



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Probabilidade Geométrica e Aplicações

José Agissander Oliveira de Moraes

Goiânia

2014

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	José Agissander Oliveira de Moraes		
E-mail:	moraesmatematica@gmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor	Colégio Simbios		
Agência de fomento:		Sigla:	
País:	Brasil	UF:Go	CNPJ:
Título:	Probabilidade geométrica e aplicações		
Palavras-chave:	Probabilidade geométrica, probabilidade clássica.		
Título em outra língua:	Geometric probability , classic probability.		
Palavras-chave em outra língua:	Geometric probability.		
Área de concentração:	Matemática do ensino básico		
Data defesa	07/03/2014		
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado profissional em matemática (PROFMAT).		
Orientador (a):	Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos.		
E-mail:			
Co-orientador (a):*			
E-mail:			

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Assinatura do (a) autor (a)

Data: ____ / ____ / ____

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

José Agissander Oliveira de Moraes

Probabilidade Geométrica e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Goiânia

2014

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG**

M827p Moraes, José Agissander Oliveira de
Probabilidade Geométrica e Aplicações [manuscrito] / José
Agissander Oliveira de Moraes. - 2014.
17 f. : il., figs., tabs.

Orientadora: Profª. Dr. Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos –
IME/UFG

Monografia (Mestrado) – Universidade Estadual de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2014.

Bibliografia.

Inclui lista de tabelas e figuras.

1. Probabilidade geométricas 2. Probabilidade (matemática) –
Aplicações 3. Prbabilidade – Estudo e ensino I. Título.

CDU: 519.212.3

José Agissander Oliveira de Moraes

Probabilidade Geométrica e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 07 de março de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa
Matemática campus Arraias-UFT



Profª. Drª. Tatiane Ferreira do Nascimento Melo da Silva
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

José Agissander Oliveira de Moraes graduou-se em Matemática pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul.

Dedico este trabalho a minha esposa Claudia Moraes e
aos meus filhos Lucas Moraes e Tauani Moraes.

Agradecimentos

Agradeço aos meus familiares, amigos, professor orientador e a todos que me apoiaram.

Resumo

No ensino médio, o ensino de probabilidades se resume ao caso discreto e os problemas são basicamente de contagem de casos favoráveis e casos possíveis.

O ideal, para que os alunos aprendessem mais sobre esse tópico tão importante, seria ensinar ou reforçar conceitos de probabilidade em outras disciplinas, a geometria seria adequada a isso, por várias razões:

- I) Não é difícil formular problemas de geometria envolvendo probabilidade.
- II) Os problemas de geometria que incluem probabilidade são interessantes e podem servir de motivação.
- III) Todos os alunos terão oportunidade de aplicar, de modo diferente, conteúdos de geometria já estudados.

Palavras-chave

Probabilidade Geométrica, Probabilidade Clássica

Abstract

In High School, teaching probabilities consists only in discrete case and it is limited to favorable cases and possible cases.

The ideal, in order to increase the student's learning about this importante topic, would be teaching or reinforcing the concept of probabilities in all other subjects, geometry would be suitable for this, for many reasons, as:

- I) It is not hard to formulate geometry questions involving probability.
- II) Geometry questions including probability are interesting and can serve as motivation.
- III) All the students will have the opportunity of applying, in a different way, previously studied geometry topics.

Keywords

Geometric Probability, Classic Probability

Sumário

1	Introdução	11
2	Probabilidade Geométrica	12
3	O Problema da Agulha de Buffon e Aplicações	23
3.1	Estimando π	25
3.2	Medidas em Bacias Hidrográficas	26
4	Considerações Finais	33

1 Introdução

Neste trabalho apresentamos inicialmente o conceito de probabilidade geométrica, passando por exemplos simples envolvendo segmentos de reta como será visto na seção 2 e gradativamente vamos aumentando o grau de dificuldade, sem com isso perder a motivação; como por exemplo o interessante problema do encontro, o famoso problema do macarrão e o intrigante problema das agulhas de Buffon e duas aplicações. Uma estimativa para o valor do número π sem uso de circunferência na subseção 3.1 e o cálculo de algumas medidas em uma bacia hidrográfica, usando para isso a generalização de LaPlace para o problema das agulhas de Buffon na subseção 3.2. Com isso gostaríamos que se algum professor de ensino médio tiver a paciência de ler esse trabalho, adquira mais motivação no ensino de probabilidade, já que envolvendo a geometria plana as aulas ficarão, ao meu ver, mais interessantes. “Sempre me pareceu estranho que aqueles que estudam seriamente Matemática acabem tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer, não é o conhecimento e sim a aprendizagem; não é a posse, mas a aquisição; não é a presença, mas o ato de atingir a meta” (Carl Friedrich Gauss).

2 Probabilidade Geométrica

Desde o início do desenvolvimento da Teoria da Probabilidade notou-se que a definição clássica, baseada em um conjunto finito de eventos igualmente prováveis era insuficiente para abranger todos os problemas de probabilidade. Como muitos dizem, grande parte do desenvolvimento das ciências deve-se à necessidade de se resolver problemas novos que vão surgindo; ou será que a ciência se desenvolve e depois a aplicamos para resolver algum problema. Não importa, na probabilidade foi a necessidade que a fez desenvolver.

Exemplos especiais que levaram a uma definição para a construção de um conceito de probabilidade para os casos em que aparecem, naturalmente, um conjunto infinito de resultados equiprováveis podem ser formulados como se segue.

Considere, em um plano, duas regiões A e B, tal que $A \subseteq B$ (veja Figura 1)

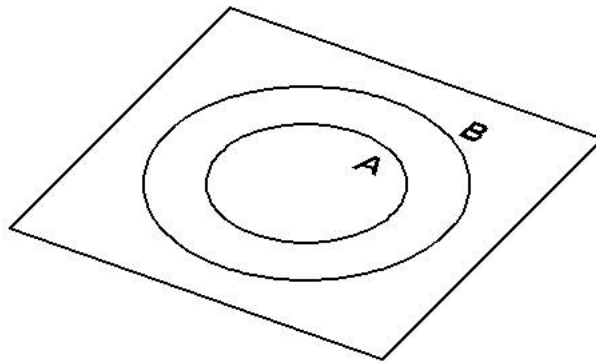


Figura 1

Escolhemos um ponto aleatoriamente em B. Dois eventos têm a mesma probabilidade se e somente se, eles têm a mesma medida (comprimento, área...), o leitor interessado pode consultar [2] ou [7], em outras palavras, a probabilidade do ponto escolhido em B pertencer a A é proporcional à medida de A (comprimento, área...) e é independente da posição e forma de A, não do ponto. Logo, a probabilidade que o ponto pertença a A é igual a

$$\frac{\text{medida de } A}{\text{medida de } B}$$

Vamos a alguns exemplos:

Exemplo 1. Considere um segmento AB e E , C e D pontos pertencentes a esse segmento (veja Figura 2),

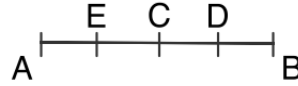


Figura 2

onde $AB = 2AC = 3AE = 4DB$. Escolhendo um ponto aleatoriamente em AB , qual a probabilidade que esteja entre:

- A e C
- C e D
- E e C

Seja F o evento em que se escolhe, aleatoriamente, um ponto no segmento AB . Assim,

$$a) P(F) = \frac{\text{comprimento de } AC}{\text{comprimento de } AB} = \frac{AC}{2AC} = \frac{1}{2}$$

$$b) \text{Comprimento de } CD = \text{comprimento de } CB - \text{comprimento de } DB = \frac{AB}{2} - \frac{AB}{4} = \frac{AB}{4}.$$

$$\text{Assim, } P(F) = \frac{\text{comprimento de } CD}{\text{comprimento de } AB} = \frac{\frac{AB}{4}}{AB} = \frac{1}{4}.$$

$$c) \text{Comprimento de } EC = \text{comprimento de } AC - \text{comprimento de } AE = \frac{AB}{2} - \frac{AB}{3}$$

$$= \frac{AB}{6}. \text{ Assim, } P(F) = \frac{\text{comprimento de } EC}{\text{comprimento de } AB} = \frac{\frac{AB}{6}}{AB} = \frac{1}{6}.$$

Exemplo 2. Seja M o ponto médio de um segmento AB . C é escolhido aleatoriamente em AM e D é escolhido aleatoriamente em MB , qual a probabilidade de que $CD < \frac{1}{4} AB$?

Seja L o evento em que $CD < \frac{1}{4} AB$.

Vamos adotar um sistema de coordenadas na reta AB de tal forma que a coordenada de A seja o 0 e a de B seja 1 (ou outro número positivo qualquer). Sejam x e y , respectivamente, as coordenadas de C e D . (veja Figura 3)

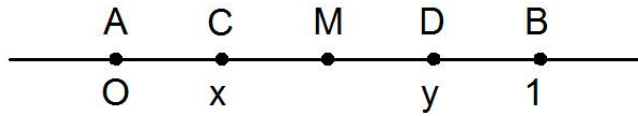


Figura 3

De acordo com as hipóteses temos:

$$0 < x < \frac{1}{2} \text{ e } \frac{1}{2} < y < 1$$

Adotando agora um sistema de eixos ortogonais, temos que o conjunto de pares ordenados que satisfazem as condições (1) formam o quadrado $FGHI$ (veja Figura 4)

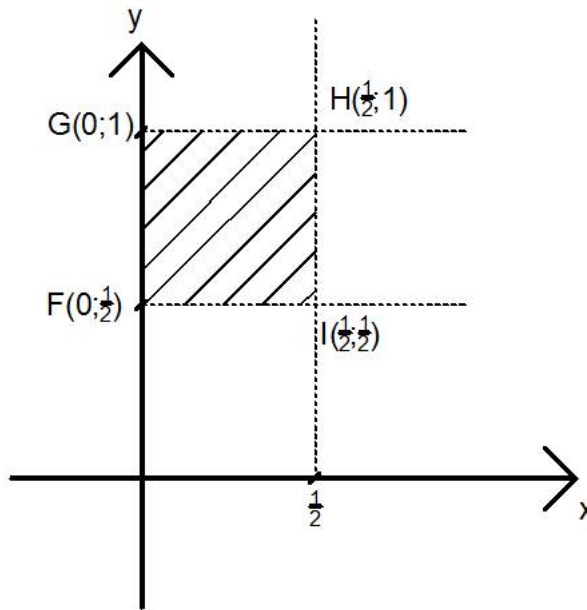


Figura 4

Como $CD = y - x$ e $AB = 1$, temos que a condição $CD < \frac{1}{4} AB$ é equivalente a $y - x < \frac{1}{4}$, ou seja (veja Figura 5):

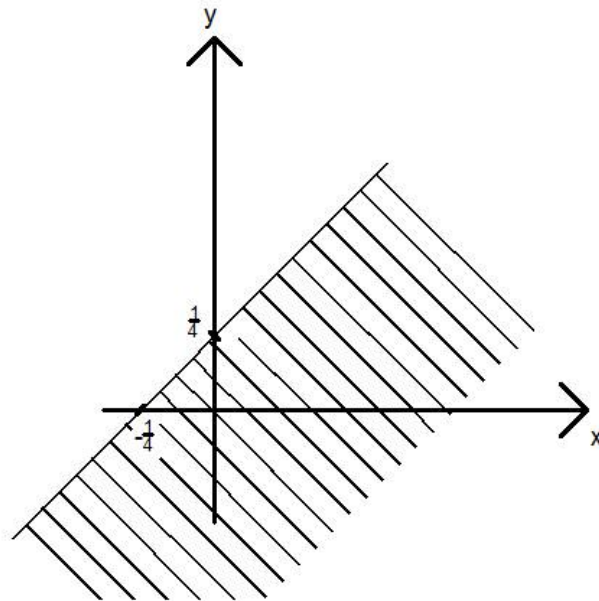


Figura 5: (conjunto de pares ordenados que satisfazem $y - x < 1/4$.)

Lembrando que $x > 0$ e $y > 0$ e representando os dois gráficos simultaneamente temos que (veja Figura 6):

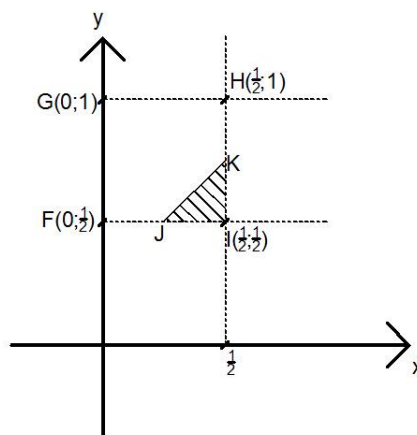


Figura 6: $J = (1/4, 1/2)$ e $k = (1/2, 3/4)$.

Logo, a probabilidade pedida é igual a

$$P(L) = \frac{\text{área do triângulo } JKI}{\text{área do quadrado } FGHI} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)}{\left(\frac{1}{2} \right)^2} = \frac{1}{8}.$$

Exemplo 3. *O Problema do Macarrão: Este problema foi extraído de [1]. Dividindo aleatoriamente um segmento em três partes, qual é a probabilidade de que esses novos segmentos formem um triângulo? Este mesmo problema poderia ser enunciado da seguinte maneira, um professor durante uma aula segura um giz paralelamente ao piso da sala e apenas solta o giz, observando que o mesmo se quebra em três pedaços (isto “quase” sempre acontece, ainda não sei o motivo), ele pergunta aos alunos: Qual a probabilidade de esses três pedaços formarem um triângulo?*

Podemos resolver este problema de duas maneiras diferentes.

Seja T o evento onde os três segmentos formam um triângulo. Considere um segmento AB de comprimento 1. Sejam P e Q pontos do segmento AB onde, AP , PQ e QB medem respectivamente x , y , e $1-x-y$ (veja figura 7).

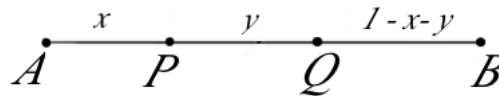


Figura 7

Logo, cada par ordenado (x,y) está associado a uma única forma de dividir o segmento AB : $x > 0$, $y > 0$ e $x+y < 1$. Adotando agora um sistema de eixos coordenados, temos que o conjunto de pares ordenados que cumprem as condições acima formam o triângulo (veja Figura 8)

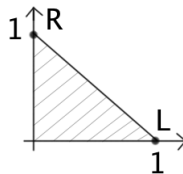


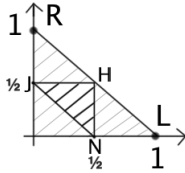
Figura 8

Devemos lembrar que três segmentos formam um triângulo se, e somente se, o tamanho de cada lado for menor que a soma dos tamanhos dos outros dois.

Assim temos que $AP = x < \frac{1}{2}$, $PQ = y < \frac{1}{2}$ e $QB = 1 - x - y < \frac{1}{2}$.

De $1 - x - y < \frac{1}{2}$ temos que $x + y > \frac{1}{2}$.

Representando essas três condições no mesmo sistema cartesiano da Figura 9, obtemos a região HJN abaixo,



onde H , J e N são pontos médios dos lados do triângulo ORL . Assim, a probabilidade pedida é igual a

$$P(T) = \frac{\text{área do triângulo } HJN}{\text{área do triângulo } OLR} = \frac{1}{4}.$$

Uma solução alternativa é a seguinte: Representamos por AB o segmento inicial e sejam D o ponto de quebra à esquerda do ponto médio de AB e E o ponto de quebra à direita; é claro que se os dois pontos D e E estiverem entre A e G , onde G é o ponto médio de AB , não teremos um triângulo com as medidas de AD , DE e EB , pois $EB > AD + DE$. Vamos agora, construir um triângulo equilátero de lado AB . Seja C um ponto tal que ABC seja equilátero. (veja Figura 9)

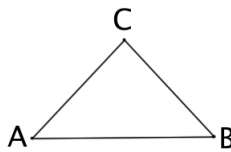


Figura 9

Sejam G , H e I os pontos médios de AB , BC e CA respectivamente (veja Figura 10)

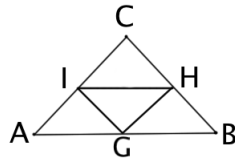


Figura 10

Agora faremos as seguintes construções:

I - Traça-se por D um reta paralela à AC.

II - Traça-se por E um reta paralela à BC.

Seja F a intersecção destas duas retas. (veja Figura 11)

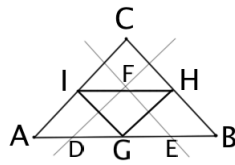


Figura 11

Se F está no interior do triângulo GHI, então pode-se formar um triângulo, devido a desigualdade triangular, mas se F está no interior dos triângulos AGI, GHB ou HIC, então não vale a desigualdade triangular e nenhum triângulo pode ser formado. Logo,

$$P(T) = \frac{1}{4}.$$

Exemplo 4. Considere um alvo com forma de um quadrado como na Figura 12

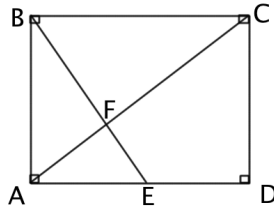
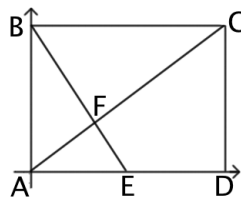


Figura 12

E é o ponto médio de AD . Se um dardo é arremessado aleatoriamente no alvo (e o acerta), qual a probabilidade de que atinja o interior do quadrilátero $EFCD$?

Seja I o evento que consiste nos pontos que estão no interior de $EFCD$. Construindo um sistema de eixos cartesianos usual, com eixo das abscissas contendo o lado AD e o eixo das ordenadas AB , obteremos a figura abaixo



Se adotarmos, sem perda de generalidade, $AD = 2u.c.$, então $E = (1,0)$, $D = (2,0)$, $C = (2,2)$ e F é ponto de encontro da bissetriz AC e da reta suporte do segmento BE , cuja equação segmentária é dada por $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1$; assim $F = (2/3, 2/3)$. A área do quadrilátero $EFCD$ pode ser calculada assim:

$$\text{área do triângulo } ACD - \text{área do triângulo } AFE = \frac{(2 \cdot 2)}{2} - \frac{(2/3 \cdot 1)}{2} = \frac{5}{3}.$$

Logo a probabilidade pedida é igual

$$P(I) = \frac{\text{área do quadrilátero } EFCD}{\text{área do quadrilátero } ABCD} = \frac{5}{12}.$$

Exemplo 5. Considere o intervalo $[0,2]$. Tomando dois valores, x e y , aleatoriamente neste intervalo, qual a probabilidade de que $xy \leq 1$ e que $\frac{y}{x} \leq 2$?

Seja A o evento onde $y \leq \frac{1}{x}$ e $y \leq 2x$. Representando as restrições $x, y \in]0, 2]$, $y \leq \frac{1}{x}$ e $y \leq 2x$ em um sistema cartesiano, temos: (veja Figura 13)

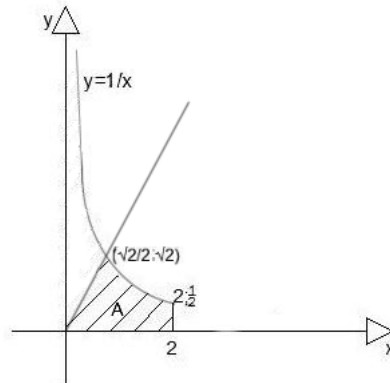


Figura 13

A região dos casos possíveis é o quadrado de lado 2. Assim, a probabilidade pedida é igual a

$$P(A) = \frac{\text{área da região } A}{4}.$$

Antes de calcular da área da região A , Precisamos recordar a definição geométrica de logaritmo natural.

Seja H o ramo positivo do gráfico da função $y = \frac{1}{x}$; isto é, a função que associa a cada número real positivo $x > 0$ o número $y = \frac{1}{x}$; ou seja, $H = \{(x, y) / x > 0 \text{ e } y = 1/x\}$.

Sejam $a > 0$, $b > 0$ e $a < b$. Tomemos a região do plano limitada pelas duas retas verticais $x=a$ e $x=b$, pelo eixo das abscissas e pelo ramo da hipérbole H . (veja Figura 14)

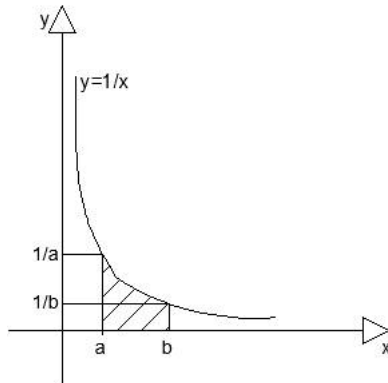


Figura 14

De acordo com [3], temos que a área da região hachurada é igual $\ln b - \ln a$, onde $\ln x$ é o logaritmo natural de x . Voltando ao cálculo da área da região A (veja Figura 15),

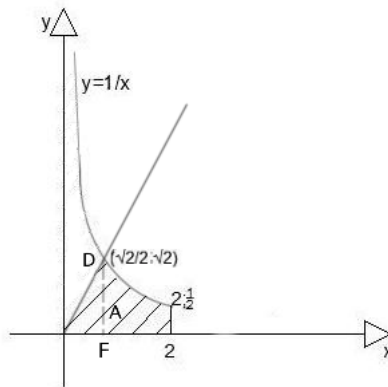


Figura 15

Sabemos que A tem área igual a área do $\triangle OFD$ + área limitada pela hipérbole $y = \frac{1}{x}$, o eixo das abscissas a reta $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e a reta $x = 2$. Logo, sua área A é igual a

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(\ln 2 - \ln \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3\ln 2}{2} = \frac{(1 + 3\ln 2)}{2}$$

e a probabilidade pedida é igual a

$$P(A) = \frac{(1 + 3\ln 2)}{4} \cong 38,5\%.$$

Exemplo 6. *O problema do encontro: Este problema foi extraído de [5]. Duas pessoas decidiram se encontrar em um determinado local entre 11 e 12 horas. Combinou-se previamente que a primeira a chegar ao local esperaria a outra em no máximo 15 minutos. Qual a probabilidade que este encontro aconteça, admitindo que os instantes de chegada de cada uma das pessoas é totalmente aleatório?*

Seja E o evento dos pontos que representam um encontro. Os horários 11h e 12h não são relevantes e sim o intervalo de tempo correspondente 1h ou 60 minutos. Podemos assim localizar os tempos de chegada das duas pessoas em um sistema de eixos ortogonais onde x será o tempo de chegada de uma delas e y o da outra.

A região representada na Figura 16 representa todos os pontos possíveis de encontro das duas pessoas. Por exemplo se a primeira chegar às 11:20 e a segunda às 11:40, o ponto de encontro será $(20,40)$

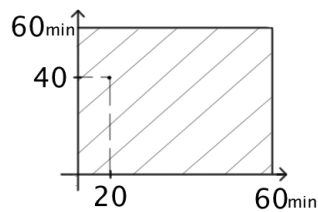


Figura 16

De acordo com o enunciado, a diferença em módulo $|y - x|$ do tempo de chegada de uma e o tempo de chegada da outra é de no máximo 15 minutos, ou seja, $|y - x| \leq 15$, que é equivalente a $-15 \leq y - x \leq 15$ (veja Figura 17).

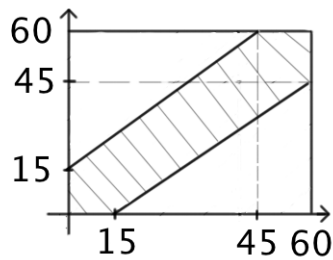


Figura 17

Logo a probabilidade pedida é igual a

$$P(E) = \frac{60^2 - 45^2}{60 \cdot 60} = \frac{7}{16}.$$

No século XVIII, o matemático francês Georges-Louis Leclerc, conde de Buffon, propôs um interessante problema. É sobre este e algumas de suas aplicações que tratamos agora.

3 O Problema da Agulha de Buffon e Aplicações

Consideremos uma família de retas paralelas em um plano, onde qualquer duas paralelas adjacentes distam de a . Lançando ao acaso, sobre o plano, uma agulha de comprimento l ($l < a$), qual a probabilidade de que a agulha intercepte uma das retas?

Sejam x a distância do ponto médio da agulha à reta mais próxima e θ o ângulo formado pela agulha e por esta mesma reta. (veja Figura 18)

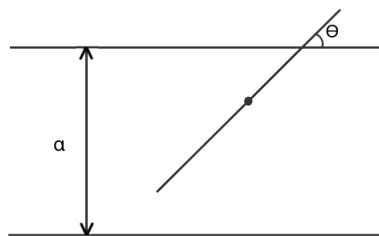


Figura 18

Esses dois valores, $x \in [0; \frac{a}{2}]$; $\theta \in [0; \pi]$, determinam a posição da agulha em relação à reta mais próxima. Note que $x = 0$, se o ponto médio da agulha cai exatamente sobre uma das retas paralelas e $x = \frac{a}{2}$ se este ponto médio interceptar a reta bissetora de duas paralelas (veja Figura 19)

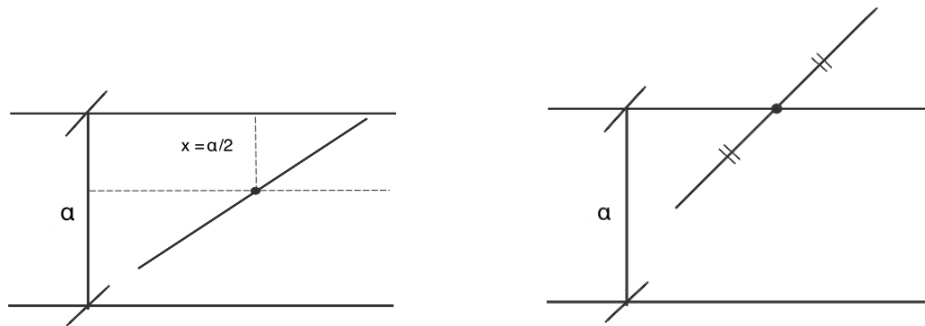


Figura 19

Quando a agulha interceptará a reta mais próxima?

Considere uma linha imaginária passando pelo ponto médio da agulha, paralela às linhas paralelas. Seja w a distância entre uma das extremidades da agulha e tal linha imaginária. (veja Figura 20)

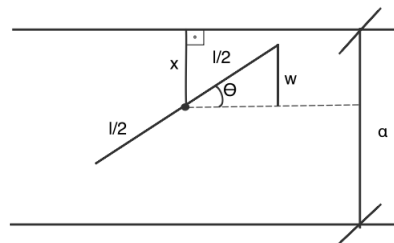
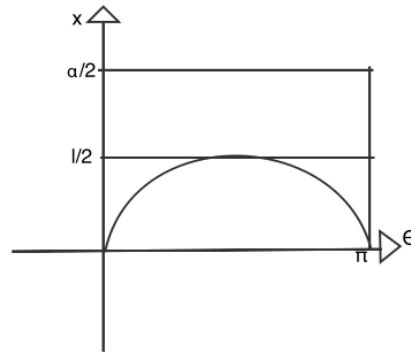


Figura 20

Observe que a agulha tocará a linha paralela mais próxima do seu centro se $w \geq x$. Assim, $\text{sen}\theta = \frac{w}{l}$ ou seja, $w = \frac{l \text{sen}\theta}{2}$.

Concluimos que a agulha tocará a linha paralela mais próxima de seu centro se $x \leq w = \frac{l \text{sen}\theta}{2}$, ou seja, $x \leq \frac{l \text{sen}\theta}{2}$. Lembrando que $x \in [0; a/2]$ e $\theta \in [0; \pi]$, temos que o gráfico da função $x(\theta) = \frac{l \text{sen}\theta}{2}$ no plano $\theta \times x$, é:



O retângulo de vértices $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(\pi, a/2)$ e $(0, a/2)$ corresponde a todos os possíveis pares ordenados (θ,x) no lançamento da agulha. Pela inequação $x \leq \frac{l \operatorname{sen} \theta}{2}$ a região sob o gráfico da função $x(\theta) = \frac{l \operatorname{sen} \theta}{2}$ é a região na qual a agulha toca uma linha paralela. A área desta região é dada por

$$\int_0^{\pi} \frac{l}{2} \operatorname{sen} \theta d\theta = \frac{l}{2} \operatorname{cos} \theta \Big|_0^{\pi} = \frac{l}{2} (-\operatorname{cos} \pi + \operatorname{cos} 0) = \frac{l}{2} (1 + 1) = l.$$

Sendo A o evento dos pontos onde a agulha toca uma linha, temos que, a probabilidade geométrica de que a agulha toque uma linha é:

$$P(A) = \frac{l}{\pi \cdot \frac{a}{2}} = \frac{2l}{a\pi}$$

Por exemplo, se a distância entre as paralelas for 5 e o tamanho da agulha for $l = 4$, então a probabilidade de que a agulha toque uma linha é de $\frac{2 \cdot 4}{5\pi} \cong 51\%$. O problema das agulhas de Buffon por si só já é interessante, mas as suas consequências são ainda mais surpreendentes. Vejamos algumas.

3.1 Estimando π

O matemático E.C. Titchmarsh uma vez disse: “Não existe unidade prática em se saber que π é irracional, mas, se podemos saber, então certamente seria intolerável não saber”, para mais detalhes, consulte [4]. Já vimos que, dado um feixe de retas paralelas todas igualmente espaçadas, digamos que seja a a distância entre qualquer duas destas paralelas. A probabilidade geométrica que uma agulha de comprimento l , intercepte uma destas paralelas ao ser arremessada aleatoriamente sobre este feixe é igual a $\frac{2l}{a\pi}$.

Agora, lançando a agulha n vezes sobre o feixe de paralelas, o número k de vezes que ela intercepta uma das retas deve ser tal que a razão $\frac{k}{n}$ se aproxime cada vez mais de $\frac{2l}{a\pi}$, quanto maior for o valor de n ; ou seja, para m muito grande, $\frac{k}{n} \cong \frac{2l}{a\pi} \Rightarrow \pi \cong \frac{2l \cdot m}{k \cdot a}$.

A tabela a seguir contém alguns dados sobre experiências realizadas com diferentes tamanhos de agulhas, para determinação de π .

Autor (ano)	razão $\frac{l}{a}$	número de lançamentos (n)	número de sucessos	valor estimado para π
Wolf (1850)	0,8	5000	2532	3,1596
Smith (1855)	0,6	3204	1218,5	3,1553
Fox (1864)	0,75	1030	489	3,1595
Lazzerini (1901)	0,83	3408	1808	3,1415929
Reina (1925)	0,5419	2520	859	3,1795

No dia, 07/10/2013 em uma sala de pré-vestibular em Goiânia, eu mesmo resolvi fazer uma experiência, que agora descrevo:

Na aula que antecedeu a experiência, pedi que para a próxima aula, todos os alunos, são 75, trouxessem uma régua de 40 cm. Eu já havia observado que o piso da sala de aula é coberto por lajotas quadradas 50cm×50cm, que se desenhadas as linhas verticais teríamos um feixe de retas paralelas horizontais igualmente espaçadas (50cm).

No dia, pedi que todos jogassem a régua para cima (cada um apenas 20 vezes) e anotassem o número de vezes que a mesma tocou alguma linha horizontal. Como são 75 alunos, tivemos 1500 arremessos. Desprezando a má vontade de alguns alunos, e a largura da régua, tive como número de intersecções igual a 717. Assim obtivemos a seguinte estimativa $\pi \cong \frac{2 \cdot 1500 \cdot 40}{717 \cdot 50} = 3,347$.

Levando-se em conta que nem todos usaram de precisão para contar a quantidade de intersecções e que talvez alguns não fizeram vinte lançamentos, o resultado é formidável.

3.2 Medidas em Bacias Hidrográficas

A próxima aplicação do teorema de Buffon é ainda mais surpreendente. Bacia hidrográfica, é definida como a área na qual ocorre a captação de água (drenagem) para um rio principal e seus afluentes devido às suas características geográficas e topográficas. Existem vários índices aplicados para determinar a forma de uma bacia. Estes índices

procuram relacionar a bacia às formas geométricas conhecidas [6].

Por exemplo, o coeficiente de compacidade (k_c) que é a relação entre o perímetro da bacia e a circunferência de um círculo de área equivalente é dado por $k_c = 0,28 \cdot \frac{p}{\sqrt{a}}$, onde, p e a são o perímetro e a área da bacia respectivamente. O fator (k_p) é a relação entre a largura média e o comprimento da bacia hidrográfica $k_p = \frac{a}{l^2}$, onde l é o comprimento da bacia, dado pelo comprimento do curso d'água. Pois assim, vimos que para estudarmos com precisão uma bacia hidrográfica, que diga-se de passagem é de vital importância à sobrevivência com qualidade de vida de todos que moram neste planeta, é preciso medir o comprimento dos seus canais de escoamento.

O método mais utilizado por geógrafos é o que utiliza um aparelho chamado curvímeter, que é um instrumento mecânico ou eletrônico usado para medir pequenas distâncias sobre um mapa. O instrumento é constituído por uma roda conectada a um contador de giros. Para medir o comprimento de uma curva, o utilizador faz com que a roda do curvímeter gire sobre a curva, o número de voltas da roda é registrado pelo contador e convertido para unidades de comprimento.

Com o curvímeter (veja Figura 21), pode-se medir o comprimento de um rio ou de uma estrada, desde que a altitude não varie muito, pois este aparelho não considera os desníveis. Percebemos então que o uso do curvímeter depende muito da precisão e paciência de quem o está usando.



Figura 21

A probabilidade geométrica, inspirada no problema de Buffon ajuda e muito na medição do comprimento do escoamento de uma bacia hidrográfica da forma mais simples e com menos possibilidade de erro. Isso é possível devido “à **generalização**

de Laplace para o problema de Buffon?.

Considere uma malha de retângulos congruentes

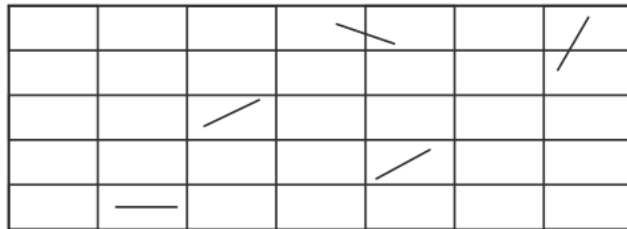


Figura 22

e uma agulha, de comprimento menor que o menor lado de cada um dos retângulos que formam a malha. Qual a probabilidade que a agulha caia totalmente no interior de um dos retângulos da malha? (veja Figura 22)

Para modelar o problema, considere uma malha de retângulos, de lados medindo a e b ($a < b$). Vamos pensar primeiramente em algo mais simples: qual a probabilidade condicional da agulha ficar totalmente no interior do retângulo sabendo que a mesma caiu em uma posição paralela a um dos lados? Temos duas situações: a agulha caiu paralela ao lado de medida a ou paralela ao lado de medida b . seja I o evento da agulha cair paralela ao lado a (veja Figura 23), observe que tomamos como referência a distância do ponto médio da agulha dos lados do retângulo.

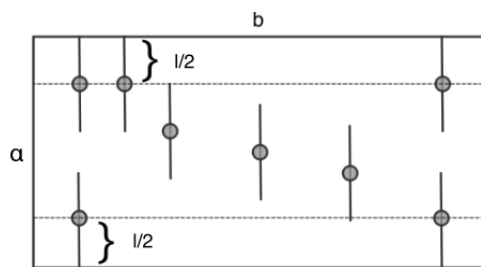


Figura 23

Portanto a probabilidade procurada é

$$P(I) = \frac{\text{área do retângulo de lados } a - l \text{ e } b}{\text{área do retângulo de lados } a \text{ e } b} = \frac{a - l}{a}$$

Seja J o evento da agulha cair paralela ao lado b (veja Figura 24):

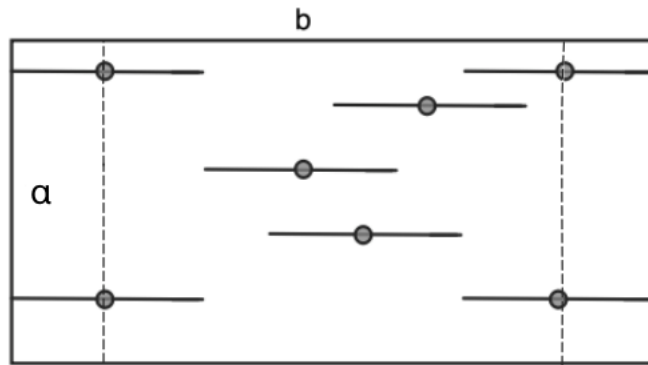


Figura 24

$$P(J) = \frac{\text{área do retângulo de lados } b-l \text{ e } a}{\text{área do retângulo de lados } a \text{ e } b} = \frac{b-l}{b}$$

Concluimos que a probabilidade da agulha cair paralelamente a um dos lados é

$$P(I \cup J) = \frac{a-l}{a} + \frac{b-l}{b} - \frac{(a-l)(b-l)}{ab} = \frac{ab - l^2}{ab}.$$

Mas os problemas não acontecem exatamente como queremos, portanto devemos pensar na posição da agulha de uma maneira mais geral. A maior área que podemos conseguir, da região onde estaria o ponto médio da agulha, é pensando na agulha formando um triângulo retângulo isóceles, com um dos vértices do retângulo. (veja Figura 25)

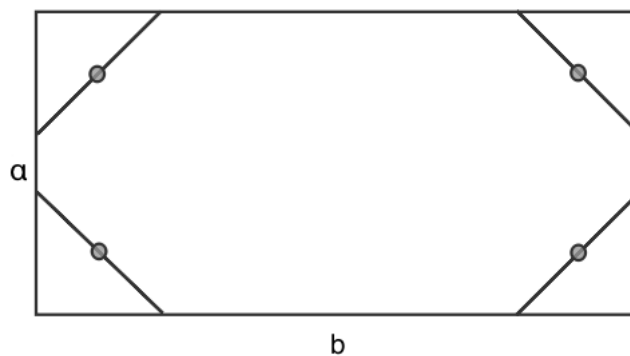


Figura 25

Vamos considerar, agora, os lados do retângulo sobre um sistema de eixos coordenados. (veja Figura 26)

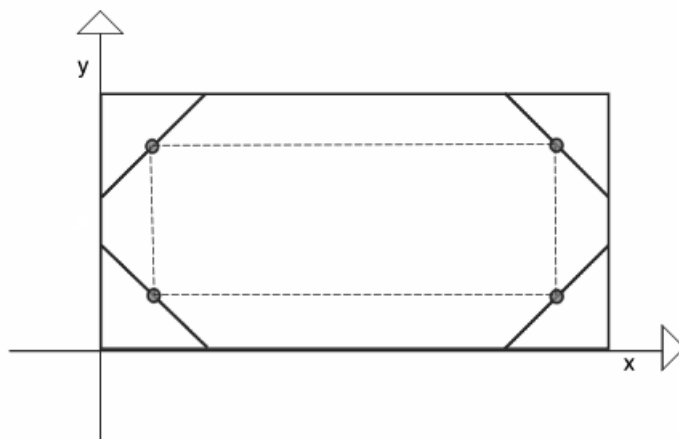


Figura 26

A posição da agulha, portanto, fica determinada por duas coordenadas de seu ponto médio e pelo ângulo α formado pela agulha com o eixo x (veja Figura 27)

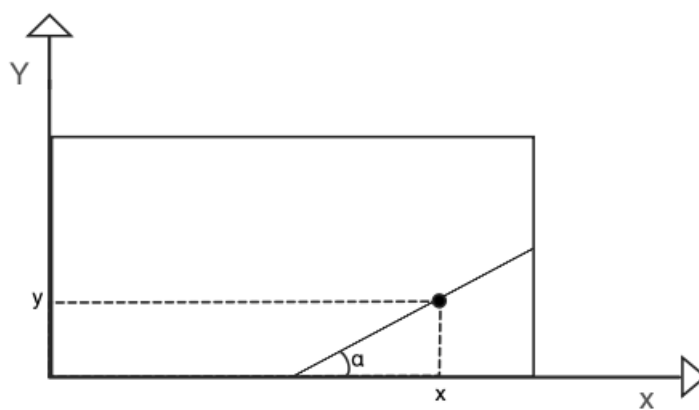


Figura 27: onde $0 < x < b$, $0 < y < a$ e $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Sejam ABCD os vértices do retângulo formado pelas posições limites do ponto médio da agulha (veja Figura 28)

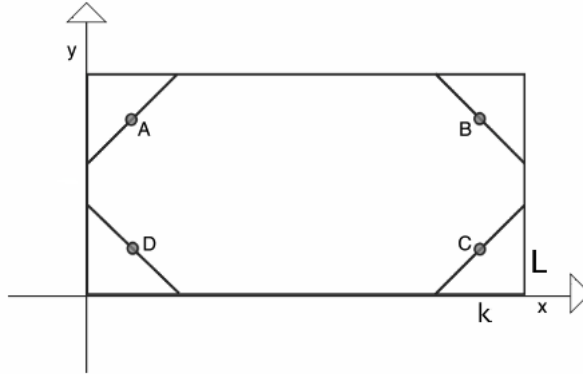


Figura 28

Para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, temos que a área deste retângulo é:

$$(b-l \cos \alpha)(a-l \sin \alpha) = ba - l(b \sin \alpha + a \cos \alpha) + l^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

pois, $\cos \alpha = \frac{k}{l} \Rightarrow k = l \cos \alpha$ e $DC = b - k \Rightarrow DC = b - l \cos \alpha$ e $\sin \alpha = \frac{L}{l} \Rightarrow L = l \sin \alpha$ e $BC = a - L \Rightarrow BC = a - l \sin \alpha$

Para $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, a área de ABCD será igual a

$$ba - l \cdot (b \sin \alpha - a \cos \alpha) - l^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Lembrando que $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, temos finalmente, que a área do retângulo ABCD vale

$$ba - bl|\sin \alpha| - al|\cos \alpha| + \frac{1}{2}l^2|\sin(2\alpha)|.$$

Como vimos anteriormente, o ponto médio da agulha fica determinado por duas coordenadas x e y e pelo ângulo α , $0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq a$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, assim o conjunto de pontos que satisfazem estas condições é um paralelepípedo de volume $V = \pi ab$. Além disso, o volume v do conjunto de pontos que representam as posições da agulha totalmente no interior do retângulo (um dos retângulos da malha) é

$$v = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(ba - bl|\sin \alpha| - al|\cos \alpha| + \frac{1}{2}l^2|\sin 2\alpha| \right) d\alpha = \pi ab - 2al - 2bl + l^2$$

Seja A , o evento dos pontos da agulha que intercepta alguma das retas paralelas.

$$\text{Logo } P(A) = \frac{v}{V} = \frac{\pi ab - 2al - 2bl + l^2}{\pi ab}.$$

Calculando a probabilidade da agulha não interceptar uma das linhas paralelas, temos

$$1 - \frac{\pi ab - 2l(a + b) + l^2}{\pi ab} = \frac{2l(a + b) - l^2}{\pi ab}.$$

Este resultado, como já havíamos citado, beneficiou e muito a vida de quem usa o curvímeter.

Quando pretende-se determinar o comprimento total dos canais de uma bacia hidrográfica, monta-se uma malha de retângulos de lados cujas medidas se conhece sobre o mapa que representa a bacia e lança-se várias vezes uma agulha de comprimento menor ou igual a um dos lados dos retângulos e toma-se o valor médio do número de pontos de interseção, achando o seu comprimento.

4 Considerações Finais

A intenção deste trabalho foi, primordialmente, mostrar a professores de ensino médio e alunos de licenciatura em matemática, o quanto é motivante a Probabilidade Geométrica; pois, além do próprio conceito de probabilidade, envolve outros conhecimentos tais como a Geometria Euclidiana e a Geometria Analítica.

Espero ter contribuído para que esses problemas possam ser mostrados em sala de aula, tanto em nível de ensino médio quanto em nível de licenciatura, tentando atingir um dos grandes objetivos do PROFMAT, que é a melhoria do ensino da matemática no nosso país.

Impressionam as frequentes afirmações dos docentes de que conhecimento matemático é a capacidade de resolver situações da vida prática, solucionar problemas mais complexos, fazer operações, abstrair, fazer sínteses, análises, generalizações, construir conceitos; interpreta os fenômenos naturais através de modelos matemáticos, isto é, fazer abstrações de variáveis e constantes do processo, relacionar todas essas instâncias. Fazer conhecimento matemático é, a partir dessas ações, construir modelos capazes de representar a realidade e, em seguida, resolver os problemas que essa representação apresenta. Por fim, ser capaz, com tal modelo, de prever o comportamento dessa realidade. Todos esses verbos, usados pelos docentes, indicam ações ou operações próprias de um sujeito em plena atividade. Na hora de explicar a aprendizagem do aluno e desafiá-la em sala de aula, entretanto, renunciam à riqueza desses verbos reduzindo tudo à pobreza dos verbos copiar e repetir. Com isso espero contribuir na desmitificação de que, trabalhar com probabilidade no ensino médio, é algo desinteressante. Problemas e soluções aqui apresentadas podem e devem despertar a curiosidade de alunos e professores e com isso iniciar a busca por outros desafios.

Referências

- [1] EDUARDO, W., *O Problema do Macarrão*, Revista do Professor de Matemática, SBM, vol. 34 (1997).
- [2] JAMES, B., *Probabilidade: um curso em nível intermediário*, projeto Euclides, 2ª edição, 1996.
- [3] LIMA, E. L., *Logaritmos, Rio de Janeiro, SBM*, Coleção fundamentos da matemática elementar, 1985.
- [4] BECKER, F., *Epistemologia do professor de matemática*, Editora Vozes, 2012.
- [5] TUNALA, N., *Determinação de probabilidades por métodos geométricos*, Revista do Professor de Matemática, SBM, vol. 20 (1997)
- [6] FONSECA DE CARVALHO, D.; SILVA DUARTE BATISTA DA SILVA, L., *Bacia Hidrográfica*, Rio de Janeiro, 2006.
- [7] GUEDENKO B.V., *The Theory of Probability, Moscou, Mir Publishers, 1998.*