsilon(\mathbf{p}, \phi)$ e $\mathbf{W}_\epsilon(\mathbf{p}, \phi)$ por meio da expansão em série de Taylor dessas funções em torno de $\epsilon = 0$ até os termos de ordem $O(\epsilon)$, conforme mostra a equação:

$$\mathbf{W}_\epsilon(\mathbf{p}, \phi) = \mathbf{W}(\mathbf{p}) + \epsilon \mathbf{X}(\mathbf{p}, \phi) + O(\epsilon^2) \quad (4.66a)$$

$$\mathbf{R}_\epsilon(\mathbf{p}, \phi) = \mathbf{R}(\mathbf{p}) + \epsilon \mathbf{S}(\mathbf{p}, \phi) + O(\epsilon^2) \quad (4.66b)$$

tal que $\mathbf{R}_\epsilon(\mathbf{p}, \phi) : \mathbb{C}^M \times \mathbb{T}^f \rightarrow \mathbb{C}^M$ e $\mathbf{W}_\epsilon(\mathbf{p}, \phi) : \mathbb{C}^M \times \mathbb{T}^f \rightarrow \mathbb{R}^N$; os valores de $\mathbf{W}(\mathbf{p})$ e $\mathbf{R}(\mathbf{p})$ representam as parcelas referentes a $\epsilon = 0$, e são determinados para o caso do sistema autônomo, como apresentado na Seção 4.2.2; os valores de $\mathbf{X}(\mathbf{p}, \phi)$ e $\mathbf{S}(\mathbf{p}, \phi)$ remetem aos termos de ordem $O(\epsilon)$, que dependem das variáveis angulares ϕ , devido à presença da força externa $\epsilon \mathbf{F}_e(\phi)$.

Expandindo as forças internas não lineares em série de Taylor em torno de $\epsilon = 0$, obtém-se a expressão:

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{F}(\mathbf{z})|_{\epsilon=0} + \epsilon \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{z})}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} + O(\epsilon^2) \quad (4.67)$$

que pode ser simplificada substituindo a equação (4.65) e (4.66) em (4.67):

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{F}(\mathbf{W}(\mathbf{p})) + \epsilon \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{W}(\mathbf{p}))}{d\mathbf{z}} \mathbf{X}(\mathbf{p}, \phi) + O(\epsilon^2) \quad (4.68)$$

Por fim, substituindo as equações (4.65), (4.66) e (4.68) na equação (3.10), chega-se a seguinte equação de invariância referente ao sistema dinâmico não autônomo:

$$\begin{aligned} O(\epsilon^2) + \mathbf{B} \left[\frac{d\mathbf{W}(\mathbf{p})}{d\mathbf{p}} (\mathbf{R}(\mathbf{p}) + \epsilon \mathbf{S}(\mathbf{p}, \phi)) + \epsilon \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{p}, \phi)}{\partial \phi} \Omega + \epsilon \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{p}, \phi)}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{R}(\mathbf{p}) \right] = \\ \mathbf{A} [\mathbf{W}(\mathbf{p}) + \epsilon \mathbf{X}(\mathbf{p}, \phi)] + \mathbf{F}(\mathbf{W}(\mathbf{p})) + \epsilon \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{W}(\mathbf{p}))}{d\mathbf{z}} \mathbf{X}(\mathbf{p}, \phi) + \epsilon \mathbf{F}_e(\phi) \end{aligned} \quad (4.69)$$

Coletando os termos independentes de ϵ na equação (4.69), chega-se à equação de invariância (4.19) do sistema autônomo, de onde é possível calcular os valores de $\mathbf{W}(\mathbf{p})$ e $\mathbf{R}(\mathbf{p})$ utilizando, por exemplo, o estilo de parametrização por FN. As demais incógnitas são determinadas por meio da equação resultante da coleta dos termos de ordem $O(\epsilon)$ da equação (4.69), dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \left[\frac{d\mathbf{W}(\mathbf{p})}{d\mathbf{p}} \mathbf{S}(\mathbf{p}, \phi) + \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{p}, \phi)}{\partial \phi} \Omega + \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{p}, \phi)}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{R}(\mathbf{p}) \right] = \\ \left[\mathbf{A} + \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{W}(\mathbf{p}))}{d\mathbf{z}} \right] \mathbf{X}(\mathbf{p}, \phi) + \mathbf{F}_e(\phi) \end{aligned} \quad (4.70)$$

Os termos $\mathbf{X}(\mathbf{p}, \phi)$ e $\mathbf{S}(\mathbf{p}, \phi)$ são expandidos em série de Taylor em $\mathbf{p}$, cujos coeficientes dependem das variáveis angulares ϕ :

$$\mathbf{X}(\mathbf{p}, \phi) = \mathbf{X}_0(\phi) + \sum_{j=1}^{\Gamma_S} \mathbf{X}_j(\phi) \mathbf{p}^{\odot j} \quad (4.71a)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}, \phi) = \mathbf{S}_0(\phi) + \sum_{j=1}^{\Gamma_R} \mathbf{S}_j(\phi) \mathbf{p}^{\odot j} \quad (4.71b)$$

Substituindo a equação (4.71) em (4.70) e coletando os termos da ordem de $\mathbf{p}$, obtém-se a seguinte equação:

$$\mathbf{B} \left[\mathbf{W}_1 \mathbf{S}_0(\phi) + \frac{\partial \mathbf{X}_0(\phi)}{\partial \phi} \Omega \right] = \mathbf{A} \mathbf{X}_0(\phi) + \mathbf{F}_e(\phi) \quad (4.72)$$

que é um sistema de equações diferenciais lineares cujas variáveis compõem o vetor $\mathbf{X}_0(\phi)$ e dependem do tempo. Similar à metodologia apresentada para o caso autônomo, para uma escolha de parametrização $\mathbf{S}_0(\phi)$ arbitrária, é possível determinar os valores de $\mathbf{X}_0(\phi)$.

A metodologia proposta por Jain e Haller (2022) considera apenas os termos de ordem principal $\mathbf{X}_0(\phi)$ e $\mathbf{S}_0(\phi)$ na determinação de $\mathbf{X}(\mathbf{p}, \phi)$ e $\mathbf{S}(\mathbf{p}, \phi)$. De fato, como as forças externas analisadas no presente trabalho são conservativas e constantes em relação ao vetor $\mathbf{z}$, pode-se escolher uma parametrização que dependa apenas desses termos. Como as variáveis da equação (4.72) são essencialmente angulares, pode-se resolvê-la expandindo $\mathbf{X}_0(\phi)$, $\mathbf{S}_0(\phi)$ e $\mathbf{F}_e(\phi)$ em série de Fourier:

$$\mathbf{F}_e(\phi) = \sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{Z}^K} \mathbf{F}_{0,\boldsymbol{\kappa}} \exp(i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \phi)) \quad (4.73a)$$

$$\mathbf{X}_0(\phi) = \sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{Z}^K} \mathbf{x}_{0,\boldsymbol{\kappa}} \exp(i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \phi)) \quad (4.73b)$$

$$\mathbf{S}_0(\phi) = \sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{Z}^K} \mathbf{s}_{0,\boldsymbol{\kappa}} \exp(i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \phi)) \quad (4.73c)$$

onde $\mathbf{F}_{0,\boldsymbol{\kappa}} \in \mathbb{C}^N$ são coeficientes conhecidos do carregamento externo; $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{Z}^K$ são vetores de números inteiros que representam os múltiplos dos harmônicos das variáveis angulares presentes no vetor ϕ . Por exemplo, caso o vetor de carregamentos externos seja dado por $\mathbf{F}_e(\phi) = \mathbf{F}_0 \cos(\omega_f t)$, o vetor das frequências angulares é dado por $\Omega = [\omega_f]$, enquanto os vetores $\boldsymbol{\kappa}$ são dados por $\boldsymbol{\kappa}_1 = [1]$ e $\boldsymbol{\kappa}_2 = [-1]$. Já os coeficientes $\mathbf{F}_{0,\boldsymbol{\kappa}}$ do vetor de carregamentos são dados por $\mathbf{F}_{0,\boldsymbol{\kappa}_1} = \mathbf{F}_0/2$ e $\mathbf{F}_{0,\boldsymbol{\kappa}_2} = \mathbf{F}_0/2$.

Substituindo as equações (4.73) em (4.72) e agrupando os os coeficientes de Fourier de ordem κ , obtém-se um sistema algébrico de equações lineares que depende de $s_{0,\kappa}$ e $x_{0,\kappa}$:

$$\mathcal{L}_{0,\kappa} x_{0,\kappa} = h_{0,\kappa}(s_{0,\kappa}) \quad (4.74)$$

em que

$$\mathcal{L}_{0,\kappa} = i(\kappa \cdot \Omega)B - A \quad (4.75a)$$

$$h_{0,\kappa} = F_{0,\kappa} - BW_1 s_{0,\kappa} \quad (4.75b)$$

A parametrização desejada é aquela em que os valores de $s_{0,\kappa}$ são nulos, o que levaria ao modelo reduzido mais simples possível. Todavia, essa escolha não é possível quando a matriz $\mathcal{L}_{0,\kappa}$ é singular (ou quase singular). Isso acontece na presença de *ressonâncias externas*, ou seja, quando o carregamento externo é ressonante com os autovalores λ_i , ou seja:

$$i(\kappa \cdot \Omega) \approx \lambda_j^E, \quad j \in \{1, \dots, N\} \quad (4.76)$$

Similar ao estilo de parametrização por FN, apresentado anteriormente para o caso autônomo, é possível escolher os valores de $s_{0,\kappa}$ de tal forma que a parte indeterminada do sistema (4.75a) seja identicamente satisfeita. Isso é possível adotando os seguintes valores para $s_{0,\kappa}$:

$$s_{0,\kappa} = e_j((u_j^E)^* F_{0,\kappa}) \quad \forall \kappa \in \mathbb{Z}^K, \quad j \in \{1, \dots, M\} : i(\kappa \cdot \Omega) \approx \lambda_j^E \quad (4.77)$$

Uma alternativa à equação (4.77) é considerar que todos os modos do subespaço mestre E são ressonantes com o carregamento externo, resultando em uma expressão para $s_{0,\kappa}$ análoga ao estilo de parametrização gráfico:

$$s_{0,\kappa} = e_j((u_j^E)^* F_{0,\kappa}) \quad \forall \kappa \in \mathbb{Z}^K, \quad j \in \{1, \dots, M\} \quad (4.78)$$

Observa-se que a matriz $\mathcal{L}_{0,\kappa}$ é função de Ω , que por sua vez é variável na determinação das curvas de ressonância. Isso implica que os valores de $x_{0,\kappa}$ também mudam ao longo dessa curvas. Além disso, normalmente são estudadas as regiões cujo intervalo de interesse da frequência de excitação abrange mais de um ponto em que ocorre a ressonância da equação (4.76), e onde os fenômenos não lineares têm maior relevância. Neste trabalho optou-se por utilizar a parametrização da equação (4.78) ao longo de todo esse intervalo.

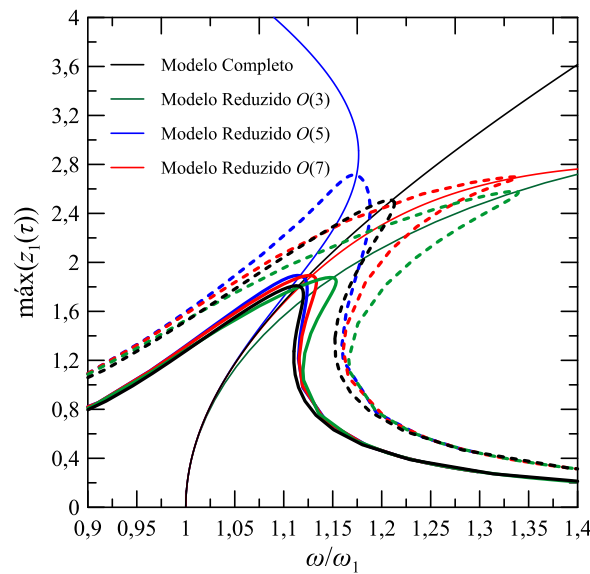
4.2.3.1 Curvas de ressonância para o sistema discreto com dois graus de liberdade

Para ilustrar a aplicação do modelo reduzido em sistemas não autônomos, foram determinadas as curvas de ressonância do sistema discreto da Figura 4.4 considerando que as duas massas estão submetidas a um carregamento harmônico de mesma magnitude e direção, ou seja, $\mathbf{F}_{0,\kappa} = [0, 0, 1, 1]^T$ e $\kappa = [1, -1]^T$.

As curvas de ressonância foram obtidas para $\epsilon = 0,2$ (linhas contínuas) e $\epsilon = 0,3$ (linhas tracejadas), e estão apresentadas na Figura 4.8 para o modelo completo (linha preta) e para os modelos reduzidos de ordem $O(3)$ (verde), $O(5)$ (azul) e $O(7)$ (vermelho). Além disso, foi considerado o amortecimento de $\beta = 0,1$.

Observa-se que para o valor de carregamento $\epsilon = 0,2$, as curvas dos modelos reduzidos são bem próximos à curva do modelo completo. Já para o carregamento $\epsilon = 0,3$, todos eles divergem, independente da ordem de aproximação. Isso acontece por que o método de determinação das SVE é um método de aproximação local em torno do ponto fixo $\mathbf{z} = 0$, e, para a determinação do *whisker*, também pressupõe valores suficientemente pequenos de ϵ . Tal limitação deve ser considerada criteriosamente ao adotar tais modelos reduzidos na análise de estruturas.

Figura 4.8 – Relações frequência-amplitude para um sistema dinâmico discreto com 2 graus de liberdade



CAPÍTULO 5

VIBRAÇÕES LIVRES LINEARES EM CASCAS FINAS

A determinação das frequências naturais e dos modos de vibração lineares é o primeiro passo para a análise dinâmica de qualquer estrutura. A partir desses valores, é possível identificar os intervalos de frequência de excitação em que a estrutura está mais susceptível à ressonância, e, estando em ressonância, antever a forma como as estruturas vibram. No estudo de cascas abaditas, as teorias de Vlasov (Ghosh; Bandyopadhyay, 1990), Marguerre (Stavridis, 1998), Novozhilov e Donnell (Amabili, 2005), a teoria de deformação de alta ordem de Reddy (Fadaee; Atashipour; Hosseini-Hashemi, 2013) e teorias de deformação de primeira ordem (Sofiyev; Turan, 2021) foram adaptadas considerando essas hipóteses para o estudo das vibrações livres lineares e não lineares.

O objetivo deste capítulo é demonstrar a validade dessas aproximações frente à formulação tensorial, que pode ser utilizada tanto para casca abatidas quanto não abatidas. Desta forma, a teoria de Koiter foi empregada para descrever as relações cinemáticas da casca e estudar as vibrações livres lineares de cascas descritas por um sistema não ortogonal de coordenadas curvilíneas. Os campos de deslocamentos da superfície média foram aproximados em séries de Fourier e séries de polinômios de Legendre. O método de Rayleigh–Ritz e o princípio de Hamilton foram aplicados para determinar o sistema de equações de equilíbrio dinâmico. Cascas de base retangular como conoides parabólicos, paraboloides elípticos e paraboloides esféricos com diferentes condições de contorno são analisadas. As frequências naturais e os modos de vibração determinados foram comparados com os resultados encontrados na literatura (Stavridis, 1998) e os resultados obtidos pelo *software* Abaqus®. Os resultados apresentados neste capítulo foram publicados no artigo *On the free vibration problem of thin shallow and non-shallow shells using tensor formulation* (Pinho; Del Prado; Silva, 2021)

Nos problemas de vibrações livres lineares, as amplitudes de vibração $u_{kij}(t)$ podem ser descri-

tas pela equação:

$$u_{kij}(t) = U_{kij} \cos(\omega t) \quad (5.1)$$

Substituindo as equações (2.58), que descrevem as deformações lineares da casca, na energia de deformação U , dada pela equação (2.107), e considerando a energia cinética T da equação (2.110), as equações de Euler-Lagrange (3.3) resultam no seguinte problema de autovetor/autovalor equivalente:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = 0 \quad (5.2)$$

onde $\mathbf{K}$ e $\mathbf{M}$ são, respectivamente, as matrizes de rigidez e de massa; ω_n são os autovalores, e $\mathbf{U}_n = [U_{kij}]$ (para $k = 1, 2, 3$; $i = 1, 2, \dots, m_k$ e $j = 1, 2, \dots, n_k$) são os autovetores. Determinar ω_n e $\mathbf{U}_n$ significa determinar as frequências naturais e os modos de vibração da casca, onde $n = 1, 2, 3, \dots, m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3$. As integrais das equações (2.107) e (2.110) e a solução do problema de autovalor/autovetor (5.2) foram determinadas com auxílio do Matlab®.

5.1 Geometria e condições de contorno

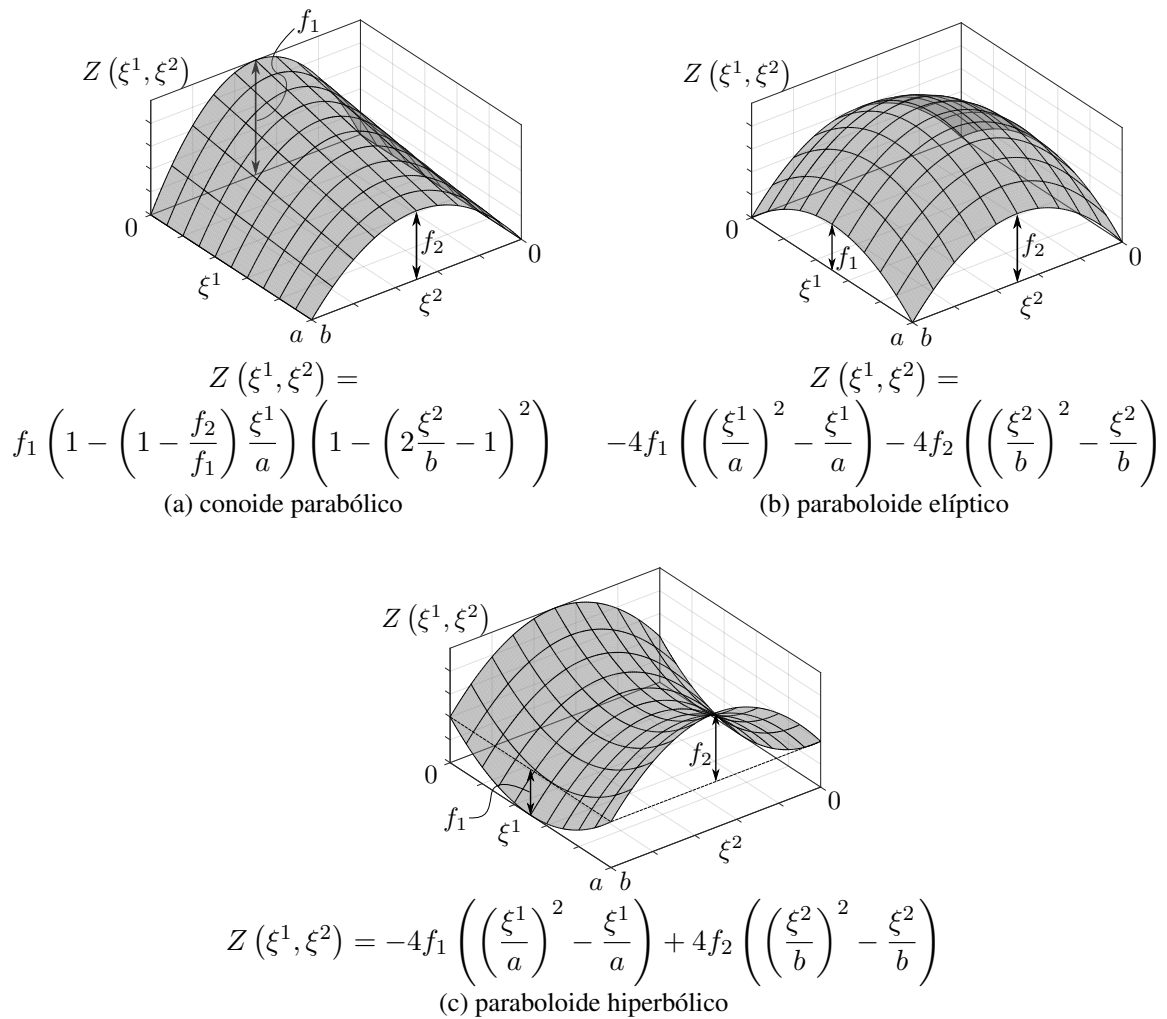
Como apresentado no Capítulo 2, a superfície média $\mathcal{S}$ da casca é parametrizada pelo vetor $\mathbf{R}$, de acordo com a equação (2.1). Neste capítulo, será estudado um caso especial em que $X(\xi^1, \xi^2) = \xi^1$, $Y(\xi^1, \xi^2) = \xi^2$ e o domínio Ω é retangular de dimensões a e b , como mostra a equação (5.3). Isso significa que a projeção horizontal da casca também é retangular de dimensões a e b .

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \xi^1 \mathbf{e}_1 + \xi^2 \mathbf{e}_2 + Z(\xi^1, \xi^2) \mathbf{e}_3 \\ 0 &\leq \xi^1 \leq a \\ 0 &\leq \xi^2 \leq b \end{aligned} \quad (5.3)$$

A Figura 5.1 ilustra as três superfícies estudadas: em (a), o conoide parabólico; em (b), o parabolóide elíptico; e, em (c), o parabolóide hiperbólico. A figura também mostra as equações de $Z(\xi^1, \xi^2)$ que definem matematicamente a superfície média $\mathcal{S}$ como função das coordenadas curvilíneas, ξ^1 e ξ^2 , e de f_1 e f_2 , que são as elevações laterais das bordas da cascas medidas a partir do plano horizontal $x^3 = 0$.

Quatro condições de contorno, apresentadas na Tabela 5.1, foram consideradas. No caso A, a casca é simplesmente apoiada com bordas móveis; no caso B, engastada com bordas móveis;

Figura 5.1 – Geometrias da superfície média: (a) conoide parabólico; (b) parabolóide elíptico; e (c) parabolóide hiperbólico.



no caso C, simplesmente apoiada com bordas imóveis; e, no caso D, engastada com bordas imóveis. Nos casos de bordas móveis, a mobilidade está associada aos deslocamentos u_α , na direção dos vetores M^α , que são perpendiculares às bordas laterais da casca.

Um conjunto apropriado de funções $\phi_{k_{ij}}$ é escolhido para satisfazer as condições de contorno essenciais apresentadas na Tabela 5.1.

Para o caso A, de cascas simplesmente apoiadas com bordas imóveis, uma expansão em série de Fourier foi adotada para todos os campos de deslocamentos, cujas funções $\phi_{k_{ij}}$ são dadas pelas equações (5.4).

Tabela 5.1 – Condições de contorno consideradas no presente trabalho.

Caso	Condição de contorno
A Simplesmente apoiada com bordas móveis	$u_1 _{\xi^2=0,b} = u_2 _{\xi^1=0,a} = 0$ $u_3 _{\xi^1=0,a} = u_3 _{\xi^2=0,b} = 0$
B Engastada com bordas móveis	$u_1 _{\xi^2=0,b} = u_2 _{\xi^1=0,a} = 0$ $u_3 _{\xi^1=0,a} = u_3 _{\xi^2=0,b} = 0$ $u_{3,1} _{\xi^1=0,a} = u_{3,2} _{\xi^2=0,b} = 0$
C Simplesmente apoiada com bordas imóveis	$u_1 _{\xi^1=0,a} = u_1 _{\xi^2=0,b} = 0$ $u_2 _{\xi^1=0,a} = u_2 _{\xi^2=0,b} = 0$ $u_3 _{\xi^1=0,a} = u_3 _{\xi^2=0,b} = 0$
D Engastada com bordas imóveis	$u_1 _{\xi^1=0,a} = u_1 _{\xi^2=0,b} = 0$ $u_2 _{\xi^1=0,a} = u_2 _{\xi^2=0,b} = 0$ $u_3 _{\xi^1=0,a} = u_3 _{\xi^2=0,b} = 0$ $u_{3,1} _{\xi^1=0,a} = u_{3,2} _{\xi^2=0,b} = 0$

$$\begin{aligned}
\phi_{1ij} &= \begin{cases} \cos\left(\frac{i+1}{2}\frac{\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(j\frac{\pi\xi^2}{b}\right) & \text{para } i = 1, 3, 5 \dots \\ \sin\left(\frac{i}{2}\frac{\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(j\frac{\pi\xi^2}{b}\right) & \text{para } i = 2, 4, 6 \dots \end{cases} \\
\phi_{2ij} &= \begin{cases} \sin\left(i\frac{\pi\xi^1}{a}\right) \cos\left(\frac{j+1}{2}\frac{\pi\xi^2}{b}\right) & \text{para } j = 1, 3, 5 \dots \\ \sin\left(i\frac{\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(\frac{j}{2}\frac{\pi\xi^2}{b}\right) & \text{para } j = 2, 4, 6 \dots \end{cases} \\
\phi_{3ij} &= \sin\left(i\frac{\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(j\frac{\pi\xi^2}{b}\right)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

No caso B, de cascas engastadas com bordas móveis, o campo de deslocamentos são expandidos em séries dos polinômios de Legendre. A equação (5.5) mostra a fórmula recursiva que calcula os polinômios de Legendre.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0(\alpha) &= 1 \\
\mathcal{L}_1(\alpha) &= \alpha \\
\mathcal{L}_{i+1}(\alpha) &= \frac{(2i+1)\alpha\mathcal{L}_i - i\mathcal{L}_{i-1}}{i+1}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

A equação (5.5) deve ser adaptada às coordenadas curvilíneas ξ^1 e ξ^2 por meio das mudanças de variáveis $\alpha_1 = 2\xi^1/a - 1$ e $\alpha_2 = 2\xi^2/b - 1$.

A equação (5.6) mostra as funções de forma para o caso B, de cascas engastadas de bordas móveis.

$$\begin{aligned}
 \phi_{1ij} &= [\mathcal{L}_{i-1}(\alpha_1)] [(1 - \alpha_2^2) \mathcal{L}_{j-1}(\alpha_2)] \\
 \phi_{2ij} &= [(1 - \alpha_1^2) \mathcal{L}_{i-1}(\alpha_1)] [\mathcal{L}_{j-1}(\alpha_2)] \\
 \phi_{3ij} &= [(1 - \alpha_1)^2 (1 + \alpha_1)^2 \mathcal{L}_{i-1}(\alpha_1)] [(1 - \alpha_2)^2 (1 + \alpha_2)^2 \mathcal{L}_{j-1}(\alpha_2)] \\
 \alpha_1 &= \frac{2\xi^1}{a} - 1, \quad \alpha_2 = \frac{2\xi^2}{b} - 1
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

A principal diferença entre os casos A e B dos casos C e D está nas funções ϕ_{1ij} e ϕ_{2ij} , que definem os deslocamentos de membrana da superfície $\mathcal{S}$.

No caso C, de cascas simplesmente apoiadas de bordas imóveis, as funções de forma são dadas pela equação (5.7).

$$\begin{aligned}
 \phi_{1ij} &= \sin\left(i \frac{\pi \xi^1}{a}\right) \sin\left(j \frac{\pi \xi^2}{b}\right) \\
 \phi_{2ij} &= \sin\left(i \frac{\pi \xi^1}{a}\right) \sin\left(j \frac{\pi \xi^2}{b}\right) \\
 \phi_{3ij} &= \sin\left(i \frac{\pi \xi^1}{a}\right) \sin\left(j \frac{\pi \xi^2}{b}\right)
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Por outro lado, para cascas engastadas com bordas imóveis, caso D, as funções de forma ϕ_{kij} são dadas pelas equações (5.8).

$$\begin{aligned}
 \phi_{1ij} &= [(1 - \alpha_1^2) \mathcal{L}_{i-1}(\alpha_1)] [(1 - \alpha_2^2) \mathcal{L}_{j-1}(\alpha_2)] \\
 \phi_{2ij} &= [(1 - \alpha_1^2) \mathcal{L}_{i-1}(\alpha_1)] [(1 - \alpha_2^2) \mathcal{L}_{j-1}(\alpha_2)] \\
 \phi_{3ij} &= [(1 - \alpha_1)^2 (1 + \alpha_1)^2 \mathcal{L}_{i-1}(\alpha_1)] [(1 - \alpha_2)^2 (1 + \alpha_2)^2 \mathcal{L}_{j-1}(\alpha_2)] \\
 \alpha_1 &= \frac{2\xi^1}{a} - 1, \quad \alpha_2 = \frac{2\xi^2}{b} - 1
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

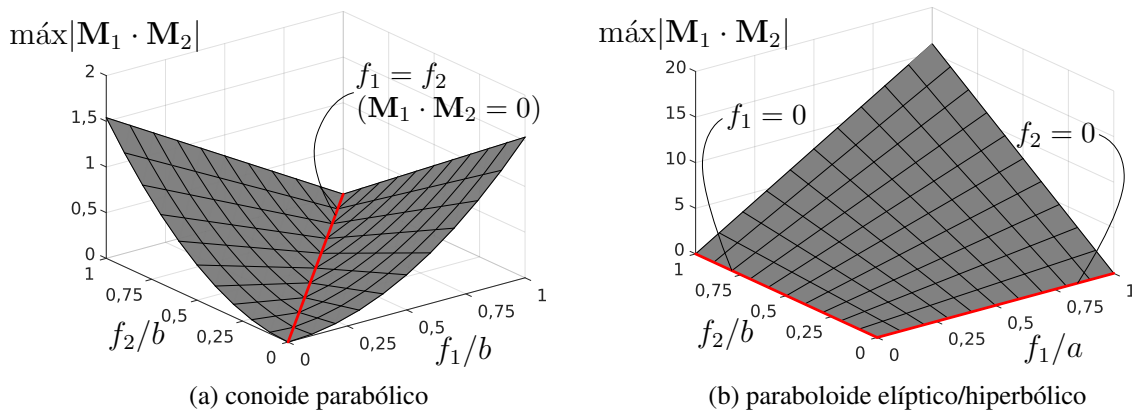
Nesta capítulo, as frequências naturais e modos de vibração de cascas descritas por um sistema não ortogonal de coordenadas curvilíneas são obtidos. A condição de ortogonalidade é satisfeita quando a equação (5.9) é válida para todos os pontos da superfície média da casca.

$$\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 = Z_{,1} Z_{,2} = 0 \tag{5.9}$$

Exceto em condições especiais, a equação (5.9) não é válida para nenhuma das geometrias ilustradas na Figura 5.1. Para o conoide parabólico, a condição de ortogonalidade é válida apenas quando $f_1 = f_2$. Para ambos o parabolóide elíptico e o parabolóide hiperbólico, a condição de ortogonalidade é satisfeita quando $f_1 = 0$ ou $f_2 = 0$. A condição de ortogonalidade

é ilustrada no gráfico da Figura 5.2, que mostra a relação entre o máximo valor absoluto da equação (5.9) em função dos parâmetros f_1 e f_2 ; na Figura 5.2(a), para o conoide parabólico; e, na Figura 5.2(b), tanto para o parabolóide elíptico quanto para o parabolóide hiperbólico. Em todos os três casos, a superfície média resultante dessas condições especiais (representadas pelas linhas vermelhas do gráfico) é a de um painel parabólico. Este trabalho se concentra no estudo do caso geral, quando a condição de ortogonalidade não é válida.

Figura 5.2 – Valores de $\max|\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2|$ para (a) o conoide parabólico e (b) o parabolóide elíptico/hiperbólico. As linhas vermelhas representam o caso especial em que a casca é um painel parabólico.



Para gerar os resultados deste capítulo, foi adotada uma expansão modal com $m_k = n_k = 12$, e o número total de graus de liberdade em cada campo de deslocamentos é 144. Portanto, o sistema discretizado possui 432 equações diferenciais ordinárias de segunda ordem de equilíbrio dinâmico que é função dos vetores $\mathbf{U} = [U_{kij}]$ e $\ddot{\mathbf{U}} = [\ddot{U}_{kij}]$.

5.2 Cascas abatidas

Inicialmente, três cascas cujas geometrias estão ilustradas na Figura 5.1 foram analisadas. Os resultados das frequências naturais normalizadas ($\bar{\omega} = \omega ab/h\sqrt{\rho/E}$), apresentados nesta seção, foram comparados com os resultados obtidos pelo Abaqus e os apresentados por Stavridis (1998), que usou o método de Marguerre para teorias de cascas abatidas. Os modos de vibração também foram comparados com aqueles obtidos pelo Abaqus. Em todos os resultados determinados pelo método dos elementos finitos, uma malha com 100×100 elementos do tipo S4 (Smith, 2009) foi empregada – que é refinada o suficiente para garantir a convergência numérica

– para modelagem de toda a casca, sem imposição de simetrias ou restrição de deslocamentos que não as condições de contorno nas bordas.

Primeiramente, dois conoides parabólicos com as condições de contorno dos casos A e B da Tabela 5.1 foram analisados. O coeficiente de Poisson é $\nu = 0,15$ e a geometria das cascas são definidas pelos parâmetros adimensionais $a/b = 1$, $f_1/b = 0,2$, $f_2/b = 0$ e $ab/h^2 = 10000$.

A Tabela 5.2 mostra as primeiras quatro frequências naturais normalizadas, $\bar{\omega}$, comparadas com aquelas obtidas via MEF por meio do Abaqus e por Stavridis (1998). O erro, mostrado entre parênteses, representa a diferença percentual relativa entre os resultados da coluna correspondente e os resultados obtidos pelo Abaqus. Como pode ser observado, na Tabela 5.2, os valores de frequência natural obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz são mais próximos dos resultados do Abaqus que os resultados obtidos determinadas por Stavridis (1998). Nos dois casos, o erro da análise de Stavridis chega a $-31,54\%$ para o Caso A e $-188,82\%$ no Caso B, o que indica que a teoria de Marguerre pode não ser apropriada para o problema de vibração livre de conoide parabólicos.

A Figura 5.3 mostra a representação tridimensional do primeiro modo de vibração para uma casca com as condições de contorno dos casos A e B calculados pelo Abaqus e pelo método de Rayleigh-Ritz. Como pode ser observado, há uma boa concordância entre os dois resultados.

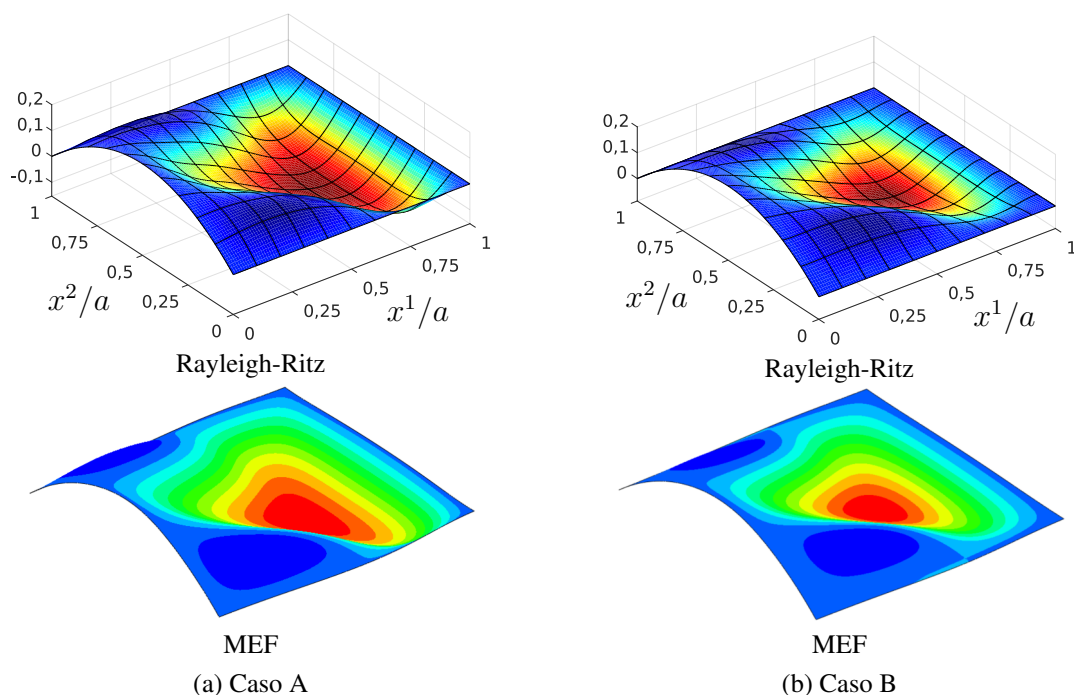
As projeções dos modos de vibração cujas frequências naturais estão apresentadas na Tabela 5.2 estão ilustradas nas Figuras 5.4 e Figura 5.5 para uma casca abatida do tipo conoide parabólico simplesmente apoiada com bordas móveis (caso A) e para uma casca abatida do tipo conoide parabólico engastada com bordas móveis (caso B), respectivamente. Como pode ser observado, os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz e os modos obtidos pelo Abaqus são muito próximos, o que valida a formulação matemática.

A seguir, cascas abatidas do tipo parabolóide elíptico e hiperbólico serão estudadas. Nos dois casos, a superfície média é definida pelos parâmetros adimensionais $a/b = 1$, $f_1/a = 0,1$, $f_2/b = 0,1$. A espessura é definida pela razão $ab/h^2 = 10000$ e o coeficiente de Poisson é $\nu = 0,15$. As tabelas 5.3 e 5.4 mostram os valores de frequências naturais normalizadas para as duas cascas, parabolóide elíptico e hiperbólico, com as condições de contorno dos casos A e B. Os resultados obtidos são comparados com os obtidos pelo Abaqus e por Stavridis (1998).

Tabela 5.2 – Frequência natural normalizada ($\bar{\omega} = \omega ab/h\sqrt{\rho/E}$) do conoide parabólico. A superfície média é definida pelos parâmetros adimensionais $a/b = 1$, $f_1/b = 0,2$, $f_2/b = 0$. A espessura da casca é determinada pela razão $ab/h^2 = 10000$ e o coeficiente de Poisson é $\nu = 0,15$.

Caso A			Caso B		
MEF	Stavridis (1998) (erro)	Rayleigh-Ritz (erro)	MEF	Stavridis (1998) (erro)	Rayleigh-Ritz (erro)
18,364	18,590 (1,23%)	18,549 (1,01%) (Fig. 5.3(a) e 5.4(a))	26,126	9,046 (-188,82%)	26,135 (0,03%) (Fig. 5.3(b) and 5.5(a))
28,285	19,363 (-31,54%)	28,635 (1,23%) (Fig. 5.4(b))	38,640	19,553 (-97,62%)	38,781 (0,36%) (Fig. 5.5(b))
34,569	30,231 (-12,55%)	34,751 (0,53%) (Fig. 5.4(c))	38,949	33,035 (-17,09%)	38,957 (0,02%) (Fig. 5.5(c))
38,029	38,564 (1,41%)	38,199 (0,45%) (Fig. 5.4(d))	45,497	33,617 (-35,33%)	45,582 (0,18%) (Fig. 5.5(d))

Figura 5.3 – Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz e MEF para um conoide parabólico (a): condições de contorno do caso A; (b) condições de contorno do caso B.



Os modos de vibração correspondentes são ilustrados nas Figuras 5.6 (caso A) e 5.7 (caso B), para o parabolóide elíptico, e nas Figuras 5.8 (caso A) e 5.9 (caso B), para o parabolóide hiperbólico.

Na maioria dos resultados não há diferença aparente entre os modos de vibração calculados pelo método de Rayleigh-Ritz e dos obtidos pelo Abaqus. Como pode ser observado nas Figuras 5.7(b), 5.7(c), 5.8(c), 5.8(d), 5.9(c) e 5.9(d), alguns modos obtidos pelas soluções semianalíticas

Figura 5.4 – Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um conoide parabólico com as condições de contorno do caso A.

$$(a/b = 1, f_1/b = 0,2, f_2/b = 0, ab/h^2 = 10000, \nu = 0,15)$$

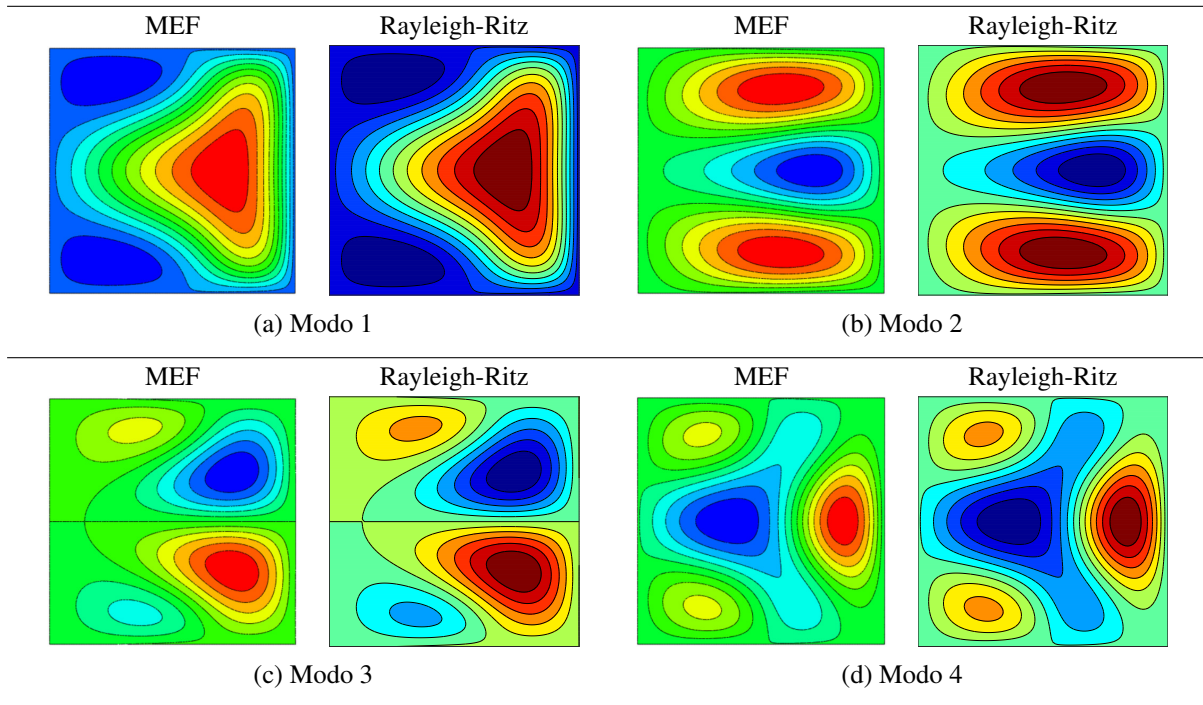


Figura 5.5 – Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um conoide parabólico com as condições de contorno do caso B.

$$(a/b = 1, f_1/b = 0,2, f_2/b = 0, ab/h^2 = 10000, \nu = 0,15)$$

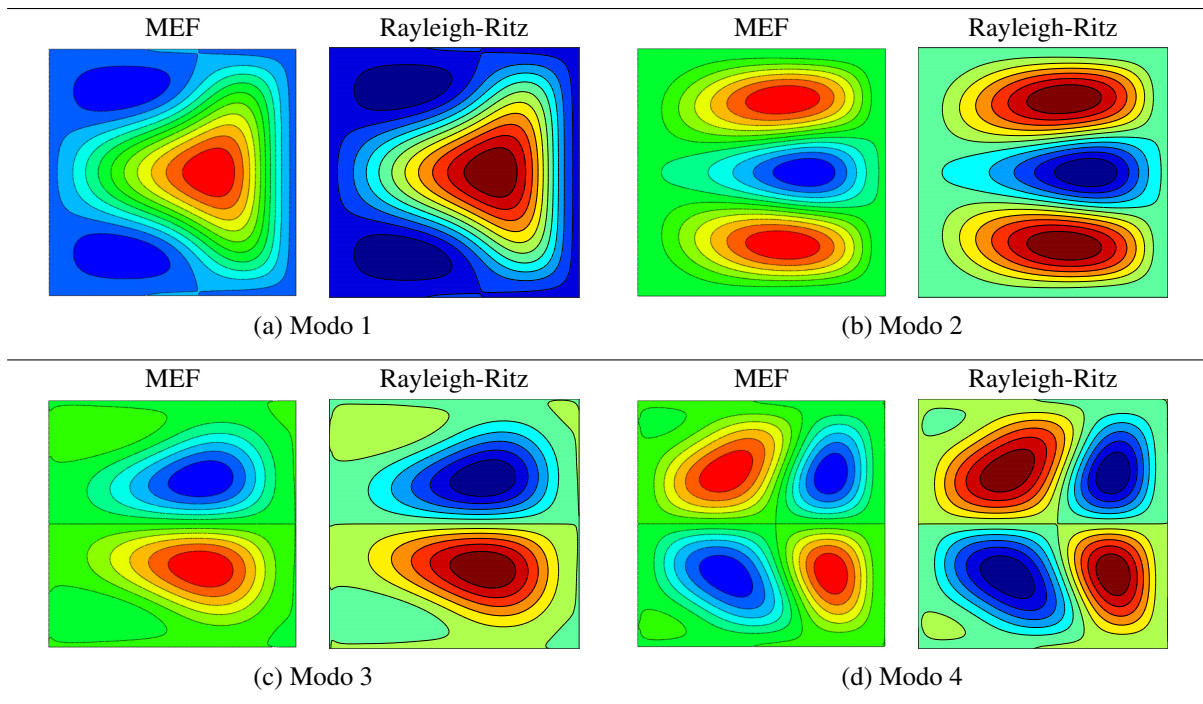


Figura 5.6 – Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um paraboloide elíptico com as condições de contorno do caso A.
 $(a/b = 1, f_1/a = 0,1, f_2/b = 0,1, ab/h^2 = 10000, \nu = 0,15)$

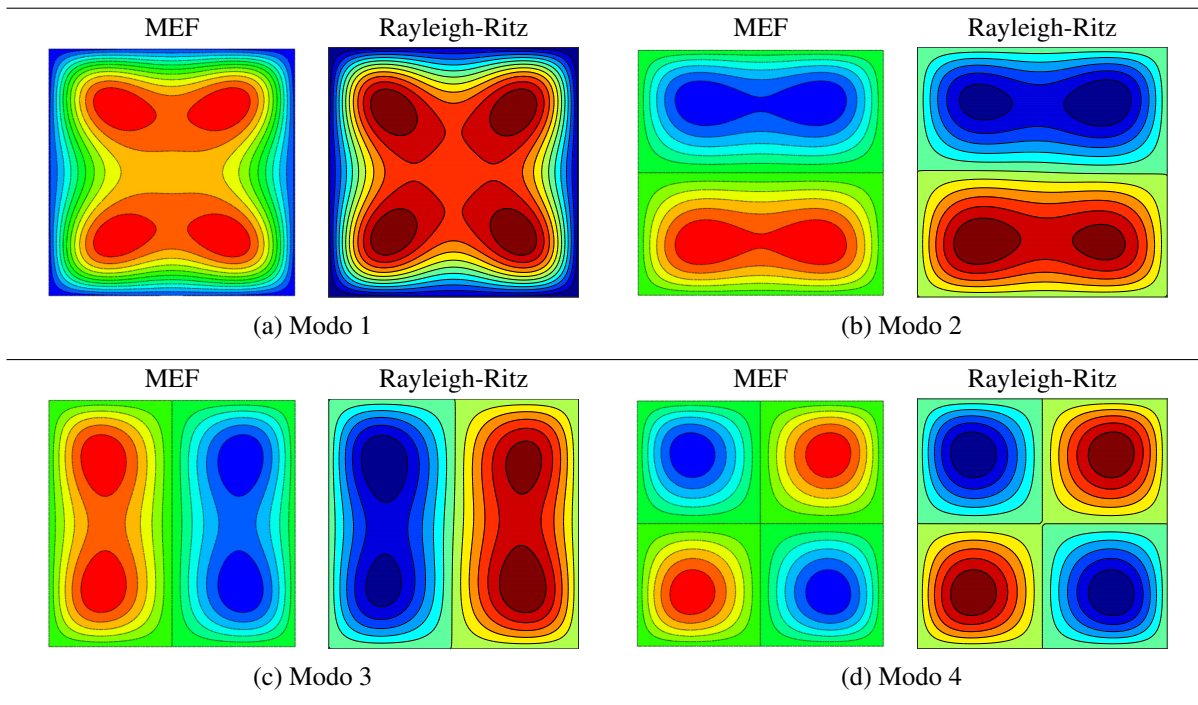


Figura 5.7 – Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um paraboloide elíptico com as condições de contorno do caso B.
 $(a/b = 1, f_1/a = 0,1, f_2/b = 0,1, ab/h^2 = 10000, \nu = 0,15)$

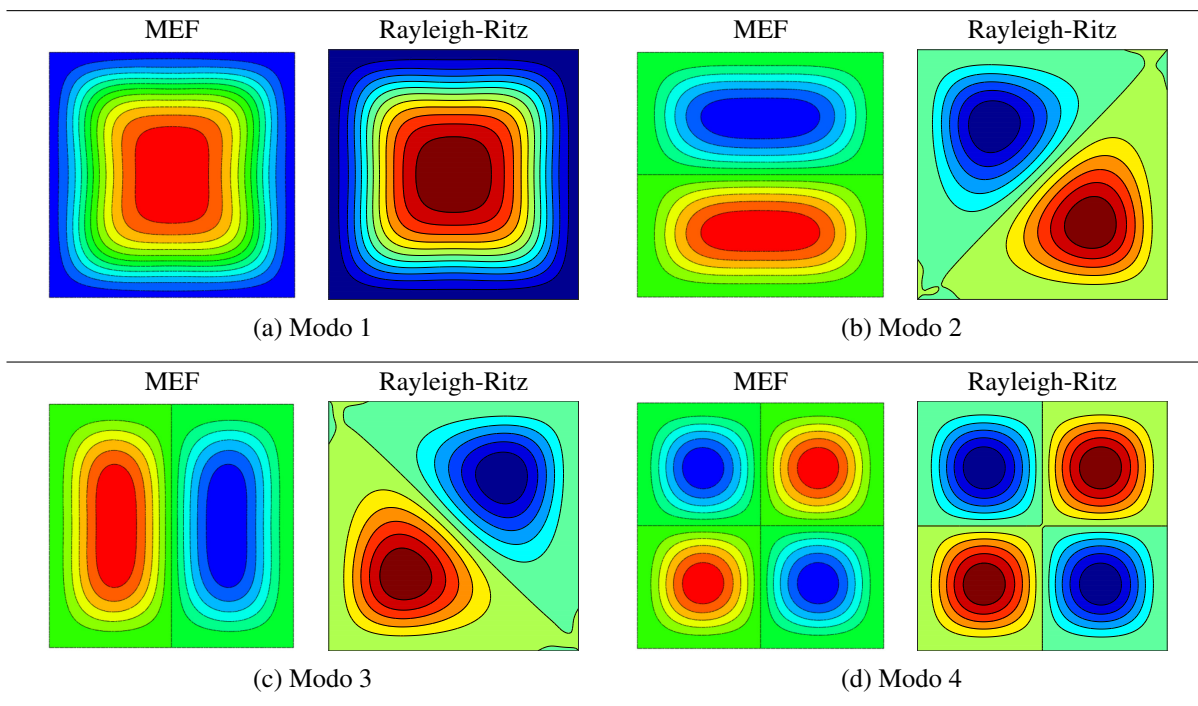


Figura 5.8 – Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um parabolóide hiperbólico com as condições de contorno do caso A.
 $(a/b = 1, f_1/a = 0,1, f_2/b = 0,1, ab/h^2 = 10000, \nu = 0,15)$

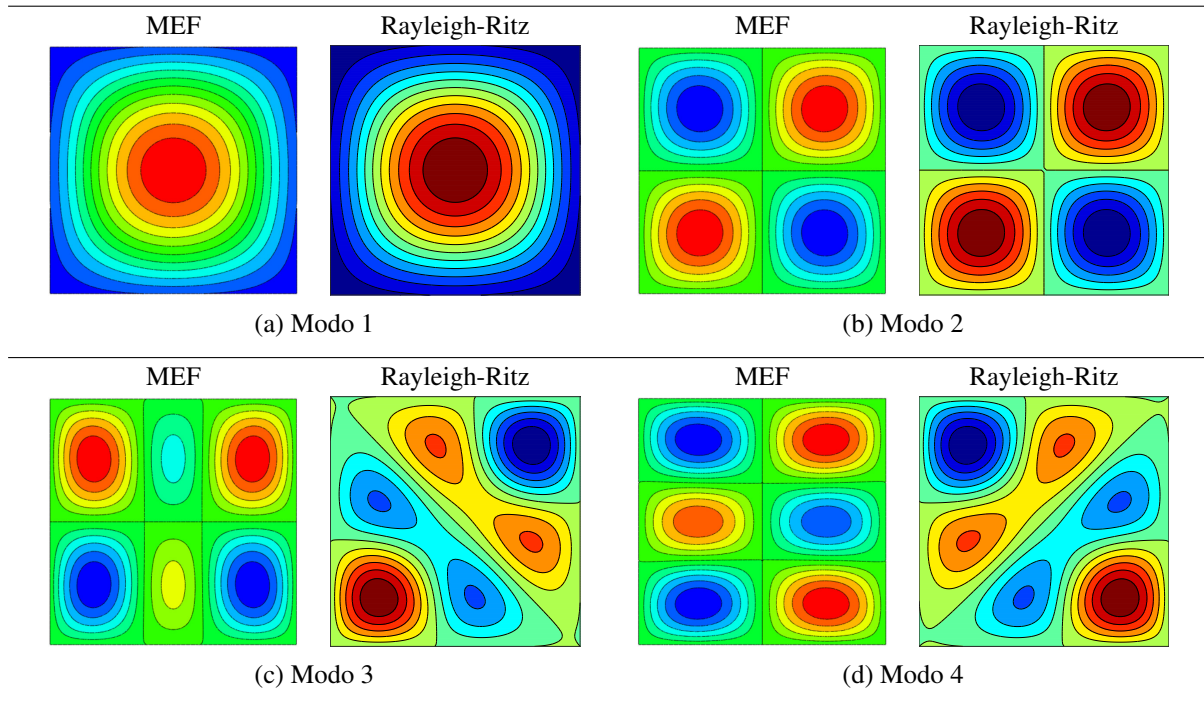


Figura 5.9 – Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um parabolóide hiperbólico com as condições de contorno do caso B.
 $(a/b = 1, f_1/a = 0,1, f_2/b = 0,1, ab/h^2 = 10000, \nu = 0,15)$

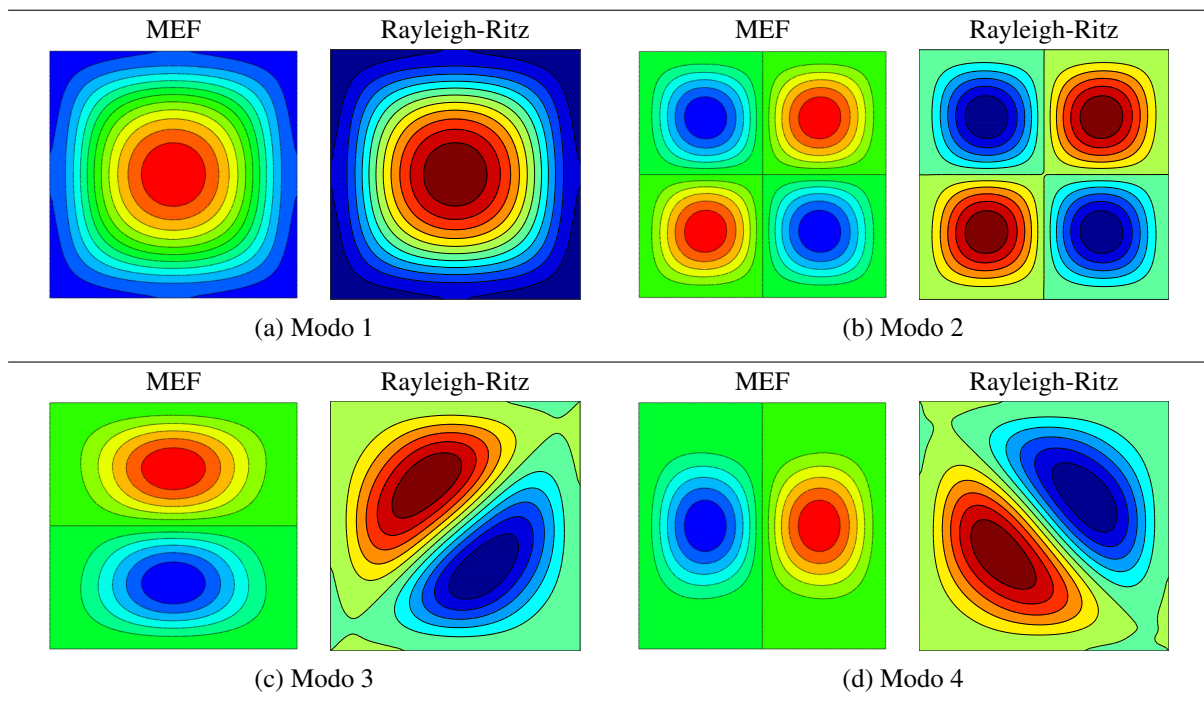


Tabela 5.3 – Frequências naturais normalizadas ($\bar{\omega} = \omega ab/h\sqrt{\rho/E}$) para um parabolóide elíptico. A geometria da superfície média é definida pelos parâmetros adimensionais $a/b = 1$, $f_1/b = 0,1$, $f_2/b = 0,1$. A espessura da casca é determinada da razão $ab/h^2 = 10000$ e o coeficiente de Poisson é $\nu = 0,15$.

Caso A			Caso B		
MEF	Stavridis (1998) (erro)	Rayleigh-Ritz (erro)	MEF	Stavridis (1998) (erro)	Rayleigh-Ritz (erro)
73,243	80,207 (9,5%)	74,732 (2,03%) (Fig. 5.6(a))	75,046	80,682 (7,50%)	76,293 (1,66%) (Fig. 5.7(a))
74,873	81,287 (8,56%)	75,621 (0,99%) (Fig. 5.6(b))	77,606	82,786 (6,67%)	78,172 (0,72%) (Fig. 5.7(b))
75,362	83,255 (10,47%)	75,621 (0,34%) (Fig. 5.6(c))	78,015	85,946 (10,16%)	78,173 (0,20%) (Fig. 5.7(c))
75,694	85,032 (12,33%)	75,960 (0,35%) (Fig. 5.6(d))	79,492	88,689 (11,56%)	79,665 (0,21%) (Fig. 5.7(d))

Tabela 5.4 – Frequências naturais normalizadas ($\bar{\omega} = \omega ab/h\sqrt{\rho/E}$) para o parabolóide hiperbólico. A superfície média é definida pelos parâmetros adimensionais $a/b = 1$, $f_1/b = 0,1$, $f_2/b = 0,1$. A espessura da casca é definida pela razão $ab/h^2 = 10000$ e o coeficiente de Poisson é $\nu = 0,15$.

Caso A			Caso B		
MEF	Stavridis (1998) (erro)	Rayleigh-Ritz (erro)	MEF	Stavridis (1998) (erro)	Rayleigh-Ritz (erro)
6,570	5,763 (-12,28%)	6,240 (-5,01%) (Fig. 5.8(a))	10,922	13,509 (23,68%)	10,507 (-3,79%) (Fig. 5.9(a))
21,282	23,054 (8,32%)	21,301 (0,09%) (Fig. 5.8(b))	30,753	33,453 (8,77%)	30,735 (-0,05%) (Fig. 5.9(b))
44,454	48,479 (9,05%)	44,846 (0,88%) (Fig. 5.8(c))	49,516	52,576 (6,17%)	49,903 (0,78%) (Fig. 5.9(c))
44,524	50,116 (12,55%)	44,846 (0,72%) (Fig. 5.8(d))	50,256	58,552 (16,5%)	49,906 (-0,69%) (Fig. 5.9(d))

são diferentes daqueles obtidos pelo MEF, apesar de possuírem a mesma frequência natural. Esse fenômeno também é observado na análise de placas quadradas devido à simetria da casca no eixo diagonal do plano horizontal (Duvigneau *et al.*, 2016). Os modos obtidos pelo Abaqus são uma combinação linear de dois modos semianalíticos de mesma frequência.

5.3 Cascas não abatidas

O objetivo desta seção é verificar se a formulação tensorial também produz bons resultados quando aplicada em cascas não abatidas. Para isso, três cascas cujas superfícies médias são ilustradas na Figura 5.1 foram estudadas. A relação entre as dimensões da projeção horizontal da superfície média é $a/b = 4/3$, a espessura da casca é definida pela razão $ab/h^2 = 10000$ e o coeficiente de Poisson é $\nu = 0,3$. Os resultados numéricos – frequência natural normalizada e modos de vibração – foram comparadas com os resultados obtidos pelo Abaqus. Novamente, uma malha com 100×100 elementos S4, que é refinada o suficiente para garantir convergência numérica, foi utilizada.

A primeira casca analisada é um conoide parabólico cujas elevações das bordas são dados pelas razões $f_1/b = 0,25$ e $f_2/b = 0,5$. A Tabela 5.5 mostra as frequências naturais para o conoide parabólico com as condições de contorno dos casos C e D da Tabela 5.5. O erro, entre parênteses, representa a diferença percentual relativa entre os resultados da coluna correspondente e os resultados obtidos pelo Abaqus.

As Figuras 5.10 e 5.11 – relacionadas aos casos C e D, respectivamente – mostram os modos de vibração correspondentes às frequências naturais apresentadas na Tabela 5.5 para o conoide parabólico não abatido.

Tabela 5.5 – Frequências naturais normalizadas ($\bar{\omega} = \omega ab/h\sqrt{\rho/E}$) para uma conoide parabólico não abatido. A geometria da superfície média é definida pelos parâmetros adimensionais $a/b = 4/3$, $f_1/b = 0,5$, $f_2/b = 0,25$. A espessura da casca é definida pela razão $ab/h^2 = 10000$ e o coeficiente de Poisson é $\nu = 0,3$.

Caso C		Caso D	
MEF	Rayleigh-Ritz (erro)	MEF	Rayleigh-Ritz (erro)
44,423	44,610 (0,41%) (Fig. 5.10(a))	48,025	47,902 (-0,25%) (Fig. 5.11(a))
45,563	45,920 (0,78%) (Fig. 5.10(b))	53,514	53,192 (-0,60%) (Fig. 5.11(b))
58,751	58,907 (0,26%) (Fig. 5.10(c))	65,751	65,601 (-0,22%) (Fig. 5.11(c))
62,203	62,359 (0,25%) (Fig. 5.10(d))	69,328	68,747 (-0,83%) (Fig. 5.11(d))

Figura 5.10 – Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um conoide parabólico não abatido com as condições de contorno do Caso C. ($a/b = 4/3$, $f_1/b = 0,25$, $f_2/b = 0,5$, $ab/h^2 = 10000$, $\nu = 0,3$)

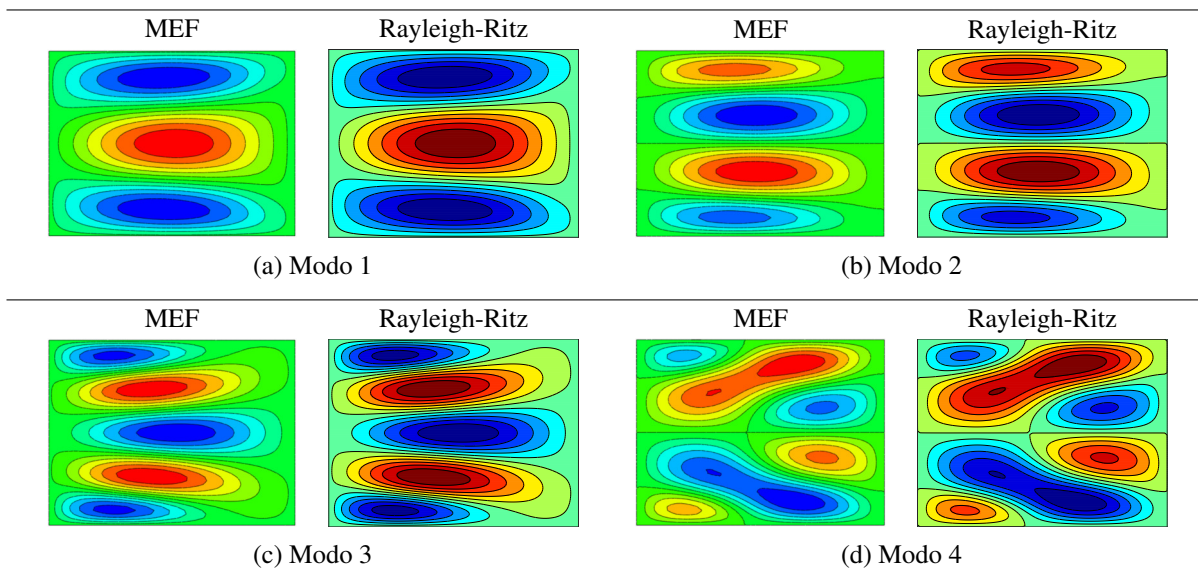
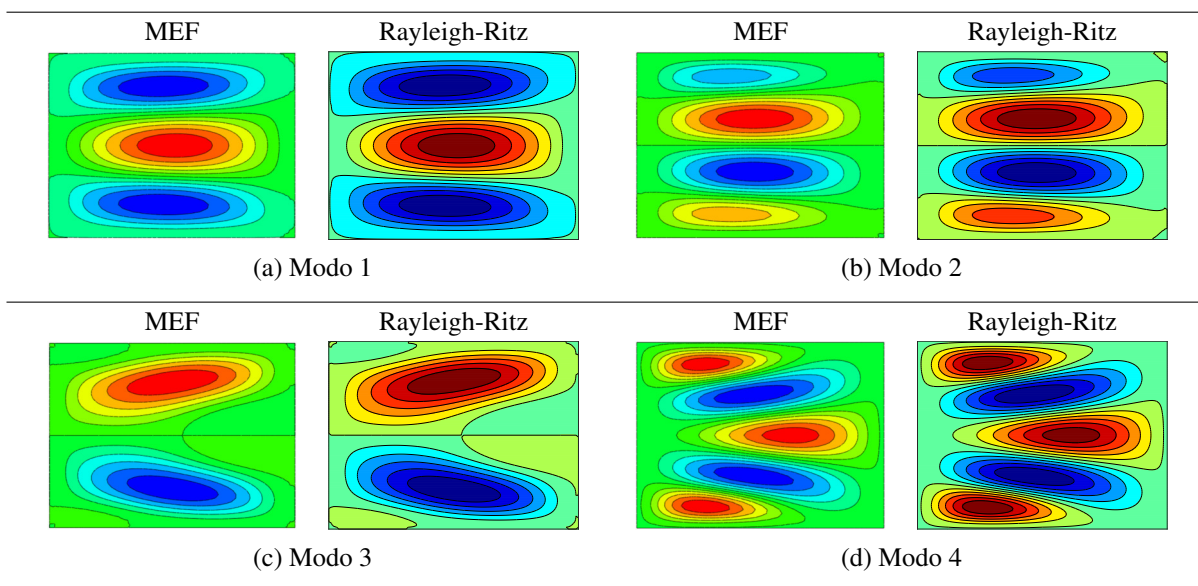


Figura 5.11 – Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um conoide parabólico não abatido com as condições de contorno do Caso D. ($a/b = 4/3$, $f_1/b = 0,25$, $f_2/b = 0,5$, $ab/h^2 = 10000$, $\nu = 0,3$)



Como pode ser observado na Tabela 5.5 e nas Figuras 5.10 e 5.11, as frequências naturais e modos de vibração são muito próximas daqueles obtidos pelo Abaqus. A Tabela 5.5 mostra que os erros são menores que 1% em módulo. Da mesma forma, as Figuras 5.10 e 5.11 mostram que não há diferença significativa entre os modos de vibração, demonstrando a eficiência da formulação tensorial quando aplicada a cascas não abatidas.

De forma similar à análise do conoide parabólico não abatido, as frequências naturais e modos de vibração também foram obtidos para dois paraboloides não abatidos, um elíptico e outro hiperbólico. As Tabelas 5.6 e 5.7 mostram as frequências naturais normalizadas dessas cascas cujas elevações das bordas são $f_1/a = 0,5$ e $f_2/b = 0,25$. Nos dois casos, considerou-se que as cascas são simplesmente apoiadas com bordas imóveis e totalmente engastadas com bordas imóveis, que são, respectivamente, os casos C e D da Tabela 5.1. Os modos de vibração são mostrados nas Figuras 5.12 (Caso C) e 5.13 (Caso D), para o paraboloide elíptico, e nas Figuras 5.14 (Caso C) e 5.15 (Caso D), para o paraboloide hiperbólico.

Tabela 5.6 – Frequências naturais normalizadas ($\bar{\omega} = \omega ab/h\sqrt{\rho/E}$) para um paraboloide elíptico não abatido. A superfície média é definida pelos parâmetros adimensionais $a/b = 4/3$, $f_1/a = 0,5$, $f_2/b = 0,25$. A espessura da casca é dada pela razão $ab/h^2 = 10000$ e o coeficiente de Poisson é $\nu = 0,30$.

Caso C		Caso D	
MEF	Rayleigh-Ritz (erro)	MEF	Rayleigh-Ritz (erro)
84,781	85,391 (0,71%) (Fig. 5.12(a))	90,328	90,014 (-0,34%) (Fig. 5.13(a))
85,046	85,553 (0,59%) (Fig. 5.12(b))	90,564	90,164 (-0,44%) (Fig. 5.13(b))
89,452	89,487 (0,03%) (Fig. 5.12(c))	93,598	93,043 (-0,59%) (Fig. 5.13(c))
89,471	89,496 (0,02%) (Fig. 5.12(d))	93,880	93,322 (-0,59%) (Fig. 5.13(d))

Novamente, verificou-se que as frequências naturais obtidas pelo método de Rayleigh-Ritz são muito próximas daquelas obtidas pelo Abaqus, como mostram as Tabelas 5.6 e 5.7, para os paraboloides não abatidos elíptico e hiperbólico, respectivamente. O erro percentual relativo em ambos os casos é menor que 1% em módulo. A diferença aparente entre os modos de vibração nas Figuras 5.12, 5.13, 5.14 e 5.15 pode ser explicada pelas aproximações das expansões do campo de deslocamentos e pela diferença da visualização gráfica entre o Matlab e o Abaqus.

Figura 5.12 – Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um parabolóide elíptico não abatido com as condições de contorno do Caso C. ($a/b = 4/3$, $f_1/a = 0,5$, $f_2/b = 0,25$, $ab/h^2 = 10000$, $\nu = 0,3$)

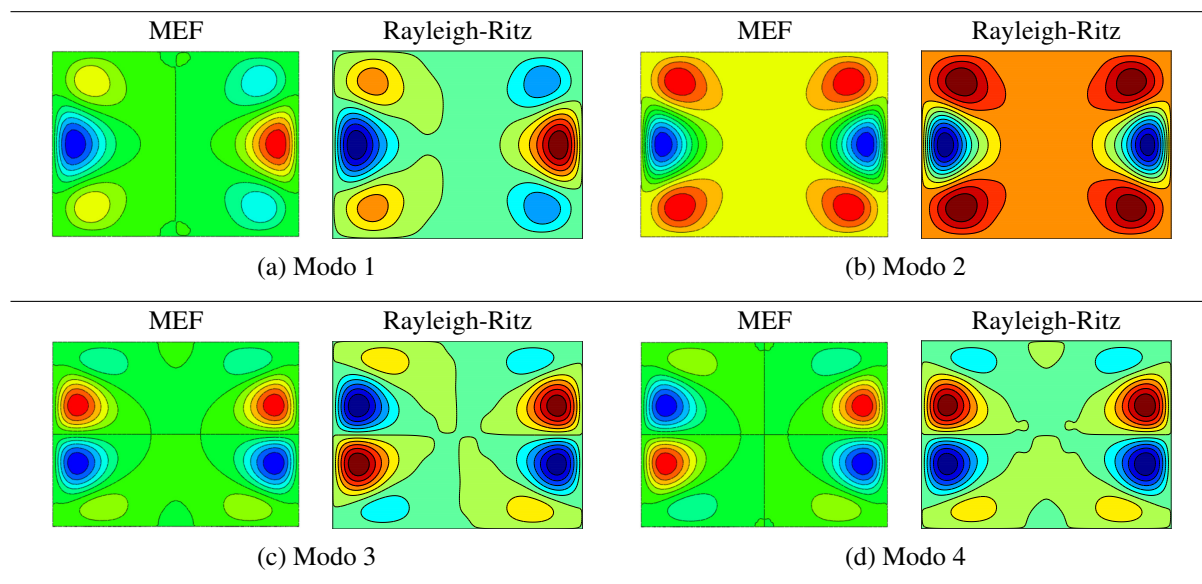


Figura 5.13 – Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um parabolóide elíptico não abatido com as condições de contorno do Caso D. ($a/b = 4/3$, $f_1/a = 0,5$, $f_2/b = 0,25$, $ab/h^2 = 10000$, $\nu = 0,3$)

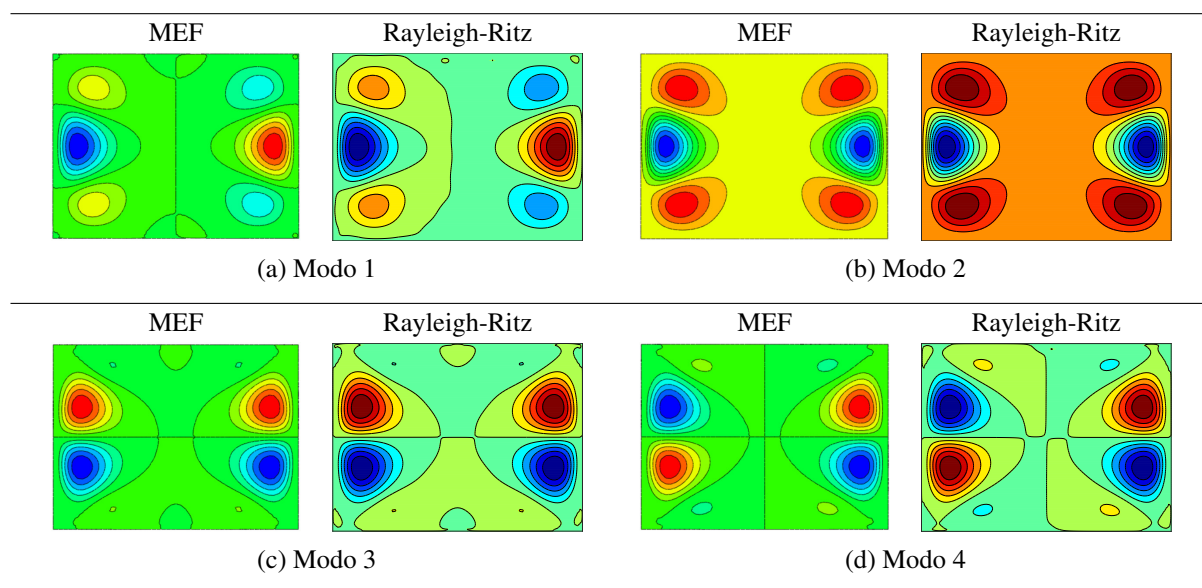


Figura 5.14 – Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um parabolóide hiperbólico não abatido com as condições de contorno do Caso C. ($a/b = 4/3$, $f_1/a = 0,5$, $f_2/b = 0,25$, $ab/h^2 = 10000$, $\nu = 0,3$)

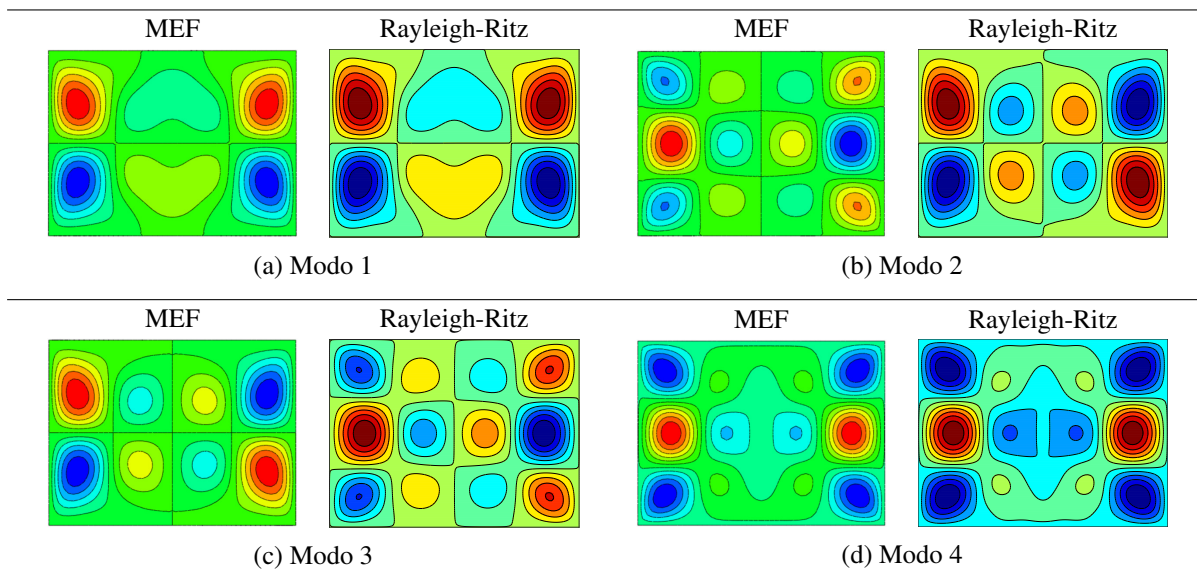


Figura 5.15 – Comparação entre os modos de vibração obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz com os modos obtidos pelo Abaqus para um parabolóide hiperbólico não abatido com as condições de contorno do Caso D. ($a/b = 4/3$, $f_1/a = 0,5$, $f_2/b = 0,25$, $ab/h^2 = 10000$, $\nu = 0,3$)

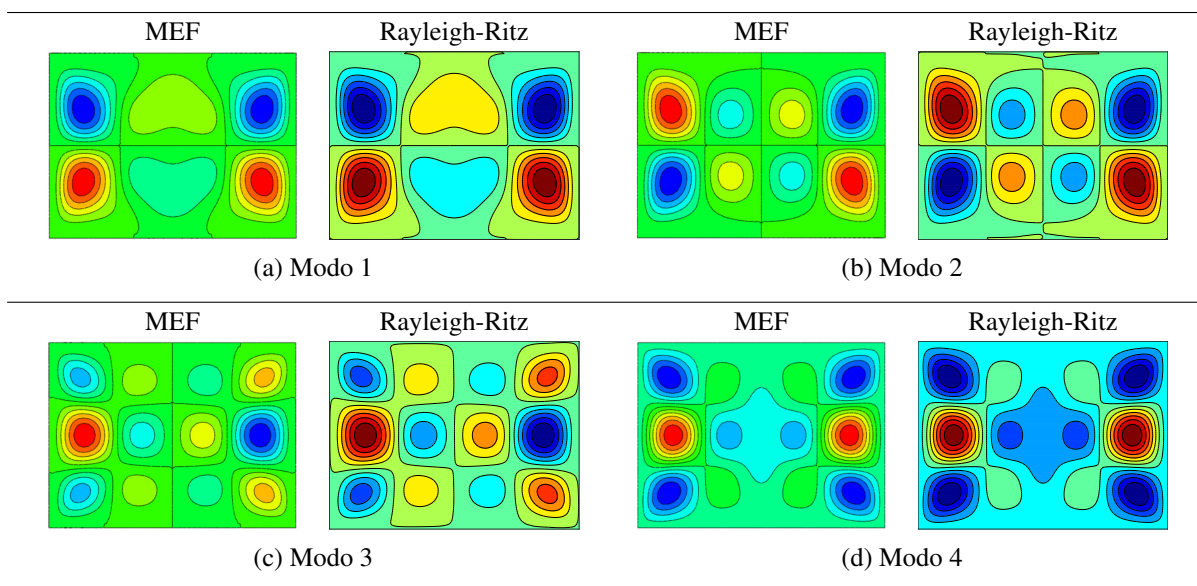


Tabela 5.7 – Frequências naturais normalizadas ($\bar{\omega} = \omega ab/h\sqrt{\rho/E}$) para um parabolóide hiperbólico não abatido. A superfície média é definida pelos parâmetros adimensionais $a/b = 4/3$, $f_1/a = 0,5$, $f_2/b = 0,25$. A espessura da casca é dada pela razão $ab/h^2 = 10000$ e o coeficiente de Poisson é $\nu = 0,30$.

Caso C		Caso D	
MEF	Rayleigh-Ritz (erro)	MEF	Rayleigh-Ritz (erro)
65,877	66,331 (0,68%) (Fig. 5.14(a))	69,099	68,909 (-0,27%) (Fig. 5.15(a))
66,146	66,653 (0,76%) (Fig. 5.14(b))	69,453	69,246 (-0,29%) (Fig. 5.15(b))
66,171	67,119 (1,43%) (Fig. 5.14(c))	73,497	73,233 (-0,35%) (Fig. 5.15(c))
66,844	67,910 (1,59%) (Fig. 5.14(d))	74,359	74,106 (-0,33%) (Fig. 5.15(d))

Fica evidenciado que com a aplicação da teoria de Koiter, que considera a não ortogonalidade entre as coordenadas curvilíneas, é possível obter resultados muito próximos daqueles obtidos via MEF, tanto para cascas abatidas quanto para cascas não abatidas.

CAPÍTULO 6

ANÁLISE NÃO LINEAR ESTÁTICA DE CASCAS FINAS

No Capítulo 5, a teoria de Koiter foi aplicada para determinar os modos de vibrações e frequências naturais de casca finas abatidas e não abatidas, mostrando boa concordância com os resultados obtidos via MEF. A análise foi feita apenas em regime linear, e foi necessário um grande número de graus de liberdade para representar corretamente as frequências naturais e modos de vibração. Em regime não linear, a expansão usada anteriormente seria computacionalmente inviável por conta do alto grau de acoplamento entre os termos não lineares das relações deformação-deslocamento e das equações de equilíbrio.

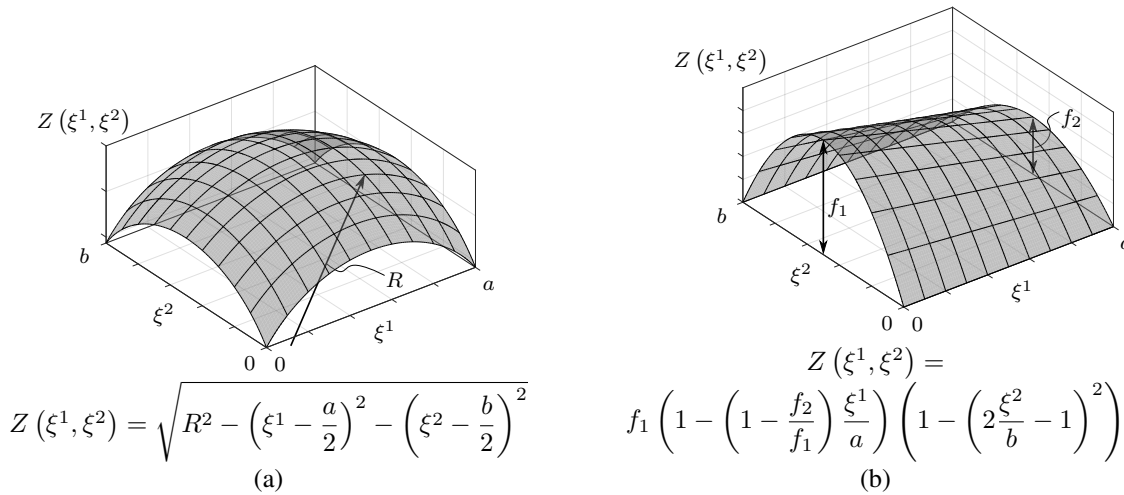
Neste capítulo, a análise não linear estática é aplicada a painéis esféricos e a conoides parabólicos submetidos a cargas distribuídas e concentradas. Os resultados apresentados neste capítulo foram publicados no artigo *Nonlinear static analysis of thin shallow and non-shallow shells using tensor formulation* (Pinho; Del Prado; Silva, 2022). A novidade desse estudo é a aplicação da formulação tensorial (teoria de Koiter) com um método semianalítico (método de Rayleigh-Ritz) para a análise não linear de cascas abatidas e não abatidas (painéis esféricos e conoides parabólicos) e que possuem geometrias diferentes das cascas que são comumente estudadas na literatura (placas, cilindros, cones).

A grande desvantagem da formulação tensorial é que o número de termos na energia de deformação, especialmente em regime não linear de grandes deslocamentos, é bem maior que o número de termos de formulações ortogonais. Como o número de termos na energia de deformação cresce exponencialmente com o número de graus de liberdade, essa abordagem pode ser ineficiente em problemas de grande dimensão. Por isso, duas aproximações da teoria não lineares de Koiter foram consideradas, uma para cascas abatidas (equação 2.62) e outra para cascas não abatidas (equação 2.61). Os campos de deslocamentos foram expandidos de duas formas: em série de Fourier, o que pode ser computacionalmente custoso; e usando a DOP em um mo-

delo de ordem reduzida. O uso da DOP em combinação com a formulação tensorial também é uma novidade. Os MOP da DOP são obtidos por meio de um experimento numérico via MEF. Os resultados obtidos são comparados com a literatura e o com MEF, mostrando que o uso da formulação tensorial pode ser essencial quando aplicada a casca descritas por um sistema de coordenadas curvilíneas não ortogonal.

As duas geometrias das cascas estudadas neste capítulo, o painel esférico e o conoide parabólico, estão ilustradas na Figura 6.1. Os resultados numéricos são comparados com os resultados obtidos via MEF e os resultados encontrados na literatura. Todos os resultados obtidos via MEF foram determinados utilizando o *software* comercial Abaqus com uma malha para discretização de toda a casca composta por 50×50 elementos do tipo S4, que é um elemento quadrilateral com integração completa, de propósito genérico, com 4 nós e 3 translações e 3 rotações por nó (Smith, 2009). Essa malha é refinada o suficiente para garantir convergência numérica. Não houve imposição de simetrias ou restrição de deslocamentos que não as condições de contorno nas bordas.

Figura 6.1 – Geometria da superfície média: (a) painel esférico e (b) conoide parabólico.



Considerou-se que a casca está submetida a dois tipos de carga, uma concentrada e outra distribuída, cujo trabalho total é dado pela equação:

$$W = - \int_0^a \int_0^b \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \sqrt{G} d\xi^1 d\xi^2 - \sum_{i=1}^{N_f} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}(\xi_i^1, \xi_i^2) \quad (6.1)$$

em que $\mathbf{p}$ é uma força distribuída por unidade de área; $\mathbf{F}_i$ são as forças concentradas aplicadas nas coordenadas ξ_i^1 e ξ_i^2 ; e N_f é o número total de cargas concentradas aplicadas. Considerou-se

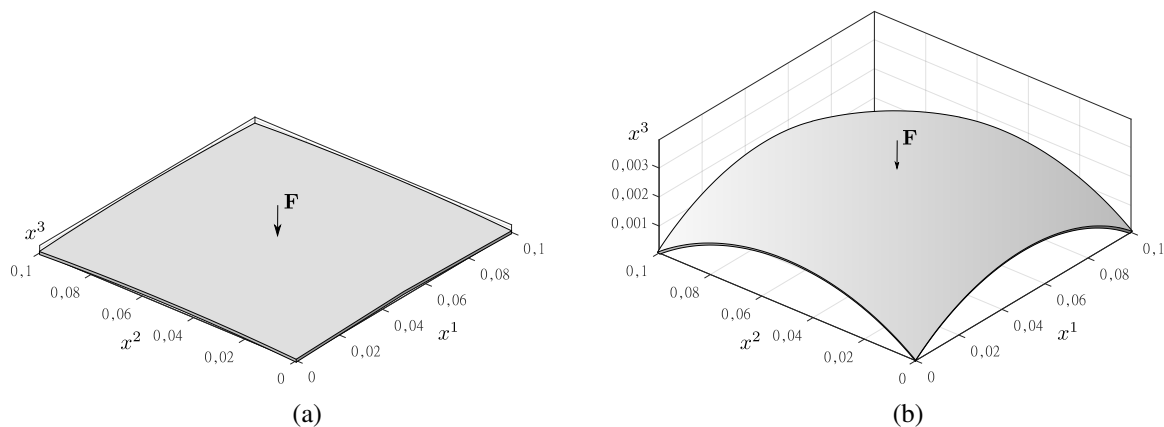
apenas os efeitos conservativos, de forma que a orientação das cargas permanece constante à medida que a casca se deforma e que a carga distribuída é perpendicular à superfície média na configuração de referência, ou seja $\mathbf{p} = p\mathbf{M}_3$.

Os caminhos de equilíbrio não linear são obtidos por meio do princípio da energia potencial estacionária, dado pelas equações (3.2) e (4.5), utilizando um método da continuação do tipo preditor-corretor Euler-Newtoniano (Allgower; Georg, 2012). As integrais da energia de deformação (2.107) e do trabalho (6.1) foram calculadas com o auxílio do Matlab.

6.1 Painel esférico abatido submetido a uma carga concentrada

Considere um painel esférico abatido, simplesmente apoiado, de raio $R = 1$ m, cuja projeção horizontal possui as dimensões $a = b = 0,1$ m, espessura $h = 0,001$ m, módulo de elasticidade $E = 206$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e submetido a uma carga concentrada vertical $\mathbf{F} = -F\mathbf{e}_3$ atuando no centro da casca, como mostra a Figura 6.2. Essa casca foi primeiramente estudada por Amabili (2005). A Figura 6.2(a) mostra a casca com os eixos x^1 , x^2 e x^3 com a mesma escala. Na Figura 6.2(b) o eixo x^3 foi ampliado para representar melhor a curvatura da casca.

Figura 6.2 – Painel esférico abatido com a carga concentrada atuando no centro da casca. Em (a), com eixos com mesma escala, e em (b), com x^3 ampliado.



As condições de contorno essenciais e naturais nas quatro bordas das cascas são dadas por:

$$\begin{aligned} u_2 = u_3 = N_1 = M_1 = 0 \text{ para } \xi^1 = 0, a \\ u_1 = u_3 = N_2 = M_2 = 0 \text{ para } \xi^2 = 0, b \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde N_α e M_α são o esforço normal e o momento fletor por unidade de comprimento na direção de $\mathbf{m}^\alpha$.

As funções de forma $\phi_{kij}(\xi^1, \xi^2)$ dos campos de deslocamentos u_k da expansão da equação (3.1), que satisfazem as condições de contorno naturais (6.2), são adotadas como:

$$\begin{aligned} \phi_{1ij} &= \left\{ \left[\frac{1 + (-1)^i}{2} \right] \sin \left(\frac{i\pi\xi^1}{a} \right) + \left[\frac{1 + (-1)^{i+1}}{2} \right] \cos \left(\frac{i\pi\xi^1}{a} \right) \right\} \sin \left(\frac{(2j-1)\pi\xi^2}{b} \right) \\ \phi_{2ij} &= \sin \left(\frac{(2i-1)\pi\xi^1}{a} \right) \left\{ \left[\frac{1 + (-1)^j}{2} \right] \sin \left(\frac{j\pi\xi^2}{b} \right) + \left[\frac{1 + (-1)^{j+1}}{2} \right] \cos \left(\frac{j\pi\xi^2}{b} \right) \right\} \\ \phi_{3ij} &= \sin \left(\frac{(2i-1)\pi\xi^1}{a} \right) \sin \left(\frac{(2j-1)\pi\xi^2}{b} \right) \end{aligned} \quad (6.3)$$

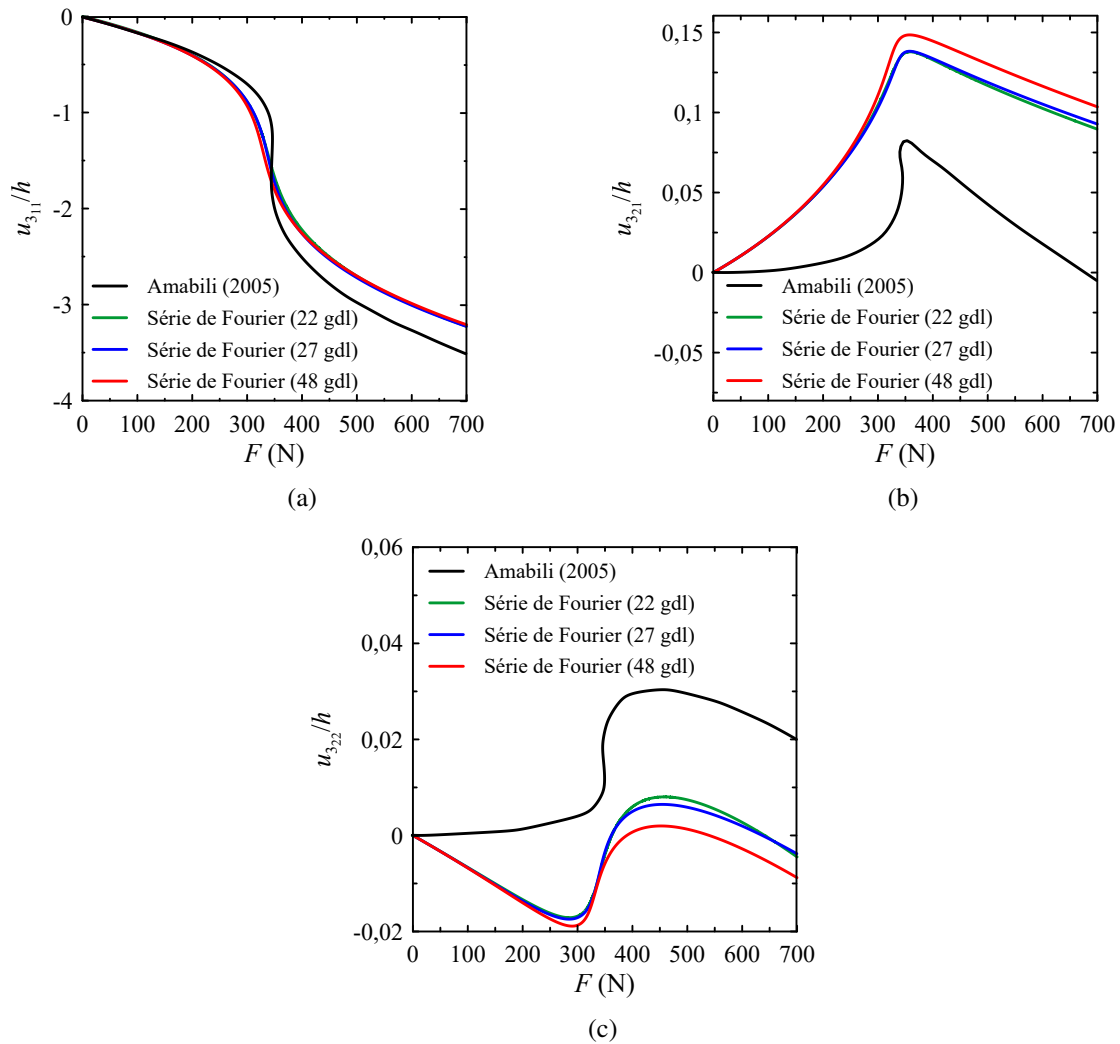
Nessas funções de forma, devido à dupla simetria da casca ao longo do centro da casca, alguns termos na série de Fourier podem ser desconsiderados. O campo de deslocamento u_1 é simétrico ao longo de $\xi^2 = b/2$, por isso os termos $\sin(j\pi\xi^2/b)$ quando j é par foram removidos da série. Esse campo também é antissimétrico ao longo de $\xi^1 = a/2$, por isso os termos $\sin(i\pi\xi^2/a)$ e $\cos(i\pi\xi^2/a)$ quando i é par e ímpar, respectivamente, também foram desconsiderados. O campo de deslocamento u_2 possui o mesmo comportamento que u_1 , mas trocando o eixos ξ^1 e ξ^2 . O campo u_3 é simétrico ao longo de $\xi^1 = a/2$ e $\xi^2 = b/2$, por isso os termos $\sin(i\pi\xi^2/a)$ e $\sin(i\pi\xi^2/b)$ para i par também foram removidos.

Para descrever os campos de deslocamento, três expansões foram consideradas com 22, 27 e 48 graus de liberdade. Na primeira, adotou-se a mesma expansão de Amabili (2005) com 22 gdl ($n_1 = n_2 = m_1 = m_2 = 3$, $n_3 = m_3 = 2$). Depois, mais funções trigonométricas foram adicionadas resultando em expansões com 27 gdl ($n_k = m_k = 3$) e 48 gdl ($n_k = m_k = 4$).

A Figura 6.3 mostra as respostas não lineares das coordenadas generalizadas u_{311} , $u_{321} = u_{312}$ e u_{322} em comparação com os resultados obtidos por Amabili (2005). Como pode ser observado, existe uma diferença entre os gráficos obtidos no presente trabalho e os da literatura. As curvas das coordenadas generalizadas u_{311} são bem similares, mas as curvas u_{321} e u_{322} são diferentes. Os resultados do presente trabalho também não apresentam instabilidades do tipo *snap-through*

como observado por Amabili (2005), que aplicou as teorias de cascas para coordenadas ortogonais de Donnell e Novozhilov.

Figura 6.3 – Coordenadas generalizadas de um painel esférico abatido submetido a um carregamento pontual no centro da casca determinadas por Amabili (2005) (preto) e obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz usando uma expansão em série de Fourier com 22 gdl (verde), 27 gdl (azul) e 48 gdl (vermelho). Em (a) a coordenada generalizada $u_{3,11}$; (b) a coordenada generalizada $u_{3,21}$; e (c) a coordenada generalizada $u_{3,22}$.

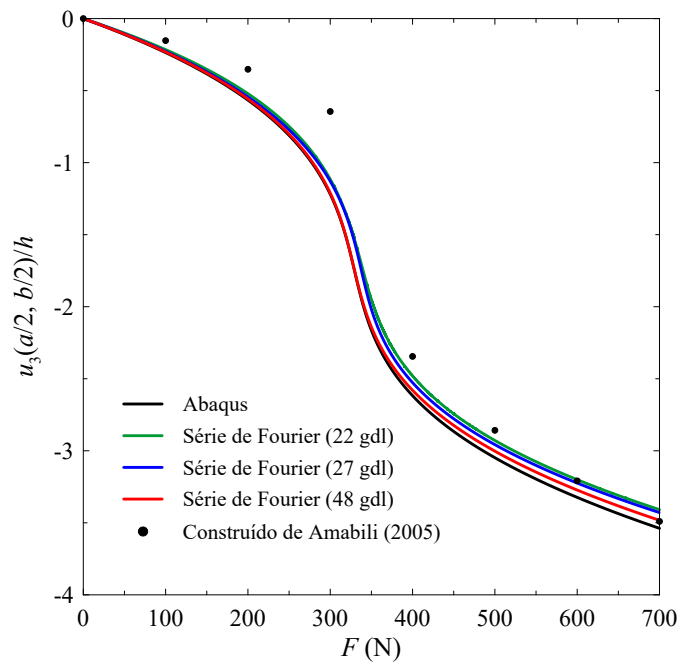


Neste exemplo, as duas aproximações do tensor de deformação, dadas pelas equações (2.61) e (2.62), foram consideradas e resultaram em curvas idênticas. Portanto, para cascas abatidas, a aproximação da equação (2.62), que é mais simples, é suficiente para descrever propriamente o comportamento não linear da casca.

A Figura 6.4 mostra a resposta não linear do deslocamento vertical no centro da casca obtida pelo método de Rayleigh-Ritz utilizando as expansões em série de Fourier (3.1) comparada com a curva obtida pelo Abaqus e a curva construída a partir dos resultados de Amabili (2005).

Como pode ser observado, para valores de carga menores que $F = 200$ N as curvas com 22, 27 e 48 gdl são bem próximas à curva obtida via MEF. Para valores de cargas maiores, apenas a curva com 48 gdl permanece próxima à curva do MEF. As curvas obtidas também são bem diferentes daquela construída a partir dos resultados de Amabili (2005), que apresenta um trecho instável com salto dinâmico em torno da carga $F = 350$ N. Esses resultados comprovam que a aplicação de uma formulação tensorial é necessária mesmo em casos em que a casca é abatida.

Figura 6.4 – Comparação entre das respostas não lineares do deslocamento vertical no centro da casca.

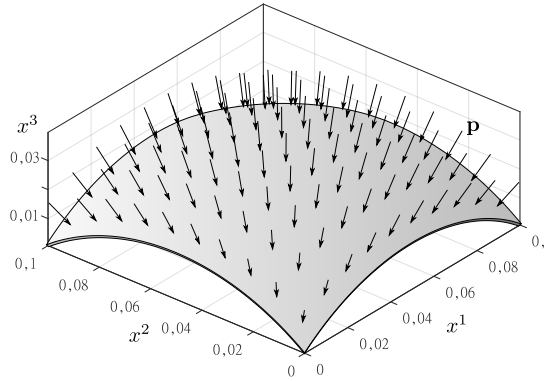


6.2 Paineis esféricos não abatidos submetidos à carga distribuída

A presente formulação será aplicada para cascas não abatidas. Para isso, um painel esférico não abatido com as seguintes propriedades geométricas foi estudado: $R = 0,1$ m, $a = b = 0,1$ m, $h = 0,001$ m. A casca é feita de material homogêneo e isotrópico com módulo de elasticidade $E = 206$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Um carregamento uniformemente distribuído dado pelo campo vetorial $\mathbf{p} = -p\mathbf{M}_3$ é aplicado à casca, como mostra a Figura 6.5.

A casca é simplesmente apoiada e possui as seguintes condições de contorno naturais nas quatro

Figura 6.5 – Painel esférico não abatido submetido a carga distribuída.



bordas:

$$\begin{aligned} u_1 = u_2 = u_3 = 0 \text{ para } \xi^1 = 0, a \\ u_1 = u_2 = u_3 = 0 \text{ para } \xi^2 = 0, b \end{aligned} \quad (6.4)$$

As funções de forma usadas para descrever o campo de deslocamentos u_k , que satisfazem as condições de contorno dadas pelas equações (6.4), são:

$$\begin{aligned} \phi_{1ij} &= \sin\left(\frac{(2i)\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi\xi^2}{b}\right) \\ \phi_{2ij} &= \sin\left(\frac{(2i-1)\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(\frac{(2j)\pi\xi^2}{b}\right) \\ \phi_{3ij} &= \sin\left(\frac{(2i-1)\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi\xi^2}{b}\right) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Novamente, devido à simetria da cascas, algumas funções trigonométricas podem ser removidas na expansão. O campo de deslocamento u_1 é antissimétrico ao longo do eixo $\xi^1 = a/2$ e simétrico ao longo de $\xi^2 = b/2$, de forma que os termos $\sin(i\pi\xi^1/a)$ para i ímpar e $\sin(i\pi\xi^2/b)$ para i par foram removidos. O campo de deslocamento u_2 é similar a u_1 trocando os eixos ξ^1 e ξ^2 . O campo de deslocamentos u_3 é simétrico ao longo e $\xi^1 = a/2$ e $\xi^2 = b/2$, então os termos $\sin(i\pi\xi^1/a)$ e $\sin(i\pi\xi^2/b)$ para i par foram removidos.

Para avaliar a precisão da solução numérica, quatro expansões com 27 gdl ($n_k = m_k = 3$), 48 gdl ($n_k = m_k = 4$), 75 gdl ($n_k = m_k = 5$) e 108 gdl ($n_k = m_k = 6$) foram consideradas e os resultados obtidos foram comparados com o MEF utilizando uma malha com 50×50 elementos do tipo S4.

Os gráficos das Figuras 6.6 mostram as respostas não lineares do deslocamento vertical u_3 na posição $\xi^1 = a/4$ e $\xi^2 = b/4$ para diferentes valores da carga p . As respostas mostradas na Figura 6.6(a) foram obtidas considerando a aproximação (2.62), que é válida para cascas

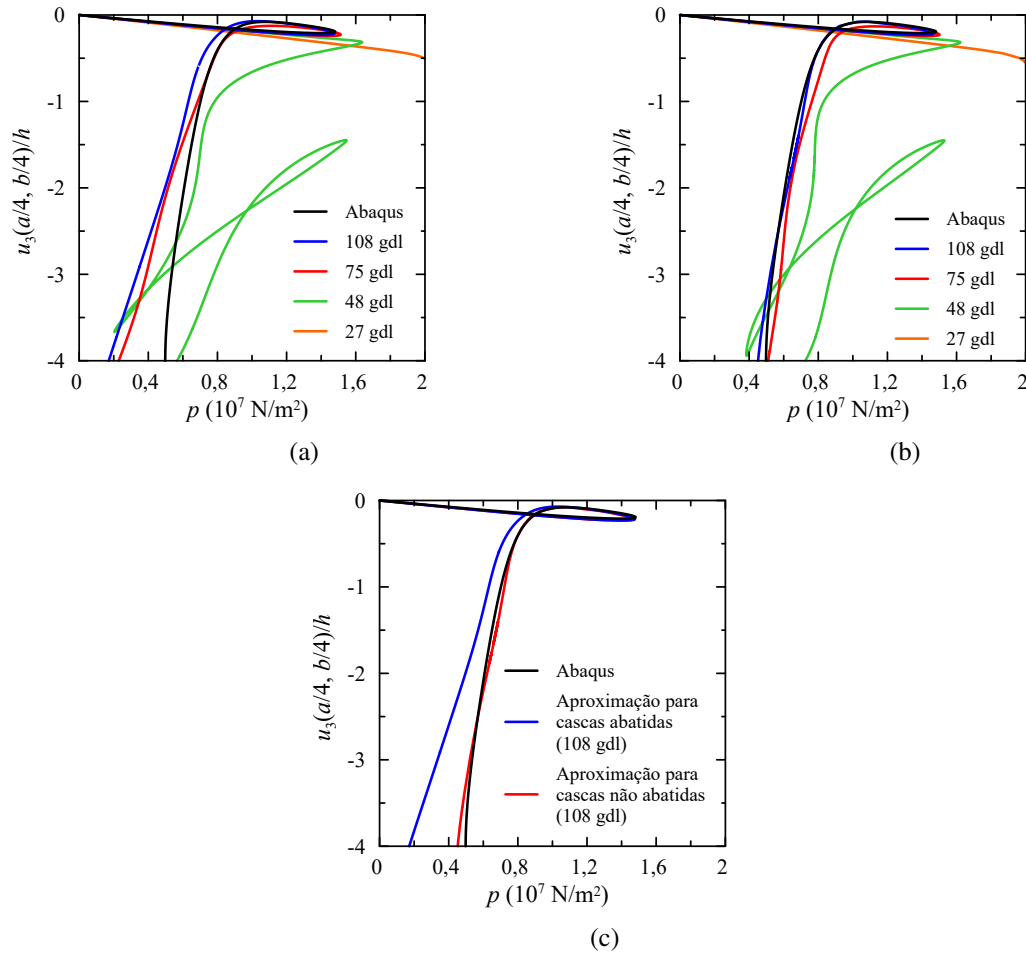
abatidas. Já os resultados mostrados na Figura 6.6(b) foram obtidos para a aproximação (2.61), que é válida para cascas não abatidas.

Como pode ser observado na Figura 6.6(a), os resultados obtidos pelo MEF mostram que o deslocamento u_3 aumenta com o aumento da carga distribuída até o valor de $p = 1,55 \times 10^7 \text{N/m}^2$, onde aparece um ponto de retorno com comportamento do tipo *snap-back*. A partir deste ponto, a casca apresenta uma redução na amplitude do deslocamento, acompanhada da redução da carga até o valor aproximado de $p = 0,102 \times 10^7 \text{N/m}^2$. Deste ponto em diante, há um aumento na amplitude do deslocamento associado com a redução na amplitude do carregamento. Quando a expansão com 27 gdl é aplicada para modelagem da casca, o modelo é capaz de reproduzir apenas resultados para pequenos valores de deslocamento. Com o aumento do número de graus de liberdade, os resultados do modelo com 48 gdl são similares aos resultados obtidos via MEF até o ponto de retorno (*snap-back*), quando a diferença entre eles se torna significativa. Para as expansões com 75 e 108 gdl, a casca apresenta comportamento similar aos resultados do MEF, embora nenhum dos modelos consegue reproduzir o comportamento para deslocamentos de ordem de grandeza maiores que a espessura da casca.

Os resultados da Figura 6.6(b) apresentam comportamento semelhante ao observado anteriormente na Figura 6.6(a), mas, neste caso, os resultados com 75 e 108 gdl, mesmo para grandes deslocamentos, são muito próximos dos resultados obtidos via MEF. Isso mostra que a aproximação da equação (2.61) é necessária para obter bons resultados em cascas não abatidas em regime de grandes deslocamentos. Finalmente, para uma melhor compreensão da consideração das aproximações das deformações da casca, a Figura 6.6(c) mostra uma comparação da resposta não linear obtidas pela aproximação para cascas abatidas (curva de cor azul) e não abatidas (curva de cor vermelha) do modelo de 108 gdl. Como pode ser observado, o modelo para cascas não abatidas mostra uma boa concordância com os resultados do MEF.

Devido ao grande número de equações e o alto esforço computacional, visando obter um modelo de ordem reduzida, o método de Karhunen-Loève foi aplicado. Para isso, as Figuras 6.7, 6.8 e 6.9 mostram as projeções dos MOP e VOP associados usados na decomposição dos campos de deslocamentos u_1 , u_2 e u_3 , respectivamente, obtidos a partir dos resultados do MEF. Os MOP e VOP foram obtidos determinando os autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{R}_k$ da equação (4.3). Depois, as funções φ_{ki} foram determinadas a partir dos MOP usando as expansões em série

Figura 6.6 – Comparação entre os caminhos não lineares de um painel esférico não abatido submetido a um carregamento distribuído. Em (a), utilizando a aproximação (2.62) para cascas abatidas; Em (b), utilizando a aproximação (2.61) para cascas não abatidas; e, em (c), a comparação entre as duas aproximações.



de Fourier com os mesmos termos das equações (6.5), satisfazendo as condições de contorno e simetrias. Finalmente, os campos de deslocamentos u_k foram aproximados usando a equação (4.4), obtendo o modelo de ordem reduzida.

Os três campos de deslocamentos foram obtidos considerando a decomposição de Karhunen-Loève usando DOP com 15 gdl ($\eta_k = 5$), 18 gdl ($\eta_k = 6$) e 21 gdl ($\eta_k = 7$). Para capturar toda a resposta não linear, como um critério válido neste caso, ao menos 99,99% da energia total do sistema deve ser considerada para todos os campos de deslocamentos. Quando a expansão com 15 gdl é adotada, a energia total do sistema, dada pelos valores dos VOP, é de 99,9832% para os campos de deslocamentos u_1 e u_2 , e 99,9945% para o deslocamento u_3 . Para a expansão com 18 gdl, a energia total é 99,9832% para os deslocamentos u_1 e u_2 e 99,99801% para o deslocamento u_3 . Finalmente, para a expansão com 21 gdl, a energia total para os campos de

Figura 6.7 – MOP e respectivos VOP do campo de deslocamento u_1 obtidos aplicando o método de Karhunen-Loève a partir dos resultados do MEF.

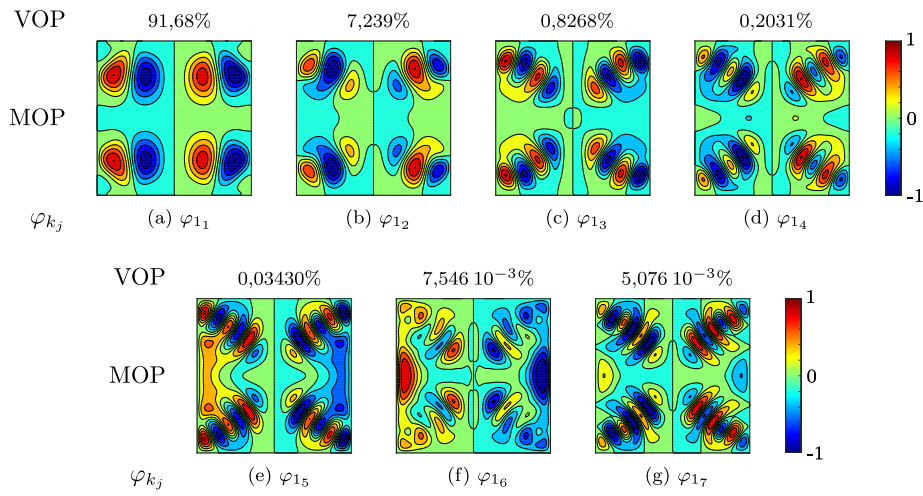


Figura 6.8 – MOP e respectivos VOP do campo de deslocamento u_2 obtidos aplicando o método de Karhunen-Loève a partir dos resultados do MEF.

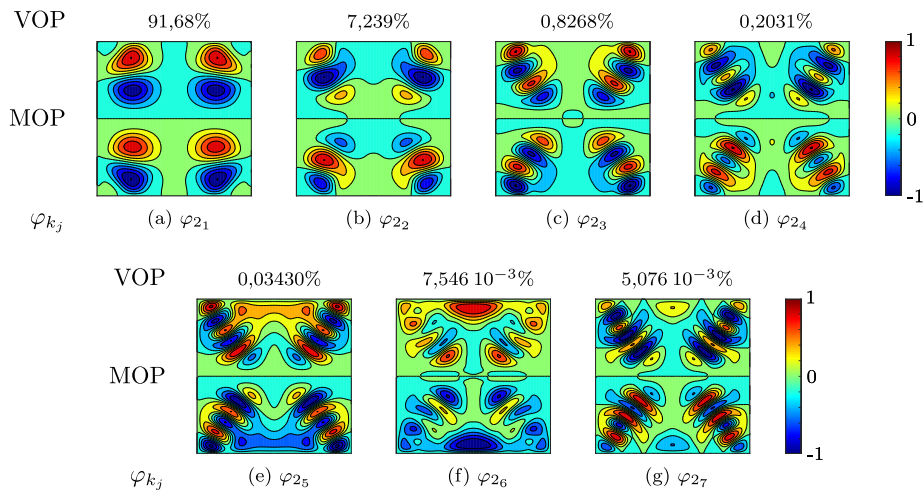
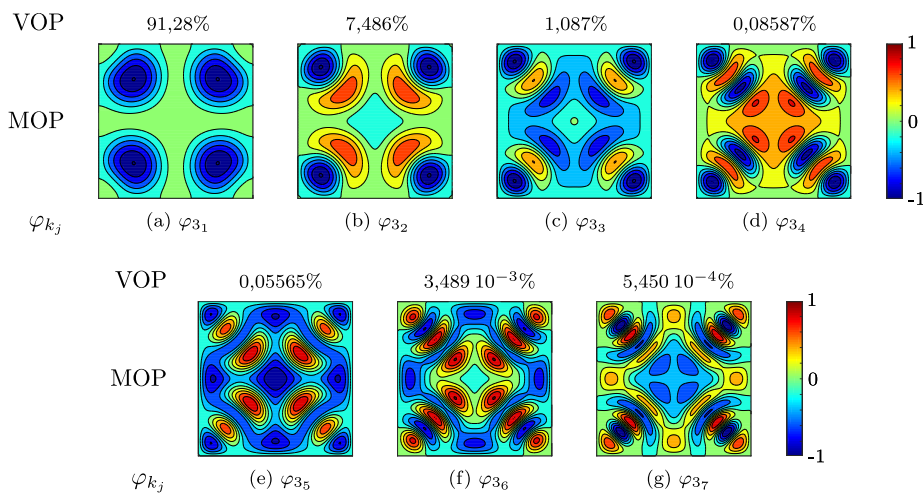


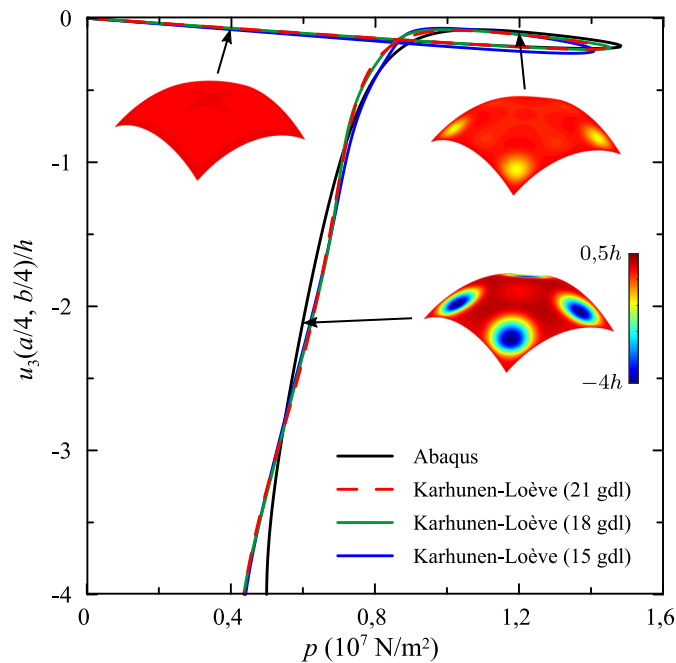
Figura 6.9 – MOP e respectivos VOP do campo de deslocamento u_3 obtidos aplicando o método de Karhunen-Loève a partir dos resultados do MEF.



deslocamentos u_1 e u_2 é 99,9958% e para o campo de deslocamentos u_3 é de 99,99855%.

A Figura 6.10 apresenta as respostas não lineares e a configuração deformada obtidas pela decomposição de Karhunen-Loève comparadas com os resultados obtidos pelo MEF. Como pode ser observado, todas as curvas são próximas à curva obtida pelo Abaqus e apenas pequenas diferenças são observadas próximas ao ponto de *snap-back* para o modelo com expansão com 15 gdl. Para o modelo com 18 gdl, a energia total do sistema é superior a 99,99% para todos os campos de deslocamentos, provando a eficiência da decomposição de Karhunen-Loève para a redução de ordem em cascas não abatidas.

Figura 6.10 – Comparação do deslocamento no centro do painel esférico na direção M^3 entre os resultados determinados no presente trabalho utilizando a decomposição de Karhunen-Loève e o Abaqus.



6.3 Conoide parabólico não abatido submetido a uma carga concentrada

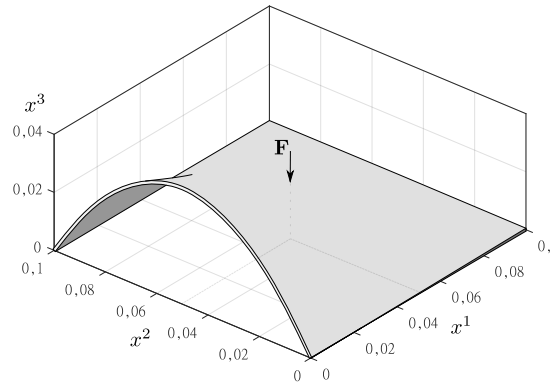
O terceiro exemplo a ser apresentado é um conoide parabólico não abatido com as seguintes propriedades geométricas $f_1 = 0,04$ m, $f_2 = 0$, $a = b = 0,1$ m e $h = 0,001$ m e é feito com um material elástico linear com módulo de elasticidade $E = 209$ GPa e coeficiente de Poisson

$\nu = 0,3$. O conoide é submetido a uma força vertical dada pelo vetor $\mathbf{F} = -F\mathbf{e}_3$ no centro (coordenadas $\xi^1 = a/2$ e $\xi^2 = b/2$), como mostra a Figura 6.11. As condições de contorno do conoide são:

$$\begin{aligned} u_1 = u_2 = u_3 = 0 \text{ para } \xi^1 = 0, a \\ u_1 = u_2 = u_3 = 0 \text{ para } \xi^2 = 0, b \end{aligned} \quad (6.6)$$

Para descrever o campo de deslocamentos, tanto a expansão por série de Fourier quanto a decomposição de Karhunen-Loève foram usadas utilizando as aproximações das equações (2.61) para o campo de deformações.

Figura 6.11 – Conoide parabólico não abatido submetido a uma carga concentrada.



As funções de forma dadas por expansões em série de Fourier são dadas pelas equações (6.7). Neste exemplo, algumas funções trigonométricas foram removidas devido à simetria dos campos de deslocamentos. Os campos de deslocamentos u_1 e u_3 são simétricos ao longo do eixo $\xi^2 = b/2$, então as funções $\sin(i\pi\xi^2/b)$ para i par foram removidos. Da mesma forma, os campos de deslocamentos u_2 são antissimétricos ao longo de $\xi^2 = b/2$, por isso as funções $\sin(i\pi\xi^2/b)$ para i ímpar foram removidos.

$$\begin{aligned} \phi_{1ij} &= \sin\left(\frac{i\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi\xi^2}{b}\right) \\ \phi_{2ij} &= \sin\left(\frac{i\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(\frac{2j\pi\xi^2}{b}\right) \\ \phi_{3ij} &= \sin\left(\frac{i\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi\xi^2}{b}\right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Substituindo as equações (6.7) em (3.1), duas expansões com 75 gdl e 108 gdl ($n_k = m_k = 6$) foram consideradas.

Para obter um modelo de ordem reduzida, a decomposição de Karhunen-Loève também foi aplicada. Os MOP e os VOP obtidos a partir dos resultados do MEF estão ilustrados nas Figuras 6.12, 6.13 e 6.14 e foram utilizados para descrever o campo de deslocamentos na expansão da equação (4.4). A Figura 6.15 mostra a configuração deformada e a resposta não linear do deslocamento vertical no centro da casca ($\xi^1 = a/2$, $\xi^2 = b/2$) para valores crescentes do do carregamento. As respostas não lineares foram obtidas considerando a expansão em série de Fourier, o método de Karhunen-Loève e o MEF. Como pode ser observado, os caminhos não lineares obtidos pela expansão em cor vermelha) não convergem ao caminho obtido pelo Abaqus (curva em cor preta), mostrando que uma expansão com mais termos é necessária para descrever corretamente o comportamento não linear. Quando a decomposição de Karhunen-Loève é aplicada, todas as respostas não lineares são similares à resposta obtida via MEF, divergindo apenas para altos valores de carregamento. Como no exemplo anterior o painel esférico, o critério para seleção dos MOP de 99.99% da energia total do sistema pode ser aplicado para descrever o comportamento não linear. Essas curvas comprovam a eficiência da abordagem que utiliza a DOP em combinação com a formulação tensorial para a análise não linear de cascas não abatidas.

Figura 6.12 – MOP e respectivos VOP do campo de deslocamento u_1 obtidos aplicando o método de Karhunen-Loève a partir dos resultados do MEF.

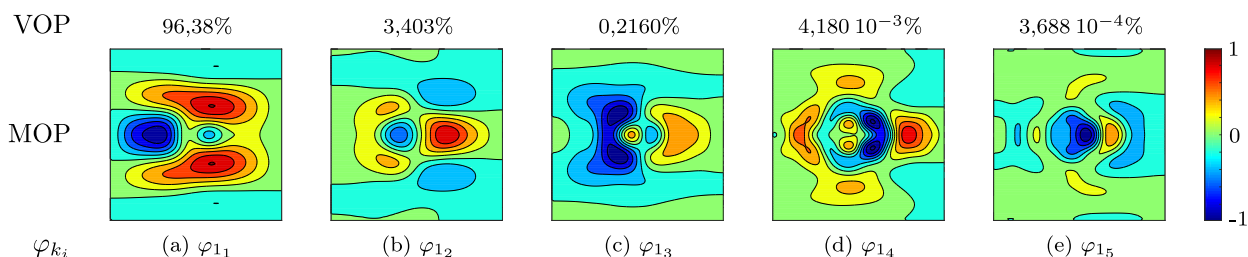


Figura 6.13 – MOP e respectivos VOP do campo de deslocamento u_2 obtidos aplicando o método de Karhunen-Loève a partir dos resultados do MEF.

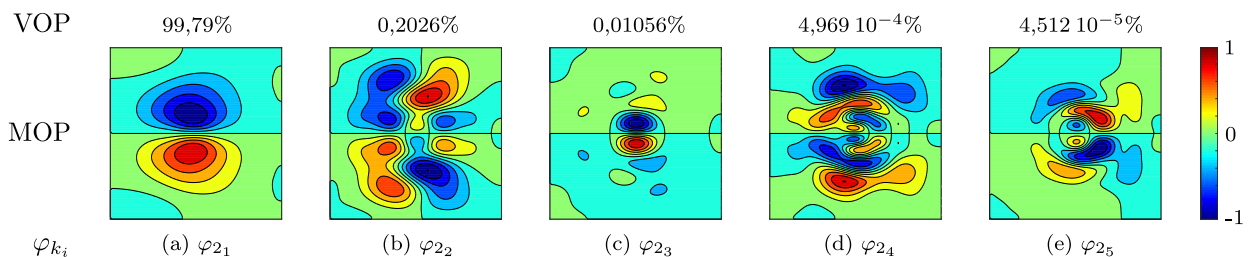


Figura 6.14 – MOP e respectivos VOP do campo de deslocamento u_3 obtidos aplicando o método de Karhunen-Loève a partir dos resultados do MEF.

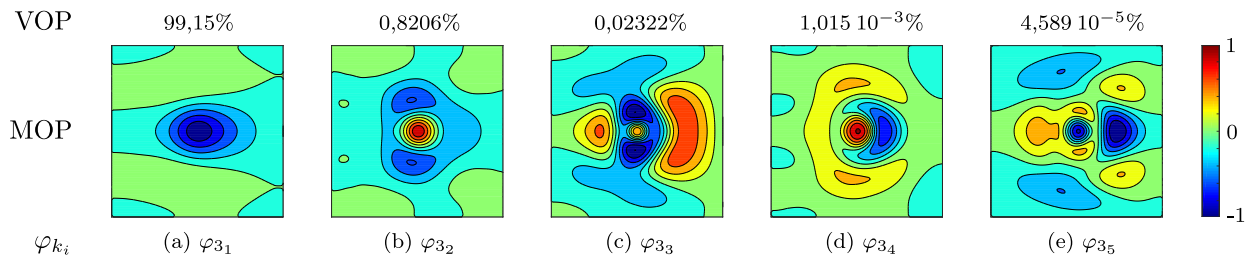
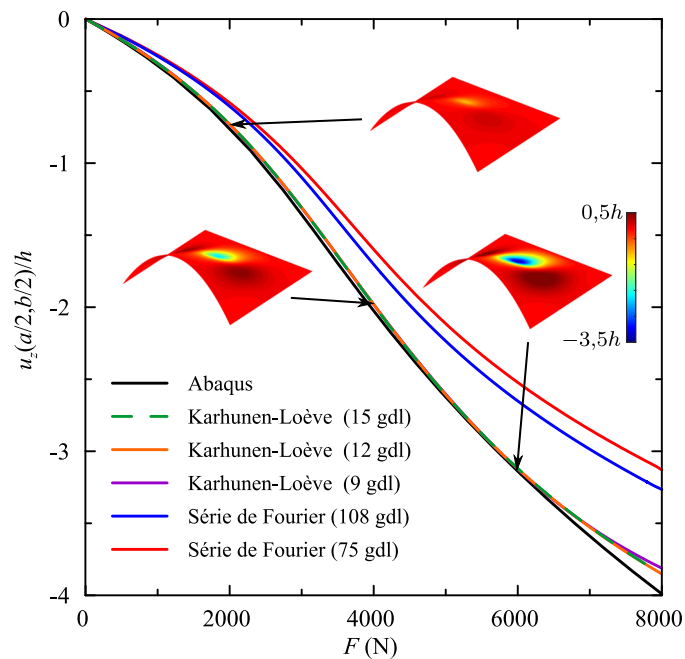


Figura 6.15 – Comparação do deslocamento do conoide parabólico submetido a uma carga concentrada no centro na direção e_3 entre os resultados obtidos pelo presente trabalho utilizando as decomposições por série de Fourier e Karhunen-Loève e os resultados obtidos pelo Abaqus. O deslocamento u_z representa o deslocamento vertical na direção e_3 .



CAPÍTULO 7

VIBRAÇÕES LIVRES NÃO LINEARES DE CASCAS DE DUPLA CURVATURA

Neste capítulo, as vibrações livres não lineares de cascas são estudadas por meio da determinação das *backbones*. Para isso, é aplicada a teoria não linear de cascas de Koiter usando as aproximações descritas no Capítulo 2: uma para cascas não abatidas (2.61) e outra para cascas abatidas (2.62). As equações de equilíbrio não lineares são derivadas de uma abordagem energética aplicando o método de Rayleigh-Ritz, e adotando expansões trigonométricas que satisfazem às condições de contorno geométricas (essenciais), como apresentado na Seção 3.1. As relações frequência-amplitude e frequência-energia são obtidas aplicando uma combinação do método do tiro múltiplo e continuação numérica, como apresentado na Seção 3.2.2. Primeiramente, foi estudado um painel esférico abatido; os resultados numéricos são comparados com a literatura e o método de elementos finitos, mostrando boa concordância. Em seguida, as *backbones* de três cascas de geometrias não abatidas — painel esférico, parabolóide hiperbólico e conóide parabólico — são determinadas, mostrando novamente boa concordância com o MEF. Tanto respostas no tempo quanto a influência percentual de cada modo na resposta são apresentadas para caracterizar as ressonâncias internas. A estabilidade das *backbones* é determinada usando a teoria de Floquet, identificando bifurcações do tipo ponto de sela, Neimark-Sacker e duplicação de período. Os resultados apresentados neste capítulo estão presentes no artigo *Nonlinear free vibration analysis of doubly-curved shells* (Pinho *et al.*, 2023).

7.1 Decomposição modal

De acordo com Kerschen (2014), os MNL podem ser internamente ressonantes sem necessariamente terem frequências naturais lineares comensuráveis, devido ao acoplamento entre

eles durante um movimento geral do sistema. Para analisar essas interações, é conveniente decompor a resposta no tempo da casca no espaço vetorial dos modos de vibração linear (King; Vakakis, 1996). Para isso, a resposta no tempo de cada campo de deslocamento é reescrita em coordenadas modais como

$$u_k(\xi^1, \xi^2, t) = \sum_{m=1}^N \mu_m(t) \psi_k^m(\xi^1, \xi^2) \quad (7.1)$$

onde $\mu_m(t)$ é a amplitude modal da autofunção correspondente $\psi_k^m(\xi^1, \xi^2)$, que é determinada por:

$$\psi_k^m(\xi^1, \xi^2) = \sum_{i=1}^{m_k} \sum_{j=1}^{n_k} z_{kij}^m \phi_{kij}(\xi^1, \xi^2) \quad (7.2)$$

Os valores de z_{kij}^m são os elementos do autovetor $\mathbf{z}^m = [z_{kij}^m]$, determinado pelo problema de autovalor/autovetor resultante da linearização da equação (3.4) considerando as cargas externas nulas:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} - \omega_m^2 \mathbf{M}) \mathbf{z}^m &= 0 \\ \mathbf{z}^m \cdot \mathbf{M} \mathbf{z}^n &= \delta_{mn} \end{aligned} \quad (7.3)$$

onde ω_m é a frequência natural correspondente ao modo de vibração $\mathbf{z}^m$, que é normalizado pela matriz de massa.

A resposta modal é determinada projetando o vetor de deslocamento $\mathbf{U}$ no espaço vetorial ortogonal dos modos de vibração linear, de acordo com:

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \mathbf{Z}^T \mathbf{M} \mathbf{U}(t) \quad (7.4)$$

onde $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}^1 \dots \mathbf{z}^N]$ é uma matriz formada por todos os autovetores $\mathbf{z}^m$ e $\boldsymbol{\mu}$ é um vetor cujos elementos são as respostas das coordenadas modais $\mu_m(t)$. Os modos de vibração e as autofunções são ordenadas de acordo com suas frequências naturais lineares.

Para avaliar a influência percentual de cada modo em uma resposta periódica da casca, pode-se determinar a média da projeção de cada resposta modal no vetor de deslocamento ao longo da curva de resposta no tempo, de acordo com:

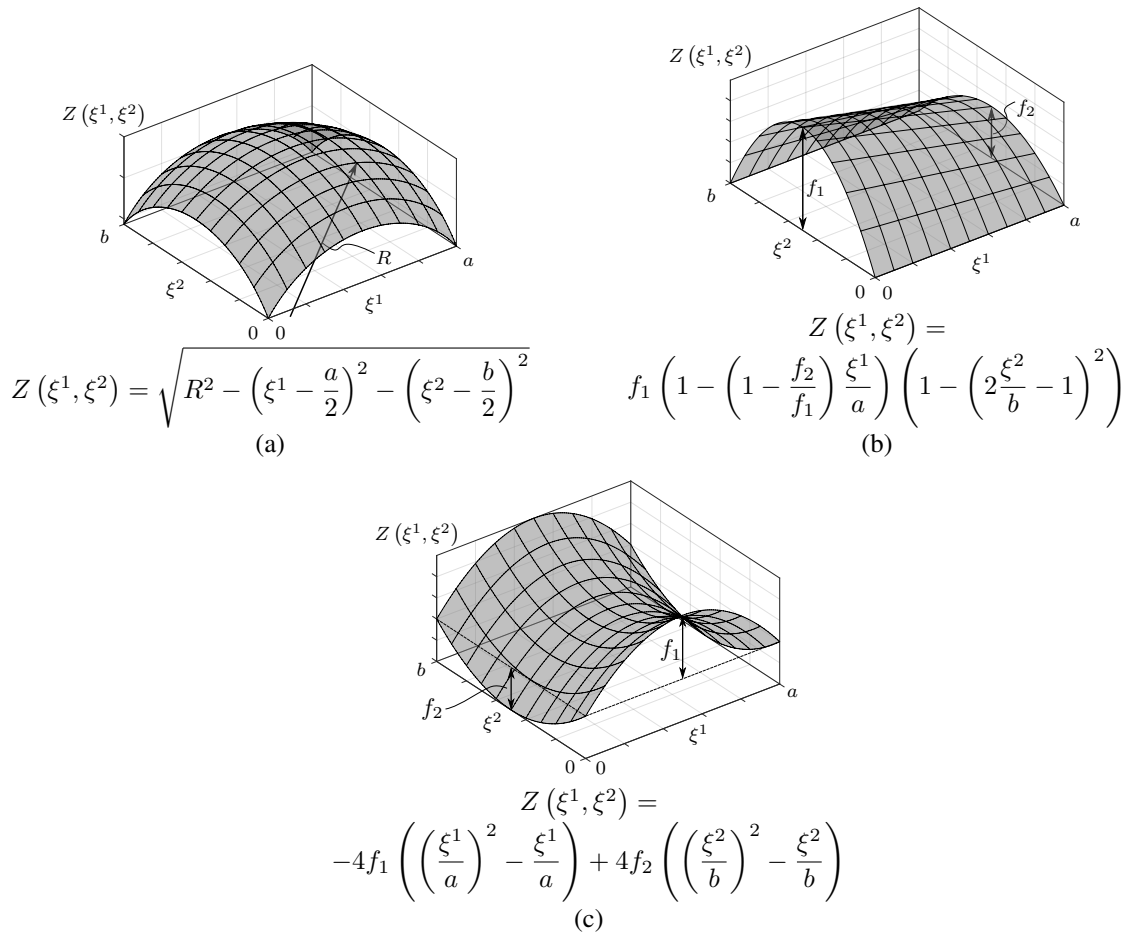
$$\text{Influência modal} = \int_0^1 \frac{\mu_m(\tau) \mathbf{z}^m \cdot \mathbf{U}(\tau)}{\mathbf{U}(\tau) \cdot \mathbf{U}(\tau)} d\tau \quad (7.5)$$

onde $\tau = t/T$ é o tempo normalizado e T é o período da órbita periódica.

7.2 Resultados numéricos

Nesta seção, são obtidas as relações frequência-amplitude e frequência-energia de cascas de três geometrias distintas da superfície média, representadas na Figura 7.1: (a) painel esférico; (b) conoide parabólico; e (c) parabolóide hiperbólico. A figura também exibe as equações de $Z(\xi^1, \xi^2)$, que definem matematicamente a superfície média como uma função de coordenadas curvilíneas juntamente com as outras funções $X(\xi^1, \xi^2) = \xi^1$ e $Y(\xi^1, \xi^2) = \xi^2$, de acordo com a equação (2.1). Em todos os casos, o domínio Ω é definido pelos intervalos $0 \leq \xi^1 \leq a$ e $0 \leq \xi^2 \leq b$. Para validar os resultados encontrados neste capítulo, também é apresentada uma solução das relações frequência-energia utilizando o MEF. O objetivo é avaliar se a abordagem semianalítica é capaz de capturar o comportamento inicial do modelo numérico. Essa solução foi obtida utilizando o *software* comercial Abaqus com uma malha 50×50 elementos S4, que

Figura 7.1 – Geometrias da superfície média: (a) painel esférico; (b) conoide parabólico e (c) parabolóide hiperbólico.



são elementos de casca quadrilaterais totalmente integrados de 4 nós, com 3 translações e 3 rotações por nó (Smith, 2009). Essa malha é suficientemente refinada para garantir a convergência numérica. Toda a geometria da casca foi discretizada sem a imposição de simetrias. As *backbones* foram determinadas a partir de uma solução não linear no domínio do tempo com um pequeno amortecimento e as condições iniciais correspondentes a um deslocamento com a forma do primeiro modo de vibração linear e velocidade zero. A frequência de vibração é determinada calculando o período entre dois pontos consecutivos de máxima energia cinética. O Apêndice A.7 apresenta um algoritmo em Matlab para criação de um arquivo de entrada do Abaqus para análise não linear no domínio do tempo com as condições iniciais na forma do primeiro modo de vibração.

7.2.1 Paineis esférico abatido

O primeiro exemplo é uma casca esférica abatida simplesmente apoiada de bordas livres (ou seja, os deslocamentos de membrana na direção ortogonal às bordas são permitidos enquanto os deslocamentos transversais e os tangentes à bordas são restritos), com raio $R = 1$ m, projeções horizontais de dimensões $a = b = 0,1$ m, espessura $h = 0,001$ m, módulo de elasticidade $E = 206$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e densidade $\rho = 7850$ kg/m³. As condições de contorno geométricas (essenciais) e naturais nas quatro bordas são dadas por:

$$u_2 = u_3 = N_1 = M_1 = 0 \text{ em } \xi^1 = 0, a \quad (7.6a)$$

$$u_1 = u_3 = N_2 = M_2 = 0 \text{ em } \xi^2 = 0, b \quad (7.6b)$$

onde N_α é a força normal e M_α é o momento fletor por unidade de comprimento na direção de $\mathbf{m}^\alpha$. As funções de forma $\phi_{kij}(\xi^1, \xi^2)$, que satisfazem as condições de contorno (7.6), são adotadas como:

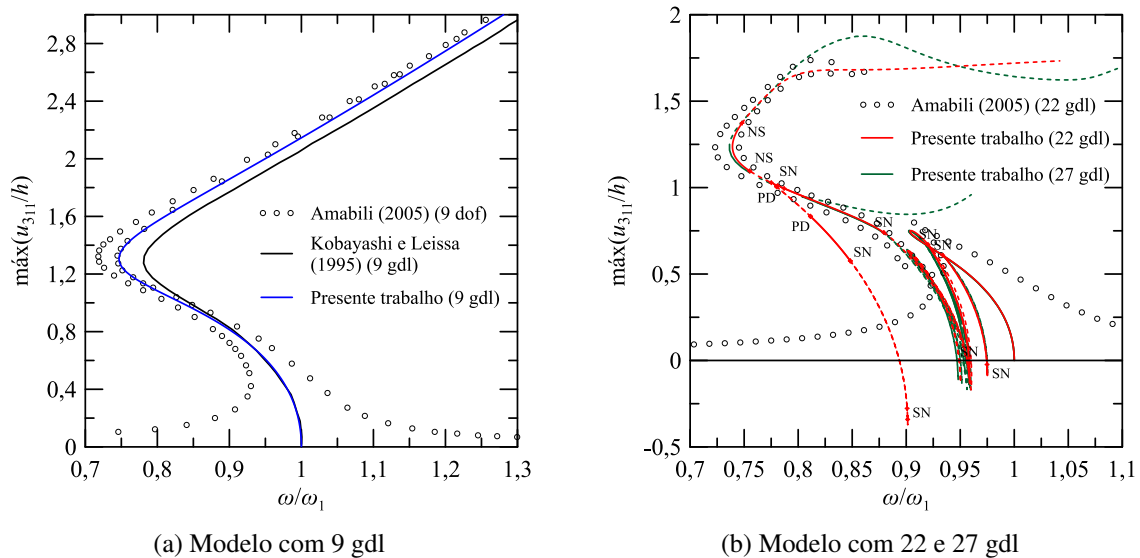
$$\begin{aligned} \phi_{1ij} &= \left\{ \frac{1 + (-1)^i}{2} \sin\left(\frac{i\pi\xi^1}{a}\right) + \frac{1 + (-1)^{i+1}}{2} \cos\left(\frac{i\pi\xi^1}{a}\right) \right\} \sin\left(\frac{(2j-1)\pi\xi^2}{b}\right) \\ \phi_{2ij} &= \sin\left(\frac{(2i-1)\pi\xi^1}{a}\right) \left\{ \frac{1 + (-1)^j}{2} \sin\left(\frac{j\pi\xi^2}{b}\right) + \frac{1 + (-1)^{j+1}}{2} \cos\left(\frac{j\pi\xi^2}{b}\right) \right\} \\ \phi_{3ij} &= \sin\left(\frac{(2i-1)\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi\xi^2}{b}\right) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Ao adotar as expansões das equações (7.7), consideram-se apenas as vibrações que são simétricas ao longo dos eixos $\xi^1 = a/2$ e $\xi^2 = b/2$. As funções de forma ϕ_{1ij} e ϕ_{2ij} apresentam termos tanto de $\sin(i\pi\xi^1/a) \sin(j\pi\xi^2/b)$ (para i par e j ímpar) quanto de $\cos(i\pi\xi^1/a) \sin(j\pi\xi^2/b)$ (para

i e j ímpares). O termo $\cos(i\pi\xi^1/a)\sin(j\pi\xi^2/b)$ garante que o deslocamento u_1 seja permitido em $\xi^1 = 0, a$. Embora o termo $\sin(i\pi\xi^1/a)\sin(j\pi\xi^2/b)$ não altere o deslocamento u_1 em $\xi^1 = 0, a$, sem a inclusão desse termo, a condição de contorno natural na força normal em plano N_1 , não é satisfeita na borda, e portanto, também é necessário na expansão (Amabili, 2023).

Essa casca foi estudada anteriormente por Kobayashi e Leissa (1995), que determinaram a *backbone* utilizando um modelo com 9 gdl, e por Amabili (2005), que determinou as curvas de ressonância de vibração forçada para modelos com 9 e 22 gdl, considerando uma carga vertical harmônica concentrada aplicada no centro da casca. Expansões semelhantes também foram adotadas neste trabalho – com 9 gdl ($m_1 = n_1 = m_2 = n_2 = 2$ e $m_3 = n_3 = 1$) e 22 gdl ($m_1 = n_1 = m_2 = n_2 = 3$ e $m_3 = n_3 = 2$). Para garantir a convergência, um modelo com 27 gdl ($m_k = n_k = 3$) também foi analisado. A frequência natural fundamental da casca é $\omega_1 = 952,2 \times 2\pi$ rad/s. A comparação entre os resultados da literatura e os resultados do presente trabalho é apresentada nas Figuras 7.2(a–b).

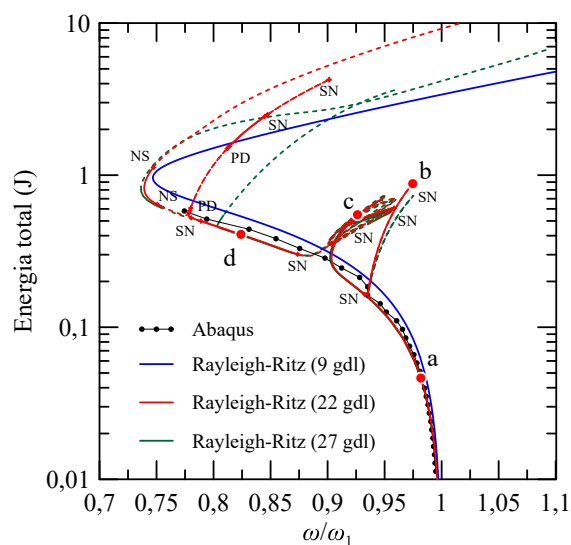
Figura 7.2 – Amplitude máxima da vibração da coordenada generalizada $u_{311}(t)$ em relação à frequência normalizada ω/ω_1 da curva de comportamento do modo fundamental para um painel esférico abatido – em (a) para o modelo com 9 gdl; e em (b) para o modelo com 22 gdl; —, órbita periódica estável; ---, solução instável; NS, bifurcações de Neimark-Sacker; SN, bifurcações de ponto de sela; PD, bifurcações de Duplicação de Período.



Conforme ilustrado pela Figura 7.2(a), a relação frequência-amplitude do modelo com 9 gdl apresenta um comportamento inicial de amolecimento seguido por um comportamento de endurecimento à medida que a amplitude de vibração atinge o valor de aproximadamente $1,3h$, o que corresponde a uma frequência normalizada de $\omega/\omega_1 = 0,75$. Essa resposta é similar à

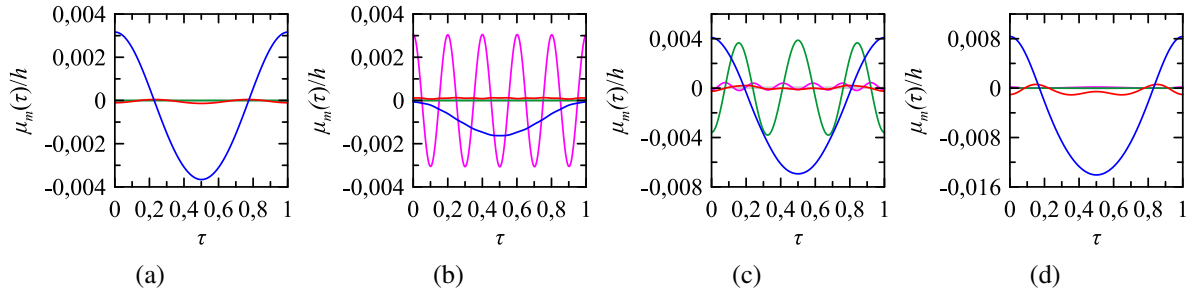
relação frequência-amplitude encontrada na literatura. O modelo com 22 gdl mostra uma curva mais complexa, como ilustrado na Figura 7.2(b). Já o modelo com 27 gdl apresenta um comportamento muito semelhante ao modelo com 22 gdl, com a parte estável sendo quase idêntica entre os dois modelos. Devido às ressonâncias internas entre múltiplos modos de vibração, múltiplas ramificações surgem do ramo principal da *backbone*. Esse comportamento não linear também é representado na Figura 7.3, que mostra as relações frequência-energia da casca. Observa-se que as ressonâncias internas também são caracterizadas por um aumento repentino na energia total. Além disso, a resposta obtida pelo MEF é consistente com a solução semianalítica para o ramo principal da *backbone*. Os pontos com níveis de energia acima de 0,6 J representam soluções aperiódicas; a partir daí, à medida que a energia total diminui, a solução numérica tende ao ramo principal da *backbone* semianalítica. Dado que a solução via MEF é baseada em uma análise de vibração livre amortecida no domínio do tempo, e leva em conta apenas o primeiro modo de vibração linear como condição inicial, essa solução não consegue identificar novos ramos de ressonância interna. Estes se manifestam por meio de um aumento energético que é impossível em um contexto de vibração livre amortecida.

Figura 7.3 – Energia total versus frequência normalizada ω/ω_1 da relação frequência-amplitude do modo fundamental de um painel esférico abatido; —, órbita periódica estável do modelo com 9 gdl; —, órbita periódica estável do modelo com 22 gdl; - - -, solução instável do modelo com 22 gdl; —, órbita periódica estável do modelo com 27 gdl; - - -, solução instável do modelo com 27 gdl; ●—●, *backbone* obtida via Abaqus; NS, bifurcações de Neimark-Sacker; SN, bifurcações de ponto de sela; PD, bifurcações de Duplicação de Período.



Para compreender melhor o comportamento não linear da casca, as respostas no tempo em coordenadas modais de quatro pontos da relação frequência-energia da Figura 7.3 são exibidas nos gráficos das Figuras 7.4. A influência modal em cada um desses quatro pontos é determinada

Figura 7.4 – Respostas no tempo em coordenadas modais para as órbitas periódicas dos pontos a-d da relação frequência-energia do painel esférico abatido. — modo 1; — modo 2; — modo 3; — modo 4.



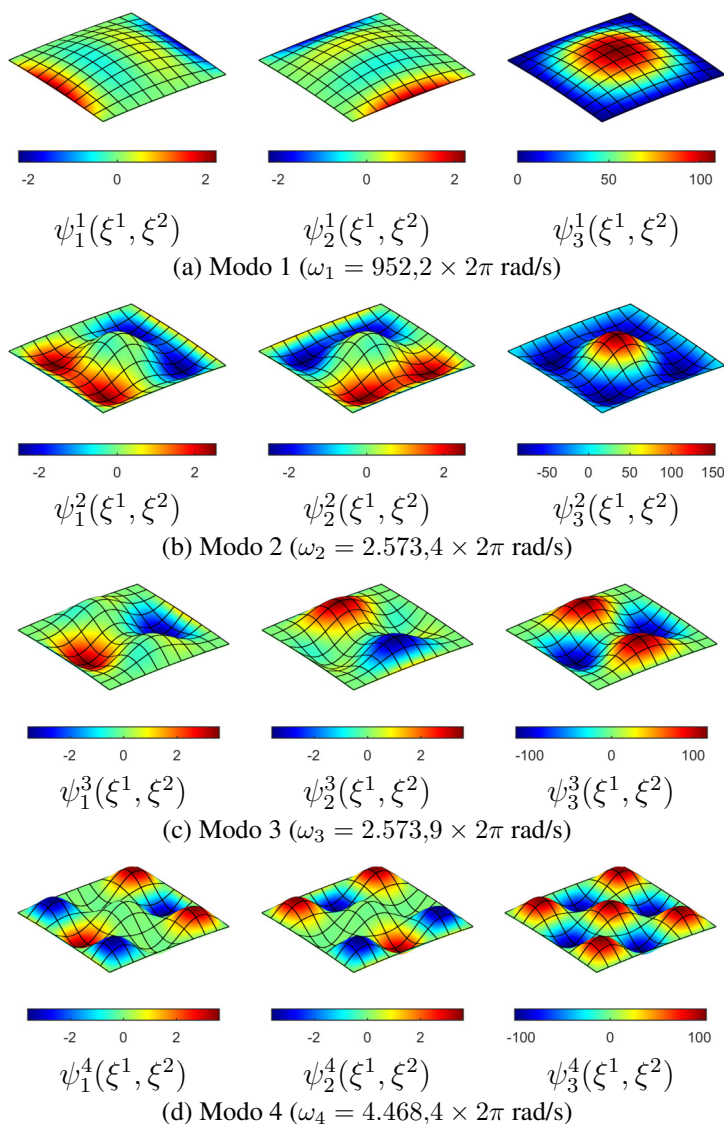
usando a equação (7.5) e é apresentada na Tabela 7.1. Para caracterizar as ressonâncias internas, a tabela também apresenta a frequência dominante de cada resposta modal, que é sempre um múltiplo inteiro da frequência da órbita periódica ω . Apenas as respostas dos modos mais influentes (1-4) foram destacadas nos gráficos da Figura 7.4, e suas correspondentes autofunções $\psi_k^m(\xi^1, \xi^2)$ são apresentadas na Figura 7.5, que também mostra as frequências naturais lineares desses modos. Apesar de serem ressonantes internamente, as frequências lineares dos modos ressonantes não exibem uma razão inteira, ou seja, $\omega_2/\omega_1 = 2,7$, $\omega_3/\omega_1 = 2,7$, $\omega_4/\omega_1 = 4,7$.

O ramo principal (pontos a e d) apresenta uma solução inicialmente estável representada principalmente pelo primeiro modo de vibração (Figura 7.5(a)), conforme mostrado na resposta no tempo da Figura 7.4(a). No entanto, a influência do modo 2 (Figura 7.5(b)) aumenta, conforme mostrado na resposta no tempo da Figura 7.4(d) para o ponto (d). O segundo ramo (b) apresenta uma ressonância interna 5:1 devido à interação entre os modos 1 e 4 (Figura 7.5(d)), conforme retratado na resposta no tempo da Figura 7.4(b). Este ramo apresenta uma solução instável delimitada por bifurcações do tipo Nó-Sela. O ramo (c) contém múltiplas mudanças de estabilidade devido às bifurcações Nó-Sela e é caracterizado principalmente por uma ressonância interna 3:1 entre os modos 1 e 3 (Figura 7.5(c)), conforme ilustrado pela resposta no tempo da Figura 7.4(c). Após uma bifurcação Neimark-Sacker próximo ao nível de energia de 1 J e frequência $\omega = 0,75\omega_1$, a solução torna-se instável.

Tabela 7.1 – Influência modal percentual dos dois modos mais influentes determinada para as órbitas periódicas dos pontos a-d da *backbone* da casca esférica abatida para o modelo com 22 gdl da Figura 7.3.

Ponto	1º modo			2º modo		
	Modo	Frequência dominante	Influência modal	Modo	Frequência dominante	Influência modal
a	Modo 1 (Fig. 7.5(a))	1ω	98,74%	Modo 2 (Fig. 7.5(b))	2ω	1,25%
b	Modo 4 (Fig. 7.5(d))	1ω	73,28%	Modo 1 (Fig. 7.5(a))	5ω	25,84%
c	Modo 1 (Fig. 7.5(a))	1ω	63,50%	Modo 3 (Fig. 7.5(c))	3ω	35,62%
d	Modo 1 (Fig. 7.5(a))	1ω	95,64%	Modo 2 (Fig. 7.5(b))	3ω	4,33%

Figura 7.5 – Modos de vibração do painel esférico abatido.



7.2.2 Painel esférico não abatido

Agora, a presente formulação será aplicada ao estudo de cascas não abatidas. Para isso, foi estudado um painel esférico não abatido com as seguintes propriedades geométricas e físicas (veja a Figura 7.1(a)): $R = 0,1$ m, $a = b = 0,1$ m, $h = 0,001$ m, $E = 206$ GPa, $\nu = 0,3$ e $\rho = 7850$ kg/m³. A casca é simplesmente apoiada com bordas imóveis, ou seja,

$$u_1 = u_2 = u_3 = M_1 = 0 \text{ em } \xi^1 = 0, a \quad (7.8a)$$

$$u_1 = u_2 = u_3 = M_2 = 0 \text{ em } \xi^2 = 0, b \quad (7.8b)$$

As funções de forma $\phi_{k_{ij}}(\xi^1, \xi^2)$, que satisfazem as condições de contorno (7.8), são definidas pelas equações (7.9). Similar ao exemplo anterior, essas funções foram escolhidas considerando apenas os efeitos simétricos ao longo dos eixos $\xi^1 = a/2$ e $\xi^2 = b/2$.

$$\begin{aligned} \phi_{1ij} &= \sin\left(\frac{(2i)\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi\xi^2}{b}\right) \\ \phi_{2ij} &= \sin\left(\frac{(2i-1)\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(\frac{(2j)\pi\xi^2}{b}\right) \\ \phi_{3ij} &= \sin\left(\frac{(2i-1)\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi\xi^2}{b}\right) \end{aligned} \quad (7.9)$$

Para verificar a convergência da solução, foram construídos quatro modelos com 48 ($m_k = n_k = 4$), 75 ($m_k = n_k = 5$), 108 ($m_k = n_k = 6$) e 147 gdl ($m_k = n_k = 7$). A frequência natural fundamental é $\omega_1 = 8.271,6 \times 2\pi$ rad/s. As Figuras 7.6(a–b) mostram as *backbones* desses quatro modelos. A convergência é observada nos segmentos estáveis das *backbones* e no início dos segmentos instáveis em modelos com 108 e 147 gdl. Em ambos os modelos, a solução se torna instável em torno de $\omega = 0,985\omega_1$. Consequentemente, a casca exibe vibrações aperiódicas devido a uma bifurcação de Neimark-Sacker, que não podem ser avaliadas usando o método do tiro. O mesmo comportamento também foi identificado na *backbone* determinada via MEF. Perto do ponto de bifurcação, a solução determinada pelo Abaqus converge para a *backbone* semianalítica. Para níveis de energia inferiores a 2 J, as duas soluções apresentam resultados muito parecidos.

No modelo com 108 gdl, quatro órbitas periódicas (a–d) retiradas da *backbone* da Figura 7.6(a) foram analisadas para caracterizar as diferentes ramificações ao longo da curva. As respostas no tempo em coordenadas modais dessas órbitas são exibidas nas Figuras 7.7(a–d). Além disso,

as influências modais percentuais nesses pontos foram determinadas usando a equação (7.5) e os resultados são apresentados na Tabela 7.2.

O ramo principal da *backbone* é predominantemente caracterizado pelo modo 1 (Figura 7.8(a)), com uma influência crescente dos modos 3 (Figura 7.8(b)), como mostrado nos gráficos das respostas no tempo das Figuras 7.7(a) e 7.7(b). Destaca-se que os ramos de ressonâncias internas que ativam modos que representam vibrações de membrana são instáveis. Por exemplo, no ponto (c), há uma ressonância interna 9:1 entre os modos 1 e 40 (Figura 7.8(c)), e, no ponto (d), há uma ressonância interna 13:1 entre os modos 1 e 44 (Figura 7.8(d)). Essas ressonâncias

Figura 7.6 – *Backbones* para o painel esférico não abatido para os modelos com 48 gdl (—), 75 gdl (—), 108 gdl (—) e 147 gdl (—). ●—●, *backbone* obtida via Abaqus. Em (a), é apresentada a energia total em função da frequência normalizada, e em (b), a amplitude máxima da coordenada generalizada u_{311} em função da frequência normalizada. As curvas tracejadas representam soluções instáveis, enquanto as curvas contínuas representam soluções estáveis. NS, bifurcação de Neimark-Sacker.

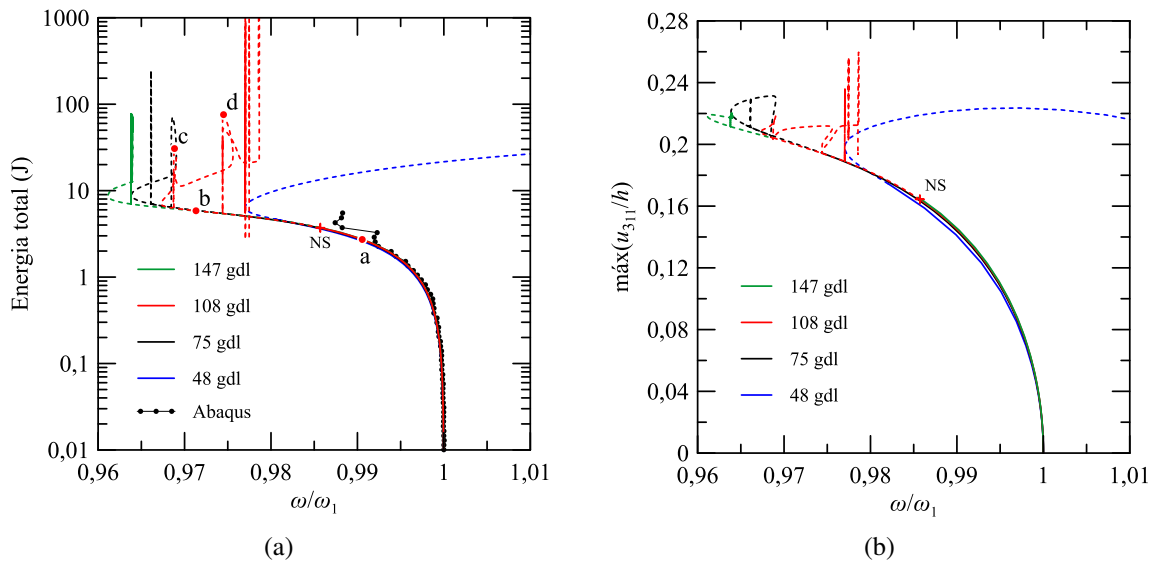


Figura 7.7 – Respostas no tempo em coordenadas modais para as órbitas periódicas dos pontos a-d da relação frequência-energia do painel esférico não abatido para o modelo com 108 gdl. — modo 1; — modo 3; — modo 40; — modo 44.

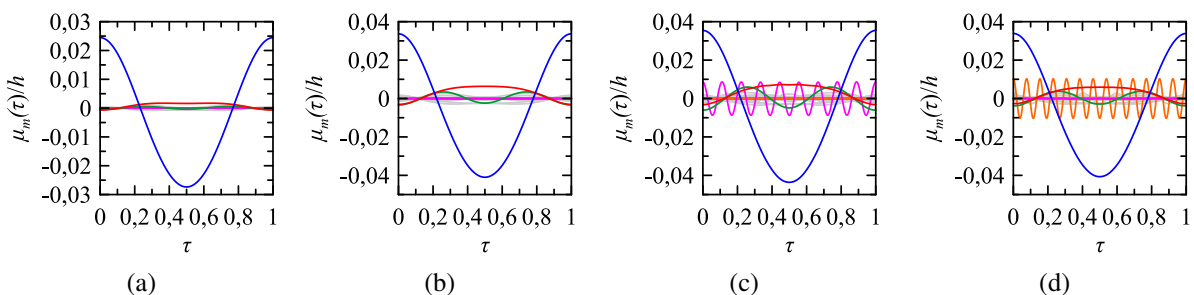


Figura 7.8 – Modos de vibração do painel esférico não abatido.

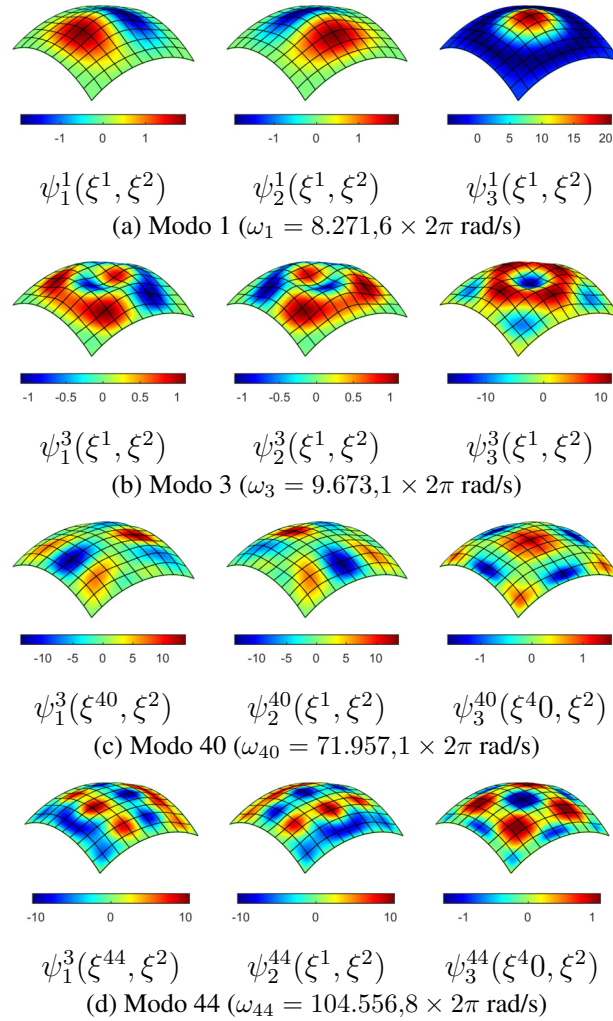


Tabela 7.2 – Influência modal percentual dos dois modos mais influentes determinada para as órbitas periódicas dos pontos a-d da *backbone* do painel esférico não abatido para o modelo com 108 gdl da Figura 7.6(a).

Ponto	1º modo			2º modo		
	Modo	Frequência dominante	Influência modal	Modo	Frequência dominante	Influência modal
a	Modo 1 (Fig. 7.8(a))	1ω	92,75%	Modo 3 (Fig. 7.8(b))	1ω	3,04%
b	Modo 1 (Fig. 7.8(a))	1ω	84,94%	Modo 3 (Fig. 7.8(b))	1ω	5,45%
c	Modo 1 (Fig. 7.8(a))	1ω	76,06%	Modo 40 (Fig. 7.8(c))	9ω	8,99%
d	Modo 1 (Fig. 7.8(a))	1ω	75,72%	Modo 44 (Fig. 7.8(d))	13ω	13,17%

internas, representadas nas respostas no tempo das Figuras 7.7(c) e 7.7(d), embora determinadas matematicamente, não representam vibrações reais da estrutura e podem desaparecer com a adição de novos modos ao modelo.

7.2.3 Paraboloide hiperbólico

O terceiro exemplo é um parabolóide hiperbólico não abatido com as seguintes propriedades geométricas e físicas (veja a Figura 7.1(b)): $f_1 = 0,02$ m, $f_2 = 0,02$ m, $a = b = 0,1$ m, $h = 0,001$ m, $E = 206$ GPa, $\nu = 0,3$ e $\rho = 7850$ kg/m³. As condições de contorno são as mesmas do exemplo anterior: simplesmente apoiado com bordas imóveis (veja equação (7.8)). Como a casca é simétrica ao longo dos eixos $\xi^1 = a/2$ e $\xi^2 = b/2$, as funções de forma da equação (7.9) também foram adotadas neste caso. Portanto, apenas as vibrações simétricas ao longo desses dois eixos foram consideradas. As Figuras 7.9(a) e 7.9(b) mostram as *backbones* do parabolóide hiperbólico para modelos com 48 gdl ($m_k = n_k = 4$), 75 gdl ($m_k = n_k = 5$) e 108 gdl ($m_k = n_k = 5$). A Figura 7.9(a) exibe a energia total em função da frequência normalizada, enquanto a Figura 7.9(b) mostra a amplitude máxima da coordenada generalizada $u_{3_{22}}$ em função da frequência normalizada. A frequência natural fundamental da casca é $\omega_1 = 6.421,1 \times 2\pi$ rad/s. Entre as estruturas estudadas, o parabolóide hiperbólico é o único que exibe ganho inicial de rigidez. Enquanto os modelos com 75 e 108 gdl convergem nos segmentos estáveis da *backbones*, o modelo com 48 gdl não apresenta nenhuma ressonância interna. No entanto, à medida que graus de liberdade adicionais são introduzidos no sistema, novas ressonâncias internas surgem. A relação frequência-energia determinada via MEF exibe o mesmo comportamento que a solução analítica para níveis de energia abaixo de 10 J e torna-se quase idêntica para níveis de energia abaixo de 1 J.

Novamente, alguns pontos (a-c) ao longo da *backbone* do modelo com 75 gdl foram selecionados para estudar as respostas no tempo em coordenadas modais, apresentadas nas Figuras 7.10(a-c). Estes pontos estão representados na Figura 7.9(a). Além disso, as influências modais dos modos mais dominantes, determinadas pela equação (7.5), são apresentadas na Tabela 7.3 para cada um desses pontos. A tabela também apresenta a frequência dominante de cada resposta modal.

Figura 7.9 – *Backbones* do paraboloide hiperbólico para os modelos com 48 gdl (—), 75 gdl (—) e 108 gdl (—). •••, *backbone* obtida via Abaqus. Em (a), energia total versus frequência normalizada e, em (b), amplitude máxima da coordenada generalizada u_{322} versus frequência normalizada. As curvas tracejadas representam soluções instáveis, enquanto as curvas contínuas representam soluções estáveis. NS, bifurcação de Neimark-Sacker; SN, bifurcação de ponto de sela

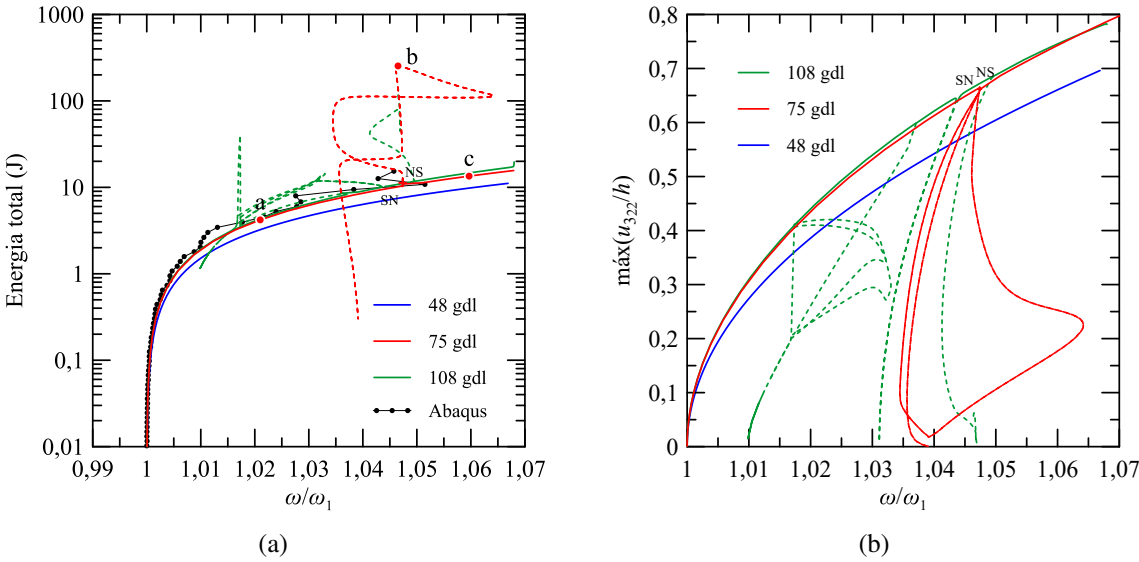


Figura 7.10 – Respostas no tempo em coordenadas modais para as órbitas periódicas dos pontos a-d para o paraboloide hiperbólico. — modo 1; — modo 12; — modo 26.

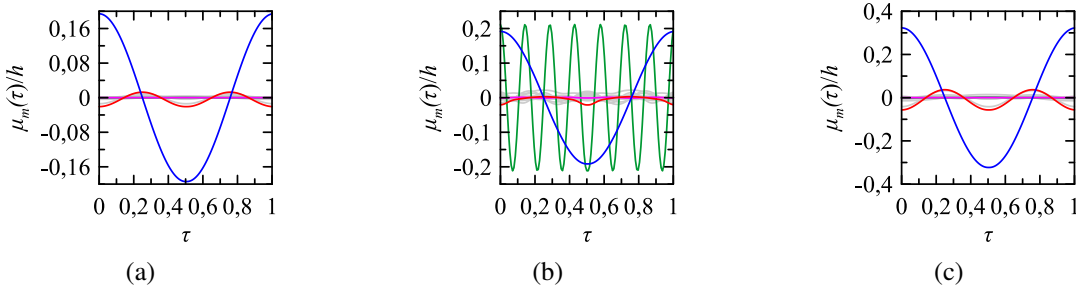
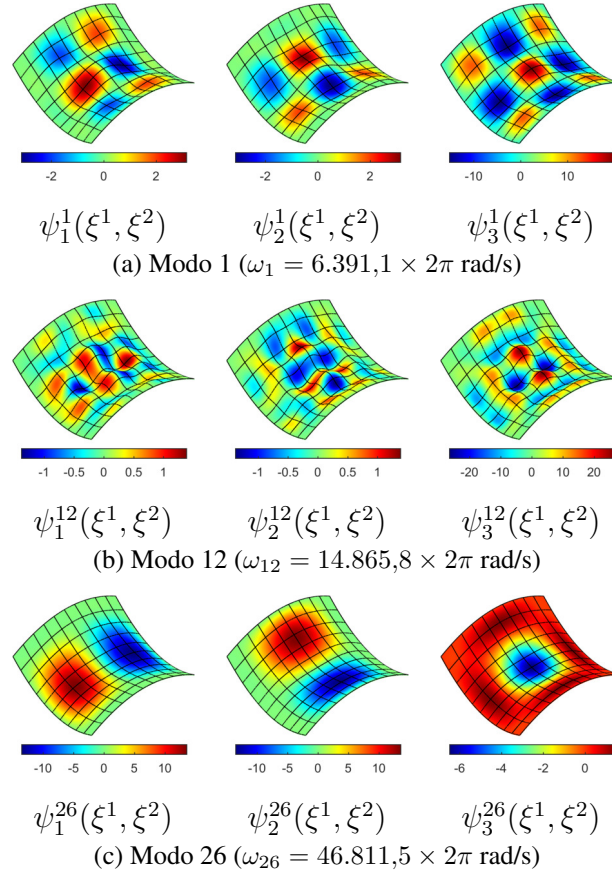


Tabela 7.3 – Influência modal percentual dos dois modos mais influentes determinada para as órbitas periódicas dos pontos a-c da *backbone* do paraboloide hiperbólico para o modelo com 75 gdl da Figura 7.9(a).

Ponto	1º modo			2º modo		
	Modo	Frequência dominante	Influência modal	Modo	Frequência dominante	Influência modal
a	Modo 1 (Fig. 7.11(a))	1ω	91,61%	Modo 12 (Fig. 7.11(b))	2ω	4,05%
b	Modo 26 (Fig. 7.11(c))	7ω	54,63%	Modo 1 (Fig. 7.11(a))	1ω	41,17%
c	Modo 1 (Fig. 7.11(a))	1ω	86,52%	Modo 12 (Fig. 7.11(b))	2ω	6,71%

Figura 7.11 – Modos de vibração do paraboloide hiperbólico.



No ramo principal, as vibrações livres são predominantemente caracterizadas pelo primeiro modo (Figura 7.11(a)), com a presença crescente do modo 12 (Figura 7.11(b)), exibindo uma ressonância interna do tipo 2:1. A razão entre as frequências naturais lineares destes dois modos é $\omega_{12}/\omega_1 = 2.3$, demonstrando mais uma vez que ressonâncias internas podem ocorrer sem que as frequências lineares sejam comensuráveis. No ponto (b), há uma ressonância interna 7:1 com a interação entre os modos 1 e 26. Semelhante ao exemplo anterior, os ramos de ressonâncias internas que ativam modos que representam vibrações de membrana (por exemplo, o modo 26 retratado na Figura 7.11) são instáveis, portanto, não fisicamente realizáveis, e podem desaparecer com a adição de novos modos ao modelo.

7.2.4 Conoide parabólico

Nesta seção são apresentados os resultados do conoide parabólico, que possui as seguintes propriedades geométricas e físicas (veja a Figura 7.1(c)): $f_1 = 0,03$ m, $f_2 = 0,02$ m, $a = b =$

0,1 m, $h = 0,001$ m, $E = 206$ GPa, $\nu = 0,3$ e $\rho = 7850$ kg/m³. A casca é simplesmente apoiada com bordas imóveis, de acordo com a equação (7.8). Ao contrário das outras cascas, esta apresenta simetria apenas ao longo do eixo $\xi^2 = b/2$, portanto, as funções de forma ϕ_{kij} foram escolhidas considerando vibrações simétricas ao longo deste eixo, de acordo com as equações (7.10).

$$\begin{aligned}\phi_{1ij} &= \sin\left(\frac{i\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi\xi^2}{b}\right) \\ \phi_{2ij} &= \sin\left(\frac{i\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(\frac{2j\pi\xi^2}{b}\right) \\ \phi_{3ij} &= \sin\left(\frac{i\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi\xi^2}{b}\right)\end{aligned}\quad (7.10)$$

Para verificar a convergência, foram construídos quatro modelos com 48 gdl ($m_k = n_k = 4$), 75 gdl ($m_k = n_k = 5$), 108 gdl ($m_k = n_k = 6$) e 147 gdl ($m_k = n_k = 7$). A frequência natural fundamental da casca é $\omega_1 = 3.623,9 \times 2\pi$ rad/s. As *backbones* desses modelos são representadas nas Figuras 7.12(a–b). No início da curva, os quatro modelos apresentam o mesmo comportamento de amolecimento, mas o modelo com 48 gdl começa a exibir um ramo com comportamento de endurecimento para um valor de frequência em torno de $\omega = 0,994 \omega_1$.

Em geral, o modelo com 75 gdl apresenta um comportamento semelhante aos modelos com 108 e 147 gdl, mas sem as ressonâncias internas. Os modelos com 108 e 147 dof exibem ressonâncias internas com a ativação de modos que correspondem a vibrações de membrana em ramos instáveis da *backbone*. Tais ramos não representam vibrações reais da estrutura. No modelo com 147 dof, após uma bifurcação de Neimark-Sacker, a solução torna-se instável. A *backbone* determinada via MEF exibe o mesmo comportamento que a *backbone* determinada para modelo com 147 gdl, confirmando mais uma vez a eficiência da presente formulação na análise de vibrações livres em regime de amplitudes moderadas.

A Tabela 7.4 mostra os resultados da influência modal (equação 7.5) dos pontos a-c da relação frequência-energia da Figura 7.12(a) para o modelo com 147 gdl do conoide parabólico – os modos com maior influência estão representados na Figura 7.14. A resposta é principalmente influenciada pelo primeiro modo (Fig. 7.14(a)) com influência crescente dos modos 2 (Fig. 7.14(b)) e 4 (Fig. 7.14(c)), exibindo ressonâncias internas do tipo 2:1.

Figura 7.12 – *Backbones* do conoide parabólico para os modelos com 48 gdl (—), 75 gdl (—), 108 gdl (—) e 147 gdl (—). •••, *backbone* obtida via Abaqus. Em (a), energia total versus frequência normalizada, e, em (b), amplitude máxima da coordenada generalizada $u_{3,12}$ versus frequência normalizada são apresentadas. As curvas tracejadas representam soluções instáveis, enquanto as curvas contínuas representam soluções estáveis. NS, bifurcação de Neimark-Sacker.

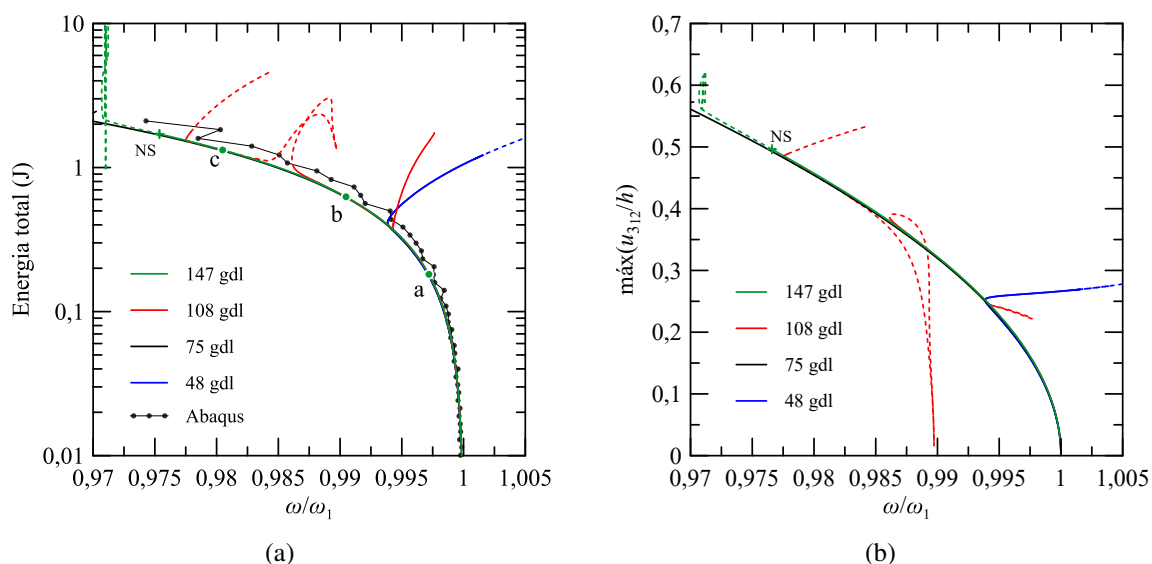


Figura 7.13 – Respostas no tempo em coordenadas modais das órbitas periódicas dos pontos a-c da *backbone* do conoide parabólico. — modo 1; — modo 2; — modo 4.

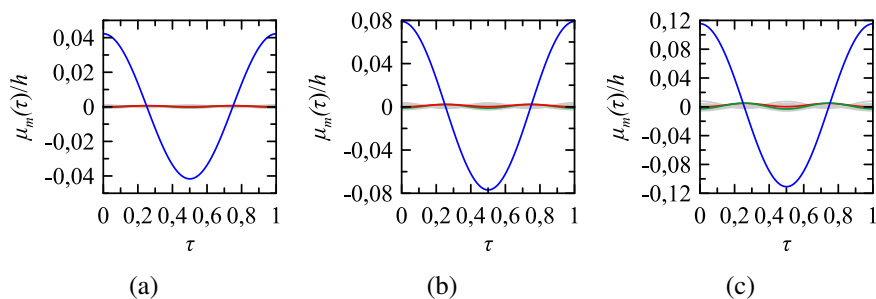
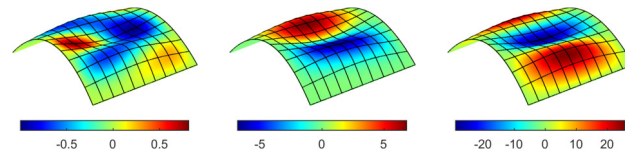


Tabela 7.4 – Influência modal percentual dos dois modos mais influentes determinada para as órbitas periódicas dos pontos a-c da *backbone* do conoide parabólico da Figura 7.12(a).

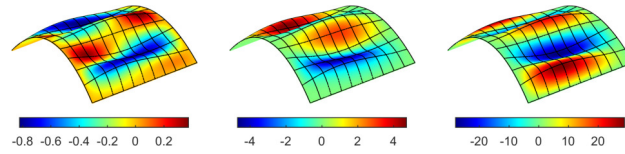
Ponto	1º modo			2º modo		
	Modo	Frequência dominante	Influência modal	Modo	Frequência dominante	Influência modal
a	Modo 1 (Fig. 7.14(a))	1ω	98,47%	Modo 2 (Fig. 7.14(b))	2ω	0,85%
b	Modo 1 (Fig. 7.14(a))	1ω	96,53%	Modo 2 (Fig. 7.14(b))	2ω	1,52%
c	Modo 1 (Fig. 7.14(a))	1ω	94,41%	Modo 4 (Fig. 7.14(c))	2ω	2,38%

Figura 7.14 – Modos de vibração do conoide parabólico.



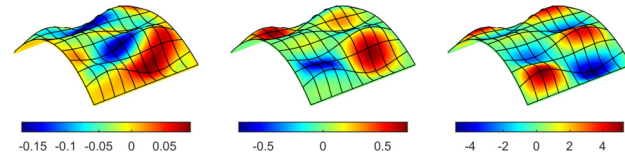
$$\psi_1^1(\xi^1, \xi^2) \quad \psi_2^1(\xi^1, \xi^2) \quad \psi_3^1(\xi^1, \xi^2)$$

(a) Modo 1 ($\omega_1 = 3.623,9 \times 2\pi$ rad/s)



$$\psi_1^2(\xi^1, \xi^2) \quad \psi_2^2(\xi^1, \xi^2) \quad \psi_3^2(\xi^1, \xi^2)$$

(b) Modo 2 ($\omega_2 = 4.988,6 \times 2\pi$ rad/s)



$$\psi_1^4(\xi^1, \xi^2) \quad \psi_2^4(\xi^1, \xi^2) \quad \psi_3^4(\xi^1, \xi^2)$$

(c) Modo 4 ($\omega_4 = 6.264,2 \times 2\pi$ rad/s)

CAPÍTULO 8

ANÁLISE DAS VIBRAÇÕES FORÇADAS EM CASCAS DE DUPLA CURVATURA VIA SVE

A abordagem das Subvariedades Espectrais vem sendo utilizada em vários trabalhos para o cálculo de *backbones* e curvas de ressonância em sistemas discretos e contínuos. Breunung e Haller (2018) propuseram uma solução analítica em que as variáveis do modelo reduzido são parametrizadas em coordenadas polares, ou seja:

$$\mathbf{p} = \rho(t) \begin{bmatrix} \exp(i\theta(t)) \\ \exp(-i\theta(t)) \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

de forma que os pontos fixos do sistema de equações diferenciais resultante do modelo reduzido correspondam a órbitas periódicas no espaço das coordenadas físicas do modelo completo. Os autores mostram que é possível determinar uma fórmula analítica para solução da *backbone* desde que as frequência naturais lineares não sejam comensuráveis entre si.

A redução de modelo via SVE em sistemas com ressonâncias internas foi abordada recentemente por Li, Jain e Haller (2022). A solução apresentada pelos autores também passa pela determinação das curvas de ressonância por meio da determinação de pontos fixos do sistema reduzido resultante quando são utilizadas coordenadas polares. Para a consideração das ressonâncias internas, os autores consideraram a seguinte parametrização:

$$\begin{bmatrix} p_{2i-1} \\ p_{2i} \end{bmatrix} = \rho_i(t) \begin{bmatrix} \exp(i\theta_i(t) + r_i\omega t) \\ \exp(-i\theta_i(t) + r_i\omega t) \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

tal que r_i são os elementos do vetor $\mathbf{r} \in \mathbb{Q}^m$ determinados pelas seguintes condições de ressonância:

$$\lambda_E - ir\omega \approx 0, \lambda_E + ir\omega \approx 0 \quad (8.3)$$

onde $\lambda_E = \text{diag}(\Lambda_E)$. Uma limitação apontada pelos autores é que a SVE não fornece uma estimativa do limite superior das amplitudes de carregamento ϵ para as quais os resultados da redução são confiáveis.

Este capítulo apresenta uma análise das vibrações forçadas de cascas de dupla curvatura, com ênfase especial em cascas não abatidas, usando a teoria tensorial não linear de cascas de Koiter. Cinco geometrias distintas foram investigadas: o painel cilíndrico, o painel esférico abatido, o painel esférico não abatido, o parabolóide hiperbólico e o conoide parabólico. Foram determinadas as curvas de ressonância considerando que as cascas estão sujeitas a uma carga concentrada harmônica vertical $\mathbf{F} = \epsilon f \cos(\omega_f t) \mathbf{e}_3$, atuando no ponto (ξ_F^1, ξ_F^2) , tal que as forças generalizadas resultantes são dadas por:

$$Q_{k_{ij}} = \frac{\partial}{\partial u_{k_{ij}}(t)} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}(\xi_F^1, \xi_F^2, t)) \quad (8.4)$$

As equações de equilíbrio foram determinadas por meio do método do Rayleigh-Ritz, como apresentado no Capítulo 3, utilizando a teoria não linear de cascas de Koiter por meio das aproximações descritas no Capítulo 2: uma para cascas não-abatidas (2.61) e outra para cascas abatidas (2.62). Além disso, foi considerado o amortecimento viscoso atuando na casca, de modo que a função de dissipação de Rayleigh F é dada por:

$$F = \iint_{\Omega} c \frac{h}{2} G^{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j \sqrt{G} d\xi^1 d\xi^2 \quad (8.5)$$

A equação (8.5) resulta em uma matriz de amortecimento na forma $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M}$ tal que $\alpha = c/\rho$, mas o caso geral do amortecimento proporcional $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$ também foi considerado.

Em um primeiro momento, as órbitas periódicas do modelo completo foram determinadas pelo Método do Balanço Harmônico Adaptativo, apresentado na Seção 3.2.3, considerando $\eta = 1$, ou seja, que a frequência de excitação é igual a frequência da resposta ($\omega = \omega_f$). Todos os resultados numéricos apresentados nesta seção foram obtidos utilizando o MBHA com um número máximo de harmônicos $H = 20$ e um limiar $\bar{\epsilon} = 10^{-7}$ para a seleção do filtro. Além disso, o método de força bruta foi aplicado como uma abordagem complementar para validar os resultados obtidos pelo método do balanço harmônico.

Em seguida, as curvas de ressonância foram determinadas novamente por meio de um modelo reduzido via SVE. Ao contrário dos estudos mencionados anteriormente, neste trabalho não foi adotada nenhuma parametrização do vetor de coordenadas $\mathbf{p}$ do modelo reduzido. As curvas de ressonância apresentas neste capítulo não foram obtidas por meio de fórmulas analíticas, mas pela análise das equações (4.18) e (4.64) na forma como foram apresentadas e utilizando as técnicas de determinação de órbitas periódicas apresentadas na Seção 3.2, particularmente

o MBHA. O motivo para essa abordagem é que algumas ressonâncias internas identificadas no Capítulo 7 surgem mesmo que as frequências naturais sejam incomensuráveis entre si. Em alguns casos, dois modos podem ser internamente ressonante para diferentes razões entre as frequências das respostas (veja a Tabela. 7.1). Isso torna a aplicação da equação (8.2), cujos valores de r são considerados *a priori*, ineficiente para capturar esse tipo de fenômeno.

Os resultados obtidos neste capítulo estão contidos no artigo *Nonlinear forced vibration analysis of doubly curved shells using Spectral Submanifolds* (título provisório), em preparação no momento da elaboração desta tese, e revelam o comportamento dinâmico complexo exibido pelas cascas de dupla curvatura. Vários tipos de bifurcações, como Ponto de Sela e Neimark-Sacker, e bifurcações de Duplicação de Período foram observados. Além disso, o conoide parabólico demonstrou comportamento caótico em condições específicas. Estes resultados contribuem para a compreensão das vibrações forçadas dessas cascas, e a metodologia proposta pode ser expandida para o estudo de outras geometrias.

8.1 Validação

Com o objetivo de validar a formulação empregada, a primeira casca estudada é uma painel cilíndrico abatido, ou seja, diferentemente das demais, não é uma casca de dupla curvatura. Essa casca foi estudada anteriormente por Li, Jain e Haller (2022), que determinaram a curva de ressonância utilizando um modelo de elementos finitos com 1320 gdl. A casca está apresentada na Figura 8.1 e possui as seguintes propriedades físicas e geométricas: dimensões da projeção horizontal $a = 2$ m e $b = 1$ m, espessura $h = 0,01$ m, módulo de Young $E = 70$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,33$, densidade $\rho = 2700$ kg/m³ e coeficientes de amortecimento $\alpha = 0,004\omega_1\omega_2/(\omega_1 + \omega_2)$ e $\beta = 0,004/(\omega_1 + \omega_2)$.

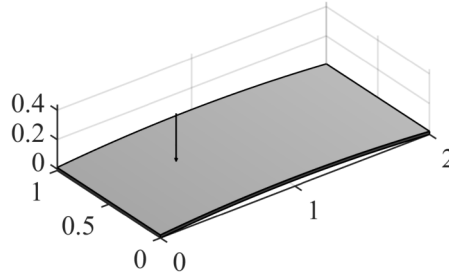
As condições de contorno nas bordas da casca são

$$u_1 = u_2 = u_3 = M_1 = 0 \text{ para } \xi^1 = 0, a \quad (8.6a)$$

$$V_1 = N_1 = M_1 = V_2 = N_2 = M_2 = 0 \text{ para } \xi^2 = 0, b \quad (8.6b)$$

tal que as funções de forma $\phi_{k_{ij}}(\xi^1, \xi^2)$, que satisfazem as condições de contorno (8.6), são

Figura 8.1 – Painel cilíndrico abatido



$$Z(\xi^1, \xi^2) = \frac{-a^2 + 4(f_1)^2 + \sqrt{a^4 - 8a^2(f_1)^2 + 64af_1\xi^1 + 16(f_1)^4 - 64(f_1)^2(\xi^1)^2}}{8f_1}$$

$f_1 = 0,041 \text{ m}, \quad a = 2 \text{ m}, \quad b = 1 \text{ m}$

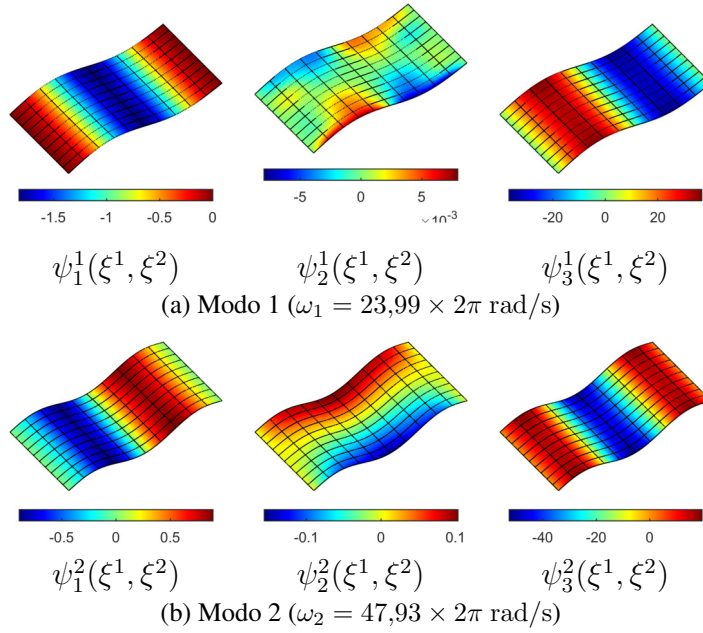
dadas pelas equações (8.7).

$$\begin{aligned} \phi_{1ij} &= \sin\left(\frac{i\pi\xi^1}{a}\right) \left\{ \frac{1 + (-1)^j}{2} \sin\left(\frac{j\pi\xi^2}{2b}\right) + \frac{1 + (-1)^{j+1}}{2} \cos\left(\frac{(j-1)\pi\xi^2}{2b}\right) \right\} \\ \phi_{2ij} &= \sin\left(\frac{i\pi\xi^1}{a}\right) \left\{ \frac{1 + (-1)^j}{2} \sin\left(\frac{j\pi\xi^2}{2b}\right) + \frac{1 + (-1)^{j+1}}{2} \cos\left(\frac{(j-1)\pi\xi^2}{2b}\right) \right\} \\ \phi_{3ij} &= \sin\left(\frac{i\pi\xi^1}{a}\right) \left\{ \frac{1 + (-1)^j}{2} \sin\left(\frac{j\pi\xi^2}{2b}\right) + \frac{1 + (-1)^{j+1}}{2} \cos\left(\frac{(j-1)\pi\xi^2}{2b}\right) \right\} \end{aligned} \quad (8.7)$$

As duas primeiras frequências naturais da casca são $\omega_1 = 23,99 \times 2\pi \text{ rad/s}$ e $\omega_2 = 47,93 \times 2\pi \text{ rad/s}$, calculadas para um modelo com 147 gdl ($m_k = n_k = 7$). Estes resultados são muito próximos aos resultados determinados por Li, Jain e Haller (2022), $\omega_1 = 23,75 \times 2\pi \text{ rad/s}$ e $\omega_2 = 47,55 \times 2\pi \text{ rad/s}$. Observa-se que há uma ressonância interna do tipo 2:1 entre os dois primeiros modos, que estão ilustrados nas Figuras 8.2, dividido à razão inteira entre as frequências, tal que $\omega_2 = 2\omega_1$.

Considerou-se, neste caso, um carregamento aplicado no ponto cujas coordenadas curvilíneas são $\xi_F^1 = a/4$ e $\xi_F^2 = b/2$, e que possui magnitude máxima $\epsilon f = 10 \text{ N}$. O fenômeno da ressonância interna é claramente observado pela curva de ressonância da Figura 8.3, que apresenta uma comparação entre o resultado determinado por Li, Jain e Haller (2022) e aquele obtido pela metodologia apresentada no presente trabalho. A curva de ressonância inicia com uma amplitude baixa ($\|u_3(a/4, b/2, t)\|_\infty < 0,06$) até o primeiro ponto de bifurcação do tipo SN ($\omega/\omega_1 \approx 0,98$). A partir desse ponto, a casca apresenta uma solução instável, com comportamento com perda de rigidez, de forma que a amplitude das vibrações aumenta enquanto a frequência de excitação diminui. Uma nova bifurcação do tipo SN acontece no ponto de máxima amplitude $\|u_3(a/4, b/2, t)\|_\infty \approx 0,21$ e frequência $\omega/\omega_1 \approx 0,95$, tornando a solução estável novamente. Entre o intervalo de frequência $0,99 < \omega/\omega_1 < 1,005$ existe um trecho instável

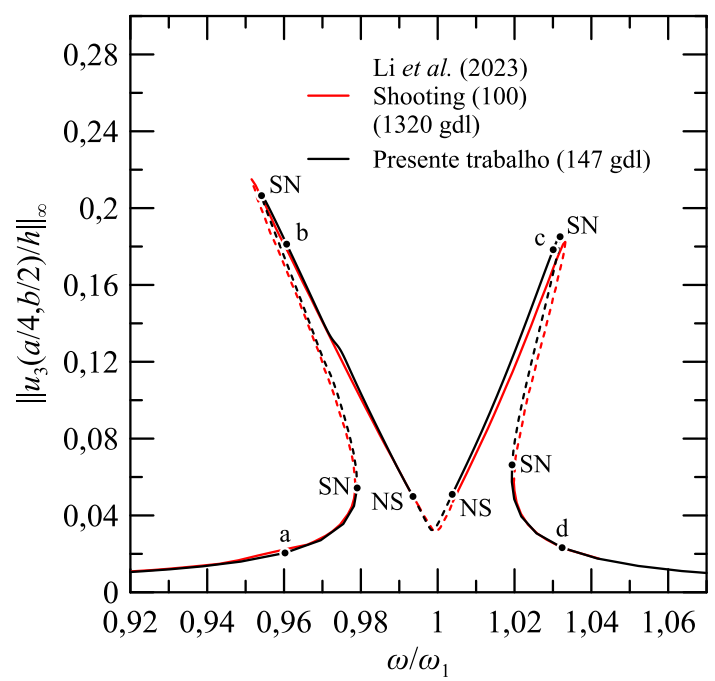
Figura 8.2 – Modos de vibração do painel esférico abatido.



da curva de ressonância, entre dois pontos de bifurcação do tipo NS, em que a casca apresenta soluções aperiódicas. Em seguida, há um segundo trecho da curva em que a casca apresenta ganho de rigidez, tal que a solução se torna instável novamente devido a uma bifurcação do tipo SN ($\omega/\omega_1 \approx 0,98$) no segundo ponto de amplitude máxima $\|u_3(a/4, b/2, t)\|_\infty \approx 0,18$. Uma última bifurcação do tipo SN é observada para o valor de frequência $\omega/\omega_1 \approx 0,98$. Deste ponto em diante, a estrutura apresenta vibrações com amplitudes relativamente baixas ($\|u_3(a/4, b/2, t)\|_\infty < 0,07$). Observa-se que a curva de ressonância é muito próxima daquela determinada na literatura, validando a formulação tensorial e o MBHA.

A Figura 8.4 ilustra os resultados da curva de ressonância do painel cilíndrico abatido utilizando o modelo reduzido via SVE. Quando apenas o primeiro modo é considerado como modo mestre, ou seja, quando o subespaço espectral mestre é dado por $E = E_1$, o modelo reduzido não consegue capturar a resposta do sistema. Quando o segundo modo é incluído, ou seja, considerando o subespaço mestre $E = E_1 \oplus E_2$, já há convergência para a ordem $O(3)$, com a curva de ressonância muito próxima à do modelo completo. A solução semianalítica já representa uma diminuição de dimensão significativa quando comparada à solução obtida via MEF (1320 gdl) (Li; Jain; Haller, 2022). É ainda mais notável que com apenas 2 gdl é possível obter um modelo que representa com precisão a resposta de um sistema contínuo complexo. As Figuras 8.5(a–d) mostram uma comparação entre as respostas no tempo dos quatro pontos (a–d) da

Figura 8.3 – Amplitude do deslocamento $u_3(a/4, b/2, t)$ do painel cilíndrico abatido em função da frequência de excitação, considerando uma carga de $\epsilon f = 10$ N. SN, bifurcações Ponto de sela; NS, bifurcação Neimark-Sacker.



curva de ressonância do modelo completo (linha tracejada) e do modelo reduzido (linha contínua). Novamente, os resultados são praticamente idênticos. A influência modal dos dois modos mais influentes das órbitas dos pontos a-d da curva de ressonância foram determinadas e estão apresentadas na Tabela 8.1, utilizando a mesma metodologia apresentada no capítulo anterior. Analisando os dados da tabela, fica clara a influência dos dois primeiros modos na resposta em um cenário de ressonância interna do tipo 2:1.

Tabela 8.1 – Influência modal percentual dos dois modos mais influentes determinada para as órbitas periódicas dos pontos a-d da curva de ressonância do painel cilíndrico abatido para o modelo com 147 gdl da Figura 8.3.

Ponto	1º modo			2º modo		
	Modo	Frequência dominante	Influência modal	Modo	Frequência dominante	Influência modal
a	Modo 1 (Fig. 8.2(a))	1ω	97,62%	Modo 2 (Fig. 8.2(b))	2ω	3,62%
b	Modo 1 (Fig. 8.2(a))	1ω	76,86%	Modo 2 (Fig. 8.2(b))	2ω	23,66%
c	Modo 1 (Fig. 8.2(a))	1ω	72,31%	Modo 2 (Fig. 8.2(b))	2ω	26,79%
d	Modo 1 (Fig. 8.2(a))	1ω	93,59%	Modo 2 (Fig. 8.2(b))	2ω	5,24%

Figura 8.4 – Resultados da curva de ressonância do painel cilíndrico abatido obtidas pelo modelo completo com 147 gdl e pelos modelos de ordem reduzida via SVE.

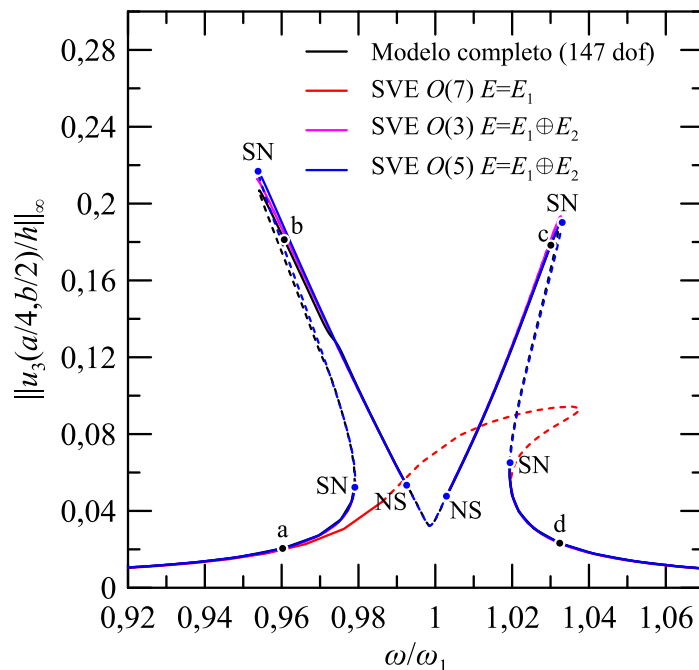
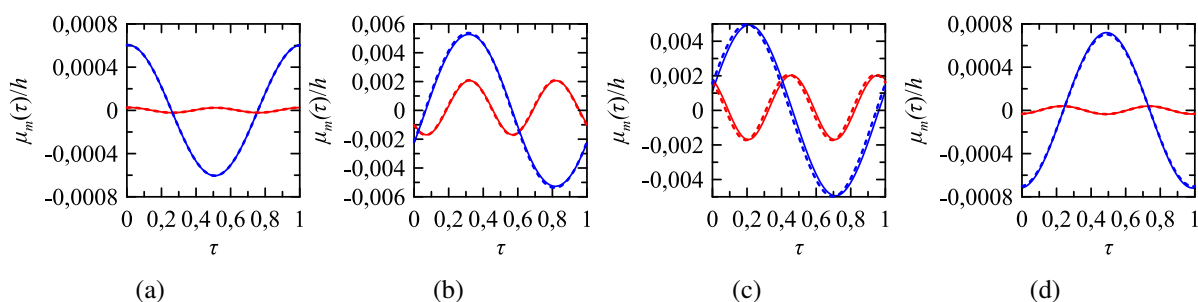


Figura 8.5 – Respostas no tempo em coordenadas modais para as orbitas periódicas dos pontos a-d da curva de ressonância do painel cilíndrico abatido. — modo 1; — modo 2. As linhas contínuas representam as respostas do modelo reduzido considerando uma SVE com $E = E_1 \oplus E_2$ e $O(5)$. As linhas tracejadas representam a resposta do modelo completo com 147 gdl.

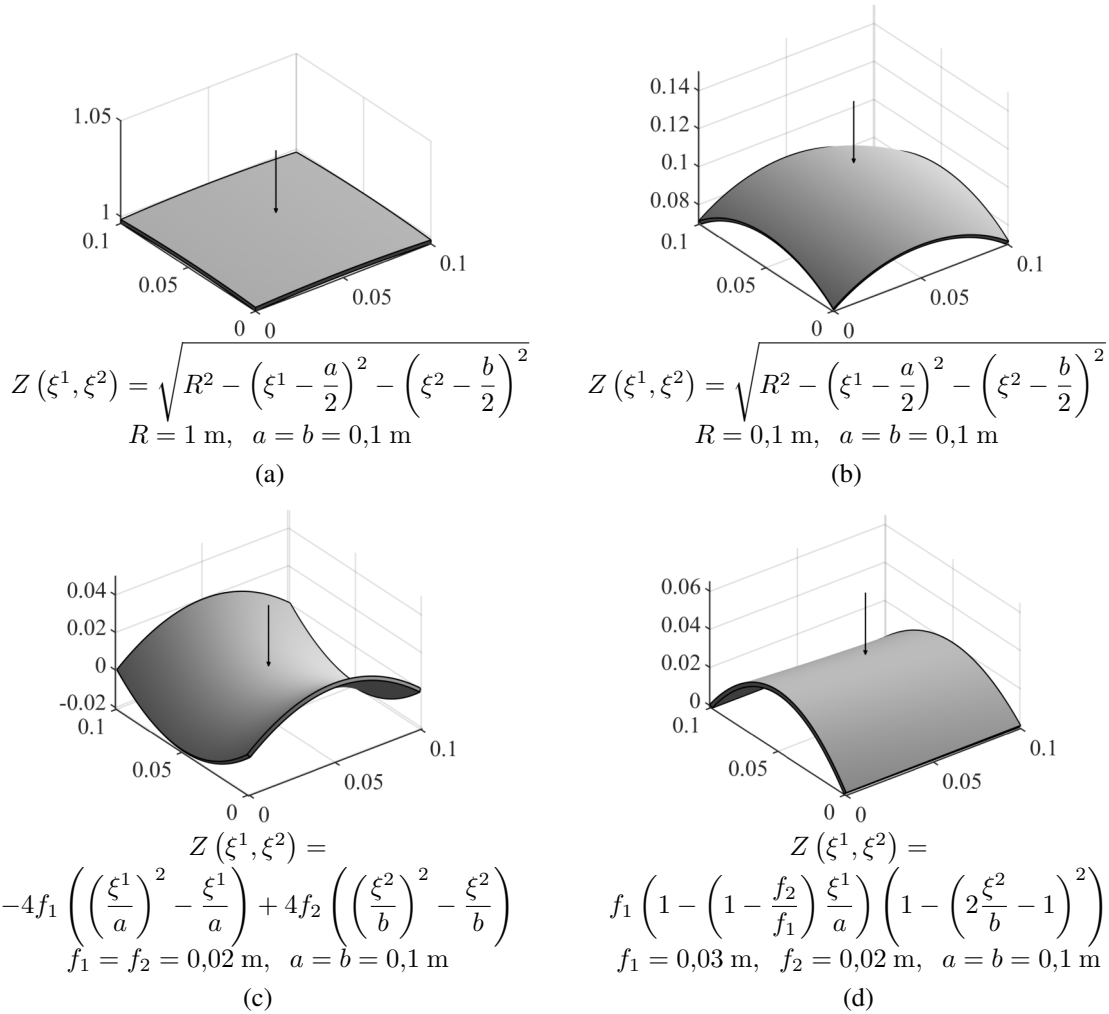


8.2 Casca de dupla curvatura

Nesta seção, serão apresentados os resultados das análises de vibração forçada de cascas de dupla curvatura, abatidas e não abatidas. As cascas estudadas aqui são as mesmas analisadas no capítulo anterior, e estão representadas novamente na Figura 8.6: o painel esférico abatido (a), o painel esférico não abatido (b), o paraboloide hiperbólico (c) e o conoide parabólico (d). As condições de contorno e as expansões do campo de deslocamentos também são as mesmas. Todas as cascas estão sujeitas a uma força harmônica vertical $\mathbf{F} = \epsilon f \cos(\omega_f t) \mathbf{e}_3$, atuando

no centro ($\xi_F^1 = a/2, \xi_F^2 = b/2$), tal que ϵf representa a amplitude máxima da carga e ω_f é a frequência de excitação. Todas as cascas possuem as seguintes propriedades geométricas e físicas: dimensões da projeção horizontal $a = b = 0,1$ m, espessura $h = 0,001$ m, módulo de Young $E = 206$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, densidade $\rho = 7850$ kg/m³ e coeficiente de amortecimento $\alpha = 2\zeta\omega_1$ com $\zeta = 0,004$ e $\beta = 0$.

Figura 8.6 – Geometria das cascas: (a) painel esférico abatido; (b) painel esférico não abatido; (c) parabolóide hiperbólico e (d) conoide parabólico. $Z(\xi^1, \xi^2)$ representa a elevação da superfície média. Os eixos dos gráficos estão na mesma escala e medidos em metros.



8.2.1 Painel esférico abatido

O primeiro exemplo considera um painel esférico abatido com um raio de $R = 1$ m, que foi previamente estudado na literatura (Kobayashi; Leissa, 1995; Amabili, 2005). A casca, apresentada na Figura 8.6(a), é simplesmente apoiada com bordas móveis, permitindo o deslocamento

de membrana na direção ortogonal à borda, enquanto restringe o deslocamento de membrana tangente à borda e o deslocamento transversal. As condições de contorno geométricas (essenciais) e naturais nas quatro bordas são dadas por:

$$u_2 = u_3 = N_1 = M_1 = 0 \text{ para } \xi^1 = 0, a \quad (8.8a)$$

$$u_1 = u_3 = N_2 = M_2 = 0 \text{ para } \xi^2 = 0, b \quad (8.8b)$$

onde N_α é a força normal e M_α é o momento fletor por unidade de comprimento na direção de $\mathbf{m}^\alpha$. As funções de forma $\phi_{kij}(\xi^1, \xi^2)$, que satisfazem as condições de contorno (8.8), foram adotadas como:

$$\begin{aligned} \phi_{1ij} &= \left\{ \frac{1 + (-1)^i}{2} \sin\left(\frac{i\pi\xi^1}{a}\right) + \frac{1 + (-1)^{i+1}}{2} \cos\left(\frac{i\pi\xi^1}{a}\right) \right\} \sin\left(\frac{(2j-1)\pi\xi^2}{b}\right) \\ \phi_{2ij} &= \sin\left(\frac{(2i-1)\pi\xi^1}{a}\right) \left\{ \frac{1 + (-1)^j}{2} \sin\left(\frac{j\pi\xi^2}{b}\right) + \frac{1 + (-1)^{j+1}}{2} \cos\left(\frac{j\pi\xi^2}{b}\right) \right\} \\ \phi_{3ij} &= \sin\left(\frac{(2i-1)\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi\xi^2}{b}\right) \end{aligned} \quad (8.9)$$

A frequência natural fundamental da casca é $\omega_1 = 952,2 \times 2\pi$ rad/s. Esta casca foi previamente examinada por Amabili (2005), que considerou uma carga harmônica de magnitude máxima de $\epsilon f = 31,2$ N, e analisou a casca pela teoria ortogonal de Donnel usando duas diferentes expansões do campo de deslocamento. A primeira expansão envolveu um modelo com 9 graus de liberdade ($m_1 = n_1 = m_2 = n_2 = 2$ e $m_3 = n_3 = 1$), enquanto a segunda expansão utilizou um modelo com 22 graus de liberdade ($m_1 = n_1 = m_2 = n_2 = 3$ e $m_3 = n_3 = 2$).

As Figuras 8.7(a–b) apresentam as curvas de ressonância para essas duas expansões. Especificamente, a Figura 8.7(a) mostra a curva de ressonância para o modelo com 9 graus de liberdade, que coincide com os resultados determinados por Amabili (2005), indicando uma transição de não linearidade do tipo amolecimento para endurecimento para amplitudes de vibração de aproximadamente duas vezes a espessura da casca. Em contraste, a Figura 8.7(b) exibe a curva de ressonância para o modelo com 22 graus de liberdade, que é semelhante aos resultados da literatura, embora haja algumas pequenas diferenças. Em geral, a Figura 8.7(b) apresenta uma curva mais complexa, especialmente no intervalo de frequência $0,9 < \omega/\omega_1 < 0,95$. Nessa região, as vibrações periódicas são majoritariamente instáveis, com a presença de bifurcações do tipo ponto de sela e Neimark-Sacker. Além disso, a curva de resposta do modelo com 22 graus de liberdade revela uma pequena região de instabilidade em torno de $\omega = 0,77\omega_1$. Essa região está localizada entre dois pontos de bifurcação de Duplicação de Período, que não foram

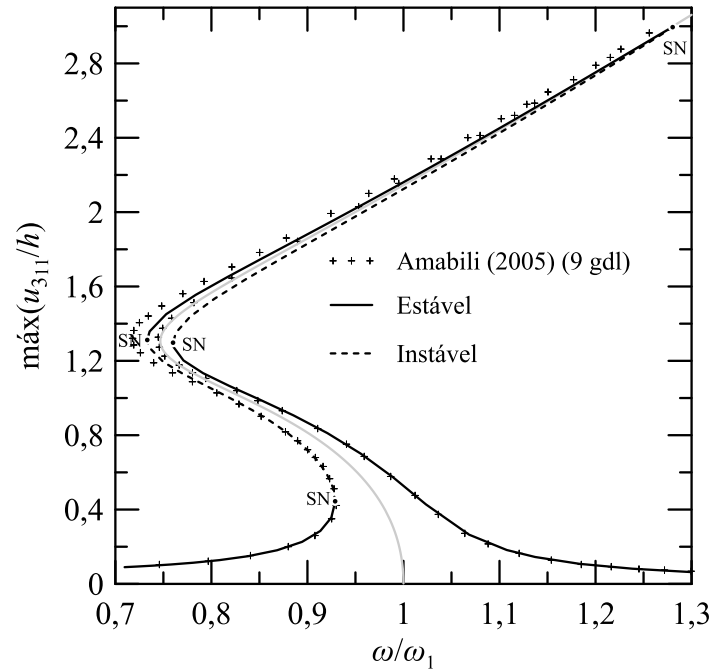
relatados anteriormente na literatura existente. Essa instabilidade coincide com um ramo de ressonância interna da *backbone* determinada no capítulo anterior. Para valores de amplitude $\max(u_{311}/h) > 1,5$, a casca deixa de apresentar soluções periódicas estáveis devido a uma bifurcação do tipo NS.

As Figuras 8.8 exibem a curva de ressonância para o painel esférico abatido utilizando a SVE. Inicialmente, o modelo reduzido foi determinado considerando apenas o primeiro modo como mestre, ou seja, $E = E_1$. Mesmo adotando uma ordem elevada de $O(15)$ para a parametrização da variedade, grande parte do comportamento complexo da resposta não é capturado, especialmente nos trechos instáveis. Quando mais modos mestres são acrescentados, a resposta converge para o modelo completo. O modelo $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_4$ apresenta resultados melhores que o modelo $E = E_1$ considerando a mesma ordem $O(15)$. Já a curva de ressonância considerando o subespaço mestre $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \oplus E_4$ e $O(11)$ consegue capturar com precisão toda a curva de ressonância – incluindo a posição das bifurcações trecho complexo no intervalo de frequência $0,9 < \omega/\omega_1 < 0,95$ – para deslocamentos de amplitude até $\max(u_{311})/h \leq 1$. Estes são os mesmo modos cujas ressonâncias internas foram detectadas na análise das vibrações livres não lineares. Por limitação da memória computacional, não foi possível determinar modelos de ordem maiores para o mesmo subespaço mestre.

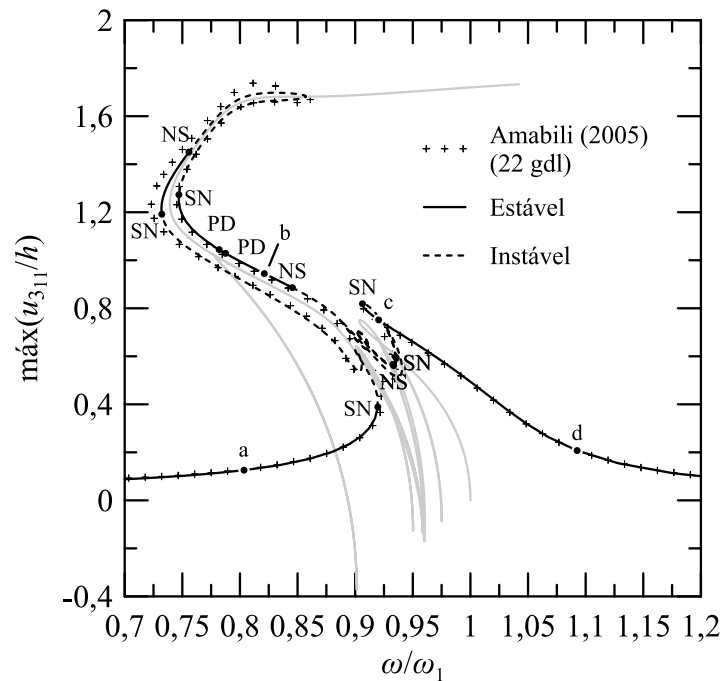
Com o objetivo de avaliar se as ressonâncias internas persistem em um cenário de vibração forçada amortecida, e se as respostas do modelo reduzido são próximas ao do modelo completo, a resposta no tempo em coordenadas modais de quatro pontos (a-d) da curva de ressonância são apresentadas nas Figuras 8.9(a-d). As linhas tracejadas representam as respostas do modelo completo, enquanto as linhas contínuas do modelo reduzido considerando $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \oplus E_4$ e $O(11)$. Todos pontos apresentam respostas praticamente idênticas ao do modelo completo. Em resumo, o modelo reduzido conseguiu identificar com precisão as ressonâncias internas.

As influências modais dos dois modos mais relevantes na resposta no tempo foram determinadas pela equação (7.5) e estão apresentadas na Tabela 8.2. Vários ramos de ressonância interna foram detectadas na análise de vibração livre desta casca. No ponto b, existe uma importante ressonância interna do tipo 3:1 entre os modos 1 e 2. Os outros pontos (a, c e d) também apresentam ressonâncias internas, todavia menos relevantes, sendo o deslocamento majoritariamente caracterizado pelo primeiro modo.

Figura 8.7 – Amplitude máxima da resposta para a coordenada generalizada u_{311} em função da frequência de excitação para um painel esférico abatido sob uma carga de $\epsilon f = 31,2$ N. Em (a), para o modelo com 9 graus de liberdade, e em (b), para o modelo com 22 graus de liberdade. NS, bifurcações de Neimark-Sacker; SN, bifurcações de Sela-Nó; PD, bifurcações de Duplicação de Período.



(a)



(b)

Figura 8.8 – Resultados das curvas de ressonância do painel esférico abatido obtidas pelo modelo completo com 22 gdl e pelos modelos de ordem reduzida via SVE.

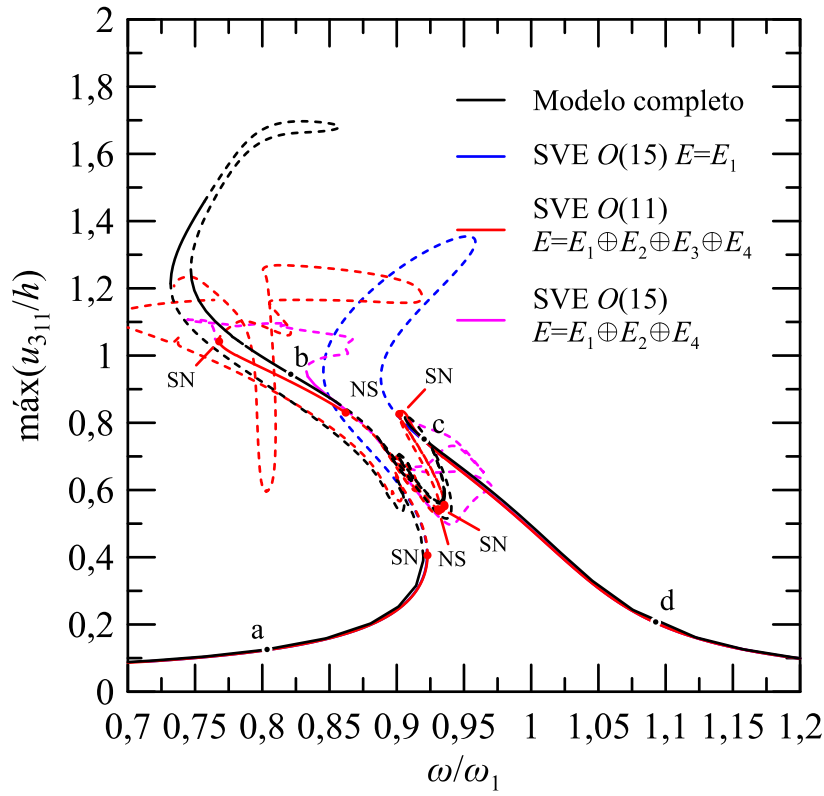
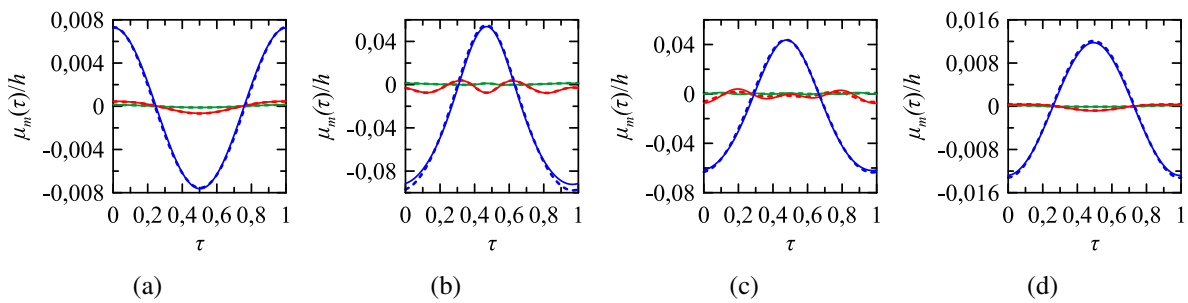


Figura 8.9 – Respostas no tempo em coordenadas modais para as orbitas periódicas dos pontos a-d da curva de ressonância do painel esférico abatido para $\epsilon f = 31,2$ N. — modo 1; — modo 2; — modo 4. As linhas contínuas representam as respostas do modelo reduzido considerando uma SVE com $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \oplus E_4$ e $O(11)$. As linhas tracejadas representam a resposta do modelo completo com 22 gdl.



8.2.2 Painel esférico não abatido

Nesta seção, será analisado um painel esférico não abatido de raio $R = 0,1$ m, sujeito a uma carga harmônica concentrada de magnitude máxima $\epsilon f = 200$ N, conforme mostrado na Figura 8.6(b). A frequência natural fundamental é $\omega_1 = 8.271,6 \times 2\pi$ rad/s. A casca é simplesmente apoiada com bordas imóveis, o que significa que as seguintes condições de contorno se

Tabela 8.2 – Influência modal percentual dos dois modos mais influentes determinada para as órbitas periódicas dos pontos a-d da curva de ressonância da casca esférica abatida para o modelo com 22 gdl da Figura 8.7(b).

Ponto	1º modo			2º modo		
	Modo	Frequência dominante	Influência modal	Modo	Frequência dominante	Influência modal
a	Modo 1 (Fig. 7.5(a))	1ω	98,59%	Modo 2 (Fig. 7.5(b))	1ω	1,37%
b	Modo 1 (Fig. 7.5(a))	1ω	95,68%	Modo 2 (Fig. 7.5(b))	3ω	4,29%
c	Modo 1 (Fig. 7.5(a))	1ω	98,55%	Modo 2 (Fig. 7.5(b))	2ω	1,04%
d	Modo 1 (Fig. 7.5(a))	1ω	99,30%	Modo 2 (Fig. 7.5(b))	1ω	0,64%

aplicam:

$$u_1 = u_2 = u_3 = M_1 = 0 \text{ para } \xi^1 = 0, a \quad (8.10a)$$

$$u_1 = u_2 = u_3 = M_2 = 0 \text{ para } \xi^2 = 0, b \quad (8.10b)$$

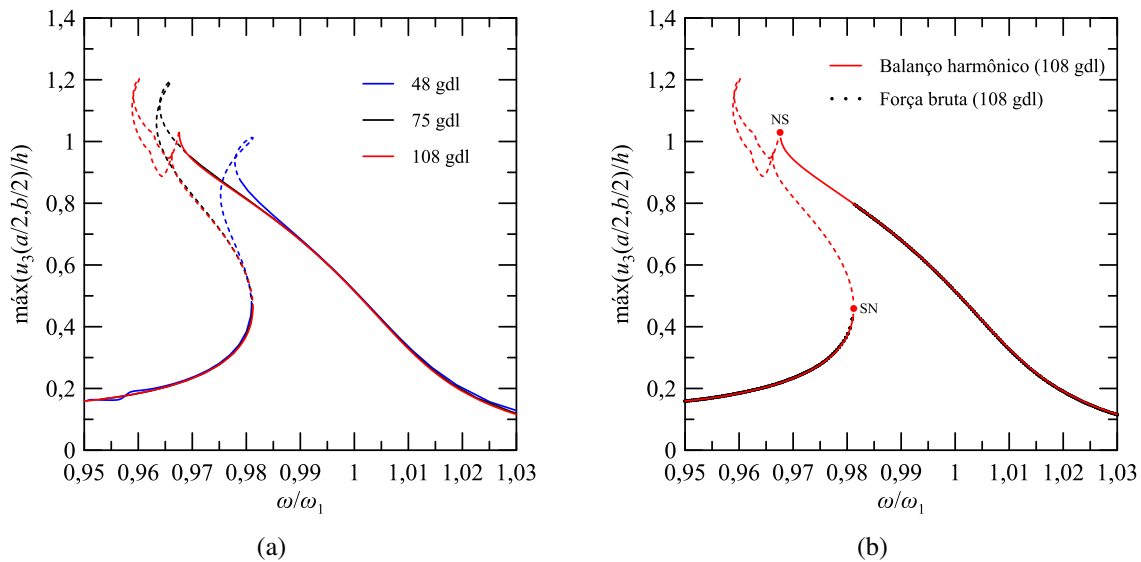
As funções de forma $\phi_{kij}(\xi^1, \xi^2)$, que satisfazem as condições de contorno (8.10), são definidas pelas equações (8.11). Similar ao exemplo anterior, essas funções foram selecionadas para considerar as vibrações simétricas ao longo dos eixos $\xi^1 = a/2$ e $\xi^2 = b/2$.

$$\begin{aligned} \phi_{1ij} &= \sin\left(\frac{(2i)\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi\xi^2}{b}\right) \\ \phi_{2ij} &= \sin\left(\frac{(2i-1)\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(\frac{(2j)\pi\xi^2}{b}\right) \\ \phi_{3ij} &= \sin\left(\frac{(2i-1)\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi\xi^2}{b}\right) \end{aligned} \quad (8.11)$$

Para garantir a convergência, foram analisadas três expansões com 48 graus de liberdade ($m_k = n_k = 4$), 75 graus de liberdade ($m_k = n_k = 5$) e 108 graus de liberdade ($m_k = n_k = 6$). A Figura 8.10(a) ilustra a amplitude máxima da órbita periódica para o deslocamento u_3 no centro da casca em função da frequência de excitação. De maneira geral, todos os modelos exibem um comportamento inicial de perda de rigidez, com as vibrações se tornando instáveis para amplitudes maiores que uma vez espessura da casca. A Figura 8.10(b) apresenta uma comparação entre os resultados obtidos usando o método de força bruta e os resultados do MBHA para o modelo com 108 graus de liberdade. Notavelmente, ambas as metodologias produzem resultados idênticos, demonstrando assim a eficácia do MBHA na representação das órbitas periódicas. O

método da força bruta foi executado por meio da integração numérica da equação (3.41) utilizando a função ode23s do Matlab. Observa-se a presença de uma bifurcação do tipo ponto de sela para o valor de frequência $\omega/\omega_1 = 0,98$. Com o aumento da frequência normalizada, há uma mudança brusca nas vibrações da casca, que passa a oscilar com amplitudes maiores. Esse comportamento é típico de estruturas que apresentam perda de rigidez. Para vibrações com amplitude no centro da casca maior que $1h$, a casca apresenta vibrações periódicas instáveis devido a uma bifurcação do tipo Neimark-Sacker.

Figura 8.10 – Amplitude máxima do campo de deslocamento u_3 no centro do painel esférico não abatido em função da frequência de excitação considerando uma carga de $\epsilon f = 200$ N. Em (a), os resultados para modelos com 48, 75 e 108 graus de liberdade. Em (b), uma comparação entre os resultados obtidos usando o método do balanço harmônico e o método de força bruta para o modelo com 108 graus de liberdade. NS, bifurcações de Neimark-Sacker; SN, bifurcações de Sela-Nó.



As Figuras 8.11(a–b) apresentam os resultados das curvas de ressonância calculadas pelos modelos de ordem reduzida. A SVE para $E = E_1$ e $O(12)$ é capaz de descrever o comportamento estável das curvas de ressonância da casca com precisão, incluindo a posição das bifurcações. Quando a amplitude de vibração do ponto central da casca atinge o valor aproximado de $1h$ e $\omega = 0,967\omega_1$, coincidindo com o ponto de inflexão da *backbone*, a solução se torna instável devido a uma bifurcação do tipo Neimark-Sacker, fenômeno que também é representado pelo modelo de ordem reduzida. Apesar disso, a parte instável da solução não apresenta as complexidades presentes do modelo completo, e há uma extensão do trecho instável que não aparece no modelo completo. Quando os modos ressonantes são acrescentados, o modelo reduzido se torna mais preciso. A SVE de subespaço mestre $E = E_1 \oplus E_3 \oplus E_{13}$ consegue capturar parte do comportamento do trecho instável, e, além disso, para a ordem $O(9)$, a posição da bifurcação

do tipo Neimark-Sacker é capturada maior precisão em relação aos outros modelos.

Para avaliar possíveis ressonâncias internas, as respostas no tempo em coordenadas modais de três pontos (a-c) da curva de ressonância estão apresentadas nas Figura 8.12(a-c). As linhas tracejadas representam as respostas do modelo completo, enquanto as linhas contínuas do modelo reduzido considerando $E = E_1 \oplus E_3 \oplus E_{13}$ e $O(9)$. Observa-se a influência dos modos 1 e 3 nos três pontos. Tal influência também pode ser avaliada pela equação (7.5), e os resultados estão apresentados na Tabela 8.3. É notável que um modelo com apenas 3 graus de liberdade é capaz de descrever com precisão as ressonâncias internas. O ponto b é o que apresenta vibrações mais complexas, com o acoplamento entre os modos 1, 3 e 13 em um cenário de ressonância interna do tipo 2:1:1.

Tabela 8.3 – Influência modal percentual dos dois modos mais influentes determinada para as órbitas periódicas dos pontos a-c da curva de ressonância da casca esférica não abatida para o modelo com 108 gdl da Figura 8.11.

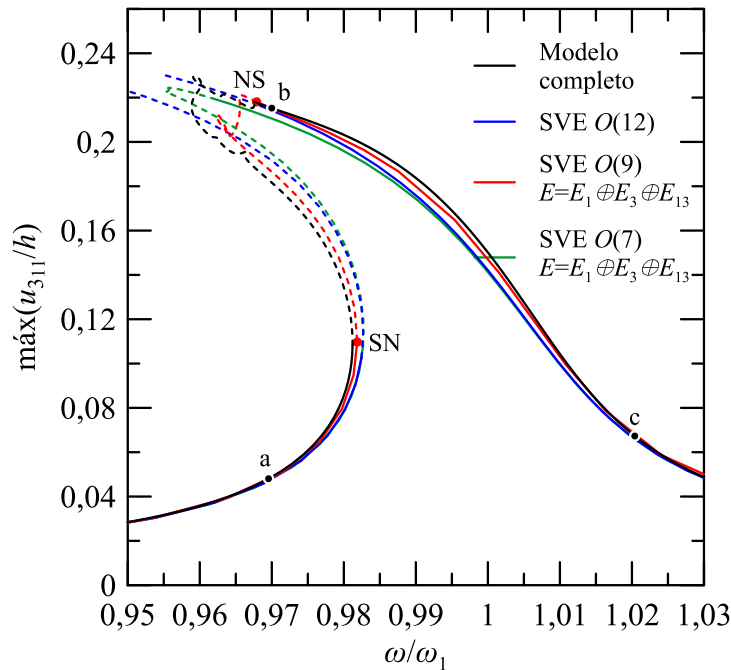
Ponto	1º modo			2º modo		
	Modo	Frequência dominante	Influência modal	Modo	Frequência dominante	Influência modal
a	Modo 1 (Fig. 7.8(a))	1ω	93,23%	Modo 3 (Fig. 7.8(b))	1ω	2,27%
b	Modo 1 (Fig. 7.8(a))	1ω	83,72%	Modo 3 (Fig. 7.8(b))	1ω	6,01%
c	Modo 1 (Fig. 7.8(a))	1ω	95,25%	Modo 3 (Fig. 7.8(b))	1ω	2,27%

8.2.3 Paraboloide hiperbólico

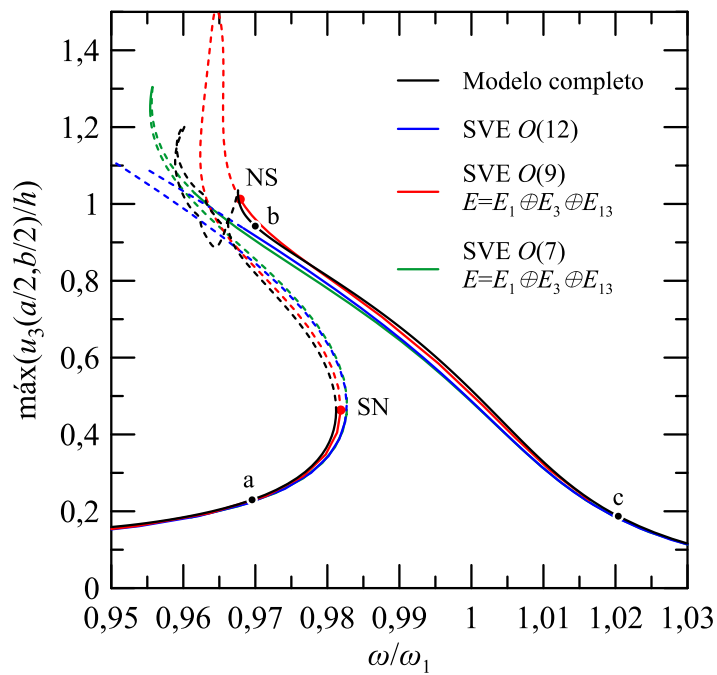
O terceiro exemplo apresenta um paraboloide hiperbólico, conforme ilustrado na Figura 8.6(c). Uma carga concentrada harmônica de magnitude máxima $\epsilon f = 200$ N é aplicada no centro da casca. A casca é simplesmente apoiada com bordas imóveis, conforme descrito na equação (8.10). As funções de forma utilizadas são dadas pela equação (8.11), as mesmas empregadas no exemplo anterior.

Novamente, foram utilizadas três expansões com 48 graus de liberdade ($m_k = n_k = 4$), 75 graus de liberdade ($m_k = n_k = 5$) e 108 graus de liberdade ($m_k = n_k = 6$). A frequência

Figura 8.11 – Resultados das curvas de ressonância do painel esférico não abatido obtidas pelo modelo completo com 108 gdl e pelos modelos de ordem reduzida via SVE para $\epsilon f = 200$ N. Em (a), amplitude máxima da coordenada generalizada u_{311} em função da frequência de excitação, e, em (b), amplitude máxima do campo de deslocamento u_3 no centro da casca em função da frequência de excitação.

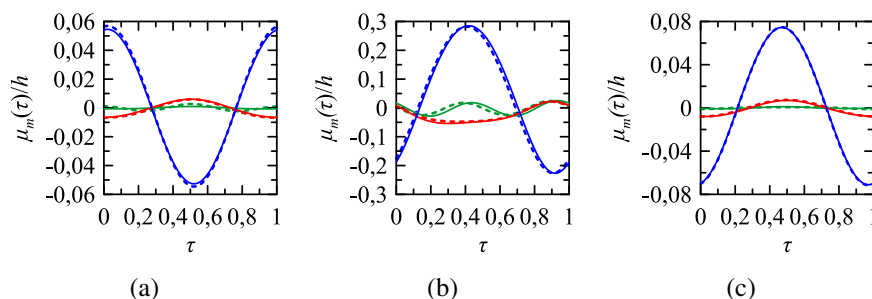


(a)



(b)

Figura 8.12 – Respostas no tempo em coordenadas modais para as órbitas periódicas dos pontos a-c da curva de ressonância do painel esférico não abatido. — modo 1; — modo 3; — modo 13. As linhas contínuas representam as respostas do modelo reduzido considerando uma SVE com $E = E_1 \oplus E_3 \oplus E_{13}$ e $O(9)$. As linhas tracejadas representam a resposta do modelo completo com 108 gdl.



natural fundamental da casca é $\omega_1 = 6.421,1 \times 2\pi$ rad/s. As curvas de ressonância para essas três expansões são mostradas na Figura 8.13(a), representando o valor máximo do campo de deslocamento u_3 no centro da casca em função da frequência de excitação. A Figura 8.13(b) compara os resultados do método do balanço harmônico com o método de força bruta, demonstrando mais uma vez a eficiência do método do balanço harmônico na representação de órbitas periódicas. O comportamento da casca é semelhante a um oscilador de Duffing simples. O valor máximo da amplitude diminui à medida que mais graus de liberdade são adicionados, mantendo um comportamento de endurecimento. Todavia, observa-se convergência da solução a partir de 75 gdl.

Figura 8.13 – Máximo valor do deslocamento u_3 no centro do paraboloide hiperbólico não abatido para uma carga de $\epsilon f = 200$ N. (a) Resultados para modelos com 48, 75 e 108 graus de liberdade. (b) Comparação entre os métodos do balanço harmônico e força bruta para o modelo com 75 graus de liberdade. SN: Bifurcações Sela-Nó.

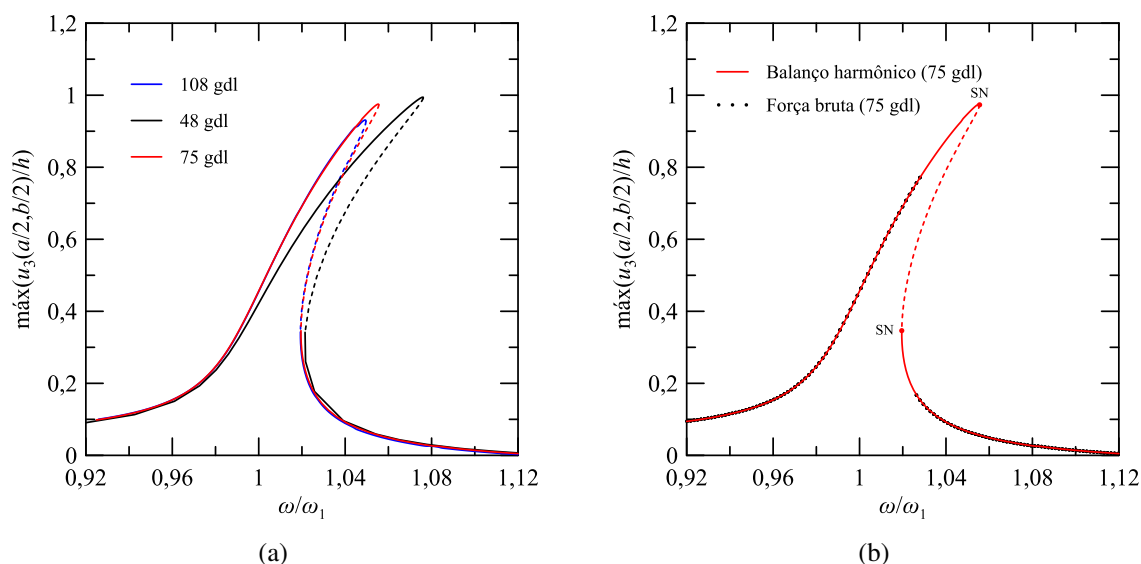
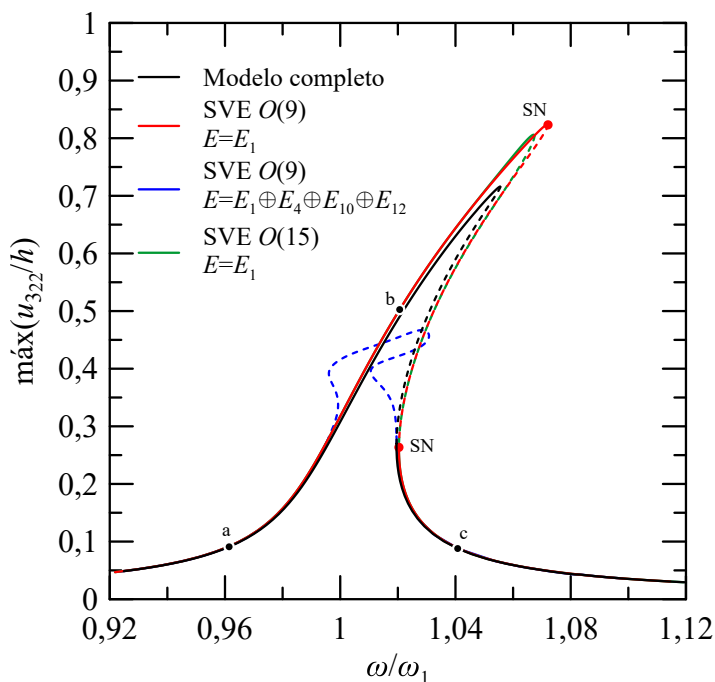
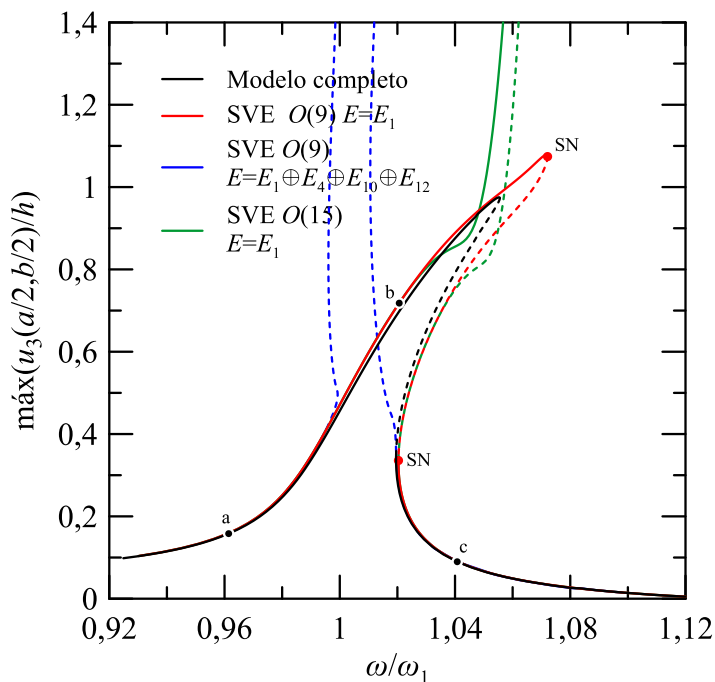


Figura 8.14 – Resultados das curvas de ressonância do paraboloide hiperbólico obtidas pelo modelo completo com 75 gdl e pelos modelos de ordem reduzida via SVE para $\epsilon f = 200$ N. Em (a), amplitude máxima da coordenada generalizada u_{322} em função da frequência de excitação; Em (b), amplitude máxima do campo de deslocamento u_3 no centro da casca em função da frequência de excitação.



(a)



(b)

Figura 8.15 – Respostas no tempo em coordenadas modais para as órbitas periódicas dos pontos a-c da curva de ressonância do paraboloide hiperbólico. — modo 1; — modo 4; — modo 10; — modo 12. As linhas contínuas representam as respostas do modelo reduzido considerando uma SVE com $E = E_1$ e $O(9)$. As linhas tracejadas representam a resposta do modelo completo com 75 gdl.

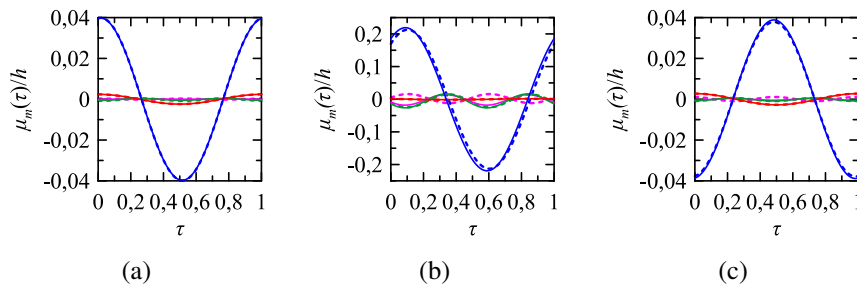


Tabela 8.4 – Influência modal percentual dos dois modos mais influentes determinada para as órbitas periódicas dos pontos a-c da curva de ressonância do paraboloide hiperbólico para o modelo com 75 gdl da Figura 8.14.

Ponto	1º modo			2º modo		
	Modo	Frequência dominante	Influência modal	Modo	Frequência dominante	Influência modal
a	Modo 1 (Fig. 7.11(a))	1ω	96,85%	Modo 4	1ω	0,89%
b	Modo 1 (Fig. 7.11(a))	1ω	91,06%	Modo 12 (Fig. 7.11(b))	2ω	4,32%
c	Modo 1 (Fig. 7.11(a))	1ω	96,65%	Modo 10	2ω	1,71%

As Figuras 8.14(a-b) exibem os resultados das curvas de ressonância para um paraboloide hiperbólico utilizando um modelo de ordem reduzida via SVE. Quando considerado apenas o primeiro modo como mestre, $E = E_1$, observa-se que o modelo reduzido captura com precisão a parte estável da resposta da coordenada generalizada u_{322} , que é a coordenada que mais influencia na resposta do sistema. Analisando apenas essa coordenada, o modelo de ordem $O(9)$ e $O(15)$ resultam em resultados muito próximos. Todavia, quando são analisados os deslocamentos no centro da casca, que sofre a influência de todas as coordenadas generalizadas, as resposta do modelo completo e do modelo reduzido $O(15)$ começam a divergir para amplitudes maiores que $0,9h$ no centro da casca. Neste sentido, o modelo de ordem $O(9)$ é aquele que melhor captura a resposta da casca. A adição de novos modos mestres não melhorou a qualidade da resposta, pelo contrário, acrescentando os modos mais influentes ($E = E_1 \oplus E_4 \oplus E_{10} \oplus E_{12}$), o modelo captura apenas a parte inicial da resposta. Neste caso, o aumento da complexidade do modelo não resultou em uma resposta mais próxima ao do modelo completo. É provável que

a influência dos termos quadráticos do carregamento $O(\epsilon^2)$ sejam significativos neste caso, não sendo possível a convergência da solução.

Novamente, alguns pontos da curva de ressonância (a-c) foram selecionados para avaliar as respostas no tempo em coordenadas modais, apresentadas nas Figuras 8.15(a-c). Além disso, as influências modais desses pontos foram determinadas e estão apresentadas na Tabela 8.4. Assim como na análise de vibração livre, há uma influência significativa do modo 12 na resposta da casca à medida que os deslocamentos aumentam, em um cenário de ressonância interna do tipo 2:1. A precisão dos resultados do modelo reduzido também pode ser observada pelas respostas no tempo em coordenadas modais, cujos resultados da SVE $E = E_1$ e $O(9)$ são muito próximos aos do modelo completo.

8.2.4 Conoide parabólico

A última casca estudada é um conoide parabólico, conforme ilustrado na Figura 8.6(d). A frequência natural fundamental da casca é $\omega_1 = 3.629,8 \times 2\pi$ rad/s. O conoide está submetido a uma carga harmônica de magnitude máxima $\epsilon f = 200$ N e possui bordas simplesmente apoiadas imóveis, cujas condições de contorno são dadas pelas equações (8.10). Ao contrário das outras cascas, esta apresenta simetria apenas ao longo do eixo $\xi^2 = b/2$, de forma que as funções de forma ϕ_{kij} foram escolhidas considerando vibrações simétricas ao longo desse eixo.

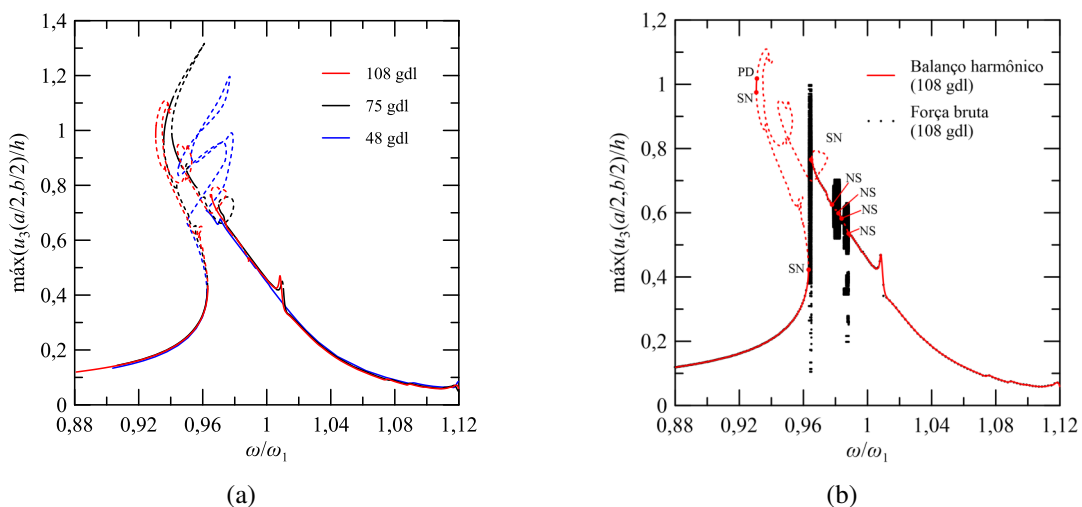
$$\begin{aligned}\phi_{1ij} &= \sin\left(\frac{i\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi\xi^2}{b}\right) \\ \phi_{2ij} &= \sin\left(\frac{i\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(\frac{2j\pi\xi^2}{b}\right) \\ \phi_{3ij} &= \sin\left(\frac{i\pi\xi^1}{a}\right) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi\xi^2}{b}\right)\end{aligned}\tag{8.12}$$

Três expansões do campo de deslocamentos foram analisadas visando obter convergência, com 48 graus de liberdade ($m_k = n_k = 4$), 75 graus de liberdade ($m_k = n_k = 5$) e 108 graus de liberdade ($m_k = n_k = 6$). As curvas de ressonância desses modelos estão apresentadas na Figura 8.16(a). A região estável da solução exibe similaridade em todas as expansões. De maneira geral, a curva de ressonância demonstra um comportamento de perda de rigidez; no entanto, ela se torna altamente complexa dentro da faixa instável que surge para deslocamentos superiores a $0,8h$ no centro da casca. A Figura 8.16(b) compara a curva de ressonância obtida

tanto pelo MBHA quanto pelo método de força bruta, comprovando mais uma vez a eficácia do método do balanço harmônico.

No modelo com 108 graus de liberdade, são observadas soluções aperiódicas nas faixas de frequência de $0,963 < \omega/\omega_1 < 0,965$, $0,978 < \omega/\omega_1 < 0,982$ e $0,983 < \omega/\omega_1 < 0,988$. Para analisar essas regiões, foi determinado o mapeamento de Poincaré examinando uma coleção de 10.000 seções por integração direta da equação de equilíbrio a partir de condições iniciais nulas. Especificamente, foram analisados os valores de frequência de $\omega/\omega_1 = 0,964$ (Figura 8.17(a)), $\omega/\omega_1 = 0,980$ (Figura 8.17(b)) e $\omega/\omega_1 = 0,985$ (Figura 8.17(c)). O espectro de Lyapunov também foi determinado para os três atratores, como ilustrado na Figura 8.17(d), mostrando um comportamento caótico para $\omega/\omega_1 = 0,964$ e um comportamento quase periódico para $\omega/\omega_1 = 0,980$ e $\omega/\omega_1 = 0,985$.

Figura 8.16 – Amplitude máxima do campo de deslocamento u_3 no centro do conoide parabólico em função da frequência de excitação, considerando uma carga de $\epsilon f = 200$ N. Em (a), os resultados para modelos com 48, 75 e 108 graus de liberdade. Em (b), uma comparação entre os resultados obtidos usando o método do equilíbrio harmônico e o método de força bruta para o modelo com 108 graus de liberdade. NS, Neimark-Sacker; SN, Ponto de Sela; PD, duplicação de período.



As Figuras 8.18(a–b) mostram o resultado das curvas de ressonância determinadas por meio do modelo de ordem reduzida via SVE. Quando apenas o primeiro modo utilizado no subespaço mestre, o modelo reduzido é capaz de reproduzir as vibrações do conoide para valores de amplitude de vibração no centro da casca menores que $0,25h$. Boa parte da curva de ressonância, em especial o trecho no intervalo de frequência entre $0,96 \leq \omega/\omega_1 \leq 1,02$, não é capturada pelo modelo reduzido. Ao adicionar o segundo modo no modelo, ou seja $E = E_1 \oplus E_2$, a curva de ressonância consegue capturar toda a parte instável. Os melhores resultados são obtidos para

Figura 8.17 – Atratores aperiódicos do conoide parabólico do modelo com 108 graus de liberdade para os valores de frequência de (a) $\omega/\omega_1 = 0,964$, (b) $\omega/\omega_1 = 0,980$ e (c) $\omega/\omega_1 = 0,985$. Em (d), o espectro de Lyapunov dos atratores mostrados em (a-c).

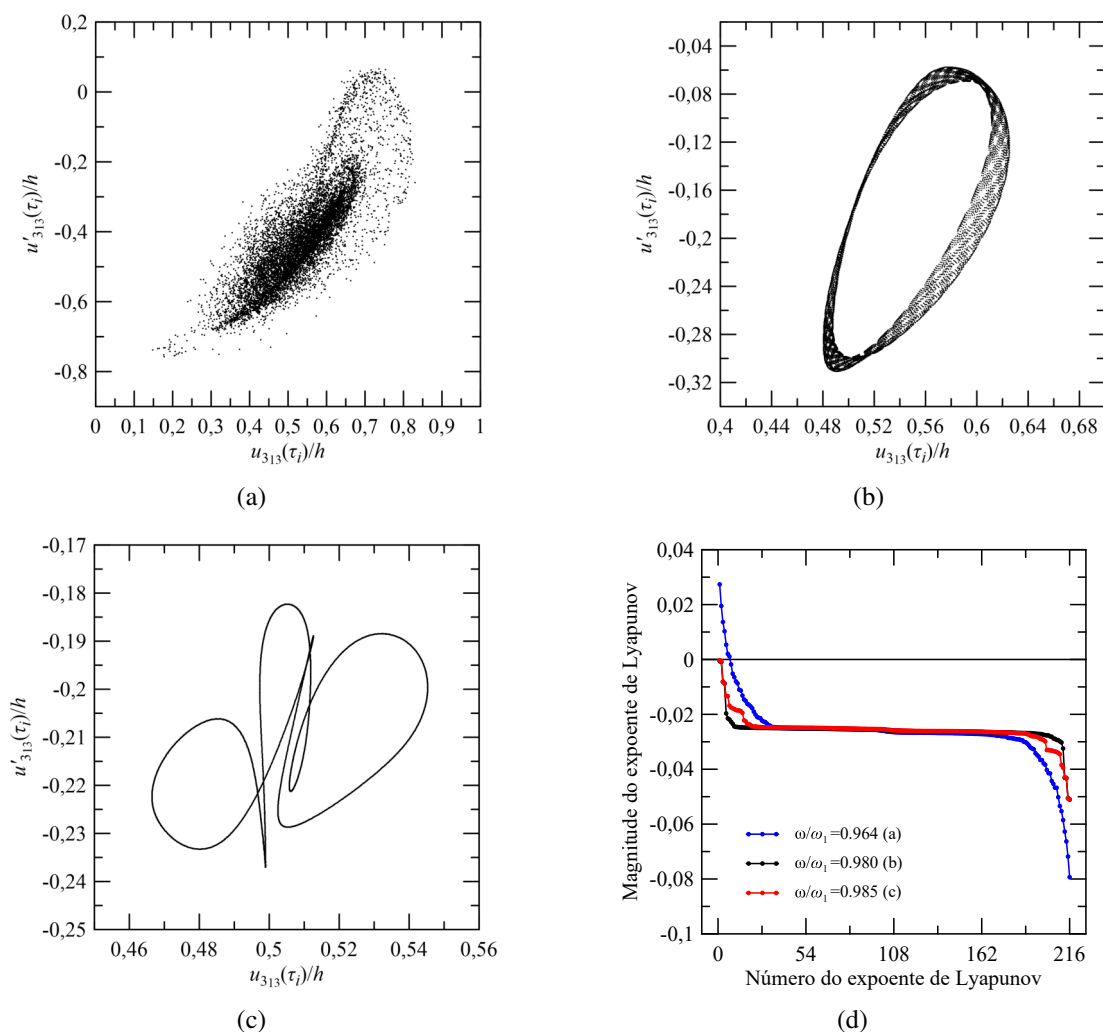
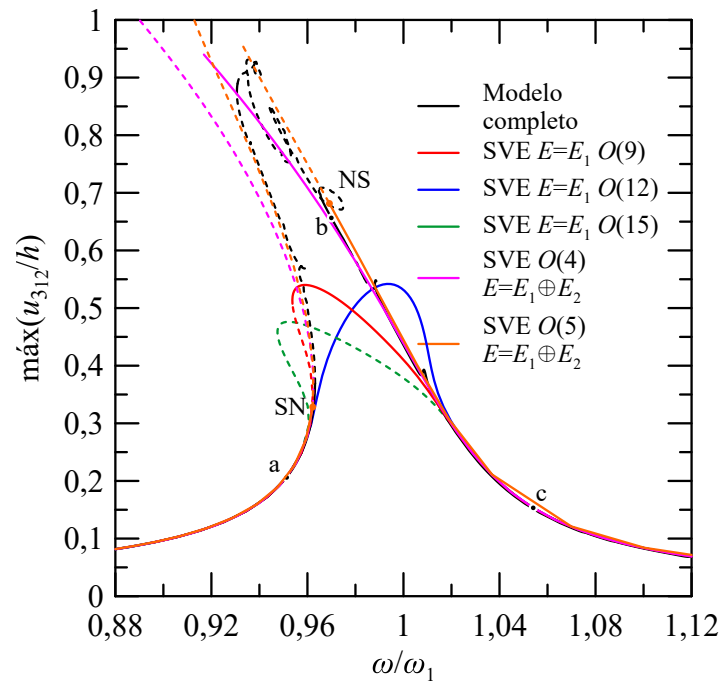


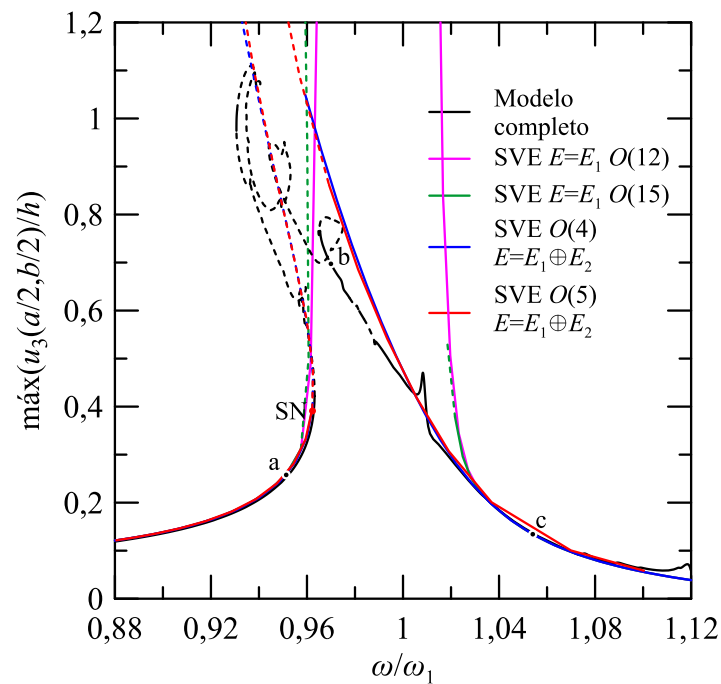
Tabela 8.5 – Influência modal percentual dos dois modos mais influentes determinada para as órbitas periódicas dos pontos a-c da curva de ressonância do conoide parabólico para o modelo com 108 gdl da Figura 8.18(a).

Ponto	1º modo			2º modo		
	Modo	Frequência dominante	Influência modal	Modo	Frequência dominante	Influência modal
a	Modo 1 (Fig. 7.14(a))	1ω	95,63%	Modo 2 (Fig. 7.14(b))	1ω	1,85%
b	Modo 1 (Fig. 7.14(a))	1ω	89,58%	Modo 4 (Fig. 7.14(c))	2ω	3,71%
c	Modo 1 (Fig. 7.14(a))	1ω	95,81%	Modo 6	2ω	2,27%

Figura 8.18 – Resultados das curvas de ressonância do conoide parabólico obtidas pelo modelo completo com 108 gdl e pelos modelos de ordem reduzida via SVE para $\epsilon f = 200$ N. Em (a), amplitude máxima da coordenada generalizada u_{312} em função da frequência de excitação, e, em (b), amplitude máxima do campo de deslocamento u_3 no centro da casca em função da frequência de excitação.

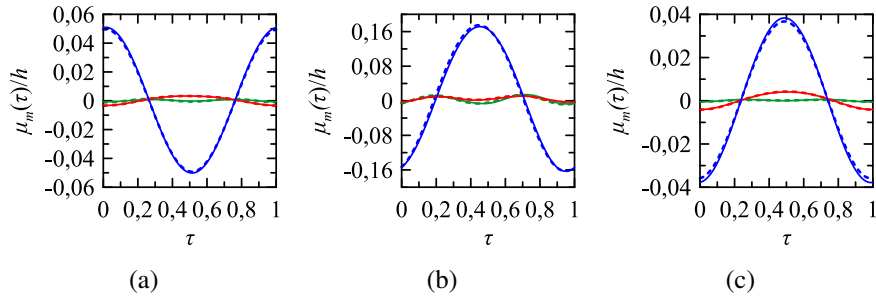


(a)



(b)

Figura 8.19 – Respostas no tempo em coordenadas modais para as orbitas periódicas dos pontos a-c da curva de ressonância do conoide parabólico. — modo 1; — modo 2; — modo 4. As linhas contínuas representam as respostas do modelo reduzido considerando uma SVE com $E = E_1 \oplus E_2$ e $O(5)$. As linhas tracejadas representam a resposta do modelo completo com 108 gdl.



a SVE $E = E_1 \oplus E_2$ e $O(5)$, que captura muito bem a parte estável da resposta da coordenada $u_{3,12}$, embora o deslocamento no centro da casca, que sofre a influência de todas as demais coordenadas, não seja tão bem representado pelo modelo reduzido.

O acoplamento entre os diferentes modos de vibração foi avaliado por meio das respostas no tempo em coordenadas modais de 3 pontos (a-c) da curva de ressonância, apresentadas nas Figuras 8.19(a-c). As influências modais dos dois modos mais influentes estão apresentadas na Tabela 8.5. O ponto b apresenta uma ressonância interna 2:1 significativa entre os modos 1 e 4. Nos demais pontos (a e c) a resposta é majoritariamente representada pelo primeiro modo, com influências menores dos modos 2 e 6. As respostas dos modos 1, 2 e 4 são bem representadas pelo modelo reduzido nesses três pontos.

CAPÍTULO 9

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

No presente trabalho foram analisadas cascas de dupla curvatura de diferentes níveis de abatimento por meio de soluções semianalíticas e de ordem reduzida. Os resultados obtidos mostram que:

- A literatura que lida com a análise de cascas via métodos semianalíticos se concentra em geometrias específicas devido às restrições das teorias ortogonais. A formulação tensorial é uma ferramenta versátil, capaz de lidar com cascas de diferentes geometrias e níveis de abatimento;
- A consideração da não ortogonalidade dos vetores da base da superfície média é importante mesmo quando a base é quase ortogonal. Neste sentido, as frequências naturais e modos de vibração lineares obtidos por meio da teoria de Koiter foram mais próximas dos resultados obtidos via MEF do que aqueles obtidos pela teoria de Marguerre;
- Observa-se que, mesmo em cascas abatidas em que os vetores da base são quase ortogonais, as teorias ortogonais não são capazes de reproduzir com precisão o comportamento mecânico das cascas quando comparadas às teorias tensoriais;
- A hipótese de Donnell e as aproximações típicas para cascas abatidas se mostraram eficazes em reduzir o número de termos dos campos de deformação, diminuindo o grau de acoplamento dos termos não lineares das equações de equilíbrio;
- A depender da geometria e das condições de contorno da casca, são necessários muitos graus de liberdade para convergência do método de Rayleigh-Ritz. Nesses casos, métodos de redução de ordem são necessários para tornar a análise computacionalmente viável, principalmente em regime não linear de grandes deslocamentos;

- A Decomposição Ortogonal Própria mostrou-se eficaz em reduzir a ordem do modelo da casca em análises estáticas não lineares. Apesar disso, para criar uma base ortogonal eficiente, a DOP necessita de um conjunto confiável de dados preliminares para montagem da matriz de amostragem;
- Os resultados das análises estáticas não lineares mostram que as cascas de dupla curvatura não abatidas são muito rígidas, mas podem sofrer instabilidade em regime de deslocamentos relativamente pequenos. Esse é o caso do painel esférico não abatido, que sofre uma mudança brusca de comportamento, perdendo rigidez rapidamente e sendo incapaz de resistir a novos carregamentos;
- As relações frequência-energia das cascas foram comparadas com resultados obtidos por meio do método dos elementos finitos usando o Abaqus, demonstrando boa concordância. Esses resultados podem servir como referência para trabalhos futuros de pesquisadores na área de cascas de dupla curvatura não abatidas;
- Cascas com curvatura gaussiana positiva, como o painel esférico e o conoide parabólico, apresentaram comportamento inicial com perda de rigidez, enquanto cascas com curvatura gaussiana negativa, como o hiperboloide parabólico, apresentaram comportamento inicial com ganho de rigidez;
- Para analisar ressonâncias internas, respostas no tempo de órbitas periódicas em coordenadas modais foram usadas para determinar a influência do modo de cada modo nas relações frequência-amplitude e frequência-energia, destacando que alguns modos podem ser internamente ressonantes sem ter uma razão inteira entre suas frequências naturais lineares;
- As *backbones* determinadas neste trabalho apresentaram bifurcações de vários tipos, principalmente nos ramos de ressonância interna. Em todos os casos, a partir de deslocamentos da ordem da espessura da casca, devido a uma bifurcação do tipo Neimark-Sacker, as vibrações passaram do regime de periódico para aperiódicas, sem retornar novamente para o regime periódico;
- Resultados inéditos da análise de vibração forçada não linear de cascas de dupla curvatura não abatidas foram obtidos e podem servir como *benchmark* para pesquisadores da área, além de caracterizar importantes fenômenos não lineares presentes nessas estruturas;

- As curvas de ressonâncias mostram que as vibrações das cascas de dupla curvatura possuem características complexas. Para valores de deslocamentos da ordem da espessura da casca, mais de uma solução estável coexistem, indicando que, nesses casos, a estrutura pode vibrar de maneiras distintas a depender das condições iniciais. Além disso, o conoide parabólico apresenta comportamento quase periódico e caótico para valores de frequência específicos, mesmo para amplitudes de deslocamento da ordem de grandeza da espessura da casca.
- As técnicas de redução de ordem utilizando o conceito de Subvariedades Espectrais são relativamente novas e possuem um grande potencial para aplicação na análise de sistemas contínuos. Essas técnicas se mostraram eficazes na determinação das curvas de ressonância de cascas abatidas e não abatidas, especialmente nos trechos iniciais próximos aos pontos fixos. Mais estudos são necessários para entender os limites de carga e deslocamento dessa abordagem, especialmente no contexto da análise de cascas não abatidas de dupla curvatura.
- Os critérios de escolha do subespaço mestre devem ser melhor estudados já que os modos inseridos têm grande influência na resposta do sistema. A qualidade da solução está diretamente ligada à inclusão dos modos mais influente na análise de vibração livre não linear. Nesses casos, não é possível estabelecer um critério para a inclusão ou exclusão de modos no subespaço E que dependa apenas dos valores das frequências naturais. Deve-se, portanto, considerar o Modo Normal Não Linear;
- A aplicação da técnica de Subvariedades Espectrais na análise de estruturas requer uma avaliação criteriosa. Embora essa técnica tenha demonstrado eficácia, os limites de carga e a sensibilidade à escolha de um subespaço mestre apropriado podem torná-la inviável em diversas análises. Nesse contexto, a Decomposição Ortogonal de Própria tem sido extensivamente estudada na literatura, produzindo resultados tão robustos quanto os dados disponíveis para a construção da matriz de amostragem.

Os métodos utilizados neste trabalho podem ser aplicados futuramente em muitas pesquisas na área de vibrações em cascas e sistemas contínuos. Além disso, os métodos podem ser aprimorados para análises mais complexas. Portanto, sugere-se que os seguintes pontos sejam estudados em trabalhos futuros:

- Emprego da formulação tensorial para análise de cascas de diferentes geometrias;
- Adaptar a formulação tensorial para permitir a variação de espessura quando a casca se deforma;
- Análise de cascas submetidas a cargas seguidoras como pressão externa, excitações de base, interação com fluido ou apoiadas sobre base elástica;
- Incorporação de não linearidades do material e do amortecimento no modelo da casca;
- Expansão do método do balanço harmônico e da técnica das Subvariedades Espectrais para determinação de soluções quase periódicas;
- Avaliação da influência da curvatura na análise das cascas de dupla curvatura;
- Determinação das soluções quase periódicas dos Modos Normais Não Lineares;
- Avaliação das imperfeições geométricas na resposta não linear de cascas de dupla curvatura;
- Estudar critérios objetivos para inclusão e exclusão de modos no subespaço espectral mestre nos modelos de ordem reduzida via Subvariedades Espectrais;
- Criação de um critério baseado na energia para avaliação das ressonâncias internas e do acoplamento entre os modos de vibração;
- Criação de um critério objetivo para estabelecer o limite de carga para que a Subvariedade Espectral produza bons resultados;
- Estudar outras técnicas para solução da equação de invariância e consequente determinação das variedades invariantes.

REFERÊNCIAS

- ALIJANI, F.; AMABILI, M. Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Elsevier, v. 58, p. 233–257, 2014. ISSN 0020-7462. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2013.09.012](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.09.012).
- ALLGOWER, E. L.; GEORG, K. **Numerical continuation methods: an introduction**. Berlin: Springer, 2012. v. 13. ISBN 978-3-642-61257-2. DOI: [10.1007/978-3-642-61257-2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-61257-2).
- AMABILI, M. A comparison of shell theories for large-amplitude vibrations of circular cylindrical shells: Lagrangian approach. **Journal of Sound and Vibration**, Academic Press, v. 264, n. 5, p. 1091–1125, jul. 2003. ISSN 0022460X. DOI: [10.1016/S0022-460X\(02\)01385-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01385-8).
- _____. Do we need to satisfy natural boundary conditions in energy approach to nonlinear vibrations of rectangular plates? **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 189, p. 110119, 2023. ISSN 0888-3270. DOI: [10.1016/j.ymssp.2023.110119](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2023.110119).
- _____. Non-linear vibrations of doubly curved shallow shells. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Elsevier, v. 40, n. 5, p. 683–710, jun. 2005. ISSN 00207462. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2004.08.007](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2004.08.007).
- _____. **Nonlinear vibrations and stability of shells and plates**. New York: Cambridge University Press, 2008. ISBN 978-0-511-37749-5. DOI: [10.1017/CBO9780511619694](https://doi.org/10.1017/CBO9780511619694).
- AMABILI, M.; BALASUBRAMANIAN, P. Nonlinear vibrations of truncated conical shells considering multiple internal resonances. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 100, n. 1, p. 77–93, mar. 2020. ISSN 1573269X. DOI: [10.1007/s11071-020-05507-8](https://doi.org/10.1007/s11071-020-05507-8).
- AMABILI, M.; PAÏDOUSSIS, M. P. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction. **Applied Mechanics Reviews**, ASME, v. 56, n. 4, p. 349–356, 2003. ISSN 00036900. DOI: [10.1115/1.1565084](https://doi.org/10.1115/1.1565084).

- AMABILI, M.; SARKAR, A.; PAÏDOUSSIS, M. P. Reduced-order models for nonlinear vibrations of cylindrical shells via the proper orthogonal decomposition method. **Journal of Fluids and Structures**, Elsevier, v. 18, n. 2, p. 227–250, 2003. ISSN 08899746. DOI: [10.1016/j.jfluidstructs.2003.06.002](https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2003.06.002).
- ARBIND, A.; REDDY, J. N.; ARUN, R. A general higher-order shell theory for compressible isotropic hyperelastic materials using orthonormal moving frame. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley, v. 122, n. 1, p. 235–269, 2021. ISSN 10970207. DOI: [10.1002/nme.6536](https://doi.org/10.1002/nme.6536).
- ARCINIEGA, R. A.; REDDY, J. N. Tensor-based finite element formulation for geometrically nonlinear analysis of shell structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 196, n. 4-6, p. 1048–1073, 2007. ISSN 00457825. DOI: [10.1016/j.cma.2006.08.014](https://doi.org/10.1016/j.cma.2006.08.014).
- AXELRAD, E. L. **Theory of flexible shells**. Amsterdam: Elsevier, 1987. v. 28, p. 385. (North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics). ISBN 0444879544.
- BADER, B. W.; KOLDA, T. G. Efficient MATLAB Computations with Sparse and Factored Tensors. **SIAM Journal on Scientific Computing**, SIAM, v. 30, n. 1, p. 205–231, 2008. DOI: [10.1137/060676489](https://doi.org/10.1137/060676489).
- BERDICHEVSKY, V. L. Nonlinear theory of hard-skin plates and shells. **International Journal of Engineering Science**, Elsevier, v. 48, n. 3, p. 357–369, 2010. ISSN 00207225. DOI: [10.1016/j.ijengsci.2009.09.003](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2009.09.003).
- BORISENKO, A. I.; TARAPOV, I. E. **Vector and tensor analysis with applications**. Edição: Richard A. Silverman. New York: Denver Publications, 1968.
- BOWER, A. F. **Applied Mechanics of Solids**. 1. ed. Boca Raton: CRC Press, 2009. P. 1–795. ISBN 9781439802489. DOI: [10.1201/9781439802489](https://doi.org/10.1201/9781439802489).
- BREUNUNG, T.; HALLER, G. Explicit backbone curves from spectral submanifolds of forced-damped nonlinear mechanical systems. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society Publishing, v. 474, n. 2213, p. 20180083, 2018. DOI: [10.1098/rspa.2018.0083](https://doi.org/10.1098/rspa.2018.0083).
- BUDIANSKY, B.; SANDERS, J. L. **On the “Best” first-order linear shell theory**. Cambridge, set. 1962. Division of Engineering and Applied Physics, Harvard University (Relatório técnico n. 14).

CIARLET, P. G. **An introduction to differential geometry with applications to elasticity.**

Dordrecht: Springer, 2005. P. 1–209. ISBN 1402042477. DOI:

[10.1007/1-4020-4248-5](https://doi.org/10.1007/1-4020-4248-5).

DANKOWICZ, H.; SCHILDER, F. **Recipes for continuation.** Philadelphia, PA: SIAM –

Society for Industrial e Applied Mathematics, 2013. ISBN 978-1-61197-256-6. DOI:

[10.1137/1.9781611972573](https://doi.org/10.1137/1.9781611972573).

DAS, A. K.; BANDYOPADHYAY, J. N. Theoretical and experimental studies on conoidal shells. **Computers and Structures**, Elsevier, v. 49, n. 3, p. 531–536, nov. 1993. ISSN

00457949. DOI: [10.1016/0045-7949\(93\)90054-H](https://doi.org/10.1016/0045-7949(93)90054-H).

DE LA LLAVE, R.; KOGELBAUER, F. Global Persistence of Lyapunov Subcenter Manifolds as Spectral Submanifolds under Dissipative Perturbations. **Journal on Applied Dynamical**

Systems, SIAM, v. 18, n. 4, p. 2099–2142, 2019. DOI: [10.1137/18M1210344](https://doi.org/10.1137/18M1210344).

DEL PRADO, Z. J. G. N.; ARGENTA, A. L. D. P.; SILVA, F. M. A.; GONÇALVES, P. B. The effect of material and geometry on the non-linear vibrations of orthotropic circular cylindrical shells. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Elsevier, v. 66, p. 75–86, 2014.

ISSN 0020-7462. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2014.03.017](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.03.017).

DEL PRADO, Z. J. G. N.; GONÇALVES, P. B.; PAÏDOUSSIS, M. P. Non-linear vibrations and instabilities of orthotropic cylindrical shells with internal flowing fluid. **International**

Journal of Mechanical Sciences, Elsevier, v. 52, n. 11, p. 1437–1457, 2010. ISSN

0020-7403. DOI: [10.1016/j.ijmecsci.2010.03.016](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2010.03.016).

_____. Nonlinear vibrations and imperfection sensitivity of a cylindrical shell containing axial fluid flow. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 327, n. 1, p. 211–230, 2009.

ISSN 0022-460X. DOI: [10.1016/j.jsv.2009.06.016](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.06.016).

DHOOGHE, A.; GOVAERTS, W.; KUZNETSOV, Y. A. MATCONT: A MATLAB Package for Numerical Bifurcation Analysis of ODEs. **ACM Transactions on Mathematical Software**,

Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 29, n. 2, p. 141–164, jun.

2003. ISSN 0098-3500. DOI: [10.1145/779359.779362](https://doi.org/10.1145/779359.779362).

DOEDEL, E. J.; CHAMPNEYS, A. R.; DERCOLE, F.; FAIRGRIEVE, T. F.;

KUZNETSOV, Y. A.; OLDEMAN, B.; PAFFENROTH, R. C.; SANDSTEDE, B.;

WANG, X. J.; ZHANG, C. H. **AUTO-07P: Continuation and bifurcation software for**

- ordinary differential equations**. Montreal, jan. 2012. Concordia University (Relatório Técnico).
- DONNELL, L. H. **Stability of thin-walled tubes under torsion**. Washington, D.C., 1933. National Advisory Committee for Aeronautics (Relatório Técnico n. 479).
- DORMAND, J. R.; PRINCE, P. J. A family of embedded Runge-Kutta formulae. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Elsevier, v. 6, n. 1, p. 19–26, 1980. DOI: [10.1016/0771-050X\(80\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0771-050X(80)90013-3).
- DUVIGNEAU, F.; KOCH, S.; ORSZULIK, R.; WOSCHKE, E.; GABBERT, U. About the vibration modes of square plate-like structures. **Technische Mechanik**, v. 36, n. 3, p. 180–189, 2016. ISSN 02323869.
- EISENBACH, P.; GROHMANN, M. Structural Implementation of Slender Concrete Shells with Prefabricated Elements. **Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures**, v. 58, p. 51–64, mar. 2017. DOI: [10.20898/j.iass.2017.191.842](https://doi.org/10.20898/j.iass.2017.191.842).
- FADAEI, M.; ATASHIPOUR, S. R.; HOSSEINI-HASHEMI, S. Free vibration analysis of Lévy-type functionally graded spherical shell panel using a new exact closed-form solution. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elsevier, v. 77, p. 227–238, 2013. ISSN 00207403. DOI: [10.1016/j.ijmecsci.2013.10.008](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.10.008).
- FLÜGGE, W. **Tensor Analysis and Continuum Mechanics**. Berlin: Springer, 1972. ISBN 978-3-642-88382-8. DOI: [10.1007/978-3-642-88382-8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-88382-8).
- GÉRADIN, M.; RIXEN, D. J. **Mechanical vibrations: theory and application to structural dynamics**. 3. ed. West Sussex: John Wiley & Sons, 2014. ISBN 978-1-118-90020-8.
- GHOSH, B.; BANDYOPADHYAY, J. N. Approximate bending analysis of conoidal shells using the galerkin method. **Computers and Structures**, Elsevier, v. 36, n. 5, p. 801–805, jan. 1990. ISSN 00457949. DOI: [10.1016/0045-7949\(90\)90150-Z](https://doi.org/10.1016/0045-7949(90)90150-Z).
- GOL'DENVEIZER, A. L. Qualitative investigation of the state of stress of a thin shell. **Prikladnaia Matematika i Mekhanika**, v. 6, n. 11, 1945.
- _____. **Theory of Elastic Thin Shells: Solid and Structural Mechanics**. Oxford, London: Pergamon Press, 1961. v. 2. (Aeronautics and Astronautics). ISBN 978-0-08-009561-5. DOI: [10.1016/C2013-0-01676-3](https://doi.org/10.1016/C2013-0-01676-3).

GONÇALVES, P. B.; SILVA, F. M. A.; DEL PRADO, Z. J. G. N. Global stability analysis of parametrically excited cylindrical shells through the evolution of basin boundaries. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 50, p. 121–145, 2007. DOI: [10.1007/s11071-006-9147-4](https://doi.org/10.1007/s11071-006-9147-4).

_____. Low-dimensional models for the nonlinear vibration analysis of cylindrical shells based on a perturbation procedure and proper orthogonal decomposition. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 315, n. 3, p. 641–663, 2008. ISSN 0022460X. DOI: [10.1016/j.jsv.2008.01.063](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.01.063).

_____. Reduced Order Models for the Nonlinear Dynamic Analysis of Shells. **Procedia IUTAM**, v. 19, p. 118–125, 2016. ISSN 2210-9838. DOI: [10.1016/j.piutam.2016.03.016](https://doi.org/10.1016/j.piutam.2016.03.016).

_____. Transient and steady state stability of cylindrical shells under harmonic axial loads. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Elsevier, v. 42, n. 1, p. 58–70, 2007. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2006.12.011](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2006.12.011).

GONG, Q.; LI, H.; CHEN, H.; TENG, Y.; WANG, N. Application of Ritz method for vibration analysis of stepped functionally graded spherical torus shell with general boundary conditions. **Composite Structures**, Elsevier Ltd, v. 243, jul. 2020. ISSN 02638223. DOI: [10.1016/j.compstruct.2020.112215](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112215).

GROH, R. M. J.; AVITABILE, D.; PIRRERA, A. Generalised path-following for well-behaved nonlinear structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 331, p. 394–426, 2018. ISSN 0045-7825. DOI: [10.1016/j.cma.2017.12.001](https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.12.001).

GROLET, A.; THOUVEREZ, F. On a new harmonic selection technique for harmonic balance method. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 30, p. 43–60, 2012. ISSN 0888-3270. DOI: [10.1016/j.ymssp.2012.01.024](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2012.01.024).

HALLER, G.; PONSIOEN, S. Nonlinear normal modes and spectral submanifolds: existence, uniqueness and use in model reduction. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 86, n. 3, p. 1493–1534, 2016. ISSN 1573269X. DOI: [10.1007/s11071-016-2974-z](https://doi.org/10.1007/s11071-016-2974-z).

HARO, A.; CANADELL, M.; FIGUERAS, J. L.; LUQUE, A.; MONDELO, J. M. **The parameterization method for invariant manifolds: From Rigorous Results to Effective Computations**. [S.l.]: Springer, 2016. v. 195. (Applied mathematical sciences). DOI: [10.1007/978-3-319-29662-3](https://doi.org/10.1007/978-3-319-29662-3).

- IRSCHIK, H.; SCHLACHER, K. **Advanced dynamics and control of structures and machines**. Vienna: Springer, 2004. ISBN 978-3-7091-2774-2. DOI: [10.1007/978-3-7091-2774-2](https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2774-2).
- JAIN, S.; HALLER, G. How to compute invariant manifolds and their reduced dynamics in high-dimensional finite element models. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 107, n. 2, p. 1417–1450, 2022. ISSN 1573269X. DOI: [10.1007/s11071-021-06957-4](https://doi.org/10.1007/s11071-021-06957-4).
- KERSCHEN, G.; PEETERS, M.; GOLINVAL, J. C.; VAKAKIS, A. F. Nonlinear normal modes, Part I: A useful framework for the structural dynamicist. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 23, n. 1, p. 170–194, 2009. ISSN 08883270. DOI: [10.1016/j.ymssp.2008.04.002](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.04.002).
- KERSCHEN, G. Definition and Fundamental Properties of Nonlinear Normal Modes. *In: Modal Analysis of Nonlinear Mechanical Systems*. Edição: KERSCHEN G. Vienna: Springer, 2014. v. 555, p. 1–46. ISBN 978-3-7091-1791-0. DOI: [10.1007/978-3-7091-1791-0_1](https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1791-0_1).
- KING, M. E.; VAKAKIS, A. F. An Energy-Based Approach to Computing Resonant Nonlinear Normal Modes. **Journal of Applied Mechanics**, ASME, v. 63, n. 3, p. 810–819, set. 1996. ISSN 0021-8936. DOI: [10.1115/1.2823367](https://doi.org/10.1115/1.2823367).
- KOBAYASHI, Y.; LEISSA, A. W. Large amplitude free vibration of thick shallow shells supported by shear diaphragms. **International Journal of Non-linear Mechanics**, Elsevier, v. 30, p. 57–66, 1995. DOI: [10.1016/0020-7462\(94\)00030-E](https://doi.org/10.1016/0020-7462(94)00030-E).
- KOITER, W. T. A consistent first approximation in the general theory of thin elastoc shells: Part 1, foundations and linear theory. *In: IUTAM SYMPOSIUM ON THE THEORY OF THIN ELASTIC SHELLS*, 1959, Delft. **Proceedings of the [...]** Delft: North-Holland, 1960. P. 12–33.
- KRACK, M.; GROSS, J. **Harmonic balance for nonlinear vibration problems**. Cham, Switzerland: Springer, 2019. v. 1. ISBN 978-3-030-14023-6. DOI: [10.1007/978-3-030-14023-6](https://doi.org/10.1007/978-3-030-14023-6).
- KURPA, L.; PILGUN, G.; AMABILI, M. Nonlinear vibrations of shallow shells with complex boundary: R-functions method and experiments. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 306, n. 3, p. 580–600, 2007. ISSN 0022-460X. DOI: [10.1016/j.jsv.2007.05.045](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.05.045).

LEISSA, A. W. **Vibration of Shells**. Washington, D. C.: Scientific, Technical Information Office, National Aeronautics e Space Administration, 1973. v. 288. (NASA SP).

LEISSA, A. W.; KADI, A. S. Curvature effects on shallow shell vibrations. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 16, n. 2, p. 173–187, 1971. ISSN 10958568. DOI: [10.1016/0022-460X\(71\)90482-2](https://doi.org/10.1016/0022-460X(71)90482-2).

LI, H.; PANG, F.; WANG, X.; DU, Y.; CHEN, H. Free vibration analysis for composite laminated doubly-curved shells of revolution by a semi analytical method. **Composite Structures**, Elsevier, v. 201, p. 86–111, out. 2018. ISSN 02638223. DOI: [10.1016/j.compstruct.2018.05.143](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.05.143).

LI, M.; HALLER, G. Nonlinear analysis of forced mechanical systems with internal resonance using spectral submanifolds, Part II: Bifurcation and quasi-periodic response. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 110, p. 1045–1080, 2022. DOI: [10.1007/s11071-022-07476-6](https://doi.org/10.1007/s11071-022-07476-6).

LI, M.; JAIN, S.; HALLER, G. Nonlinear analysis of forced mechanical systems with internal resonance using spectral submanifolds, Part I: Periodic response and forced response curve. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 110, p. 1005–1043, 2022. DOI: [10.1007/s11071-022-07714-x](https://doi.org/10.1007/s11071-022-07714-x).

LOVE, A. E. H. XVI. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. (A.)**, Royal Society, v. 179, p. 491–546, dez. 1888. ISSN 0264-3820. DOI: [10.1098/rsta.1888.0016](https://doi.org/10.1098/rsta.1888.0016).

LUR'E, A. I. General theory of thin elastic shells. **Prikladnaia Matematika i Mekhanika**, v. 4, n. 2, p. 7–34, 1940.

MARTÍNEZ VALLE, J. M.; ALBANESI, A.; FACHINOTTI, V. An efficient general curvilinear coordinates finite element method for the linear dynamic study of thickness-independent shells. **Latin American Journal of Solids and Structures**, Brazilian Association of Computational Mechanics, v. 16, n. 5, mai. 2019. ISSN 16797825. DOI: [10.1590/1679-78255353](https://doi.org/10.1590/1679-78255353).

MORAIS, J. L.; SILVA, F. M. A. Influence of modal coupling and geometrical imperfections on the nonlinear buckling of cylindrical panels under static axial load. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 183, p. 816–829, 2019. ISSN 0141-0296. DOI: [10.1016/j.engstruct.2018.12.032](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.12.032).

MOUSSAOUI, F.; BENAMAR, R. Non-linear vibrations of shell-type structures: A review with bibliography. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 255, n. 1, p. 161–184, 2003. ISSN 0022460X. DOI: [10.1006/jsvi.2001.4146](https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.4146).

NA, T. Y. Iterative Methods – The Shooting Methods. In: NA, T. Y. **Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems**. 1. ed. New York: Academic Press, 1979. cap. 5, p. 70–92. ISBN 9780080956534. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0076-5392\(08\)61685-9](https://doi.org/10.1016/S0076-5392(08)61685-9).

NAYFEH, A. H.; BALACHANDRAN, B. **Applied nonlinear dynamics: analytical, computational, and experimental methods**. Weinheim: John Wiley & Sons, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1002/9783527617548>.

NIORDSON, F. I. **Shell Theory**. 1. ed. Amsterdam: North-Holland, 1985. v. 29, p. 408. (Studies in Applied Mechanics). ISBN 0-444-87640-5.

NOVOZHILOV, V. V. **Thin Shell Theory**. Rochester, NY, USA: Graylock Press, 1953.

OPOKA, S.; PIETRASZKIEWICZ, W. Intrinsic equations for non-linear deformation and stability of thin elastic shells. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 41, n. 11-12, p. 3275–3292, 2004. ISSN 00207683. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2004.01.003](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.01.003).

_____. On modified displacement version of the non-linear theory of thin shells. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 46, n. 17, p. 3103–3110, 2009. ISSN 00207683. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2009.03.029](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.03.029).

OSCAR NIEMEYER – A VIDA É UM SOPRO. Diretor: Fabiano Maciel. Produtor: Sacha. Europa Filmes, Brasil, 2007.

PELLICANO, F.; AMABILI, M.; VAKAKIS, A. F. Nonlinear vibrations and multiple resonances of fluid-filled, circular shells, part 2: perturbation analysis. **Journal of Vibration and Acoustics**, ASME, v. 122, n. 4, p. 355–364, 2000. DOI: [10.1115/1.1288591](https://doi.org/10.1115/1.1288591).

PIETRASZKIEWICZ, W. On exact expressions of the bending tensor in the nonlinear theory of thin shell. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 36, n. 4, p. 1821–1824, 2012. ISSN 0307904X. DOI: [10.1016/j.apm.2011.08.038](https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.08.038).

PINHO, F. A. X. C.; AMABILI, M.; DEL PRADO, Z. J. G. N.; SILVA, F. M. A. Nonlinear free vibration analysis of doubly curved shells. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 111, p. 21535–21555, 2023. DOI: [10.1007/s11071-023-08963-0](https://doi.org/10.1007/s11071-023-08963-0).

PINHO, F. A. X. C.; DEL PRADO, Z. J. G. N.; SILVA, F. M. A. Nonlinear static analysis of thin shallow and non-shallow shells using tensor formulation. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 253, p. 113674, 2022. ISSN 0141-0296. DOI: [10.1016/j.engstruct.2021.113674](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113674).

_____. On the free vibration problem of thin shallow and non-shallow shells using tensor formulation. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 244, p. 112807, 2021. ISSN 0141-0296. DOI: [10.1016/j.engstruct.2021.112807](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112807).

PONSIOEN, S.; JAIN, S.; HALLER, G. Model reduction to spectral submanifolds and forced-response calculation in high-dimensional mechanical systems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 488, p. 115640, 2020. ISSN 0022-460X. DOI: [10.1016/j.jsv.2020.115640](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115640).

PONSIOEN, S.; PEDERGNANA, T.; HALLER, G. Analytic prediction of isolated forced response curves from spectral submanifolds. **Nonlinear dynamics**, v. 98, p. 2755–273, 2019. ISSN 1573-269X. DOI: [10.1007/s11071-019-05023-4](https://doi.org/10.1007/s11071-019-05023-4).

_____. Automated computation of autonomous spectral submanifolds for nonlinear modal analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 420, p. 269–295, 2018. ISSN 0022-460X. DOI: [10.1016/j.jsv.2018.01.048](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.01.048).

PRADYUMNA, S.; BANDYOPADHYAY, J. N. Dynamic instability behavior of laminated hyper and conoid shells using a higher-order shear deformation theory. **Thin-Walled Structures**, Elsevier, v. 49, n. 1, p. 77–84, 2011. ISSN 02638231. DOI: [10.1016/j.tws.2010.08.008](https://doi.org/10.1016/j.tws.2010.08.008).

QIN, Z.; CHU, F.; ZU, J. Free vibrations of cylindrical shells with arbitrary boundary conditions: A comparison study. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elsevier, v. 133, p. 91–99, nov. 2017. ISSN 00207403. DOI: [10.1016/j.ijmecsci.2017.08.012](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.08.012).

RADENKOVIĆ, G.; BORKOVIĆ, A.; MARUSSIG, B. Nonlinear static isogeometric analysis of arbitrarily curved Kirchhoff-Love shells. **International Journal of Mechanical Sciences**,

Elsevier, v. 192, p. 106143, 2021. ISSN 0020-7403. DOI:

[10.1016/j.ijmecsci.2020.106143](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.106143).

RAFETSEDER, K.; ZULEHNER, W. A new mixed approach to Kirchhoff–Love shells.

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, v. 346, p. 440–455, 2019. ISSN 00457825. DOI: [10.1016/j.cma.2018.11.033](https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.11.033).

REDDY, J. N. **Theory and analysis of elastic plates and shells**. Boca Raton: CRC Press, 2006.

RODRIGUES, L.; GONÇALVES, P. B.; SILVA, F. M. A. Internal resonances in a transversally excited imperfect circular cylindrical shell. **Procedia Engineering**, Elsevier, v. 199, p. 838–843, 2017. ISSN 1877-7058. DOI: [10.1016/j.proeng.2017.09.010](https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.09.010).

RODRIGUES, L.; SILVA, F. M. A.; GONÇALVES, P. B. Influence of initial geometric imperfections on the 1:1:1:1 internal resonances and nonlinear vibrations of thin-walled cylindrical shells. **Thin-Walled Structures**, Elsevier, v. 151, p. 106730, 2020. ISSN 0263-8231. DOI: [10.1016/j.tws.2020.106730](https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.106730).

RODRIGUES, L.; SILVA, F. M. A.; GONÇALVES, P. B.; DEL PRADO, Z. J. G. N. Effects of modal coupling on the dynamics of parametrically and directly excited cylindrical shells. **Thin-Walled Structures**, Elsevier, v. 81, p. 210–224, 2014. DOI: [10.1016/j.tws.2013.08.004](https://doi.org/10.1016/j.tws.2013.08.004).

ROSENBERG, R. M. The Normal Modes of Nonlinear n-Degree-of-Freedom Systems. **Journal of Applied Mechanics**, ASME, v. 29, n. 1, p. 7–14, mar. 1962. ISSN 0021-8936. DOI: [10.1115/1.3636501](https://doi.org/10.1115/1.3636501).

SANDERS, J. L. **An Improved First-Approximation Theory for Thin Shells**. Washington, D.C., 1959. P. 1–11. National and Aeronautics Space and Administration (Relatório Técnico R-24).

SAYYAD, A. S.; GHUGAL, Y. M. Static and free vibration analysis of doubly-curved functionally graded material shells. **Composite Structures**, Elsevier, v. 269, p. 114045, ago. 2021. ISSN 02638223. DOI: [10.1016/j.compstruct.2021.114045](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114045).

SERT, O.; CIGEROGLU, E. A novel two-step pseudo-response based adaptive harmonic balance method for dynamic analysis of nonlinear structures. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 130, p. 610–631, 2019. DOI: [10.1016/j.ymssp.2019.05.028](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.05.028).

- SHAW, S.; PIERRE, C. Normal Modes for Non-Linear Vibratory Systems. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 164, n. 1, p. 85–124, 1993. DOI: [10.1006/jsvi.1993.1198](https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1198).
- SILVA, F. M. A.; GONÇALVES, P. B. The influence of uncertainties and random noise on the dynamic integrity analysis of a system liable to unstable buckling. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 81, p. 707–724, 2015. DOI: [10.1007/s11071-015-2021-5](https://doi.org/10.1007/s11071-015-2021-5).
- SILVA, F. M. A.; GONÇALVES, P. B.; DEL PRADO, Z. J. G. N. An alternative procedure for the non-linear vibration analysis of fluid-filled cylindrical shells. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 66, p. 303–333, 2011. DOI: [10.1007/s11071-011-0037-z](https://doi.org/10.1007/s11071-011-0037-z).
- SILVA, F. M. A.; SOARES, R. M.; DEL PRADO, Z. J. G. N.; GONÇALVES, P. B. Intra-well and cross-well chaos in membranes and shells liable to buckling. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 102, n. 2, p. 877–906, 2020. DOI: [10.1007/s11071-020-05661-z](https://doi.org/10.1007/s11071-020-05661-z).
- SILVA, F. M. A.; SOARES, R. M.; MORAIS, D. L. A. Análise estática não-linear de cascas conoidais. In: XXXVIII IBERIAN-LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 2017, Florianópolis. **Proceedings of the [...]** Florianópolis: ABMEC, 2017. P. 1–15. DOI: [10.20906/CPS/CILAMCE2017-0477](https://doi.org/10.20906/CPS/CILAMCE2017-0477).
- SIROVICH, L. Turbulence and the dynamics of coherent structures. I. Coherent structures. **Quarterly of applied mathematics**, ASM, v. 45, n. 3, p. 561–571, 1987. ISSN 0033-569X. DOI: [10.1090/qam/910462](https://doi.org/10.1090/qam/910462).
- _____. Turbulence and the dynamics of coherent structures. II. Symmetries and transformations. **Quarterly of Applied mathematics**, ASM, v. 45, n. 3, p. 573–582, 1987. ISSN 0033-569X. DOI: [10.1090/qam/910463](https://doi.org/10.1090/qam/910463).
- _____. Turbulence and the dynamics of coherent structures. III. Dynamics and scaling. **Quarterly of applied mathematics**, ASM, v. 45, n. 3, p. 583–590, 1987. ISSN 0033-569X. DOI: [10.1090/qam/910464](https://doi.org/10.1090/qam/910464).
- SMITH, M. **ABAQUS/Standard User's Manual, Version 6.9**. Providence, RI, 2009.
- SOARES, R. M.; AMARAL, P. F. T.; SILVA, F. M. A.; GONÇALVES, P. B. Nonlinear breathing motions and instabilities of a pressure-loaded spherical hyperelastic membrane. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 99, p. 351–372, 2020. DOI: [10.1007/s11071-019-04855-4](https://doi.org/10.1007/s11071-019-04855-4).

- SOARES, R. M.; GONÇALVES, P. B. Large-amplitude nonlinear vibrations of a Mooney–Rivlin rectangular membrane. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 333, n. 13, p. 2920–2935, 2014. DOI: [10.1016/j.jsv.2014.02.007](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.02.007).
- _____. Nonlinear vibrations and instabilities of a stretched hyperelastic annular membrane. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 49, n. 3-4, p. 514–526, 2012. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2011.10.019](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.019).
- _____. Nonlinear vibrations of a rectangular hyperelastic membrane resting on a nonlinear elastic foundation. **Meccanica**, Springer, v. 53, p. 937–955, 2018. DOI: [10.1007/s11012-017-0755-5](https://doi.org/10.1007/s11012-017-0755-5).
- SOARES, R. M.; MOREIRA, C. L. R.; SILVA, F. M. A. Nonlinear Oscillations of a Transversally Excited Non-shallow Conoidal Shell via Finite Element Analysis. **Journal of Vibration Engineering & Technologies**, Springer, v. 10, n. 6, p. 2073–2095, 2022. DOI: [10.1007/s42417-022-00448-5](https://doi.org/10.1007/s42417-022-00448-5).
- SOFIYEV, A. H.; TURAN, F. On the nonlinear vibration of heterogenous orthotropic shallow shells in the framework of the shear deformation shell theory. **Thin-Walled Structures**, Elsevier, v. 161, February, p. 107181, 2021. ISSN 02638231. DOI: [10.1016/j.tws.2020.107181](https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107181).
- SOMBROEK, C. S. M.; TISO, P.; RENSON, L.; KERSCHEN, G. Numerical computation of nonlinear normal modes in a modal derivative subspace. **Computers and Structures**, Elsevier, v. 195, p. 34–46, 2018. ISSN 00457949. DOI: [10.1016/j.compstruc.2017.08.016](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.08.016).
- STAVRIDIS, L. T. Dynamic analysis of shallow shells of rectangular base. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 218, n. 5, p. 861–882, 1998. DOI: [10.1006/jsvi.1998.1907](https://doi.org/10.1006/jsvi.1998.1907).
- SUN, M.; QUAN, T.; WANG, D. Nonlinear oscillations of rectangular plate with 1:3 internal resonance between different modes. **Results in Physics**, Elsevier, v. 11, p. 495–500, 2018. ISSN 2211-3797. DOI: [10.1016/j.rinp.2018.09.031](https://doi.org/10.1016/j.rinp.2018.09.031).
- THOMAS, O.; TOUZÉ, C.; CHAIGNE, A. Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells: modal interaction rules and 1:1:2 internal resonance. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 42, n. 11, p. 3339–3373, 2005. ISSN 0020-7683. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2004.10.028](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.10.028).

THOMAS, O.; TOUZÉ, C.; LUMINAIS, É. Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells: experiments on a 1:1:2 internal resonance. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 49, p. 259–284, 2007. DOI: [10.1007/s11071-006-9132-y](https://doi.org/10.1007/s11071-006-9132-y).

TOUZÉ, C.; VIZZACCARO, A.; THOMAS, O. Model order reduction methods for geometrically nonlinear structures: a review of nonlinear techniques. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 105, n. 2, p. 1141–1190, 2021. ISSN 1573-269X. DOI: [10.1007/s11071-021-06693-9](https://doi.org/10.1007/s11071-021-06693-9).

VENTSEL, E.; KRAUTHAMMER, T. **Thin Plates and Shells**. 1. ed. Boca Raton: CRC Press, 2001. P. 688. ISBN 9780203908723. DOI: [10.1201/9780203908723](https://doi.org/10.1201/9780203908723).

VIZZACCARO, A.; SHEN, Y.; SALLES, L.; BLAHOŠ, J.; TOUZÉ, C. Direct computation of nonlinear mapping via normal form for reduced-order models of finite element nonlinear structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 384, p. 113957, 2021. ISSN 0045-7825. DOI: [10.1016/j.cma.2021.113957](https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.113957).

VLASOV, V. S. **Basic differential equations in general theory of elastic shells**. Washington, D.C., 1951. National Advisory Committee for Aeronautics (Memorando técnico n. 1241). Tradução para o inglês do artigo original em russo: VLASOV, V. S. Osnovnye Differentsialnye Uravnenia Obshche Teorri Uprugikh Obolochek. **Prikladnaia Matematika i Mekhanika**, v. 8, 1944.

_____. **General theory of shells and its application in engineering**. Washington, D.C., 1964. Technical Translation TTF-99.

VOROVICH, I. I. **Nonlinear Theory of Shallow Shells**. New York: Springer, 1999. DOI: [10.1007/b98970](https://doi.org/10.1007/b98970).

WEMPNER, G.; TALASLIDIS, D. **Mechanics of solids and shells: Theories and approximations**. 1. ed. Boca Raton: CRC Press, 2002. P. 517. (Mechanical and Aerospace Engineering Series). ISBN 9781420036428.

XIAOQIN, S.; KAITAI, L.; YANG, M. The modified model of Koiter's type for nonlinearly elastic shell. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 34, n. 11, p. 3527–3535, 2010. ISSN 0307904X. DOI: [10.1016/j.apm.2010.03.003](https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.03.003).

YAMAKI, N.; SIMITSES, G. J. Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells. **Journal of Applied Mechanics**, ASME, v. 52, n. 2, p. 501–502, 1985. ISSN 0021-8936. DOI: [10.1115/1.3169089](https://doi.org/10.1115/1.3169089).

ZHAI, Y.; MA, J.; LIANG, S. Dynamics properties of multi-layered composite sandwich doubly-curved shells. **Composite Structures**, Elsevier, v. 256, October 2020, p. 113142, 2021. ISSN 02638223. DOI: [10.1016/j.compstruct.2020.113142](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113142).

ZHAO, W.; ZHANG, J.; ZHANG, W.; YUAN, X. Internal resonance characteristics of hyperelastic thin-walled cylindrical shells composed of Mooney–Rivlin materials. **Thin-Walled Structures**, Elsevier, v. 163, p. 107754, 2021. ISSN 0263-8231. DOI: [10.1016/j.tws.2021.107754](https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107754).

ZINGONI, A. **Shell Structures in Civil and Mechanical Engineering**. 2. ed. Londres: ICE Publishing, 2017. DOI: [10.1680/ssicame.60289](https://doi.org/10.1680/ssicame.60289).

GLOSSÁRIO

1. **Backbone:** curva que relaciona a amplitude máxima (para um ponto ou uma coordenada generalizada específica) ou energia de uma órbita periódica com sua frequência; também chamada de relação de frequência-amplitude ou frequência-energia; representa um dos Modos Normais Não Lineares da estrutura. 58, 106
2. **Autoespaço:** espaço formado pelo conjunto de autovetores que possuem o mesmo autovalor. 129
3. **Base natural:** base formada pelos vetores tangentes às coordenadas curvilíneas e o vetor perpendicular aos vetores tangentes. 67
4. **Base ortonormal canônica:** base ortonormal geradora mais primitiva e intuitiva para a estrutura. 66
5. **Base recíproca:** base complementar ou dual à base natural. 67
6. **Casca abatida:** casca cuja altura não ultrapassa $1/5$ da menor dimensão da casca em seu plano (Vlasov, 1964 *apud* Ventsel; Krauthammer, 2001); casca em que os ângulos entre os vetores tangentes da superfície média e o plano horizontal não excedem o valor de $0,224$ rad (Ventsel; Krauthammer, 2001); casca em que as parcelas das componentes dos tensores de deformação que dependem da curvatura podem ser desprezadas (Vorovich, 1999). 52, 83
7. **Casca de dupla curvatura:** casca cuja superfície média na configuração de referência é não desenvolvível. 53
8. **Casca fisicamente abatida:** casca em que as teorias próprias para cascas abatidas é válida mesmo que a curvatura não seja pequena. 52, 83
9. **Casca geometricamente abatida:** casca cuja curvatura é muito pequena. 53, 83

- 10. Casca propriamente abatida:** casca cuja geometria da superfície média é muito próxima a de um plano. 53, 84
- 11. Componentes contravariantes:** componentes que variam com a transformação linear inversa da variação dos vetores base natural. 68
- 12. Componentes covariantes:** componentes que variam com a mesma transformação linear da variação dos vetores da base natural. 68
- 13. Componentes mistas:** componentes expressas em relação a uma base mista de covetores e vetores tangentes. 69
- 14. Coomologia:** método para atribuir invariantes algébricos a um espaço topológico que possui uma estrutura algébrica mais refinada do que a da homologia. 137
- 15. Coordenadas curvilíneas:** sistema de coordenadas para o espaço euclidiano no qual as linhas de coordenadas podem ser curvas. 48, 66
- 16. Coordenadas generalizadas:** coordenadas que definem a configuração de um sistema. 99
- 17. Covetores:** vetores que foram a base recíproca. 67
- 18. Curva de ressonância:** curva que avalia a resposta de um sistema dinâmico quando sujeito a uma excitação harmônica em relação à frequência da excitação. 52, 107
- 19. Curvatura gaussiana:** produto das curvaturas principais em um ponto da superfície. 53, 74
- 20. Derivada covariante:** forma de representar a derivada ao longo dos vetores tangentes da superfície. 52, 79
- 21. Elongamento:** caracteriza uma deformação normal que pode ser tanto de alongamento quando encurtamento. 53
- 22. Espaço nulo:** espaço de uma matriz formado pelo conjunto de todos os vetores que, quando são multiplicados pela matriz, produz o vetor zero. 138
- 23. Estilo de parametrização gráfico:** resultado da expressão da variedade como um gráfico sobre o subespaço mestre; resulta na expressão mais simples possível de parametrização polinomial da variedade invariante. 142

- 24. Estilo de parametrização por Forma Normal:** estilo de parametrização que resulta em um modelo dinâmico reduzido não linear que é tão simples quanto possível, removendo sistematicamente todos os termos não essenciais da expansão polinomial do modelo reduzido. 58, 138
- 25. Funções de forma cinematicamente admissíveis:** funções de forma que atendem às condições internas de compatibilidade e às condições de contorno essenciais. 100
- 26. Geometria diferencial:** disciplina matemática que estuda a geometria de formas suaves e espaços suaves, também conhecidos como variedades diferenciáveis. 66
- 27. Hipótese de Donnell:** hipótese que considerar que as componentes não lineares do tensor de flexão podem ser desprezadas. 83
- 28. Modos Normais Lineares:** padrão de movimento no qual todas as partes de um sistema linear se movem de forma senoidal com a mesma frequência. 129
- 29. Modos Normais Não Lineares:** pode ser entendido como uma ampliação direta do conceito de Modo Normal Linear expandido para o caso não linear caracterizado por vibrações uníssonas compostas por órbitas periódicas, cujas coordenadas atingem a posição máxima no mesmo instante (Rosenberg, 1962); variedades invariantes de duas dimensões no espaço fase (Shaw; Pierre, 1993); conjunto fechado composto pelas soluções de múltipla frequência do sistema não linear (Haller; Ponsioen, 2016). 58, 130
- 30. Ressonância cruzada:** quando os autovalores do operador coomológico são próximos aos autovalores dos modos não incluídos no subespaço mestre. 141
- 31. Ressonância externa:** fenômeno que ocorre quando a frequência de excitação é próxima à frequência natural, fazendo com que o sistema vibre com amplitudes maiores. 151
- 32. Ressonância interna:** fenômeno de vibração não linear que ocorre quando a energia é transferida entre vários modos; quando os autovalores do operador coomológico são próximos aos autovalores dos modos incluídos no subespaço mestre. 60, 138, 141
- 33. Restrição de fase:** equação acrescentada ao sistema dinâmico para diferenciar órbitas iguais com defasagem de fase. 106

- 34. Solução analítica:** solução de forma fechada, obtida diretamente das equações de equilíbrio, e que pode ser expressas analiticamente em termos de funções elementares. 50
- 35. Solução numérica:** solução aproximada obtida por meio de um método numérico e que não se apresenta enquanto uma expressão matemática analítica que possa ser substituída diretamente nas equações de equilíbrio. 50
- 36. Solução semianalítica:** solução aproximada expressa matematicamente por um conjunto de funções elementares conhecidas e obtida por meio de um método numérico. 50
- 37. Subespaço espectral:** subespaço gerado pela combinação linear dos autoespaços de interesse. 130
- 38. Subespaço espectral mestre:** subespaço espectral formado pelos modos mestres do modelo de ordem reduzida. 130
- 39. Subvariedade Espectral:** variedade mais suave de uma família de variedades invariantes, tangente ao subespaço espectral do sistema linear na origem. 59, 132
- 40. Superfície desenvolvível:** superfície em que a curvatura gaussiana é nulo e que, portanto, pode ser gerada a partir de um plano através de deformações de flexão, sem sofrer distorções angulares ou alongamentos. 53
- 41. Superfície elíptica:** superfície com curvatura gaussiana positiva. 53
- 42. Superfície hiperbólica:** superfície com curvatura gaussiana negativa. 53
- 43. Superfície média:** superfície equidistante às faces interna e externa da casca. 48, 66
- 44. Superfície não desenvolvível:** superfície em que a curvatura gaussiana é diferente de zero. 53
- 45. Superfície não ortogonal:** superfície parametrizada por um sistema não ortogonal de coordenadas curvilíneas, em que os vetores tangente não são necessariamente ortogonais entre si. 49
- 46. Superfície ortogonal:** superfície parametrizada por um sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas, que em os vetores tangente a essas coordenadas devem ser necessariamente ortogonais entre si. 49

- 47. Símbolos de Christoffel:** coeficientes relacionadas às derivadas dos vetores tangentes e covetores. 71
- 48. Tensor de curvatura:** mede a variação do vetor normal em relação a uma variação das coordenadas curvilíneas. 49, 70
- 49. Tensor métrico:** utilizado para medir distância de curvas contidas na superfície. 49, 68
- 50. Teoria ortogonal:** teoria própria para análise de cascas descritas por superfícies ortogonais. 49
- 51. Teoria tensorial:** teoria para análise de cascas cujas equações são descritas em notação tensorial. 49
- 52. Variedade do Subcentro de Lyapunov:** variedade invariante bidimensional que é tangente ao autoespaço gerado pelos autovetores correspondentes a essa frequência. 144
- 53. Variedade invariante:** variedade topológica que é invariante sob a ação do sistema dinâmico. 58, 127
- 54. Vibrações uníssonas:** oscilações que ocorrem de maneira coordenada e sincronizada em um sistema de forma que suas diferentes partes vibrem com a mesma frequência e mantenham uma relação de fase constante. 131

APÊNDICE A

CÓDIGOS EM MATLAB

A.1 Determinação dos funcionais de energia

Os funcionais de energia são determinados pela função TensorShell.

```
function TensorShell

    nome_arquivo='
        conoide_profundo_108dof_bordas_imoveis2
        .mat';

    %Int=struct('xi1_0', 'xi1_1', 'xi2_0', '
        xi2_1', 'erro_abs', 'erro_rel');

    Int.xi1_0=0;
    Int.xi1_1=a;
    Int.xi2_0=0;
    Int.xi2_1=b;
    Int.erro_abs=1e-8;
    Int.erro_rel=1e-5;

    %Carga=struct('carga_concentrada', '
        carga_posicao', 'carga_distribuida');

    carga_concentrada=[0;0;-1];
    carga_posicao=[a/2; b/2];
    carga_distribuida=0;

    Carga.carga_concentrada=carga_concentrada;
    Carga.carga_posicao=carga_posicao;
    Carga.carga_distribuida=carga_distribuida;

    N_u=Geo.m1*Geo.n1;
    N_v=Geo.m2*Geo.n2;
    N_w=Geo.m3*Geo.n3;

    %%
    t_ini=clock;

    f_nome=char(nome_arquivo);

    %% Mapeamento
    [Map,nvars]=mapeamento(N_u, N_v, N_w);

    if(strcmp(Fis.NL, 'total'))
        contNL=1;
    else
        contNL=0;
        for i=1:size(Map,1)
            contNL=contNL+1;
            if (Map(i,1)==3)
                break;
            end
        end
    end

function TensorShell

    clc
    clearvars;
    fclose('all');
    close('all');

    addpath('..\classes');

    %% Parametros
    %Geo=struct('a', 'b', 'H1', 'H2', 'm1', 'n1
        ', 'm2', 'n2', 'm3', 'n3');
    %Fis=struct('nu', 'E', 'h', 'rho', 'teoria
        ', 'NL');

    Geo.a=0.1;
    Geo.b=0.1;
    a=Geo.a;
    b=Geo.b;
    %Geo.R=1;
    Geo.H1=0.03;
    Geo.H2=0.02;
    % Geo.f1=0.02;
    % Geo.f2=0.02;

    Geo.m1=6;
    Geo.n1=6;

    Geo.m2=6;
    Geo.n2=6;

    Geo.m3=6;
    Geo.n3=6;

    Fis.nu=0.3;
    Fis.h=0.001;
    Fis.rho=7800;
    Fis.E=1;
    % opcoes: koiter / sanders / flavio
    Fis.teoria='koiter';
    % opcoes: total / parcial_desloc_rot /
        parcial_rot
    Fis.NL='parcial_desloc_rot';
    E1=206e9;
```

```

        end
    end
end

%% Calculos iniciais

D=parallel.pool.DataQueue;
hh=waitbar(0, 'Processando...');
set(hh,'Units', 'normalized');
set(hh,'Position', [0.25 0.4 0.3 0.3]);
afterEach(D, @UpdateWaitbar);

pollableQ = parallel.pool.PollableDataQueue
;

t_ini=clock;

fun_inercia=@(alpha1,alpha2,i,j) inercia(
    alpha1,alpha2,i,j,Geo,Fis,Map);
fun_def1=@(alpha1,alpha2, i, j)
    densidade_de_energia1(alpha1, alpha2, i
    , j, Geo, Fis, Map);
fun_def2=@(alpha1,alpha2, i, j, k)
    densidade_de_energia2(alpha1, alpha2, i
    , j, k, Geo, Fis, Map);
fun_def3=@(alpha1,alpha2, i, j, k, l)
    densidade_de_energia3(alpha1, alpha2, i
    , j, k, l, Geo, Fis, Map);

%% Energia Carga (0)
Vars0=[1:nvars]';
U0=zeros(nvars,1);
for i=1:1:nvars
    U0(i)=U0(i)+
        energia_potencial_carga_concentrada
        (carga_posicao(1,1), carga_posicao
        (2,1), i, Geo, Fis, Map,
        carga_concentrada);
end

parfor i=1:1:nvars
    fun3=@(alpha1,alpha2)
        energia_potencial_pressao(
        alpha1, alpha2, i, Geo, Fis,
        Map, carga_distribuida);
    U0(i)=U0(i)+integral2(fun3, Int.
    xi1_0, Int.xi1_1, Int.xi2_0,
    Int.xi2_1, 'AbsTol', Int.
    erro_abs, 'RelTol', Int.
    erro_rel);
end

%% Energia 1 (Linear-Quadratica)

cont=1;
tini=clock;
duracao_total=0;

Mult=0;
ntot=0;
for i=1:nvars
    for j=i:nvars
        ntot=ntot+1;
        Vars1(ntot,1)=i;
        Vars1(ntot,2)=j;
        if(i==j)
            Mult(ntot,1)=1;
        else
            Mult(ntot,1)=2;
        end
    end
end

end

U1=zeros(ntot,1);
parfor k=1:ntot
    fun2=@(alpha1,alpha2)fun_def1(alpha1,
    alpha2, Vars1(k,1), Vars1(k,2));
    U1(k,1)=Mult(k,1)*integral2(fun2, Int.
    xi1_0, Int.xi1_1, Int.xi2_0, Int.
    xi2_1, 'AbsTol', Int.erro_abs, '
    RelTol', Int.erro_rel);
    send(D,k);
    pollableQ.send(sprintf('Energia 1\nI=%d
    \n', k));
end

%% Energia 2 (Nao-Linear-Cubica)

cont=1;
tini=clock;
duracao_total=0;

Mult=0;
ntot=0;
for i=1:nvars
    for j=contNL:nvars
        for k=j:nvars
            ntot=ntot+1;
            Vars2(ntot,1)=i;
            Vars2(ntot,2)=j;
            Vars2(ntot,3)=k;
            if(j==k)
                Mult(ntot,1)=1;
            else
                Mult(ntot,1)=2;
            end
        end
    end
end

U2=zeros(ntot,1);
parfor k=1:ntot
    fun2=@(alpha1,alpha2)fun_def2(alpha1,
    alpha2, Vars2(k,1), Vars2(k,2),
    Vars2(k,3));
    U2(k,1)=Mult(k,1)*integral2(fun2, Int.
    xi1_0, Int.xi1_1, Int.xi2_0, Int.
    xi2_1, 'AbsTol', Int.erro_abs, '
    RelTol', Int.erro_rel);
    send(D,k);
    pollableQ.send(sprintf('Energia 2\nI=%d
    \n', k));
end

%% Energia 3 (Nao-Linear-4a Potencia)

cont=1;
tini=clock;
duracao_total=0;

Mult=0;
ntot=0;
for i=contNL:nvars
    for j=i:nvars
        for k=j:nvars
            for l=k:nvars
                ntot=ntot+1;
                Vars3(ntot,1)=i;
                Vars3(ntot,2)=j;
                Vars3(ntot,3)=k;
                Vars3(ntot,4)=l;
            end
        end
    end
end

```

```

        Mult(ntot,1)=size(unique(
            perms([i, j, k, l]), '
            rows'),1);
    end
end
end
end
U3=zeros(ntot,1);
parfor k=1:ntot
    fun2=@(alpha1,alpha2)fun_def3(alpha1,
        alpha2, Vars3(k,1), Vars3(k,2),
        Vars3(k,3), Vars3(k,4));
    U3(k,1)=Mult(k,1)*integral2(fun2, Int.
        xi1_0, Int.xi1_1, Int.xi2_0, Int.
        xi2_1, 'AbsTol', Int.erro_abs, '
        RelTol', Int.erro_rel);
    send(D,k);
    pollableQ.send(sprintf('Energia 3\nI=%d
        \n', k));
end

%% Energia Cinetica

cont=1;
tini=clock;
duracao_total=0;

Mult=0;
ntot=0;
for i=1:nvars
    for j=i:nvars
        ntot=ntot+1;
        VarsCinetica(ntot,1)=i;
        VarsCinetica(ntot,2)=j;
        if(i==j)
            Mult(ntot,1)=1;
        else
            Mult(ntot,1)=2;
        end
    end
end

Cinetica=zeros(ntot,1);
parfor k=1:ntot
    fun_inercia2=@(alpha1,alpha2)
        fun_inercia(alpha1,alpha2,
            VarsCinetica(k,1), VarsCinetica(k
            ,2));
    Cinetica(k,1)=Mult(k,1)*integral2(
        fun_inercia2, Int.xi1_0, Int.xi1_1,
        Int.xi2_0, Int.xi2_1, 'AbsTol',
        Int.erro_abs, 'RelTol', Int.
        erro_rel);
    send(D,k);
    pollableQ.send(sprintf('Energia
        Cinetica\nI=%d\n', k));
end

%%

U1=U1*E1;
U2=U2*E1;
U3=U3*E1;
Fis.E=E1;

%% Saida dos resultados
FuncZ=fileread('Z_.m');
FuncU1=fileread('u1_.m');
FuncU2=fileread('u2_.m');
FuncU3=fileread('u3_.m');

energia=energia_casca;
energia.Geo=Geo;
energia.Fis=Fis;
energia.Carga=Carga;
energia.Integral=Int;
energia.u1_string=FuncU1;
energia.u2_string=FuncU2;
energia.u3_string=FuncU3;
energia.Z_string=FuncZ;
energia.Map=Map;
energia.Vars0=Vars0;
energia.U0=U0;
energia.Vars1=Vars1;
energia.U1=U1;
energia.Vars2=Vars2;
energia.U2=U2;
energia.Vars3=Vars3;
energia.U3=U3;
energia.VarsCinetica=VarsCinetica;
energia.Cinetica=Cinetica;

save(f_nome, 'energia');

duracao_total=etime(clock,t_ini);
horas=floor(duracao_total/3600);
minutos=floor((duracao_total-horas*3600)
    /60);
segundos=floor( duracao_total-horas*3600-
    minutos*60);

fprintf('Tempo total=%d horas, %d minutos %
    d segundos\n', horas, minutos, segundos
    );

close(hh);
delete(hh);

%% Progresso dos resultados
function nUpdateWaitbar(~)

    cont=cont+1;

    msg=string(pollableQ.poll())+
        sprintf('n=%d / %d\n', cont,
            ntot);

    duracao_total=etime(clock,tini);

    horas=floor(duracao_total/3600);
    minutos=floor((duracao_total-horas
        *3600)/60);
    segundos=floor( duracao_total-horas
        *3600-minutos*60);

    msg=msg+sprintf('Tempo parcial=%d
        horas, %d minutos %d segundos\n
        ', horas, minutos, segundos);

    duracao_restante=duracao_total/cont
        *(ntot-cont);
    horas=floor(duracao_restante/3600);
    minutos=floor((duracao_restante-
        horas*3600)/60);
    segundos=floor( duracao_restante-
        horas*3600-minutos*60);

    msg=msg+sprintf('Tempo restante=%d
        horas, %d minutos %d segundos\n
        ', horas, minutos, segundos);

```

```

duracao_media=round(duracao_total/
    cont,2);
msg=msg+sprintf('Tempo medio=%d
    segundos\n', duracao_media);
waitbar(cont/ntot,hh,msg);
end
end

```

Funções de forma

```

function R=u1_(alpha1,alpha2, d1, d2, k,
    Geo)
a=Geo.a;
b=Geo.b;
m3=Geo.m3;
n3=Geo.n3;
i=floor((k-1)/n3)+1;
j=mod((k-1),n3)+1;
if(i>m3)
    error('Numero de modos maior que o
        previsto');
end
if(d1==0 && d2==0)
    X = sin(i .* pi .* alpha1 ./ a);
    Y = sin((2 .* j - 1) .* pi .* alpha2 ./
        b);
elseif(d1==1 && d2==0)
    X = i .* pi ./ a .* cos(i .* pi .*
        alpha1 ./ a);
    Y = sin((2 .* j - 1) .* pi .* alpha2 ./
        b);
elseif(d1==0 && d2==1)
    X = sin(i .* pi .* alpha1 ./ a);
    Y = (2 .* j - 1) .* pi ./ b .* cos((2 .*
        j - 1) .* pi .* alpha2 ./ b);
elseif(d1==1 && d2==1)
    X = i .* pi ./ a .* cos(i .* pi .*
        alpha1 ./ a);
    Y = (2 .* j - 1) .* pi ./ b .* cos((2 .*
        j - 1) .* pi .* alpha2 ./ b);
elseif(d1==2 && d2==0)
    X = -i .^ 2 .* pi .^ 2 ./ a .^ 2 .* sin(
        i .* pi .* alpha1 ./ a);
    Y = sin((2 .* j - 1) .* pi .* alpha2 ./
        b);
elseif(d1==0 && d2==2)
    X = sin(i .* pi .* alpha1 ./ a);
    Y = -((2 .* j - 1) .^ 2) .* pi .^ 2 ./ b
        .^ 2 .* sin((2 .* j - 1) .* pi .*
        alpha2 ./ b);
else
    error('Derivada nao implementada');
end
R=X.*Y;
end

function R=u2_(alpha1,alpha2, d1, d2, k,
    Geo)
a=Geo.a;
b=Geo.b;
m3=Geo.m3;
n3=Geo.n3;
i=floor((k-1)/n3)+1;
j=mod((k-1),n3)+1;
if(i>m3)
    error('Numero de modos maior que o
        previsto');
end
if(d1==0 && d2==0)
    X = sin(i .* pi .* alpha1 ./ a);
elseif(d1==1 && d2==0)
    X = i .* pi ./ a .* cos(i .* pi .*
        alpha1 ./ a);
    Y = sin((2 .* j - 1) .* pi .* alpha2 ./
        b);
elseif(d1==0 && d2==1)
    X = sin(i .* pi .* alpha1 ./ a);
    Y = (2 .* j - 1) .* pi ./ b .* cos((2 .*
        j - 1) .* pi .* alpha2 ./ b);
elseif(d1==1 && d2==1)
    X = i .* pi ./ a .* cos(i .* pi .*
        alpha1 ./ a);
    Y = sin(0.2e1 .* j .* pi .* alpha2 ./ b)
        ;
elseif(d1==1 && d2==0)
    X = i .* pi ./ a .* cos(i .* pi .*
        alpha1 ./ a);
    Y = 0.2e1 .* j .* pi ./ b .* cos(0.2e1
        .* j .* pi .* alpha2 ./ b);
elseif(d1==2 && d2==0)
    X = -i .^ 2 .* pi .^ 2 ./ a .^ 2 .* sin(
        i .* pi .* alpha1 ./ a);
    Y = sin(0.2e1 .* j .* pi .* alpha2 ./ b)
        ;
elseif(d1==0 && d2==2)
    X = sin(i .* pi .* alpha1 ./ a);
    Y = -0.4e1 .* j .^ 2 .* pi .^ 2 ./ b .^
        2 .* sin(0.2e1 .* j .* pi .* alpha2
        ./ b);
else
    error('Derivada nao implementada');
end
R=X.*Y;
end

function R=u3_(alpha1,alpha2, d1, d2, k,
    Geo)
a=Geo.a;
b=Geo.b;
m3=Geo.m3;
n3=Geo.n3;
i=floor((k-1)/n3)+1;
j=mod((k-1),n3)+1;
if(i>m3)
    error('Numero de modos maior que o
        previsto');
end
if(d1==0 && d2==0)
    X = sin(i .* pi .* alpha1 ./ a);
    Y = sin((2 .* j - 1) .* pi .* alpha2 ./
        b);
elseif(d1==1 && d2==0)
    X = i .* pi ./ a .* cos(i .* pi .*
        alpha1 ./ a);
    Y = sin((2 .* j - 1) .* pi .* alpha2 ./
        b);
elseif(d1==0 && d2==1)
    X = sin(i .* pi .* alpha1 ./ a);
    Y = (2 .* j - 1) .* pi ./ b .* cos((2 .*
        j - 1) .* pi .* alpha2 ./ b);
elseif(d1==1 && d2==1)
    X = i .* pi ./ a .* cos(i .* pi .*
        alpha1 ./ a);
    Y = sin(0.2e1 .* j .* pi .* alpha2 ./ b)
        ;
elseif(d1==1 && d2==0)
    X = i .* pi ./ a .* cos(i .* pi .*
        alpha1 ./ a);
    Y = 0.2e1 .* j .* pi ./ b .* cos(0.2e1
        .* j .* pi .* alpha2 ./ b);
elseif(d1==2 && d2==0)
    X = -i .^ 2 .* pi .^ 2 ./ a .^ 2 .* sin(
        i .* pi .* alpha1 ./ a);
    Y = sin(0.2e1 .* j .* pi .* alpha2 ./ b)
        ;
elseif(d1==0 && d2==2)
    X = sin(i .* pi .* alpha1 ./ a);
    Y = -0.4e1 .* j .^ 2 .* pi .^ 2 ./ b .^
        2 .* sin(0.2e1 .* j .* pi .* alpha2
        ./ b);
else
    error('Derivada nao implementada');
end
R=X.*Y;
end

```

```

        alpha1 ./ a);
    Y = (2 .* j - 1) .* pi ./ b .* cos((2 .*
        j - 1) .* pi .* alpha2 ./ b);
elseif(d1==2 && d2==0)
    X = -i .^ 2 .* pi .^ 2 ./ a .^ 2 .* sin(
        i .* pi .* alpha1 ./ a);
    Y = sin((2 .* j - 1) .* pi .* alpha2 ./
        b);
elseif(d1==0 && d2==2)
    X = sin(i .* pi .* alpha1 ./ a);
    Y = -((2 .* j - 1) .^ 2) .* pi .^ 2 ./ b
        .^ 2 .* sin((2 .* j - 1) .* pi .*
        alpha2 ./ b);
else
    error('Derivada nao implementada');
end
R=X.*Y;
end

```

Geometria da casca

```

function R=Z_(xi1, xi2, d1, d2, Geo)
a=Geo.a;
b=Geo.b;
H1=Geo.H1;
H2=Geo.H2;
if(d1==0 && d2==0)
    R = (H1 - (H1 - H2) .* xi1 ./ a) .* (1 -
        (2 .* xi2 ./ b - 1) .^ 2);
elseif(d1==1 && d2==0)
    R = -(H1 - H2) ./ a .* (1 - (2 .* xi2 ./
        b - 1) .^ 2);
elseif(d1==0 && d2==1)
    R = -4 .* (H1 - (H1 - H2) .* xi1 ./ a)
        .* (2 .* xi2 ./ b - 1) ./ b;
elseif(d1==2 && d2==0)
    R = 0;
elseif(d1==1 && d2==1)
    R = 4 .* (H1 - H2) ./ a .* (2 .* xi2 ./
        b - 1) ./ b;
elseif(d1==0 && d2==2)
    R = -8 .* (H1 - (H1 - H2) .* xi1 ./ a)
        ./ b .^ 2;
elseif(d1==3 && d2==0)
    R = 0;
elseif(d1==2 && d2==1)
    R = 0;
elseif(d1==1 && d2==2)
    R = 8 .* (H1 - H2) ./ a ./ b .^ 2;
elseif(d1==0 && d2==3)
    R = 0;
else
    error('Derivada nao implementada')
end

```

Densidade da energia cinética

```

function K=inercia(alpha1, alpha2, ii, jj,
    Geo, Fis, Map)
Z1=Z_(alpha1, alpha2, 1, 0, Geo);
Z2=Z_(alpha1, alpha2, 0, 1, Geo);
D=sqrt(1+Z1.^2+Z2.^2);
N1_1 = (Z2 .^ 2 + 1) ./ D .^ 2;
N1_2 = -0.1e1 ./ D .^ 2 .* Z2 .* Z1;
N1_3 = 0.1e1 ./ D .^ 2 .* Z1;
N2_1 = -0.1e1 ./ D .^ 2 .* Z2 .* Z1;
N2_2 = (Z1 .^ 2 + 1) ./ D .^ 2;
N2_3 = 0.1e1 ./ D .^ 2 .* Z2;
H_11 = N1_1 .^ 2 + N1_2 .^ 2 + N1_3 .^ 2;
H_12 = N1_1 .* N2_1 + N1_2 .* N2_2 + N1_3
    .* N2_3;
H_21 = N1_1 .* N2_1 + N1_2 .* N2_2 + N1_3
    .* N2_3;
H_22 = N2_1 .^ 2 + N2_2 .^ 2 + N2_3 .^ 2;
h=Fis.h;
%nu=Fis.nu;
%E=Fis.E;
rho=Fis.rho;
i=Map(ii,2);
if(Map(ii,1)==1)
    u1=u1_(alpha1,alpha2,0,0,i,Geo);
    u2=0;
    u3=0;
elseif(Map(ii,1)==2)
    u1=0;
    u2=u2_(alpha1,alpha2,0,0,i,Geo);
    u3=0;
else
    u1=0;
    u2=0;
    u3=u3_(alpha1,alpha2,0,0,i,Geo);
end
i=Map(jj,2);
if(Map(jj,1)==1)
    u1=u1_(alpha1,alpha2,0,0,i,Geo);
    u2=0;
    u3=0;
elseif(Map(jj,1)==2)
    u1=0;
    u2=u2_(alpha1,alpha2,0,0,i,Geo);
    u3=0;
else
    u1=0;
    u2=0;
    u3=u3_(alpha1,alpha2,0,0,i,Geo);
end

```

```

u_1B = u1;
u_2B = u2;
u_3B = u3;

%K=rho.*h/2 .* D .* (u1A .* u1B .* H_11 +
u2A .* u2B .* H_22 + u3A .* u3B);
K = rho .* h .* D.* (H_11 .* u_1A .* u_1B +
H_12 .* u_1A .* u_2B + H_21 .* u_2A .*
u_1B + H_22 .* u_2A .* u_2B + u_3A .*
u_3B) ./ 0.2e1;
end

```

Energia potencial da carga concentrada

```

function W=
energia_potencial_carga_concentrada(xi1
, xi2, ii, Geo, Fis, Map, Fconc)

Z1=Z_(xi1, xi2, 1, 0, Geo);
Z2=Z_(xi1, xi2, 0, 1, Geo);
% Z12=Z_(xi1, xi2, 1, 1, Geo);
% Z11=Z_(xi1, xi2, 2, 0, Geo);
% Z22=Z_(xi1, xi2, 0, 2, Geo);
% Z112=Z_(xi1, xi2, 2, 1, Geo);
% Z122=Z_(xi1, xi2, 1, 2, Geo);
% Z111=Z_(xi1, xi2, 3, 0, Geo);
% Z222=Z_(xi1, xi2, 0, 3, Geo);
% Z21=Z12;
% Z211=Z112;
% Z121=Z112;
% Z221=Z122;
% Z212=Z221;

D = sqrt((Z1.^2 + Z2.^2 + 1));

N1_1 = (Z2.^2 + 1) ./ D.^2;
N1_2 = -0.1e1 ./ D.^2 .* Z2 .* Z1;
N1_3 = 0.1e1 ./ D.^2 .* Z1;
N2_1 = -0.1e1 ./ D.^2 .* Z2 .* Z1;
N2_2 = (Z1.^2 + 1) ./ D.^2;

N2_3 = 0.1e1 ./ D.^2 .* Z2;
N3_1 = -0.1e1 ./ D .* Z1;
N3_2 = -0.1e1 ./ D .* Z2;
N3_3 = 0.1e1 ./ D;

%%
i=Map(ii,2);
if(Map(ii,1)==1)
u1=u1_(xi1,xi2,0,0,i,Geo);
u2=0;
u3=0;
elseif(Map(ii,1)==2)
u1=0;
u2=u2_(xi1,xi2,0,0,i,Geo);
u3=0;
else
u1=0;
u2=0;
u3=u3_(xi1,xi2,0,0,i,Geo);
end

N1=[N1_1; N1_2; N1_3];
N2=[N2_1; N2_2; N2_3];
N3=[N3_1; N3_2; N3_3];
U=u1*N1+u2*N2+u3*N3;
W=dot(Fconc,U);

```

Deformações lineares

```

function [gamma11, gamma12, gamma21,
gamma22, rho11, rho12, rho21, rho22]=
deformacao_linear(xi1, xi2, ii, Geo,
Fis, Map)

Z1=Z_(xi1, xi2, 1, 0, Geo);
Z2=Z_(xi1, xi2, 0, 1, Geo);
Z12=Z_(xi1, xi2, 1, 1, Geo);
Z11=Z_(xi1, xi2, 2, 0, Geo);
Z22=Z_(xi1, xi2, 0, 2, Geo);
Z112=Z_(xi1, xi2, 2, 1, Geo);
Z122=Z_(xi1, xi2, 1, 2, Geo);
Z111=Z_(xi1, xi2, 3, 0, Geo);
Z222=Z_(xi1, xi2, 0, 3, Geo);
Z21=Z12;
Z211=Z112;
Z121=Z112;
Z221=Z122;
Z212=Z221;

D = sqrt((Z1.^2 + Z2.^2 + 1));
D1 = ((Z1.^2 + Z2.^2 + 1) ^ (-0.1e1 ./
0.2e1) .* (2 .* Z1 .* Z11 + 2 .* Z2 .*
Z21)) ./ 0.2e1;
D2 = ((Z1.^2 + Z2.^2 + 1) ^ (-0.1e1 ./
0.2e1) .* (2 .* Z1 .* Z21 + 2 .* Z2 .*
Z22)) ./ 0.2e1;

D11 = -((Z1.^2 + Z2.^2 + 1) ^ (-0.3e1
./ 0.2e1) .* (2 .* Z1 .* Z11 + 2 .* Z2
.* Z21) ^ 2) ./ 0.4e1 + ((Z1.^2 + Z2
.^2 + 1) ^ (-0.1e1 ./ 0.2e1) .* (2
.* Z1 .* Z111 + 2 .* Z11.^2 + 2 .* Z2
.* Z211 + 2 .* Z21.^2)) ./ 0.2e1;
D12 = -((Z1.^2 + Z2.^2 + 1) ^ (-0.3e1
./ 0.2e1) .* (2 .* Z1 .* Z11 + 2 .* Z2
.* Z21) .* (2 .* Z1 .* Z21 + 2 .* Z2 .*
Z22)) ./ 0.4e1 + ((Z1.^2 + Z2.^2 +
1) ^ (-0.1e1 ./ 0.2e1) .* (2 .* Z1 .*
Z211 + 2 .* Z21 .* Z11 + 2 .* Z2 .*
Z221 + 2 .* Z22 .* Z21)) ./ 0.2e1;
D21 = -((Z1.^2 + Z2.^2 + 1) ^ (-0.3e1
./ 0.2e1) .* (2 .* Z1 .* Z11 + 2 .* Z2
.* Z21) .* (2 .* Z1 .* Z21 + 2 .* Z2 .*
Z22)) ./ 0.4e1 + ((Z1.^2 + Z2.^2 +
1) ^ (-0.1e1 ./ 0.2e1) .* (2 .* Z1 .*

```

```

      Z211 + 2 .* Z21 .* Z11 + 2 .* Z2 .*
      Z221 + 2 .* Z22 .* Z21)) ./ 0.2e1;
D22 = -(Z1.^2 + Z2.^2 + 1).^(-0.3e1
./ 0.2e1) .* (2 .* Z1 .* Z21 + 2 .* Z2
.* Z22).^2 ./ 0.4e1 + ((Z1.^2 + Z2
.^2 + 1).^(-0.1e1 ./ 0.2e1) .* (2
.* Z1 .* Z221 + 2 .* Z2 .* Z222 + 2 .*
Z21.^2 + 2 .* Z22.^2)) ./ 0.2e1;

M1_1 = 1;
M1_2 = 0;
M1_3 = Z1;
M2_1 = 0;
M2_2 = 1;
M2_3 = Z2;
M3_1 = -0.1e1 ./ D .* Z1;
M3_2 = -0.1e1 ./ D .* Z2;
M3_3 = 0.1e1 ./ D;

N1_1 = (Z2.^2 + 1) ./ D.^2;
N1_2 = -0.1e1 ./ D.^2 .* Z2 .* Z1;
N1_3 = 0.1e1 ./ D.^2 .* Z1;
N2_1 = -0.1e1 ./ D.^2 .* Z2 .* Z1;
N2_2 = (Z1.^2 + 1) ./ D.^2;
N2_3 = 0.1e1 ./ D.^2 .* Z2;
N3_1 = -0.1e1 ./ D .* Z1;
N3_2 = -0.1e1 ./ D .* Z2;
N3_3 = 0.1e1 ./ D;

M11_1 = 0;
M11_2 = 0;
M11_3 = Z11;
M12_1 = 0;
M12_2 = 0;
M12_3 = Z21;
M21_1 = 0;
M21_2 = 0;
M21_3 = Z21;
M22_1 = 0;
M22_2 = 0;
M22_3 = Z22;
M31_1 = 0.1e1 ./ D.^2 .* Z1 .* D1 - 0.1e1
./ D .* Z11;
M31_2 = 0.1e1 ./ D.^2 .* Z2 .* D1 - 0.1e1
./ D .* Z21;
M31_3 = -0.1e1 ./ D.^2 .* D1;
M32_1 = 0.1e1 ./ D.^2 .* Z1 .* D2 - 0.1e1
./ D .* Z21;
M32_2 = 0.1e1 ./ D.^2 .* Z2 .* D2 - 0.1e1
./ D .* Z22;
M32_3 = -0.1e1 ./ D.^2 .* D2;

N11_1 = 2 .* (Z2 .* Z21 .* D - D1 .* Z2.^
2 - D1) ./ D.^3;
N11_2 = -(Z1 .* Z21 .* D + Z2 .* Z11 .* D -
2 .* Z2 .* Z1 .* D1) ./ D.^3;
N11_3 = (Z11 .* D - 2 .* Z1 .* D1) ./ D.^
3;
N12_1 = 2 .* (Z2 .* Z22 .* D - D2 .* Z2.^
2 - D2) ./ D.^3;
N12_2 = -(Z1 .* Z22 .* D + Z2 .* Z21 .* D -
2 .* Z2 .* Z1 .* D2) ./ D.^3;
N12_3 = (Z21 .* D - 2 .* Z1 .* D2) ./ D.^
3;
N21_1 = -(Z1 .* Z21 .* D + Z2 .* Z11 .* D -
2 .* Z2 .* Z1 .* D1) ./ D.^3;
N21_2 = 2 .* (Z1 .* Z11 .* D - D1 .* Z1.^
2 - D1) ./ D.^3;
N21_3 = (Z21 .* D - 2 .* Z2 .* D1) ./ D.^
3;
N22_1 = -(Z1 .* Z22 .* D + Z2 .* Z21 .* D -
2 .* Z2 .* Z1 .* D2) ./ D.^3;
N22_2 = 2 .* (Z1 .* Z21 .* D - D2 .* Z1.^
2 - D2) ./ D.^3;
N22_3 = (Z22 .* D - 2 .* Z2 .* D2) ./ D.^
3;

M311_1 = -2 ./ D.^3 .* Z1 .* D1.^2 + 2
./ D.^2 .* Z11 .* D1 + 1 ./ D.^2 .*
Z1 .* D11 - 1 ./ D .* Z111;
M311_2 = -2 ./ D.^3 .* Z2 .* D1.^2 + 2
./ D.^2 .* Z21 .* D1 + 1 ./ D.^2 .*
Z2 .* D11 - 1 ./ D .* Z211;
M311_3 = 2 ./ D.^3 .* D1.^2 - 1 ./ D.^
2 .* D11;
M312_1 = -2 ./ D.^3 .* Z1 .* D2 .* D1 + 1
./ D.^2 .* Z11 .* D2 + 1 ./ D.^2
.* Z1 .* D21 + 1 ./ D.^2 .* Z21 .* D1
- 1 ./ D .* Z211;
M312_2 = -2 ./ D.^3 .* Z2 .* D2 .* D1 + 1
./ D.^2 .* Z21 .* D2 + 1 ./ D.^2
.* Z2 .* D21 + 1 ./ D.^2 .* Z22 .* D1
- 1 ./ D .* Z221;
M312_3 = 2 ./ D.^3 .* D2 .* D1 - 1 ./ D
.^2 .* D21;
M321_1 = -2 ./ D.^3 .* Z1 .* D2 .* D1 + 1
./ D.^2 .* Z11 .* D2 + 1 ./ D.^2
.* Z1 .* D21 + 1 ./ D.^2 .* Z21 .* D1
- 1 ./ D .* Z211;
M321_2 = -2 ./ D.^3 .* Z2 .* D2 .* D1 + 1
./ D.^2 .* Z21 .* D2 + 1 ./ D.^2
.* Z2 .* D21 + 1 ./ D.^2 .* Z22 .* D1
- 1 ./ D .* Z221;
M321_3 = 2 ./ D.^3 .* D2 .* D1 - 1 ./ D
.^2 .* D21;
M322_1 = -2 ./ D.^3 .* Z1 .* D2.^2 + 2
./ D.^2 .* Z21 .* D2 + 1 ./ D.^2 .*
Z1 .* D22 - 1 ./ D .* Z221;
M322_2 = -2 ./ D.^3 .* Z2 .* D2.^2 + 2
./ D.^2 .* Z22 .* D2 + 1 ./ D.^2 .*
Z2 .* D22 - 1 ./ D .* Z222;
M322_3 = 2 ./ D.^3 .* D2.^2 - 1 ./ D.^
2 .* D22;

G_11 = M1_1.^2 + M1_2.^2 + M1_3.^2;
G_12 = M1_1 .* M2_1 + M1_2 .* M2_2 + M1_3
.* M2_3;
G_21 = M1_1 .* M2_1 + M1_2 .* M2_2 + M1_3
.* M2_3;
G_22 = M2_1.^2 + M2_2.^2 + M2_3.^2;

H_11 = N1_1.^2 + N1_2.^2 + N1_3.^2;
H_12 = N1_1 .* N2_1 + N1_2 .* N2_2 + N1_3
.* N2_3;
H_21 = N1_1 .* N2_1 + N1_2 .* N2_2 + N1_3
.* N2_3;
H_22 = N2_1.^2 + N2_2.^2 + N2_3.^2;

Gamma1_11 = N1_1 .* M11_1 + N1_2 .* M11_2 +
N1_3 .* M11_3;
Gamma1_12 = N1_1 .* M12_1 + N1_2 .* M12_2 +
N1_3 .* M12_3;
Gamma1_21 = N1_1 .* M21_1 + N1_2 .* M21_2 +
N1_3 .* M21_3;
Gamma1_22 = M22_1 .* N1_1 + M22_2 .* N1_2 +
M22_3 .* N1_3;
Gamma2_11 = N2_1 .* M11_1 + N2_2 .* M11_2 +
N2_3 .* M11_3;
Gamma2_12 = N2_1 .* M12_1 + N2_2 .* M12_2 +
N2_3 .* M12_3;
Gamma2_21 = N2_1 .* M21_1 + N2_2 .* M21_2 +
N2_3 .* M21_3;
Gamma2_22 = N2_1 .* M22_1 + N2_2 .* M22_2 +

```

```

N2_3 .* M22_3;

Kappa_11 = -M3_1 .* M11_1 - M3_2 .* M11_2 -
M3_3 .* M11_3;
Kappa_12 = -M3_1 .* M12_1 - M3_2 .* M12_2 -
M3_3 .* M12_3;
Kappa_21 = -M3_1 .* M21_1 - M3_2 .* M21_2 -
M3_3 .* M21_3;
Kappa_22 = -M3_1 .* M22_1 - M3_2 .* M22_2 -
M3_3 .* M22_3;

KappaA_11 = H_11 .* Kappa_11 + H_12 .*
Kappa_21;
KappaA_12 = H_11 .* Kappa_12 + H_12 .*
Kappa_22;
KappaA_21 = H_21 .* Kappa_11 + H_22 .*
Kappa_21;
KappaA_22 = H_21 .* Kappa_12 + H_22 .*
Kappa_22;

dKappaA1_11 = M311_1 .* N1_1 + M311_2 .*
N1_2 + M311_3 .* N1_3 + M31_1 .* N11_1
+ M31_2 .* N11_2 + M31_3 .* N11_3;
dKappaA1_12 = M321_1 .* N1_1 + M321_2 .*
N1_2 + M321_3 .* N1_3 + M32_1 .* N11_1
+ M32_2 .* N11_2 + M32_3 .* N11_3;
dKappaA1_21 = M311_1 .* N2_1 + M311_2 .*
N2_2 + M311_3 .* N2_3 + M31_1 .* N21_1
+ M31_2 .* N21_2 + M31_3 .* N21_3;
dKappaA1_22 = M321_1 .* N2_1 + M321_2 .*
N2_2 + M321_3 .* N2_3 + M32_1 .* N21_1
+ M32_2 .* N21_2 + M32_3 .* N21_3;
dKappaA2_11 = M312_1 .* N1_1 + M312_2 .*
N1_2 + M312_3 .* N1_3 + M31_1 .* N12_1
+ M31_2 .* N12_2 + M31_3 .* N12_3;
dKappaA2_12 = M322_1 .* N1_1 + M322_2 .*
N1_2 + M322_3 .* N1_3 + M32_1 .* N12_1
+ M32_2 .* N12_2 + M32_3 .* N12_3;
dKappaA2_21 = M312_1 .* N2_1 + M312_2 .*
N2_2 + M312_3 .* N2_3 + M31_1 .* N22_1
+ M31_2 .* N22_2 + M31_3 .* N22_3;
dKappaA2_22 = M322_1 .* N2_1 + M322_2 .*
N2_2 + M322_3 .* N2_3 + M32_1 .* N22_1
+ M32_2 .* N22_2 + M32_3 .* N22_3;

%%
i=Map(ii,2);
if(Map(ii,1)==1)
    u1=u1_(xi1,xi2,0,0,i,Geo);
    u11=u1_(xi1,xi2,1,0,i,Geo);
    u12=u1_(xi1,xi2,0,1,i,Geo);

    u2=0;
    u21=0;
    u22=0;

    u3=0;
    u31=0;
    u32=0;
    u311=0;
    u322=0;
    u312=0;
    u321=u312;
elseif(Map(ii,1)==2)
    u1=0;
    u11=0;
    u12=0;

    u2=u2_(xi1,xi2,0,0,i,Geo);
    u21=u2_(xi1,xi2,1,0,i,Geo);
    u22=u2_(xi1,xi2,0,1,i,Geo);

    u3=0;
    u31=0;
    u32=0;
    u311=0;
    u322=0;
    u312=0;
    u321=u312;
else
    u1=0;
    u11=0;
    u12=0;

    u2=0;
    u21=0;
    u22=0;

    u3=u3_(xi1,xi2,0,0,i,Geo);
    u31=u3_(xi1,xi2,1,0,i,Geo);
    u311=u3_(xi1,xi2,2,0,i,Geo);
    u32=u3_(xi1,xi2,0,1,i,Geo);
    u322=u3_(xi1,xi2,0,2,i,Geo);
    u312=u3_(xi1,xi2,1,1,i,Geo);
    u321=u312;
end

U1_1 = (-Gamma1_11 .* u1 - Gamma2_11 .* u2
+ Kappa_11 .* u3 + u11) .* N1_1 + (-
Gamma1_12 .* u1 - Gamma2_12 .* u2 +
Kappa_12 .* u3 + u21) .* N2_1 + (-
KappaA_11 .* u1 - KappaA_21 .* u2 + u31
) .* N3_1;
U1_2 = (-Gamma1_11 .* u1 - Gamma2_11 .* u2
+ Kappa_11 .* u3 + u11) .* N1_2 + (-
Gamma1_12 .* u1 - Gamma2_12 .* u2 +
Kappa_12 .* u3 + u21) .* N2_2 + (-
KappaA_11 .* u1 - KappaA_21 .* u2 + u31
) .* N3_2;
U1_3 = (-Gamma1_11 .* u1 - Gamma2_11 .* u2
+ Kappa_11 .* u3 + u11) .* N1_3 + (-
Gamma1_12 .* u1 - Gamma2_12 .* u2 +
Kappa_12 .* u3 + u21) .* N2_3 + (-
KappaA_11 .* u1 - KappaA_21 .* u2 + u31
) .* N3_3;
U2_1 = (-Gamma1_21 .* u1 - Gamma2_21 .* u2
+ Kappa_21 .* u3 + u12) .* N1_1 + (-
Gamma1_22 .* u1 - Gamma2_22 .* u2 +
Kappa_22 .* u3 + u22) .* N2_1 + (-
KappaA_12 .* u1 - KappaA_22 .* u2 + u32
) .* N3_1;
U2_2 = (-Gamma1_21 .* u1 - Gamma2_21 .* u2
+ Kappa_21 .* u3 + u12) .* N1_2 + (-
Gamma1_22 .* u1 - Gamma2_22 .* u2 +
Kappa_22 .* u3 + u22) .* N2_2 + (-
KappaA_12 .* u1 - KappaA_22 .* u2 + u32
) .* N3_2;
U2_3 = (-Gamma1_21 .* u1 - Gamma2_21 .* u2
+ Kappa_21 .* u3 + u12) .* N1_3 + (-
Gamma1_22 .* u1 - Gamma2_22 .* u2 +
Kappa_22 .* u3 + u22) .* N2_3 + (-
KappaA_12 .* u1 - KappaA_22 .* u2 + u32
) .* N3_3;

gamma11 = U1_1 .* M1_1 + U1_2 .* M1_2 +
U1_3 .* M1_3;
gamma12 = U2_1 .* M1_1 ./ 0.2e1 + U2_2 .*
M1_2 ./ 0.2e1 + U2_3 .* M1_3 ./ 0.2e1 +
U1_1 .* M2_1 ./ 0.2e1 + U1_2 .* M2_2
./ 0.2e1 + U1_3 .* M2_3 ./ 0.2e1;
gamma21 = U2_1 .* M1_1 ./ 0.2e1 + U2_2 .*
M1_2 ./ 0.2e1 + U2_3 .* M1_3 ./ 0.2e1 +
U1_1 .* M2_1 ./ 0.2e1 + U1_2 .* M2_2
./ 0.2e1 + U1_3 .* M2_3 ./ 0.2e1;

```



```

gamma22 = U2_1 .* M2_1 + U2_2 .* M2_2 +
          U2_3 .* M2_3;

if(strcmp(Fis.teoria,'koiter'))
    FATOR=0;
elseif(strcmp(Fis.teoria,'sanders'))
    FATOR=1/2;
elseif(strcmp(Fis.teoria,'flavio'))
    FATOR=1;
end

rho11 = Gamma1_11 .* (-KappaA_11 .* u1 -
    KappaA_21 .* u2 + u31) + Gamma2_11 .*
    (-KappaA_12 .* u1 - KappaA_22 .* u2 +
    u32) + (-Gamma1_11 .* u1 - Gamma2_11 .*
    u2 + Kappa_11 .* u3 + u11) .*
    KappaA_11 + (-Gamma1_21 .* u1 -
    Gamma2_21 .* u2 + Kappa_12 .* u3 + u21)
    .* KappaA_21 - u311 + dKappaA1_11 .*
    u1 + KappaA_11 .* u11 + dKappaA1_21 .*
    u2 + KappaA_21 .* u21 - FATOR .* (2 .*
    KappaA_11 .* gamma11 + 2 .* KappaA_21
    .* gamma12);
rho12 = Gamma1_12 .* (-KappaA_11 .* u1 -
    KappaA_21 .* u2 + u31) + Gamma2_12 .*
    (-KappaA_12 .* u1 - KappaA_22 .* u2 +
    u32) + (-Gamma1_11 .* u1 - Gamma2_11 .*
    u2 + Kappa_11 .* u3 + u11) .*
    KappaA_12 + (-Gamma1_21 .* u1 -
    Gamma2_21 .* u2 + Kappa_12 .* u3 + u21)
    .* KappaA_22 - u312 + dKappaA2_11 .*
    u1 + KappaA_11 .* u12 + dKappaA2_21 .*
    u2 + KappaA_21 .* u22 - FATOR .* (
    KappaA_12 .* gamma11 + KappaA_22 .*
    gamma12 + KappaA_11 .* gamma21 +
    KappaA_21 .* gamma22);
rho21 = Gamma1_21 .* (-KappaA_11 .* u1 -
    KappaA_21 .* u2 + u31) + Gamma2_21 .*
    (-KappaA_12 .* u1 - KappaA_22 .* u2 +
    u32) + (-Gamma1_12 .* u1 - Gamma2_12 .*
    u2 + Kappa_21 .* u3 + u12) .*
    KappaA_11 + (-Gamma1_22 .* u1 -
    Gamma2_22 .* u2 + Kappa_22 .* u3 + u22)
    .* KappaA_21 - u321 + dKappaA1_22 .*
    u1 + KappaA_12 .* u11 + dKappaA1_22 .*
    u2 + KappaA_22 .* u21 - FATOR .* (
    KappaA_12 .* gamma11 + KappaA_22 .*
    gamma12 + KappaA_11 .* gamma21 +
    KappaA_21 .* gamma22);
rho22 = Gamma1_22 .* (-KappaA_11 .* u1 -
    KappaA_21 .* u2 + u31) + Gamma2_22 .*
    (-KappaA_12 .* u1 - KappaA_22 .* u2 +
    u32) + (-Gamma1_12 .* u1 - Gamma2_12 .*
    u2 + Kappa_21 .* u3 + u12) .*
    KappaA_12 + (-Gamma1_22 .* u1 -
    Gamma2_22 .* u2 + Kappa_22 .* u3 + u22)
    .* KappaA_22 - u322 + dKappaA2_22 .*
    u1 + KappaA_12 .* u12 + dKappaA2_22 .*
    u2 + KappaA_22 .* u22 - FATOR .* (2 .*
    KappaA_12 .* gamma21 + 2 .* KappaA_22
    .* gamma22);

```

Deformações não lineares

```

function [gamma11, gamma12, gamma21,
    gamma22, rho11, rho12, rho21, rho22]=
    deformacao_nao_linear(xi1, xi2, ii, jj,
    Geo, Fis, Map)

Z1=Z(xi1, xi2, 1, 0, Geo);
Z2=Z(xi1, xi2, 0, 1, Geo);
Z12=Z(xi1, xi2, 1, 1, Geo);
Z11=Z(xi1, xi2, 2, 0, Geo);
Z22=Z(xi1, xi2, 0, 2, Geo);
Z21=Z12;
%Z112=Z(xi1, xi2, 2, 1, Geo);
%Z122=Z(xi1, xi2, 1, 2, Geo);
%Z111=Z(xi1, xi2, 3, 0, Geo);
%Z222=Z(xi1, xi2, 0, 3, Geo);
%Z211=Z112;
%Z121=Z112;
%Z221=Z122;
%Z212=Z221;

D = sqrt((Z1.^2 + Z2.^2 + 1));
% D1 = ((Z1.^2 + Z2.^2 + 1).^(-0.1e1
    ./ 0.2e1) .* (2 .* Z1 .* Z11 + 2 .* Z2
    .* Z21)) ./ 0.2e1;
% D2 = ((Z1.^2 + Z2.^2 + 1).^(-0.1e1
    ./ 0.2e1) .* (2 .* Z1 .* Z21 + 2 .* Z2
    .* Z22)) ./ 0.2e1;
%
% D11 = -((Z1.^2 + Z2.^2 + 1).^(-0.3
    e1 ./ 0.2e1) .* (2 .* Z1 .* Z11 + 2 .*
    Z2 .* Z21).^2) ./ 0.4e1 + ((Z1.^2 +
    Z2.^2 + 1).^(-0.1e1 ./ 0.2e1) .*
    (2 .* Z1 .* Z111 + 2 .* Z11.^2 + 2 .*
    Z2 .* Z211 + 2 .* Z21.^2)) ./ 0.2e1;
% D12 = -((Z1.^2 + Z2.^2 + 1).^(-0.3
    e1 ./ 0.2e1) .* (2 .* Z1 .* Z11 + 2 .*
    Z2 .* Z21).^2) ./ 0.4e1 + ((Z1.^2 +
    Z2.^2 + 1).^(-0.1e1 ./ 0.2e1) .*
    (2 .* Z1 .* Z211 + 2 .* Z11.^2 + 2 .*
    Z2 .* Z211 + 2 .* Z21.^2)) ./ 0.2e1;
% D21 = -((Z1.^2 + Z2.^2 + 1).^(-0.3
    e1 ./ 0.2e1) .* (2 .* Z1 .* Z21 + 2 .*
    Z2 .* Z22).^2) ./ 0.4e1 + ((Z1.^2 +
    Z2.^2 + 1).^(-0.1e1 ./ 0.2e1) .*
    (2 .* Z1 .* Z221 + 2 .* Z2 .* Z222 + 2
    .* Z21.^2 + 2 .* Z22.^2)) ./ 0.2e1;
%
% M1_1 = 1;
% M1_2 = 0;
% M1_3 = Z1;
% M2_1 = 0;
% M2_2 = 1;
% M2_3 = Z2;
M3_1 = -0.1e1 ./ D .* Z1;
M3_2 = -0.1e1 ./ D .* Z2;
M3_3 = 0.1e1 ./ D;

N1_1 = (Z2.^2 + 1) ./ D.^2;
N1_2 = -0.1e1 ./ D.^2 .* Z2 .* Z1;
N1_3 = 0.1e1 ./ D.^2 .* Z1;

```

```

N2_1 = -0.1e1 ./ D .^ 2 .* Z2 .* Z1;
N2_2 = (Z1 .^ 2 + 1) ./ D .^ 2;
N2_3 = 0.1e1 ./ D .^ 2 .* Z2;
N3_1 = -0.1e1 ./ D .* Z1;
N3_2 = -0.1e1 ./ D .* Z2;
N3_3 = 0.1e1 ./ D;

M11_1 = 0;
M11_2 = 0;
M11_3 = Z11;
M12_1 = 0;
M12_2 = 0;
M12_3 = Z21;
M21_1 = 0;
M21_2 = 0;
M21_3 = Z21;
M22_1 = 0;
M22_2 = 0;
M22_3 = Z22;
% M31_1 = 0.1e1 ./ D .^ 2 .* Z1 .* D1 - 0.1
% e1 ./ D .* Z11;
% M31_2 = 0.1e1 ./ D .^ 2 .* Z2 .* D1 - 0.1
% e1 ./ D .* Z21;
% M31_3 = -0.1e1 ./ D .^ 2 .* D1;
% M32_1 = 0.1e1 ./ D .^ 2 .* Z1 .* D2 - 0.1
% e1 ./ D .* Z21;
% M32_2 = 0.1e1 ./ D .^ 2 .* Z2 .* D2 - 0.1
% e1 ./ D .* Z22;
% M32_3 = -0.1e1 ./ D .^ 2 .* D2;
%
% N11_1 = 2 .* (Z2 .* Z21 .* D - D1 .* Z2
% .^ 2 - D1) ./ D .^ 3;
% N11_2 = -(Z1 .* Z21 .* D + Z2 .* Z11 .* D
% - 2 .* Z2 .* Z1 .* D1) ./ D .^ 3;
% N11_3 = (Z11 .* D - 2 .* Z1 .* D1) ./ D
% .^ 3;
% N12_1 = 2 .* (Z2 .* Z22 .* D - D2 .* Z2
% .^ 2 - D2) ./ D .^ 3;
% N12_2 = -(Z1 .* Z22 .* D + Z2 .* Z21 .* D
% - 2 .* Z2 .* Z1 .* D2) ./ D .^ 3;
% N12_3 = (Z21 .* D - 2 .* Z1 .* D2) ./ D
% .^ 3;
% N21_1 = -(Z1 .* Z21 .* D + Z2 .* Z11 .* D
% - 2 .* Z2 .* Z1 .* D1) ./ D .^ 3;
% N21_2 = 2 .* (Z1 .* Z11 .* D - D1 .* Z1
% .^ 2 - D1) ./ D .^ 3;
% N21_3 = (Z21 .* D - 2 .* Z2 .* D1) ./ D
% .^ 3;
% N22_1 = -(Z1 .* Z22 .* D + Z2 .* Z21 .* D
% - 2 .* Z2 .* Z1 .* D2) ./ D .^ 3;
% N22_2 = 2 .* (Z1 .* Z21 .* D - D2 .* Z1
% .^ 2 - D2) ./ D .^ 3;
% N22_3 = (Z22 .* D - 2 .* Z2 .* D2) ./ D
% .^ 3;
%
% M311_1 = -2 ./ D .^ 3 .* Z1 .* D1 .^ 2 +
% 2 ./ D .^ 2 .* Z11 .* D1 + 1 ./ D .^ 2
% .* Z1 .* D11 - 1 ./ D .* Z111;
% M311_2 = -2 ./ D .^ 3 .* Z2 .* D1 .^ 2 +
% 2 ./ D .^ 2 .* Z21 .* D1 + 1 ./ D .^ 2
% .* Z2 .* D11 - 1 ./ D .* Z211;
% M311_3 = 2 ./ D .^ 3 .* D1 .^ 2 - 1 ./ D
% .^ 2 .* D11;
% M312_1 = -2 ./ D .^ 3 .* Z1 .* D2 .* D1 +
% 1 ./ D .^ 2 .* Z11 .* D2 + 1 ./ D .^ 2
% .* Z1 .* D21 + 1 ./ D .^ 2 .* Z21 .*
% D1 - 1 ./ D .* Z211;
% M312_2 = -2 ./ D .^ 3 .* Z2 .* D2 .* D1 +
% 1 ./ D .^ 2 .* Z21 .* D2 + 1 ./ D .^ 2
% .* Z2 .* D21 + 1 ./ D .^ 2 .* Z22 .*
% D1 - 1 ./ D .* Z221;
% M312_3 = 2 ./ D .^ 3 .* D2 .* D1 - 1 ./ D
% .^ 2 .* D21;
% M321_1 = -2 ./ D .^ 3 .* Z1 .* D2 .* D1 +
% 1 ./ D .^ 2 .* Z11 .* D2 + 1 ./ D .^ 2
% .* Z1 .* D21 + 1 ./ D .^ 2 .* Z21 .*
% D1 - 1 ./ D .* Z211;
% M321_2 = -2 ./ D .^ 3 .* Z2 .* D2 .* D1 +
% 1 ./ D .^ 2 .* Z21 .* D2 + 1 ./ D .^ 2
% .* Z2 .* D21 + 1 ./ D .^ 2 .* Z22 .*
% D1 - 1 ./ D .* Z221;
% M321_3 = 2 ./ D .^ 3 .* D2 .* D1 - 1 ./ D
% .^ 2 .* D21;
% M322_1 = -2 ./ D .^ 3 .* Z1 .* D2 .^ 2 +
% 2 ./ D .^ 2 .* Z21 .* D2 + 1 ./ D .^ 2
% .* Z1 .* D22 - 1 ./ D .* Z221;
% M322_2 = -2 ./ D .^ 3 .* Z2 .* D2 .^ 2 +
% 2 ./ D .^ 2 .* Z22 .* D2 + 1 ./ D .^ 2
% .* Z2 .* D22 - 1 ./ D .* Z222;
% M322_3 = 2 ./ D .^ 3 .* D2 .^ 2 - 1 ./ D
% .^ 2 .* D22;
%
% G_11 = M1_1 .^ 2 + M1_2 .^ 2 + M1_3 .^ 2;
% G_12 = M1_1 .* M2_1 + M1_2 .* M2_2 + M1_3
% .* M2_3;
% G_21 = M1_1 .* M2_1 + M1_2 .* M2_2 + M1_3
% .* M2_3;
% G_22 = M2_1 .^ 2 + M2_2 .^ 2 + M2_3 .^ 2;

H_11 = N1_1 .^ 2 + N1_2 .^ 2 + N1_3 .^ 2;
H_12 = N1_1 .* N2_1 + N1_2 .* N2_2 + N1_3
% .* N2_3;
H_21 = N1_1 .* N2_1 + N1_2 .* N2_2 + N1_3
% .* N2_3;
H_22 = N2_1 .^ 2 + N2_2 .^ 2 + N2_3 .^ 2;

Gamma1_11 = N1_1 .* M11_1 + N1_2 .* M11_2 +
% N1_3 .* M11_3;
Gamma1_12 = N1_1 .* M12_1 + N1_2 .* M12_2 +
% N1_3 .* M12_3;
Gamma1_21 = N1_1 .* M21_1 + N1_2 .* M21_2 +
% N1_3 .* M21_3;
Gamma1_22 = N1_1 .* M22_1 + N1_2 .* M22_2 +
% N1_3 .* M22_3;
Gamma2_11 = N2_1 .* M11_1 + N2_2 .* M11_2 +
% N2_3 .* M11_3;
Gamma2_12 = N2_1 .* M12_1 + N2_2 .* M12_2 +
% N2_3 .* M12_3;
Gamma2_21 = N2_1 .* M21_1 + N2_2 .* M21_2 +
% N2_3 .* M21_3;
Gamma2_22 = N2_1 .* M22_1 + N2_2 .* M22_2 +
% N2_3 .* M22_3;

Kappa_11 = -M3_1 .* M11_1 - M3_2 .* M11_2 -
% M3_3 .* M11_3;
Kappa_12 = -M3_1 .* M12_1 - M3_2 .* M12_2 -
% M3_3 .* M12_3;
Kappa_21 = -M3_1 .* M21_1 - M3_2 .* M21_2 -
% M3_3 .* M21_3;
Kappa_22 = -M3_1 .* M22_1 - M3_2 .* M22_2 -
% M3_3 .* M22_3;

KappaA_11 = H_11 .* Kappa_11 + H_12 .*
% Kappa_21;
KappaA_12 = H_11 .* Kappa_12 + H_12 .*
% Kappa_22;
KappaA_21 = H_21 .* Kappa_11 + H_22 .*
% Kappa_21;
KappaA_22 = H_21 .* Kappa_12 + H_22 .*
% Kappa_22;

% dKappaA1_11 = M311_1 .* N1_1 + M311_2 .*
% N1_2 + M311_3 .* N1_3 + M31_1 .* N11_1

```

```

+ M31_2 .* N11_2 + M31_3 .* N11_3;
% dKappaA1_12 = M321_1 .* N1_1 + M321_2 .*
N1_2 + M321_3 .* N1_3 + M32_1 .* N11_1
+ M32_2 .* N11_2 + M32_3 .* N11_3;
% dKappaA1_21 = M311_1 .* N2_1 + M311_2 .*
N2_2 + M311_3 .* N2_3 + M31_1 .* N21_1
+ M31_2 .* N21_2 + M31_3 .* N21_3;
% dKappaA1_22 = M321_1 .* N2_1 + M321_2 .*
N2_2 + M321_3 .* N2_3 + M32_1 .* N21_1
+ M32_2 .* N21_2 + M32_3 .* N21_3;
% dKappaA2_11 = M312_1 .* N1_1 + M312_2 .*
N1_2 + M312_3 .* N1_3 + M31_1 .* N12_1
+ M31_2 .* N12_2 + M31_3 .* N12_3;
% dKappaA2_12 = M322_1 .* N1_1 + M322_2 .*
N1_2 + M322_3 .* N1_3 + M32_1 .* N12_1
+ M32_2 .* N12_2 + M32_3 .* N12_3;
% dKappaA2_21 = M312_1 .* N2_1 + M312_2 .*
N2_2 + M312_3 .* N2_3 + M31_1 .* N22_1
+ M31_2 .* N22_2 + M31_3 .* N22_3;
% dKappaA2_22 = M322_1 .* N2_1 + M322_2 .*
N2_2 + M322_3 .* N2_3 + M32_1 .* N22_1
+ M32_2 .* N22_2 + M32_3 .* N22_3;

gamma1=zeros(size(xi1));
gamma12=zeros(size(xi1));
gamma21=zeros(size(xi1));
gamma22=zeros(size(xi1));

rho11=zeros(size(xi1));
rho12=zeros(size(xi1));
rho21=zeros(size(xi1));
rho22=zeros(size(xi1));

%%
i=Map(ii,2);
if(Map(ii,1)==1)
    u1= u1_(xi1,xi2,0,0,i,Geo);
    u11=u1_(xi1,xi2,1,0,i,Geo);
    u12=u1_(xi1,xi2,0,1,i,Geo);

    u2=0;
    u21=0;
    u22=0;

    u3=0;
    u31=0;
    u32=0;
    %u311=0;
    %u322=0;
    %u312=0;
    %u321=u312;
elseif(Map(ii,1)==2)
    u1=0;
    u11=0;
    u12=0;

    u2= u2_(xi1,xi2,0,0,i,Geo);
    u21=u2_(xi1,xi2,1,0,i,Geo);
    u22=u2_(xi1,xi2,0,1,i,Geo);

    u3=0;
    u31=0;
    u32=0;
    %u311=0;
    %u322=0;
    %u312=0;
    %u321=u312;
else
    u1=0;
    u11=0;
    u12=0;

    u2=0;
    u21=0;
    u22=0;

    u3=0;
    u31=0;
    u32=0;
    %u311=0;
    %u322=0;
    %u312=0;
    %u321=u312;
end

if(strcmp(Fis.NL,'total'))
    UA1_1 = (-Gamma1_11 .* u1 - Gamma2_11
    .* u2 + Kappa_11 .* u3 + u11) .*
    N1_1 + (-Gamma1_12 .* u1 -
    Gamma2_12 .* u2 + Kappa_12 .* u3 +
    u21) .* N2_1 + (-KappaA_11 .* u1 -
    KappaA_21 .* u2 + u31) .* N3_1;
    UA1_2 = (-Gamma1_11 .* u1 - Gamma2_11
    .* u2 + Kappa_11 .* u3 + u11) .*
    N1_2 + (-Gamma1_12 .* u1 -
    Gamma2_12 .* u2 + Kappa_12 .* u3 +
    u21) .* N2_2 + (-KappaA_11 .* u1 -
    KappaA_21 .* u2 + u31) .* N3_2;
    UA1_3 = (-Gamma1_11 .* u1 - Gamma2_11
    .* u2 + Kappa_11 .* u3 + u11) .*
    N1_3 + (-Gamma1_12 .* u1 -
    Gamma2_12 .* u2 + Kappa_12 .* u3 +
    u21) .* N2_3 + (-KappaA_11 .* u1 -
    KappaA_21 .* u2 + u31) .* N3_3;
    UA2_1 = (-Gamma1_21 .* u1 - Gamma2_21
    .* u2 + Kappa_21 .* u3 + u12) .*
    N1_1 + (-Gamma1_22 .* u1 -
    Gamma2_22 .* u2 + Kappa_22 .* u3 +
    u22) .* N2_1 + (-KappaA_12 .* u1 -
    KappaA_22 .* u2 + u32) .* N3_1;
    UA2_2 = (-Gamma1_21 .* u1 - Gamma2_21
    .* u2 + Kappa_21 .* u3 + u12) .*
    N1_2 + (-Gamma1_22 .* u1 -
    Gamma2_22 .* u2 + Kappa_22 .* u3 +
    u22) .* N2_2 + (-KappaA_12 .* u1 -
    KappaA_22 .* u2 + u32) .* N3_2;
    UA2_3 = (-Gamma1_21 .* u1 - Gamma2_21
    .* u2 + Kappa_21 .* u3 + u12) .*
    N1_3 + (-Gamma1_22 .* u1 -
    Gamma2_22 .* u2 + Kappa_22 .* u3 +
    u22) .* N2_3 + (-KappaA_12 .* u1 -
    KappaA_22 .* u2 + u32) .* N3_3;
elseif(strcmp(Fis.NL,'parcial_rot'))
    uA31=u31;
    uA32=u32;
elseif(strcmp(Fis.NL,'parcial_desloc_rot'))
    uA3=u3;
    uA31=u31;
    uA32=u32;
end

%%
i=Map(jj,2);
if(Map(jj,1)==1)
    u1= u1_(xi1,xi2,0,0,i,Geo);
    u11=u1_(xi1,xi2,1,0,i,Geo);
    u12=u1_(xi1,xi2,0,1,i,Geo);

    u2=0;
    u21=0;
    u22=0;

    u3=0;
    u31=0;
    u32=0;
    %u311=0;
    %u322=0;
    %u312=0;
    %u321=u312;
end

```

```

u32=0;
%u311=0;
%u322=0;
%u312=0;
%u321=u312;
elseif(Map(jj,1)==2)
u1=0;
u11=0;
u12=0;

u2= u2_(xi1,xi2,0,0,i,Geo);
u21=u2_(xi1,xi2,1,0,i,Geo);
u22=u2_(xi1,xi2,0,1,i,Geo);

u3=0;
u31=0;
u32=0;
%u311=0;
%u322=0;
%u312=0;
%u321=u312;
else
u1=0;
u11=0;
u12=0;

u2=0;
u21=0;
u22=0;

u3= u3_(xi1,xi2,0,0,i,Geo);
u31=u3_(xi1,xi2,1,0,i,Geo);
u32=u3_(xi1,xi2,0,1,i,Geo);
%u311=u3_(xi1,xi2,2,0,i,Geo);
%u322=u3_(xi1,xi2,0,2,i,Geo);
%u312=u3_(xi1,xi2,1,1,i,Geo);
%u321=u312;
end

if(strcmp(Fis.NL,'total'))
UB1_1 = (-Gamma1_11 .* u1 - Gamma2_11
.* u2 + Kappa_11 .* u3 + u11) .*
N1_1 + (-Gamma1_12 .* u1 -
Gamma2_12 .* u2 + Kappa_12 .* u3 +
u21) .* N2_1 + (-KappaA_11 .* u1 -
KappaA_21 .* u2 + u31) .* N3_1;
UB1_2 = (-Gamma1_11 .* u1 - Gamma2_11
.* u2 + Kappa_11 .* u3 + u11) .*
N1_2 + (-Gamma1_12 .* u1 -
Gamma2_12 .* u2 + Kappa_12 .* u3 +
u21) .* N2_2 + (-KappaA_11 .* u1 -
KappaA_21 .* u2 + u31) .* N3_2;
UB1_3 = (-Gamma1_11 .* u1 - Gamma2_11
.* u2 + Kappa_11 .* u3 + u11) .*
N1_3 + (-Gamma1_12 .* u1 -
Gamma2_12 .* u2 + Kappa_12 .* u3 +
u21) .* N2_3 + (-KappaA_11 .* u1 -
KappaA_21 .* u2 + u31) .* N3_3;
UB2_1 = (-Gamma1_21 .* u1 - Gamma2_21
.* u2 + Kappa_21 .* u3 + u12) .*
N1_1 + (-Gamma1_22 .* u1 -
Gamma2_22 .* u2 + Kappa_22 .* u3 +
u22) .* N2_1 + (-KappaA_12 .* u1 -
KappaA_22 .* u2 + u32) .* N3_1;
UB2_2 = (-Gamma1_21 .* u1 - Gamma2_21
.* u2 + Kappa_21 .* u3 + u12) .*
N1_2 + (-Gamma1_22 .* u1 -
Gamma2_22 .* u2 + Kappa_22 .* u3 +
u22) .* N2_2 + (-KappaA_12 .* u1 -
KappaA_22 .* u2 + u32) .* N3_2;
UB2_3 = (-Gamma1_21 .* u1 - Gamma2_21
.* u2 + Kappa_21 .* u3 + u12) .*
N1_3 + (-Gamma1_22 .* u1 -
Gamma2_22 .* u2 + Kappa_22 .* u3 +
u22) .* N2_3 + (-KappaA_12 .* u1 -
KappaA_22 .* u2 + u32) .* N3_3;
elseif(strcmp(Fis.NL,'parcial_rot'))
uB31=u31;
uB32=u32;
elseif(strcmp(Fis.NL,'parcial_desloc_rot'))
uB3=u3;
uB31=u31;
uB32=u32;
end

if(strcmp(Fis.NL,'total'))
gamma11 = UA1_1 .* UB1_1 ./ 0.2e1 +
UA1_2 .* UB1_2 ./ 0.2e1 + UA1_3 .*
UB1_3 ./ 0.2e1;
gamma12 = UA1_1 .* UB2_1 ./ 0.2e1 +
UA1_2 .* UB2_2 ./ 0.2e1 + UA1_3 .*
UB2_3 ./ 0.2e1;
gamma21 = UA2_1 .* UB1_1 ./ 0.2e1 +
UA2_2 .* UB1_2 ./ 0.2e1 + UA2_3 .*
UB1_3 ./ 0.2e1;
gamma22 = UA2_1 .* UB2_1 ./ 0.2e1 +
UA2_2 .* UB2_2 ./ 0.2e1 + UA2_3 .*
UB2_3 ./ 0.2e1;
elseif(strcmp(Fis.NL,'parcial_rot'))
gamma11=uA31.*uB31./2.0;
gamma12=uA31.*uB32./2.0;
gamma21=uA32.*uB31./2.0;
gamma22=uA32.*uB32./2.0;
elseif(strcmp(Fis.NL,'parcial_desloc_rot'))
gamma11=uA31.*uB31./2.0 + uA3 .* uB3 .*
(Kappa_11.^2 .* H_11 + Kappa_11
.* Kappa_12 .* H_12 + Kappa_12 .*
Kappa_11 .* H_21 + Kappa_12.^2 .*
H_22) ./ 0.2e1;
gamma12=uA31.*uB32./2.0 + uA3 .* uB3 .*
(Kappa_11 .* Kappa_21 .* H_11 +
Kappa_11 .* Kappa_22 .* H_12 +
Kappa_12 .* Kappa_21 .* H_21 +
Kappa_12 .* Kappa_22 .* H_22) ./
0.2e1;
gamma21=uA32.*uB31./2.0 + uA3 .* uB3 .*
(Kappa_21 .* Kappa_11 .* H_11 +
Kappa_21 .* Kappa_12 .* H_12 +
Kappa_22 .* Kappa_11 .* H_21 +
Kappa_22 .* Kappa_12 .* H_22) ./
0.2e1;
gamma22=uA32.*uB32./2.0 + uA3 .* uB3 .*
(Kappa_21.^2 .* H_11 + Kappa_21
.* Kappa_22 .* H_12 + Kappa_22 .*
Kappa_21 .* H_21 + Kappa_22.^2 .*
H_22) ./ 0.2e1;
end

```

Densidade de energia

```

function U0=densidade_de_energial(xi1, xi2,
    ii, jj, Geo, Fis, Map)

[gammaA11, gammaA12, gammaA21, gammaA22,
    rhoA11, rhoA12, rhoA21, rhoA22]=
    deformacao_linear(xi1, xi2, ii, Geo,
    Fis, Map);
[gammaB11, gammaB12, gammaB21, gammaB22,
    rhoB11, rhoB12, rhoB21, rhoB22]=
    deformacao_linear(xi1, xi2, jj, Geo,
    Fis, Map);

Z1=Z(xi1, xi2, 1, 0, Geo);
Z2=Z(xi1, xi2, 0, 1, Geo);

D = sqrt((Z1.^2 + Z2.^2 + 1));

N1_1 = (Z2.^2 + 1) ./ D.^2;
N1_2 = -0.1e1 ./ D.^2 .* Z2 .* Z1;
N1_3 = 0.1e1 ./ D.^2 .* Z1;
N2_1 = -0.1e1 ./ D.^2 .* Z2 .* Z1;
N2_2 = (Z1.^2 + 1) ./ D.^2;
N2_3 = 0.1e1 ./ D.^2 .* Z2;
N3_1 = -0.1e1 ./ D .* Z1;
N3_2 = -0.1e1 ./ D .* Z2;
N3_3 = 0.1e1 ./ D;

H_11 = N1_1.^2 + N1_2.^2 + N1_3.^2;
H_12 = N1_1 .* N2_1 + N1_2 .* N2_2 + N1_3
    .* N2_3;
H_21 = N1_1 .* N2_1 + N1_2 .* N2_2 + N1_3
    .* N2_3;
H_22 = N2_1.^2 + N2_2.^2 + N2_3.^2;

h=Fis.h;
nu=Fis.nu;
E=Fis.E;

den = (h.^3 .* E ./ (-2 .* nu.^2 + 2)
    .* (2 .* nu .* H_11.^2 + 2 .* (1 - nu)
    .* H_11.^2) .* rhoA11 .* rhoB11) ./
    0.24e2 + (h .* E ./ (-2 .* nu.^2 +
    2) .* (2 .* nu .* H_11.^2 + 2 .* (1 -
    nu) .* H_11.^2) .* gammaA11 .*
    gammaB11) ./ 0.2e1 + (h.^3 .* E ./
    (-2 .* nu.^2 + 2) .* (2 .* nu .* H_11
    .* H_12 + 2 .* (1 - nu) .* H_11 .*
    H_12) .* rhoA12 .* rhoB11) ./ 0.24e2 +
    (h .* E ./ (-2 .* nu.^2 + 2) .* (2 .*
    nu .* H_11 .* H_12 + 2 .* (1 - nu) .*
    H_11 .* H_12) .* gammaA12 .* gammaB11)
    ./ 0.2e1 + (h.^3 .* E ./ (-2 .* nu.^
    2 + 2) .* (2 .* nu .* H_11 .* H_21 +
    2 .* (1 - nu) .* H_11 .* H_12) .*
    rhoA21 .* rhoB11) ./ 0.24e2 + (h .*
    E ./ (-2 .* nu.^2 + 2) .* (2 .* nu .*
    H_21 + 2 .* (1 - nu) .* H_11 .* H_12)
    .* gammaA21 .* gammaB11) ./ 0.2e1 + (h
    .* E ./ (-2 .* nu.^2 + 2) .* (2 .*
    nu .* H_11 .* H_22 + 2 .* (1 - nu) .*
    H_12.^2) .* rhoA22 .* rhoB11) ./
    0.24e2 + (h .* E ./ (-2 .* nu.^2 + 2)
    .* (2 .* nu .* H_11 .* H_22 + 2 .* (1
    - nu) .* H_12.^2) .* gammaA22 .*
    gammaB11) ./ 0.2e1 + (h.^3 .* E ./
    (-2 .* nu.^2 + 2) .* (2 .* nu .* H_11
    .* H_12 + 2 .* (1 - nu) .* H_11 .*
    H_21) .* rhoA11 .* rhoB12) ./ 0.24e2 +
    (h .* E ./ (-2 .* nu.^2 + 2) .* (2 .*
    nu .* H_11 .* H_12 + 2 .* (1 - nu) .*
    H_11 .* H_21) .* gammaA11 .* gammaB12)
    ./ 0.2e1 + (h.^3 .* E ./ (-2 .* nu.^
    2 + 2) .* (2 .* nu .* H_12 .* H_22 +
    2 .* (1 - nu) .* H_12 .* H_21) .*
    rhoA22 .* rhoB12) ./ 0.24e2 + (h .*
    E ./ (-2 .* nu.^2 + 2) .* (2 .* nu .*
    H_12 .* H_21 + 2 .* (1 - nu) .* H_11
    .* H_21) .* gammaA12 .* gammaB21) ./
    0.2e1 + (h.^3 .* E ./ (-2 .* nu.^
    2 + 2) .* (2 .* nu .* H_12 .* H_21 +
    2 .* (1 - nu) .* H_11 .* H_21) .*
    gammaA12 .* gammaB21) ./ 0.2e1 + (h
    .* E ./ (-2 .* nu.^2 + 2) .* (2 .*
    nu .* H_21.^2 + 2 .* (1 - nu) .* (H_11
    .* H_22 + H_12 .* H_21)) .* rhoA21 .*
    rhoB21) ./ 0.24e2 + (h .* E ./ (-2 .*
    nu.^2 + 2) .* (2 .* nu .* H_21.^2 +
    2 .* (1 - nu) .* (H_11 .* H_22 + H_12
    .* H_21)) .* gammaA21 .* gammaB21) ./
    0.2e1 + (h.^3 .* E ./ (-2 .* nu.^2 +
    2) .* (2 .* nu .* H_21 .* H_22 + 2 .*
    (1 - nu) .* H_12 .* H_22) .* rhoA22 .*
    rhoB21) ./ 0.24e2 + (h .* E ./ (-2 .*
    nu.^2 + 2) .* (2 .* nu .* H_21 .*
    H_22 + 2 .* (1 - nu) .* H_12 .* H_22)
    .* gammaA22 .* gammaB21) ./ 0.2e1 + (h
    .* E ./ (-2 .* nu.^2 + 2) .* (2 .*
    nu .* H_11 .* H_22 + 2 .* (1 - nu) .*
    H_21.^2) .* rhoA11 .* rhoB22) ./
    0.24e2 + (h .* E ./ (-2 .* nu.^2 + 2)
    .* (2 .* nu .* H_11 .* H_22 + 2 .* (1
    - nu) .* H_21.^2) .* gammaA11 .*
    gammaB22) ./ 0.2e1 + (h.^3 .* E ./
    (-2 .* nu.^2 + 2) .* (2 .* nu .* H_12
    .* H_22 + 2 .* (1 - nu) .* H_21 .*
    H_22) .* rhoA12 .* rhoB22) ./ 0.24e2 +
    (h .* E ./ (-2 .* nu.^2 + 2) .* (2 .*
    nu .* H_12 .* H_22 + 2 .* (1 - nu) .*
    H_21 .* H_22) .* gammaA12 .* gammaB22)
    ./ 0.2e1 + (h.^3 .* E ./ (-2 .* nu.^
    2 + 2) .* (2 .* nu .* H_21 .* H_22 +
    2 .* (1 - nu) .* H_21 .* H_22) .*
    rhoA21 .* rhoB22) ./ 0.24e2 + (h .*
    E ./ (-2 .* nu.^2 + 2) .* (2 .* nu .*
    H_22.^2 + 2 .* (1 - nu) .* H_22 .*
    H_22) .* rhoA22 .* rhoB22) ./ 0.24

```

```

e2 + (h .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2) .*
(2 .* nu .* H_22 .^ 2 + 2 .* (1 - nu)
.* H_22 .^ 2) .* gammaA22 .* gammaB22)
./ 0.2e1;
U0=den.*D;
end

function U0=densidade_de_energia2(xi1, xi2,
ii, jj, kk, Geo, Fis, Map)

[gammaA11, gammaA12, gammaA21, gammaA22,
rhoA11, rhoA12, rhoA21, rhoA22]=
deformacao_linear(xi1, xi2, ii, Geo,
Fis, Map);
[gammaB11, gammaB12, gammaB21, gammaB22,
rhoB11, rhoB12, rhoB21, rhoB22]=
deformacao_nao_linear(xi1, xi2, jj, kk,
Geo, Fis, Map);

Z1=Z(xi1, xi2, 1, 0, Geo);
Z2=Z(xi1, xi2, 0, 1, Geo);

D = sqrt((Z1 .^ 2 + Z2 .^ 2 + 1));

N1_1 = (Z2 .^ 2 + 1) ./ D .^ 2;
N1_2 = -0.1e1 ./ D .^ 2 .* Z2 .* Z1;
N1_3 = 0.1e1 ./ D .^ 2 .* Z1;
N2_1 = -0.1e1 ./ D .^ 2 .* Z2 .* Z1;
N2_2 = (Z1 .^ 2 + 1) ./ D .^ 2;
N2_3 = 0.1e1 ./ D .^ 2 .* Z2;
N3_1 = -0.1e1 ./ D .* Z1;
N3_2 = -0.1e1 ./ D .* Z2;
N3_3 = 0.1e1 ./ D;

H_11 = N1_1 .^ 2 + N1_2 .^ 2 + N1_3 .^ 2;
H_12 = N1_1 .* N2_1 + N1_2 .* N2_2 + N1_3
.* N2_3;
H_21 = N1_1 .* N2_1 + N1_2 .* N2_2 + N1_3
.* N2_3;
H_22 = N2_1 .^ 2 + N2_2 .^ 2 + N2_3 .^ 2;

h=Fis.h;
nu=Fis.nu;
E=Fis.E;

den = (h .^ 3 .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2)
.* (2 .* nu .* H_11 .^ 2 + 2 .* (1 - nu)
) .* H_11 .^ 2) .* rhoA11 .* rhoB11) ./
0.24e2 + (h .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 +
2) .* (2 .* nu .* H_11 .^ 2 + 2 .* (1 -
nu) .* H_11 .^ 2) .* gammaA11 .*
gammaB11) ./ 0.2e1 + (h .^ 3 .* E ./
(-2 .* nu .^ 2 + 2) .* (2 .* nu .* H_11
.* H_12 + 2 .* (1 - nu) .* H_11 .*
H_12) .* rhoA12 .* rhoB11) ./ 0.24e2 +
(h .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2) .* (2 .*
nu .* H_11 .* H_12 + 2 .* (1 - nu) .*
H_11 .* H_12) .* gammaA12 .* gammaB11)
./ 0.2e1 + (h .^ 3 .* E ./ (-2 .* nu .^
2 + 2) .* (2 .* nu .* H_11 .* H_22 + 2
.* (1 - nu) .* H_11 .* H_12) .* rhoA21
.* rhoB11) ./ 0.24e2 + (h .* E ./ (-2
.* nu .^ 2 + 2) .* (2 .* nu .* H_11 .*
H_21 + 2 .* (1 - nu) .* H_11 .* H_12)
.* gammaA21 .* gammaB11) ./ 0.2e1 + (h
.^ 3 .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2) .* (2
.* nu .* H_11 .* H_22 + 2 .* (1 - nu)
.* H_12 .^ 2) .* rhoA22 .* rhoB11) ./
0.24e2 + (h .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2)
.* (2 .* nu .* H_11 .* H_22 + 2 .* (1
- nu) .* H_12 .^ 2) .* gammaA22 .*
gammaB11) ./ 0.2e1 + (h .^ 3 .* E ./
(-2 .* nu .^ 2 + 2) .* (2 .* nu .* H_11
.* H_12 + 2 .* (1 - nu) .* H_11 .*
H_21) .* rhoA11 .* rhoB12) ./ 0.24e2 +
(h .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2) .* (2 .*
nu .* H_11 .* H_12 + 2 .* (1 - nu) .*
H_11 .* H_21 + 2 .* (1 - nu) .* H_11 .*
H_21) .* gammaA11 .* gammaB12) ./ 0.2
e1 + (h .^ 3 .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 +
2) .* (2 .* nu .* H_12 .* H_21 + (1 -
nu) .* (H_11 .* H_22 + H_12 .* H_21))
.* rhoA12 .* rhoB21) ./ 0.24e2 + (h .*
E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2) .* (2 .* nu .*
H_12 .* H_21 + (1 - nu) .* (H_11 .*
H_22 + H_12 .* H_21)) .* gammaA12 .*
gammaB21) ./ 0.2e1 + (h .^ 3 .* E ./
(-2 .* nu .^ 2 + 2) .* (2 .* nu .* H_21
.^ 2 + (1 - nu) .* (H_11 .* H_22 +
H_12 .* H_21)) .* rhoA21 .* rhoB21) ./
0.24e2 + (h .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2)
.* (2 .* nu .* H_21 .^ 2 + (1 - nu) .*
(H_11 .* H_22 + H_12 .* H_21)) .*
gammaA21 .* gammaB21) ./ 0.2e1 + (h .^
3 .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2) .* (2 .*
nu .* H_21 .* H_22 + 2 .* (1 - nu) .*
H_12 .* H_22) .* rhoA22 .* rhoB21) ./
0.24e2 + (h .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2)
.* (2 .* nu .* H_21 .* H_22 + 2 .* (1
- nu) .* H_12 .* H_22) .* gammaA22 .*
gammaB21) ./ 0.2e1 + (h .^ 3 .* E ./
(-2 .* nu .^ 2 + 2) .* (2 .* nu .* H_11
.* H_22 + 2 .* (1 - nu) .* H_21 .^ 2)
.* rhoA11 .* rhoB22) ./ 0.24e2 + (h .*
E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2) .* (2 .* nu .*
H_11 .* H_22 + 2 .* (1 - nu) .* H_21
.^ 2) .* gammaA11 .* gammaB22) ./ 0.2e1
+ (h .^ 3 .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2)
.* (2 .* nu .* H_12 .* H_22 + 2 .* (1 -
nu) .* H_21 .* H_22) .* rhoA12 .*
rhoB22) ./ 0.24e2 + (h .* E ./ (-2 .*
nu .^ 2 + 2) .* (2 .* nu .* H_12 .*
H_22 + 2 .* (1 - nu) .* H_21 .* H_22)
.* gammaA12 .* gammaB22) ./ 0.2e1 + (h
.^ 3 .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2) .* (2
.* nu .* H_21 .* H_22 + 2 .* (1 - nu)

```



```

.* H_21 .* H_22) .* rhoA21 .* rhoB22)
./ 0.24e2 + (h .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 +
2) .* (2 .* nu .* H_21 .* H_22 + 2 .*
(1 - nu) .* H_21 .* H_22) .* gammaA21
.* gammaB22) ./ 0.2e1 + (h .^ 3 .* E ./
(-2 .* nu .^ 2 + 2) .* (2 .* nu .*
H_22 .^ 2 + 2 .* (1 - nu) .* H_22 .^ 2)
.* rhoA22 .* rhoB22) ./ 0.24e2 + (h .*
E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2) .* (2 .* nu
.* H_22 .^ 2 + 2 .* (1 - nu) .* H_22 .^
2) .* gammaA22 .* gammaB22) ./ 0.2e1;
U0=2.*den.*D;
end

function U0=densidade_de_energia3(xi1, xi2,
ii, jj, kk, ll, Geo, Fis, Map)

[gammaA11, gammaA12, gammaA21, gammaA22,
rhoA11, rhoA12, rhoA21, rhoA22]=
deformacao_nao_linear(xi1, xi2, ii, jj,
Geo, Fis, Map);
[gammaB11, gammaB12, gammaB21, gammaB22,
rhoB11, rhoB12, rhoB21, rhoB22]=
deformacao_nao_linear(xi1, xi2, kk, ll,
Geo, Fis, Map);

Z1=Z(xi1, xi2, 1, 0, Geo);
Z2=Z(xi1, xi2, 0, 1, Geo);

D = sqrt((Z1 .^ 2 + Z2 .^ 2 + 1));

N1_1 = (Z2 .^ 2 + 1) ./ D .^ 2;
N1_2 = -0.1e1 ./ D .^ 2 .* Z2 .* Z1;
N1_3 = 0.1e1 ./ D .^ 2 .* Z1;
N2_1 = -0.1e1 ./ D .^ 2 .* Z2 .* Z1;
N2_2 = (Z1 .^ 2 + 1) ./ D .^ 2;
N2_3 = 0.1e1 ./ D .^ 2 .* Z2;
N3_1 = -0.1e1 ./ D .* Z1;
N3_2 = -0.1e1 ./ D .* Z2;
N3_3 = 0.1e1 ./ D;

H_11 = N1_1 .^ 2 + N1_2 .^ 2 + N1_3 .^ 2;
H_12 = N1_1 .* N2_1 + N1_2 .* N2_2 + N1_3
.* N2_3;
H_21 = N1_1 .* N2_1 + N1_2 .* N2_2 + N1_3
.* N2_3;
H_22 = N2_1 .^ 2 + N2_2 .^ 2 + N2_3 .^ 2;

h=Fis.h;
nu=Fis.nu;
E=Fis.E;

den = (h .^ 3 .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2)
.* (2 .* nu .* H_11 .^ 2 + 2 .* (1 - nu)
.* H_11 .^ 2) .* rhoA11 .* rhoB11) ./
0.24e2 + (h .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 +
2) .* (2 .* nu .* H_11 .^ 2 + 2 .* (1 -
nu) .* H_11 .^ 2) .* gammaA11 .*
gammaB11) ./ 0.2e1 + (h .^ 3 .* E ./
(-2 .* nu .^ 2 + 2) .* (2 .* nu .* H_11
.* H_12 + 2 .* (1 - nu) .* H_11 .*
H_12) .* rhoA12 .* rhoB11) ./ 0.24e2 +
(h .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2) .* (2 .*
nu .* H_11 .* H_12 + 2 .* (1 - nu) .*
H_11 .* H_12) .* gammaA12 .* gammaB11)
./ 0.2e1 + (h .^ 3 .* E ./ (-2 .* nu .^
2 + 2) .* (2 .* nu .* H_11 .* H_21 + 2
.* (1 - nu) .* H_11 .* H_12) .* rhoA21
.* rhoB11) ./ 0.24e2 + (h .* E ./ (-2
.* nu .^ 2 + 2) .* (2 .* nu .* H_11 .*
H_21 + 2 .* (1 - nu) .* H_11 .* H_12)
.* gammaA21 .* gammaB11) ./ 0.2e1 + (h
.^ 3 .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2) .* (2
.* nu .* H_11 .* H_22 + 2 .* (1 - nu)
.* H_11 .* H_22 + 2 .* (1 - nu) .*
H_12 .^ 2) .* rhoA22 .* rhoB11) ./
0.24e2 + (h .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2)
.* (2 .* nu .* H_11 .* H_22 + 2 .* (1 -
nu) .* H_11 .* H_22 + 2 .* (1 - nu) .*
H_12 .^ 2) .* gammaA22 .* gammaB22) ./
0.2e1 + (h .^ 3 .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 +
2) .* (2 .* nu .* H_11 .* H_22 + 2 .*
(1 - nu) .* H_11 .* H_22 + 2 .* (1 - nu)
.* H_12 .^ 2) .* rhoA11 .* rhoB21) ./
0.24e2 + (h .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2)
.* (2 .* nu .* H_11 .* H_22 + 2 .* (1 -
nu) .* H_11 .* H_22 + 2 .* (1 - nu) .*
H_12 .^ 2) .* gammaA11 .* gammaB21) ./
0.2e1 + (h .^ 3 .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 +
2) .* (2 .* nu .* H_21 .^ 2 + (1 - nu)
.* (H_11 .* H_22 + H_12 .* H_21)) .*
rhoA21 .* rhoB21) ./ 0.24e2 + (h .* E
./ (-2 .* nu .^ 2 + 2) .* (2 .* nu .*
H_21 .^ 2 + (1 - nu) .* (H_11 .* H_22 +
H_12 .* H_21)) .* gammaA21 .* gammaB21)
./ 0.2e1 + (h .^ 3 .* E ./ (-2 .* nu .^
2 + 2) .* (2 .* nu .* H_21 .^ 2 + (1 - nu)
.* (H_11 .* H_22 + H_12 .* H_21)) .*
rhoA11 .* rhoB22) ./ 0.24e2 + (h .* E
./ (-2 .* nu .^ 2 + 2) .* (2 .* nu .*
H_21 .* H_22 + 2 .* (1 - nu) .* H_12 .*
H_22) .* gammaA22 .* gammaB21) ./ 0.2
e1 + (h .^ 3 .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2)
.* (2 .* nu .* H_11 .* H_22 + 2 .*
(1 - nu) .* H_21 .^ 2) .* rhoA11 .*
rhoB22) ./ 0.24e2 + (h .* E ./ (-2 .*
nu .^ 2 + 2) .* (2 .* nu .* H_11 .*
H_22 + 2 .* (1 - nu) .* H_21 .^ 2) .*
gammaA11 .* gammaB22) ./ 0.2e1 + (h .^
3 .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2) .* (2 .*
nu .* H_12 .* H_22 + 2 .* (1 - nu) .*

```

```

H_21 .* H_22) .* rhoA12 .* rhoB22) ./
0.24e2 + (h .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2)
.* (2 .* nu .* H_12 .* H_22 + 2 .* (1
- nu) .* H_21 .* H_22) .* gammaA12 .*
gammaB22) ./ 0.2e1 + (h .^ 3 .* E ./
(-2 .* nu .^ 2 + 2) .* (2 .* nu .* H_21
.* H_22 + 2 .* (1 - nu) .* H_21 .*
H_22) .* rhoA21 .* rhoB22) ./ 0.24e2 +
(h .* E ./ (-2 .* nu .^ 2 + 2) .* (2 .*
nu .* H_21 .* H_22 + 2 .* (1 - nu) .*
H_21 .* H_22) .* gammaA21 .* gammaB22)
./ 0.2e1 + (h .^ 3 .* E ./ (-2 .* nu .^
2 + 2) .* (2 .* nu .* H_22 .^ 2 + 2 .*
(1 - nu) .* H_22 .^ 2) .* rhoA22 .*
rhoB22) ./ 0.24e2 + (h .* E ./ (-2 .*
nu .^ 2 + 2) .* (2 .* nu .* H_22 .^ 2 +
2 .* (1 - nu) .* H_22 .^ 2) .*
gammaA22 .* gammaB22) ./ 0.2e1;
U0=den.*D;
end

```

Função de Mapeamento.

```

function [Map,nvars]=mapeamento(N_u, N_v,
N_w)

nvars=N_u+N_v+N_w;
Map=zeros(nvars,2);

cont=1;
for j=1:N_u
    Map(cont,:)= [1,j];
    cont=cont+1;
end

for j=1:N_v
    Map(cont,:)= [2,j];
    cont=cont+1;
end

for j=1:N_w
    Map(cont,:)= [3,j];
    cont=cont+1;
end

```

Classe que armazena os funcionais de energia.

```

classdef energia_casca
    properties
        u1_string
        u2_string
        u3_string
        Z_string

        Geo
        Fis
        Integral
        Carga

        Map

        %Matriz de massa
        VarsCinetica
        Cinetica

        %Energia potencial da carga
        Vars0
        U0

        %Energia potencial elastica
        Vars1
        U1
        Vars2
        U2
        Vars3
        U3

        omega1
    end
    methods
        function E=energia_total(obj, u, v)
            div=(obj.Fis.E*obj.Fis.h^2);

            h=obj.Fis.h;

            u=u*h;
            v=v*(h);

            EC=v'*energia_casca.
                tensor_vetor(obj.Cinetica,
                    obj.VarsCinetica, v);

            K1=energia_casca.tensor_vetor(
                obj.U1, obj.Vars1, u);
            K2=energia_casca.tensor_vetor(
                obj.U2, obj.Vars2, u);
            K3=energia_casca.tensor_vetor(
                obj.U3, obj.Vars3, u);

            EP=u'*(K1+K2+K3);

            E=EP+EC;
        end
        function [M, C, K, fnl, f_0, omega1
            , outdof, n_gdl]=build_model(
                energia, alpha, beta, forca)

            %% GDL de saída
            [~, outdof]=ismember([3 1],
                energia.Map, 'rows');

            n_gdl=size(energia.Map,1);

            %% Energia cinetica
            subs=energia.VarsCinetica;
            vals=energia.Cinetica;
            energia_cinetica=sptensor(subs,

```



```

        vals, n_gdl*ones(1,2));

%% Energia potencial
% Carregamento
subs=energia.Vars0;
vals=energia.U0;
energia_potencial0=sptensor(
    subs, vals, n_gdl*ones(1,1)
);
% Rigidez linear
subs=energia.Vars1;
vals=energia.U1;
energia_potencial1=sptensor(
    subs, vals, n_gdl*ones(1,2)
);
% Rigidez quadratica
subs=energia.Vars2;
vals=energia.U2;
energia_potencial2=sptensor(
    subs, vals, n_gdl*ones(1,3)
);

% Rigidez cubica
subs=energia.Vars3;
vals=energia.U3;
energia_potencial3=sptensor(
    subs, vals, n_gdl*ones(1,4)
);

%% Determinacao dos
    coeficientes do sistema
    dinamico

M=derivada_energia(
    energia_cinetica);
K=derivada_energia(
    energia_potencial1);
% Converter em sparse matrix
M=sparse(M.subs(:,1), M.subs
    (:,2), M.vals, n_gdl, n_gdl
    );
K=sparse(K.subs(:,1), K.subs
    (:,2), K.vals, n_gdl, n_gdl
    );

% Autoproblema
[Auto_vetores,Auto_valores]=
    eigs(K,M, n_gdl);
[~,ind] = sort(diag(
    Auto_valores));
Auto_valores = Auto_valores(ind
    ,ind);
Auto_vetores=Auto_vetores(:,ind
    );
omegal=sqrt(Auto_valores(1,1));
energia.omegal=omegal;

% Normalizacao
div=(energia.Fis.E*energia.Fis.
    h^2);
h=energia.Fis.h;

K=K.*h./div;
M=M.*h.*(omegal)^2./div;
K=full(K);
M=full(M);

fnl{1}=derivada_energia(
    energia_potencial2);
fnl{2}=derivada_energia(
    energia_potencial3);

fnl{1}=fnl{1}.*h^2./div;
fnl{2}=fnl{2}.*h^3./div;

% Amortecimento
C=alpha*M+beta*K;
f_0=double(derivada_energia(
    energia_potencial0))./div*
    forca;

end
end

methods(Static)

function F=tensor_vetor(KK, Coord,
    X, Y, Z)
ordem=size(Coord,2);
if(nargin==3)
    indice=ones(ordem-1);
elseif(nargin==ordem+1)
    if(ordem==3)
        X=[X Y];
        indice=[1:ordem-1];
    elseif(ordem==4)
        X=[X Y Z];
        indice=[1:ordem-1];
    end
else
    error('Ordem do tensor
        incompativel com o
        numero de argumentos da
        funcao');
end
F=zeros(size(X,1),1);
nparcelas=size(KK,1);
for i=1:nparcelas
    linha=Coord(i,1);
    p=KK(i,1);
    for j=2:ordem
        p=p*X(Coord(i,j),indice
            (j-1));
    end
    F(linha,1)=F(linha,1)+p;
end
end
end
end

```

A.2 Determinação das equações de equilíbrio

Classe que deduz e armazena o sistema de equilíbrio dinâmico.

```

classdef dinamica_casca
    properties
        energia

        alpha
        beta
        forca0

        C
        M
        Minv
        K
        fnl
        fnl_matriz
        f_0
        RF

        j_fnl
        j_fnl_matriz

        outdof

        n_gdl
        n_vars
        n_pars

        omegal

        auto_valores
        auto_vetores
    end

    methods
        function [y, J]=FuncEJacob(din, t,
            x, pars)
            Omega=pars(1,1);
            amort=pars(2,1);
            T=2*pi/Omega;

            n=size(x,2);

            u1=x(1:din.n_gdl,:);
            v=x(din.n_gdl+1:2*din.n_gdl,:);
            u2=reshape(permute(u1,
                [3 2 1]) .* u1, [1 3 2]),
                size(u1,1)*size(u1,1), size
                (u1,2), 1);
            u3=reshape(permute(u2,
                [3 2 1]) .* u1, [1 3 2]),
                size(u2,1)*size(u1,1), size
                (u1,2), 1);

            FK=din.K*u1+din.fnl_matriz{1}*
                u2+din.fnl_matriz{2}*u3;
            y=zeros(din.n_vars,n);
            y(1:din.n_gdl,:)=T*v;
            y(din.n_gdl+1:2*din.n_gdl,:)=T*
                din.Minv*(-amort*din.C*v-FK
                );

            J_amortecimento= repmat(-T*din.
                Minv*amort*din.C, 1, 1, n);

            Jnl=din.j_fnl_matriz{1}*u1+din.
                j_fnl_matriz{2}*u2;
            Jnl=reshape(Jnl, din.n_gdl, din
                .n_gdl, n);

            J_rigidez= repmat(din.K, 1, 1, n
                )+Jnl;

            J_rigidez=pagemtimes(-T*din.
                Minv, J_rigidez);

            J=zeros(din.n_vars+din.n_pars,
                din.n_vars+din.n_pars, n);
            J(1:din.n_gdl, din.n_gdl+1:2*
                din.n_gdl, :)= repmat(T*eye(
                din.n_gdl, din.n_gdl), 1,
                1, n);
            J(din.n_gdl+1:2*din.n_gdl, 1:
                din.n_gdl, :)=J_rigidez;

            J(din.n_gdl+1:2*din.n_gdl, din.
                n_gdl+1:2*din.n_gdl, :)=
                J_amortecimento;

            %parametros
            %Derivada omega
            J_omega=zeros(din.n_vars,1,n);
            J_omega(1:din.n_gdl,1,:)=v;
            J_omega(din.n_gdl+1:2*din.n_gdl
                ,1,:)=pagemtimes(din.Minv
                ,(-amort*din.C*v-FK));
            J_omega=J_omega*(-2*pi/Omega^2)
                ;

            %Derivada amortecimento
            J_amortecimento=zeros(din.
                n_vars,1,n);
            J_amortecimento(din.n_gdl+1:2*
                din.n_gdl,1,:)=pagemtimes(T
                *din.Minv,(-din.C*v));

            J_pars=cat(2, J_omega,
                J_amortecimento);
            J(1:din.n_vars, din.n_vars+1:
                din.n_vars+din.n_pars, :)=
                J_pars;
        end
        function y=Func(din, t, x, pars)
            Omega=pars(1,1);
            amort=pars(2,1);
            T=2*pi/Omega;

            n=size(x,2);

            u1=x(1:din.n_gdl,:);
            v=x(din.n_gdl+1:2*din.n_gdl,:);
            u2=reshape(permute(u1,
                [3 2 1]) .* u1, [1 3 2]),
                size(u1,1)*size(u1,1), size
                (u1,2), 1);
            u3=reshape(permute(u2,
                [3 2 1]) .* u1, [1 3 2]),
                size(u2,1)*size(u1,1), size
                (u1,2), 1);

            FK=din.K*u1+din.fnl_matriz{1}*
                u2+din.fnl_matriz{2}*u3;
            y=zeros(din.n_vars,n);
            y(1:din.n_gdl,:)=T*v;
            y(din.n_gdl+1:2*din.n_gdl,:)=T*
                din.Minv*(-amort*din.C*v-FK
                );

        end
        function J=Jacob_x(din, t, x, pars)
            Omega=pars(1,1);
            amort=pars(2,1);
            T=2*pi/Omega;

            n=size(x,2);
    end
end

```

```

u1=x(1:din.n_gdl,:);
%v=x(din.n_gdl+1:2*din.n_gdl,:);
;
u2=reshape(permute(permute(u1,
[3 2 1]) .* u1, [1 3 2])),
size(u1,1)*size(u1,1), size
(u1,2), 1);
%u3=reshape(permute(permute(u2,
[3 2 1]) .* u1, [1 3 2])),
size(u2,1)*size(u1,1), size
(u1,2), 1);

J_amortecimento= repmat(-T*din.
Minv*amort*din.C, 1, 1, n);

Jnl=din.j_fnl_matriz{1}*u1+din.
j_fnl_matriz{2}*u2;
Jnl=reshape(Jnl, din.n_gdl, din.
n_gdl, n);

J_rigidez= repmat(din.K, 1, 1, n
)+Jnl;
J_rigidez=pagemtimes(-T*din.
Minv, J_rigidez);

J=zeros(din.n_vars, din.n_vars,
n);
J(1:din.n_gdl, din.n_gdl+1:2*
din.n_gdl, :)= repmat(T*eye(
din.n_gdl, din.n_gdl), 1,
1, n);
J(din.n_gdl+1:2*din.n_gdl, 1:
din.n_gdl, :)=J_rigidez;

J(din.n_gdl+1:2*din.n_gdl, din.
n_gdl+1:2*din.n_gdl, :)=
J_amortecimento;
end

function J=Jacob_pars(din, t, x,
pars)
Omega=pars(1,1);
amort=pars(2,1);
T=2*pi/Omega;

n=size(x,2);

%Derivada Omega
u1=x(1:din.n_gdl,:);
v=x(din.n_gdl+1:2*din.n_gdl,:);
u2=reshape(permute(permute(u1,
[3 2 1]) .* u1, [1 3 2])),
size(u1,1)*size(u1,1), size
(u1,2), 1);
u3=reshape(permute(permute(u2,
[3 2 1]) .* u1, [1 3 2])),
size(u2,1)*size(u1,1), size
(u1,2), 1);

FK=din.K*u1+din.fnl_matriz{1}*
u2+din.fnl_matriz{2}*u3;
J_omega=zeros(din.n_vars,1,n);
J_omega(1:din.n_gdl,1,:)=v;
J_omega(din.n_gdl+1:2*din.n_gdl
,1,:)=pagemtimes(din.Minv
,(-amort*din.C*v-FK));
J_omega=J_omega*(-2*pi/Omega^2)
;

%Derivada amortecimento
J_amortecimento=zeros(din.
n_vars,1,n);
J_amortecimento(din.n_gdl+1:2*
din.n_gdl,1,:)=pagemtimes(T
*din.Minv,(-din.C*v));

J=cat(2, J_omega,
J_amortecimento);
end

function din=gerar_modelo(din)

[din.M, din.C, din.K, din.fnl,
din.f_0, din.omega1, din.
outdof, din.n_gdl]=
build_model(din.energia,
din.alpha, din.beta, din.
forca0);
din.Minv=inv(din.M);

[din.auto_vetores,din.
auto_valores]=eigs(din.K,
din.M, din.n_gdl);
[~,ind] = sort(diag(din.
auto_valores));
din.auto_valores = din.
auto_valores(ind,ind);
din.auto_vetores=din.
auto_vetores(:,ind);
II=din.auto_vetores'*din.M*din.
auto_vetores;

for i=1:din.n_gdl
din.auto_vetores(:,i)=din.
auto_vetores(:,i)*sqrt(
II(i,i));
end

din.n_vars=din.n_gdl*2;
din.n_pars=2;

for i=1:numel(din.fnl)
din.j_fnl{i}=derivada_forca
(din.fnl{i});

m_i=reshape(din.fnl{i}, [
din.n_gdl din.n_gdl^(i
+1)]);
din.fnl_matriz{i}=sparse(
m_i.subs(:,1), m_i.subs
(:,2), m_i.vals, din.
n_gdl, din.n_gdl^(i+1))
;

m_i=reshape(din.j_fnl{i}, [
din.n_gdl^2 din.n_gdl^i
]);
din.j_fnl_matriz{i}=sparse(
m_i.subs(:,1), m_i.subs
(:,2), m_i.vals, din.
n_gdl^2, din.n_gdl^i);
end
end
end
end
end

```

A.3 Método de continuação

```
% Essa funcao performa a analise de
% vibracao livre de cascas
% por meio dos metodos do tiro e da
% continuacao

function Cont()

% Limpeza de todas as variaveis
clc;
clear all;
clearvars -global;
fclose('all');
close('all');

restoredefaultpath

addpath('Resultados\');
addpath('Problema\');

addpath('..\classes\');
addpath('C:\Matlab\');
addpath('C:\Matlab\tensor-toolbox\');

addpath('Inicializacao\');

%%
%Inicializacao dos parametros iniciais do
%metodo
[par, prob, cam]=InicializacaoMassaMola();

%%
%Nome do arquivo de saida
f_name='cam_massa_mola.mat';

Arco(par, prob, cam, f_name);

function Arco(par, prob, cam, f_name)

u=cam.u0;
h=par.h0;
w=par.w0;
testeU=0;
if isempty(cam.t0)
    %Preditor
    [~,Ju]=prob.ResiduoEJacobiana(u);
    tU=VetorTangente(Ju);
else
    tU=cam.t0;
end

% Algoritmo de continuacao
for n=1:par.nmax

    v=u+h*w*tU;

    lineLength=0;
    for i=1:par.imax
        %Corretor
        [H,Jv]=prob.ResiduoEJacobiana(v);
        dv=pinv(full(Jv))*(H);
        v=v-dv;

        erro1=norm(H, 2);
        erro2=norm(dv, 2)/norm(v,2);
        fprintf(repmat('\b',1,lineLength))
        lineLength = fprintf(' i=%i erro1
        /tol=%f erro2/tol=%f\n',i,
        erro1/par.tolR, erro2/par.tolU
        );
        if(erro1<par.tolR || erro2<par.tolU
        )
            fprintf(repmat('\b',1,
            lineLength))
            break;
        end
    end
    tV=VetorTangente(Jv);

    alpha=acos(dot(tU,tV));

    if(i+1>par.imax) || (abs(alpha*180/pi)>
    par.alpha_max1 && ~(abs(alpha*180/
    pi)>par.alpha_max2))
        h=h/2;
        fprintf('Reducao do passo, i=%i
        alpha=%e\n', i, alpha*180/pi);
        if(h<par.hmin)
            fprintf('\n\n ERRO, passo muito
            pequeno \n\n');
            save(fullfile('Resultados',
            f_name), 'prob', 'cam', '
            par');
            return;
        end
        continue;
    end

    [testeV, tipo_bp]=prob.Teste(v,Jv);

    if(testeU*testeV<0)
        save(fullfile('Resultados',sprintf(
        '%s_bk', f_name)), 'prob', 'cam
        ', 'par');
        fprintf('\nBifurcacao\n\n');
    end

    if(dot(tU,tV)<0 && n~=1)
        fprintf('\nBrach Point\n\n');
        w=-w;
    end

    u=v;
    tU=tV;
    Ju=Jv;
    testeU=testeV;
    prob=prob.Atualizar_RF(u);

    h=min(h*min([max([sqrt(par.i_controle/i
    );0.5]);1.3]), par.hmax);

    fprintf('n=%i i=%i u_1=%e u_end=%e
    erro1=%e erro2=%e alpha=%e
    h=%e teste=%e \n', n,i, u(1,1),
    u(end-1,1), erro1, erro2, alpha
```

```

        *180/pi, h, testeV);

% Saida de dados
prob.Saida(u);
estabilidade=testeV;
cam=cam.Adicionar_ponto(u, tV,
    estabilidade);
save(fullfile('Resultados',f_nome), '
    prob', 'cam', 'par');

        if(prob.VerificarLimites(u))
            break;
        end
    end

save(fullfile('Resultados',f_nome), 'prob',
    'cam', 'par');

end

```

A.4 Determinação do resíduo e da jacobiana pelo método do tiro simples

```

function [R,J]=ResiduoEJacobiana(u)
global din_casca_total
% 0 amortecimento c eh transformado em uma
    condicao inicial para o calculo
% da matriz jacobinada sendo X=[x; beta]
    sendo X'=F(X)=[Func(x);0]
% 0 valor de Y=[X; DfDX] representa o
    problema estendido para o calculo da
% matriz jacobiana. O calculo da matriz
    jacobiana eh similar ao calculo da
% matriz de monodromia da teoria de Floquet
    . A matriz C tambem aparece na
% teoria de Floquet e seu valor inicial eh
    a matriz identidade.
% 0 valor inicial de Y eh Y0=[X; Identidade
    ]

%Periodo
T=din_casca_total.N_periodo;

nvars_PVI=size(u,1)-1;
x=u(1:nvars_PVI-1,1);
X=u(1:nvars_PVI,1);
w=u(end,1);

C0=eye(nvars_PVI, nvars_PVI);
Y0=[X; reshape(C0, [], 1)];

fun=@(tt, xx) PBFun_DFDY(tt, xx, w,
    nvars_PVI);

options = odeset('RelTol',1e-7);

[~,Y]=ode89(fun, [0 T], Y0, options);

Y_final=Y(end,:);
x_final=Y_final(1:nvars_PVI-1,1);
beta_final=Y_final(nvars_PVI,1);

J=reshape(Y_final(nvars_PVI+1:end, 1),
    nvars_PVI, nvars_PVI)-C0;

%Jacobiana da frecuencia

J(1:nvars_PVI-1, end+1)=Jacob_T(
    din_casca_total, T, x_final, 1/w)*(-1/w
    ^2);

%Jacobiana da restricao de fase
u0=din_casca_total.u0;
x0=u0(1:(nvars_PVI-1),1);
beta0=u0(nvars_PVI,1);
w0=u0(nvars_PVI+1,1);
din_casca_total.beta=beta0;
F_aux=Func(din_casca_total, 0, x0, 1/w0);
J(nvars_PVI, 1:nvars_PVI-1)=-F_aux;

%Calculo do resíduo de lambuja
if nargout > 1
    R=x_final-x;
    R(end+1, 1)=dot(x0-x, F_aux);
end
end

function dFdY=PBFun_DFDY(t, Y, w, nvars_PVI
    )

global din_casca_total

x=Y(1:(nvars_PVI-1),1);
beta=Y(nvars_PVI,1);
din_casca_total.beta=beta;

C=reshape(Y(nvars_PVI+1:end,1),nvars_PVI,
    nvars_PVI);

J1=Jacob_x(din_casca_total, t, x, 1/w);
J2=Jacob_beta(din_casca_total, t, x, 1/w);
J=[J1, J2];
J(end+1, :)=0;
M=J*C;

F=Func(din_casca_total, t, x, 1/w);
F(end+1)=0;

dFdY=[F;reshape(M, [], 1)];

end

```

A.5 Determinação do resíduo e da jacobiana pelo método do tiro múltiplo

```

function [R,J] = ...
    ResiduoEJacobiana3(x, pars, prob)

din=prob.dados;
MSM=prob.MSM;

%Periodo
T=prob.N_periodo;

n_vars=din.n_vars;
n_pars=din.n_pars;
n_tot=n_vars+n_pars;

n_vars_cont=size(x,1);
n_tot_cont=n_vars_cont+n_pars;

X0=x(1:n_vars*MSM,1);

x0=reshape(x, n_vars, MSM);
C0=repmat(reshape(eye(n_vars+n_pars, n_vars
    +n_pars), [], 1), 1, MSM);
Y0=cat(1, x0, C0);

fun=@(tt, xx) Fun_DFDY(tt, xx, pars, MSM,
    din);

if isempty(prob.ODE_TOL)
    options = odeset('RelTol',1e-5);
else
    options = odeset('RelTol',prob.ODE_TOL)
    ;
end

[~,Y]=ode45(fun, [0 T/MSM], Y0, options);

Y=reshape(Y(end, :)', [], MSM);

y=Y(1:n_vars, :);
J_i=reshape(Y(n_vars+1:end, :), n_tot,
    n_tot, MSM);

%Para restricao de fase
X_RF=prob.X_RF;
pars_RF=prob.pars_RF;

J=sparse(n_vars_cont+1, n_tot_cont);

for i=1:MSM
    x_final=y(:,i);

    Ji=J_i(:, :, i);

    J_x=Ji(1:n_vars, 1:n_vars);

    J_pars=Ji(1:n_vars, n_vars+1:n_tot);

    x_RF_i=X_RF((i-1)*n_vars+1:n_vars*i,1);
    F_RF((i-1)*n_vars+1:n_vars*i,1)=Func(
        din, 0, x_RF_i, pars_RF);
    J_RF=-F_RF((i-1)*n_vars+1:n_vars*i,1)';

    J((i-1)*n_vars+1:n_vars*i, (i-1)*n_vars
        +1:n_vars*i)=-eye(n_vars,n_vars);
    if i~=MSM
        J(i*n_vars+1:n_vars*(i+1), (i-1)*
            n_vars+1:n_vars*i)=J_x;
        J(i*n_vars+1:n_vars*(i+1),
            n_vars_cont+1:n_tot_cont)=
            J_pars;
    else
        J(1:n_vars, (i-1)*n_vars+1:n_vars*i)
            =J_x;
        J(1:n_vars, n_vars_cont+1:
            n_tot_cont)=J_pars;
    end

    J(end, (i-1)*n_vars+1:n_vars*i)=J_RF;

    if(i~=MSM)
        X_final(i*n_vars+1:n_vars*(i+1),1)=
            x_final;
    else
        X_final(1:n_vars,1)=x_final;
    end
end

%Calculo do resíduo de lambuja
if nargout > 1
    R=X_final-X0;
    R(end+1, 1)=dot(X_RF-X0, F_RF);
end

end

function dFdY=Fun_DFDY(t, Y, pars, MSM, din
    )

n_tot=din.n_vars+din.n_pars;
Y=reshape(Y, [], MSM);
x=Y(1:din.n_vars,:);

C=reshape(Y(din.n_vars+1:end,:), n_tot, n_tot
    , []);

[F,J]=FuncEJacob(din, t, x, pars);

M=reshape(pagemtimes(J, C), n_tot*n_tot,
    [], 1);

dFdY=reshape([F;M], [], 1);

end

```

A.6 Determinação do resíduo e da jacobiana pelo método do balanço harmônico

```

classdef dinamica_casca_bh_AFT
    properties
        energia
        alpha
        beta
        forca0

        MM
        KK
        CC
        FF

        C
        M
        Minv
        K
        fnl
        fnl_matriz
        f_0
        RF

        j_fnl
        j_fnl_matriz

        outdof
        n
        n_vars
        n_pars

        omega1

        auto_valores
        auto_vetores

        H
        N

        tempo

        E
        Einv

        Nabla1
        Nabla2

        Harmonicos

        tolAdapt
    end

    methods
        function y=Func(din, t, x, pars)
            Omega=pars(1,1);
            amort=pars(2,1);
            T=2*pi/Omega;

            u=x(1:din.n,1);
            v=x(din.n+1:2*din.n,1);
            u2=kron(u,u);
            u3=kron(u2,u);

            FK=din.K*u+din.fnl_matriz{1}*u2
                +din.fnl_matriz{2}*u3;
            y=zeros(2*din.n,1);
            y(1:din.n,1)=T*v;
            y(din.n+1:2*din.n,1)=T*din.Minv
                *(-amort*din.C*v-FK);
        end

        function [R, J]=ResiduoEJacobSemRF(
            din, Q, harm, pars)
            [R, J_Q]=ResiduoEJacob_Q(din, Q
                , harm, pars);

            J_pars=Jacob_pars(din, Q, harm,
                pars);

            J=[J_Q, J_pars];
        end

        function R_Q=ResiduoSemRF(din, Q,
            harm, pars)
            R_Q=Residuo_Q(din, Q, harm,
                pars);
        end

        function [R, J]=ResiduoEJacobComRF(
            din, Q, harm, pars)
            [R_Q, J_Q]=ResiduoEJacob_Q(din,
                Q, harm, pars);

            J_pars=Jacob_pars(din, Q, harm,
                pars);
            J_RF_Q=Jacob_RF_Q(din, Q, harm,
                pars);
            J_RF_pars=Jacob_RF_pars(din, Q,
                harm, pars);
            R_RF=Residuo_RF(din, Q, harm,
                pars);

            R=[R_Q;R_RF];
            J=[J_Q, J_pars;
                J_RF_Q, J_RF_pars];
        end

        function R=ResiduoComRF(din, Q,
            harm, pars)
            R_Q=Residuo_Q(din, Q, harm,
                pars);
            R_RF=Residuo_RF(din, Q, harm,
                pars);

            R=[R_Q;R_RF];
        end

        function R=Residuo_Q(din, Q, harm,
            pars)
            Omega=pars(1,1);
            amort=pars(2,1);
            forca=pars(3,1);

            FM=Omega^2*(din.MM(harm,harm)*Q
                );
            FC=amort*Omega*(din.CC(harm,
                harm)*Q);
    end
end

```

```

FK=(din.KK(harm,harm)*Q);

x1=din.Q_to_x(Q, harm);
x2=reshape(permute(permute(x1,
    [3 2 1]) .* x1, [1 3 2]),
    size(x1,1)*size(x1,1), size
    (x1,2), 1);
x3=reshape(permute(permute(x2,
    [3 2 1]) .* x1, [1 3 2]),
    size(x2,1)*size(x1,1), size
    (x1,2), 1);

Fnl=din.fnl_matriz{1}*x2+din.
    fnl_matriz{2}*x3;
Fnl_Q=din.Einv(harm,:)*reshape(
    Fnl, din.n*din.N, 1, 1);

R=FM+FC+FK+Fnl_Q-forca*din.FF(
    harm,1);
end
function [R, J]=ResiduoEJacob_Q(din
    , Q, harm, pars)
    Omega=pars(1,1);
    amort=pars(2,1);
    forca=pars(3,1);

    FM=Omega^2*(din.MM(harm,harm)*Q
    );
    FC=amort*Omega*(din.CC(harm,
        harm)*Q);
    FK=(din.KK(harm,harm)*Q);

    x1=din.Q_to_x(Q, harm);
    x2=reshape(permute(permute(x1,
        [3 2 1]) .* x1, [1 3 2]),
        size(x1,1)*size(x1,1), size
        (x1,2), 1);
    x3=reshape(permute(permute(x2,
        [3 2 1]) .* x1, [1 3 2]),
        size(x2,1)*size(x1,1), size
        (x1,2), 1);

    Fnl=din.fnl_matriz{1}*x2+din.
        fnl_matriz{2}*x3;
    Fnl_Q=din.Einv(harm,:)*reshape(
        Fnl, din.n*din.N, 1, 1);

    R=FM+FC+FK+Fnl_Q-forca*din.FF(
        harm,1);

    JM=Omega^2*din.MM(harm,harm);
    JC=amort*Omega*din.CC(harm,harm
    );
    JK=din.KK(harm,harm);

    Jnl=din.j_fnl_matriz{1}*x1+din.
        j_fnl_matriz{2}*x2;
    Jnl=reshape(Jnl, din.n, din.n,
        din.N);
    Kcell = cellfun(@sparse,
        num2cell(Jnl,[1,2]), 'uni'
        ,0 );
    Jnl=blkdiag(Kcell{:});
    Jnl=din.Einv(harm,:)*Jnl*din.E
        (:,harm);

    J=JM+JC+JK+Jnl;
end
function J=Jacob_pars(din, Q, harm,
    pars)
    Omega=pars(1,1);
    amortecimento=pars(2,1);
    forca=pars(3,1);

    %Derivada Omega
    FM=2*Omega*din.MM(harm,harm)*Q;
    FC=amortecimento*din.CC(harm,
        harm)*Q;
    JOmega=FM+FC;

    %Derivada amortecimento
    JAmort=Omega*din.CC(harm,harm)*
        Q;

    %Derivada forca
    JForca=-din.FF(harm,1);

    J=cat(2, JOmega, JAmort, JForca
        );
end
function R=Residuo_RF(din, Q, harm,
    pars)
    Omega=pars(1,1);
    R=Omega*din.RF(1,harm)*Q;
end
function J=Jacob_RF_Q(din, Q, harm,
    pars)
    Omega=pars(1,1);
    J=Omega*din.RF(1,harm);
end
function J=Jacob_RF_pars(din, Q,
    harm, pars)
    J=[din.RF(1,harm)*Q, 0, 0];
end
function x=Q_to_x(din, Q, harm)
    x=din.E(:,harm)*Q;
    x=reshape(x, din.n, din.N);
end
function v=Q_to_v(din, Q, harm)
    v=din.E(:,harm)*2*pi*din.Nabla2
        (harm,harm)*Q;
    v=reshape(v, din.n, din.N);
end
function Q=x_to_Q(din, x, harm)
    x_vec=reshape(x, din.n*din.N,
        1);
    Q=din.Einv(harm,:)*x_vec;
end
function E=MatrizE(din)
    E1=zeros(din.N, (2*din.H+1));
    E1(:,1)=ones(din.N, 1);
    for i=1:din.H
        for j=1:din.N
            E1(j, 2*i)=cos(2*pi*(j
                -1)*i/din.N);
            E1(j, 2*i+1)=sin(2*pi*(
                j-1)*i/din.N);
        end
    end
    E=kron(E1, speye(din.n, din.n))
    ;
end
function Einv=MatrizEInv(din)
    Einv1=zeros((2*din.H+1), din.N)
    ;
    Einv1(1,:)=1/2*ones(din.N, 1);
    for i=1:din.H

```



```

        for j=1:din.N
            Einv1(2*i, j) =cos(2*
                pi*i*(j-1)/din.N);
            Einv1(2*i+1, j)=sin(2*
                pi*i*(j-1)/din.N);
        end
    end
    Einv=kron(2/din.N*Einv1, speye(
        din.n, din.n));
end

function Nabla1=MatrizNabla1(din)
    NablaK{1}=0;
    for k=1:din.H
        NablaK{k+1}=[0 k; -k 0];
    end
    Nabla1=sparse(blkdiag(NablaK
        {:}));
end

function Mon=MonodromiaAproximada1(
    din, Q, harm, pars)

    Omega=pars(1,1);
    amortecimento=pars(2,1);

    T=2*pi/Omega;

    x1=din.Q_to_x(Q, harm);
    x1=[x1 x1(:,1)];
    x2=zeros(din.n^2, din.N+1);
    for i=1:din.N+1
        x2(:,i)=kron(x1(:,i),x1(:,i
        ));
    end

    JC=amortecimento*din.C;
    JK=din.K;
    JR2=din.j_fnl_matriz{1}*x1;
    JR3=din.j_fnl_matriz{2}*x2;

    Mon=eye(2*din.n,2*din.n);

    Jt1=zeros(din.n*2,din.n*2);
    Jt1(1:din.n, din.n+1:2*din.n)=T
        *eye(din.n, din.n);
    Jt1(din.n+1:2*din.n, din.n+1:2*
        din.n)=-T*din.Minv*JC;
    J_rigidez=JK+reshape(JR2(:,1)+
        JR3(:,1), din.n, din.n);
    Jt1(din.n+1:2*din.n, 1:din.n)=-
        T*din.Minv*J_rigidez;

    Jt2=Jt1;

    for i=1:din.N
        J_rigidez=JK+reshape(JR2(:,
            i+1)+JR3(:,i+1), din.n,
            din.n);
        Jt2(din.n+1:2*din.n, 1:din.
            n)=-T*din.Minv*
            J_rigidez;
        Jt2(din.n+1:2*din.n, din.n
            +1:2*din.n)=-T*din.Minv
            *JC;

        J_rigidez=JK+JR(:,i+2);
        Jt3(din.n+1:2*din.n, 1:din.
            n)=-T*din.Minv*
            J_rigidez;
        Jt3(din.n+1:2*din.n, din.n
            +1:2*din.n)=-T*din.Minv
            *JC;

        Mon=Mon*expm((Jt1+4*Jt2+Jt3
            )/3*dt);
        Jt1=Jt3;
    end
end

function [harm_final]=AdaptarGlobal(
    din, Q1, T1, harm1, pars)

    Omega=pars(1,1);
    amort=pars(2,1);
    forca=pars(3,1);

```



```

function frequencia_natural

freq=3629.8;
omega=freq*2*pi;

nx=20;
ny=20;

a=0.1;
b=0.1;
h=0.001;
E=206e9;
rho=7850;
nu=0.3;
xi=0.01;
alpha=2*xi*omega;
beta=2*xi/omega;

fw = fopen("conoide_freq.inp", "w");
fprintf(fw, "**HEADING\n");
fprintf(fw, "*Part, name=PART-1\n");

fprintf(fw, "*NODE\n");
cont=0;
for i=0:nx
    for j=0:ny
        cont=cont+1;
        x=i*a/nx;
        y=j*b/ny;
        z=Z(x, y);
        fprintf(fw, "%i, %f, %f, %f\n",
            cont, x, y, z);
    end
end

fprintf(fw, "**-----Definicao do tipo
de elemento\n*ELEMENT,TYPE=S4\n %d,%d
,%d,%d,%d \n", 1, 1, 2, nx+3, nx+2);
fprintf(fw, "**-----Definicao da
Malha\n*ELGEN,ELSET= TODOS\n %d,%d,%d,%d
,%d,%d,%d \n", 1, nx, 1,1, ny, nx+1, nx
+1);

fprintf(fw, "*shell section, elset=TODOS,
material=mat_1\n");
fprintf(fw, "%f\n",h);

fprintf(fw, "*End Part\n");

fprintf(fw, "*Assembly, name=Assembly\n");

fprintf(fw, "*Instance, name=PART-1-1, part
=PART-1\n");

fprintf(fw, "**-----Definicao dos conjuntos
de nos para C.C.\n");

fprintf(fw, "*NSET, NSET=EDGY1\n");
n5=0;
for i =0:nx
    fprintf(fw, "%d,", i+1);
    n5=n5+1;
    if n5==16
        fprintf(fw, "\n");
        n5=0;
    end
end
fprintf(fw, "\n*NSET,NSET=EDGY2\n");
n4=0;
for i=(ny*(nx+1)+1):((nx+1)*(ny+1))
    fprintf(fw, "%d,", i);
    n4=n4+1;
    if n4==16
        fprintf(fw, "\n");
        n4=0;
    end
end
fprintf(fw, "\n*NSET,NSET=EDGY\n ");
fprintf(fw, "EDGY1,EDGY2 ");
fprintf(fw, "\n*NSET,NSET=EDGX1\n ");
cont1=1;
n6=0;
for i=0:nx
    fprintf(fw, "%d,",cont1);
    n6=n6+1;
    for j=0:ny
        cont1=cont1+1;
    end
    if n6==16
        fprintf(fw, "\n");
        n6=0;
    end
end
fprintf(fw, "\n*NSET,NSET=EDGX2\n ");
cont1=0;
n=0;
for i=0:nx
    for j=0:ny
        cont1=cont1+1;
    end
    fprintf(fw, "%d,",cont1);
    n=n+1;
    if n==16
        fprintf(fw, "\n");
        n=0;
    end
end
fprintf(fw, "\n*NSET,NSET=EDGX\n ");
fprintf(fw, "EDGX1,EDGX2 ");
fprintf(fw, "\n*NSET,NSET=EDG\n ");
fprintf(fw, "EDGX,EDGY ");
fprintf(fw, "\n*NSET,NSET=NTODOS, GENERATE\
n ");
fprintf(fw, "%d, %d, %d\n", 1, (nx+1)*(ny
+1), 1);
for i=1:((nx+1)*(ny+1))
    fprintf(fw, "*NSET, NSET=N%d\n", i);
    fprintf(fw, " %d\n", i);
end

fprintf(fw, "*End Instance\n");
fprintf(fw, "*End Assembly\n");

fprintf(fw, "**-----Definicao de
material");
fprintf(fw, "\n*material,name=mat_1");
fprintf(fw, "\n*density");
fprintf(fw, "\n%f", rho);
fprintf(fw, "\n*elastic");
fprintf(fw, "\n%f,%f\n", E, nu);
fprintf(fw, "*damping, alpha=%e, beta=%e\n
", alpha, beta);

fprintf(fw, "**-----Condicoes de
contorno\n");
fprintf(fw, "*boundary\n");
fprintf(fw, "PART-1-1.EDG, 1, 3\n");

fprintf(fw, "*Step, name=Step-1, nlgeom=NO,
perturbation\n");
fprintf(fw, "*Frequency, eigensolver=
Lanczos, sim=NO, acoustic coupling=on,

```

```

    normalization=displacement\n");
fprintf(fw, "%i, %f, %f, , , \n", 3, freq
    *0.8, freq*10);
fprintf(fw, "*Restart, write, frequency=0\n
    ");

```

```

fprintf(fw, "*Output, field, variable=
    PRESELECT\n");
fprintf(fw, "*End Step\n");

```

Análise não linear de vibração livre.

```
function analise_nao_linear
```

```

freq=3629.8;
omega=freq*2*pi;

```

```

nx=20;
ny=20;

```

```

a=0.1;
b=0.1;
h=0.001;
E=206e9;
rho=7850;
nu=0.3;
xi=0.01;
alpha=2*xi*omega;
beta=2*xi/omega;

```

```

fw = fopen("conoide_NL.inp", "w");
fprintf(fw, "*HEADING\n");
fprintf(fw, "*Part, name=PART-1\n");

```

```

fprintf(fw, "*NODE\n");
cont=0;
for i=0:nx
    for j=0:ny
        cont=cont+1;
        x=i*a/nx;
        y=j*b/ny;
        z=Z(x, y);
        fprintf(fw, "%i, %f, %f, %f\n",
            cont, x, y, z);
    end
end

```

```

fprintf(fw, "**-----Definicao do tipo
    de elemento\n*ELEMENT,TYPE=S4\n %d,%d
    ,%d,%d,%d \n", 1, 1, 2, nx+3, nx+2);
fprintf(fw, "**-----Definicao da
    Malha\n*ELGEN,ELSET= TODOS\n %d,%d,%d,%d
    ,%d,%d,%d \n", 1, nx, 1,1, ny, nx+1, nx
    +1);

```

```

fprintf(fw, "*shell section, elset=TODOS,
    material=mat_1\n");
fprintf(fw, "%f\n",h);

```

```
fprintf(fw, "*End Part\n");
```

```
fprintf(fw, "*Assembly, name=Assembly\n");
```

```

fprintf(fw, "*Instance, name=PART-1-1, part
    =PART-1\n");

```

```

fprintf(fw, "**-----Defincao dos conjuntos
    de nos para C.C.\n");

```

```

fprintf(fw, "*NSET, NSET=EDGY1\n");
n5=0;

```

```

for i =0:nx
    fprintf(fw, "%d,", i+1);
    n5=n5+1;
    if n5==16
        fprintf(fw, "\n");
        n5=0;
    end
end

```

```

fprintf(fw, "\n*NSET,NSET=EDGY2\n");
n4=0;

```

```

for i=(ny*(nx+1)+1):((nx+1)*(ny+1))
    fprintf(fw, "%d,", i);
    n4=n4+1;
    if n4==16
        fprintf(fw, "\n");
        n4=0;
    end
end

```

```

fprintf(fw, "\n*NSET,NSET=EDGY\n ");
fprintf(fw, "EDGY1,EDGY2 ");
fprintf(fw, "\n*NSET,NSET=EDGX1\n ");
cont1=1;
n6=0;

```

```

for i=0:nx
    fprintf(fw, "%d,",cont1);
    n6=n6+1;
    for j=0:ny
        cont1=cont1+1;
    end
    if n6==16
        fprintf(fw, "\n");
        n6=0;
    end
end

```

```

fprintf(fw, "\n*NSET,NSET=EDGX2\n ");
cont1=0;
n=0;

```

```

for i=0:nx
    for j=0:ny
        cont1=cont1+1;
    end
    fprintf(fw, "%d,",cont1);

```

```

n=n+1;
if n==16
    fprintf(fw, "\n");
    n=0;
end
end

```

```

fprintf(fw, "\n*NSET,NSET=EDGX\n ");
fprintf(fw, "EDGX1,EDGX2 ");
fprintf(fw, "\n*NSET,NSET=EDG\n ");
fprintf(fw, "EDGX,EDGY ");
fprintf(fw, "\n*NSET,NSET=NTODOS, GENERATE\
    n ");
fprintf(fw, "%d, %d, %d\n", 1, (nx+1)*(ny
    +1), 1);
for i=1:((nx+1)*(ny+1))
    fprintf(fw, "*NSET, NSET=N%d\n", i);
    fprintf(fw, " %d\n", i);
end

```

```

end
fprintf(fw, "*End Instance\n");
fprintf(fw, "*End Assembly\n");

fprintf(fw, "**-----Definicao de
material");
fprintf(fw, "\n*material,name=mat_1");
fprintf(fw, "\n*density");
fprintf(fw, "\n%f", rho);
fprintf(fw, "\n*elastic");
fprintf(fw, "\n%f,%f\n", E, nu);
fprintf(fw, "*damping, alpha=%e, beta=%e\n",
alpha, beta);

fprintf(fw, "*Step, name=Step-1, nlgeom=YES
, inc=10\n");
fprintf(fw, "*Dynamic\n");
fprintf(fw, "2e-06,2e-6,1e-07,2e-06\n");
fprintf(fw, "*Boundary\n");
fprintf(fw, "PART-1-1.EDG, 1, 3\n");
condicoes_iniciais(fw);
fprintf(fw, "*Restart, write, frequency=1\n

");
fprintf(fw, "*Output, field, frequency=1\n
");
fprintf(fw, "*NODE OUTPUT\n");
fprintf(fw, "U, RF\n");
fprintf(fw, "*Output, history, frequency=1\n
");
fprintf(fw, "*ENERGY OUTPUT\n");
fprintf(fw, "ALLKE, ALLIE, ETOTAL\n");
fprintf(fw, "*END STEP\n");
fprintf(fw, "*Step, name=Step-2, nlgeom=YES
, inc=10000\n");
fprintf(fw, "*Dynamic\n");
fprintf(fw, "2e-06,1.,1e-07,2e-06\n");
fprintf(fw, "*Boundary, OP=NEW\n");
fprintf(fw, "PART-1-1.EDG, 1, 3\n");
fprintf(fw, "*Restart, write, frequency=1\n
");
fprintf(fw, "*Output, field, frequency=1\n
");
fprintf(fw, "*NODE OUTPUT\n");
fprintf(fw, "U, RF\n");
fprintf(fw, "*Output, history, frequency=1\n
");
fprintf(fw, "*ENERGY OUTPUT\n");
fprintf(fw, "ALLKE, ALLIE, ETOTAL\n");
fprintf(fw, "*END STEP\n");

```

Condições iniciais.

```

function condicoes_iniciais(fw)
id=fopen('Modo1.txt','r');
for j=1:6
    for i=1:441
        lixo=fscanf(id, '%f',1);
        Modo(i,j)=fscanf(id, '%f',1);
    end
end
fclose(id);

fator=1e-4/max(abs(min(Modo(:,3))),abs(max(
Modo(:,3))));

Modo=Modo*fator;
id2=fw;
for i=1:441
    for j=1:6
        if Modo(i,j)~=0
            fprintf(id2, 'PART-1-1.N%i, %i,
%i, %e\n', i, j, j, Modo(i
,j));
        end
    end
end

```