UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
FACULDADE DE FILOSOFIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

IGOR SOUZA SARAIVA

“APENAS SETAS”: A TEORIA DAS CATEGORIAS COMO LINGUAGEM PARA UMA MATEMÁTICA ESTRUTURALISTA

GOIÂNIA
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
FACULDADE DE FILOSOFIA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[ ] Dissertação [x] Tese [ ] Outro*:_____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Igor Souza Saraiva

3. Título do trabalho

“Apenas Setas”: A Teoria das Categorias como Linguagem para uma Matemática Estruturalista

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;

- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **Andre Da Silva Porto**, **Professor do Magistério Superior**, em 30/10/2023, às 11:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Igor Souza Saraiva**, **Discente**, em 18/12/2023, às 13:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4158952** e o código CRC **FCEAA2BA**.

Referência: Processo nº 23070.060392/2023-32 SEI nº 4158952

IGOR SOUZA SARAIVA

“APENAS SETAS”: A TEORIA DAS CATEGORIAS COMO LINGUAGEM PARA UMA MATEMÁTICA ESTRUTURALISTA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Filosofia, vinculado à Faculdade de Filosofia, da Universidade Federal de Goiás, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Filosofia.
Área de Concentração: FILOSOFIA

Orientador: Dr. André da Silva Porto

GOIÂNIA
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Saraiva, Igor Souza
"Apenas Setas" [manuscrito] : A Teoria das Categorias como Linguagem para uma Matemática Estruturalista / Igor Souza Saraiva. - 2023.
183 f.

Orientador: Prof. André da Silva Porto.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Faculdade de Filosofia (Fafil), Programa de Pós-Graduação em Filosofia, Goiânia, 2023.

1. Teoria das Categorias. 2. Estruturalismo. 3. Fundamentos da Matemática. I. Porto, André da Silva, orient. II. Título.

CDU 1

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

FACULDADE DE FILOSOFIA

ATA DE DEFESA DE TESE

Ata nº 33/2023 da sessão de Defesa da Tese de Doutorado de Igor Souza Saraiva, do Programa de Pós-Graduação em Filosofia, que confere o título de Doutor, na área de concentração em Filosofia.

Aos vinte dias do mês de outubro do ano de dois mil e vinte e três, a partir das 15 horas, por vídeo conferência, realizou-se a sessão pública de Defesa da Tese de Doutorado intitulada "'Apenas Setas': A Teoria das Categorias como Linguagem para uma Matemática Estruturalista". Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor André da Silva Porto (FAFIL - UFG) ; Professor Doutor Marcelo Esteban Coniglio (UNICAMP), integrante titular externo; Professor Doutor Rodrigo de Alvarenga Freire(UnB), integrante titular externo; Professor Doutor Ruy José Guerra Barretto de Queiroz (UFPE), integrante titular externo e Professor Doutor César Frederico dos Santos (UFMA), integrante titular externo. Durante a arguição, os membros da Banca Examinadora não **fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Tese de Doutorado, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus integrantes. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor André da Silva Porto**,** Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos integrantes da Banca Examinadora, aos vinte dias do mês de outubro do ano de dois mil e vinte e três.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **Ruy Jose Guerra Barretto de Queiroz**, **Usuário Externo**, em 23/10/2023, às 14:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Andre Da Silva Porto**, **Professor do Magistério Superior**, em 23/10/2023, às 16:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **César Frederico dos Santos**, **Usuário Externo**, em 25/10/2023, às 17:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo de Alvarenga Freire**, **Usuário Externo**, em 30/10/2023, às 11:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de

novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **MARCELO ESTEBAN CONIGLIO**, **Usuário Externo**, em 30/10/2023, às 13:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4133022** e o código CRC **36542920**.

Referência: Processo nº 23070.060392/2023-32 SEI nº 4133022

AGRADECIMENTOS

Eu gostaria de agradecer, acima de tudo, à minha companheira, Fernanda Azevedo Silva, não só por todos os anos de afeto e suporte, como também pela convivência intelectual que estimulou em partes o desenvolvimento desta tese e por vezes ter me emprestado seus conhecimentos e habilidades no uso da língua portuguesa, muito superiores aos do autor.

Também gostaria de agradecer minha mãe, Irenir Souza da Silva, pelo apoio e estímulo à minha educação. Ao meu orientador, professor André da Silva Porto, pelas conversas e orientações que certamente foram a base para grande parte das ideias aqui expressas. À professora Araceli Rosich Soares Velloso por ter me orientado ao longo dos meus projetos de pesquisa anteriores, que culminaram nesse ponto de chegada. A todos os meus amigos, principalmente aqueles com quem frequentemente converso sobre questões de filosofia e ciência. Ao estado brasileiro por propiciar às instituições e incentivos que tornam a pesquisa possível. A todos os servidores públicos cujo trabalho faz com que tais instituições funcionem. A todos os pesquisadores, sejam matemáticos, cientistas ou filósofos cujo trabalho apareça direta ou indiretamente aqui. A todos os desenvolvedores dos *softwares* que tenham sido de alguma forma empregados para a confecção deste trabalho.

RESUMO

Há alguns anos acontece um debate filosófico acerca da relação entre dois movimentos intelectuais distintos. No interior da prática matemática, surge, na década de 40, a Teoria das Categorias. Inicialmente sem grandes pretensões fundacionais, pouco a pouco a teoria ganha abrangência e passa a ser considerada, no mínimo, uma linguagem muito útil para caracterizar e estudar estrutura matemática abstrata. Quase que simultaneamente, filósofos preocupados com questões acerca da natureza dos objetos matemáticos, propuseram algo como um programa estruturalista, baseado na ideia de moldar um entendimento da natureza da matemática que leve em conta que cada área desta ciência descreve os fatores formais comuns à diversos sistemas estruturados. A afinidade entre Teoria das Categorias e uma filosofia estruturalista da matemática é quase óbvia, levando naturalmente à questão pela possibilidade de que a teoria seja empregada como um arcabouço conceitual autônomo, capaz de articular uma visão peculiar da matemática, sem nenhum tipo de dependência em relação a outras abordagens fundacionais, tais como teorias de conjuntos ou teorias de tipos. Essa possibilidade tem sido negada por alguns filósofos da matemática, suscitando uma querela ainda sem uma solução unânime. Esta tese apresenta uma visão panorâmica de todo esse cenário e tenta mostrar que aqueles que rejeitam a autonomia da teoria das categorias possuem pressupostos epistemológicos que não são aceitos de forma unânime.

Palavras-chave: Teoria das Categorias, Estruturalismo, Fundamentos da Matemática.

ABSTRACT

For some years now, there has been a philosophical debate about the relationship between two distinct intellectual movements. Within mathematical practice, the Theory of Categories emerged in the 1940s. Initially without any major foundational pretensions, little by little the theory gained in scope and came to be considered, at the very least, a very useful language for characterizing and studying abstract mathematical structure. Almost simultaneously, philosophers concerned with questions about the nature of mathematical objects proposed a structuralist program, based on the idea of shaping an understanding of the nature of mathematics that takes into account that each area of this science describes the formal factors common to various structured systems. The affinity between Category Theory and a structuralist philosophy of mathematics is almost obvious, leading naturally to the question of the possibility of the theory being employed as an autonomous conceptual framework, capable of articulating a peculiar view of mathematics, without any kind of dependence on other foundational approaches, such as Set Theory or Type Theory. This possibility has been denied by some philosophers of mathematics, giving rise to a dispute without a unanimous solution. This thesis presents a panoramic view of this whole scenario and tries to show that those who reject the autonomy of category theory have epistemological presuppositions that are not unanimously accepted.

Key-words: Category Theory, Structuralism, Foundations of Mathematics.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **2**

1. Estruturalismo **9**

1.1 Principais argumentos em favor do estruturalismo 13

1.1.1 O problema das múltiplas reduções e a indeterminação da referência dos termos numéricos 14

1.1.2 O argumento pragmatista 19

1.2 Variedades de Estruturalismo Matemático 24

1.2.1 Estruturalismo do ponto de vista ontológico 29

1.2.2 Estruturalismo do ponto de vista linguístico 33

1.2.3 Estruturalismo do ponto de vista epistêmico 47

1.3 Considerações Finais do Capítulo 53

2. Teoria das Categorias como Fundamentos para a Matemática e como Framework para o Estruturalismo **56**

2.1 O início 58

2. 2 Teoria das categorias e fundamentos 67

2.3 A noção de propriedade universal e alguns exemplos de construções dentro de uma categoria 80

2.4 A construção universal dos naturais 94

2.5 Teoria das categorias e álgebra Universal 103

2.6 Considerações finais do capítulo 110

3. Teoria das Categorias como Framework Autônomo **112**

3.1 Fundamentos categóricos e conjuntísticos 117

3.2 Teoria das categorias e estruturalismo 122

3.3 A sugestão de Awodey 125

3.4 “Many topoi view” 133

3.5 As objeções de Hellman 138

3.5.1 Objeção de Feferman 139

3.5.2 Autonomia “em sentido forte” 158

3.5.3 O Problema do endereço residencial 163

3.5.3.1 Uma saída possível ao problema 167

3.5.3.2 Uma saída não fundacionalista 172

CONCLUSÃO **179**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS **180**

INTRODUÇÃO

Desde os primórdios da filosofia ocidental, a matemática cumpre um papel de fornecer aos filósofos uma amostra real de um tipo muito peculiar de conhecimento. É muito comum que se acredite que o conhecimento matemático desfruta de um grau de certeza superior ao da maioria das outras ciências. Aliado a isso, a matemática pode ser contrastada com as ciências empíricas pelo fato de que as últimas parecem ter como objeto entidades que existem no espaço e no tempo, enquanto no caso da matemática definitivamente não é nada óbvio que esse também seja o caso. Assim, ela é um candidato minimamente plausível a ser um exemplo efetivo de um conhecimento *absolutamente certo* e que versa sobre entidades abstratas, que existiriam, em algum sentido, fora do espaço-tempo. Daí, muitos não resistiram à tentação de concluir que uma ciência irretocável e absolutamente certa é uma meta possível e que entidades não físicas realmente existem.

O impacto de tais conclusões não afeta apenas a maneira como explicamos o funcionamento e a natureza da matemática. A maior parte das pessoas a consideram um ramo do conhecimento por si própria, mas ninguém nega que ela seja também uma ferramenta indispensável para grande parte das outras ciências. Isso decorre do fato de que, na maioria das vezes, uma boa explicação teórica e racional de um fenômeno, seja ele físico ou social, envolve pelo menos a menção a "coisas matemáticas" simples, tais como números, formas geométricas e funções. Essas coisas representam certos aspectos dos fenômenos que desejamos explicar racionalmente, e, assim, a menção a tais entidades cumpre de fato um papel positivo em contribuir para o valor epistêmico das nossas explicações teóricas. Mas as dificuldades em tornar compreensível a utilidade da matemática sem hipostasiar seus objetos podem motivar (ou abrir caminho) para a imaginação humana conceber entidades mais extravagantes que, apesar de não serem observáveis - ou mesmo localizáveis no *continuum* do espaço-tempo - ainda assim seriam supostamente legítimos elementos da ontologia, capazes até mesmo de exercer efeito causal nos fenômenos reais. O perigo aqui é de que não há garantias de que a menção a essas entidades extrafísicas como causa dos fenômenos empíricos não possa exercer um efeito perverso ao comprometer a racionalidade e o valor cognitivo das nossas explicações sobre o mundo, já que a própria relação causal envolvida é por natureza obscura e incompreensível. Apesar de explicações teológicas para fenômenos empíricos serem o exemplo mais óbvio de quando esse efeito perverso acontece, é uma questão em

aberto se o mesmo não ocorre sistematicamente em várias áreas do conhecimento humano.

Consideremos, agora, a crença na possibilidade de uma ciência absolutamente certa. Ao longo da história essa crença moveu muitos intelectuais em direção a projetos de organizar suas disciplinas reduzindo-as a umas poucas asserções básicas. Uma vez fixada essas asserções, as regras de derivação proposicional fixariam todas as outras proposições reconhecidas como verdadeiras naquele domínio. Acreditava-se que essas asserções, os axiomas de uma área do conhecimento, fossem verdades autoevidentes sobre as quais não seria razoável levantar uma dúvida sincera ou demandar justificação posterior. Não há dúvida de que esse esforço organizacional é uma fonte inestimável de progresso para as ciências. Mas podemos nos indagar se, por exemplo, não teríamos descoberto mais cedo o verdadeiro valor das geometrias não euclidianas, i.e., sua utilidade em fornecer uma representação mais acurada do fenômeno gravitacional, caso não acreditássemos que os axiomas da geometria euclidiana consistissem em verdades fundamentais e inabaláveis sobre o espaço. Essas questões contrafactuais sobre o desenvolvimento da história das ciências provavelmente envolvem variáveis demais para serem seriamente respondidas. Mas o ponto aqui é deixar claro qual é o perigo da crença na possibilidade de um conhecimento absolutamente certo. Se acreditamos que ele é possível, eventualmente podemos ser levados a acreditar que ele é real e que ele é efetivamente exemplificado por uma certa teoria particular. O desejo de conservar os axiomas ou princípios básicos de uma tal teoria, resistindo à necessidade de mudanças, pode atrasar o progresso das ciências. Se queremos um entendimento mais adequado do mundo que nos cerca, é desejável estarmos sempre prontos para revisar nossas crenças mais fundamentais quando o bom senso assim demanda.

Atualmente, aqueles que queiram evitar essas duas ameaças estão em uma posição relativamente confortável. Fundacionalismo, pelo menos nas suas formas mais dogmáticas e na medida em que abarca o conhecimento matemático, parece ter sido relegado à implausibilidade. Lógicos e matemáticos demonstraram teoremas que tornam inviável a fé em um sistema único capaz de decidir todas as questões matemáticas. E quando consideramos a necessidade de se apelar para uma ontologia que aceite objetos abstratos, vemos que ela foi desafiada pela engenhosidade filosófica. A literatura atual conta com algumas maneiras alternativas de explicar o valor da matemática sem postular que os “nomes” singulares que ocorrem em suas sentenças se refiram a entidades abstratas

- ou então de reconstruir essas sentenças de uma maneira tal que nomes singulares nem mesmo ocorram.

A questão pela natureza do conhecimento matemático, e a intimamente conectada questão pela natureza dos objetos matemáticos, adquire crucial importância para a filosofia quando levamos em conta que a matemática não é um mero exemplo de conhecimento indubitável sobre entidades abstratas, mas argumentavelmente, o mais plausível candidato a exemplificar uma tal forma de conhecimento. Se a crença na existência literal de entidades matemáticas puder ser sustentavelmente dissolvida, deve-se esperar que o resultado desse empreendimento impacte a maneira como lidamos com todas as outras supostas entidades abstratas em todos os ramos do conhecimento. Talvez, a eliminação das entidades matemáticas sirva até mesmo de inspiração para lidarmos com outras supostas entidades, tais como universais ou personagens de obras de ficção. Uma vez que a matemática é um instrumento utilizado em quase todas as ciências e que, segundo um dos maiores cientistas do século passado, é mesmo quem confere um maior grau de certeza às ciências naturais[1], é de se esperar que a "epistemologia" adequada à matemática também impacte a maneira como compreendemos todas as outras áreas do conhecimento.

A tese que se segue é uma tentativa de mostrar que dentre as ferramentas teóricas já consolidadas da prática matemática moderna inclui-se uma teoria que, apesar de ser compatível com uma ampla gama de interpretações filosóficas - ou melhor dizendo - exatamente por ser compatível com diversos pontos de vista filosóficos distintos, nos fornece uma maneira autônoma de se fazer matemática plausivelmente descrita como livre da pressuposição da existência absoluta de objetos matemáticos e da necessidade de um sistema de fundamentos. Essa é a Teoria das Categorias, de Samuel Eilenberg e Saunders MacLane.

Todas as afirmações do parágrafo anterior são desafiadas pela literatura em várias frentes distintas. Mas parece haver uma concordância universal de que pelo menos a teoria das categorias é *uma ferramenta muito útil* para descrever e manipular estruturas matemáticas. Daí parece ter vindo o fato de que a teoria vem sendo aproximada de um tipo de abordagem filosófica para a matemática conhecida como "estruturalismo".

[1] "[...] é a matemática que confere às ciências naturais um certo grau de certeza, o qual não seria atingido sem a matemática". (Einstein, 2005, p.665)

Nossa tese possui como escopo apenas abordagens estruturalistas. Isso não significa, de forma alguma, que esse é um escopo restrito. Existe uma grande variedade de propostas que podem plausivelmente receber o nome de "estruturalismo". Todas elas são unificadas por pouco mais do que uma crença geral de que, em matemática, o que importa não são propriedades de indivíduos tomados isoladamente, mas aquelas propriedades que derivam da organização de coisas individuais em um certo sistema. Em outros termos, a matemática lidaria apenas com a forma comum que pode ser preservada quando passamos de um certo sistema para outro por meio de uma regra de transformação. Isso é sintetizado no assim chamado lema estruturalista segundo o qual "Matemática é sobre estrutura". Todas as diferentes abordagens estruturalistas também possuem em comum certas preocupações filosóficas. Em nosso primeiro capítulo, apontamos como exemplos centrais de tais preocupações a indeterminação da referência dos termos numéricos, defendida por Benacerraf (1965) e Parsons (1965), e a necessidade de fazer jus à prática real da matemática encarnada no assim chamado "método axiomático moderno".

A concordância entre as filosofias estruturalistas parece terminar não muito longe desse ponto. Partimos da asserção de que matemática é sobre estruturas abstratas - ou uma forma comum. Mas como entender o que é essa forma comum? Ela existe de maneira anterior e independente dos sistemas de objetos que as instanciam - ou apenas existe inerindo a tais sistemas - ou talvez nem mesmo possam ser ditas *literalmente* existir? Como ela é representada? Como as linguagens que empregamos para descrevê-las adquirem significado? Sua semântica deve ser interpretada diretamente pelo valor de face das proposições ou elas exigem um esforço de análise lógica para terem seu significado esclarecido? Como elas são conhecidas? Partimos de objetos particulares, descritos por um sistema de proposições fundamentais, para depois compreendermos como eles são agrupados em todos complexos e a partir daí é que abstraímos a estrutura abstrata desses complexos? Ou talvez possamos começar pelos conceitos estruturais mais universais e ir acrescentando determinações posteriores apenas na medida do necessário, sem pressupor nenhum sistema fundamental de proposições? A resposta a todas essas perguntas é causa de controvérsia entre autores que defendem uma abordagem estruturalista para a filosofia da matemática.

A estrutura geral da tese que se segue pode ser assim descrita. Nosso primeiro capítulo é algo como um manifesto estruturalista. Começamos elucidando o significado do lema estruturalista geral e depois apresenta as principais razões que motivaram

filósofos a defender esse lema. Depois, propomos algo como uma classificação para as principais variedades de estruturalismo. Nossa classificação, que não se pretende exaustiva e nem mesmo particularmente sistemática, compara essas abordagens com base em três eixos: ontologia, linguagem e epistemologia. Do ponto de vista ontológico, podemos conceber um estruturalismo platonista ou nominalista. O ponto crucial dessa distinção deve ser óbvio a todos que estudam filosofia. Do ponto de vista linguístico ou semântico, acreditamos que a abordagem pode ser *universalista* ou *formalista*. Formalistas defendem que as sentenças de uma teoria estrutural descrevem estruturas gerais pelo fato de que admitem uma ampla gama de múltiplas interpretações. Universalistas, por outro lado, mantêm o caráter interpretado da linguagem e dizem que as sentenças devem ser elucidadas por uma análise lógica que revelará que cada asserção sobre estrutura é, na verdade, uma afirmação universal. O leitor se lembrará, provavelmente, do famoso debate entre David Hilbert e Gottlob Frege sobre o estatuto dos axiomas da geometria. Apesar de Frege não poder ser entendido como um estruturalista no sentido como entendemos aqui, ele sugeriu a Hilbert uma construção "universalista" da geometria como uma maneira mais adequada de expressar a visão hilbertiana de que toda teoria é apenas uma armação ou esquema de conceitos junto com suas relações uns para com os outros Por fim, acreditamos também que, do ponto de vista da epistemologia de fundo, uma abordagem estruturalista pode ser fundacionalista ou antifundacionalista de acordo com a posição sobre o estatuto de um "universo fixo de entidades básicas de fundo".

Qual o tipo de visão que a teoria das categorias atribui para as estruturas matemáticas? Aqui, devemos dar um passo para trás. Quando foi originalmente concebida, tal como apareceu pela primeira vez no artigo de Eilenberg e Mac Lane, *General Theory of Natural Equivalences* (1945), a teoria das categorias era vista como desempenhando um papel meramente auxiliar de fornecer um sistema de axiomas, muito similar ao de teorias algébricas, que permite a definição dos conceitos realmente importantes de transformação natural e isomorfismo natural com pouca ou nenhuma pretensão de autonomia em relação, por exemplo, à teoria dos conjuntos. Desse ponto de vista, a questão que inicia este parágrafo não faria o menor sentido: a teoria das categorias não traria essencialmente nada de novo sobre a natureza das estruturas, pois ela é uma mera ferramenta auxiliar. Foi necessário um certo processo histórico de desenvolvimento da teoria para que sua apresentação como uma maneira autônoma, inovadora e paradigmaticamente estruturalista de se fazer matemática (ou até mesmo como

fundamentos para essa ciência) pudesse fazer sentido. Nosso segundo capítulo é uma introdução à teoria e a esse processo histórico.

Crucial à ideia de que a teoria das categorias exemplifica uma prática matemática estruturalista é o vocabulário restrito que aparece na linguagem da teoria. Tal linguagem não conta *primitivamente* com uma relação de cópula, capaz de dizer, de certos elementos, que eles pertencem a alguma coleção particular. Em vez disso, os primitivos da teoria se reduzem à operação binária de composição entre mapeamentos (conhecidos como "morfismos") conectados por um domínio/contradomínio (conhecidos como "objetos") comum, um par de operações que mapeiam um determinado morfismo em seu domínio e contradomínio e, por fim, uma relação de identidade entre morfismos. Tudo o que pode ser dito precisa ser *recuperado* em termos dos primitivos e a escolha particular desses conduz a uma visão da matemática sumarizada no famoso lema: "apenas setas!". O lema em questão tenta capturar vagamente a ideia de que tudo o que é substancial seria expresso via asserções sobre mapeamentos entre objetos. É também importante adicionar a ideia de que essas asserções se restringem a caracterizar por meio de equações a álgebra da operação de composição sobre esses mapeamentos. Essas restrições obrigam os usuários da teoria das categorias a identificarem construções matemáticas apenas por meio das assim chamadas "construções universais", que são não apenas incapazes de distinguir entre objetos isomorfos entre si como também descrevem o que é essencial à construção por meio de relações externas para com outros habitantes de um mesmo universo de objetos matemáticos. Daí a afinidade tão estreita da teoria com uma perspectiva estruturalista.

Desde a primeira apresentação da teoria das categorias ela se envolve em controvérsias fundacionais motivadas principalmente pelo aparente uso de coleções grandes demais para serem tratadas como "conjuntos" por teorias de conjuntos consistentes. Uma vez que inicialmente a teoria não foi pensada como um *framework* autônomo para a matemática, mas uma mera ferramenta auxiliar útil para definir alguns conceitos, essas controvérsias eram secundárias e muitos matemáticos se sentiram livres para seguir praticando sua atividade, às vezes até mesmo usando a linguagem categórica, sem grandes problemas. Desenvolvimentos posteriores tornaram possível que diversas áreas da matemática fossem de fato praticadas sem que necessariamente houvesse referência *explícita* à conceitos ou ideias que não possam ser construídos dentro do

próprio *framework* categórico[2]. Mais do que isso, categorias deixaram de ser meros suportes para certas operações e se tornaram elas mesmas objetos de interesse matemático, assim como as estruturas "menores" estudadas em outros ramos da matemática. Essas duas mudanças ressaltam e tornam mais graves as dificuldades concernindo ao "tamanho" das coleções empregadas para definir construções matemáticas. Então, a questão pode ser colocada: "Se a teoria das categorias se serve exaustivamente de agregados tão grandes quanto a classe de todos os conjuntos, então por que ela não estaria sujeita às antinomias conjunto-teóricas? Ela é de fato consistente?". Pretendemos defender que se estamos restritos aos primitivos da teoria das categorias, então falta-nos os meios para formular as ideias paradoxais que figuram nas tradicionais antinomias das teorias de conjuntos. Dificuldades com as antinomias surgem quando passamos a exigir que a teoria seja desenvolvida sobre um plano de fundo conjunto-teórico e, portanto, são inerentes às teorias de conjuntos, não à das categorias. Essa afirmação será exemplificada no capítulo por meio da mais famosa das antinomias: o paradoxo de Russell.

Por fim, a plausibilidade dessa suposta autonomia da teoria das categorias é o ponto central do debate sobre se ela pode ou não fornecer as bases conceituais para uma abordagem estruturalista. Tanto quanto foi possível notar ao longo dessa pesquisa, todos os argumentos disponíveis contra essa autonomia parecem meros detalhamentos ou refinamentos dos argumentos que Geofrey Hellman forneceu em seu *Does Category Theory Provide a Framework to Mathematical Structuralism?* (2006). O ponto central do terceiro capítulo é prover uma análise dos argumentos que foram levantados por Hellman e mostrar que, em geral, eles se baseiam em pressuposições que os entusiastas da teoria das categorias não estão dispostos a aceitar. Deixamos uma introdução mais detalhada a esse debate para o início do próprio terceiro capítulo.

[2] Argumentos contra a autonomia da teoria das categorias podem precisamente ser entendidos como afirmações de que referências a conceitos externos, vindos de algum *framework* fundacional, são sempre necessárias e estão implícitas em todos esses desenvolvimentos.

1. Estruturalismo

> Muitos filósofos da matemática que gostariam de ser platonistas são incomodados por dois problemas bastante profundos. O primeiro é que, uma vez que objetos matemáticos não existem no espaço ou no tempo, a própria possibilidade de aquisição de conhecimento e crenças sobre eles é colocada em questão. O segundo emerge do fato de que nenhuma teoria matemática pode fazer mais do que determinar seus objetos a menos de um isomorfismo. Então o platonista parece estar na posição paradoxal de clamar que uma dada teoria matemática é sobre certas coisas e ainda assim ser incapaz de fazer qualquer afirmação definitiva sobre quais coisas são essas. (Resnik, 1981)

> Matemáticos não estudam objetos, mas relações entre objetos. Então, eles são livres para substituir alguns objetos por outros desde que as relações permaneçam inalteradas. Conteúdo para eles é irrelevante: eles se interessam apenas pela forma. (Poincaré, 1913, p.42)

Dar uma caracterização que seja ao mesmo tempo precisa e esclarecedora do que é "estruturalismo" dentro do contexto da filosofia da matemática não é uma tarefa fácil. Se queremos capturar de uma só vez todo o leque de abordagens que recebem esse nome, à primeira vista, parece que o melhor que podemos fazer é dizer que todas possuem em comum o lema inócuo "matemática é sobre estrutura" - ou afirmações equivalentes como "matemática é a ciência da estrutura". Para esclarecer como essa afirmação deve ser entendida é necessário descartar alguns dos significados possíveis do termo "estrutura", pelo fato de que eles não capturam com precisão aquilo que o estruturalista pretende dizer quando diz que matemática é sobre estrutura.

Seguindo Hale (1996) e também Dummett (1991), distinguimos entre dois usos para a palavra "estrutura" já bem difundidos na literatura matemática. A teoria dos modelos nos fornece uma maneira de, dada uma certa linguagem de primeira ordem L, atribuir uma (ou frequentemente mais de uma) "estrutura" semântica para L capaz de tornar sentenças formuladas em L verdadeiras ou falsas. Podemos dizer informalmente que essa estrutura é uma interpretação de L. A estrutura é introduzida como um certo conjunto-domínio não vazio de elementos, junto com relações, propriedades e operações definidas para os elementos do domínio. Todos esses diferentes itens são definidos em termos de conjuntos, e o modo como eles são "agrupados" é irrelevante. Dado uma teoria TL em L, i.e., um conjunto de sentenças de L, chamamos de um "modelo de TL" uma estrutura de L que satisfaça todas as sentenças de TL. Então, em um certo uso de

‘estrutura’, dizemos que uma estrutura é uma certa coleção de elementos particulares, junto com uma lista de operações ou relações definidas entre os elementos dessa coleção. Nesse uso da expressão, os elementos da estrutura já possuem seus critérios de identidade bem determinados antes de serem agrupados sob um domínio comum e, por isso, são identificáveis independentemente de sua posição dentro da estrutura. Vamos reservar a expressão ‘estrutura-modelo’ ou ‘sistema’ para essa noção de ‘estrutura’. Em outro uso bem estabelecido da palavra, que podemos chamar de ‘estrutura abstrata’, dizemos das estruturas-modelo ou sistemas que eles *possuem uma mesma estrutura* no caso de haver um mapeamento um a um entre seus domínios conservando relações ou operações relevantes em um certo contexto. Uma vez tendo fixado esse contexto, com isso fixamos critérios de identidade que nos permitem falar sobre uma estrutura abstrata particular ou em classes de estruturas abstratas. Para fazer uma analogia didática com a linguagem ordinária, estamos aqui diante da diferença entre dizer que um certo prédio particular é uma estrutura e dizer de dois prédios particulares que eles “possuem a mesma estrutura” no caso de terem sido construídos a partir de uma planta comum.

Agora, podemos nos perguntar: quando um estruturalista diz que “matemática é sobre estrutura”, ele pretende afirmar que a matemática é sobre estruturas-modelo ou sobre estruturas abstratas? Dummet alega que quando o estruturalista diz que matemática é sobre estrutura, devemos interpretar o termo “estrutura” no sentido abstrato, pois a outra opção trivializaria a tese estruturalista. Isso se daria porque qualquer modelo de uma teoria é uma estrutura no sentido da teoria dos modelos e, portanto, não haveria nada o que contrastar com a tese de que matemática é sobre estrutura. Já Hale defende que isso não é tão filosoficamente inócuo quanto Dummet pretende, pois pressupõe que uma teoria matemática seja sobre seus modelos pretendidos. De qualquer modo, se supormos que as abordagens estruturalistas resolvem alguns problemas particulares sobre os quais falaremos mais adiante, o lema estruturalista precisa ser entendido como asserindo que a matemática fala sobre estruturas no sentido abstrato. Então, corrigimos o lema inicial substituindo-o por “matemática é sobre estruturas abstratas que podem ser instanciadas em diversos sistemas particulares”. Essa última afirmação ainda pode ser sujeita a diversas interpretações, e dessas diversas interpretações emergem diferentes tipos de filosofias estruturalistas.

As diferentes abordagens estruturalistas não compartilham apenas um lema comum, mas também algumas preocupações de natureza filosófica. Essas preocupações podem ser vistas como os argumentos em favor de uma posição estruturalista. Ao longo

deste capítulo, iremos considerar dois dos principais argumentos que favorecem indistintamente qualquer variedade de abordagem estruturalista. Em seguida, iremos apresentar alguns conceitos que são pertinentes para a compreensão e comparação dessas diferentes abordagens. Dividimos esses conceitos em três eixos, cada um representando pontos de vistas sobre os quais podemos comparar as diferentes formas de abordagem estruturalista. A escolha dos conceitos foi predominantemente guiada pelas nossas análises do debate acerca do estatuto da teoria das categorias. Por isso, não temos a pretensão de apresentar uma tipologia completa e sistemática das abordagens estruturalistas.

Antes de considerarmos os principais argumentos usados em favor de uma concepção estruturalista da matemática, vamos apenas distinguir entre o que é que estamos chamando de estruturalismo no contexto da filosofia da matemática e outras abordagens científicas que recebem esse nome.

Se pesquisarmos em toda a literatura acadêmica, veremos que o uso mais comum do termo "estruturalismo" é denotar algum tipo de abordagem em outras ciências, particularmente dentro de algumas ciências humanas. Os dois empregos do termo provavelmente não possuem mais em comum do que uma certa analogia e talvez algumas conexões históricas. Ainda assim, acreditamos que o lema que mencionamos possa ser estendido para outras áreas do conhecimento, preservando-se o significado que ele possui quando aplicado à matemática. Nesse caso, em vez de se tomar a noção de "estrutura" como caracterizando apenas as "coisas" sobre as quais falamos em teorias matemáticas, a mesma noção poderia caracterizar os objetos de uma qualquer teoria específica - ou talvez, até mesmo qualquer objeto em geral. Nesse sentido, podemos falar de um possível *estruturalismo global* e diversos *estruturalismos locais*. Essa distinção reflete uma diferença entre se afirmar que apenas propriedades *estruturais* são relevantes em uma certa região do conhecimento e afirmar, de forma universal, que tudo o que pode ser dito sobre todos objetos de conhecimento seriam, no fundo, apenas propriedades estruturais. Por propriedade "estrutural" entendemos qualquer propriedade que seja preservada para alguma noção de isomorfismo. Para deixar claro como um estruturalismo global poderia fazer sentido, vamos deixar de lado formulações ontológicas e levar em consideração que, como tentaremos argumentar ao longo do capítulo, estruturalismo pode ser formulado como uma tese acerca das linguagens que empregamos para expressar as teorias. Estruturalismo tem a ver com limitar o poder expressivo de tais linguagens a tal ponto

que apenas propriedades "estruturais" possam ser atribuídas e empregadas para discernir os objetos da linguagem.

Uma forma de estruturalismo global foi sugerida por Quine, em conexão com suas doutrinas da relatividade ontológica e com seu naturalismo[3]. Quine parece concordar que o estruturalismo não deveria ser formulado como uma asserção ontológica sobre a natureza última de algum tipo de objeto, mas sobre a natureza de uma (ou todas, no caso de um estruturalista global) linguagem. Não é relevante para nós entendermos os detalhes do estruturalismo quineano, mas apenas levar em conta que ele depende da ideia de que a verdade e o conteúdo (o que para Quine significa "conteúdo estimulativo") de qualquer teoria é preservado para qualquer transformação um para um reinterpretando os termos e predicados da teoria. Quine denomina esses isomorfismos de "proxy functions". Os argumentos de Quine para que essas transformações preservem a verdade de teorias são a inescrutabilidade da referência e a indeterminação da tradução. Mas essas teses quineanas não precisam ser universalmente aceitas. Se houver maneiras de se argumentar em favor de que há, efetivamente bons critérios para se diferenciar semanticamente termos como "partes não destacadas de coelhos" e "coelhos" pelo comportamento verbal de usuários competentes desses termos, teremos encontrado razões suficientes para recuar da asserção quineana de estruturalismo global.

Levantei esses detalhes apenas para sugerir que um estruturalismo global semelhante ao de Quine demanda razões mais fortes para ser justificado do que algum tipo de estruturalismo local. O que não é surpreendente, já que ele é baseado em uma alegação mais forte que afirma algo sobre todas as linguagens e, portanto, pode ser mais facilmente contestado com exemplos particulares vindos de qualquer área do conhecimento. Por outro lado, podemos sustentar, com argumentos muito mais simples, que a linguagem de certas teorias específicas exprime apenas propriedades estruturais dos objetos de seu domínio. No domínio da física, por exemplo, argumentos baseados na ideia de que o conteúdo observável de uma certa descrição permanece inalterado quando submetemos a descrição a um certo tipo de isomorfismo desempenharam um papel absolutamente importante na justificação das primeiras formulações das duas teorias da relatividade.

Quando deixamos o domínio das proposições acerca de objetos concretos (e portanto, daquelas proposições para as quais a observação é um fator relevante para a

[3] Quine (1992).

determinação do valor de verdade) é ainda mais fácil encontrar bons motivos para defender que "propriedades internas" de objetos não são relevantes. Fala-se na ideia de que hoje em dia "estruturalismo" pode ser visto como um dos grandes eixos da filosofia da matemática, ao lado das posições como formalismo, logicismo ou intuicionismo, que dominaram o debate sobre fundamentos da matemática no século passado.[4] Além disso, estruturalismo é uma posição cada vez mais proeminente no campo de diversos ramos da matemática, a tal ponto que uma certa harmonia entre a prática matemática moderna e concepções estruturalistas mais filosóficas é muitas vezes mencionada como um dos principais argumentos a favor dessas posições[5]. Na seção seguinte apresentaremos os dois principais argumentos que são empregados para motivar uma abordagem estruturalista.

1.1 Principais argumentos em favor do estruturalismo

Ao longo dessa seção, apresentaremos dois dos principais argumentos que constituem a principal motivação para a adoção de uma visão estruturalista da matemática moderna. O primeiro argumento que discutiremos é a indeterminação da referência dos termos numéricos usualmente atribuída a Benacerraf (1965) e Parsons (1965). Estruturalistas interpretam esse argumento como demonstrando que a aritmética deve ser entendida como uma teoria que versa sobre a forma ou estrutura comum a todos os sistemas que satisfazem determinadas condições, já que seus axiomas não são capazes de fixar univocamente sobre qual progressão recursiva eles falam.

O segundo argumento a ser apresentado, gostaríamos de chamá-lo de argumento pragmatista. O argumento pragmatista consiste em se recomendar uma posição estruturalista alegando que ela faz justiça à atividade do matemático praticante, já que as teorias matemáticas não distinguiriam entre duas cópias estruturalmente indistinguíveis de uma certa construção matemática. Intimamente conectado a essa ideia está o fato de que essas teorias são desenvolvidas pelo que muitas vezes é chamado de "método axiomático moderno". Típico do método axiomático moderno é não se valer, para fins de

[4] Hellman (2001, p.184): "In recent years, structuralism as a philosophy of mathematics has begun to receive detailed formulations that may place it on an autonomous footing with the 'big three', logicism, intuitionism, and formalism, that have dominated in the last century. While in the past, it may be complained, there were too few efforts to articulate structuralism systematically, today we face the opposite problem: there seem to be *too many"*.
[5] Cf. Carter (2008).

deduzir os teoremas, de nenhum conteúdo conceitual que não esteja explícito nos axiomas.

Às vezes, podemos notar esses dois argumentos sendo apresentados como dois tópicos que não estão visceralmente conectados[6]. Contudo, esperamos que fique claro que as pressuposições do método axiomático moderno estão presentes e são cruciais à própria construção do argumento da indeterminação. Mais do que isso, talvez possamos até mesmo sugerir que o argumento de Benacerraf deve ser entendido como uma aplicação particular, para o domínio da aritmética, do preceito mais fundamental de que teorias axiomatizáveis falam sobre estrutura abstrata, já que não podem fixar univocamente uma única interpretação. A seguir, apresentamos os dois argumentos com um pouco mais de detalhes.

1.1.1 O problema das múltiplas reduções e a indeterminação da referência dos termos numéricos

Uma razão frequentemente adotada para justificar uma posição estruturalista sobre os números surge logo que nos indagamos acerca de que tipo de objetos os números são. Se tentamos responder à pergunta "O que são os números?" por meio de uma fixação unívoca da referência dos termos numéricos, nos deparamos com uma dificuldade: a própria teoria aritmética deixa subdeterminada quais objetos os números são. Essa dificuldade pode ser sugestivamente chamada de "o problema das múltiplas reduções". O argumento para justificar a indeterminação é comumente dito ter sido apresentado pela primeira vez quase que simultaneamente por Benacerraf (1965) e Parsons (1965), mas certamente encontra sua versão mais detalhada no artigo de Benacerraf "*What Numbers Could not Be*".

Como é bem conhecido, podemos empregar teorias de conjuntos para construir modelos para a aritmética. Qualquer modelo dos números naturais deve consistir em uma sequência dotada de um elemento inicial e uma regra de progressão que satisfaça todos os axiomas de Peano. Se supusermos, por exemplo, que a teoria de conjuntos em questão é a teoria descrita pelos axiomas ZFC[7], então existe, pelo menos, duas maneiras distintas

[6] Cf. Carter (2008, p.120) e Gasser (2015).

[7] ZFC será a abreviação para a teoria que resulta de estender os axiomas de Zermelo-Fraenkel com a adição do axioma da escolha.

já bem consagradas de se interpretar a teoria dos números naturais dentro dessa teoria de conjuntos. Ambas as interpretações resultam em um conjunto dos números naturais diferente, porém, ambos são isomorfos entre si. De forma mais geral, qualquer modelo que satisfaça os axiomas de Peano em segunda ordem é isomorfo a qualquer outro modelo[8].

Os axiomas de Peano podem ser modelados como a sequência dos ordinais de Zermelo ou a sequência dos ordinais de Von Neumann. Os ordinais de Von Neumann consistem em uma sequência de conjuntos cujo primeiro elemento é o vazio, e cuja regra de progressão diz que o enésimo membro da série é o conjunto cujos elementos são todos os membros anteriores. Assim, temos que:

0= Ø;

1={Ø};

2={{Ø}, Ø};

3={{{Ø}, Ø}, {Ø}, Ø} …

A sequência dos ordinais de Zermelo também possui como elemento inicial o conjunto vazio. Mas ela progride por uma regra diferente. Segundo essa regra o enésimo membro da série é o conjunto formado apenas pelo membro anterior. Ou seja:

0= Ø;

1={Ø};

2={{Ø}};

3={{{Ø}}} …

Ambas as sequências começam com um mesmo elemento inicial, mas progridem por regras distintas. Essas regras coincidem no segundo termo da série, que corresponde ao número 1, e começam a divergir a partir do terceiro elemento, correspondente ao número 2. Descrevemos, propositalmente, a *correspondência* entre cada número natural e os membros de cada série como uma identidade. O reducionista que defende que sua teoria fundamental de conjuntos é toda a matemática - ou pelo menos que sua teoria possa cobrir qualquer ramo da matemática com as devidas extensões - não acredita apenas que essa teoria seja suficiente para construir uma estrutura análoga aos números naturais, mas também crê que ela revela o que é que os números naturais realmente são. Se todos os

[8] A restrição "em segunda ordem" tem de ser adicionada pois, como é conhecido pelo teorema de Löwenheim-Skolem, nenhuma teoria em primeira ordem com modelos infinitos pode ser categórica, ou seja, possuir um único modelo a menos de um isomorfismo.

objetos da matemática são conjuntos, cada objeto determinado deve ser algum conjunto determinado. Assim, a totalidade dos números naturais nada mais seria do que um certo conjunto específico e, portanto, cada membro dessa totalidade ou bem é também um certo conjunto ou é algum elemento originário (admitindo, nesse caso, que existem objetos que não são conjuntos). Mas quando tentamos especificar qual conjunto é esse conjunto de números naturais, nos deparamos com o fato de que diversas opções são aceitáveis. Se para que uma opção seja aceitável for *necessário e suficiente* que ela satisfaça os axiomas de Peano, as duas opções que fornecemos acima seriam *igualmente* aceitáveis.

Dizer que ambas as opções são igualmente aceitáveis é dizer que uma opção é aceitável se, e somente se, a outra o for. Podemos concluir, então, que ambas as opções são corretas? Ora, dizer que a primeira redução é correta é tratar como verdadeira a sentença "2={{Ø}, Ø}". Dizer que a segunda construção é a correta, por outro lado, implica em tomar como verdadeira a sentença "2={{Ø}}". Não podemos tomar como verdadeira ambas as sentenças, já que a conjunção de ambas implicaria, pela transitividade da identidade, na sentença "{{Ø}, Ø} = {{Ø}}" que é claramente absurda e contradiz diretamente o *axioma da extensão*[9]. O reducionista, portanto, é obrigado a tomar uma decisão sob pena de incorrer em contradição com os axiomas que ele mesmo assume.

Benacerraf argumentou que tomar uma decisão aqui é decidir de uma vez por todas a resposta a todas as perguntas da forma "n = s?", onde "n" é uma expressão denotando algum número natural qualquer, e "s" alguma expressão denotando algum conjunto. É razoável dizer que se de fato houver uma decisão que é a redução correta, deveria haver um argumento para concluir que essa redução é a correta, em detrimento de todas as decisões possíveis. Podemos dizer que uma redução parece mais interessante do que outra por alguma razão. Por exemplo, podemos gostar dos ordinais de Von Neumann porque em tal redução é verdadeiro que um número natural *n* possui exatamente *n* elementos. Ou podemos gostar dos ordinais de Zermelo porque os consideramos mais simples. Ainda assim, qualquer uma dessas reduções é indistinguível das outras, pelo menos do ponto de vista estritamente aritmético. Com isso, quero dizer que qualquer uma das duas reduções produz exatamente as mesmas sentenças na linguagem da aritmética e,

[9] Para o leitor menos habituado ao termo, o axioma da extensão diz que se dois conjuntos possuem exatamente os mesmos elementos, então eles são idênticos. Em algumas versões o axioma pode contar com a implicação em dois sentidos, adquirindo a forma mais explícita de algo como uma definição da noção de identidade para conjuntos. Então o axioma nos dá uma regra importante para delimitar a identidade dos conjuntos prescritos pela teoria.

portanto, qualquer distinção entre os ordinais de Zermelo e de Von Neumann não será exprimível em termos dessa linguagem. Uma vez que ambas as reduções concordam acerca do valor de verdade de qualquer sentença composta apenas de símbolos aritméticos, não há sentido em se procurar qualquer raciocínio aritmético para escolher uma em detrimento de outra. A distinção surge apenas quando formulamos perguntas com termos que importamos da teoria de conjuntos de fundo. Por exemplo, se os números naturais forem realmente os ordinais de Von Neumann, então é verdadeiro que $2 \in 3$; mas se os números naturais forem realmente os ordinais de Zermelo então é falso que $2 \in 3$. Foi necessário acrescentar aos símbolos tipicamente aritméticos a relação de cópula entre um conjunto e seu elemento.

Para Benacerraf, não é simplesmente falso que um número natural seja um certo conjunto. Questões da forma "qual conjunto é o número natural n?" são tratadas pelo autor como absurdas - ou, como o ele prefere dizer "*unsemantical*". Benacerraf propõe diagnosticar o problema como originado da exigência fregeana de que a toda expressão da forma "x=y" seja atribuída um sentido e, portanto, uma referência, que para Frege nada mais é do que o próprio valor de verdade da sentença. Se a relação de identidade realmente varre um único domínio universal, podemos fazer indagações absurdas como "É verdadeiro ou falso que $2=\{\{\emptyset\}\}$?". Mas podemos também assumir que sentenças da forma "x = y" só são significativas quando x e y pertencerem a algum gênero comum com o qual condições claras de identidade estejam associadas em virtude das quais podemos de fato atribuir um sentido à sentença e decidir seu valor de verdade. O axioma da extensão nos dá critérios de identidade para determinar quando dois conjuntos são idênticos; e podemos igualmente decidir as questões de identidade entre números naturais em termos de propriedades legitimamente aritméticas, mas não parece claro que possamos associar condições de identidade comuns a números e conjuntos.

Apesar de termos escolhido, como fez Benacerraf, o exemplo particular dos ordinais de Zermelo e dos ordinais de Von Neumann, qualquer construção dos números naturais como classes ou como classes de classes sofre exatamente dos mesmos males. Para sermos mais precisos, o objetivo do dilema não é vetar que números naturais sejam tratados como certas construções dentro de certas teorias ou mesmo que se professe que uma certa série de conjuntos possa funcionar como uma série de números naturais dentro de algum sistema. Tanto Benacerraf quanto Parsons desenvolveram seus argumentos como uma objeção à teoria dos números de Frege. Apontar a possibilidade de uma

infinidade de reduções que, por princípio, seriam igualmente legítimas é uma estratégia que mina a pretensão filosófica de "revelar" o que os números realmente são por meio de alguma redução em termos de conjuntos.

Benacerraf conclui, drasticamente, que números não só não são conjuntos, como também não são propriamente "objetos" de qualquer tipo. Uma vez que múltiplas reduções são igualmente possíveis, a aritmética seria uma ciência que trata igualmente de qualquer sistema de objetos arranjados como uma progressão recursiva e não uma teoria que descreve uma série particular de objetos.

> Aritmética é, portanto, a ciência que elabora a estrutura abstrata que todas as progressões possuem em comum meramente em virtude de serem progressões. Ela não é uma ciência que diz respeito a objetos particulares - os números. A busca por quais objetos particulares independentemente identificáveis números realmente são (Conjuntos? Júlios Césares?) é equivocada. (Benacerraf, 1965, p. 70, tradução minha)

Claro, a conclusão drástica que Benacerraf deu ao seu argumento não é universalmente aceita. Não há nem mesmo unanimidade quanto à interpretação correta do que é que Benacerraf pretendeu dizer no trecho acima. Vamos tomar seriamente a ideia de que a aritmética diz respeito não a uma série progressiva particular chamada "a série de todos os números naturais", mas a forma de uma progressão em geral (respeitando, claro, os axiomas de Peano). Podemos interpretar essa afirmação como uma asserção de que afirmações aritméticas seriam implicitamente gerais e demandariam um processo de análise através do qual nomes singulares seriam eliminados e essa generalidade seria revelada. Esse ponto de vista será descrito e discutido em mais detalhes quando considerarmos alguns tipos possíveis de abordagens estruturalistas.

O ponto que eu quero assinalar, aqui e agora, é apenas o de que, apesar da citação acima parecer sugerir exatamente essa ideia, essa não parece ser de fato a posição adotada pelo próprio Benacerraf no texto em questão, apesar de isso ser sugerido às vezes na literatura secundária.

Após rejeitar uma posição radicalmente formalista que "falharia em atribuir qualquer significado a sentenças aritméticas", Benacerraf diz, no entanto, que ele acredita que uma posição ligeiramente semelhante seria uma "extensão plausível e tentadora" da posição pela qual ele vem argumentando. O autor alega que não haveria espaço para explorar completamente essa posição no seu texto. Podemos resumi-la como uma concepção formalista na qual sistemas numéricos são tratados como meros "sinais" que não servem para designar coisa alguma, mas podem efetivamente ser usados para se

ordenar e contar conjuntos de objetos. Qualquer sequência recursiva de símbolos serviria indistintamente. O projeto de construção desse formalismo foi abandonado pelo autor depois de algumas dificuldades que não serão tematizadas aqui. Vamos agora passar à construção do segundo tipo de argumento em favor da visão estruturalista. Queremos que seja notado que os dois argumentos não só são semelhantes, como talvez possamos dizer que o primeiro é uma consequência ou aplicação particular do segundo.

1.1.2 O argumento pragmatista

É bastante comum argumentar em favor de que uma concepção estruturalista é adequada pois ela faz justiça à atividade dos matemáticos praticantes. Quando lidamos com álgebra, por exemplo, é frequente que duas construções feitas, por assim dizer, por "caminhos diferentes" se revelem como isomorfas entre si. Vamos pensar em um exemplo. Dado um espaço S e um ponto s0 ∈ S, pode-se determinar um grupo chamado de 'o grupo fundamental de S' e que é denotado por $\pi<S, s0>$. Os elementos desse grupo são todas as transformações representando trajetórias[10] contínuas de s0 para s0. Descrevendo o grupo de forma intuitiva: o elemento neutro do grupo é a trajetória trivial s0→s0 que representa a operação de "ficar parado"; a inversa de uma certa trajetória é obviamente "fazer o caminho de volta"; e a multiplicação do grupo é a concatenação de duas trajetórias nas quais o ponto final de uma coincide com o ponto inicial de outra (pela definição de grupo todas as trajetórias acontecem de ser concatenáveis). Se aplicarmos essa definição geral de "grupo fundamental" ao círculo S_0 junto com algum ponto 0 qualquer do círculo, temos que o grupo $\pi<S_0, 0>$ é formado pelos *loops* que percorrem o círculo n vezes começando e terminando em 0. A concatenação de um loop que percorre o círculo n vezes e um outro que percorre m vezes é um *loop* que percorre o círculo n + m vezes. Considere que a operação de realizar um único *loop* ao longo do círculo pode ser feita tanto em sentido horário quanto em sentido anti-horário. Represente uma dessas ações como resultado de se somar 1 e outra como subtrair 1. Temos que o grupo fundamental do círculo é isomorfo ao grupo aditivo formado pelos números inteiros e pela operação de soma denotado por $< \mathbb{Z}, +>$. Tanto quanto diga respeito à teoria dos grupos, $\pi<S_0, 0>$ e $<\mathbb{Z}, +>$ são "idênticos". Ambos são o grupo abeliano livremente gerado

[10] Essas trajetórias são consideradas a menos de uma homotopia, mas isso não parece relevante para nosso argumento agora.

a partir de um conjunto unitário. O algebrista praticante não precisa se incomodar em distinguir duas cópias isomorfas de uma mesma estrutura algébrica.

Temos aqui uma situação que não é completamente diferente do problema das múltiplas reduções apresentado por Benacerraf. Números inteiros podem ser introduzidos a partir dos números naturais já construídos, como classes de equivalência de pares ordenados de naturais, definidas pela relação de equivalência $R(< a, b >, < c, d >)$ verdadeira de dois pares de naturais $< a, b >\ e\ < c, d >$ se, e somente se, $a + d = b + c$. Desse modo, um número inteiro é o resultado de se subtrair do primeiro elemento de um par o segundo elemento do mesmo par e a equivalência é introduzida para garantir que, por exemplo, $< 1, 4 >$ e $< 2, 5 >$ denotem o mesmo número inteiro. Assim, podemos falar que existe uma construção dos números *inteiros* a partir dos ordinais de Zermelo e outra construção a partir dos ordinais de Von Neumann. Na construção dos inteiros a partir dos ordinais de Zermelo, o par ordenado <{Ø}, {{Ø}}> pertence ao número inteiro -1, na construção a partir dos ordinais de Von Neumann não. Vamos usar os índices 'z' e 'n' para distinguir entre esses dois conjuntos de números inteiros: $\mathbb{Z}_z$ e $\mathbb{Z}_n$. devemos fazer o mesmo para distinguir entre as duas operações de soma sobre inteiros $+_z$ e $+_n$. Temos agora dois grupos abelianos $<\mathbb{Z}_z, +_z >$ e $<\mathbb{Z}_n, +_n >$. Qual dos dois grupos é o *verdadeiro* grupo dos números inteiros sob a operação de soma? Ou talvez deveríamos construir a aritmética inteira a partir da geometria e dizer que o verdadeiro grupo $<\mathbb{Z}, +>$ é o grupo fundamental do círculo?

É trivial dizer que teorias algébricas lidam apenas com a estrutura universal compartilhada por diversos sistemas, já que, ao contrário da aritmética, tais teorias não são formuladas com qualquer símbolo que possa à primeira vista ser tratado como um nome particular, mas somente com termos gerais. Cada teoria algébrica lida universalmente com uma classe geral de estruturas formadas por um domínio e uma lista de operações n-árias que mapeiam n elementos do domínio em um único elemento do mesmo domínio. Essas estruturas são agrupadas sobre uma mesma teoria por satisfazerem uma mesma lista de equações. Assim, por exemplo, um monoide pode ser caracterizado informalmente como uma operação binária que mapeia os pares de elementos <x, y> pertencentes a um domínio D, em outro elemento z pertencente ao mesmo domínio, de tal modo que dois axiomas sejam respeitados: existe um elemento neutro para a operação e ela é associativa. Essa lista de condições que uma operação precisa satisfazer para ser chamada, junto com seu domínio, de um monoide é expressa por uma lista de sentenças

em uma linguagem formal (axiomas) e a totalidade dessas sentenças e daquelas que podem ser deduzidas dela via as regras de inferência da linguagem de fundo é a "teoria dos monoides". Agora, podemos dizer que chamamos uma certa estrutura de um "grupo" se ela for um monoide que, além de um elemento neutro, também possui um elemento "inverso" para todo elemento x do domínio D. Dois grupos $\{D, o: D \times D \rightarrow D\}$ e $\{D', o': D' \times D' \rightarrow D\}$ são ditos isomorfos quando houver um mapeamento $f: D \rightarrow D'$ tal que $o(x, y) = z$ se, e somente se, $o'\big(f(x), f(y)\big) = f(z)$. Qualquer grupo cíclico finito de ordem n é isomorfo a qualquer outro grupo cíclico finito de ordem *n* e, em geral, proposições pertinentes à teoria dos grupos não podem distinguir entre esses modelos.

Então, do ponto de vista de uma certa teoria algébrica, é irrelevante se estamos falando sobre um certo modelo X da teoria ou algum modelo X' desde que esse modelo seja isomorfo a X. Assim, o jeito mais natural de elucidar quais são os objetos sobre os quais uma teoria algébrica fala é dizer que ela fala sobre certas formas gerais que podem ser instanciadas em diversos sistemas de operações. Na verdade, é difícil sequer imaginar como é que essas teorias poderiam ser entendidas de alguma maneira diferente. Note que os axiomas da teoria dos grupos, bem como o de qualquer teoria algébrica, não são categóricos. Eles foram cunhados para classificar diferentes *formas* de acordo com propriedades comuns e não para especificar *uma única forma* como é o caso dos axiomas em segunda ordem para a aritmética. A aritmética pode vir a ser descrita como se fosse a teoria de uma certa série particular de objetos singulares: *a série* dos números naturais. Quando a descrevemos dessa maneira estamos tratando explicitamente cada numeral como um nome de um objeto particular da ontologia. Se o dilema das múltiplas reduções de fato mostra, como crê Benacerraf, que numerais absolutamente não são nomes de objetos, então, no fundo, a aritmética é muito mais semelhante à álgebra do que sua apresentação superficial pode fazer parecer.

A situação da análise (i.e, da teoria dos números reais) também é parecida. Aqui, números reais podem ser introduzidos como os elementos de um corpo ordenado completo, definido por uma lista de axiomas contendo tão somente os primitivos 0, 1, ×, +. Apenas para dar ao leitor uma ideia geral dos níveis de estrutura que estão envolvidos aqui, considere que um grupo $\{D, +: D \times D \rightarrow D\}$ é chamado de "abeliano" quando a operação binária $+$ for comutativa. Anexando a um grupo abeliano uma segunda operação $\times : D \times D \rightarrow D$ que seja associativa e também distributiva em relação à operação $+$, temos uma estrutura formada por um domínio e duas operações chamadas de "soma" e

"multiplicação". Esse tipo de construção é denominado "anel". Quando a operação de multiplicação de um anel também é comutativa, o anel é dito ser comutativo. Chamamos de "corpo" um anel comutativo que possui um elemento neutro para a multiplicação (também chamado de "unidade")[11] e que satisfaz a exigência de que todo elemento diferente do elemento 0 (que nada mais é do que o elemento neutro da operação de soma) possui um elemento inverso com respeito à multiplicação. Um corpo é dito ser ordenado quando existe uma relação de ordem total $\leq$ tal que para quaisquer dois elementos $< x, y >$ do domínio D, se for o caso que $0 \leq x$ e $0 \leq y$ então $0 \leq x \times y$ e, para quaisquer três elementos $< x, y, z >$ do domínio se $x \leq y$ então $x + z \leq y + z$. Estabelecer as condições caracterizando um corpo ordenado ainda não é suficiente para caracterizar a estrutura geral mais específica o possível para os números reais, já que outras construções não isomorfas aos reais satisfazem as condições que definimos acima. E isso inclui o próprio *conjunto* dos racionais. A fim de singularizar especificamente a estrutura dos números reais, adiciona-se uma outra condição posterior, que costuma levar o nome de "completude". Intuitivamente essa completude significa que não existem lacunas ou pontos faltando na linha dos reais. Formalmente essa condição nos faria gastar alguns parágrafos para ser explicada e não tem relevância para o nosso ponto. O que nos importa é que, diferente do que ocorre com a noção de um corpo ordenado em geral, todo corpo ordenado completo é isomorfo a qualquer outro e, portanto:

> Os axiomas para corpos ordenados completos são categóricos: todas as estruturas satisfazendo tais axiomas são mutuamente isomorfas e, portanto, de acordo com o que eu chamei de o Dogma Central do método axiomático, são matematicamente indistinguíveis. Existe apenas um corpo ordenado completo a menos de um isomorfismo. As únicas propriedades que poderiam distinguir corpos ordenados completos uns dos outros são as propriedades individuadoras de elementos de corpos de duas estruturas, e essas são consideradas como matematicamente irrelevantes. (Mayberry, 1994, p.23, tradução minha).

Essa tendência da matemática moderna em não distinguir entre as "cópias" isomorfas de certas construções é devida, claro, ao advento do método axiomático moderno. Há quem diga até que o dogma central do método axiomático é a ideia de que "estruturas isomorfas são matematicamente indistinguíveis em suas propriedades essenciais"[12]. Os conceitos pertinentes a um certo sistema axiomático não podem distinguir entre dois modelos isomorfos desse sistema. Não estou dizendo que todo

[11] Em algumas definições de "anel" essa cláusula já é inclusa no próprio conceito de "anel", em outras não.
[12] Cf. Mayberry, 1994, p.19-20. Essa ideia é a que foi mencionada no trecho citado logo acima.

sistema de axiomas é categórico no sentido de que qualquer modelo desse sistema é isomorfo a qualquer outro, o que seria obviamente falso. Estou apenas dizendo que uma teoria axiomática carrega consigo uma noção de um homomorfismo e que dois modelos da teoria conectados por um par de homomorfismos que são um a inversa do outro são indistinguíveis do ponto de vista da linguagem na qual a teoria em questão é formulada. Para ser um pouco mais preciso, isso significa que apenas usando as propriedades, relações e operações envolvidas na assinatura da linguagem formal dentro da qual a teoria axiomática é expressa não podemos formular uma sentença dessa linguagem que seja verdadeira para um certo modelo M e falsa para um modelo M' isomorfo a M. Surge, então, uma tensão na matemática moderna: apesar dessa tendência própria ao método axiomático em identificar duas construções indistinguíveis entre si, essa ideia é literalmente falsa dentro dos fundamentos mais padrões para a matemática. O advento dessas características peculiares ao jeito moderno de se empregar axiomas é historicamente conectado de forma fundamental ao desenvolvimento das geometrias não euclidianas ao longo do século XIX. Estruturalistas costumam interpretar os acontecimentos relacionados à criação dessas geometrias como uma passagem de uma visão na qual a geometria era entendida como uma ciência do espaço para uma visão onde ela é o estudo de certas estruturas.

Temos aqui então que a *explicação estrutural* do tema das teorias axiomáticas, presente de maneira óbvia e trivial na álgebra abstrata, é estendida não só para toda a aritmética e análise como passa a incluir também a geometria. O resultado desse processo de "estruturalização" pelo qual a matemática passou parece bem sumarizado por Awodey nas seguintes frases:

> Dentro de uma teoria matemática, um teorema - ou uma prova - não faz qualquer diferença prática qual de duas "cópias isomorfas" são usadas, e assim elas podem ser tratadas como o mesmo objeto matemático para todos os propósitos práticos. Às vezes, essa prática comum é até mesmo denominada, jocosamente, de "abuso de notação", e matemáticos desenvolveram algo como uma imprecisão sistemática para ajudá-los a implementar esse princípio, que é bastante útil na prática, apesar de ser considerado literalmente falso. Especialmente, ele é incompatível com os fundamentos convencionais da matemática na teoria dos conjuntos. (Awodey, 2014, p.2)

Os dois argumentos que apresentamos aqui são geralmente empregados como razões para se justificar a adoção de algum tipo de estruturalismo. Mas ainda são incapazes de escolher propriamente entre formas específicas dessa abordagem. Estruturalismo aparece cada vez mais em diferentes versões e a adoção de uma versão em

detrimento de outra demanda, naturalmente, argumentos posteriores. Ao longo da seção seguinte, pretendemos apresentar algumas distinções e conceitos que acreditamos serem filosoficamente cruciais na hora de se distinguir entre as diferentes formas de estruturalismo. Algumas dicas acerca dos argumentos que poderiam motivar alguma forma ou outra também são indicadas, mas não é o nosso propósito central. Em vez disso, nos importa introduzir conceitos e ideias aos quais acreditamos serem pertinentes na hora de se debater argumentos em favor ou contra o uso e autonomia da teoria das categorias para se formular uma concepção estruturalista filosófica.

1.2 Variedades de Estruturalismo Matemático

Alguns parágrafos atrás propusemos dividir o estruturalismo em *local* ou *global*, segundo o critério de se ele é atribuído a todas as áreas do conhecimento ou apenas a alguma ciência específica. Quando consideramos nossa investigação como restrita ao campo da matemática podemos constatar que posições e ideias que podem ser razoavelmente denominadas de "estruturalistas" remontam pelo menos ao século XIX e aparecem, por exemplo, no tratamento que Richard Dedekind dá ao conceito de número e na maneira como David Hilbert propôs que os axiomas da geometria fossem compreendidos. Como nota Parsons (1990), é uma característica dessas teses "proto-estruturalistas", que foram enunciadas ainda no século XIX, que elas nunca eram expressas de modo a deixar claro se deveriam ser estendidas para toda a matemática ou apenas para alguns de seus ramos específicos. Investigações sobre se a visão estruturalista deveria valer para toda a matemática, para alguns ramos específicos ou apenas para a maioria da matemática (deixando de lado algum núcleo fundamental) são típicas das elaborações modernas, que começaram a ser desenvolvidas ao longo da segunda metade do século XX.

Apesar de compartilhar um lema geral e uma preocupação comum com alguns problemas filosóficos, "estruturalismo" não designa propriamente uma única abordagem, mas um espectro de abordagens conectadas por algumas relações de semelhanças. Muitas vezes essas diferentes abordagens são consolidações de tendências filosóficas diametralmente opostas. Se há algumas décadas alguém poderia reclamar de que não há nenhuma formulação sistemática para o estruturalismo, agora pode-se reclamar que há em excesso. Tentativas de se classificar as diferentes versões de filosofias estruturalistas

são quase tão abundantes na literatura quanto as próprias variações da abordagem. A primeira tentativa sistemática de classificação *parece* ter sido oferecida por Parsons (1990), inicialmente como uma distinção entre duas maneiras opostas de se interpretar algumas afirmações feitas por Dedekind acerca da natureza da aritmética. Acreditamos que a distinção que Parsons propõe entre estruturalismo eliminativo e não eliminativo é no mínimo fonte de inspiração para todas as tentativas posteriores de classificação.

Essa situação caótica pode ser enfrentada com três atitudes distintas. Por um lado, existem aqueles que defendem que, uma vez que diferentes abordagens estruturalistas atribuem diferentes significados para o termo "estrutura", elas interpretam o lema estruturalista geral de maneiras completamente distintas, às vezes até mesmo antagônicas. Concluir-se-ia, então, que a aparente unidade que essas filosofias ganham é meramente ilusória. Uma outra atitude é diametralmente oposta. Pode-se acreditar que todos os problemas filosóficos enfrentados por uma forma de estruturalismo podem ser "traduzidos" para outra forma de tal modo que, por debaixo da superfície, todas as variedades de estruturalismo seriam idênticas[13]. Essa última atitude, além de aparentemente não ter sido plenamente justificada até hoje, parece falhar em capturar o fato de que tipos diferentes de estruturalismo estão em posições mais confortáveis ou menos confortáveis para se lidar com certas dificuldades de natureza filosófica. Tomaremos essa última alegação como uma obviedade, que deve fazer-se autoevidente ao longo da nossa discussão.

O problema com a primeira atitude é que o lema estruturalista, escrito tal como indicamos nessa tese, contém duas asserções bastante gerais acerca da natureza da matemática que são compartilhadas pelos diferentes tipos de estruturalismo. A primeira ideia é negativa: matemática nunca é sobre objetos cuja natureza é caracterizável sem referência a outros objetos com os quais os primeiros estão em certas relações. Em outros termos: matemática lida com propriedades sistêmicas e nunca com objetos individuais tomados isoladamente. Mesmo que recusemos a conclusão de que números não são objetos de qualquer tipo, uma lição que podemos extrair do dilema de Benacerraf é que, se de fato um sistema de axiomas é tudo o que precisamos para caracterizar conceitualmente os "objetos" da aritmética, então nenhum número particular pode ser conceitualmente apreendido sem que haja referência aos outros números. "Ser o número 1" é ser o sucessor de 0 e antecessor de 2, etc. A segunda ideia é mais positiva e mais

[13] Hellman (2001) atribui essa atitude a Shapiro. Por enquanto, falhei em encontrá-la diretamente no autor.

interessante. Matemática é em algum sentido "universal" ou "geral". Matemática fala sobre a forma ou *estrutura geral* que pode ser instanciada em diferentes sistemas particulares de objetos relacionados entre si. Mesmo se um estruturalista falar em objetos matemáticos - ou mesmo se ele disser que esses objetos são literalmente "reais" - ainda assim esses objetos não são entendidos por ele como literalmente particulares no mesmo sentido que os objetos do dia a dia. Pelo contrário, eles são explicitamente caracterizados como "universais concretos". Esse ponto é bem resumido por Hellman em uma explicação do estruturalismo de Shapiro:

> Nessa versão de estruturalismo, fala-se, por exemplo, da estrutura dos números naturais, com posições como objetos estando nas relações familiares de uma progressão. Essa estrutura é implicitamente definida pelos axiomas de Peano-Dedekind em segunda ordem, e é exemplificada por qualquer sistema de objetos formando um modelo desses axiomas, no sentido padrão. A estrutura ela mesma pode também ser dita exemplificar a si mesma. [...] A estrutura é, então, uma abstração platônica, um universal, um padrão reificado, por assim dizer, correspondendo a "aquilo que todas as progressões compartilham em comum". Ela é autônoma [free-standing] no sentido de que ela não depende de qualquer objeto ou quaisquer propriedades e relações de posições a não ser aquelas que ela estipula nas condições definidoras que foram usadas para 'introduzir' a estrutura. (Hellman, 2001, p. 188)

Uma vez que não é verdade que as diferentes formas de estruturalismo não compartilhem nada em comum entre si, e também não é razoável dizer que todas são no fundo filosoficamente indistinguíveis, preferimos aqui adotar uma atitude mais moderada diante das variedades de estruturalismo. Essa atitude consiste em dizer que elas formam um espectro de diferentes abordagens. Para algumas abordagens não há muito em comum a não ser as duas características que descrevemos no parágrafo anterior. Outras compartilham entre si vários detalhes, formando algo como uma rede de semelhanças. Algumas abordagens estruturalistas são nominalistas no sentido de negar a atribuição literal de existência para entidades matemáticas abstratas. Outras são semelhantes a uma forma de platonismo, já que alegam que estruturas e posições dentro de estruturas são objetos reais da ontologia e que a matemática é a ciência desses objetos. Algumas delas são "*bottom-up*" no sentido de pressupor que as estruturas mais abstratas são gradualmente abstraídas a partir de certos elementos fundamentais da ontologia, outras são "*top-down*" por começarem pelas noções estruturais mais abstratas e irem acrescentando determinações particulares. Algumas são baseadas em teorias extensionais de conjuntos, outras em teorias intensionais de tipos. Algumas são baseadas em lógica de primeira ordem, outras em lógica de ordem superior, outras ainda em lógica modal. Alguns tipos de estruturalismo surgiram naturalmente como resposta às necessidades do

matemático praticante, encarnado em métodos realmente produtivos para a solução de problemas em certas áreas da matemática; outras surgiram como resposta a demandas filosóficas e parecem ter muito pouco a contribuir com o avanço real da matemática. Não seria surpreendente se essas distinções pudessem continuar a ser enumeradas por mais algumas páginas.

Uma das mais instigantes e iluminadoras tentativas de classificação das abordagens estruturalistas aparece em Reck e Price (2000). Os autores começam a exposição de sua classificação sistemática denominando essa tendência da matemática moderna em não distinguir construções isomorfas na prática, que expomos ao longo da seção anterior, de "estruturalismo metodológico". E argumentam nos termos seguintes. Dado que a prática matemática moderna encarna um certo estruturalismo metodológico, a filosofia poderia colocar a questão de tentar entender as implicações filosóficas desses métodos. Extrair da prática matemática lições acerca de como deveríamos entender a referência e a verdade das proposições matemáticas - ou da existência e natureza dos números, por exemplo - é uma atividade tipicamente filosófica. Simplesmente adotar métodos tipicamente estruturais para desenvolver a matemática não nos fornece, por si só, respostas filosoficamente satisfatórias para questões próprias da filosofia da matemática, já que diversas filosofias diferentes parecem consistir em extensões igualmente consistentes ao estruturalismo metodológico.

A primeira proposta de estruturalismo filosófico dada pelos autores é bastante negativa e implica em rejeitar que questões acerca do estatuto ontológico dos objetos matemáticos em geral - ou da natureza de um certo tipo de objeto matemático ou ainda da verdade das proposições matemáticas - sejam sequer significativas. Essa posição seria um formalismo em sentido forte[14] e poderia ser resumida na ideia de que a matemática não fala sobre nada, não sendo propriamente construída a partir de proposições. De acordo com essa posição, a matemática se reduz a apenas manipulações formais de sinais sem significado. Essa posição parece perfeitamente consistente com o método axiomático, e talvez alguém possa até defender que ela seria na verdade motivada pelo método de se derivar teoremas a partir de axiomas por procedimentos puramente mecânicos ou formais. Outra posição que é formulada por Reck e Price é o que os autores chamaram de

[14] Ao longo de diversos trechos nesta tese, faremos referência a uma distinção entre dois sentidos costumeiros da expressão "formalismo". Por "formalismo em sentido forte", pretendo designar quaisquer teses que impliquem que os símbolos da matemática são desprovidos de significado. Já "formalismo em sentido fraco" deve designar genericamente a ideia de que as sentenças da matemática não possuem um sentido intrínseco, sendo essencialmente aberta a diversas interpretações possíveis.

"estruturalismo relativista". Para esse tipo de estruturalista cada teoria categórica da matemática seria sobre um sistema particular de objetos matemáticos. Por exemplo, um certo conjunto equipado com uma certa relação, no caso de a posição ser formulada tendo uma ontologia de conjuntos como plano de fundo. No entanto, o que faria dessa posição uma forma de estruturalismo é que seria simplesmente concedido que qualquer um possa escolher qual é o sistema particular sobre o qual está falando, pois o único aspecto desse sistema que é relevante para a matemática é a estrutura que ele compartilha com outros sistemas igualmente aceitáveis.

Se tomamos seriamente o lema estruturalista tal como o definimos aqui, a primeira "adição ao estruturalismo metodológico", que Reck e Price introduzem, pode não ser considerada estruturalista, no fim das contas. Mesmo se for o caso que o formalismo no sentido forte seja consistente, e ainda que ele talvez guarde uma certa afinidade natural com o espírito do método axiomático, não é muito fácil entender em que sentido ele seria consoante com a tese de que matemática é sobre estrutura ou é a ciência da estrutura. Um jogo puramente formal de símbolos desprovidos de qualquer interpretação ou significado não é sobre coisa alguma, em sentido literal.

Quanto a encaixar o relativismo descrito acima como uma forma legítima de estruturalismo parece depender um pouco do quanto estamos dispostos a relaxar os limites do termo "estruturalismo". Dentro dessa posição relativista, proposições matemáticas sempre se referem diretamente a objetos particulares que não são meras estruturas abstratas. Mas adiciona-se uma cláusula segundo a qual apenas as propriedades estruturais são relevantes à matemática. No fim das contas, tudo depende de se aceitamos isso como uma instância de "ser sobre estrutura abstrata". Parece possível se argumentar tanto em favor quanto contra essa decisão e não temos a pretensão de explorar essa questão aqui. De qualquer forma, pode-se questionar a consistência da ideia de que os números são *qualquer* objeto *particular*. Dois sujeitos que identificam o número 1 com dois objetos indiscutivelmente diferentes não estão em contradição um com o outro? Ambos podem estar corretos nessa identificação?

Não precisamos discutir em detalhes aqui se essas duas supostas formas de estruturalismo são razoáveis ou não. Não temos a pretensão de fornecer uma classificação exaustiva e sistemática de todas as formas de estruturalismo, já que não é relevante aos nossos propósitos abordar todos os aspectos que essas filosofias podem ter, e provavelmente nunca faríamos aqui algo mais satisfatório do que aquilo que já se encontra

na literatura. Nosso objetivo aqui é introduzir classificações e distinções que serão proveitosas para o debate sobre a relação entre teoria das categorias é uma forma de estruturalismo. Tudo o que faremos é introduzir algumas distinções baseadas em três eixos que representam aspectos sobre os quais nos interessa olhar para as diferentes formas de estruturalismo.

1.2.1 Estruturalismo do ponto de vista ontológico

Dissemos que todo estruturalista compartilha a ideia de que a matemática é sempre geral ou universal. Mas existem pelo menos duas atitudes *ontológicas* que filósofos costumam ter quando consideram a natureza dos universais. Essas duas atitudes também aparecem claramente no contexto das abordagens estruturalistas da filosofia da matemática. A primeira atitude consiste em reconhecer estruturas universais como sendo por si mesmas objetos legítimos da ontologia, distintos de suas possíveis instanciações particulares. Essa maneira de se interpretar o termo "estrutura" chamaremos de "platonista". O termo "platonista" pode ser associado a diversas conotações diferentes em diferentes textos, por referência a aspectos distintos da obra do referido filósofo grego. Decidimos tomar esse termo, aqui, na seguinte acepção amplíssima: uma teoria estrutural é entendida como falando sobre certos objetos peculiares e que estão disponíveis na ontologia. Perguntas filosóficas sobre se os objetos universais existem de forma independente e anterior a suas instanciações particulares ou se são meras "criações da mente" resultantes de um processo de abstração feito a partir de sistemas particulares são questões posteriores que não dizem respeito à classificação dessa visão como "platonista", no sentido fraco que empregamos o termo aqui. A outra atitude implica negar a atribuição de existência literal a "entidades universais". Vamos considerar em mais detalhes o que queremos dizer com "platonismo".

Quando inspecionamos alguma sentença ordinária da aritmética, sua constituição gramatical nos induz a tratá-la em analogia com sentenças que empregamos em nosso dia a dia. Assim, como falamos ordinariamente que um certo objeto empírico particular possui alguma característica, a sentença "2+2=4", por exemplo, nos induz a pensar, pela sua estrutura gramatical, que ela fala sobre o objeto nomeado pelo algarismo "2" e diz desse objeto que ele somado consigo mesmo resulta no objeto nomeado pelo algarismo "4". Também parece natural que vejamos essa sentença como atribuindo uma certa

relação particular para com uma sequência ordenada de objetos, a saber, a sequência <2, 4>, no caso de a relação ser pensada como "$x + x = y$", ou <2, 2, 4> para a relação ternária "$x + y = z$". Em uma interpretação mais exótica, podemos concebê-la, ainda, como uma sentença que afirma um certo "encaixe" entre os objetos 2 e 4 e os "objetos" de nível superior que seriam denotados por "+" e "=". O que é comum a todas essas análises é que as sentenças da aritmética são tratadas como sendo constituídas, ao menos parcialmente, de símbolos cuja função é nomear algum objeto de discurso.

Um estruturalista platonista deseja salvar essa forma lógica superficial das sentenças da matemática ordinária, tratando numerais, por exemplo, como nomes singulares e entendendo a semântica dessas sentenças como referencial. Portanto, apesar de aceitar a ideia presente no argumento de Benacerraf de que tudo o que é relevante para a aritmética são as relações entre números, ele rejeita enfaticamente a conclusão de que daí se segue que números não sejam objetos e que numerais não sejam nomes. Para um estruturalista que é também um platonista, a aritmética seria sobre um certo objeto abstrato, a saber, a sequência dos números naturais, e o símbolo "2" também denotaria um certo objeto: uma *posição* dentro da estrutura que acabamos de chamar de "a sequência dos números naturais". Qualquer que seja a natureza última dessa *posição*, ela é tomada como possuindo apenas as propriedades que lhe são atribuídas no contexto de uma certa estrutura. De uma forma mais geral, objetos matemáticos individuais seriam meras "posições" que se situam no contexto de sistemas de objetos relacionados de um certo modo, ou seja, de "estruturas". "Estruturas" e "posições abstratas em estruturas" são objetos universais, no sentido de que outros objetos, abstratos ou não, podem "instanciá-los" ou "participar" deles.

Dizer que os objetos são posições abstratas em estruturas significa dizer que, *em algum sentido*, eles possuem apenas propriedades estruturais ou pelo menos que apenas suas propriedades estruturais são pertinentes à matemática. Esse ponto é bem sumarizado por Resnik, um dos principais defensores desse tipo de estruturalismo:

> Os objetos da matemática, isto é, as entidades que nossas constantes matemáticas e quantificadores denotam, são eles mesmo átomos, pontos não estruturados ou posições em estruturas. Como tal, eles não possuem identidade ou fatores distintivos fora de uma estrutura. (Resnik, 1997, p. 201, tradução minha)

Esse estruturalismo de tipo platonista coincide com o que Parsons denomina de estruturalismo "não eliminativo". Como deve ter ficado óbvio pela caracterização feita

por Hellman, que foi citada alguns parágrafos acima, o estruturalismo de Shapiro é claramente platonista nesse sentido. Nas palavras do próprio Shapiro:

> Na minha visão, objetos matemáticos são posições em estruturas, e essas estruturas existem independentemente de qualquer sistema não matemático que as exemplifica. Para caracterizar tais estruturas, tomei emprestado o termo 'ante rem' da metafísica (Shapiro, 2008, p. 286, tradução minha).

Outra instância desse "platonismo estruturalista" se encontra, talvez, na teoria dos números de Richard Dedekind. Dedekind emprega uma concepção intuitiva (i.e., não axiomática) de conjuntos, denominados pelo autor de "Sistema" (*System*), cujos elementos são denominados de "coisa" (*Ding*). Um certo "sistema de coisas" N é chamado por Dedekind de um "sistema simplesmente infinito" quando houver um elemento $1 \in N$, e um mapeamento $S: N \rightarrow N - \{1\}$ que seja uma função injetiva e sobrejetiva[15] tal que a indução em segunda ordem seja válida. Sobre a relação entre a noção de número natural e a de um sistema simplesmente infinito, Dedekind diz:

> Se, ao considerar um sistema simplesmente infinito N, ordenado por um mapeamento φ, se abstrai da natureza específica dos elementos, mantendo apenas a sua distinguibilidade e notando apenas as relações nas quais eles estão colocados pelo mapeamento ordenador φ, então esses elementos são chamados números naturais ou número ordinais ou simplesmente números, e seu elemento inicial 1 é chamado o elemento inicial da série dos números. (Dedekind, 1965, p.17, tradução minha)

Uma reação comum à fala de Dedekind é entendê-la como se estivesse sendo dito que a aritmética não é sobre objetos, mas sobre qualquer "sistema simplesmente infinito". Contudo, essa concepção eliminativa da aritmética não é o que Dedekind parece ter em mente. O trecho acima é seguido pela curiosa afirmação de que essa "liberação dos elementos de outros conteúdos" é um processo de abstração que nos justifica a afirmar que os números são "criações da mente humana". Dedekind usa a mesma ideia, de forma mais explícita, em correspondência com H. Weber[16,] mas dessa vez aconselhando alguém

[15] Note-se que a função é sobrejetiva porque o contradomínio da operação S foi definido como o conjunto dos elementos de N que são diferentes do elemento 1. Já que estamos caracterizando os números naturais, dizer que o mapeamento S é uma função injetiva e sobrejetiva é simplesmente dizer que cada número natural possui um sucessor diferente e que todo número natural diferente do primeiro é o sucessor de algum outro número natural. O leitor também deve ter percebido, obviamente, que para Dedekind o primeiro número natural é o 1. Ao passo que 0 não seria propriamente um número natural.

[16] "If one wants to take your way . . ., then I would advise not taking the number as the class (the system of all finite systems similar to one another) but rather as something new, corresponding to this class, which the mind creates. We are of a divine kind and possess, without any doubt, creative power not only in the material realm (railroads, telegraph) but most especially in the mental. This is just the same question of which you speak at the end of your letter in relation to my theory of irrationals, where you say that the irrational number is nothing at all other than the cut itself, while I prefer to create something new, distinct from the cut, which corresponds to the cut and of which I say that it brings forth the cut, generates it" (Dedekind,, 1965, p. 489).

que queira adotar uma noção cardinal de números naturais a não os identificar como sendo meramente um conjunto de conjuntos equinuméricos, mas um tipo novo de objeto criado pela mente humana.

Como dissemos, podemos chamar a alternativa ao platonismo de "nominalismo". Nominalismo no contexto da filosofia da matemática consiste em negar a atribuição literal de existência para objetos matemáticos. Essa tese não é defendida apenas por certos tipos de estruturalistas, sendo também adotada por filósofos que sustentam outras posições acerca da natureza da matemática. Comum a todas as formas de nominalismo, estruturalista ou não, é a necessidade de se explicar como as realizações da matemática são possíveis com uma ontologia mais "econômica" do que aquela que é mobilizada pelo platonista. Dentre essas "realizações" inclui-se coisas como: valor cognitivo das sentenças matemáticas, aplicações no contexto das ciências empíricas, etc.

A posição resultante de se combinar estruturalismo com nominalismo costuma ser chamada, por razões óbvias, de "estruturalismo eliminativo". Estruturalistas eliminativos tentam explicar o funcionamento da matemática tomando ao pé da letra a ideia de que toda teoria matemática é sempre geral, concluindo a partir daí que cada uma delas é constituída de sentenças que não contêm nenhum nome particular genuíno (pelo menos não nomes cuja referência é pré-fixada como um certo objeto particular). Por isso, podemos dizer que é característico desse tipo de filosofia um certo "ceticismo" em relação à função gramatical dos termos nas sentenças ordinárias da matemática. Uma caracterização mais profunda do estruturalismo eliminativo exige que mobilizemos algumas ideias que só aparecerão na seção seguinte.

Na próxima seção, discutimos algumas classificações para as abordagens estruturalistas feitas do ponto de vista de como elas concebem as linguagens empregadas na formulação das teorias matemáticas. É natural que o estruturalismo eliminativo seja melhor caracterizado após essas considerações, já que, apesar de possuir motivações ontológicas, o mesmo é uma tese essencialmente semântica. Adotar essa tese passa por rejeitar a semântica literal e referencialista que é mobilizada pelo platonista.

1.2.2 Estruturalismo do ponto de vista linguístico

Além de Shapiro, outro autor conhecido por ter proposto uma forma platonista de estruturalismo é Michael Resnik. O próprio Resnik se identificou como um platonista em

um sentido muito próximo ao que atribuímos à palavra[17]. Porém, em seus trabalhos mais recentes, Resnik tem se afastado desse platonismo e proposto dividir o estruturalismo entre ontológico e não ontológico. Dentro dessa perspectiva, tanto o platonismo quanto o nominalismo, que foram brevemente caracterizados na seção anterior, são formas ontológicas de estruturalismo, na medida em que são formulados como decisões acerca do estatuto existencial dos objetos da matemática. Por outro lado, um estruturalismo não ontológico seria caracterizado por deixar em aberto questões acerca da existência ou natureza dos objetos matemáticos. Como fonte de inspiração para o seu novo estruturalismo não ontológico, Resnik menciona Quine e a "doutrina da relatividade ontológica" (Resnik, 2018).

No início deste capítulo, fizemos alguns comentários sobre o estruturalismo global que é sugerido por Quine em *Structure and Nature* (2002). É evidente que Quine pensa o estruturalismo em termos mais próximos aos do nominalismo, ainda que ele afirme que, no fim dos contas, adotar uma concepção estruturalista da aritmética não seja uma questão de economia ontológica, já que ele considera que a mesma ontologia de classes estaria sendo, no final das contas, pressuposta. Característico do estruturalismo eliminativo no campo da aritmética é a eliminação dos números em favor das classes ou conjuntos. Quine sugere que essa tendência eliminativista pode ser arrastada para a própria teoria dos conjuntos e, de forma ainda mais radical, para todo os domínios abarcados pela linguagem. Ao final do artigo, Quine procura se defender da objeção de que esse estruturalismo global estaria em contradição direta com o realismo científico e o naturalismo que ele mesmo defende. A saída, indicada de forma bastante sumária no último parágrafo, é conceber o estruturalismo não como uma ontologia estruturalista, o que de acordo com Quine seria "voltar ao pecado da metafísica transcendental", mas como uma tese sobre a atividade linguística humana que ocorre dentro da realidade natural.

A ideia de se entender o estruturalismo como uma tese sobre as linguagens que são ou deveriam ser empregadas na atividade matemática tem sido evidenciada com mais clareza nas últimas décadas. Naturalmente, ela está presente na ideia de que a teoria das categorias fornece uma linguagem adequada para a formulação de uma posição

[17] "I seek an account of mathematics in which the logical forms of mathematical statements are taken at face value and their semantics is standardly referential, say, in the manner of Tarski. This together with fairly uncontested assumptions entails that mathematics is a science of abstract entities, that is, immaterial and nonmental things which do not exist in space and time. So I am a platonist"(Resnik, 1981, p.529)

estruturalista. Mas mesmo quando olhamos retrospectivamente, percebemos que outras posições formuladas no passado que podem ser razoavelmente denominadas de estruturalistas também podem vir a ser descritas como teses acerca do funcionamento das linguagens empregadas na matemática. Na seção seguinte, vamos apresentar algumas maneiras distintas de se fazer sentido da ideia de uma teoria "estrutural" ou, o que é o mesmo, interpretações diferentes para a afirmação de que uma certa teoria é estrutural. Mas antes disso, é importante apresentarmos algumas distinções que podemos fazer entre os diferentes tipos de sistemas de axiomas.

De forma resumida, queremos distinguir aqui entre axiomas assertóricos e estruturais[18]. Axiomas assertóricos são aqueles que consistem nas proposições verdadeiras básicas de um certo domínio do conhecimento. Já axiomas estruturais são aqueles que fixam as condições formais que um certo sistema ou modelo deve satisfazer a fim de ser um sistema de um certo tipo, não consistindo, portanto, em asserções que podem ser julgadas verdadeiras ou falsas, mas antes em definições[19] que correspondem ou a um *certo tipo geral* de estrutura ou *a uma certa estrutura universal* específica. Essa última distinção, entre sistemas de axiomas estruturais que caracterizam *uma única* estrutura e que caracterizam *potencialmente* muitas, já apareceu antes em nosso texto. Mas agora vamos apresentá-la de forma mais explícita.

---

[18] Já reservamos aqui a expressão "axiomas algébricos" para os axiomas de teorias da álgebra, como a teoria dos grupos ou dos monoides. Mas quando inspecionamos a literatura sobre estruturalismo, e talvez parte da literatura geral da filosofia da matemática, podemos nos deparar com essa expressão sendo usada em um sentido mais amplo, geralmente associada ao debate entre Frege e Hilbert sobre o estatuto dos axiomas da geometria. Nessa acepção mais ampla, axiomas algébricos são precisamente aquilo que estamos chamando de axiomas estruturais: aqueles que fixam certas condições definidoras, não somente para uma gama de estruturas distintas com semelhanças formais, mas também para uma única estrutura. No sentido mais amplo, o termo "algébrico" poderia ser aplicado tanto aos axiomas de Peano em segunda ordem quanto aos axiomas em primeira ordem da teoria dos grupos, por exemplo. A expressão "algébrica" é usada nesse sentido, por exemplo, por Hellman, em grande parte dos textos que se encontram nas referências bibliográficas desta tese. O autor fala em uma ambiguidade do termo "axioma" entre "axiomas assertóricos" e "algébricos". Uma vez que nem todo sistema de axiomas "algébricos" nesse sentido amplo são axiomas de uma teoria da álgebra, vamos guardar a expressão "estrutural" para qualificar os axiomas que caracterizam estruturas via condições definidoras e restringir a expressão "axiomas algébricos" ao seu sentido mais literal. Todo sistema de axiomas algébricos é estrutural, mas existem axiomas estruturais que não são algébricos. Axiomas estruturais são aqueles que caracterizam estruturas via condições definidoras. Alguns axiomas estruturais caracterizam uma única estrutura, caso em que são chamados "categóricos". Outros se aplicam a diversas estruturas distintas, caso em que chamaremos de "classificatórios".

[19] Afirmamos que a característica distintiva dos axiomas estruturais é que eles não são propriamente proposições, mas definições. Mas dizer que axiomas definem é fazer uma afirmação ambígua. Quando dizemos que os axiomas da teoria dos grupos especificam as condições sobre as quais uma operação, junto com seu domínio, forma um grupo, estamos dizendo que esses axiomas expressam as notas definitórias de um conceito de ordem superior, definindo assim, *explicitamente* o conceito de grupo. Uma tese muito comum é a crença de que os termos *primitivos* que aparecem dentro do sistema de axiomas são também definidos, em algum sentido, pelos próprios axiomas nos quais eles ocorrem. Esse tipo de definição veio a ser denominado de "definição implícita". Por agora, não é necessário nos preocuparmos com essa diferença.

Em termos modelo-teóricos, um certo sistema de axiomas é dito ser categórico quando ele for de tal maneira constituído que, do fato de que A e B sejam ambos modelos que satisfazem o sistema, se segue que existe um isomorfismo conectando A e B. Em termos um pouco mais filosóficos, podemos dizer que o sistema de axiomas em questão determina univocamente uma certa estrutura abstrata. Essa é a razão pela qual Carnap denominava tais sistemas de "monomórficos". Ou bem um sistema de axiomas é categórico ou não o é. Em contraste com um sistema categórico, um sistema não categórico possui diversos modelos não isomorfos entre si. Por isso, esses últimos sistemas não servem para caracterizar univocamente uma estrutura singular, mas sim para agrupar diversas estruturas em virtude de certos traços comuns. Nesse sentido, podemos chamar os sistemas não categóricos de "classificatórios". Tomo essa terminologia emprestada do já mencionado artigo de Mayberry, "What is Required of a Foundation for Mathematics", e deixo o autor expressar qual é a propósito de um sistema classificatório:

> O propósito de uma teoria classificatória é singularizar uma espécie de estrutura, que de outro modo estariam dispersas, ao fixar certos fatores de morfologia. Dentre sistemas classificatórios podemos citar as definições axiomáticas de grupos, anéis, espaços topológicos, categorias, topoi— a lista poderia ser estendida indefinidamente. O objetivo essencial aqui é singularizar fatores comuns de estruturas que de outro modo seriam bastante dissimilares. (Mayberry, 1994, p. 20, tradução minha).

Dentro de uma concepção platonista de estrutura, tal como a que descrevemos na seção anterior, todos esses três tipos de sistemas axiomáticos (assertóricos, estruturais categóricos e estruturais classificatórios) devem ser mobilizados a fim de se estudar as estruturas que são objetos da matemática. Contudo, eles possuem papéis diferentes a serem desempenhados. Como dissemos, axiomas categóricos caracterizam *no máximo* uma estrutura. Por isso, garantir que o sistema seja categórico ainda não é suficiente para garantir que ele caracterize *pelo menos uma* estrutura, mas apenas que ele não caracteriza mais do que uma. Shapiro denomina um sistema de axiomas que corresponde a pelo menos uma estrutura de "coerente". Admitidamente, "coerência" não é vista como uma propriedade formal propriamente definida com critérios matemáticos claros, como é o caso da categoricidade. A "coerência" é tratada pelo autor como um termo primitivo que ocorre nos axiomas de uma teoria das estruturas e é assumidamente problemático. Um dos principais papéis atribuídos a uma tal teoria das estruturas é o de estipular claramente critérios para a existência matemática ou, o que é mesmo, para decidir quais estruturas existem. Os axiomas das teorias de conjuntos muitas vezes são apresentados como motivados pela hierarquia cumulativa dos conjuntos puros e podem ser tratados como

asserções verdadeiras que descrevem esse universo fixo de entidades. Apesar das semelhanças entre os axiomas da teoria das estruturas de Shapiro e alguns axiomas da teoria dos conjuntos, seria grosseiro se disséssemos que a teoria das estruturas de Shapiro descreve uma ontologia fixa a ser pressuposta pela matemática. Em vez disso, a principal e mais fundamental asserção "existencial" da teoria das estruturas é o chamado axioma da coerência, que estabelece que se ϕ é uma fórmula coerente em uma linguagem de segunda ordem, então existe uma estrutura que satisfaz ϕ[20].

Considerando a teoria das estruturas de Shapiro, há uma clara assimetria entre como funcionam os axiomas estruturais da matemática ordinária, quer sejam categóricos quer não, e como funcionam os axiomas assertóricos expressos na linguagem da própria teoria das estruturas. O discurso direto sobre as estruturas não é entendido como sujeito a diversas interpretações ou modelos, mas como composto de sentenças cujas constantes e variáveis se referem às "entidades" em questão, incluindo estruturas, lugares dentro de estruturas, mas também fórmulas, propriedades e relações, já que a teoria precisa ser formulada em ordem superior. Portanto, os axiomas da própria teoria das estruturas são assertóricos. Ao passo que as estruturas particulares são introduzidas - ou definidas - por meio de axiomas estruturais categóricos e posteriormente agrupadas segundo seus traços comuns por meio de axiomas estruturais classificatórios.

A distinção assertórico/estrutural que estamos tentando precisar aqui aparece também dentro da própria matemática ordinária. Por um lado, temos as próprias teorias estruturais que atuam como definições explícitas para certos conceitos. Por exemplo, a teoria em primeira ordem dos grupos, cujos axiomas definem o conceito de grupo. Mas, por outro lado, quando lemos um livro ou artigo sobre a teoria dos grupos ou sobre álgebra abstrata em geral, vemos que ele está repleto de afirmações sobre as próprias estruturas definidas pelos axiomas estruturais e essas afirmações são pretendidas como asserções verdadeiras sobre essas entidades. Então, empregar tanto asserções quanto definições estruturais é parte indispensável do cotidiano matemático.

Existem também certos casos nos quais há controvérsias sobre se determinados axiomas são estruturais ou assertóricos. O exemplo mais notável é o da teoria dos conjuntos. Como dissemos agora há pouco, os axiomas das teorias de conjuntos são comumente interpretados como asserções verdadeiras sobre objetos do domínio de todos os conjuntos. Alguns filósofos, como é o caso de Shapiro, os interpretam estruturalmente.

[20]Cf. Shapiro1997, p. 95.

Uma interessante controvérsia similar aparece no seio das discussões sobre o estruturalismo encarnado na teoria das categorias. Utilizando a linguagem e os métodos da teoria, podemos descrever a estrutura interna de uma categoria, por exemplo, a categoria de todos os grupos. Se essa descrição deve ser vista como uma asserção sobre um certo universo de entidades ou como uma definição estrutural, está longe de ser ponto pacífico, e a diferença entre esses dois pontos de vista é um dos principais pontos de contraste entre a resposta de MacLarty e a de Steve Awodey aos argumentos de Hellman contra a autonomia da teoria das categorias. Teremos a oportunidade de adentrar esse assunto no futuro. Agora, passaremos a descrever duas maneiras diferentes de se compreender a natureza do que estamos chamando de "axiomas estruturais".

1.2.2.1 Formalismo e universalismo

Dissemos que apesar de existirem múltiplas formas de estruturalismo, parece haver alguns poucos consensos entre todos os filósofos que mantêm essa posição. Dentre esses poucos consensos está a ideia de que a matemática comum é sempre geral, em algum sentido. Depois dos comentários que adicionamos sobre os sistemas de axiomas, essa generalidade típica da matemática pode ser caracterizada um pouco melhor. Ela diz respeito ao fato de que as teorias estruturais são endêmicas na matemática moderna e que, quer sejam categóricas quer não, tais teorias atuam fixando certas condições gerais que podem ser aplicadas a diversos sistemas distintos (no caso de a teoria ser categórica, lidamos com sistemas isomorfos, mas que ainda assim podem vir a ser distinguidos a depender do ponto de vista que se adota). Agora, podemos caracterizar duas explicações para a aplicabilidade geral dos axiomas estruturais. Não se trata aqui de distinguir entre dois tipos de sistema de axiomas, como fizemos na seção acima. Em vez disso, estamos falando de duas maneiras de se *conceitualiza*r uma teoria estrutural. A utilidade dessa distinção reside em permitir que tenhamos clareza sobre certos conflitos que podem aparecer no contexto das discussões sobre a natureza da matemática.

A primeira maneira de se entender o que é uma teoria estrutural parece ser a mais comumente adotada. Podemos denominá-la de "formalista". É importante não confundir a explicação formalista da generalidade de uma teoria estrutural com aquele tipo de formalismo mais forte que algumas seções acima decidimos por não incluir no leque das abordagens estruturalistas. Esse último "formalismo" consistia na ideia de que a

matemática não fala sobre nada, se tratando apenas de um jogo meramente formal de manipulação de símbolos não significativos. Já o formalismo que desejamos caracterizar aqui consiste na tese de que uma teoria estrutural é composta por proposições que não possuem um sentido intrínseco e fixo. Essas proposições "formais" seriam abertas a diversas interpretações, na medida em que poderiam ser usadas para expressar verdades sobre diferentes domínios, conservando seus aspectos formais. Nessa explicação, o caráter estrutural da teoria advém exatamente do fato de que ela descreve indistintamente todas as suas possíveis interpretações, ou seja, que ela representa tão somente a forma comum de seus modelos. Para um formalista nesse sentido, a matemática poderia ser conduzida sem que se leve em conta alguma interpretação particular para as proposições da teoria que estiver em questão.

Acreditamos que essa concepção formalista é inerente à teoria dos modelos. Tal teoria de fato trata a relação entre uma teoria algébrica, por exemplo, e os sistemas particulares aos quais a teoria se aplica como uma relação de interpretação entre uma teoria puramente formal, constituída de sentenças "reinterpretáveis", e suas possíveis interpretações. Característico da abordagem modelo-teórica, ainda, é um tipo de assimetria semelhante àquela que atribuímos ao estruturalismo de Shapiro. Por um lado, temos as sentenças estruturais reinterpretáveis da matemática. Atribuir um modelo a um conjunto de sentenças estruturais é estabelecer uma correspondência entre a linguagem formal na qual essas sentenças são expressas e a linguagem da teoria dos conjuntos. Mas, por outro lado, as sentenças dessa última linguagem são interpretadas assertoricamente, em contraste com as sentenças formais das teorias da matemática ordinária. Então, o usuário da teoria dos modelos precisa aprender a conviver com teorias assertóricas e estruturais compondo a matemática.

Mas, para além da teoria dos modelos, também acreditamos que um tratamento formalista das teorias estruturais seja implicado diretamente pela ideia de que os axiomas são *definições implícitas* dos próprios termos que neles ocorrem. Essa visão dos axiomas como definições implícitas tornou-se bastante difundida depois que David Hilbert a empregou explicitamente na formulação da geometria. As provas que Hilbert forneceu para a consistência e para a independência dos axiomas geométricos se valeram diretamente da técnica de reinterpretação dos termos da teoria, e Hilbert formulou expressamente teses sobre a natureza dos axiomas que são formalistas no sentido que estamos empregando o termo "formalista" aqui. É notável que, apesar de ser comum alegar que os métodos de Hilbert inspiraram a teoria dos modelos, as provas de

consistência das teorias estruturais oferecidas pelo matemático alemão, pelo menos aquelas que foram providas ainda ao fim do século XIX, não eram propriamente baseadas em se interpretar os termos da teoria formal em alguma teoria fundacional entendida assertoricamente. Em vez disso, teorias cuja consistência estava em questão eram aceitas como consistentes quando interpretadas em outras teorias já consagradas da matemática, cuja consistência não estava sendo colocada em questão. Esse exemplo sobre as posições filosóficas que foram adotadas por Hilbert serve para mostrar que é razoável dizer que pressupor uma teoria assertórica fundacional dentro da qual as múltiplas interpretações das teorias estruturais devem ocorrer não é necessariamente uma característica de todos os formalistas. Em princípio, nada parece impedir que possa haver aqueles formalistas que empregam uma teoria assertórica fundacional e aqueles que não.

A alternativa à explicação formalista de uma teoria estrutural chamaremos, seguindo Reck e Price, de "Universalismo". Dentro de uma explicação universalista de uma teoria estrutural, as supostas sentenças que compõem a teoria, tal como elas vêm escritas, são vistas como funções proposicionais disfarçadas, na medida em que os termos primitivos extra-lógicos que compõem a teoria são tratados como variáveis. Ainda que a teoria estrutural não seja composta por proposições legítimas, as funções proposicionais disfarçadas podem dar origem a proposições, por meio da ligação da função a um quantificador universal e a uma implicação que possui como antecedente a conjunção de todos axiomas da teoria e, como consequente, algum teorema. Para deixar mais claro o que isso significa, vamos tomar como exemplo de teoria estrutural a aritmética de segunda ordem. Uma vez que vamos tratar os primitivos como variáveis, a totalidade dos axiomas de Peano em segunda ordem forma uma única função proposicional que podemos abreviar como $AP(N, S, 0)$, onde as variáveis N, S, 0 correspondem aos termos primitivos. A variável "N" deve varrer o universo de coleções, a variável "S" a coleção de todas as operações unárias que mapeiam cada elemento x ∈ N em um elemento y ∈ N, e 0 os elementos de N. Dizer que a relação ternária $AP(N, S, 0)$ é verdadeira de alguma tripla de elementos <N, S, 0> é dizer que N é uma progressão infinita cujos elementos são ordenados pela operação S, possuindo o elemento 0 ∈ N como elemento inicial da progressão. Uma vez que tenhamos feito essas estipulações, podemos começar uma análise das sentenças da aritmética ordinária. Tomemos uma sentença muito simples como "1 ≠ 2". Para o universalista, poderíamos expressar o conteúdo dessa asserção por meio de alguma fórmula similar à seguinte:

$$\forall N, S, 0(AP\langle N, S, 0\rangle \rightarrow S(0) \neq S(S(0)))$$

Para um estruturalista que subscreve a uma concepção universalista das teorias estruturais, alguma fórmula similar a essa expressaria *o real* conteúdo da afirmação ordinária "1 ≠ 2". Essa posição é associada ao nominalismo estruturalista que descrevemos na seção passada, sendo por vezes tratada na literatura como a mesma tese. Escolhemos distinguir entre as duas posições, pelo fato de que a expressão "nominalista" ou a expressão "eliminativo" (em "estruturalismo eliminativo") são termos com uma conotação ontológica. Eles servem para qualificar a posição que um certo tipo de filosofia mantém acerca da existência literal de objetos matemáticos. "Universalismo", por outro lado, designa uma posição acerca da função gramatical e da semântica das teorias estruturais. Que as duas coisas estejam correlacionadas se vê pelo fato de que na fórmula acima não aparece nenhum símbolo com a função de ser um nome para algum objeto. Temos apenas constantes lógicas e variáveis, e os nomes desapareceram na análise. Se assumirmos que essa fórmula captura adequadamente o sentido da sentença "1 ≠ 2", teremos concordado que as sentenças da aritmética não demandam a existência de nenhum objeto abstrato correspondente a cada número natural *para ser verdadeira.* "1 ≠ 2", nessa leitura, designa algo como uma propriedade geral de qualquer sequência que satisfaça as condições necessárias. Isso equivale a dizer que cada sentença da aritmética é vista como uma abreviação em cuja forma completamente analisada a asserção abreviada aparece formalmente como o consequente de uma implicação, enquanto a conjunção de todos os axiomas aparece como o antecedente. Tanto antecedente quanto consequente ocorrem no escopo de um quantificador universal que atua sobre as variáveis abertas que correspondem aos termos primitivos. Aqui, teorias matemáticas são sobre estrutura geral no sentido mais literal o possível: elas possuem apenas sentenças com quantificadores universais.

Estruturalismo universalista aparece na literatura em mais de uma forma. Para considerarmos a mais relevante variação é interessante notar uma crítica bastante difundida ao processo de análise sugerido no parágrafo anterior. Um processo de análise nesses moldes é como uma paráfrase ou uma tradução. Inicialmente temos uma sentença ordinária não analisada e, muitas vezes, já bem entrincheirada tanto na matemática como também na vida comum das pessoas. Contudo, o universalista tem razões filosóficas para acreditar que a sentença em sua forma ordinária é expressa de modo a escamotear o que ela realmente diz, e assim, esconder o que os números realmente são. Então, é proposto

que a sentença seja reescrita em uma outra linguagem, que exibiria claramente o real sentido da sentença inicial. A sentença resultante não diria, portanto, algo diferente da sentença inicial. Se a análise for bem sucedida, ela apenas expressaria o mesmo conteúdo, mas com "mais clareza" em algum sentido. Dentre outras coisas, isso significa que o processo de análise mapeia uma certa frase não analisada P da linguagem obscurecedora L em uma outra frase analisada P', expressa em uma linguagem mais esclarecedora L', de tal modo que o valor de verdade seja preservado ao longo desse mapeamento. Todavia, se a análise realmente for executada nos moldes do nosso exemplo acima, a fim de que o valor de verdade da frase não analisada seja realmente preservado, uma certa condição bastante desconcertante deve ser satisfeita. Tome como exemplo alguma sentença obviamente falsa da aritmética ordinária, algo como "2+2 = 5", e imagine que ela seja parafraseada como uma sentença geral dizendo que a condição expressa na sentença vale para qualquer classe, operação e elemento inicial que satisfaça os axiomas de Peano, assim como fizemos com "1 ≠ 2". Qual é o valor de verdade da sentença analisada se presumirmos que na verdade não existe nenhum exemplo de tal classe? Tanto a sentença falsa pela qual iniciamos a análise ("2+2=5") quanto sua negação ("não é o caso que 2+2=5") são mapeadas em sentenças da forma "Se para todo x, y... (R(x, y, ...) então R'(x, y, ...))". Mas, se é verdadeiro que "Não existe x, y... tal que R(x, y, ...)", então todas as sentenças da forma anterior são vacuamente verdadeiras. A situação então é a seguinte: a fim de preservar a falsidade das sentenças não verdadeiras compostas com termos da aritmética, o estruturalista universalista precisa garantir a existência de pelo menos uma coleção de elementos grande o suficiente para poder satisfazer os axiomas estruturais da aritmética. Dissemos que o universalismo e o nominalismo estruturalista são intimamente conectados. Mas assumir a existência de uma tal classe é um preço que um nominalista pode pagar?

Alguns nominalistas não teriam problemas em responder essa questão afirmativamente. Hartry Field (2016), um defensor de outra forma de nominalismo que dificilmente poderia ser qualificado como estruturalista, defendia que pontos no espaço são entidades nominalisticamente aceitáveis. Se acreditarmos nessa asserção e também na tese de que existem infinitos pontos no espaço, uma infinidade de diferentes classes de pontos no espaço poderia facilmente atender à exigência de que exista pelo menos uma classe capaz de satisfazer os axiomas de Peano. Uma solução diferente para esse problema

tem sido levantada, pelo menos desde Putnam (1967)[21] e tem sua forma mais detalhadamente expressa por Geoffrey Hellman em "Mathematics Without Numbers" (1989). Ela é chamada de "Estruturalismo Modal". Estruturalismo modal consiste em uma forma de nominalismo que implica que a matemática não exige existência efetiva das estruturas que são abordadas em seus diferentes ramos, mas tão somente a possibilidade de uma tal existência.

Estruturalismo modal é uma variação do estruturalismo universalista que acabamos de descrever. Sua mais distintiva característica é que a implicação que figura nas sentenças gerais completamente analisadas é lida contrafactualmente e formulada com o aparato de uma lógica modal. Dessa maneira, a análise de "1 ≠ 2" deveria ser algo como:

$$\Box\ \forall N, S, 0(AP\langle N, S, 0\rangle \rightarrow S(0) \neq S(S(0)))$$

Essa última sentença diz agora que é necessário que a condição $S(0) \neq S(S(0))$ ou, o que é o mesmo, $1 \neq 2$, seja válida em qualquer sequência satisfazendo as condições expressas na relação $AP\langle N, S, 0\rangle$. Nessa leitura contrafactual da implicação, a sentença não é tornada vacuamente verdadeira pela não existência efetiva de uma tripla de elementos satisfazendo $AP\langle N, S, 0\rangle$. No entanto, um perigo semelhante aparece. A sentença também seria tornada vacuamente verdadeira se não for o caso que seja possível que exista pelo menos uma tal tripla de elementos. A solução adotada por Hellman consiste em tomar cada sentença da matemática ordinária como sendo analisada em termos de dois componentes proposicionais conjugados. A fórmula acima é o chamado componente hipotético e a asserção de que é possível existir uma tripla de elementos $\langle N, S, 0\rangle$ tal que $AP\langle N, S, 0\rangle$ pode ser chamada de componente categórico. Para um estruturalista modal, a análise completa da sentença "1 ≠ 2" seria algo como:

$$\Diamond \exists\ N, S, 0(AP\langle N, S, 0\rangle) \wedge (\Box\ \forall N, S, 0(AP\langle N, S, 0\rangle \rightarrow S(0) \neq S(S(0))))$$

Ao que tudo indica, a análise acima atende a exigência de que o valor de verdade das sentenças ordinárias da matemática seja preservado ao longo da análise. Além disso, a exigência foi satisfeita sem que tenha sido necessário comprometimento explícito com a existência factual de um sistema satisfazendo os axiomas de Peano. Tudo o que foi necessário assumir foi a possibilidade de um tal sistema. Já foram apresentadas interessantes críticas aoestruturalismo modal, principalmente do ponto de vista das

[21] Putnam (1967).

dificuldades epistemológicas envolvidas[22]. Não faz parte do nosso escopo reconstruir tais críticas em detalhes, mas podemos ressaltar que elas giram em torno das dificuldades posteriores que inerem a uma explicação apropriada do significado da afirmação de que não existe uma sequência infinita de objetos, mas ainda assim ela é possível.

Antes de prosseguirmos, é interessante notar que, como esperamos que fique nítido nos capítulos posteriores, uma das dificuldades em se afirmar uma tese estruturalista baseada na teoria das categorias vem do fato de que não está claro se uma teoria estrutural formulada em linguagem da teoria das categorias deveria ser entendida à moda formalista ou universalista. Apesar da literatura filosófica sobre teoria das categorias ser recheada de jargões formalistas e da clara preferência de alguns dos autores envolvidos em tomar o partido de Hilbert no famoso debate com Frege sobre o estatuto dos axiomas da geometria, nada na própria linguagem da teoria parece motivar necessariamente um entendimento formalista de suas proposições. Esperamos mostrar, além disso, que a (re)construção de sentenças matemáticas dentro da linguagem interna de uma categoria pode ser feita de maneira muito natural por meio de sentenças universais quantificadas ao estilo universalista. Talvez seja o caso de que tanto a posição formalista quanto a universalista possam ser conciliadas em algum tipo de combinação mais sofisticada onde certos fragmentos da linguagem são vistos de um modo, e outros fragmentos são vistos de outro. Por ora, vamos deixar essas possibilidades em aberto.

1.2.2.3 Estruturalismo e poder expressivo da linguagem

Antes de avançarmos para considerar as diversas abordagens estruturalistas de um outro ponto de vista é importante apresentarmos ainda um outro uso para a qualificação "estrutural". Esse uso tem sido corrente nos debates, sendo especialmente relevante no contexto do estruturalismo associado à teoria das categorias. Ao longo de diversos momentos neste capítulo, deve ter ficado manifesto que estruturalismo, de uma maneira ou de outra, tem sempre a ver com identificar - ou pelo menos não distinguir - aqueles sistemas de objetos que compartilham a mesma forma ou estrutura. Por isso, é comum encontrar a afirmação de que uma teoria é estrutural quando ela é formulada em uma linguagem incapaz de distinguir entre dois objetos quando existir um isomorfismo entre eles. Uma estranheza pode se fazer notar: também temos dito continuamente que não

[22] Cf. Hale (1996).

distinguir entre objetos isomorfos é próprio do método axiomático moderno, isso não faria toda teoria axiomática uma teoria estrutural nesse sentido? Esse não é o caso, porque o que estamos querendo caracterizar com a qualificação "estrutural", nesse terceiro sentido, não é uma teoria "estrutural" por oposição a uma teoria "assertórica". Em vez disso, trata-se de uma teoria formulada em uma linguagem tal que, para qualquer predicado da linguagem, se ele se aplica a um objeto qualquer, então deve necessariamente se aplicar a outro que seja isomorfo ao primeiro. Não estamos considerando modelos da teoria e a capacidade da assinatura da linguagem na qual ela foi formulada de descrever diferentemente dois modelos isomorfos; estamos considerando objetos potencialmente nomeados por nomes próprios dentro da teoria e a capacidade da linguagem, na qual ela foi formulada, de exprimir predicados que se apliquem a um objeto e não a outro, quando existir um isomorfismo conectando-os.

O problema de haver múltiplos candidatos igualmente aceitáveis para funcionar como "o conjunto dos números naturais" origina-se do fato de que esses conjuntos foram caracterizados por meio de uma linguagem formal que contém propriedades que não são preservadas ao longo de um isomorfismo. Os ordinais de Zermelo e os ordinais de Von Neumann são evidentemente distinguidos por meio de perguntas muito simples que podemos formular acerca dessas construções com a linguagem da teoria de conjuntos. Tomemos como exemplo a propriedade $\{\{\emptyset\}\} \in X$ onde X é uma variável que pode ser substituída por qualquer conjunto, e temos uma propriedade verdadeira do conjunto dos ordinais de Zermelo e falsa dos ordinais de Von Neumann. Essas duas construções são isomorfas entre si, mas ao mesmo tempo, satisfazem propriedades diferentes e essas propriedades são reconhecidas pelo estruturalista como irrelevantes. O que motiva essa irrelevância é o fato de que mesmo se consentirmos que em qualquer ramo da matemática estamos sempre a falar sobre certos conjuntos, não é pertinente para a aritmética, por exemplo, se o terceiro número natural é um conjunto unitário ou se é um conjunto que contém mais de um elemento. O que importa é que o número 3 vem depois do número dois e antes do número quatro, além de outras propriedades relacionais.

Alguns participantes do debate sobre estruturalismo têm precisamente proposto que se empregue alguma linguagem autônoma na qual expressões como "$\{\{\emptyset\}\} \in 3$" não possam ser formuladas. Essas linguagens seriam empregadas seja com a finalidade de fornecer fundamentos para a matemática alternativos aos fundamentos clássicos, seja com a finalidade de fornecer à matemática métodos para desenvolver seus diferentes ramos

sem que sejam necessários "fundamentos" no sentido mais tradicional. Acreditamos que isso tem sido feito de duas maneiras distintas. Tsementzis (2016) argumentou que a teoria das categorias não é suficiente para prover uma linguagem incapaz de formular propriedades não estruturais e que, nesse quesito, ela na verdade estaria em pé de igualdade com as teorias de conjuntos mais tradicionais. O autor mostra claramente o quão simples é formular gramaticalmente, dentro da linguagem da teoria das categorias, propriedades que não são preservadas para isomorfismos, contrariando diretamente algumas afirmações de defensores da teoria das categorias que veremos posteriormente. Pior ainda, essas formulações são análogas às que são feitas dentro das teorias de conjuntos, não havendo diferença essencial entre as duas linguagens no que diz respeito a não distinguir construções isomorfas. O que Tsementzis demanda é um sistema formal de fundamentos para a matemática que seja construído dentro de uma linguagem na qual expressões como "$\{\{\emptyset\}\} \in 3$" sejam reconhecidas como *absurdos* e que sejam eliminadas, por princípio, pelas regras gramaticais da linguagem formal. O autor argumenta que a teoria homotópica de tipos e os fundamentos univalentes para a matemática que podem ser expressos dentro dela satisfazem essa exigência, ao passo que a teoria das categorias não. Essa é uma das maneiras de se prescrever uma linguagem estrutural: recomendar uma linguagem na qual expressões extraestruturais sejam erros gramaticais manifestos.

Quando inspecionamos os argumentos em favor da teoria das categorias e sua conexão com o estruturalismo - e também a prática matemática feita com esse aparato - é fácil notar que uma limitação à linguagem da teoria das categorias, raramente mencionada, precisa ser imposta como forma de contornar, pelo menos parcialmente, o argumento de Tsementzis. De forma muito semelhante à proposta universalista que descrevemos acima, é necessário banir o uso de nomes próprios da linguagem da teoria das categorias. Acreditamos que o estruturalismo categórico precisa ser conduzido de forma universalista e o papel que as categorias desempenham é precisamente o de fornecer o domínio de variação das variáveis para as fórmulas contendo quantificadores, de maneira semelhante ao papel que Quine atribuiu à teoria de conjuntos, quando disse que a mesma ontologia de classes estaria sendo pressuposta pelo estruturalista. Então, outra maneira de se recomendar uma linguagem estrutural é restringir as frases que podemos empregar dentro da linguagem formal. Nesse caso, não estamos dizendo abertamente que todas as asserções não estruturais são manifestas violações gramaticais.

No caso da teoria das categorias, proibir o uso de quaisquer nomes próprios é suficiente para garantir que propriedades não invariantes para isomorfismos sejam exprimíveis dentro da linguagem. Mas não é difícil mostrar que no caso das teorias de conjuntos essa restrição não é suficiente. Para a teoria das categorias, o elemento problemático é o possível emprego de nomes próprios para estruturas singulares que poderiam ser isomorfas, porém não-idênticas a outras estruturas. No caso das teorias de conjuntos não estruturais, o problema reside na própria relação de cópula entre um elemento e o conjunto ao qual ele pertença. O que precisamos "perder" da linguagem da teoria dos conjuntos, se quisermos formular adequadamente teorias estruturais dentro dessa linguagem, é precisamente a capacidade de descrever a "composição interna" que um certo conjunto possui. Mas isso também pode ser feito por meio de uma teoria de conjuntos expressa com a linguagem da teoria das categorias.

Ao longo de toda essa seção 1.2, meu objetivo foi o de apresentar alguns conceitos que nos permitem entender teses que diferentes estruturalistas mobilizam. Mais especificamente, na seção 1.2.2, apresentamos conceitos que podem ser usados para qualificar linguagens e teorias, formais e às vezes informais, que são empregadas pelos matemáticos praticantes ou pelos próprios estruturalistas. Mais importante foi a distinção entre três diferentes concepções do que significa dizer que uma teoria é "estrutural". Duas dessas concepções, a formalista e a universalista, parecem estar em contradição direta uma com a outra. O formalista mobiliza a ideia de que uma teoria estrutural é composta de sentenças que não possuem uma interpretação intrínseca. O universalista propõe uma análise dessas teorias estruturais que possui dois resultados relevantes. Primeiramente, nomes de objetos singulares e outros símbolos constantes são banidos em detrimento de variáveis. Em segundo lugar, desaparece também a necessidade de se comprometer com a ideia de que haja sentenças que não possuem um sentido fixo. Sugerimos que essas duas abordagens para as teorias estruturais estão em contradição, mas algumas vezes a abordagem universalista é tratada como uma explicação posterior do que o formalista realmente estava tentando dizer. Também gostaríamos de deixar em aberto a possibilidade de que tanto a concepção universalista quanto a formalista sejam complementarmente mobilizadas na articulação de uma visão estruturalista da matemática.

1.2.3 Estruturalismo do ponto de vista epistêmico

Nas seções anteriores consideramos algumas perspectivas sobre as quais poderíamos olhar para as diferentes abordagens estruturalistas. Primeiramente levamos em conta que estruturalistas interpretam a afirmação de que "matemática é sobre estruturas" com duas concepções ontologicamente distintas de "estrutura". Por um lado, existe um tipo de platonismo que defende que estruturas são legítimos objetos da ontologia, distintos dos sistemas de objetos interconectados que são ditos "possuir estrutura". Por outro lado, existem aqueles estruturalistas que negam que haja tais objetos e entendem a afirmação de que a matemática é sobre estrutura como uma alegação de que ela lida tão somente com leis gerais sobre os sistemas particulares e nunca com entidades específicas da ontologia. Em seguida, pudemos distinguir entre três maneiras diferentes de se entender a generalidade característica de uma teoria estrutural. Na maneira formalista, essas teorias são vistas como um conjunto de sentenças formais abertas a serem posteriormente interpretadas de acordo com suas diversas aplicações particulares. Na maneira universalista, as teorias estruturais são vistas como compostas de sentenças universais contendo quantificadores e possuindo sempre uma forma como "Se tais e tais condições são satisfeitas, então tal e tal é o caso". Já na terceira maneira, a qual não atribuímos propriamente um nome, uma teoria estrutural foi entendida como aquela que emprega uma linguagem que é "geral" por abstrair completamente das possíveis características particulares não estruturais dos sistemas. Deixamos em aberto a maior parte das questões que poderíamos levantar sobre como essas três diferentes concepções se relacionam entre si.

Agora, nesta seção, o que nos importa não é esgotar as diferentes perspectivas que poderíamos adotar para comparar as diversas propostas estruturalistas do ponto de vista da epistemologia de fundo. O que nos será mais importante é distinguir entre duas atitudes que o matemático pode adotar com o objetivo de caracterizar e conhecer estruturas matemáticas. A primeira atitude - ou procedimento - consiste em começar a partir de uma certa ontologia fixa de objetos atômicos. Esses objetos podem ser intuitiva e informalmente descritos ou, pelo contrário, podem ter sua existência prescrita por alguma teoria axiomática expressa em uma linguagem simbólica formal. A ontologia também necessita prever que além dos "átomos básicos" haja certas construções que resultam de se arranjar esses átomos em sistemas, seguindo regras ou procedimentos pré-definidos.

Supõe-se que tal ontologia seja suficiente para a totalidade da matemática - ou pelo menos para um certo ramo específico dela. No último caso, o matemático precisa aprender a conviver com uma pluralidade de ontologias diferentes. Uma vez que essa base ontológica esteja definida, sistemas de axiomas estruturais são posteriormente introduzidos como uma maneira de se agrupar diversos sistemas de objetos em virtude de suas propriedades comuns. Nesse procedimento, temos uma espécie de processo de abstração. Inicia-se pelos sistemas de objetos particulares que podem ser descritos com a totalidade das propriedades exprimíveis dentro da linguagem da teoria e, ao remover certas determinações particulares, obtém-se uma teoria geral e estrutural que se aplica a diversos sistemas. Pode-se continuar progressivamente esse processo e obter conceitos definidos por axiomas estruturais cada vez mais gerais. Para dar pelo menos um exemplo, pode-se imaginar que a ontologia em questão seja a hierarquia cumulativa dos conjuntos puros. Começando-se do conjunto vazio, pode-se construir os ordinais de Zermelo, por exemplo. Ao empregar definições e métodos bem conhecidos, pode-se definir os racionais e, em seguida, os Reais. Abstraindo das diferenças entre os Reais construídos a partir dos ordinais de Zermelo e a partir dos ordinais de Von Neumann, bem como de qualquer outra construção possível dentro da ontologia da teoria, obtemos o conceito de um corpo ordenado completo. Ao inverter o processo que fizemos na seção 1.1.2, gradualmente progrediríamos, esquecendo determinação por determinação do conceito de "corpo ordenado completo" ao conceito de grupo. Em um passo posterior chegaríamos ao conceito de monoide, abstraindo da exigência de que exista um elemento inverso para cada elemento do domínio. Se por algum motivo desejarmos, podemos ainda continuar esse processo de abstração. Por causa da "direção" na qual a abstração acontece, essa atitude tem sido chamada de abordagem b*ottom-up*.

A abordagem estrutural b*ottom-up* parece conectada com uma atitude epistemológica que podemos chamar de "fundacionalismo". *Grosso modo*, "fundacionalismo" é geralmente entendido como a tese de acordo com a qual o conhecimento deve ser fundado em algum conjunto de proposições que satisfazem propriedades epistêmicas consideradas desejáveis pela epistemologia em questão. Mais precisamente, em uma epistemologia fundacionalista, as proposições verdadeiras que correspondem ao conhecimento são divididas em duas classes mutuamente disjuntas: as "fundantes" e as "fundadas", sendo as últimas justificadas por meio das primeiras. Toda proposição verdadeira x é ou "fundante" ou "fundada", e nenhuma proposição pode ser ambas. Se x satisfaz a propriedade de ser "fundante", então x satisfaz algum conjunto P

de propriedades, em virtude das quais supõe-se que ninguém demandaria uma posterior justificação de x. Entre tais propriedades geralmente se encontram a *autoevidência*, a *aprioricidade*, a *analiticidade*, a *necessidade*, entre outras. A mencionada relação de justificação é uma certa relação assimétrica $R(x, y)$ onde x varia sobre a totalidade das sentenças fundantes e y sobre a totalidade das sentenças possivelmente fundadas, de tal modo que $R(x, y)$ implica $\sim R(y, x)$. Muitas vezes o objetivo da justificação é precisamente o de explicar o *porquê* de uma certa proposição y também satisfazer algum subconjunto das propriedades epistêmicas P. Diferentes tipos de epistemologias fundacionalistas podem emergir conforme se entende a natureza das proposições ou conhecimentos ou se fixa quais as propriedades epistêmicas P e as propriedades da relação $R(x, y)$. Então, a descrição acima deve ser entendida apenas como uma tentativa de representar a forma lógica geral de uma tese fundacionalista.

A distinção entre "axiomas" e "teoremas" consiste, pelo menos tal como ela foi entendida desde a antiguidade até antes da ascensão do método axiomático moderno, na mais antiga amostra de um fundacionalismo nos moldes descritos no parágrafo acima. Axiomas eram sempre entendidos assertoricamente, i.e, como sentenças necessariamente verdadeiras acerca de um certo domínio e que além disso eram autoevidentes e necessárias. Teoremas eram aquelas sentenças que se seguiam dos axiomas pela mera aplicação das leis inferenciais da lógica e, por isso, compartilhariam com os axiomas a propriedade de serem verdadeiras e necessárias, apesar de muitas vezes não poderem ser propriamente chamadas de autoevidentes.

Ainda que consideremos os axiomas das teorias fundacionais modernas como assertóricos, aqueles que tentarem entender essas teorias como fundamentos no sentido epistêmico da palavra devem se deparar com algumas dificuldades. O exemplo mais comum de teoria fundacional para a matemática são as teorias axiomáticas de conjuntos. Supostamente, pode-se empregar os termos da teoria para se definir qualquer objeto da matemática ordinária, efetuando-se assim uma redução das entidades matemáticas aos conjuntos cuja existência a teoria prescreve. Essas definições, junto com as regras de inferência, permitem que a teoria sirva para provar pelo menos a maior parte dos resultados da matemática comum. À primeira vista, isso pode parecer análogo a um fundamento no sentido epistêmico do termo. No entanto, é duvidoso que alguma propriedade epistêmica, como autoevidência por exemplo, esteja necessariamente envolvida na escolha do que conta como um axioma. Certamente, existe muito mais

controvérsia acerca de alguns axiomas da teoria dos conjuntos, como o Axioma da Escolha, do que acerca de proposições simples da aritmética, como 2+2=4. Para falar em outro possível exemplo, a existência de um conjunto infinito que é asserida pelo Axioma do Infinito não parece uma verdade autoevidente que não demandaria nenhum tipo de justificativa posterior, já que a questão pela existência real e atual do infinito é uma das mais antigas disputas filosóficas conectadas com a matemática. Tem sido padrão nos debates sobre os critérios de justificação de axiomas para as teorias dos conjuntos o apelo a uma distinção entre *axiomas intrinsecamente justificáveis*, que seriam aqueles autoevidentes e *axiomas extrinsecamente justificáveis*, que seriam aqueles que se justificam pelo papel que desempenham em provar certas sentenças[23]. A distinção entre esses dois tipos de possíveis justificativas é um indício de que a expressão "fundamentos da matemática" traz consigo muito mais dimensões do que a mera fundação epistêmica. Não desejamos aqui, começar uma investigação sobre qual seria o verdadeiro papel de uma fundamentação da matemática em termos de conjuntos e, muito menos, qual o critério para se aceitar ou recusar novos axiomas. Apenas queremos sugerir que os ganhos em se reduzir a matemática a uma teoria fundacional podem ser outros que não o de justificativa epistêmica. Um desses ganhos é a unificação dos diferentes ramos da matemática por meio de uma mesma linguagem ou até mesmo de métodos comuns. Outro é a redução de uma infinidade de proposições a um arcabouço pequeno de princípios básicos dos quais as proposições das mais diversas áreas da matemática podem ser construídas. Igualmente importante, e ainda mais crucial para contrastar a abordagem b*ottom-up* com a outra abordagem sobre a qual falaremos, é o fato de que fundamentos em termos de uma teoria dos conjuntos nos diz de uma vez por todas quais são as entidades particulares sobre as quais a matemática fala. Essa redução ontológica é considerada benéfica por alguns filósofos que consideram o discurso genérico e impreciso sobre "formas" ou "estruturas" mais insatisfatório do que o discurso mais formal e preciso nos termos da teoria dos conjuntos. Mayberry novamente nos serve como exemplo:

> O que quer que possa ser dito à moda antiga em termos de 'formas abstratas' e 'universais' pode ser reformulado de forma muito mais precisa e simples em termos de conjuntos [...]. Desse modo, somos poupados da dificuldade de dizer que tipo de coisas aquelas formas abstratas e universais são. Não existe necessidade de conjurar uma entidade hipotética, algum *je ne sais quoi* que é a forma abstrata de uma dada estrutura, a coisa que ela e todos os seus isomorfos de alguma maneira compartilham. A teoria dos conjuntos simplesmente bane o

[23] Em Maddy (2011) encontra-se uma das mais detalhadas e extensas elaborações de uma epistemologia da teoria dos conjuntos baseada exatamente nessa distinção que levantei.

> problema dos universais dos fundamentos da matemática como irrelevante. (Mayberry, 1977, pp. 23-24).

A partir do argumento de Benacerraf, ficou óbvio que dado uma certa teoria fundacional particular, existem potencialmente infinitas maneiras de se construir uma série satisfazendo todas as condições necessárias e suficientes para receber o nome de "série dos números naturais". Mas e quanto a possibilidade de se construir sistemas igualmente aptos a representarem os números naturais dentro de diferentes teorias das classes? Para melhor entender o ponto em se fazer essa pergunta vamos imaginar a seguinte anedota: Joãozinho é uma criança ridiculamente prodigiosa, filho de um filósofo interessado em fundamentos da matemática e que possuía o hábito de bisbilhotar, desde que começara a ler, os livros da biblioteca de seu pai. Em sua primeira aula de matemática, na escola, a professora ensinou a turma a reconhecer a verdade da equação aritmética "2+2=4". Joãozinho não conseguiu entender realmente qual era o significado dessa frase e perguntou, em sincera dúvida, à professora: "Mas quando você diz que 2+2=4 está falando algo sobre entidades que habitam o universo dos conjuntos dado pelos axiomas de Zermelo-Fraenkel mais o axioma da escolha ou que em uma teoria dos tipos o domínio das provas da equação em questão é habitado?". Após ficar sem reação, a professora simplesmente diz: "Joãozinho, estou apenas querendo dizer que dois mais dois é igual a quatro!". E Joãozinho seguiu sem saber como ele deveria entender o significado da equação "2+2=4".

Será que é o caso que a professora de Joãozinho de fato tenha em mente uma das opções que mencionamos ou talvez uma terceira, ou alguma das possivelmente infinitas outras, porém não está plenamente consciente de qual delas, talvez por nunca ter estudado nenhuma das teorias fundacionais? Deveríamos dizer que uma vez que decidirmos qual dos fundamentos da matemática é o "correto" descobriremos o que é que as pessoas sempre tentaram dizer quando falavam que 2+2=4? A adoção de um ponto de vista antifundacionalista acerca do conhecimento matemático é motivado pelo fato de que as sentenças básicas da matemática ordinária e pré-fundacional são igualmente exprimíveis em qualquer um dos sistemas fundacionais. Um antifundacionalista radicaliza a afirmação de Benacerraf de que a aritmética é a ciência geral do que há de comum em todas as progressões, para incluir "todas as progressões" em qualquer universo teórico fundacional possível.

A abordagem que pretendemos contrastar com a b*ottom-up,* que foi descrita alguns parágrafos atrás, chamaremos pelo nome sugestivo "top-down". A abordagem

Top-Down para estruturas matemáticas consiste em começar a partir das definições estruturais dos conceitos mais abstratos e gerais, em vez de se começar por uma ontologia de objetos atômicos particulares. Em função do *contexto* nos quais os raciocínios serão desenvolvidos, especificações posteriores são gradualmente adicionadas aos conceitos mais gerais. Por "contexto", aqui, deve-se entender frequentemente qual é o ramo da matemática que está sendo desenvolvido. Mas também, a princípio, poderia existir situações nas quais determinações adicionais devem ser invocadas em função de uma certa prova específica, ou para se caracterizar o comportamento daquela estrutura geral quando aplicada em diferentes situações particulares, ou outras situações similares. Não temos aqui apenas uma mudança na "direção", no sentido de que passamos a progredir do mais geral para o mais particular, mas crucialmente podemos abandonar a pressuposição de uma ou mais ontologias fixas para a matemática. Em vez disso, cada ramo considera apenas aquelas propriedades e relações que lhe são pertinentes, sem que se pressuponha que existam objetos com determinações adicionais que poderiam vir a ser completamente caracterizados se avançássemos o suficiente do geral para o particular. Temos aqui uma visão antifundacionalista da matemática para a qual a questão acerca de uma suposta ontologia básica não possui qualquer relevância para o desenvolvimento real do conhecimento matemático.

A distinção entre b*ottom-up* e t*op-down* foi sugerida por Steven Awodey no contexto do debate sobre a capacidade da teoria das categorias em fornecer um arcabouço conceitual autônomo para formulação da matemática estruturalista. Como veremos, de acordo com Awodey, uma abordagem t*op-down* seria característica dos métodos próprios da teoria das categorias. Essa é certamente uma asserção muito forte. McLarty (2005), em comentário a essa asserção, argumenta que apesar de boa parte da matemática poder ser desenvolvida dentro dessa perspectiva, graças ao instrumental conceitual da teoria das categorias, ela encontra limitações e não é completamente claro que ela possa ser expandida para toda a matemática. Historicamente, diversas ideias que surgem no interior da teoria das categorias possuem um tom claramente fundacionalista e parecem endossar algum tipo de abordagem b*ottom-up*, mas baseada em algumas categorias e objetos internos a categorias, em vez de conjuntos.

Encontra-se na literatura a afirmação razoável de que a abordagem de David Hilbert à matemática axiomática foi o precursor da abordagem t*op-down*. Essa visão antifundacionalista é também associada plausivelmente ao estruturalismo modal de Geofrey Hellman. Uma das primeiras tentativas de se reescrever as sentenças da

matemática ordinária com o aparato da lógica modal, que é obviamente fonte de inspiração para a elaboração mais rigorosa e detalhada oferecida pelo próprio Hellman, foi feita por Putnam (1967). O atrito entre uma visão modal e uma visão fundacionalista da matemática aparece claramente no já mencionado "Mathematics Without Foundations". Putnam sugere que uma das características mais distintivas da matemática é que ela admite um número desconcertante de maneiras distintas para expressar o que seria, em algum sentido, o mesmo fato, sem aparentemente falar sobre os mesmos objetos. Na visão modal da aritmética, por exemplo, não se pressupõe a existência de nenhum objeto que seja uma classe dos números naturais, mas apenas que tais classes sejam possíveis. Lembre-se que sentenças da aritmética ordinária são parafraseadas, dentro da abordagem de Hellman, de tal maneira que elas resultam de dois componentes conjugados. O primeiro deles é a afirmação de que uma classe de números naturais é possível. O segundo corresponde à afirmação de que em qualquer universo de classes, é necessário que, se uma classe, uma operação de sucessão, e um elemento inicial da classe formam uma estrutura de números naturais, então vale uma certa relação entre esses elementos. O que torna esse estruturalismo modal um exemplo de abordagem t*op-down* é o fato de que a sentença da aritmética analisada modalmente é obviamente "transversal" aos múltiplos universos de classes ou conjuntos no mesmo sentido que dizemos que a matemática ordinária era tratada pelo antifundacionalista.

1.3 Considerações finais do capítulo

Nosso propósito ao longo deste capítulo foi o de apresentar alguns conceitos chaves que serão necessários para avaliarmos e apresentarmos o debate sobre o estruturalismo que seria incorporado na linguagem e nos métodos típicos da teoria das categorias. Começamos discutindo o que é estruturalismo no contexto da filosofia da matemática e se há de fato características comuns que reúnem as diferentes abordagens que são qualificadas como estruturalistas. Propusemos que existe um lema estruturalista geral capaz de identificar algo acerca de todas as formas de estruturalismo. Além disso, diferentes formas de estruturalismo possuem pelo menos duas preocupações comuns: dar uma resposta satisfatória ao problema das múltiplas reduções e extrair as consequências filosóficas do método axiomático moderno caracterizado essencialmente por não distinguir entre dois sistemas de objetos que compartilham uma estrutura comum.

É difícil pensar alguma outra característica que seja compartilhada por todas as formas de estruturalismo. Esforços vêm sendo feitos para acomodar essas abordagens em algum sistema coerente de classificação que nos permita ter uma visão geral de quais os pressupostos de cada uma das abordagens. Nosso objetivo não foi propriamente o de apresentar um sistema taxativo, mas apenas alguns pontos de vista sobre os quais podemos inspecionar e comparar as diferentes abordagens. Dividimos esses pontos de vista em três eixos: ontológico, linguístico e epistemológico. Do ponto de vista ontológico, estruturalistas podem ser platonistas ou nominalistas. Do ponto de vista linguístico, podem ser formalistas ou universalistas. Por fim, do ponto de vista epistêmico, pode-se conceber o conhecimento das estruturas como indo dos indivíduos básicos para estruturas cada vez mais abstratas, ponto de vista que foi denominado de b*ottom-up* e é intimamente conectado ao fundacionalismo ou como indo das estruturas mais abstratas para as mais específicas. Esse último ponto de vista foi denominado t*op-down* e está conectado a uma visão não fundacionalista do conhecimento matemático.

Com exceção de alguns comentários breves sobre algumas dessas teses, evitamos nos pronunciar diretamente sobre as relações existentes entre elas. Em alguns casos, como é o do nominalismo e do platonismo, existe uma óbvia contradição direta entre as duas posições. Para outras posições, como o formalismo e o universalismo acerca das teorias estruturais, e a abordagem t*op-down* e a b*ottom-up* para o conhecimento de estruturas, isso não está completamente claro. Não parece haver nada que impeça que alguns aspectos dessas visões sejam empregados cooperativamente na formulação de uma visão coerente da matemática. Talvez existam teorias estruturais formais e outras universais. Talvez seja legítimo e útil que o conhecimento matemático às vezes avance de objetos particulares para estruturas cada vez mais gerais, e às vezes de uma estrutura geral para contextos mais particulares. Essas questões devem ser decididas pela formulação de uma certa filosofia estruturalista particular e dificilmente poderiam vir a ser decididas por meio das nossas comparações genéricas.

Pretendemos que tenha ficado sugerido, ainda que mais sutilmente do que o ideal, que existe uma dificuldade na tese de que a teoria das categorias motiva alguma concepção estruturalista coerente. De forma similar ao que fizemos aqui, Geoffrey Hellman, em uma avaliação das respostas que seus argumentos em desfavor de um estruturalismo categórico receberam, sugeriu uma lista de questões às quais todas as propostas estruturalistas devem dar uma resposta. Na lista de Hellman, encontramos questões como “Qual a lógica subjacente?”, “Qual o estatuto das relações?” e “Quais os

critérios para a existência matemática?". Hellman reclama, com razão, que essas e algumas outras questões, que muitas vezes são respondidas claramente pelos diversos tipos de estruturalismo, não são facilmente respondidas quando direcionadas ao suposto estruturalismo motivado pela teoria das categorias. O mesmo ocorre também com as características que distinguimos ao longo deste capítulo: não é trivial ou simples dizer se a teoria das categorias endossa algum tipo de platonismo ou de nominalismo, por exemplo. Uma concepção estruturalista filosófica que seja baseada em teoria das categorias é um problema em aberto, e não uma solução para a pergunta: "mas afinal, o que é estrutura?".

2. Teoria das categorias como fundamentos para a natemática e como f*ramework* para o estruturalismo

> Desde Dedekind, passando por Noether e pelo o trabalho de Eilenberg e Mac Lane, claramente emergiu o fato de que estrutura matemática é determinada por um sistema de objetos e seus mapeamentos, em vez de por qualquer fator específico de objetos matemáticos tomados isoladamente. Em grande medida, a abordagem estrutural na matemática moderna é caracterizada pelo crescente interesse em (sistemas de) mapeamentos e na ideia de que objetos matemáticos são determinados pelas suas "transformações admissíveis". (Awodey, 1996, p. 209)

Dedicamos o primeiro capítulo a explicar o que é que se entende por "estruturalismo" no contexto dos fundamentos e filosofia da matemática. Após apresentarmos algumas das características comuns que acreditamos que toda abordagem estruturalista possui, fizemos um esforço para classificar e comparar as diferentes abordagens que costumam receber esse nome. Em vez de apresentarmos uma classificação exaustiva e sistemática, organizamos alguns conceitos que seriam pertinentes na hora de explicar e avaliar os debates acerca da capacidade da teoria das categorias de exemplificar uma abordagem tipicamente estruturalista para a matemática. Essa última tarefa ficará, ainda, a cargo do capítulo posterior.

O que faremos ao longo do capítulo que se segue é apresentar alguns conceitos chave para que se entenda o que é teoria das categorias, além de algumas indicações gerais acerca de como a teoria se desenvolveu historicamente até que argumentos em favor de sua conexão com o estruturalismo tenham vindo a surgir. Apesar dessa descrição dos processos de transformação da teoria ser conduzida de um ponto de vista do desenvolvimento histórico, não necessariamente introduziremos as noções relevantes tal como elas foram ao pé da letra apresentadas pela primeira vez. Nosso objetivo é tentar esclarecer o conteúdo e significado de asserções envolvidas na conexão da teoria das categorias com abordagens estruturalistas, não necessariamente tentar prover uma fonte de detalhes históricos com profundidade e rigor.

Nosso diagnóstico é que o processo que se desenrola desde as primeiras aparições da teoria das categorias até algumas décadas depois é um processo de "libertação" dos pressupostos conjutísticos dominantes. Se no início, a teoria foi pensada como uma mera *ferramenta* útil para introduzir alguns conceitos, ao cabo desse processo, ela supostamente teria passado a poder ser vista como uma maneira peculiar, alternativa e inteiramente independente de se conduzir a prática matemática, com sua própria linguagem e com seus próprios métodos, que seriam independentes de qualquer

fundamentação em termos de outras teorias. A questão de se ela realmente pode exigir legitimamente esses direitos é objeto de controvérsias e debates que examinaremos no capítulo seguinte. Contudo, independentemente da decisão final que assumirmos acerca dessa querela, é fato que se pode argumentar facilmente pela tese de que a teoria possibilita que pelo menos algumas áreas da matemática sejam desenvolvidas por meio de métodos que claramente endossam algum tipo de perspectiva estruturalista da matemática.

No núcleo da tese de que a teoria encarnaria uma perspectiva estruturalista está o uso de morfismos, construções e propriedades universais como recursos para identificar os objetos matemáticos sobre os quais as teorias matemáticas *categóricas*[24] falam. O teórico de conjuntos tradicional se vale de uma linguagem cujo poder expressivo lhe permite distinguir objetos, que são fundamentalmente identificados como conjuntos, por meio da identidade de seus elementos internos. O usuário de teoria das categorias não possui esse recurso à sua disposição e, por isso, se encontra obrigado a só poder identificar um objeto *externamente*, por meio dos mapeamentos que ele possui para com os outros objetos da categoria. Construções universais são precisamente uma maneira particular de fazer essa identificação externa. De um ponto de vista prático, essas construções possuem a vantagem de ignorar completamente informações irrelevantes de um objeto matemático e se concentrar apenas naquilo que é necessário e suficiente para a matemática. De um ponto de vista filosófico, essas informações irrelevantes são precisamente aquelas que criam o dilema pela escolha essencialmente arbitrária entre "diferentes" construções *igualmente* aceitáveis para serem tratadas como o modelo pretendido da teoria.

Um importante resultado merece aqui uma espécie de "menção honrosa". O lema de Yonneda, frequentemente reconhecido como o mais importante resultado da teoria das categorias, pode ser interpretado como estabelecendo que um objeto matemático é caracterizado univocamente a menos de um isomorfismo ao especificar as maneiras pelas quais ele poder ser mapeado em outros objetos, bem como esses outros objetos podem ser mapeados nele. *Grosso modo*, as *propriedades internas* de um objeto que são preservadas por seus isomorfismos, ou seja, suas propriedades estruturais, se correlacionam às suas propriedades externas de uma maneira bem definida: o lema de Yonneda expressa precisamente como essa correspondência acontece.

[24] No sentido mais comum do termo: teorias que identificam um único modelo a menos de um isomorfismo.

2.1 O início

Mais do que outras áreas, a topologia, desde os seus primórdios, incorporava uma visão da matemática que, pelo menos sobre um aspecto, se tornaria posteriormente característica da teoria das categorias. Estamos falando da ideia geral de que certos mapeamentos específicos entre os objetos estudados dentro de um contexto são, no mínimo, tão importantes quanto os próprios objetos. Grande parte dos teoremas mais importantes da topologia são (ou podem ser) explicitamente formulados como asserções sobre a existência de certos *mapeamentos contínuos* que conectam espaços topológicos e satisfazem alguma condição adicional. Sobre a origem da topologia moderna, Jean-Claude Pont diz:

> Assim como a axiomática e a álgebra moderna nasceram com a tomada de consciência de que as relações e as operações que ligam e combinam os seres matemáticos entre si são mais importantes do que esses seres, do mesmo modo pode-se remontar à origem da topologia moderna à tomada de consciência de que os mapeamentos que transformam um conjunto em outro nos ensinam mais sobre esses conjuntos do que os conjuntos eles mesmos. "Diga-me como te transformas e eu direi quem tu és". (Pont, 1974, p.119)

Se as operações que mapeiam espaços topológicos uns nos outros são uma fonte crucial de informação sobre esses espaços, não é de se estranhar que eles tenham vindo a ser estudados por meio das estruturas algébricas que podem lhes ser associadas de alguma maneira[25]. A topologia algébrica moderna possui precedentes no século XIX. Dentre esses é interessante ressaltar por exemplo o *Erlangen Programm* do geômetra alemão Felix Klein. Klein foi um dos primeiros a propor que as propriedades geométricas associadas a certos espaços topológicos fossem estudadas por meio de grupos de automorfismos que mapeiam um espaço consigo próprio, preservando as propriedades relevantes para a geometria em questão. O ramo da matemática que agora chamamos de topologia algébrica começou mais ou menos no ano de 1900, tendo no início atraído pouca atenção dos matemáticos e sido aplicado em poucas áreas. De acordo com Dieudonné[26], essa situação foi mudando aos poucos conforme surgiram novas ferramentas algébricas mais poderosas. Foi nesse contexto que surgiu o que agora chamamos de "teoria de homologia". Informalmente, essas teorias consistem em métodos de se associar espaços topológicos a uma cadeia de estruturas algébricas, geralmente

[25] O exemplo mais simples que pode ser formulado, provavelmente, foi o nosso exemplo do grupo fundamental do círculo no primeiro capítulo.
[26] Cf. Dieudonné (1989)

grupos abelianos, conectadas entre si de tal maneira que diferentes aspectos desses espaços sejam codificados em diferentes elementos da cadeia. Sobre essas teorias, McLarty nota: "havia várias delas e as relações que elas possuíam entre si não eram claras, estava nítido que os cálculos em homologia poderiam ser tornados mais sistemáticos do que eles eram naquele contexto".[27]

Em linhas muito gerais, esse é o contexto no qual os criadores da teoria das categorias estavam trabalhando. A primeira formulação oficial da teoria foi feita por Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane em um artigo de 1945 intitulado: "A Teoria Geral das Equivalências Naturais" (doravante TGEN). Como é bem conhecido na literatura, *inicialmente* os criadores da teoria não a pensaram como uma alternativa aos fundamentos da matemática então vigentes. Pelo contrário, categorias foram introduzidas apenas como um plano de fundo axiomático para que se pudesse definir certos conceitos - ou uma linguagem útil para a formulação de alguns problemas específicos - no campo da topologia algébrica. Mais especificamente, os autores notaram que certos *isomorfismos sistemáticos* apareciam tanto em teoremas quanto em algumas computações de grupos de homologia. Esses isomorfismos foram denominados de "equivalências naturais" e hoje em dia são mais comumente denominados de "isomorfismos naturais". Na época da publicação de TGEN, uma noção intuitiva de isomorfismo natural já era empregada de maneira informal, mas faltava uma definição precisa. Uma vez que isomorfismos são transformações invertíveis, o que era requerido para uma definição mais precisa era a caracterização geral de uma transformação natural. A caracterização sistemática e precisa dessa noção, por sua vez, passava pela caracterização do conceito de um funtor e esse último demandava a noção de "categoria" como forma de fixar conceitualmente os domínios e contradomínios de funtores. Em resumo, o conceito de categoria foi forjado *apenas* como um meio para definir o conceito de uma *transformação natural*, passando pelo conceito de um funtor entre duas categorias. Nesse sentido, os autores de TGEN observaram:

> […] Deve ser observado que o conceito de categoria é essencialmente auxiliar; nossos conceitos básicos são essencialmente os de um funtor e de uma transformação natural[...]. A ideia de categoria é requerida apenas pelo preceito de que toda função deve possuir uma classe definida como domínio e uma classe definida como contradomínio[*range*], pois as categorias são fornecidas como domínios e contradomínios de funtores. (Eilenberg; Mac Lane, 1945, p. 247)

De modo impreciso e intuitivo, pode-se dizer que uma transformação natural é uma "deformação" sistemática que atua na imagem de um funtor e a transforma na

[27] Cf. McLarty, 1990, p. 356

imagem de um outro funtor "paralelo" ao primeiro, respeitando uma condição chamada "condição de naturalidade". Já um funtor é algo como um homomorfismo entre duas categorias ou, em outros termos, é um mapeamento que conecta objetos e morfismos entre diferentes categorias ou de uma categoria consigo própria respeitando a estrutura básica envolvida na definição de "categoria". Por sua vez, uma categoria é um sistema composto por dois tipos de elementos conhecidos como "objetos" e "morfismos" satisfazendo as seguintes condições estruturais:

1) Para cada morfismo f há um único objeto A chamado de "o domínio" do morfismo e um único objeto B chamado "contradomínio" do morfismo. Podemos denotar tais objetos também como $Dom(f)$ e $Cod(f)$. A afirmação de que o $Dom(f)$ é o objeto A e o $Cod(f)$ é o objeto B pode ser abreviada por meio da seguinte notação: $f: A \rightarrow B$;

2) Morfismos estão sujeitos a uma operação de multiplicação (geralmente chamada de "composição" e simbolizada por $\circ$) que leva um par *ordenado* de morfismos $< f, g >$ em um único morfismo $(f \circ g)$ que é conhecido como a "composição" do par. Podemos ler a composição $(f \circ g)$ como "f depois de g". Composição é bem definida para algum par de morfismos no caso de o domínio de um coincidir com o contradomínio do outro. A composição de morfismos é *associativa* e possui *elementos neutros*;

3) Morfismos que são elementos neutros para a operação de composição são chamados de "morfismos de identidade". Para cada objeto existe um único morfismo de identidade que tem o objeto como domínio e contradomínio. Conversamente, para cada morfismo de identidade há um único objeto que é tanto o domínio como o contradomínio do morfismo. O morfismo de identidade de um objeto A pode ser denotado por $Id(A)$.

Após definir o conceito de categoria, TGEN introduziu o conceito de *isomorfismo* entre dois objetos de uma categoria. Dois objetos A e B são ditos isomorfos quando existe um par de morfismos $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow A$ tal que um é a inversa do outro. Dizer que f é uma inversa de g é o mesmo que dizer que se compormos f com g obteremos o morfismo de identidade do objeto A, ou seja, $(f \circ g) = Id(A)$, e se fizermos a composição na direção oposta, obteremos o morfismo de identidade do objeto B, ou seja $(f \circ g) = Id(B)$. A afirmação de que dois morfismos f e g são inversos um ao outro pode ser decomposta na ideia de que eles são tanto uma inversa à esquerda, chamada de

uma *retração*, quanto uma inversa à direita, também chamada de uma *seção,* um do outro[28].

Os termos que usamos para descrever o conceito de categoria privilegiaram de antemão algumas interpretações possíveis. Os exemplos de categorias apresentados em TGEN se dividem em três tipos bastante gerais (embora esses exemplos não sejam dados nessa ordem) que não parecem possuir muito mais em comum do que o fato de serem possíveis interpretações para os axiomas da teoria. Em TGEN são chamados de categorias:

A) Alguns exemplos de estruturas particulares, sejam elas ordens reflexivas e transitivas (conhecidas como "pré-ordem" ou "quase-ordem") ou alguma estrutura algébrica como um grupo;

B) Um universo de *todas* as estruturas de um certo tipo com seus respectivos homomorfismos. Por exemplo: a categoria de todos os grupos com homomorfismos de grupos; ou ainda, a categoria de todos os espaços topológicos com todas as transformações contínuas entre esses espaços, etc. Como um caso limite desse tipo de categoria, há também a categoria de todos os conjuntos não estruturados junto com todas as funções arbitrárias conectando esses conjuntos;

C) Dado um par ordenado de categorias <Φ, Σ> a totalidade dos funtores F: $\Phi \rightarrow \Sigma$ como objetos da categoria, com suas transformações naturais como morfismos.

Todas essas construções, embora aparentemente muito distintas, satisfazem um mesmo conceito de "categoria", na medida em que são interpretações possíveis para os axiomas estruturais que estipulam as exigências para que algo possa ser chamado de uma "categoria". Ao longo desta tese, nos referiremos a esses axiomas estruturais definidores do conceito de *categoria* (e a quaisquer outros que sejam equivalentes) como "axiomas de Eilenberg-Mac Lane".

Eilenberg e Mac Lane também introduziram a ideia de que uma vez que tenhamos definido alguma categoria podemos também falar em outras categorias posteriormente definidas em termos dela. Por exemplo, dadas duas categorias Φ e Σ respectivamente com objetos A e B e morfismos f e g podemos falar em uma categoria $\Phi \times \Sigma$ cujos objetos

[28] Dizer que *f* é uma retração de g é dizer que a composição f∘g é idêntica ao morfismo de identidade do domínio de *g*. Dizer que *f* é uma seção de *g* é dizer que a composição g∘f é idêntica ao morfismo de identidade do contradomínio de *f*. As duas noções são conectadas da seguinte maneira: se um morfismo f é uma retração de *g*, então *g* é uma seção de *f;* se um morfismo f é uma seção de g, então g é uma retração de f.

são todos os pares $A \times B$ e cujos morfismos são todos os pares $< f, g >$. Podemos também introduzir novas categorias como subcategorias de outras dadas a partir de subcoleções de objetos e morfismos. Por exemplo, podemos considerar a subcategoria que contém exatamente os mesmos objetos, mas apenas os isomorfismos, em vez de todos os morfismos possíveis. Também podemos, por exemplo, falar sobre a categoria de todos os conjuntos finitos ou de todos os *grupos* finitos como exemplos de subcategorias da categoria de todos os conjuntos e da categoria de todos os grupos, respectivamente.

Como exemplos de funtores entre categorias pode-se incluir os homomorfismos entre estruturas particulares tais como mencionadas em A. Mas também operações que constroem estruturas de um certo tipo a partir de estruturas do mesmo tipo (como a operação de produto cartesiano que mapeia dois conjuntos A e B em um terceiro conjunto $A \times B$ cujos elementos são todos os pares ordenados $< x, y >$ tal que $x \in A$ e $y \in B$ ou também a operação que mapeia um certo conjunto A em seu conjunto potência, entre outras operações similares). Também temos operações que mapeiam objetos de uma categoria em objetos de *outra* categoria distinta da primeira, mapeando também morfismos em morfismos. Por exemplo: a operação que mapeia o par formado por um espaço topológico S com algum ponto selecionado $x \in S$ no grupo fundamental do espaço é um funtor da categoria dos espaços topológicos pontuados (i.e, dos pares <S, x> formados por um espaço e um ponto distinguido daquele espaço) para a categoria dos grupos.

Eilenberg e Mac Lane distinguiram entre dois tipos de funtores em virtude de como os mapeamentos entre morfismos das categorias eram feitos. Um funtor *covariante* F associa cada morfismo f em um morfismo $F(f)$ tal que se f for um morfismo de identidade, $F(f)$ também será, o domínio de $F(f)$ é o objeto $F\big(Dom(f)\big)$ e o contradomínio de $F(f)$ é $F\big(Cod(f)\big)$; dado um morfismo g na categoria de origem do funtor, se existe a composição $(g \circ f)$ então vale a seguinte equação: $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$. Um funtor F era chamado *contravariante* no caso de ele inverter a direção de todos os morfismos. Ou seja, no caso de mapear cada morfismo $f: A \to B$ em um morfismo $F(f): F(B) \to F(A)$ e cada composição $(g \circ f)$ em uma composição $F(f) \circ F(g)$.

A relação estrutural entre essas duas noções de funtor, que descrevemos como uma *inversão na direção das setas*, é conhecida como "dualidade". Se tomarmos a definição de uma certa noção dada em termos dos primitivos da teoria das categorias, a noção dual é aquela que resulta de simplesmente inverter as direções de todas as setas na

definição da noção original. Algumas noções, como a de *isomorfismo*, são elas mesmas autoduais. Outras, como a noção de *funtor*, não. De modo ligeiramente mais preciso, dualizar é o mesmo que fazer as seguintes substituições na expressão em sua forma não abreviada:

$Dom(x) \longmapsto Cod(x)$

$Cod(x) \longmapsto Dom(x)$

$x \circ y \longmapsto y \circ x$

Para ser mais geral, podemos dualizar todas as expressões da linguagem e não apenas as definições. Os axiomas para a teoria das categorias são "autoduais", no sentido de que a dualização de uma dessas frases produz uma frase trivialmente equivalente. Então, uma vez que a dual de qualquer frase bem formada é uma frase bem formada e a dual de todo axioma é um axioma, temos aqui o chamado "princípio de dualidade": para qualquer frase dentro da linguagem da teoria das categorias, se ela se segue dos axiomas então a frase dual também se segue dos axiomas.

Uma vez que tenhamos a noção de dualidade, podemos também introduzir uma categoria Φ^{op} como a categoria que resulta de inverter formalmente a direção de todas as setas na categoria Φ. Φ^{op} é chamada de categoria dual ou oposta a Φ. Assim, podemos simplesmente usar a noção de "funtor" como sinônima de "funtor covariante", e entender um funtor contravariante $F: \Phi \to \Sigma$ como simplesmente um funtor $F: \Phi^{op} \to \Sigma$. Essa nomenclatura é mais empregada hoje em dia.

Dualidades são um tipo de fenômeno muito recorrente em noções da matemática e da lógica. Muitas vezes gostaríamos de dizer que estruturas e operações parecem o reflexo umas das outras em um "espelho". A noção de uma categoria dual dá uma expressão formalmente precisa, abstrata e universal a essa metáfora. A noção de *dualidade* também protagoniza o primeiro exemplo de isomorfismo natural que Eilenberg e Mac Lane forneceram após a definição de transformação natural, como veremos alguns parágrafos abaixo.

Suponhamos agora que temos duas categorias Φ e Σ e dois funtores paralelos $F: \Phi \to \Sigma$ e $G: \Phi \to \Sigma$. Lembremos que os funtores mapeiam cada objeto A na categoria Φ em algum objeto na categoria Σ, respectivamente $F(A)$ e $G(A)$, e cada morfismo f em Φ em algum morfismo em Σ, respectivamente $F(f)$ e $G(f)$. Uma transformação natural $\eta: F \Longrightarrow G$ entre os dois morfismos paralelos F e G consiste em uma família de morfismos em Σ respeitando duas condições:

I- para cada objeto a na categoria Φ pertence a essa família um morfismo $\eta_a: F(a) \to G(a)$ da categoria Σ;

II- seja $f: a \to a'$ um morfismo de Φ, a seguinte equação deve ser válida:

$$G(f) \circ \eta_a = \eta_{a'} \circ F(f)$$

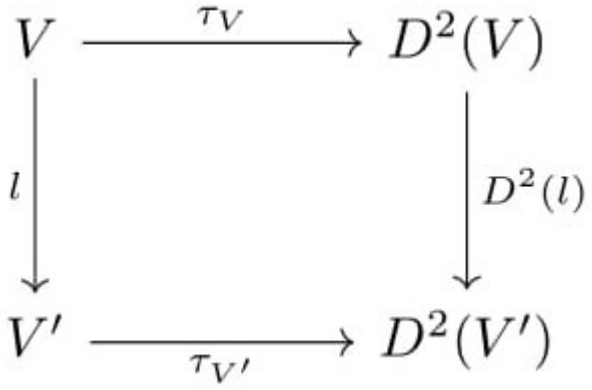
Em outros termos, a transformação natural é a coleção dos morfismos que transformam os objetos da imagem do funtor F nos objetos da imagem do funtor G, de tal maneira que para cada objeto a da categoria de origem Φ temos um morfismo η_a na categoria destino Σ conectando Fa com Ga. Esses morfismos que compõem a transformação natural são tais que a composição de η_a após *qualquer* morfismo $G(f): Ga \to Ga'$ resulta no mesmo que a composição de $\eta_{a'}$ após $F(f): Fa \to Fa'$. É crucial notar que a última condição foi enunciada como uma afirmação geral acerca dos morfismos particulares η_a e $\eta_{a'}$, pois dissemos que a condição era válida para *qualquer* morfismo $f: a \to a'$e não para algum morfismo particular. A expressão "natural" visa capturar a propriedade que as transformações η_x possuem de serem reutilizáveis de forma independente de uma escolha particular e arbitrária de um morfismo *f*. Quando todos os componentes de uma transformação natural são isomorfismos, a transformação natural também possui uma transformação natural inversa e, nesse caso, ela é denominada de um "isomorfismo natural" - ou uma "equivalência natural" na terminologia empregada em TGEN.

Várias leis gerais que estabelecem equivalências em diversas áreas da matemática correspondem à existência de certos isomorfismos naturais entre determinados funtores. Já dissemos, por exemplo, que a operação que mapeia dois conjuntos A e B no produto $A \times B$ é um exemplo de um funtor. Esse seria um funtor de dois argumentos que pode ser entendido de pelo menos duas maneiras diferentes. Podemos tratá-lo como um funtor que mapeia dois objetos de uma categoria em um terceiro objeto da mesma categoria, caso a categoria em questão possua a propriedade de possuir como objeto quaisquer produtos de seus objetos. Caso contrário, podemos entender o funtor em questão como mapeando dois objetos de uma certa categoria Φ na categoria cujos objetos são os produtos de objetos em Φ e cujos morfismos são os pares de morfismos de Φ, denotada por $\Phi \times \Phi$. O funtor em questão mapeia todos os objetos A e B da categoria em um objeto $A \times B$, e também todos os morfismos $f: A \to X$ e $g: B \to Y$ em pares de morfismos $< f, g >: A \times B \to X \times Y$. Do mesmo jeito que podemos falar em um funtor $F: \Phi \to$

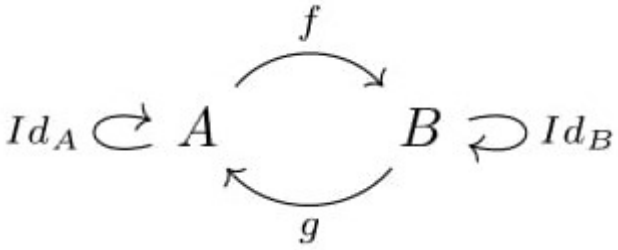
$\Phi \times \Phi$ que mapeia A e B em $A \times B$, também podemos falar e em um outro funtor $G: \Phi \rightarrow \Phi \times \Phi$ que mapeia A e B em $B \times A$. Se estivermos falando de conjuntos de pares ordenados de elementos, $A \times B$ e $B \times A$ denotam conjuntos diferentes. Mas é *sempre* verdadeiro que $A \times B$ é equivalente a $B \times A$ na medida em que existe um isomorfismo conectando esses dois conjuntos. A existência desse morfismo não é um *acaso* que depende da natureza particular desses objetos, e sim consequência da existência de um isomorfismo natural entre os funtores F e G. Então, a lei geral de acordo com a qual um produto entre A e B é isomorfo a um produto entre B e A, que podemos chamar de a *semi-comutatividade da operação de produto*, corresponde a existência de um isomorfismo natural entre dois funtores.

Mac Lane e Eilenberg iniciaram TGEN justamente apresentando um exemplo de um isomorfismo não *natural* e de um isomorfismo natural. Dado um espaço vetorial V sobre um corpo F qualquer, pode-se falar no espaço conjugado ou dual, usualmente denotado como V^*, V' ou ainda V^V. Para deixar claro que estamos falando de uma construção feita por meio de um funtor, vamos denotar o espaço dual de V como $D(V)$. O espaço dual possui como elementos as próprias transformações lineares $f: V \rightarrow F$ do espaço vetorial V no corpo F. Uma vez que é possível definir soma e produto escalar entre as próprias transformações f, o espaço $D(V)$ é ele mesmo um espaço vetorial. Ao contrário de quando lidamos com espaços dimensões infinitas, se V é um espaço com uma quantidade finita de dimensões então é sempre verdadeiro que V e $D(V)$ são isomorfos entre si. Contudo, esse isomorfismo geral entre qualquer V e $D(V)$ não é ainda um isomorfismo natural, pois para que se possa especificar ou construir tal isomorfismo é necessário que se defina uma base para ambos os espaços vetoriais. A cada possível escolha de uma base cria-se uma regra distinta que define o mapeamento isomorfo. Já que $D(V)$ é um espaço vetorial ele mesmo, podemos reiterar a operação de dualização e falar no espaço $D\big(D(V)\big)$ ou $D^2(V)$. O espaço $D\big(D(V)\big)$ é também isomorfo a V mas pode-se construir um isomorfismo de forma independente de qualquer escolha particular arbitrária de uma base. Vamos chamar a família dos isomorfismos que mapeiam os espaços vetoriais no "dual de seus espaços duais" de τ_x. Para cada espaço vetorial V é definido um isomorfismo $\tau_v: V \rightarrow D^2(V)$. Para definir esse isomorfismo, considere-se que ele mapeia um elemento $x \epsilon V$ em um elemento $y \epsilon D^2(V)$ e que todo elemento $y \epsilon D^2(V)$ é ele mesmo uma transformação $y: D(V) \rightarrow F$. Por sua vez, os elementos de $D(V)$ são as próprias transformações lineares $f: V \rightarrow F$ que mapeiam cada elemento

$x \epsilon V$ em um elemento $f(x) \in F$. O isomorfismo τv é o mapeamento que leva um vetor $x \epsilon V$ na transformação $y \epsilon D^2(V)$ tal que $y(f) = f(x)$. Desse modo, a equivalência existente entre um espaço vetorial V e o seu segundo dual $D^2(V)$ pode ser descrita como um isomorfismo natural entre o funtor identidade I que mapeia cada espaço vetorial em si mesmo e cada transformação natural em si mesma e o funtor D^2 que mapeia cada espaço vetorial e cada transformação linear em seu segundo dual. A condição de naturalidade é satisfeita, uma vez que para quaisquer espaços vetoriais V e V' e quaisquer transformações lineares $l: V \rightarrow V'$ temos que $D^2(l) \circ \tau_V = \tau_{V'} \circ l$. O que equivale a dizer que no diagrama abaixo qualquer caminho de V para $D^2(V')$ é idêntico.

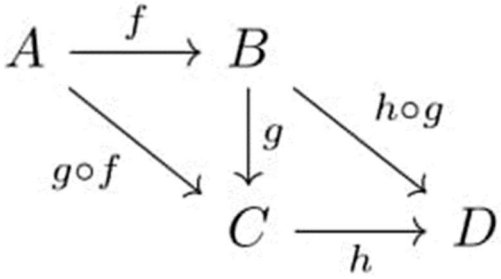


Antes de mudarmos de assunto, vamos apenas esclarecer um ponto sobre diagramas como o que empregamos acima. Assim como nas demais teorias algébricas, o uso de equações sobre operações e composições é crucial na teoria das categorias. Diagramas como o que apresentamos acima provêem uma maneira intuitiva de expressar tais equações. Dizemos que um diagrama como esse é comutativo quando todas as setas que possuem uma mesma origem e um mesmo destino forem idênticas. Algumas ideias que já apresentamos podem ser representadas com mais clareza por meio desses diagramas. Podemos, por exemplo, dizer um morfismo $f: A \rightarrow B$ é um isomorfismo quando existir um morfismo $g: B \rightarrow A$ fazendo o seguinte diagrama comutar:



Mencionamos, como uma condição definidora do conceito de categoria, que a operação de composição é associativa. Isso equivale a dizer que em uma categoria, dados

quaisquer quatro objetos A, B e C e D junto com três morfismos $f: A \to B$, $g: B \to C$ e $h: C \to D$, vale a seguinte equação: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Ou, o que é o mesmo, o seguinte diagrama é comutativo:



Antes de discutirmos aspectos fundacionais da teoria das categorias, vamos reenfatizar brevemente uma ideia. A generalidade, a utilidade e a ubiquidade do conceito de "isomorfismo natural" motivaram Eilenberg e Mac Lane a caracterizarem sistematicamente o conceito de uma maneira completamente geral e autônoma. Isomorfismos naturais são transformações naturais com inversas. Sobre que tipo de construção matemática essas transformações agem? O conceito de um funtor foi introduzido para que se definisse uma transformação natural como uma família de mapeamentos entre a imagem de dois funtores. Mas o conceito de funtor também precisa de um esclarecimento de natureza semelhante. E é aqui que o conceito de categoria entra. Categorias foram introduzidas apenas para satisfazer a exigência conceitual de fixarem o domínio e o contradomínio de um funtor. Em TGEN, o conceito de categoria não era crucial, e sim "um conceito essencialmente auxiliar", nas palavras dos próprios autores.

2. 2 Teoria das Categorias e Fundamentos

> "[…]no contexto dos 'fundamentos categóricos' […] autonomia em relação a teoria dos conjuntos é o nome do jogo" (Hellman, 2006, p.153)

No coração do debate sobre a teoria das categorias e o estruturalismo matemático residem questões sobre fundamentos para a teoria das categorias, fundamentos categoriais para o restante da matemática e sobre a possibilidade de que a teoria viabilize uma prática matemática desenvolvida sem o uso de "fundamentos" no sentido mais habitual do termo. Como veremos em mais detalhes, no capítulo seguinte, as propostas estruturalistas fundadas na teoria das categorias giram em torno da ideia de que ela poderia, em algum sentido, substituir teorias fundacionais mais tradicionais para fins de elaborar alguma

concepção de estrutura. Uma vez que o tema da relação entre fundamentos e teoria das categorias é um dos tópicos mais cruciais de toda a presente tese, não iremos esgotar aqui todos os pontos envolvendo as dificuldades fundacionais da teoria. Em vez disso, fornecemos uma breve análise do que acreditamos ser os principais motivos que impeliram alguns dos mais importantes matemáticos trabalhando dentro da teoria, no século passado, a clamar a independência de sua disciplina, décadas antes que o debate direto sobre a relação entre teoria das categorias e uma filosofia estruturalista tivesse surgido. Nosso objetivo é acessar o significado do que alguém diz quando afirma que a teoria das categorias é "autônoma" em relação à teoria dos conjuntos.

Desde sua primeira formulação, a teoria das categorias enfrentou problemas concernindo seus fundamentos. Tais problemas parecem decorrer do fato de que grande parte dos matemáticos adotam, mesmo que implicitamente, certos pressupostos ontológicos e epistêmicos. O seguinte trecho de uma das mais importantes obras sobre a história da teoria das categorias parece sumarizar quais são esses pressupostos:

> Durante o século XX, a seguinte epistemologia da matemática foi predominante: uma condição suficiente para a possibilidade de cognição dos objetos é que esses objetos possam ser reduzidos à teoria dos conjuntos. As condições para a possibilidade da cognição dos objetos da teoria dos conjuntos (os conjuntos), por sua vez, podem ser dadas de várias maneiras; em qualquer caso, os objetos reduzidos a conjuntos não precisam de uma discussão epistemológica adicional— eles "são" conjuntos. Portanto, uma tal epistemologia depende, em última instância, da ontologia. (Krömer, 2007, p.22)

Para colocar o ponto de uma maneira mais clara, podemos propor que essas pressuposições podem ser organizadas na seguinte lista de asserções:

(1) A matemática tem por objeto estruturas;

(2) Por "estrutura" entende-se domínios equipados com relações, propriedades ou operações bem definidas para os elementos do domínio, ou seja, lidamos aqui com a noção de estrutura da teoria dos modelos;

(3) Todos os componentes de uma estrutura (o domínio, as relações, operações, etc.) podem ser definidos como certos conjuntos;

(4) Poder ser definido em termos de conjuntos é uma condição suficiente para que um objeto seja epistemicamente acessível.

Ao introduzir o conceito de categoria, primeiramente Eilenberg e Mac Lane sugerem que consideremos uma classe de estruturas algébricas de um certo tipo junto

com homomorfismos entre essas estruturas[29] (dando a entender, talvez, que os autores consideravam esses exemplos os mais paradigmáticos). Ora, dado um certo conjunto S de qualquer cardinalidade arbitrária, junto com a operação de produto cartesiano $\times: SN, SM) \rightarrow SN + M$ podemos definir uma estrutura algébrica de uma certa espécie em S ao *equipá-lo* com uma lista de funções $f: SN + M \rightarrow S$, satisfazendo as exigências formais associadas àquela espécie de estrutura, exprimíveis via equações nas quais as funções da lista aparecem. Assim, para todo conjunto dado pode-se facilmente construir múltiplas álgebras tendo esse conjunto como domínio. Portanto, *pelas mesmas razões* pelas quais não se pode falar, na maioria das teorias de conjuntos mais tradicionais, no conjunto de todos os conjuntos, tampouco pode-se falar no *conjunto* de todas as estruturas algébricas de um certo tipo. Em outros termos, dentro de uma teoria de conjuntos consistente, à primeira vista, não se pode definir os mais paradigmáticos exemplos de categorias como sendo certos conjuntos. Muitas categorias, incluindo as categorias de estruturas algébricas e a própria categoria de todos os conjuntos, simplesmente são "grandes demais" para "caber" em uma teoria de conjuntos. Se tomarmos como verdadeiros os 4 pressupostos que mencionamos, no mínimo teremos que assentir que não há garantias de que categorias possam ser tomadas como legítimos objetos matemáticos epistemicamente acessíveis.

Essa conclusão é mediada pela mais famosa das antinomias das teorias de conjuntos, a saber, o paradoxo de Russell. O paradoxo emerge no contexto das assim chamadas teorias ingênuas de conjuntos ou, como preferimos chamar aqui, teorias intuitivas. Uma maneira de se introduzir um novo conjunto, que era frequentemente empregada nessas teorias, é partir de uma propriedade bem definida e utilizá-la como critério para determinar se algum objeto é um membro de um conjunto ou não. As teorias intuitivas de conjuntos se serviam tacitamente de um princípio de "compreensão irrestrita" segundo o qual, dado *qualquer* função proposicional bem definida $P(x)$, existe um conjunto $S = \{x: P(x)\}$ de todos os objetos que satisfazem P. Considere que intuitivamente parece haver coleções de objetos que obviamente não são membras de si mesmas. Assim, o conjunto de todas as cadeiras não é ele mesmo uma cadeira. Por outro lado, já que o conjunto de todos os objetos que não são cadeiras não é por si mesmo uma

[29] "These investigations will deal with aggregates such as a class of groups together with a class of homomorphisms, each of which maps one of the groups into another one, or such as a class of topological spaces together with all their continuous mappings, one into another". (EIlenberg; Mac Lane, 1945, p. 237)

cadeira, também parece haver coleções que obviamente são membras de si mesmas. Se assumirmos que todo predicado bem definido induz a existência de um conjunto que é a coleção de todos os objetos que satisfazem o predicado, então, *desde que a linguagem da teoria de conjuntos permita a formulação de tais propriedades*, deve haver um conjunto de todos os conjuntos que pertencem a si mesmos e um conjunto dos conjuntos que não pertencem a si mesmos. Uma vez que se pode concluir que o conjunto dos conjuntos que não pertencem a si mesmos, pertence a si mesmo se, e somente se, não pertence a si mesmo, a situação paradoxal está configurada.

A saída que se tornou a mais canônica para o paradoxo foi adotar uma teoria axiomática de conjuntos que incorpora como axioma alguma versão mais restrita do princípio que infere a existência de um conjunto a partir de uma propriedade. Essa versão se tornou conhecida como "axioma da separação" - ou como "axioma-esquema da separação". *Grosso modo*, esse axioma versa que dado um conjunto S e um predicado bem formado $P(x)$ existe um conjunto $\{x \in S: P(x)\}$, i.e, um subconjunto de S que contém todos os elementos de S que satisfazem P. Com as restrições na formação de conjuntos que as teorias axiomáticas impuseram, coleções que resultam em antinomias ou bem passaram a não poder ser formadas ou, pelo menos, não poderiam absolutamente ser consideradas conjuntos. Enquanto que *supostamente* teriam sido mantidas todas as coleções necessárias à matemática até então.

Em algumas versões de teoria de conjuntos, incorporou-se uma distinção entre classes próprias e conjuntos, permitindo a formação de classes que não seriam elas mesmas propriamente conjuntos, por serem grandes demais e que não são elas mesmas membras de nenhum outro tipo de classe. Assim, a coleção de todos os conjuntos é uma classe própria e não um conjunto. Desde que sejam impostas restrições para garantir que essas classes próprias não possam elas mesmas ser pensadas como membros de uma outra coleção, a antinomia também é evitada. A distinção entre "conjunto" e "classe própria" é pertinente a qualquer discussão sobre os fundamentos da teoria das categorias, já que em algumas abordagens o conceito de "categoria grande" é definido como uma categoria cujos objetos formam uma classe própria; e, por sua vez, "categoria pequena" seria aquela cujos objetos formam um conjunto[30].

[30] É importante notar, contudo, que a não ser que tenhamos disponível uma maneira de definir classe própria e conjuntos em termos puramente categóricos, se servir dessa definição faz a teoria das categorias depender diretamente de uma teoria de conjuntos.

Mesmo que algumas teorias de conjuntos permitam classes "tão grandes" quanto a totalidade dos objetos ou dos morfismos de uma categoria grande, elas ainda estão longe de poder fornecer fundamentos satisfatórios para todo o discurso envolvendo categorias. Os problemas fundacionais que a teoria das categorias enfrenta não se reduzem meramente ao discurso sobre coleções grandes demais para serem conjuntos. O cenário é ainda mais grave. Para a teoria é fundamental que sejam empregados *funtores*, que, vale lembrar, consistem em certas operações que podem possuir categorias grandes como domínio ou contradomínio. Mencionamos, na seção anterior, que dentre os exemplos de categorias fornecidos por Eilenberg e Mac Lane já se encontrava o caso das categorias de funtores de uma categoria para outra, com transformações naturais como morfismos. Apesar de Eilenberg e Mac Lane terem alegado, como veremos à frente, que as dificuldades fundacionais da teoria das categorias seriam as mesmas da teoria intuitiva de conjuntos, na verdade, categorias de funtores impõem uma dificuldade adicional. Isso porque se uma certa categoria é uma classe própria, cada funtor que possua essa categoria como seu domínio de origem também é. Daí se segue que eles mesmos não possam ser coletados como membros de uma outra classe ainda maior, inviabilizando que algumas categorias de funtores possam ser descritas como legítimas classes próprias. Quando considerarmos, algumas seções à frente, a relação entre teorias algébricas e teoria das categorias, categorias de funtores desempenharão um papel crucial, na medida em que a categoria de todos os modelos de uma certa teoria algébrica pode ser vista como uma categoria do tipo em questão. Portanto, apresentar uma teoria das classes capaz de distinguir entre um conjunto e uma classe própria, ainda está longe de ser o suficiente para legitimar todos os tipos importantes de categorias.

Uma solução à antinomia que seria mais promissora em termos de prover fundamentos para teoria das categorias via conjuntos seria adotar uma teoria na qual exista uma hierarquia de classes, de tal modo que um conceito diferente de *classe* é atribuído para cada patamar da hierarquia. Assim, poder-se-ia falar em um "conjunto" como algo que é membro de uma classe, em uma classe de nível inferior como algo que é membro de uma classe de nível imediatamente superior, e assim por diante. A ideia foi formalizada no conceito de um *Universo de Grothendieck* e, para alguns, consiste na mais promissora tentativa de fundamentar a teoria das categorias.

Oposição a esse tipo de fundamentos já foi justificada em termos de uma espécie de "critério estético": categorias, em todos os seus diferentes níveis de abstração, admitem um tratamento muito uniforme para serem vistas como universos completamente

distintos. Algumas dificuldades técnicas envolvendo essa abordagem também já foram apontadas, por exemplo em Mac Lane (1969). É importante notar que, mesmo que possa vir a ser possível existir algum fundamento para a teoria das categorias em termos de teorias de conjuntos, isso não é suficiente por si só para fazer teorias de conjuntos mais palatáveis a um estruturalista. Objetos constituídos em termos de conjuntos ainda continuam com propriedades não estruturais irrelevantes para a prática matemática. Além disso, é importante notar que uma possibilidade de princípio de que a teoria das categorias poderia vir a ser adequadamente fundamentada em alguma teoria de conjuntos não representa nenhuma dificuldade para a ideia de que a teoria das categorias poderia vir a se manter em pé por si mesma. Também é interessante pontuar que o caminho inverso à fundamentar teoria das categorias em teorias de conjuntos com Universos de Grothendieck pode ser feito: a noção de um Universo de Grothendieck pode ser generalizada para a de um universo em um topos[31].

Dado o inegável sucesso da teoria das categorias em organizar e formular diversas áreas da matemática e as dificuldades envolvidas na ideia de se fundamentar parte substancial dela (e, consequentemente toda a matemática desenvolvida na sua linguagem) pelos métodos conjuntísticos tradicionais, surge uma questão pela possibilidade de algum tipo de fundamento mais afim com a própria teoria das categorias. Podemos encontrar Bell, por exemplo, alegando que foram precisamente as restrições das teorias de conjuntos que impeliram teóricos das categorias a propor sua teoria como um possível fundamento para matemática:

> [...] as restrições na formação de classes (Zermelo) ou nas operações as quais as classes podem ser sujeitadas (von Neumann) foram impostas originalmente a fim de resolver as antinomias conjunto-teóricas. Essas restrições não foram julgadas, pela maioria dos matemáticos, como de severidade intolerável porque, na maioria das áreas da prática matemática, as coleções 'proibidas', tal como a classe de todos os conjuntos, simplesmente não desempenham nenhum papel. [...] Mas a tendência natural da teoria das categorias em formar categorias consistindo de todos os objetos de um certo tipo uma vez mais coloca essas classes proibidas, junto com suas correspondentes dificuldades, em primeiro plano; e as restrições na formação e manipulação dessas classes impostas pelo *framework* conjunto-teórico tradicional vieram a ser consideradas por alguns teóricos das categorias como uma importuna e mesmo possivelmente desnecessária restrição de sua atividade matemática. Essa sensação, reforçada pela contínua introdução das técnicas e ideias categórico-teóricas em muitos ramos da matemática (considerada como 'subversão' por alguns dos mais

[31] Cf. Streicher et al (2005)

> conservadores) levou certos teóricos das categorias a primeiro questionar a adequação dos fundamentos conjuntísticos correntes, depois a sua necessidade e, por fim, a propor a teoria das categorias como ela mesma um possível fundamento para a matemática. (Bell, 1981, p. 352, tradução minha)

Tem sido sugerido não só que a teoria das categorias seria autônoma no sentido de não depender de outras formas de se fazer matemática, mas também que ela pode fornecer por si mesma as ferramentas basilares para fundamentações da matemática alternativas às teorias de conjuntos tradicionais. As tentativas pioneiras de se propor uma tal fundamentação foram feitas por William Lawvere e foram sugeridas no contexto da semântica funtorial que é proposta em sua tese de doutorado de 1963: *Functorial Semantics of Algebraic Theories*. Em vez de tentarmos entender agora quais as peculiaridades das propostas fundacionais dadas em termos categóricos, iremos considerar o seguinte: uma vez que inicialmente o conceito de categoria era "meramente auxiliar", antes que fosse possível propor alguma forma de fundacionalismo baseado em teoria das categorias, alguns eventos teriam que acontecer com o resultado final de uma mutação no modo como o conceito de *categoria* é entendido. Grosso modo, categorias precisaram se tornar importantes por si mesmas e não meros sustentáculos de funtores.

Em TGEN, Eilenberg e Mac Lane atribuíram às categorias algo como um estatuto ambíguo. Por um lado, elas eram necessárias para fazer sentido do conceito de funtor, mas, por outro lado, elas aparentemente não poderiam ser consideradas por si mesmas como legítimos objetos matemáticos. De acordo com os autores, as mesmas dificuldades envolvidas aqui são aquelas que aparecem em qualquer formulação intuitiva, i.e, não axiomática, da teoria dos conjuntos. Daí, concluem que qualquer solução para essas últimas dificuldades, serviria igualmente para a teoria das categorias - ou melhor, para a *teoria das equivalências naturais*. Os autores tentaram remediar essa tensão sugerindo que se pode escolher qualquer um de uma pequena lista de arranjos que seriam cada um suficiente para salvaguardar todas as aplicações que são pretendidas. Um desses possíveis arranjos que foram sugeridos é particularmente interessante, pois pressupõe o suposto "caráter meramente auxiliar" do conceito de categoria: uma vez que o conceito de *categoria* teria sido introduzido apenas para definir o conceito de *funtor* e o de uma *transformação natural* entre dois funtores, seria "suficiente para todas as aplicações" que adotássemos "o ponto de vista" no qual funtores não são definidos para uma categoria de todas as estruturas de uma dada espécie, mas apenas para cada enupla ordenada de

estruturas particulares que consistiriam nos argumentos do funtor, desde que "nenhum dos nossos 'desenvolvimentos' envolvam construções elaboradas nas categorias elas mesmas"[32]. A saída que os autores empregaram para o dilema fundacional foi "adotar o ponto de vista intuitivo, deixando o leitor livre para inserir qualquer tipo de fundamento lógico (ou ausência de um tal fundamento) que ele prefira[33]". Algo como uma abordagem *top-down* provavelmente deveria estar por detrás da liberdade de formular a teoria em um plano puramente intuitivo, de tal maneira que a formulação continuasse válida, mesmo que com alterações pontuais, para qualquer fundamento lógico ou mesmo que fosse tolerável a ausência de um tal fundamento.

Contudo, ainda que os autores tenham escolhido apresentar os conceitos de uma maneira independente de qualquer fundamentação específica pressuposta como plano de fundo, os exemplos de categorias empregados em TGEN não foram definidos inteiramente a partir do próprio *framework* categórico. As construções que são identificadas como exemplos de categorias, objetos, morfismos ou funtores foram vistas como *importadas da prática matemática corrente* e, por isso, não há qualquer preocupação em especificá-las ou defini-las somente em termos dos primitivos da teoria das categorias. Não há nem mesmo a pressuposição de que isso poderia ser em princípio possível. Além disso, os conceitos da teoria das categorias poderiam - e talvez até mesmo deveriam - ser empregados lado a lado com conceitos externos à teoria das categorias. Assim, por um lado, o conceito de *transformação natural* era tão abstrato e universal que deveria ser formulado sem que se dependesse de alguma abordagem fundacional particular. Por outro lado, as construções matemáticas que exemplificavam os conceitos mobilizados nessa formulação eram definidas em teorias externas que não dependiam necessariamente desses últimos conceitos.

Nos anos que se seguiram a publicação de TGEN, a teoria das categorias começou a ser amplamente aplicada em diversos ramos da matemática e até mesmo fora dela. Embora uma tal ampliação no espectro de aplicação possa sugerir por si só alguma ruptura no modo como deveríamos interpretar o papel da teoria, essa ampliação absolutamente não é surpreendente. Os próprios autores sempre afirmaram que seu artigo poderia sugerir resultados em diversos campos por analogia, devido ao grande nível de abstração que empregaram:

[32] Cf. Eilenberg; Mac Lane 1945, p.247.
[33] Cf. Eilenberg; Mac Lane, 1945, p.246.

> Em um sentido matemático, nossa teoria provê conceitos gerais aplicáveis a todas as áreas da matemática abstrata e assim contribui à tendência atual para um tratamento uniforme das diferentes disciplinas matemáticas. Em particular, ela fornece oportunidades para a comparação de construções e de isomorfismos ocorrendo em diferentes ramos da matemática, e desse modo ela pode, ocasionalmente, sugerir novos resultados por analogia. (Eilenberg; Mac Lane, 1945, p. 236)

Mesmo assim, é fundamental perceber que essas aplicações trouxeram uma mudança de foco em relação à TGEN. Como exemplos de uma das primeiras aplicações, Marquis e Reyes (2011) mencionam o livro *Foundations of Algebraic Topology* (1952) de Eilenberg e Steenrod, bem como o *Homological Algebra* (1956) de Eilenberg e Cartan. Nesses dois livros, a topologia algébrica e a álgebra homológica foram, respectivamente, apresentadas de forma sistemática com o uso dos conceitos da teoria das categorias que haviam sido cunhados em TGEN, tendo a álgebra homológica surgido no próprio livro de Eilenberg e Cartan. A teoria das categorias se tornou o *framework* padrão dessas duas áreas da matemática e o uso dos diagramas comutativos se tornaram, nas palavras de Marquis e Reyes, "uma ferramenta fundamental na prova de vários resultados"[34]. Nesses trabalhos ficou nítido pela primeira vez um problema que se tornaria um princípio heurístico fundamental: "encontrar a categoria que é a apropriada para definir e desenvolver um certo aspecto da matemática"[35]. A partir daí começa a surgir uma outra interpretação para o papel da noção de "categoria" que difere daquela apresentada em TGEN, na qual categorias eram meros sustentáculos de funtores. Categorias deixam de ser apenas os domínios e contradomínios de funtores e passam a ser consideradas como "contextos formais com propriedades categóricas específicas nas quais pode-se identificar, definir e desenvolver uma porção específica da matemática"[36].

A visão das categorias como contextos formais dentro dos quais áreas especificas da matemática "acontecem" minou a ideia de que o conceito de "categoria" é meramente auxiliar. Tornou-se fundamental estipular determinados conceitos e desenvolver algumas teorias mediante a definição de certas categorias satisfazendo as propriedades categóricas adequadas. A limitação imposta por Eilenberg e Mac Lane de que "nenhum dos nossos 'desenvolvimentos' envolvam construções elaboradas nas categorias elas mesmas" tornou-se insustentável. Essa mudança preparou o terreno para o que parece ser um dos mais cruciais *turning points* que haveria de realmente mudar o estatuto da teoria das

[34] Cf. Marquis, Reyes, 2012 , p.8
[35] Cf. Marquis, Reyes, 2012 , p.8
[36] Cf. Marquis, Reyes, 2012 , p.8

categorias: a axiomatização das categorias abelianas. O conceito de categoria abeliana surge no contexto da álgebra homológica e depende essencialmente do fato de que diferentes estruturas algébricas (como grupos abelianos ou módulos sobre um anel) são igualmente aptas a serem associadas a um espaço topológico por meio de uma teoria de homologia. De acordo com McLarty[37], Mac Lane foi o primeiro a notar que o que torna essas estruturas igualmente aptas a serem usadas nesse contexto não é a similaridade da composição interna delas, mas sim o fato de que os grupos abelianos estão relacionados entre si de forma similar ao modo como os módulos sobre um anel se conectam uns com os outros, ou seja, uma certa *equivalência estrutural* entre os universos dos grupos abelianos e dos módulos sobre um anel. Esse ponto é tornado claro por McLarty:

> [...] não se trata de que um módulo, por exemplo, seja "similar" a um grupo abeliano, mas que módulos se *relacionam uns aos outros* da maneira como grupos abelianos se relacionam uns com os outros. Mais sucintamente, uma categoria de módulos é "similar" a uma categoria de grupos abelianos. Mac Lane partiu para descobrir exatamente o que essa "similitude" era. Isto é, ele buscou axiomas em termos categóricos para descrever exatamente quais categorias podem ser usadas na Homologia no lugar da categoria dos grupos abelianos. Ele chamou qualquer categoria satisfazendo seus axiomas de uma "categoria abeliana" [...] (McLarty, 1990, p.356, tradução minha, ênfase minha).

Esse primeiro esforço de Mac Lane para axiomatizar o conceito de "categoria abeliana" não foi bem sucedido. A versão agora *standard* dessa axiomatização foi fornecida por Alexander Grothendieck no artigo "*Sur quelques points d'algèbre homologique".* Grothendieck se serviu de expedientes que agora são familiares a todos que já estejam habituados com as teorias de topos: em vez de simplesmente caracterizar o conceito de "grupo abeliano", forneceu uma lista de axiomas estruturais que descreveriam as propriedades categóricas essenciais do "universo" dos grupos abelianos conectados por seus homomorfismos (ou seja, da categoria de todos os grupos abelianos) e qualquer outra categoria equivalente. De acordo com McLarty, essa axiomatização:

> […] não é como os axiomas para grupos abelianos. Essa é uma descrição axiomática de toda a categoria dos grupos abelianos e outras categorias similares. Nós não prestamos atenção no *que* os objetos e setas são, apenas nos padrões de setas que existem entre os objetos. (McLarty, 1990, p. 356, tradução minha).

É importante deixar claro que essa descrição não leva em conta a "composição interna" dos objetos ou dos morfismos da categoria, sendo feita tão somente em termos da álgebra abstrata dos morfismos da categoria sobre composição. Se segue daí que ela tenha sido feita com uma certa afinidade com o que chamamos no capítulo anterior de

[37] Cf. MacLarty, 1990, p.356.

"abordagem t*op-down*", já que as propriedades estruturais de um universo de estruturas estão sendo dadas "de cima para baixo" antes que se determine as propriedades das entidades que habitariam esse universo. Porém, é mais relevante notar agora que essa axiomatização foi dada em termos "puramente categóricos" no sentido de que ela se valeu simplesmente dos termos primitivos da teoria das categorias. Essa descrição "puramente categórica" enfatizou um importante aspecto da teoria das categorias: sua suposta *autonomia*. A autonomia da teoria das categorias em relação a qualquer fundamento não categórico para a matemática deve ser uma pressuposição fundamental de qualquer um que defenda alguma forma de estruturalismo, fundacionalista ou não, baseado na teoria. Também é uma pressuposição fundamental de qualquer um que defenda que a matemática deve ser fundamentada com base na teoria das categorias, em vez das teorias de conjuntos tradicionais, independentemente de qualquer apelo filosófico a uma ideia de que a matemática é a ciência da estrutura. A *autonomia* que estamos clamando ser essencial para a elaboração de um estruturalismo baseado em teoria das categorias implica que todos os conceitos e construções matemáticas relevantes sejam formuláveis somente em termos dos primitivos da teoria. Essa autonomia foi contestada com base em argumentos de natureza filosófica, mais de uma vez. Alguns desses argumentos serão objeto de nossa análise em momento posterior.

Apesar dessa importante contribuição de Grothendieck para a autonomia da teoria das categorias, a formulação categórica do conceito de categoria abeliana não foi feita propriamente com objetivos fundacionais. Como pontua McLarty:

> Grothendieck não tinha especial interesse nos fundamentos da matemática e não estava tentando evitar teorias de conjuntos. Além dos axiomas básicos para uma categoria abeliana, ele também forneceu axiomas mais fortes para tipos particulares de categorias abelianas e esses utilizaram conjuntos. Mas seu trabalho foi profundo o suficiente para tocar questões fundacionais. Seus axiomas básicos foram o primeiro fundamento puramente categórico para um assunto matemático, ao passo que sua utilidade prática o fez o primeiro trabalho em teoria das categorias a atrair ampla atenção matemática. (McLarty, 1990, p.256)

Uma peça fundamental à independência da teoria das categorias é o conceito de um topos. É didático e iluminador pensar um topos como uma generalização a partir das propriedades essenciais da categoria de todos os conjuntos. De fato, essa descrição é frequentemente empregada, apesar de não ser uma descrição historicamente acurada[38]. Apesar da axiomatização da categoria dos conjuntos proposta por Lawvere (que ficou conhecida como a Teoria Elementar da Categoria dos Conjuntos) preceder historicamente a axiomatização da noção geral de topos, ela consiste em uma extensão desses axiomas

[38] O artigo McLarty(1990) possui essa afirmação como ponto central.

e, portanto, a categoria dos conjuntos é ela mesma um topos particular. Lembre-se que uma categoria pode ser vista como um contexto semântico contendo as estruturas necessárias para o desenvolvimento de alguma porção da matemática. Assim, uma maneira intuitiva de se compreender o que é um topos é encará-lo como o conceito geral de uma categoria que é tão rica em estruturas internas quanto for um universo de conjuntos. Assim como o conceito de uma categoria abeliana captura a ideia geral de uma categoria que "é como" uma categoria de grupos abelianos ou de módulos sobre um anel, o conceito de topos generaliza a ideia de uma categoria que "é como" uma categoria de todos os conjuntos. De acordo com Lawvere, a semelhança entre um topos e a categoria dos conjuntos resulta do fato de que os objetos de um topos podem ser concebidos como conjuntos que variam de forma contínua. A categoria dos conjuntos sendo o caso limite no qual a variação é nula.

Um dos mais famosos livros-textos sobre a teoria dos topos é construído sob a ideia de que a noção de topos pode ser abordada por uma vasta gama de perspectivas distintas, todas elas descrevendo essencialmente o mesmo[39]. Dentre as diferentes descrições apresentadas temos coisas como "um topos é uma categoria com limites finitos e objetos potência"; "um topos é um espaço generalizado"; "um topos é uma semântica para sistemas formais intuicionistas"; "um topos é um cenário para teoria sintética dos domínios"; "um topos é a encarnação de uma teoria intuicionista de ordem superior", etc. Topoi são um tópico multifacetado e não nos importa muito explorar todas as suas diferentes facetas. De uma perspectiva fundacional, topoi às vezes são descritos como sendo cada uma proposta distinta de fundamentos para a matemática, no sentido de que cada um forneceria os "materiais" para a construção da matemática de maneira análoga ao que é feito tanto por teorias de conjuntos quanto por teorias de tipos.

A primeira axiomatização da noção geral de topos foi proposta por Lawvere e Tierney. A intenção era simplificar a intrincada noção de um topos de Grothendieck, uma categoria cujos objetos são todos os feixes sobre um espaço topológico, considerados por esse último como os verdadeiros objetos de estudo da topologia. Aqui, adaptamos uma lista de axiomas dada por Bell (1986, p. 413). De acordo com esses axiomas um topos é uma categoria satisfazendo as seguintes condições:

I- Existe um objeto terminal T;

II- Para quaisquer dois objetos A e B, existe um produto $A \times B$;

[39] Johnstone(2002).

III- Para quaisquer pares ordenados de objetos A e B, existe um objeto exponencial B^A, de todos os mapeamentos $A \to B$;

IV- Existe um objeto dos valores de verdade Ω.

Todas as condições acima podem ser expressas em termos puramente categóricos, por meio de propriedades universais. O conceito geral de propriedade universal e alguns exemplos particulares, incluindo alguns que foram mencionados na definição de topos, serão o tema de nossa próxima seção. Na seção que se segue iremos introduzir alguns exemplos de como formular conceitos matemáticos tradicionais em termos da teoria das categorias. Iremos fazê-lo com dois objetivos em mente: apresentar conceitos que serão úteis para a formulação de algumas ideias posteriores e dar ao leitor uma ideia geral de como conceitos matemáticos são formulados estruturalmente na linguagem da teoria. Em seguida, faremos uma seção dedicada única e exclusivamente a explicar uma propriedade universal particular: a de um objeto de números naturais.

Assim como uma construção universal dos números naturais permite que a aritmética seja desenvolvida dentro de uma categoria, a construção universal de um objeto de valores de verdade permite a definição de predicados, sub-objetos (análogos a subconjuntos) e operadores lógicos internos à categoria. Em conjunção com o axioma III, a existência do objeto Ω garante que se possa falar, para qualquer objeto A, em um objeto Ω^A de todos os predicados definidos sobre A. Consequentemente, também pode-se falar em predicados de predicados e assim por diante. Portanto, a lógica interna de um topos é uma lógica de ordem superior. Muitas vezes é retratado como um fato surpreendente que, na ausência de determinações adicionais, em geral, a lógica interna de um topos é uma álgebra de Heyting. Em alguns topoi específicos, por exemplo, na categoria de todos os conjuntos, ela pode "degenerar" em uma álgebra booleana, pela introdução de condições posteriores aos axiomas da teoria dos topos. Nosso trabalho ainda não possui uma seção dedicada a essas construções.

2.3 A noção de propriedade universal e alguns exemplos de construções dentro de uma categoria

Ao longo desta seção pretendemos caracterizar um pouco melhor o ponto de vista abstrato típico da teoria das categorias. Podemos dizer que os próximos parágrafos possuem um duplo papel: introduzimos vários conceitos empregados na teoria das

categorias e fornecemos algumas reflexões sobre o conceito de propriedade universal, na medida em que elas sejam relevantes para iluminar a conexão entre teoria das categorias e estruturalismo. A caracterização de uma construção universal capaz de introduzir a noção de um objeto dos números naturais dentro de uma categoria, que também apresentaremos em um momento oportuno, desempenhou um papel importante na primeira sugestão explícita de que a teoria das categorias possui alguma coisa a dizer sobre a subdeterminação da referência dos termos numéricos apontada por Benacerraf.

Exemplos de formulações puramente categóricas de diversas noções matemáticas já haviam sido dadas antes mesmo que houvesse a noção de categoria abeliana e, portanto, antes que a autonomia da teoria das categorias estivesse consolidada. Na verdade, TGEN já continha algumas dessas formulações. Como dissemos no início deste capítulo, logo após a definição do próprio conceito de categoria, foi apresentado o conceito de um isomorfismo entre objetos de uma categoria. Toda noção introduzida somente em termos dos primitivos da teoria das categorias goza de algumas peculiaridades oportunas para o propósito de uma elaboração estruturalista da matemática. Se olharmos para as teorias de conjuntos mais tradicionais, notamos que pelo menos parte essencial das condições de identidade de conjuntos parecem ser fixadas pelo axioma da extensionalidade. Esse axioma se vale explicitamente da relação de pertencimento para asserir que se dois conjuntos A e B possuem exatamente os mesmos elementos, então eles são o mesmo conjunto. Em termos metafóricos, é como se a linguagem da teoria dos conjuntos nos permitisse "olhar dentro" de uma certa estrutura e identificá-la por meio da identidade de seus componentes internos. Já na linguagem da teoria das categorias, isso não é possível. Os primitivos dessa teoria não incluem, por si só, uma relação primitiva de "cópula" ou "pertencimento" que nos permita distinguir e falar sobre os elementos de um certo conjunto. Quando construímos um conceito dentro da linguagem categórica, nenhuma menção pode ser feita diretamente à "composição interna" dos objetos e morfismos envolvidos. Em vez disso, um objeto ou morfismo é caracterizado somente em termos das relações que ele mantém para com outros objetos e morfismos da mesma categoria. Essa é uma marca que distingue, por exemplo, a noção categórica de isomorfismo e a noção mais tradicional da teoria dos modelos que se serve do conceito de "bijeção", conceito esse que faz menção direta à composição interna dos conjuntos envolvidos. Outra importante característica dessas noções que gostaríamos de deixar enfatizado é que a formulação categórica de um conceito é uma espécie de *generalização*: um conceito que havia sido pensado para ser empregado sobre uma categoria de todos os conjuntos,

portanto, dentro de um contexto particular, é generalizado para poder ser empregado em qualquer outra categoria, seja ela um outro *topos* ou até mesmo outro tipo de categoria mais simples.

Ao longo da década de 1950, Mac Lane e outros matemáticos introduziram diversas construções, como produtos ou coprodutos, por meio de definições puramente categóricas. Grande parte dessas definições seguem um padrão geral em virtude do qual as chamamos de "construções universais", querendo dizer com isso que elas são apresentadas em termos de "propriedades universais". O uso sistemático e onipresente de construções feitas em termos das propriedades universais é fundamental para a afinidade que a teoria das categorias possui uma perspectiva estruturalista. Isso se deve ao fato de que, além das duas características que atribuímos há pouco a todas as noções categóricas, as propriedades universais satisfazem outras duas:

1) propriedades universais singularizam construções formais a menos de um isomorfismo, não distinguindo, portanto, entre construções estruturalmente equivalentes;

2) propriedades universais recebem esse nome por caracterizarem um objeto em termos das relações que ele possui para com *todos* os objetos de um mesmo universo.

É difícil especificar e entender o que é uma propriedade universal sem considerar os exemplos particulares de construções em termos dessas propriedades. Vamos expor alguns dos mais básicos dentre esses exemplos, considerar algumas de suas aplicações e interrelações. Em seguida, apresentamos um par de conceitos, duais entre si, que juntos capturam grande parte dos exemplos de construções feitas em termos de um morfismo universal: limites e colimites. Na prática, em termos informais não típicos da teoria das categorias, as construções que identificamos como *limites* são aquelas que resultam de escolher uma subcoleção de acordo com algum critério. Já colimites são aquelas que resultam de se agrupar elementos conjuntamente. Exemplos de limites e colimites são pervasivos em toda a matemática.

Vamos começar pelo par das duas mais simples construções universais: a de um objeto terminal e um objeto inicial. Um objeto T em uma categoria é chamado de um "*objeto terminal*", no caso de haver, para qualquer objeto A da categoria, um único morfismo $a: A \to T$. Objetos terminais são unicamente determinados a menos de um isomorfismo, ou seja, se T e T' são dois objetos terminais em uma mesma categoria, então existe um morfismo $f: T \to T'$ que é um isomorfismo. A prova dessa afirmação é bastante direta e simples. Por definição, um objeto T é terminal quando para todo objeto

X da categoria, existir um único morfismo $f: X \rightarrow T$. Suponhamos que haja *dois objetos terminais* A e B. Se ambos são terminais, então há um e apenas um único morfismo $g: A \rightarrow B$ e igualmente um único morfismo $h: B \rightarrow A$. Uma vez que g e h são morfismos em direções opostas, há um morfismo $g \circ h: B \rightarrow B$ e um morfismo $h \circ g: A \rightarrow A$. Uma vez que A seja terminal, por definição, o único morfismo $A \rightarrow A$ é o morfismo $Id(A)$. Uma vez que B seja terminal, por definição, o único morfismo $B \rightarrow B$ é o morfismo $Id(B)$. Portanto, temos que *g* é uma retração de *h*, ou seja, *h* é uma seção de *g*, já que $g \circ h = Id(B)$. Do mesmo modo, $h \circ g = Id(A)$ e, portanto, *h* é também uma retração de *g* e *g* uma seção de *h.* Se *g* e *h* são tanto uma seção quanto uma retração um do outro, segue-se que são inversas e, portanto, que os objetos *A* e *B* são isomorfos.

A noção de um objeto terminal em uma categoria desempenhará um papel extremamente importante na ideia de que a teoria das categorias é autônoma em relação às teorias de conjuntos mais tradicionais. O mais natural exemplar de um objeto terminal em uma categoria é um conjunto *qualquer* de um único elemento, que corresponde a um objeto terminal na categoria de todos os conjuntos. Por meio do conceito de "objeto terminal" provemos uma maneira de apontar para um conjunto de um único elemento tão somente em termos das funções que conectam o conjunto em questão com os outros conjuntos do universo. Lembre-se que, em teoria das categorias, a composição interna dos objetos matemáticos nunca é importante: tudo que importa é o que pode ser dito em termos de como o objeto se relaciona com os outros objetos no universo de todas as estruturas do mesmo tipo, e isso é dito em termos dos morfismos que os conectam e de como esses morfismos se comportam quando submetidos à operação de composição. As propriedades matemáticas relevantes de um conjunto se revelam por meio dos possíveis mapeamentos que o possuem como domínio e contradomínio. Como um simples exemplo, existe uma correspondência um a um entre todos os morfismos que saem de algum objeto terminal T em direção a um conjunto A e os elementos do próprio conjunto. Se eventualmente necessitarmos fazer alguma asserção sobre algum objeto $a \in A$ podemos formulá-la em termos do morfismo que mapeia o único elemento de um objeto terminal qualquer no elemento a. Mais do que isso, a expressão $a \in A$ pode ser interpretada como a asserção de que a é um morfismo que vai de algum objeto terminal para o objeto A. A ideia foi fundamental para a axiomatização da teoria da categoria de todos os conjuntos.

Mencionamos que, desde TGEN, é geralmente aceito que alguns exemplos de morfismos não são propriamente mapeamentos. Se "reinterpretarmos" a noção de "morfismo" e tratar a existência de um morfismo $f: A \rightarrow B$ como uma prova de uma relação R entre os objetos A e B, uma categoria passa a ser entendida como uma pré-ordem. Em termos do cálculo de predicados, uma pré-ordem é um conjunto de elementos organizados por uma relação de ordem R que é tanto reflexiva quanto transitiva. Note que o fato de que a relação R seja reflexiva se segue diretamente do axioma que diz que todo objeto em uma categoria possui um morfismo de identidade. Do mesmo modo, a transitividade se segue do fato de que a composta de dois morfismos tais que o domínio de um é o contradomínio de outro sempre existe. Nessa interpretação, um objeto terminal nada mais é do que o "último" elemento da ordem. Ou seja, é um objeto T tal que qualquer outro objeto A satisfaz $R(A, T)$.

A noção dual a de objeto terminal é conhecida como "objeto inicial". Um objeto inicial I é um objeto tal que para todo objeto A da categoria existe um único morfismo $f: I \rightarrow A$. Na categoria de todos os conjuntos, um objeto inicial é um conjunto I tal que para todo outro conjunto A existe uma única função que mapeia os elementos de I em A ou, o que significa o mesmo, é o conjunto vazio. Uma vez que a noção de objeto inicial é dual à noção de objeto terminal, e a de isomorfismo é dual a si mesma, pode-se facilmente provar que todo objeto inicial é isomorfo a qualquer outro objeto inicial, pela simples dualização da prova de que isso é válido para objetos terminais. Em uma pré-ordem, se um objeto inicial existe, ele é simplesmente o elemento inicial da ordem ou a classe de equivalência de todos os elementos iniciais.

Uma parte significativa das categorias possuem como objetos estruturas nas quais algum elemento específico desempenha um papel importante na caracterização dos homomorfismos entre aquelas estruturas. O caso mais simples desse tipo de categoria é a dos conjuntos pontuados. Um conjunto pontuado é uma estrutura que pode ser definida, em termos conjunto-teóriticos, como um par ordenado $\{X, x\}$ tal que X é um conjunto e x é algum elemento determinado do conjunto X. Um morfismo entre conjuntos pontuados $\{Y, y\}$ e $\{X, x\}$ é uma função $f: Y \rightarrow X$ que preserva o elemento pontuado. Em outros termos, que mapeia elementos de Y em elementos de X de tal maneira que o elemento pontuado y é sempre mapeado no elemento pontuado x. No caso dessas categorias, o objeto terminal e o objeto inicial coincidem entre si. Considere que o objeto terminal obviamente consiste no par $\{T, t\}$ onde T é algum conjunto de um único elemento e t é

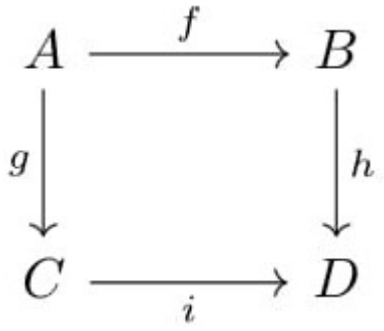
esse elemento. Como os morfismos da categoria devem respeitar o elemento "especial", não temos a liberdade de mapear o elemento t em qualquer elemento de outro conjunto, mas apenas no elemento "especial" do conjunto contradomínio. Portanto, existe um único morfismo do objeto terminal $\{T, t\}$ em qualquer outro objeto $\{X, x\}$. Nesse caso, chamamos o objeto $\{T, t\}$ de um "objeto zero". Esse tipo de categoria é importante porque categorias de estruturas algébricas são sempre casos particulares de categorias com objetos zero. Na categoria dos monoides e na categoria dos grupos o elemento distintivo que deve ser preservado é o elemento neutro para a operação binária que constitui a estrutura. Outras estruturas algébricas mais complexas, i.e., que possuem mais do que uma única operação (como um anel), podem ser formadas a partir de conjuntos com dois ou mais pontos distintivos $\{X, x1, x2\}$. Nesse caso, um morfismo entre $\{X, x1, x2\}$ e $\{X, y1, y2\}$ deve necessariamente mapear $x1$ em $y1$ e $x2$ em $y2$.

A conexão entre as noções de objeto "terminal" ou "inicial" e a noção de morfismo universal é um tema um pouco vacilante nas obras dos matemáticos. Acreditamos que a maneira que parece menos circular de introduzir o conceito de um morfismo universal é definir um objeto como "universal" quando ele é terminal ou inicial, e em seguida dizer que um morfismo é universal quando ele é um objeto universal em uma "categoria vírgula": um certo tipo de categoria cujos objetos representam morfismos de outra categoria. Assim como é possível introduzir o conceito de morfismo universal com as noções de "objeto terminal" ou "inicial", pode-se também fazer o caminho inverso: essas últimas noções também são os casos mais simples de construções feitas em termos de propriedades universais de morfismos.

Mais do que transcrever as definições mais comuns de propriedade universal, é iluminador examinar um caso especial bastante geral e penetrante, que pode também ser visto como uma maneira de se introduzir a maior parte das construções universais.

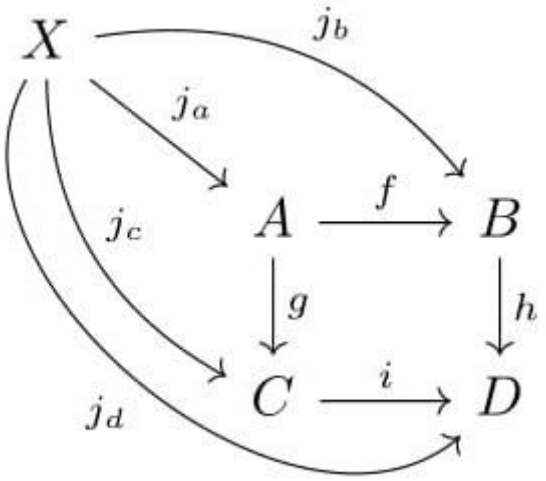
Intimamente conectado aos conceitos de *propriedade universal*, *diagrama comutativo* e de *transformação natural,* há o conceito de um *limite* para um diagrama. Informalmente, podemos dizer que um *diagrama* em uma categoria Φ é uma lista de objetos e uma lista de morfismos, tal que o domínio e o codomínio de todos os morfismos em questão estejam dentre a lista de objetos. É necessário deixar claro também que um mesmo objeto ou um mesmo morfismo pode aparecer duas ou mais vezes em um diagrama. Uma definição mais formal pode ser dada em termos de funtores. Para isso, precisamos selecionar especificamente alguma categoria pequena tal que todos os objetos

e morfismos da categoria possuam exatamente a mesma forma do diagrama pretendido. Chame essa categoria de Σ. Um diagrama J com a forma Σ dentro da categoria Φ é simplesmente algum funtor $J: \Sigma \rightarrow \Phi$. Usaremos a descrição intuitiva e apresentaremos os correspondentes em termos dos funtores. Vamos pensar em um diagrama simples com quatro sinais representando quatro objetos {A, B, C, D} e morfismos conectando esses objetos, de acordo com o seguinte diagrama:



Considere que os quatro morfismos de identidade de cada um dos objetos está implicitamente presente no diagrama. Nesse caso, ele pode ser tratado como um certo funtor J de uma categoria qualquer formada por quatro objetos A', B', C' e D', além de quatro morfismos $f': A' \rightarrow B'$, $g': A' \rightarrow C'$, $i': C' \rightarrow D'$ e $h': B' \rightarrow D'$ para a categoria na qual os quatro objetos e morfismos que aparecem no diagrama pertencem. Note que se o diagrama contivesse algum objeto duas vezes, a categoria de origem do funtor J teria que possuir algum objeto adicional para ser mapeado na segunda cópia do mesmo objeto da categoria na qual o diagrama será interpretado. O mesmo ocorre com morfismos.

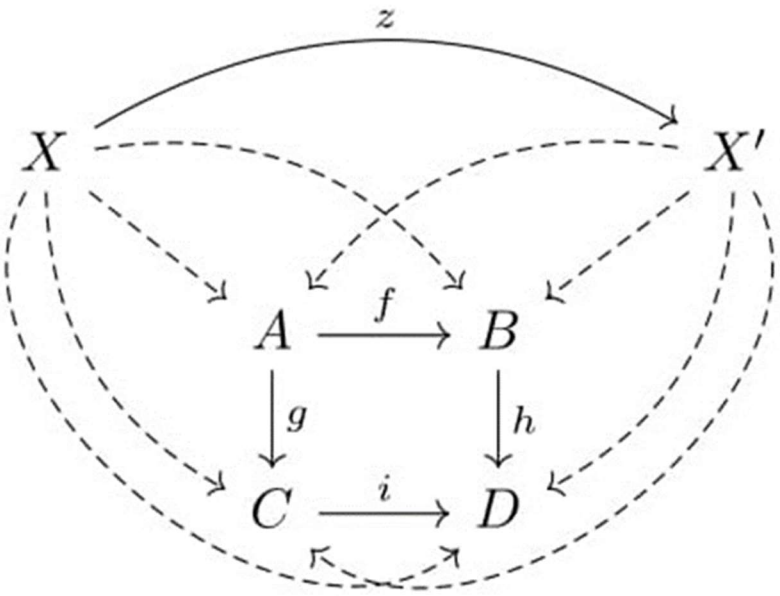
Um cone para o diagrama acima é um certo objeto X junto com uma família de morfismos $j_n: X \rightarrow N$ conectando o objeto X com cada um dos objetos do diagrama e fazendo o seguinte diagrama comutar:



Um funtor é chamado de "constante", no caso de ele mapear todo objeto da categoria de origem em um mesmo objeto na categoria de chegada e todo morfismo da categoria de origem no morfismo de identidade do objeto em questão. Do mesmo modo como falamos no funtor $J: \Sigma \rightarrow \Phi$ representando o diagrama do qual $\{X, j_n\}$ é um cone, podemos também falar no funtor constante $\Delta x: \Sigma \rightarrow \Phi$ que mapeia todos os objetos de Σ no objeto X e todos os morfismos no morfismo de identidade de X, que podemos chamar de Id_X. Dado esses termos, o cone pode agora ser visto como nada mais do que uma transformação natural entre os funtores $J: \Sigma \rightarrow \Phi$ e $\Delta x: \Sigma \rightarrow \Phi$. Os componentes da transformação natural são os morfismos j_n.

De acordo com a categoria com a qual estamos lidando, o diagrama formado pelos objetos A, B, C e D pode vir a ter uma infinidade de outros cones {X', j'$_n$}. Todos eles satisfazendo a condição de fazer o diagrama acima comutar, feitas as devidas substituições. Isso é equivalente a dizer que podem haver diversas funtores constantes $\Delta x: \Sigma \rightarrow \Phi$ tal que existe uma transformação natural $\Delta x \rightarrow J$. Considere que de fato exista um tal outro cone {X', j'$_n$}. Nesse caso, um morfismo $z: X \rightarrow X'$ é conhecido como um "morfismo de cones", se o seguinte diagrama comutar[40]:

[40] Ocultei os nomes dos morfismos para não poluir a imagem.



Tendo definido o que é um cone para nosso diagrama e o que é um morfismo para dois cones do mesmo diagrama, podemos falar na categoria de todos os cones para o diagrama {A, B, C, D}. Um objeto nessa categoria é um cone para o diagrama em questão. Um morfismo nessa categoria é um morfismo de cones satisfazendo o diagrama acima quando substituído pelo *z*. Agora, um limite para o diagrama {A, B, C, D} pode ser definido como um objeto terminal na categoria dos cones sobre esse diagrama. Em outros termos, o limite para o diagrama é um objeto X junto com uma lista de morfismos que possuem X como domínio e cada um possuindo como contradomínio algum objeto do diagrama. Todos os morfismos envolvidos devem comutar, ou seja, formar um cone no sentido preciso que definimos. Além disso, o limite deve satisfazer uma condição posterior: para qualquer outro objeto X' junto com uma lista de morfismos que possua X' como domínio satisfazendo a condição mencionada (ou seja, para qualquer cone) haja um único morfismo $u: X' \to X$ fazendo todos os morfismos envolvidos comutarem. O morfismo u conectando um limite com um outro cone para o diagrama é chamado de morfismo universal. Em termos funtoriais, a categoria de todos os cones para um diagrama é a categoria de todos os funtores constantes $\Delta x: \Sigma \to \Phi$ tal que exista uma transformação natural $\Delta x \to J$. O cone limite - ou simplesmente limite - é o funtor constante Δx satisfazendo a condição de que exista uma transformação natural $\Delta x \to J$, tal que exista uma única transformação natural $\Delta x \to \Delta x'$ para qualquer outro $\Delta x'$ com uma transformação natural $\Delta x' \to J$.

A noção dual à de limite é conhecida como "colimite". Ambas as noções capturam a ideia de escolher, dentre uma multiplicidade de possíveis soluções satisfazendo um certo padrão estrutural, aquela alternativa ou a classe de equivalência das alternativas adequadas a capturar uma certa noção. É comum que se diga que o limite ou colimite singularizam, a menos de um isomorfismo, o "melhor candidato" a satisfazer aquele conceito. Aquilo que realmente se quer dizer com o "melhor candidato", depende, na verdade, do contexto sobre o qual estamos falando. Em alguns casos, o limite para um diagrama é o conjunto ou estrutura com menos elementos, em outros com mais, às vezes é o mais simples, às vezes o que possui menos condições estruturais, etc.

Do mesmo jeito como as propriedades de ser um objeto inicial e a de ser um objeto terminal serviram para introduzir respectivamente a noção de limite e a de colimite, ambas essas noções são os mais simples exemplos de um limite e um colimite para um diagrama. Se o diagrama for vazio, i.e., não contiver nenhum objeto ou seta, então um limite para ele será um objeto qualquer da categoria tal que ele fatore unicamente por qualquer objeto da categoria. De forma inversa, o colimite desse diagrama será um objeto tal que qualquer objeto da categoria fatore unicamente por ele. Em outros termos, o limite para um diagrama vazio é um objeto terminal e o colimite para um diagrama vazio é um objeto inicial.

Outros exemplos de limites e colimites são abundantes na matemática. Construções tão importantes dentro da teoria dos conjuntos como produtos cartesianos, união disjunta, conjunto potência, o conjunto das funções de um conjunto A para outro conjunto B, dentre outras, correspondem precisamente a limites ou colimites dentro de uma categoria. Vamos tomar a noção de produto cartesiano como exemplo.

Em teorias de conjuntos mais tradicionais, um produto cartesiano $A \times B$ de dois conjuntos A e B é definido como o conjunto de todos os pares ordenados $< x, y >$ tal que $x \in A \, e \, y \in B$. Produtos cartesianos desempenham pelo menos dois papéis importantes: ser o domínio de operações binárias e viabilizar algumas caracterizações da operação de multiplicação sobre números naturais, quando esses são introduzidos como a cardinalidade de conjuntos.

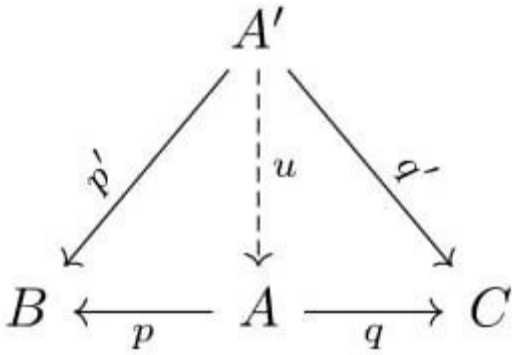
A noção categórica de "produto", que apresentaremos, generaliza a noção mais tradicional de um produto cartesiano. Vamos levar em conta que um produto cartesiano de dois conjuntos vem sempre acompanhado de duas funções $p: A \times B \rightarrow A$ e

$q: A \times B \rightarrow B$, conhecidas como "projeções" e que são tradicionalmente definidas como:

$$q(x, y) = y$$

$$p(x, y) = x$$

Levemos em consideração que um objeto A é tomado como um produto dos objetos B e C junto com um par de morfismos $p: A \rightarrow B$ e $q: A \rightarrow C$, chamados de "projeções". Uma certa tripla ordenada {A, p, q} é então dita ser um produto para B e C se, e somente se, para qualquer outra tripla {A', p', q'} tal que p': A' → B e q': A' → C houver um único morfismo u: A' → A, tal que $p \circ u = p'$ e $q \circ u = q'$ ou, o que significa o mesmo, fazendo o seguinte diagrama comutar:



Vamos prestar um pouco de atenção no que acabamos de fazer ao definir o conceito de produto categórico. Primeiro, estipulamos que deve haver cinco "elementos" relacionados de uma maneira específica: três objetos e dois morfismos tais que cada um vai do produto para um dos outros objetos. Aqui, prescrevemos um certo padrão estrutural. Satisfazer esse padrão estrutural é uma condição necessária para ser um produto. Mas, de fato, é perfeitamente possível que outras triplas de elementos também satisfaçam o mesmo padrão: pode haver outros objetos junto com pares de morfismos mapeando-os aos objetos cujo produto desejamos determinar. Adicionamos uma nova condição para garantir algo como uma unicidade - ou semiunicidade - para o produto: todo candidato $< A', p', q' >$ satisfazendo a condição necessária deve estar em uma certa relação com o objeto que é realmente o produto. Essa relação pode ser especificada como: existe um *morfismo universal* u de A' para o produto em termos do qual os morfismos p' e q' fatoram unicamente pelas projeções. Se estivermos pensando no exemplo de um produto cartesiano de dois conjuntos, especificar qual função é o morfismo universal u

de acordo com A', p' e q' é uma tarefa simples: u é a função que mapeia elementos x de A' no par ordenado $< p'(x), q'(x) >$ pertencente ao conjunto A (que é produto cartesiano de B e C).

Temos falado sobre como existe uma certa "correspondência" entre o conceito de produto cartesiano de dois conjuntos e o conceito mais abstrato de produto em uma categoria arbitrária, quando esse último é entendido no contexto da categoria dos conjuntos. Contudo, é crucial deixar claro que mesmo nesse contexto particular essa correspondência não é completa: a definição categórica de produto se aplica igualmente a qualquer objeto de uma classe de equivalência definida pela existência de isomorfismos. Para provar que quaisquer dois produtos A e A' de dois objetos B e C são isomorfos entre si basta mostrar como os dois morfismos universais que por definição conectam A e A' são dois isomorfismos, de tal maneira que um é a inversa do outro. Nos parágrafos seguintes apresentamos um exemplo de como isso pode ser feito.

Lembremos, a partir da definição acima, que se {A, p, q} é um produto de B e C, então para todo outro objeto X da mesma categoria com morfismos *f*: X → B e *g*: X → C existe um morfismo $h: X \to A$ por meio do qual *f* fatora sobre *p*, e *g* fatora sobre *q*, ou seja, $f = p \circ h$ e $g = q \circ h$. Ora, se A' junto com os morfismos p' e q' também constituem um produto de B e C, então eles formam um exemplo particular de uma tal tripla <X, *f*, *g*>. Se esse é o caso, existe, por definição, um morfismo *u*: A' → A tal que *p*'= $p \circ u$ e *q*'= $q \circ u$.

Além disso, uma vez que A também é um produto de B e C, deve existir um outro morfismo u': A → A' tal que *p*= $p' \circ u$ e q= q'∘ u. Sabendo que existem dois morfismos opostos *u* e *u'* conectando os objetos A e A' temos apenas que mostrar que eles são inversos um ao outro e, portanto, isomorfismos. Ou seja, temos que mostrar que $u \circ u' = Id(A)$ e $u' \circ u = Id(A')$.

Consideremos as quatro equações mencionadas acima que sabemos que são válidas por hipótese:

1) $p' = p \circ u$

2) $q' = q \circ u$

3) $p = p' \circ u'$

4) $q = q' \circ u'$

Vamos tomar a equação 4). Agora vamos substituir q' por "q ∘ u" de acordo com a equação 2). Temos:

$q = (q \circ u) \circ u'$, ou seja:

$$q = q \circ (u \circ u')$$

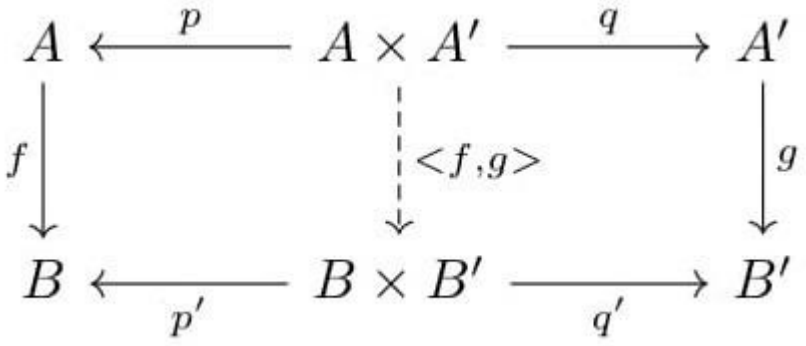
Por definição, um morfismo de identidade é um morfismo tal que é um elemento neutro para a operação de composição, e então temos que u ∘ u': A → A é o morfismo Id(A), e que, portanto, u é uma inversa à esquerda de u', já que $u \circ u' = Id(A)$. Tendo mostrado que u é uma retração de *u'*, para provar o isomorfismo entre A e A', temos apenas que mostrar que *u* também é uma seção de *u'*.

Vamos tomar a equação 2) e substituir q de acordo com a equação 4). Temos:

$$q' = q \circ u' \circ u$$

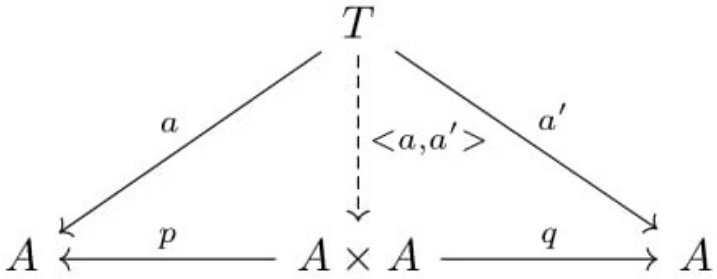
Por raciocínio análogo ao que foi feito acima, temos que u' ∘ u= Id(A'), e que, portanto, u também uma seção de u'. Logo, A é isomorfo a A'. Esse isomorfismo é garantido pelo fato de que os morfismos universais u e u' são inversos entre si.

A existência de produtos para quaisquer dois objetos em uma certa categoria induz a existência de certos morfismos entre esses produtos. Suponha dois objetos A e A', com algum produto qualquer desse objeto denotado por $A \times A'$ e dois outros objetos B e B' com o produto $B \times B'$. Para quaisquer dois morfismos $f: A \to B$ e $g: A' \to B'$, existe o morfismo $< f, g >: A \times A' \to B \times B'$ definido como o morfismo que faz o seguinte diagrama comutar:



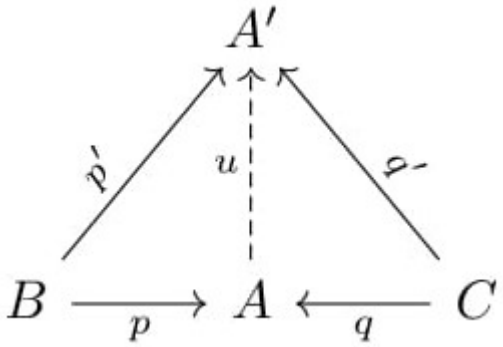
Da mesma maneira que, dado um objeto terminal T, podemos falar de qualquer elemento a pertencente a um objeto A como sendo um morfismo $a: T \to A$, dado qualquer outro morfismo $a': T \to A$ podemos falar de qualquer par ordenado $< a, a' >$ pertencente a $A \times A$ como sendo um morfismo $< a, a' >: T \to A \times A$. Tal morfismo é precisamente o morfismo universal que existe, por definição, de T para $A \times A$ em virtude do qual T não é o produto de A consigo próprio, mesmo possuindo morfismos "candidatos" a serem

projeções. Em outros termos, o par ordenado $< a, a' > \in A \times A$ é o morfismo fazendo o seguinte diagrama comutar:



O conceito de produto possui um importante conceito como seu dual. Podemos chamá-lo de "coproduto". Assim como o conceito de produto é um exemplo de limite, o conceito de coproduto é um caso especial de colimite. Intuitivamente, na categoria dos conjuntos, o coproduto ou soma de dois conjuntos A e B, denotado por $A + B$, é a união disjunta dos dois conjuntos. Ou seja, trata-se de um conjunto cuja cardinalidade é a soma da cardinalidade de A e da cardinalidade de B e cujos elementos são os elementos de A e os elementos de B de tal maneira que um elemento x que venha a ocorrer tanto em A quanto em B ocorre duas vezes no conjunto união. Se o leitor quiser fazer um sentido intuitivo da ideia, podemos imaginar o seguinte exemplo. Suponha que lidamos com o conjunto $A_0 = \{4, 5, 7\}$ e com um conjunto $A_1 = \{4, 6, 7\}$. Antes de construirmos o conjunto $A_0 + A_1$ temos que construir os conjuntos indexados $A_0^* = \{<4,0>, <5,0>, <7,0>\}$ e $A_1^* = \{<4,1>, <6,1>, <7,1>\}$. Agora podemos definir $A_0 + A_1$ como o conjunto união de A_0^* e A_1^*.

Do mesmo jeito que a existência do produto $A \times B$ dependia da existência de duas projeções $p: A \times B \to A$ e $q: A \times B \to B$, a existência do coproduto $A + B$ depende da existência das injeções $p: A \to A + B$ e $q: B \to A + B$ que mapeiam elementos de A e de B em seus elementos correspondentes em $A + B$. Para obter a definição categórica de coproduto, precisamos apenas inverter a direção de todas as setas na definição de produto. Assim sendo, uma certa tripla ordenada {A, *p*, *q*} é dita ser um produto para B e C se, e somente se, para qualquer outra tripla {A', *p'*, *q'*} tal que *p'*: B' → A' e *q'*: C → A' houver um único morfismo *u*: A → A', tal que $u \circ p = p'$ e $u \circ q = q'$ ou, o que significa o mesmo, fazendo o seguinte diagrama comutar:



Uma vez que a noção de coproduto resulta da dualização da de produto, a prova de que quaisquer coprodutos de um par ordenado de dois objetos em uma categoria são isomorfos entre si resulta da simples inversão das setas na prova dessa propriedade para a noção de produto. Também é possível mostrar que ambas as noções são "quase-associativas", no sentido de que as seguintes afirmações são válidas:

$$((A \times B) \times C) \cong A \times (B \times C)$$
$$((A + B) + C) \cong A + (B + C)$$

Quando consideramos as operações de soma e produto como funtores, nos damos conta de que esses isomorfismos são isomorfismos naturais.

Pode-se também provar alguns isomorfismos interessantes envolvendo todas as noções que mencionamos. Se B é um objeto terminal, e A um objeto qualquer, então o produto $A \times B$, se for existente, é isomorfo ao próprio A. De forma dual, se B é um objeto inicial, a soma $A + B$ é isomorfo ao próprio A.

No início desta seção, falamos sobre como a elaboração de uma definição da estrutura abstrata de uma certa construção por meio da linguagem categórica possuía também a vantagem de generalizar o conceito, permitindo aplicações diversas daquelas que são permitidas pelo conceito original (muitas vezes definido em termos da teoria dos conjuntos). Algumas vezes, é apenas uma questão de evitar a proliferação indevida de noções que possuem um núcleo essencial comum, i.e., que são exemplos particulares de uma mesma propriedade universal aplicada em um contexto diferente. Assim, não é necessário, por exemplo, especificar uma noção de produto cartesiano entre dois conjuntos e, em seguida, utilizá-la para introduzir uma noção de produto direto de duas estruturas algébricas; uma noção de produto entre dois espaços topológicos, etc. Essas diferentes noções de produto emergem naturalmente da aplicação da propriedade universal às diferentes categorias. Outras vezes, contudo, trata-se de reconhecer pela

primeira vez que certas noções resultam de uma mesma construção universal, iluminando assim algo sobre a conexão que elas possuem com os conceitos cuja subsunção a uma propriedade universal era óbvia. A conjunção entre duas proposições no cálculo proposicional, um predicado complexo que resulta da conjunção de outros dois predicados, o maior divisor comum entre dois números, a interseção entre dois conjuntos, o resultado da multiplicação entre dois naturais; todos esses conceitos são também casos especiais de produtos entre dois objetos em uma categoria e para demonstrá-lo bastaria encontrar, caso a caso, a categoria apropriada. A propriedade universal do produto, tal como a caracterizamos, é aquilo que todas essas noções possuem em comum.

Sobre a definição abstrata de produto, Awodey faz uma interessante afirmação relacionada ao tema geral desta tese:

> A definição[...] provê uma caracterização estrutural uniforme de um produto de dois objetos em termos de suas relações para outros objetos e morfismos em uma categoria, em contraste com as definições 'materiais' conjunto-teóricas que dependem de fatores específicos, frequentemente irrelevantes, dos objetos envolvidos, introduzindo estrutura adicional indesejada. De fato, é exatamente esse aspecto material da teoria dos conjuntos que dá origem a tais pseudoproblemas como se o número 1 é 'realmente' o conjunto {0} ou se os números reais são 'realmente' cortes nos racionais. (Awodey, 1996, p. 220, tradução minha)

A mesma afirmação é válida, obviamente, para a definição de coproduto e as outras construções universais. Elas são todas caracterizações estruturais feitas em termos das relações que uma enupla de elementos (i.e., um aglomerado de objetos e morfismos) possui para com todos os objetos e morfismos da mesma categoria. Por contraste com essas construções, aquelas que são feitas em termos das teorias de conjuntos mais tradicionais, se valem de propriedades internas dos conjuntos, que frequentemente não são pertinentes ou relevantes para a área da matemática envolvida. Essas propriedades "indesejadas" permitem fazer distinções entre construções matemáticas estruturalmente equivalentes e assim criam o problema de se fixar qual seria a verdadeira referência dos conceitos que estão sendo definidos, dentre uma infinidade de opções igualmente aceitáveis por princípio.

2.4 A construção universal dos naturais

Ao longo das duas seções passadas viemos discutindo conceitos conexos ao de *propriedade universal*. Nossa alegação principal é a de que o uso de propriedades

universais para identificar construções matemáticas é central à afinidade que a teoria das categorias possui com uma abordagem estruturalista da matemática. Tendo falado sobre o conceito geral de propriedade universal, queremos, agora, focar em apresentar uma construção universal específica: a de um objeto de números naturais em uma categoria. Mas antes, vamos responder à seguinte questão: o que é que está sendo solicitado quando pedimos uma construção universal de um objeto dos números naturais?

A resposta é: a construção universal especifica uma certa construção que se "comporta como" um conjunto de números naturais. Em um certo sentido, podemos dizer que a construção universal nada mais é do que uma definição precisa do que significa "se comportar como um conjunto de números naturais *em uma categoria*". A locução "em uma categoria" deixa claro que "comportamento" aqui coincide com os possíveis mapeamentos que envolvem esse objeto, mais especificamente, com as equações satisfeitas por esses mapeamentos quando sujeitos a composição. Então, queremos descrever, somente em termos categórico-teóricos, como é que um sistema precisa poder ser mapeado em outros a fim de poder ser visto como um sistema de números naturais. Construir um diagrama formal contendo um morfismo universal não é a única maneira de fazê-lo. Em geral, propriedades universais admitem algo como uma "leitura intuitiva e informal" que não depende especificamente da linguagem da teoria das categorias. Por isso, antes de entrar em detalhes sobre a definição formal e categórica da construção universal dos naturais, iremos falar intuitivamente sobre como é que os naturais podem ser mapeados em outros sistemas das nossas linguagens.

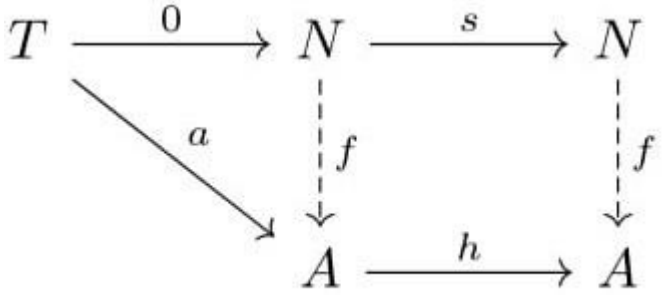
As linguagens costumam ser repletas de expressões que resultam de aplicações iterativas de uma mesma operação: tomamos um objeto base, submetemo-lo a uma certa operação e aplicamos ao resultado novamente a mesma operação. Quando lidamos com a linguagem corrente, muitas vezes as operações podem não possuir um domínio muito bem definido. Mas quando estamos lidando com a teoria das categorias ou algumas outras linguagens formais com gramáticas mais rigorosas, uma operação só pode ser composta consigo própria no caso de seu domínio e contradomínio coincidirem. Nos termos da teoria das categorias, quando aplicamos recursivamente uma operação estamos lidando com um objeto A e um (endo)morfismo $h\colon A \to A$ que mapeia qualquer elemento $x \in A$ em algum $h(x) \in A$. Como consequência da exigência axiomática de que, se o domínio de um morfismo é o contradomínio de outro então a composta deve necessariamente existir, podemos sempre falar no morfismo que resulta de aplicar h n vezes, sendo n

qualquer número natural. Se tomarmos qualquer elemento arbitrário a pertencente a A, com isso teremos definido uma série cujo elemento inicial é a, seguido por $h(a)$, $h(h(a))$, $h(h(h(a)))$, e assim por diante.

A fim de evitar o inconveniente de repetir a letra "h" quantas vezes desejarmos aplicar a operação correspondente, podemos adotar a seguinte notação: $h^0(a)$, $h^1(a)$, $h^2(a)$, $h^3(a)$... Quando fazemos uso dos naturais como expoentes da operação h conforme acabamos de fazer, na prática, estamos pressupondo uma função f que mapeia um número natural n em algum elemento de A de tal maneira que se 0 é mapeado em a, 1 é mapeado em $h(a)$, 2 é mapeado em $h(h(a))$ e assim por diante. Esse mapeamento "ordena" os elementos de A em função da operação h e do elemento inicial a. Mas o conjunto dos naturais é o único conjunto que pode ser mapeado em A dessa forma? Isso depende da "identidade particular" de a, A e h. Não queremos dizer que dependa necessariamente de propriedades internas não estruturais desses elementos, mas fundamentalmente das propriedades equacionais da operação h. Quantos elementos a série formada pelas reiterações de h sobre a possui? O número de elementos dessa série depende da verdade e falsidade de sentenças como $h(a) = h(h(a))$. Mesmo se o conjunto A possuir tantos elementos quanto forem os números naturais, ainda assim, pode ser o caso que a operação h defina algum ciclo finito de elementos a partir de a, e esse ciclo finito é definido sobre algum subconjunto de A. Nesse caso, qualquer conjunto X que possua pelo menos tantos elementos x quantos forem os elementos desse ciclo finito pode ser mapeado em A de tal maneira que x seja mapeado em a, algum x' diferente de x em $h(a)$, e assim por diante. Se h induz algum ciclo finito, então uma quantidade finita de correspondências de elementos x em elementos a já fixa de uma vez por todas as correspondências entre as expressões $h^n(a)$ e os elementos x. Esse mapeamento também é responsável por induzir uma estrutura de ordenação nos elementos x, já que podemos passar a falar no *primeiro* elemento de X como o elemento que foi mapeado em a, no segundo como o elemento mapeado em $h(a)$, etc. Todavia, um conjunto X não pode ser usado para *assim* mapear algum subconjunto de A se esse subconjunto possuir mais elementos do que X. Desse modo, desde que estejamos falando de conjuntos X de cardinalidade finita, sempre poderá haver progressões de uma cardinalidade tal que o conjunto X é incapaz de ser empregado para enumerar cada elemento da progressão. Daí se segue que apenas um conjunto infinito pode ser usado para enumerar todas as possíveis progressões.

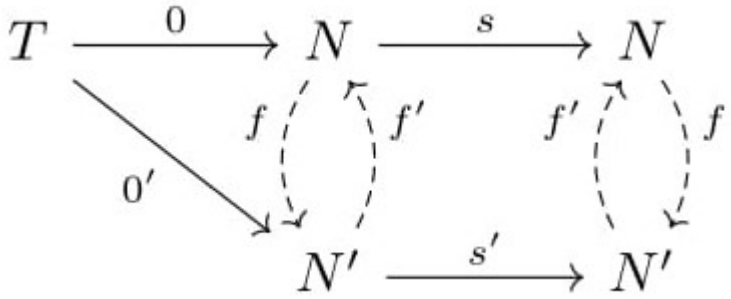
Desde que estejamos em um contexto no qual qualquer mapeamento arbitrário conte como um morfismo bem definido, o sistema dos números naturais pode ser distinguido, a menos de um isomorfismo, como aquele que possui exatamente a cardinalidade que é necessária e suficiente para enumerar *todas* as possíveis progressões $< A, h, a >$, e nada mais. O que precisamos responder agora é: como essa característica distintiva pode ser colocada em termos de uma construção universal?

Uma vez que iremos necessitar indicar algum elemento distintivo 0 pertencente ao objeto dos números naturais e um elemento inicial a para progressões $< A, h, a >$, precisaremos da noção de um *objeto terminal*. O primeiro natural, zero, é tratado como um morfismo que possua como domínio qualquer objeto terminal T e como contradomínio o objeto dos naturais N que pretendemos identificar, ou seja, $0: T \rightarrow N$. A operação de sucessão, que ordena os naturais, é um endomorfismo sobre N, ou seja, um morfismo $s: N \rightarrow N$. Agora, coloquemos a questão: como a tripla $< N, s, 0 >$ pode ser distinguida de outras triplas $< A, h, a >$ tais que $a: T \rightarrow A$ e $h: A \rightarrow A$? Ou seja: como a progressão dos naturais sobre a operação de sucessão a partir de 0 pode ser distinguida de outras progressões? O objeto N junto com s e 0 é o único, a menos de um isomorfismo, tal que para todo outro objeto A junto com morfismos h e a existe um único mapeamento $f: N \rightarrow A$ que *preserva o elemento inicial e a ordenação*. Dizer que o mapeamento f preserva o elemento inicial é dizer que $f(0) = a$ ou, na notação categórica típica, $f \circ 0 = a$. Dizer que preserva a ordenação é dizer que $f(s(x)) = h(f(x))$, ou $f \circ s = h \circ f$. Em suma, a tripla $< N, s, 0 >$ é aquela que faz o seguinte diagrama comutar, para quaisquer triplas $< A, h, a >$:



Suponha que existe uma outra tripla $< N', s', 0' >$ satisfazendo a mesma propriedade indicada pelo diagrama acima, substituindo $< N, s, 0 >$. Por hipótese, do fato de que as duas triplas satisfazem a propriedade acima, se segue que existe um único morfismo universal $f: N \rightarrow N'$ fazendo o diagrama acima comutar, substituindo-se $< A, h, a >$ por $< N', s', 0' >$. Além disso, deve haver também um único morfismo universal

$f: N' \to N$ tal que $f' \circ 0' = 0$ e $f' \circ s' = s \circ f'$. Em outros termos, dados dois objetos de números naturais $< N', s', 0' >$ e $< N, s, 0 >$ deve existir um par de morfismos $<f, f' >$ fazendo o seguinte diagrama comutar:



O fato de que N e N' sejam isomorfos é consequência de que os morfismos universais f e f' sejam um a inversa do outro. A despeito de qualquer prova formal construída algebricamente, esse enunciado é intuitivamente evidente. O morfismo f mapeia 0 em 0', e todo sucessor de $n \in N$ em um $f(s(n)) \in N'$. O morfismo f' "desfaz" essa operação, mapeando 0' em 0 e todo sucessor $n' \in N'$ em $f'\big(s'(n')\big) \in N$.

Também é possível demonstrar que qualquer outro objeto A isomorfo a um objeto N de números naturais é necessariamente um objeto de números naturais. Nesse caso, o próprio isomorfismo $f: N \to A$, que existe por hipótese, pode ser usado para determinar o elemento inicial de A, que será dado pelo morfismo $f \circ 0: T \to A$. Para determinar a operação de sucessão h: $A \to A$, precisaremos do morfismo f^{-1}. Essa operação será dada por $f \circ s \circ f^{-1}$. O morfismo universal $A \to A'$ que precisa mapear A em qualquer A' (com um morfismo $T \to A$ e outro morfismo $A \to A$) também pode ser construído como a composição do isomorfismo $f^{-1}: A \to N$ e do morfismo universal $u: N \to A'$. Em resumo, os morfismos cuja existência tornam um certo N em um objeto dos naturais, junto com algum isomorfismo de N para outro objeto A qualquer, contêm todos os dados necessários para se construir morfismos que tornam A igualmente em um objeto dos naturais.

Uma estranheza pode-se fazer notar. Havíamos observado que todo conceito definido em termos de teoria das categorias goza de uma generalidade especial: ele pode ser aplicado em diferentes contextos, i.e. diferentes categorias, com alguma variação de conteúdo enquanto conserva a mesma forma, que é aquilo que a definição em termos da teoria das categorias pode exprimir. Um isomorfismo, na categoria dos conjuntos, é o mesmo que uma função bijetiva e está intimamente conectado com a relação de

equinumerosidade. Na categoria dos conjuntos, existe um isomorfismo entre dois objetos A e B se, e somente se, eles possuem a mesma quantidade de elementos. Mas, se o sistema dos naturais possui a mesma cardinalidade dos inteiros e dos racionais, como é que podemos distingui-los desses outros sistemas numéricos? Na verdade, desde que só levemos em consideração os critérios de equivalência associados à categoria dos conjuntos, de fato não *podemos*. É possível ir além do conceito de um objeto dos números naturais e definir os conceitos de um "objeto dos inteiros" e de um "objeto dos racionais". Como um mapeamento não precisa preservar nenhum tipo de estrutura para poder ser um legítimo morfismo na categoria dos conjuntos, essa categoria contém morfismos suficientes para que, com uma certa dose de engenhosidade, consiga-se construir isomorfismos mostrando que objetos dos naturais, dos inteiros e dos racionais são equivalentes *nessa categoria*. A construção desses isomorfismos pode simplesmente imitar as já tradicionais bijeções que são usadas para demonstrar que o conjunto dos inteiros e o dos racionais são enumeráveis.

Em outras categorias mais interessantes, impomos sobre os morfismos exigências adicionais que correspondem a certas estruturas (algébrica, topológica, de ordem, etc) que permanecem invariantes ao longo do morfismo. Essas exigências adicionais restringem quais mapeamentos contam como morfismos da categoria em questão e assim limitam quais isomorfismos podem ser construídos, além de mudar a relação de equivalência correspondente ao isomorfismo. Como resultado, em diversas categorias não é possível construir um isomorfismo entre um objeto dos naturais e, por exemplo, um objeto dos racionais. Em outros termos, de fato existem maneiras de mapear injetivamente os naturais nos inteiros ou nos racionais, mas esses mapeamentos não necessariamente preservam continuidade, ordem ou estruturas algébricas.

A propriedade universal pode ser expressa mais explicitamente como uma propriedade *Natural*(N, s, 0) de uma tripla $< N, s, 0 >$ ou, o que significa o mesmo, uma relação ternária entre um objeto N e dois morfismos s e 0 da seguinte maneira:

$$Natural(N,s,0) \coloneqq (s\colon N \to N) \ \wedge \ \exists\, T, 0 \left(\left(Terminal\ (T)\right) \wedge (0\colon T \to N) \wedge \left(\forall N', s', 0' \left(\left((s'\colon N' \to N') \wedge \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. (0'\colon T \to N')\right) \Rightarrow \left(\exists!\, u\colon N \to N' \left(\left((u \circ 0) = 0' \right) \wedge \left((u \circ s) = (s' \circ u) \right) \right) \right) \right) \right)$$

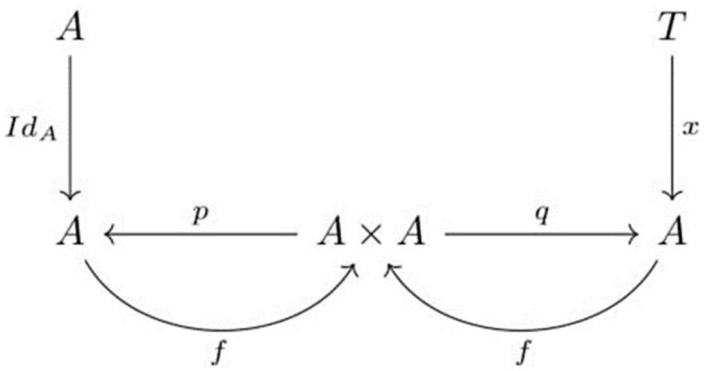
Uma vez que tenhamos definido a propriedade *Natural* (N, s, 0) podemos expressar sentenças aritméticas por meio de sentenças puramente gerais, à maneira do

que no capítulo anterior denominamos de “universalismo”, sem mudanças formais muito drásticas em relação às sentenças analisadas que mostramos naquele contexto. Assim, a sentença $1 \neq 2$ poderia ser expressa como:

$$\forall N, s, 0 \left(\left(Natural\langle N, s, 0\rangle \Rightarrow s \circ 0 \neq s \circ (s \circ 0) \right) \right)$$

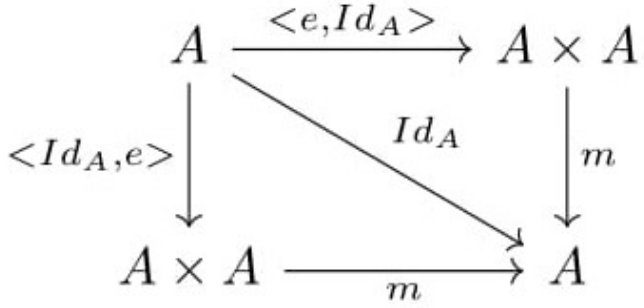
Obviamente, não são apenas as operações de sucessão e o elemento 0 que admitem ser introduzidos em termos de morfismos de uma categoria. Para completar essa análise, seria necessário introduzir as outras operações da aritmética. Introduzir, por exemplo, a operação de soma entre naturais, nesse contexto, é especificar o que significa dizer de uma certa operação m que ela atua como uma operação de soma para um determinado objeto dos naturais $\langle N, s, 0\rangle$. Essa é uma relação entre quatro elementos: um morfismo *m* e os três termos que especificam um objeto de números naturais; e poderá ser lida como “o morfismo *m* é uma operação de soma para o objeto de números naturais $\langle N, s, 0\rangle$”.

A fim de ser uma soma para $\langle N, s, 0\rangle$ o domínio de m deve ser algum $N \times N$, ou seja, um produto de N consigo mesmo. O contradomínio de m deve ser o próprio N. Feitas essas especificações, as tradicionais definições recursivas de soma podem ser adaptadas para a linguagem da teoria das categorias. Primeiramente precisamos especificar que zero é um elemento neutro para a operação de soma, ou seja, qualquer número somado a zero resulta no próprio número. Para fazê-lo, precisamos definir o que significa dizer de um morfismo $f: A \to A \times A$ que ele é o morfismo $< Id(A), x >$ para algum objeto A e um elemento $x \in A$, ou seja, o morfismo que mapeia algum elemento a ∈ A no par ordenado <a, x>, onde x é um valor constante. Dado um certo objeto terminal T e sendo p e q as projeções de $A \times A$, podemos dizer que *f* é tal morfismo no caso de o seguinte diagrama comutar:



A noção similar de um morfismo $< x, Id(A) >$ para um produto $A \times A$ e um objeto terminal T resulta de permutações óbvias na parte superior do diagrama acima.

Tendo especificado o que são morfismos $< x, Id(A) >$ e $< Id(A), x >$ podemos finalmente explicitar o que significa dizer que um elemento $e: T \to A$ é um elemento neutro (tanto à esquerda quanto à direita) de uma operação $m: A \to A \times A$. Significa que o seguinte diagrama é comutativo:



Lembre-se que quaisquer dois elementos x e y pertencentes a um objeto dos naturais N podem ser vistos como morfismos $T \to N$. A existência de ambos os morfismos induz a existência de um morfismo $< x, y > : T \to N \times N$, correspondendo ao par ordenado de naturais $< x, y >$. A fim de completar a especificação da operação de soma, dizemos que um morfismo m para ser a soma para um objeto dos naturais deve satisfazer a seguinte equação para quaisquer pares de naturais $< x, y >$, tratados como um morfismo $T \to N \times N$:

$$m \circ (< x, s \circ y >) = s \circ m \circ < x, y >$$

As explicações acima podem ser usadas para definir explicitamente uma relação quaternária $sum(m, N, s, 0)$ asserindo que o morfismo m é uma operação de soma para $< N, s, 0 >$. Depois dessa definição, pode-se propor que a afirmação de que dois mais dois é quatro seja expressa, com as devidas abreviações, da seguinte forma:

$$\forall N, s, 0 \left(\left(Natural\langle N, s, 0\rangle \right.\right.$$
$$\left.\left. \Rightarrow \exists m\big(sum(m, N, s, 0) \wedge (m \circ \langle s \circ s \circ 0, s \circ s \circ 0\rangle = s \circ s \circ s \circ 0)\big)\right)\right)$$

Portanto, a aritmética pode, nos seus aspectos mais essenciais, ser incorporada à teoria das categorias. A disponibilidade da aritmética na linguagem interna de uma categoria depende da existência, interna à categoria, de um objeto dos números naturais. A asserção de que um tal objeto existe é algo como uma versão categórica do axioma do infinito. Esse "axioma" pode ser afirmado no contexto da linguagem interna de uma certa

categoria específica. Nesse caso, ele consiste em uma afirmação que diz de uma certa categoria particular que ela possui um objeto satisfazendo uma certa propriedade universal. Mas ele também pode aparecer como um dentre uma lista de axiomas estruturais classificando categorias pelas suas propriedades comuns; nesse último caso, o axioma que atua como uma nota definitória de um conceito que determina uma espécie definida de categoria. Esse é o modo como a afirmação aparece, por exemplo, dentro da definição do conceito geral de *topos*.

A aritmética *interna* de uma categoria não é a única maneira de expressar sentenças aritméticas por meio da linguagem da teoria das categorias. Por meio das paráfrases de $1 \neq 2$ e $2 + 2 = 4$ que fizemos acima tentamos mostrar que a notação da teoria das categorias parece tão compatível com aquilo que chamamos, no primeiro capítulo, de formulações universalistas da aritmética quanto qualquer outra notação. Nessas paráfrases, a fórmula resultante é uma asserção puramente geral que estabelece que uma certa equação é válida para quaisquer triplas <N, s, 0> que satisfazem a propriedade universal dos naturais. Algumas frases com essa forma geral asserem condições que dependem tão somente da propriedade universal, sendo, portanto, invariavelmente verdadeiras para qualquer categoria. Outras frases análogas poderiam asserir condições que só seriam válidas sob a pressuposição de que outras condições que não dependem propriamente do objeto universal sejam. Essas últimas podem ser válidas ou não, a depender da categoria na qual são interpretadas.

O propósito dessa seção foi fazer um esforço para deixar bem delineado que a linguagem da teoria das categorias, apesar de possuir restrições significativas em seu poder expressivo, permite a reconstrução das sentenças da aritmética ordinária. Quando apresentou a teoria elementar da categoria dos conjuntos, Lawvere mostrou que a afirmação de que existe um objeto dos naturais, junto com os outros axiomas dessa categoria, permite que se derive uma versão categórica dos mesmos axiomas de Peano. Veremos no início do próximo capítulo que essa ideia protagonizou o que acreditamos ser a primeira afirmação explícita de que teoria das categorias possui algo a ver com aquilo que vinha sendo chamado de “estruturalismo” em filosofia da matemática.

2.5 Teoria das categorias e álgebra universal

A relação entre teoria das categorias e álgebra abstrata é notavelmente multifacetada, na medida em que podemos olhar para essa relação por uma grande diversidade de perspectivas diferentes. Axiomas gerais para a teoria das categorias - ou mesmo axiomas que caracterizam espécies determinadas de categorias - possuem uma nítida semelhança para com axiomas de teorias algébricas tradicionais. Essa semelhança consiste não apenas no fato de que todos esses sistemas são "estruturais", no sentido que definimos no primeiro capítulo, mas também no fato de que eles compartilham - ou podem compartilhar - os mesmos primitivos: composição de operações e identidade. Quando consideramos as teorias algébricas mais tradicionais, é bastante óbvio que os termos envolvidos (operação, coleção, composição, etc) devem ser fornecidos por um arcabouço conceitual anterior e não podem ser fornecidos pelos próprios axiomas da teoria. No caso da teoria das categorias, esse tema é objeto de controvérsia e, na verdade, é parte fundamental do núcleo dos debates envolvendo a autonomia da teoria das categorias, sobre os quais falaremos em detalhes no capítulo seguinte.

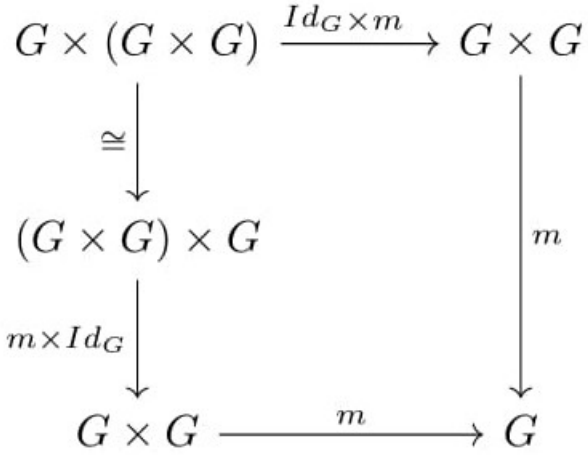
Para sermos precisos, a conexão entre categorias e álgebras é ainda mais íntima: algumas das mais fundamentais estruturas algébricas são elas mesmas casos específicos de categorias. Um monoide pode ser descrito como uma categoria na qual existe um único objeto. Nesse caso, os elementos do monoide são os endomorfismos do objeto em questão e a operação de multiplicação do monoide é a própria composição dos morfismos. Qualquer funtor entre duas categorias que satisfaçam a descrição acima em questão equivale a um homomorfismo de monoides. Adicionando a exigência de que todo morfismo na categoria seja um isomorfismo, temos a ideia de que cada elemento do monoide possui o seu inverso para a multiplicação e falamos, portanto, de um grupo. Uma vez que as adequadas generalizações em termos da teoria das categorias sejam feitas, pode-se fornecer versões categóricas dos tradicionais teoremas das teorias algébricas e, em alguns casos, prover formulações universais para teoremas que possuem versões análogas em diversas teorias algébricas[41].

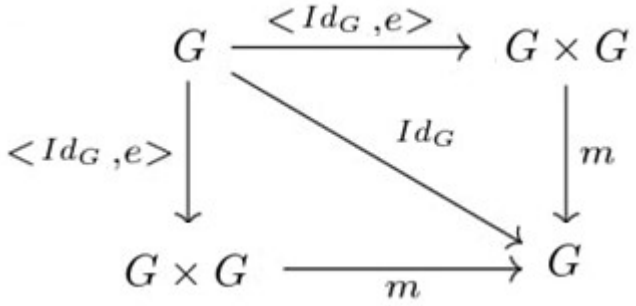
Além do fato de que estruturas algébricas muito importantes são casos especiais de categorias, outro aspecto da relação entre teoria das categorias e teorias algébricas emerge naturalmente quando consideramos o seguinte: álgebras particulares podem ser construídas a partir de morfismos e objetos internos a uma dada categoria. Dado uma

[41] A título de exemplo, pode-se consultar uma formulação abstrata do teorema fundamental dos homomorfismos em Awodey, 2006, p.71-73.

certa teoria algébrica, por exemplo a teoria dos monoides, podemos introduzir o conceito puramente categórico de um "monoide dentro de uma categoria" por meio de uma adequada paráfrase dos axiomas dessa teoria. Essa definição pode ser formulada da maneira que faremos nos parágrafos seguintes.

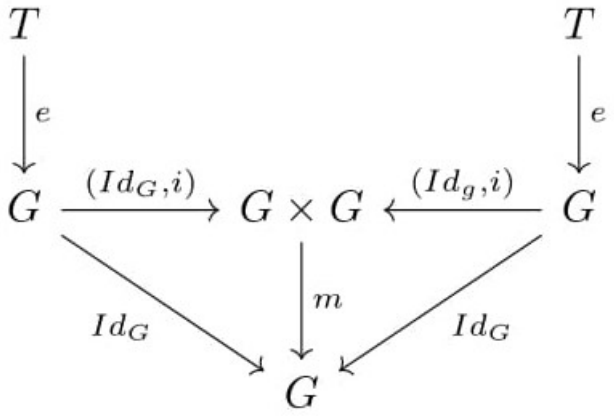
Um monoide em uma categoria é um objeto G, junto com dois morfismos $< m, e >$ tais que $m: G \times G \to G$; $e: T \to G$ satisfazendo os seguintes diagramas:



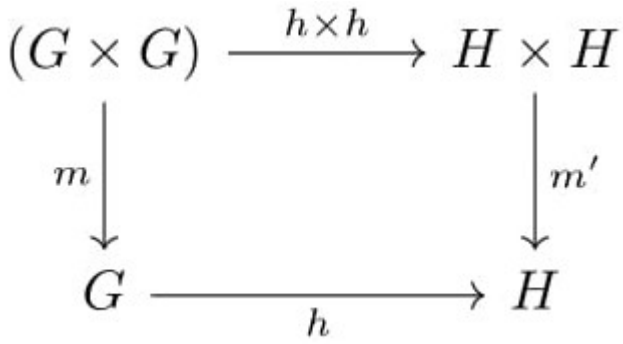


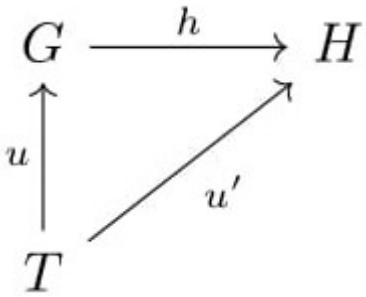
Em outros termos, m é uma operação binária associativa que mapeia dois elementos x e $y \in G$ em um terceiro elemento de G; e é um elemento neutro para m, i.e, um morfismo de um objeto terminal da categoria em G tal que $m \circ < Id_G, e > = Id_G$ e $< Id_G, e > \circ\ m\ = Id_G$.

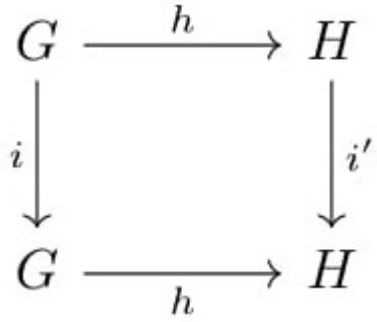
Para obter o conceito de um grupo em uma categoria, basta adicionarmos a exigência de que exista um endomorfismo $i: G \to G$ mapeando elementos de G em seus elementos inversos para a operação m, ou seja, satisfazendo o seguinte diagrama:



Tendo definido o conceito de uma álgebra de um determinado tipo dentro de uma categoria, podemos também introduzir o de um homomorfismo entre duas álgebras desse tipo para caracterizar os morfismos das categorias que satisfaçam as propriedades requeridas. Assim, um homomorfismo entre dois grupos $< G, m, i, u >$ e $< H, m', i', u' >$ pode ser conceituado como um morfismo h: $G \rightarrow H$ que preserve a operação m, a unidade u e as inversas. O que significa o mesmo que os seguintes diagramas, respectivamente, comutarem:







As noções apresentadas acima podem ser vistas como um tipo de generalização das noções familiares de "grupo" e de um "homomorfismo entre grupos", na medida em que diferentes tipos de grupos com estrutura adicional resultam de se "coletar" grupos dentro de diferentes categorias. Assim, um grupo de Lie, por exemplo, é um grupo na categoria de todos as variedades diferenciáveis, um grupo topológico é um grupo na categoria de todos os espaços topológicos, e assim por diante. Sobre essa perspectiva, Awodey diz:

> Em termos lógicos, de acordo com esse ponto de vista, pode-se "modelar a teoria dos grupos" em qualquer categoria com produtos finitos, não apenas *Sets* [nome próprio da categoria de todos os conjuntos]. É claro que o mesmo é verdadeiro para outras teorias — como monoides e anéis— dadas por operações e equações. Então, por exemplo, pode-se também definir a noção de um grupo no cálculo lambda, já que a categoria de tipos do cálculo lambda também possui produtos finitos. Teorias envolvendo outras operações lógicas como quantificadores também podem ser modeladas em categorias tendo mais estrutura do que apenas produtos finitos. Aqui temos um vislumbre da assim chamada semântica categórica. Tal semântica pode ser útil para teorias que não são completas com respeito a modelos em Sets, tal como certas teorias na lógica intuicionista. (Awodey, 1996, p. 68, tradução minha)

Dado uma certa teoria algébrica e uma certa categoria Φ, pode-se falar na categoria de todas as álgebras em Φ satisfazendo a teoria, desde que a categoria Φ possua a estrutura mínima requerida. *Grosso modo*, essa categoria é como uma categoria de todos os "modelos" de uma certa teoria algébrica, com a ressalva de que não se trata de todos os modelos em geral, mas apenas dos modelos em um certo "universo" de domínios e mapeamentos. Pode-se colocar, portanto, a seguinte questão: tal "modelagem" de uma teoria dentro de uma categoria deve ser pensada nos mesmos termos das teorias de modelos tradicionais que empregam teorias de conjuntos?

Comecei o primeiro capítulo da presente tese caracterizando o uso que a palavra "estrutura" possuiria no interior da teoria dos modelos. Em resumo, a teoria dos modelos trata os axiomas estruturais da matemática ordinária ao modo que temos denominado

"formalista". Para a teoria dos modelos, teorias matemáticas são vistas como compostas de sentenças não interpretadas expressas em uma linguagem *puramente* formal. Em uma etapa posterior à expressão dos axiomas, interpretações das teorias são dadas em termos de construções importadas de uma teoria dos conjuntos que é assumida como plano de fundo. Tais interpretações são denominadas "modelos de uma teoria" e também "estruturas da linguagem na qual a teoria é escrita". Também mencionei que era característico dessa abordagem semântica a atribuição de uma assimetria entre as proposições das teorias formais e da teoria de conjuntos. Em contraste com as sentenças formais das teorias estruturais, as sentenças da teoria de conjuntos seriam entendidas assertoricamente como verdades que descrevem o universo de todos os conjuntos ou, pelo menos, a hierarquia cumulativa dos conjuntos puros. Pode-se indagar se essa assimetria é essencial à teoria dos modelos ou puramente acidental, mas sua presença é nítida nas mais tradicionais obras sobre o assunto. Essa abordagem semântica é aplicada não só para as teorias algébricas, mas também às outras teorias cuja linguagem formal contém símbolos como relações e propriedades.

Um campo de estudos intimamente conectado com teoria dos modelos é a chamada álgebra universal. Álgebra universal é a área da matemática que estuda teorias algébricas gerais por si mesmas e não exemplos particulares, possuindo como um de seus objetivos extrair, quando possível, os elementos comuns de vários tipos de estruturas algébricas aparentemente distintas ou estabelecer conexões entre diferentes tipos de teorias algébricas. Ao realizar esse objetivo, introduz-se "novos conceitos, construções e resultados gerais que generalizam e unificam as situações específicas já conhecidas"[42]. A definição geral de uma teoria algébrica que viemos mencionando informalmente desde o início dessa tese pertence a tal campo de estudos. Em uma de suas mais famosas caracterizações, a teoria dos modelos foi descrita como sendo nada mais do que "álgebra universal mais lógica", querendo dizer com isso que, na álgebra universal, estudamos os modelos para teorias algébricas, mas sem levar diretamente em conta as linguagens formais, e que estudar os modelos na medida em que são interpretações para essas linguagens é precisamente o tema da teoria dos modelos.

William Lawvere apresentou um entendimento da semântica de uma teoria que difere das teorias de modelos tradicionais principalmente por ser baseado na teoria das categorias. Essa maneira de se analisar a semântica, chamada de "semântica funtorial",

[42] Sankappavanar e Burris1981, p.25.

iniciou exatamente como uma nova proposta de fundamentos para a álgebra universal. Como elemento pivotal dessa semântica temos a noção de uma *teoria de Lawvere* que resulta da categorificação da definição mais tradicional de uma teoria algébrica. A construção é bastante similar ao conceito de um "clone" para uma teoria algébrica que encontramos nos manuais tradicionais de álgebra universal e, na verdade é, em algum sentido, equivalente.

Uma dada teoria algébrica pode ser apresentada como uma assinatura (a lista dos símbolos não lógicos que compõem a teoria) e uma lista de axiomas formulados em termo dos símbolos da assinatura. É um fato bem conhecido que é possível que tanto a assinatura quanto os axiomas possam variar e, ainda assim, determinar uma mesma teoria, *em algum sentido*. Por exemplo, a teoria dos grupos é muitas vezes formulada por meio de uma assinatura com três elementos: uma operação binária $x \cdot y$ que consiste na multiplicação do grupo, um símbolo constante e, que designa o elemento neutro da multiplicação, e uma operação unária x^{-1} que mapeia um elemento em seu elemento inverso (i.e., mapeia um elemento a em um elemento b tal que $a \cdot b = e \wedge b \cdot a = e$). Mas ela pode também ser formulada apenas com a operação de multiplicação, desde que os axiomas sejam modificados para estabelecerem a existência do elemento neutro e do inverso sem o uso de constantes. Uma atitude possível diante desse fato é clamar que existem múltiplas teorias dos grupos que apesar de não serem idênticas seriam equivalentes *em algum sentido*. Outra atitude possível é formular uma noção de "teoria dos grupos" que permanece invariante ao longo de diferentes escolhas arbitrárias de assinatura ou axiomas. Essa última atitude é a que Lawvere adotou. Então, em algum sentido, pode-se distinguir entre teorias equacionais e uma teoria de Lawvere, nos seguintes termos:

> Teorias equacionais são uma forma de representação de teorias de Lawvere (ou de clones): toda teoria equacional determina uma teoria de Lawvere e toda teoria de Lawvere é determinada por uma classe infinita de teorias equacionais, isto é, por aquelas teorias equacionais para as quais ela é essencialmente o clone. (Hyland; Power, 2007,p.438, tradução minha)

Lawvere apresentou uma definição estrutural que caracteriza a noção geral de uma categoria que pode ser considerada ela mesma *uma teoria algébrica* e não meramente uma álgebra particular. Dessa perspectiva, uma teoria algébrica é uma categoria Σ cujos objetos formam uma lista ordenada $\{A^0, A^1, A^2, \dots A^n\}$. Cada objeto A^n é um *produto* do objeto A^1 consigo mesmo n vezes. Portanto, existem morfismos de projeção $\pi_i^n: A^n \rightarrow A^1$, para $i = 0, 1, \dots, n-1$. O objeto A^0 é um objeto terminal da categoria, o que significa que para todo objeto A da categoria existe um único morfismo $f: A \rightarrow A^0$.

Essas condições estruturais apenas especificam os traços gerais comuns a qualquer teoria algébrica. Tal definição *estrutural* do conceito geral de uma teoria algébrica é sugerida pelo próprio Lawvere em alguns de seus artigos. Mas sua definição original, presente na tese de 1963, e a que é mais frequentemente empregada na literatura consiste em uma descrição de como se construir a categoria das estruturas algébricas como uma subcategoria dos conjuntos finitos, que, por sua vez, seria um objeto na categoria de todas as categorias. A construção pode assim ser resumida:

1) Tome a categoria de todos os conjuntos finitos, cujos objetos são esses conjuntos e cujos morfismos são funções arbitrárias entre tais conjuntos;

2) Obtenha uma categoria F que é um esqueleto da categoria dos conjuntos finitos. Um esqueleto de uma categoria Φ é alguma subcategoria de Φ que contém apenas um exemplar de cada classe de objetos isomorfos. Em geral, qualquer esqueleto de uma categoria é equivalente a outro e também à própria categoria que foi usada para construir o esqueleto.

3) Agora, uma teoria de Lawvere pode ser entendida como uma categoria L tal que existe um funtor $G: F^{op} \rightarrow L$ que é uma correspondência um a um entre objetos (algumas definições afirmam que é uma identidade) e que preserva coprodutos.

A categoria F^{op} assim construída é como uma "instância ideal" do conceito de uma teoria de Lawvere, sendo a categoria trivial que contém tão somente aquelas propriedades que uma categoria deve ter para satisfazer o conceito. Uma categoria pode passar a ser definida como uma teoria de Lawvere se ela puder "incluir" a categoria F^{op} pela existência de um funtor preservando a estrutura relevante, a saber, os produtos.

A totalidade das teorias de Lawvere, por sua vez, também forma uma categoria que possui tais teorias como objetos e funtores entre tais teorias preservando a estrutura relevante como morfismos. Tais funtores representam as "interpretações" de uma teoria algébrica em outra, como quando "esquecemos" as inversas e tratamos a operação de multiplicação de um grupo como uma multiplicação de monoide. Uma vez que existe um funtor identidade da categoria F^{op} para si mesma, temos que ela é um objeto da categoria de todas as teorias algébricas. Ela é um objeto inicial na categoria e representa o caso limite trivial de uma teoria que não contém nenhuma operação. Adicionando a essa categoria morfismos adicionais, obtemos as outras teorias algébricas menos triviais.

Tendo efetivamente construído uma teoria algébrica como uma categoria ϕ, podemos conceber os modelos da teoria como os funtores F que podem ser construídos

mapeando a categoria em questão em uma outra categoria χ, de tal modo que os produtos sejam preservados. Os homomorfismos entre tais modelos passam a ser vistos como sendo simplesmente as transformações naturais entre tais funtores. A categoria de todos os funtores ϕ para uma outra categoria χ dada, junto com as transformações naturais entre os funtores $\phi \rightarrow \chi$, é equivalente à categoria de todas as álgebras do tipo ϕ em χ. Uma vez que nada nos obriga a escolher uma categoria de conjuntos como χ, pode-se substituir a categoria dos conjuntos por qualquer outra categoria satisfazendo as condições adequadas. A escolha da categoria de "ambiente" produz diferentes noções que compartilham uma forma comum. Assim, um grupo usual é um grupo na categoria dos conjuntos, um grupo finito é um grupo na categoria dos conjuntos finitos, um grupo de Lie é um grupo na categoria das variedades diferenciáveis, um grupo contínuo é um grupo na categoria dos espaços topológicos, etc.

2.6 Considerações finais do capítulo

Nosso objetivo nessas partes finais do capítulo foi tentar defender que as limitações impostas na linguagem da teoria das categorias exercem um efeito muito menos paralisante na atividade matemática do que poderia ser inicialmente cogitado. Propriedades universais podem ser usadas para definir diferentes sistemas de números e assim reconstruir as sentenças aritméticas tanto na linguagem interna de uma certa categoria, quanto "em abstrato" por meio de sentenças puramente genéricas que se aplicam a quaisquer categorias satisfazendo as condições adequadas. É importante notar que essa recuperação da aritmética, por ser baseada em uma propriedade universal, não faz menção a elementos internos de um domínio dos naturais que seriam independentemente identificáveis.

A relação entre teoria das categorias e teorias algébricas pode ser encarada de diferentes pontos de vista. Grande parte das mais importantes estruturas podem ser introduzidas diretamente como categorias de uma certa espécie. Dado uma certa teoria algébrica, pode-se também explorar as propriedades da categoria de todos os modelos da teoria. A expressão "modelos de uma teoria" ganhou um sentido categórico independente das teorias de modelos através da semântica funtorial. Dentro dessa semântica, estruturas particulares satisfazendo uma teoria são vistas como funtores que mapeiam uma certa categoria com propriedades P em outras categorias, preservando as propriedades P. À primeira vista, o procedimento pode parecer radicalmente diferente do empregado nas teorias de modelos tradicionais, já que as estruturas são vistas como sendo elas mesmas mapeamentos. Mas, com efeito, se introduzirmos um conceito de "imagem de um funtor", notamos que as imagens dos funtores usados na semântica funtorial correspondem às

estruturas, em algum sentido muito próximo do das teorias de modelos tradicionais. O mesmo procedimento pode ser empregado em outros tipos de teorias axiomáticas, colocando em questão se a semântica funtorial poderia ou não substituir as teorias de modelos em literalmente todas as áreas da matemática.

O quão prolífera uma categoria pode ser enquanto um cenário abstrato permitindo o desenvolvimento da matemática pode chegar ainda mais longe. Pela introdução das propriedades universais adequadas pode-se definir categorias capazes de incluir toda a lógica de ordem superior, com quantificadores e até mesmo com o operador lambda. Uma categoria que inclui todas essas estruturas é chamada de um "topos". A linguagem interna de um topos é uma teoria de tipos. Uma vez que uma teoria de tipos é uma proposta de fundamentos para a matemática, pode-se colocar em questão o que é que a teoria das categorias poderia necessitar que deveria vir de fora? Ela precisa de fato ser fundamentada em uma teoria não categórica dos conjuntos ou em alguma teoria de tipos introduzida por outro meio que não por um topos?

Os desenvolvimentos supracitados - e outros que não tivemos a oportunidade de mencionar - tornaram minimamente plausível que se defenda que a teoria das categorias deixou de ser uma mera linguagem acessória e passou a ser uma maneira alternativa e inteiramente autônoma de se conduzir a matemática, com sua própria linguagem e com seus próprios métodos. Temos também tentado defender que essa linguagem e esses métodos tornam essa maneira paradigmaticamente estruturalista.

3. Teoria das categorias como framework autônomo

No capítulo anterior, fizemos uma descrição, talvez um pouco genérica demais, da origem da teoria das categorias e de alguns desenvolvimentos posteriores. Nessa descrição, apresentamos alguns aspectos que historicamente motivaram aqueles que trabalham com a teoria a propor três pontos que estão, de algum modo, entrelaçados. São esses:

1- A teoria das categorias é autônoma;

2- A teoria das categorias fornece fundamentos para a matemática;
3- A linguagem e os métodos da teoria a tornam especialmente adequada para uma matemática estruturalista.

Ao longo deste capítulo pretendemos fornecer uma análise de alguns dos principais argumentos que foram oferecidos contra as asserções acima. Podemos adiantar que pretendemos mostrar que, na melhor das hipóteses, esses argumentos se baseiam em pontos de vista idiossincráticos que não precisam ser endossados. Muitas vezes, a teoria das categorias está, na verdade, em iguais condições para lidar com o problema em relação às outras alternativas fundacionais, como as teorias de conjuntos.

É possível conjugar as três afirmações acima mencionadas na forma de uma única tese segundo a qual a teoria forneceria fundamentos autônomos para a matemática estruturalista. Mas é particularmente iluminador distinguir com clareza esses três pontos e classificar os argumentos contra essa tese única em virtude de qual é exatamente o ponto que o argumento ataca. O exame dos argumentos disponíveis na literatura mostra que o assentimento ou dissentimento a um desses pontos não precisa implicar imediatamente assentimento ou dissentimento para os outros. Assumiremos aqui que a asserção 3 é logicamente independente das outras duas, sendo possível entender que a teoria possui algo como um "sabor" particularmente estruturalista, ou seja, que ela é uma ferramenta conceitual útil para caracterizar estrutura abstrata, sem que necessariamente se acredite que ela possa subsistir por si mesma ou fornecer fundamentos para toda a matemática. A importância em reconhecer essa independência se deve ao fato de que essa crença parece ser bem difundida entre estruturalistas que rejeitam as teses 1 e 2.

Além disso, Rodin (2011) fornece uma interessante defesa da teoria das categorias que afirma que ela é autônoma e é fonte de fundamentos para a matemática; mas não é propriamente estruturalista, demandando, na verdade, algo como uma filosofia "pós-estruturalista" da matemática para ser adequadamente apreciada. Ataques à asserção 3 também foram feitos por aqueles que defendem que uma teoria homotópica de tipos junto com um axioma de univalência é mais particularmente adequada como *framework* para a matemática estruturalista[43].

Os pontos 1 e 2 foram ambos sugeridos de forma explícita ainda na década de 60. Desde então, alguns obstáculos têm sido apresentados àqueles que desejam endossar essas afirmações. No capítulo que se segue abordaremos o que acreditamos ser as principais

[43] Tsementzis (2017).

objeções à autonomia da teoria das categorias e, consequentemente, a qualquer projeto *fundacionalista* baseado nela.

Dado a influência que esses argumentos tiveram nas discussões posteriores, consideramos as objeções de Geofrey Hellman à aplicação da teoria das categorias como um *framework* para o estruturalismo particularmente relevantes. Analisamos essas objeções, dividindo-as em três pontos principais na seção 3.5. É importante destacarmos os pressupostos subjacentes a cada um desses três pontos.

Primeiramente, Hellman reitera a objeção levantada por Solomon Feferman ao projeto de fundamentar a matemática em uma teoria da categoria de todas as categorias. A objeção gira em torno da ideia de que o papel central de uma proposta fundacional seria explicar as noções de "classe" e de "operação sobre classes". Mas a teoria das categorias não poderia fazê-lo, já que ela pressuporia uma noção de "classe" e uma noção de "operação" anterior em termos das quais a noção de "categoria" é explicada. Um contra-argumento comum a essa objeção consiste em alegar que teorias fundacionais escritas na linguagem da teoria das categorias não dependem de fato da própria noção de categoria sendo, portanto, teorias das classes e das operações em igualdade de condições em relação a outras teorias tradicionais de conjuntos ou tipos para fins de prover um fundamento para a matemática. Essa afirmação é baseada no fato de que a menção explícita a uma definição do conceito de "categoria" antes da introdução de uma teoria fundacional categórica não passa de um mero acidente formal que pode ser contornado, tal como efetivamente o foi em pelo menos algumas das formulações que Lawvere propôs para a teoria da categoria de todos os conjuntos ou a de todas as categorias. Em resumo, o fato de que uma categoria possa ser definida como uma classe equipada com certas operações não faz com que uma teoria das classes e das operações formulada em termos dos primitivos categóricos seja circular, já que essas teorias não dependem logicamente do conceito de "categoria".

Mesmo que um tal contra-argumento possa ser suficiente para rejeitar a objeção, acreditamos que existam razões ainda mais fundamentais para não aceitar a tese que Feferman defende. Um estruturalista pode rejeitar a ideia de que a noção de "classe desestruturada" e "de uma operação arbitrária" entre tais classes seja conceitualmente anterior ao próprio conceito de estrutura. Essa pressuposição é naturalmente sugerida pela maneira como teorias de modelo lidam com o conceito de "estrutura", introduzindo-as em termos de conjuntos. Entretanto, a teoria das categorias sugere que em vez de ser definicionalmente anterior ao conceito de "estrutura", entendendo esse último como equivalente ao conceito de um objeto em uma categoria, o conceito de conjunto é na

verdade um caso limite. *Grosso modo*, a teoria de conjuntos, em sua formulação categórica, lida com estruturas abstratas de um ponto de vista no qual se abstraiu das outras propriedades que não a quantidade de elementos da estrutura. Isso pode ser verificado pelo fato de que a categoria de todos os conjuntos é uma categoria particular, mais especificamente um topos, conectada às tradicionais categorias de objetos estruturados por funtores de esquecimento. Do ponto de vista da matemática categórica, a relação entre um grupo e um monoide, por exemplo, é análoga à que existe entre um monoide e um conjunto. Tomamos um grupo, esquecemos parte de sua estrutura e o consideramos enquanto monoide. Depois esquecemos o máximo o possível de estrutura e o consideramos enquanto conjunto. Portanto, um "objeto na categoria dos conjuntos" não é uma coisa fundamental que precisa ser elucidada antes que se possa definir estruturas matemáticas e sim essa *estrutura mínima,* mera quantidade, que é preservada por qualquer função bijetiva arbitrária entre dois objetos matemáticos. Esses dois últimos parágrafos são melhor explicados ao longo da seção 3.5.1.

A segunda objeção proposta por Hellman é de que parece duvidoso que matemática desenvolvida em termos categóricos seja conceitualmente compreensível sem que se faça referência a alguma teoria de conjuntos mais "intuitiva" em termos das quais as abstratas construções categóricas possam ser explicadas, exemplificadas e entendidas. Mesmo que construções matemáticas sejam feitas tão somente a partir de primitivos categóricos, essas construções por vezes apenas "imitam" aquelas que são tradicionalmente feitas em teorias de conjuntos. Aqui, concordamos com McLarty: não é justificável dizer que construções feitas com classes introduzidas à maneira categórica são meras imitações conceitualmente incompreensíveis sem referência a um conceito de classe externo que deveria ser introduzido por uma teoria ortodoxa de conjuntos ou algo parecido. Construções em termos da teoria da categoria de todos os conjuntos, por exemplo, são tão similares a construções de outras teorias de conjuntos porque a teoria formulada à maneira categórica é *tão teoria de conjuntos* quanto qualquer outra formulada em termos da relação de "cópula". Matemáticos empregando a teoria das categorias podem perfeitamente exemplificar ou definir suas construções em termos "conjuntísticos" e, quando chamados a definir o que está se entendendo por "conjunto", alegar que entende simplesmente como um objeto dentro da categoria dos conjuntos.

A terceira e última objeção, que acreditamos ser a mais filosoficamente significativa, é o que Hellman denomina de "problema do endereço residencial". A pressuposição operante aqui é a de que questões de existência matemática devem ser

absolutamente decididas. Um framework autônomo para a matemática deveria decidir por si mesmo, para cada questão existencial, se o objeto matemático pretendido existe ou não. Se um sistema formal, por exemplo, não puder fazê-lo, significa que ele precisa apelar a algum panorama externo capaz de decidir a questão e, portanto, que não é autônomo no fim das contas. Uma vez que os axiomas da teoria das categorias, - e outros axiomas para categorias particulares - devem ser lidos algebricamente como estipulações dos critérios que algo deve satisfazer para poder ser chamado de "categoria" - ou de "topos" por exemplo - a teoria das categorias não poderia decidir quais estruturas matemáticas existem. Na melhor das hipóteses, ela poderia prover asserções condicionais que dizem alguma asserção da forma "em uma categoria com tais e tais características existem objetos e morfismos satisfazendo tais e tais propriedades". Mas se não estivermos dispostos a subscrever ao dedutivismo, não é satisfatório nos contentarmos apenas com afirmações condicionais.

Tal problema admite pelo menos duas soluções. Podemos escolher conceder que decidir questões existenciais na matemática é crucial, mantendo uma perspectiva fundacionalista e realista. A proposta feita por McLarty segue essa linha. Ela é fundamentalmente baseada no fato de que os axiomas de qualquer teoria podem ser entendidos de duas maneiras. Podem ser tratados como definições estruturais que estipulam as condições para que uma certa construção matemática satisfaça um certo conceito, mas podem também ser lidos diretamente como verdades sobre certos objetos matemáticos. Assim, conjuntos seriam objetos reais e tanto a teoria elementar da categoria dos conjuntos quanto, por exemplo, a teoria axiomática de Zermelo-Fraenkel seriam tentativas distintas de descrever o universo desses objetos. Afirmações similares valeriam para as demais áreas da matemática.

Contudo, podemos tomar um outro caminho para rejeitar o problema. Esse caminho passa pelo reconhecimento de que a necessidade de se decidir questões existenciais só faria sentido dentro de uma visão do conhecimento matemático inteiramente distinta daquela que a matemática desenvolvida na linguagem da teoria das categorias parece sugerir. Típico de um ponto de vista fundacionalista é começar por uma ontologia de objetos básicos com propriedades determinadas e ir passo a passo construindo os objetos matemáticos de interesse em termos tais objetos básicos. Conceitos estruturais são posteriormente introduzidos como uma maneira de se agrupar essas construções em virtude de uma forma comum. Dessa perspectiva uma das questões mais fundamentais a serem respondidas certamente é: "Quais são os objetos básicos que

existem?". Porém, a perspectiva que seria típica da teoria das categorias nega que exista propriamente uma ontologia de objetos fundamentais ou, pelo menos, possibilita que a matemática seja desenvolvida sem qualquer referência a uma tal ontologia. O desenvolvimento de uma certa disciplina matemática começaria pela apresentação dos conceitos mais gerais: os primitivos da teoria das categorias, o conceito de "categoria", o de "funtor" e o de uma "transformação natural entre dois funtores". Categorias cada vez mais específicas podem vir a ser definidas até o nível de especificidade necessário em um certo contexto. Mas não haveria necessidade de tomar nenhuma decisão sobre se as estruturas assim definidas devem ser interpretadas como se aplicando a objetos particulares fornecidos por alguma teoria fundacional.

Além disso, acreditamos que a variedade das respostas mostra a capacidade da teoria das categorias de se adaptar a diferentes perspectivas filosóficas e servir como ponto de convergência para defensores de visões distintas sobre a natureza da matemática. Isso será evidenciado pela comparação das reações de defensores e oponentes do fundacionalismo, particularmente representados por McLarty e Awodey, às objeções.

3.1 Fundamentos categóricos e conjuntísticos

É comum que se faça uma oposição entre fundamentos categóricos de um lado e conjutísticos de outro. Contudo, a primeira proposta de fundamentos para a matemática baseada em teoria das categorias a ser *oficialmente publicada* é precisamente uma proposta de uma teoria dos conjuntos, apesar da teoria da categoria de todas as categorias ter sido formulada um ano antes. Lawvere, o autor da primeira versão de ambas as teorias, observa que seu objetivo inicial com a teoria elementar da categoria dos conjuntos era substituir a teoria tradicional de ZF para "fins puramente didáticos" por uma "teoria axiomática das operações e conceitos matemáticos (composição, funcionais, etc) tal como realmente necessários ao desenvolvimento da matemática"[44].

À parte desse possível uso didático, que Lawvere sugere, podemos nos perguntar quais são os papéis usualmente atribuídos às teorias de conjuntos tradicionais e nos perguntarmos se uma teoria categórica poderia consistir em uma alternativa real. A teoria dos modelos atribui à teoria de conjuntos um *papel semântico* de fornecer as possíveis

[44] Cf. Lawvere 2005, p.5.

interpretações para as linguagens formais. Esse papel semântico pode ser visto como um dos aspectos que se quer capturar quando se diz que a teoria serve de fundamentos para a matemática. Mas existem outros aspectos dessa mesma afirmação, e não é uma tarefa fácil enumerar sistematicamente todos eles e elucidar como eles se relacionariam.

No primeiro capítulo, propusemos uma explicação de uma posição denominada "fundacionalismo" dentro do contexto de debates sobre epistemologia. Dentro dessa perspectiva, "fundamentos" se identifica com uma lista de asserções básicas dotadas de propriedades epistêmicas privilegiadas a partir das quais seria possível derivar todo o conhecimento ou pelo menos alguma área particular de estudo. Desde lá, levantamos alguns problemas que emergiriam caso alguém tente propor que uma teoria de conjuntos seja fundamento para a matemática nesse sentido epistêmico. Alguns axiomas dessas teorias podem ser razoavelmente entendidos como expressando teses definidas sobre assuntos que foram objeto de debate e controvérsia há séculos, fazendo com que não possam ser ditos "autoevidentes" de forma verossímil. Apesar disso, ainda encontramos filósofos defendendo que a teoria dos conjuntos serve como esse tipo de fundamento. De forma mais sofisticada e plausível, também encontramos a já mencionada proposta de que alguns axiomas se justificariam intrinsecamente com base em propriedades epistêmicas ao passo que outros são justificados externamente com base em sua capacidade de organizar a matemática.

Em contraste com esse papel epistêmico, existem aqueles que defendem que na verdade os axiomas são escolhidos principalmente em função da sua capacidade de organizar a maioria das proposições da matemática - ou de um pelo menos de um de seus diversos ramos - em umas poucas asserções, que seriam mais ou menos escolhidas com algo de "arbitrariedade". Quer dizer, seriam escolhidas precisamente por servir melhor ao propósito organizacional de reduzir as provas matemáticas a poucas premissas e não por serem "verdades imediatamente acessíveis". Então, podemos falar em um papel organizacional efetivado pela redução da matemática - ou de alguma área específica dela - a poucos princípios básicos. A discussão ao longo do capítulo que se segue deve tornar óbvio que defensores da autonomia da teoria das categorias tendem a ver a axiomatização como uma questão puramente organizacional, ao passo que aqueles que rejeitam essa autonomia demonstram requerer fundamentos com objetivos epistêmicos.

Algumas vezes, teoria dos conjuntos é também dita consistir em algo como uma *ontologia* para a matemática. Essa maneira de falar é um pouco enganadora. O que uma teoria de conjuntos tem a dizer sobre existência no contexto matemático não pode ser

descrito como propriamente *ontologia* no sentido que filósofos empregariam esse termo. Teorias de conjuntos lidam com o problema da existência em matemática no sentido de fixar critérios para decidir asserções existenciais. O axioma do par, por exemplo, pode ser usado para justificar inferências da forma "dados dois objetos x e y existe um conjunto $\{x, y\}$". Mas essa regra geral não nos dá nenhum *insight* filosófico que nos leve a compreender melhor em que propriamente consiste a existência de um par de objetos (se é que esse tipo de questão deve de fato ser levantada). Algum filósofo poderia, por exemplo, achar interessante se perguntar se um par $\{x, y\}$ existe como um objeto real independente dos objetos x e y ou se o par é meramente uma construção mental a partir desses objetos. Parece bastante duvidoso que os axiomas de uma teoria de conjuntos possam ajudar a decidir a resposta a essa pergunta. Prestar atenção nessa capacidade da teoria de conjuntos de fixar regras para inferências existenciais é importante para nossos propósitos. Como veremos na seção 3.5.3, dificuldades para a aptidão da teoria das categorias em cumprir satisfatoriamente o mesmo papel foram levantadas como um desafio para sua capacidade de servir de *framework* autônomo para a matemática estruturalista.

Teoria dos conjuntos também desempenha algo que podemos chamar de um papel unificador. Ela provê conceitos básicos a partir dos quais pode-se definir os conceitos a serem empregados nas diversas áreas da matemática. Desse modo, ela pode ser dita prover algo como uma linguagem universal para a matemática.

Todos esses papéis parecem de alguma maneira se entrelaçar para cumprir um *papel prático* de servir como uma espécie de solo comum ao qual diferentes matemáticos podem recorrer em situações nas quais há dúvidas sobre se alguma construção é legítima, se alguma prova é aceitável, se uma construção de fato caracteriza algum objeto, etc. Esse papel prático parece ter sido bem descrito por Maddy:

> O que teoria dos conjuntos faz é prover uma arena unificada generosa para a qual todas as questões locais de coerência e prova podem ser referidas. Desse modo, teoria dos conjuntos nos equipa com uma ferramenta singular que pode dar significado explícito para questões de existência e coerência; fazer conceitos e estruturas previamente obscuras mais precisas; identificar pressuposições fundamentais perfeitamente gerais que se manifestam de muitas formas em diferentes campos; facilitar interconexões entre diferentes ramos da matemática, agora todos uniformemente representados; formular e responder questões de demonstrabilidade e refutabilidade; abrir as portas para novas hipóteses fortes para decidir antigas questões em aberto; e assim por diante. Nesse sentido filosoficamente modesto, mas matematicamente rico, a teoria dos conjuntos pode ser dita fundamentar a matemática contemporânea pura. (Maddy, 2011, p.34)

O trecho acima é particularmente interessante para quem quer considerar a possibilidade de que a teoria das categorias venha a tomar o lugar da teoria de conjuntos nos seus mais diversos usos. Alguns dos pontos que aparecem nesse trecho, como "formular e responder questões de demonstrabilidade" ou "dar significado explícito para questões de existência e coerência", podem, à primeira vista, ser mais desafiadores para os advogados da teoria das categorias; ao passo que outros, como "facilitar interconexões entre diferentes ramos da matemática" ou "identificar pressuposições fundamentais perfeitamente gerais que se manifestam de muitas formas em diferentes campos", são por excelência atribuições típicas da teoria das categorias, mesmo em seus estágios iniciais quando ninguém sugeria que ela seria autônoma ou alternativa à teorias de conjuntos.

Ao longo deste capítulo esperamos defender a tese de que, desde que seja o papel de fornecer um solo comum ao qual matemáticos possam recorrer em situações de discordância e falha de comunicação que estejam em questão em uma proposta de fundamentos da matemática, então a teoria das categorias é plausivelmente um melhor "fundamento" do que teorias de conjuntos tradicionais. Claro que nem a teoria geral das categorias e nem suas extensões podem fixar de uma vez por todas cada possível questão sobre coerência ou existência no contexto matemático. Naturalmente, deve-se flexibilizar um pouco o sentido da expressão "fundamento" aqui, na medida em que a matemática à maneira categórica não se harmoniza integralmente à expectativa de que haja um sistema único de axiomas capaz de decidir todas as questões. Pelo contrário, o mais plausível é dizer que teoria das categorias encarna uma perspectiva pluralista na qual questões fundamentais como existência ou regras adequadas de inferência devem ser feitas apenas de forma "local", relativamente a um certo contexto delimitado.

Tanto quanto pudemos observar, essencialmente, duas perspectivas sutilmente distintas foram apresentadas como uma maneira de consolidar e descrever essa perspectiva pluralista categórica. John Bell (1986) apresenta a ideia de uma *matemática local* desenvolvida dentro de um *topos* e aberta a ser traduzida de um topos para outro, por oposição à ortodoxa *matemática absoluta* que pretensiosamente seria interpretada sobre um universo fixo de conjuntos. Já Steve Awodey (2006), em resposta às dificuldades impostas por Hellman com as quais lidaremos na seção 3.5, propõe que a matemática desenvolvida pelos métodos e pela linguagem da teoria das categorias difere da ortodoxa por ser desenvolvida "de cima para baixo" em vez de "de baixo para cima". Nessa perspectiva, em vez do desenvolvimento matemático iniciar a partir de certos átomos lógicos e progredir por meio de construções complexas em termos desses átomos,

o que caracterizaria uma abordagem de baixo para cima, a matemática tipicamente categórica começaria pelas noções mais gerais e adicionaria especificações posteriores apenas na medida em que essas são exigidas pelo contexto. Iremos descrever essas duas propostas em mais detalhes posteriormente.

Ambas essas perspectivas possuem em comum a convicção de que não se pode decidir ou fixar de uma vez por todas um único arcabouço definitivo de entidades sobre as quais a matemática, em última instância, fala. À primeira vista, essa propriedade parece indesejável do ponto de vista de uma busca por fundamentos. Não é preferível um sistema fixo e único capaz de englobar toda a matemática? Se um tal sistema vier a ser possível, talvez poder-se-ia buscar razões para defender que ele é o mais filosoficamente - ou até matematicamente - desejável.

Contudo, o século passado legou uma série de resultados metamatemáticos que abalaram fortemente a convicção de que um tal sistema absolutamente seja possível. Entre os mais proeminentes de tais resultados estão a demonstração de independência da hipótese do *continuum* e os teoremas da incompletude de Gödel. Também digno de nota, pelo menos para os nossos propósitos, é o assim chamado "paradoxo de Skolem". Aplicando o já mencionado teorema de Löwenheim-Skolem à própria teoria de conjuntos, Thoralf Skolem conclui que há um modelo contável para os axiomas de Zermelo-Fraenkel, i.e., um modelo no qual todo conjunto é um conjunto enumerável, mesmo que, pelo teorema de Cantor, os axiomas impliquem a existência de um conjunto não enumerável. A solução para o aparente paradoxo adotada por Skolem consiste em atribuir às teorias de conjuntos uma certa indeterminação e relatividade, a qual Bell entenderá como precursora da indeterminação e relatividade que a teoria das categorias atribui a noção de conjuntos.

Já que cada categoria é ela mesma um contexto peculiar dentro do qual uma certa porção da matemática pode ser desenvolvida, teoria das categorias aparece como um *framework* naturalmente pluralista. Esse pluralismo aparece de forma explícita, consolidada e sistemática na proposta de uma matemática "local" baseada em múltiplos *topoi*, tal como defendida por John Bell.

3.2 Teoria das Categorias e Estruturalismo

Quando apresentou sua "teoria elementar da categoria dos conjuntos", Lawvere fez sugestões que parecem indicar algo semelhante à ideia de que a matemática praticada

via teoria das categorias possuiria um caráter estruturalista, por oposição a algum aspecto inerente às teorias de conjuntos tradicionais. A diferença nos dois pontos de vista é descrita por Lawvere como uma diferença entre uma ênfase na *forma* (típica da teoria das categorias, topologia e álgebra) e na *substância,* típica das teorias de conjuntos baseadas na relação primitiva de cópula. Assim, Lawvere sugeriu implicitamente que fundamentos para a matemática baseados na teoria das categorias se distinguiriam daqueles baseados nas teorias tradicionais de conjuntos por possuírem maior afinidade com uma perspectiva estrutural. De acordo com Lawvere, a seguinte lição filosófica poderia ser extraída da axiomatização da teoria de conjuntos na linguagem da teoria das categorias:

> Filosoficamente, pode ser dito que esses desenvolvimentos parcialmente corroboram a tese de que mesmo na teoria dos conjuntos e na matemática elementar é verdadeiro o que há muito se percebe em álgebra avançada e topologia, a saber, que o essencial da matemática não reside na Substância (como fica parecendo quando $\in$ é um predicado irredutível, com a necessidade de definir todos os conceitos em termos de uma relação rígida de pertencimento) e sim na Forma (como fica claro quando a noção fundamental é a de estrutura invariante para isomorfismos, como definida, por exemplo, por propriedade universais de mapeamentos). (Lawvere, 2005, p.7, tradução minha)

Apesar de observações vagas e talvez um pouco filosoficamente confusas, de Lawvere e outros, relacionando a teoria das categorias a alguma concepção estrutural de matemática já tão cedo, a relação entre a teoria e uma filosofia estruturalista só parece ter sido explicitamente asserida na década de 90. Como uma espécie de resposta ao dilema de Benacerraf, sobre o qual dissertamos no primeiro capítulo, Colin McLarty objeta que a suposta consequência de que "números não seriam conjuntos" seria mediada pela concepção tradicional de conjuntos familiar à Benacerraf. Lembremos que Benacerraf declara que números são "estrutura abstrata", por oposição a conjuntos, no seguinte sentido:

> Números absolutamente não são objetos, porque ao dar as propriedades (isto é, necessárias e suficientes) dos números caracteriza-se meramente uma *estrutura abstrata*— e a distinção reside no fato de que "elementos" da estrutura não possuem propriedades outras que aquelas os relacionando aos outros "elementos" da mesma estrutura. (Benacerraf, 1965, p.70)

A primeira versão da teoria elementar da categoria dos conjuntos foi publicada um ano antes do argumento de Benacerraf. Mesmo assim, pode-se defender plausivelmente que os "conjuntos" conforme prescritos por essa teoria seriam "estrutura abstrata" exatamente no sentido que Benacerraf procura. Assim, a situação é descrita por McLarty do seguinte modo: existem aqueles filósofos estruturalistas que buscam uma complexa teoria das estruturas dentro da teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel, para esses a fala sobre "números naturais como estruturas abstratas é um *façon de parler* para

as propriedades comuns de todas as progressões"; por outro lado, existiriam aqueles que acreditam que estrutura abstrata é "sútil, mas não tão complicada assim" e que, na verdade, o programa estruturalista já teria sido "completado ou neutralizado", dependendo do ponto de vista, pela teoria categórica dos conjuntos. "Conjuntos e funções nessa teoria possuem apenas propriedades estruturais. Não há necessidade e nem lugar para uma teoria posterior das estruturas abstratas"[45]. A aparente oposição de Benacerraf entre conjunto e estrutura abstrata só ganha sentido porque a teoria de conjuntos de fundo não é uma teoria estrutural como a teoria da categoria dos conjuntos.

Sejam essas afirmações acima estritamente corretas ou não, parece claro que alguma correlação mais geral entre teoria das categorias e estruturalismo deve ser asserida. É desconcertante notar que a axiomatização da categoria dos conjuntos não parece ter sido, por si só, nenhum passo significativo no desenvolvimento da matemática ou da lógica: "[...] ninguém viu o que fazer com a categoria dos conjuntos. Ela simplesmente não possuía uma função nítida" (Marquis; Reys, 2011, p.12). Além disso, como deve ter ficado claro no capítulo anterior, o método de se caracterizar a estrutura invariante para isomorfismos via propriedades universais, que, como dito por Lawvere, é o que deixa claro que a informação matemática relevante reside na forma, é estendido para caracterizar construções em outras categorias que não a dos conjuntos. Algo como uma generalização da ideia de se tratar os objetos da categoria dos conjuntos como sendo, por si só, as estruturas abstratas sobre as quais a matemática fala, parece ter vindo pouco tempo depois.

Em Awodey (1996), encontramos a sugestão explícita de que filósofos e matemáticos olhem para a teoria das categorias com o objetivo de encontrar uma noção precisa e flexível de "estrutura" para os propósitos de uma filosofia estruturalista. A sugestão feita por Awodey foi interpretada, talvez erroneamente, como a afirmação de que a teoria das categorias provê fundamentos para a matemática estrutural[46]. Como veremos, na verdade, a proposta sempre foi antifundacionalista por natureza, pelo menos se entendermos "fundamentos" num sentido muito estrito. Na proposta de Awodey, teríamos autonomia e estruturalismo, mas sem fundamentos.

Como uma objeção a essa proposta, Geofrey Hellman publicou o que acreditamos ser a mais sistemática e profunda crítica à autonomia da teoria das categorias. Em

[45] Cf. McLarty, 1993, p. 487

[46] Veremos em mais detalhes que Hellman acreditava que a sugestão de Awodey deveria ser entendida como tendo a tese fundacional como pano de fundo.

Hellman (2003), o autor impõe uma série de dificuldades a todos os que pretendam propor que a teoria das categorias seja um *framework* autônomo para uma proposta estruturalista da matemática.

As objeções de Hellman receberam respostas distintas dadas por Awodey e McLarty. Apesar de ambas as respostas se basearem em ideias inspiradas em insights filosóficos presentes no trabalho de Mac Lane, elas parecem diametralmente opostas. Ao longo deste capítulo forneceremos uma visão panorâmica desse debate, focando em tentar esclarecer quais os pontos de desacordo entre aqueles que defendem a autonomia da teoria das categorias e aqueles que rejeitam. Pretendemos que fique claro que os principais argumentos contra essa autonomia são, no fundo, baseados em pressuposições filosóficas que podem ser colocadas em questão e eventualmente rechaçadas.

Na seção a seguir, faremos uma caracterização mais detalhada do que é que significaria propriamente olhar para a teoria das categorias com o objetivo de lá encontrar uma noção adequada de "estrutura". Especificamente, essa noção de "estrutura" é contrastada com aquela que é fornecida pelas teorias de conjuntos mais tradicionais. Na teoria das categorias, cada estrutura particular é caracterizada como um objeto em uma categoria e todas as suas propriedades são derivadas dos morfismos que possuem esse objeto como domínio ou contradomínio.

Teremos a oportunidade de contrastar mais profundamente essa noção de estrutura como "objeto em uma categoria" com a noção típica das teorias de conjuntos quando consideramos uma importante objeção à autonomia da teoria das categorias apresentada em Feferman (1977). Essa objeção é centrada na ideia de que a teoria das categorias não pode por si só fornecer as noções fundacionais de uma coleção não estruturada e de uma operação entre coleções, necessitando importá-las de algum *background* fundacional prévio. Temos, portanto, um ataque tanto à autonomia quanto ao caráter fundacional da teoria. Propomos uma tentativa de rejeitar o argumento mostrando que dentro da teoria das categorias a noção de *classe* não aparece como anterior à noção de estrutura, mas como um caso limite. Tanto conjuntos quanto estruturas singulares dos mais variados tipos são casos particulares de um objeto em uma categoria.

3.3 A sugestão de Awodey

> Com a ascensão da álgebra abstrata [...] emergiu gradualmente a atitude [segundo a qual] a característica crucial das estruturas matemáticas não

> é sua constituição interna enquanto entidades conjunto-teóricas mas antes suas relações tais como incorporadas na rede de morfismos... Contudo, apesar do tratamento da matemática que eles [Bourbaki] deram em seu *Eléments* ter sido manifestamente estruturalista em intenção, na verdade eles ainda definiam estruturas como conjuntos de um certo tipo, assim falhando em fazê-las verdadeiramente independentes de sua "constituição interna". (Bell, 1981, p. 351.)

A afinidade da teoria das categorias com o lema estruturalista é quase autoevidente. A ideia de caracterizar os objetos em uma categoria apenas por meio dos mapeamentos que os conectam a outros objetos dentro dessa mesma categoria é obviamente similar a diversas formulações que encontramos para a tese estruturalista. A título de exemplo, Charles Parsons inicia desta maneira seu "*The Structuralist View of Mathematical Objects*":

> Por 'visão estruturalista' dos objetos matemáticos, quero dizer a visão de que a referência a objetos matemáticos é sempre no contexto de uma estrutura de fundo, e que os objetos envolvidos não possuem mais do que o que pode ser expresso em termos das relações básicas da estrutura (Parsons, 1990, p. 1, tradução minha).

Ao afirmar que a matemática lida com "estruturas", uma noção de "estrutura" deve ser fornecida, se é que a afirmação deve possuir absolutamente algum conteúdo. Assim como as teorias de conjuntos (ou até mais do que em teorias de conjuntos), a teoria das categorias é um lugar natural para se buscar uma. Nas palavras de John Bell, a teoria das categorias:

> Assim como a teoria dos conjuntos, provê um framework geral para lidar com estruturas matemáticas, e— novamente como a teoria dos conjuntos— ela faz isso ao transcender a particularidade de estruturas. Mas a teoria dos conjuntos e a teoria das categorias fazem isso de maneiras completamente diferentes. A teoria dos conjuntos elimina a estrutura da ontologia da matemática deixando pluralidades de indivíduos desestruturados abertos à imposição de nova estrutura. Teoria das categorias, por outro lado, transcende estruturas particulares, não por eliminá-las, mas por generalizá-la, isto é, por produzir uma teoria axiomática geral da estrutura. O sucesso da teoria das categorias e sua significância para os fundamentos é devida à ubiquidade da estrutura em matemática. (Bell, 1981, p.356, tradução minha)

Como vimos no primeiro capítulo, algumas variedades de abordagens estruturalistas são baseadas na ideia de se desenvolver uma teoria (seja axiomática ou informal) cujos objetos básicos corresponderiam explicitamente à noção de estrutura ou pelo menos à noção de uma "posição abstrata dentro de uma estrutura". Dada a generalidade da noção de *categoria*, parece uma sugestão natural que substituamos "estrutura" por "categoria" e "relação" por "morfismo" e, assim, passemos a pensar o

estruturalismo incorporado nos métodos e na linguagem da teoria das categorias como uma instância dessas variedades de estruturalismo.

Rodin (2011, p.16) argumenta, contudo, que a noção de categoria seria, na verdade, uma generalização da noção de estrutura, devendo o conceito de estrutura ser definido por "dentro" da teoria das categorias como um tipo determinado de categoria. Um dos mais óbvios candidatos, segundo Rodin, seria o conceito de uma categoria pequena, isto é, uma categoria cujos objetos e morfismos formam um conjunto. Essa sugestão parece derivar de uma pressuposição razoavelmente difundida segundo a qual o que quer que seja uma estrutura, ela deve ser pequena o suficiente para poder ser definida como um certo conjunto particular. Bell (1981, p.355) sugere algo similar ao observar que seria mais "convincente e natural" se pudéssemos simplesmente formalizar a matemática dentro da teoria das categorias de tal modo que cada objeto matemático pudesse ser representado como uma categoria "tout court". De acordo com o autor, isso também estaria mais de acordo com a visão estruturalista de que a matemática fala sobre estrutura e de que a teoria das categorias "incorpora a ideia de estrutura". Bell entende que é exatamente com esse propósito de tratar cada estrutura como uma categoria que Lawvere tentou elaborar uma teoria elementar da categoria de todas as categorias pequenas, dentro da linguagem da teoria das categorias.

A ideia geral de uma teoria de todas as categorias (pequenas ou mesmo grandes) envolve controvérsias e não é de modo algum claro que uma tal teoria seja estritamente necessária. É bem conhecido que a axiomatização que Lawvere propôs sofre de alguns problemas técnicos. Mas mesmo que essa teoria venha a ser possível, não está garantido que ela represente cada objeto matemático diretamente como uma categoria, como Bell parece ter sugerido.

A proposta de que o conceito de *estrutura* seja definido como uma certa espécie determinada de categoria está sujeita a seguinte objeção: embora seja argumentável que qualquer construção possa ser definida dentro ou em termos da teoria das categorias, isso não significa, ainda, que possa ser introduzida como uma categoria *tout court*. Para colocar em termos modelo-teóricos: não é de modo algum claro que possamos representar literalmente qualquer tipo de modelo para uma teoria matemática como uma certa categoria. Pelo contrário, não é difícil de se imaginar alguma construção que não satisfaça a definição de categoria. Se existem estruturas matemáticas que não são categorias, então não é verdade que "estrutura" seja equivalente a "categoria pequena". Por exemplo, apesar das diversas semelhanças superficiais entre grafos e categorias, evidenciado pelo

uso de diagramas, uma categoria e um grafo possuem algumas características que os distinguem. Um grafo não é necessariamente direcionado, em um grafo não necessariamente pode haver uma aresta conectando um vértice a si mesmo (em contraste com a exigência em teoria das categorias de que todo objeto possua seu morfismo de identidade) e arestas de um grafo não estão sujeitas a uma operação de composição entre arestas. Uma vez que há uma noção de um homomorfismo entre grafos[47], podemos falar, por exemplo, na categoria de todos os grafos não direcionados. Embora cada objeto nessa categoria seja um grafo, nenhum desses objetos é, por si mesmo, uma categoria. Então, é óbvio que, na matemática, lidamos constantemente com álgebras ou com sistemas de relações que não satisfazem a definição de categoria.

Então, se, como Bell sugere, a teoria das categorias dá origem a uma "teoria axiomática geral da estrutura", ela deve fazê-lo de uma maneira mais sútil ou "indireta". Uma opção possível seria identificar uma estrutura como um funtor de uma categoria pequena em alguma outra categoria maior que serviria como um "plano de fundo", no espírito das estruturas algébricas, conforme descritas na semântica funtorial[48]. Para ilustrar o fato de que essa abordagem não é, de forma alguma, restrita à álgebra, considere, por exemplo, que um (multi) grafo direcionado é ordinariamente apresentado como uma quádrupla $\{V, E, s, t\}$ onde V é o conjunto dos vértices, E é o conjunto das arestas, $s: E \rightarrow V$ é um mapeamento que leva uma aresta no seu vértice de origem e $t: E \rightarrow V$ é um mapeamento que leva uma aresta em seu vértice de chegada. Mas considere uma categoria *qualquer* com dois objetos V e E, junto com dois mapeamentos $s: E \rightarrow V$ e $t: E \rightarrow V$. Agora, a noção ordinária de um grafo "feito de conjuntos" pode simplesmente ser definida como um funtor dessa categoria $E \rightrightarrows V$ na categoria dos conjuntos. Ao generalizar a condição de que a categoria de contradomínio tenha que ser especificamente a categoria dos conjuntos, temos uma noção mais geral que captura o que há de "essencial" em um grafo independente da teoria fundacional de *background*.

Não parece haver nenhum tipo de objeção técnica à ideia de se caracterizar uma estrutura como um funtor e homomorfismos entre duas estruturas como transformações naturais entre dois funtores. Contudo, ainda que haja algo como uma correlação biunívoca entre as estruturas e tais funtores, não parece nada natural dizer que quando pensamos em uma estrutura pensamos sempre em uma certa operação a partir de um "clone" ou

[47] Informalmente: um mapeamento conectando dois grafos ao mapear vértices de um em vértices do outro e arestas de um em arestas do outro, de tal modo que vértices conectados sejam preservados.
[48] Rodin, 2011, p.16.

"arquétipo" da estrutura. Antes, se vamos usar esse procedimento de representar uma estrutura como um funtor, pensamos a estrutura como *o resultado* dessa operação. Se tomarmos o exemplo dado acima, é mais natural dizer que o grafo é a imagem do funtor, em vez de dizer que ele é o próprio funtor em si mesmo. Mesmo dentro da linguagem da teoria das categorias, não somos obrigados a sempre pensar uma estrutura como algo que resulta da aplicação de um funtor a uma outra construção (talvez ela mesma uma estrutura). Podemos sempre caracterizá-la de uma *forma mais direta*, como já vinha sendo feito antes da semântica funtorial. Suponha que o universo de todas as estruturas, ou seja, de todas as entidades matemáticas, é a categoria de todos os conjuntos. Podemos encontrar um certo grafo que habita esse universo estipulando que ele é a imagem de um certo funtor de $E \rightrightarrows V$ para a categoria dos conjuntos. Mas podemos também identificar os grafos mais fundamentais na categoria dos grafos por meio de propriedades universais e em seguida usar as propriedades composicionais dos morfismos da categoria para "encontrar" os diversos grafos. Esse procedimento não se restringe a caracterização estrutural de grafos, mas pode ser alargado para outros tipos de objetos matemáticos. Assim, parece desejável e possível a busca por uma noção *mais direta* de estrutura dentro do *framework* da teoria das categorias.

Acredito que a proposta mais explícita de que essa noção "mais direta" de estrutura seja buscada na teoria das categorias é a que foi formulada por Awodey. E ela parece ter sido motivada pelo mesmo fato que Lawvere menciona como motivação para sua teoria da categoria de todas as categorias[49]: a crescente tendência da matemática moderna em caracterizar estruturas matemáticas em termos de mapeamentos entre objetos em vez de objetos tomados de forma isolada.

Os exemplos mais paradigmáticos de categorias são sistemas de objetos matemáticos de um certo tipo, ou seja, com um certo tipo de estrutura, conectados por mapeamentos preservando exatamente o tipo de estrutura em questão. De fato, mesmo que haja exemplos de categorias que não se encaixem nessa descrição informal, sem dúvida essa é a ideia intuitiva que motiva a definição do conceito de categoria. Se os

[49] O mais conhecido texto no qual Lawvere apresenta sua proposta de axiomatização de uma teoria da categoria de todas as categorias abre com o seguinte trecho: "In the mathematical development of recent decades one sees clearly the rise of the conviction that the relevant properties of mathematical objects are those which can be stated in terms of their abstract structure rather than in terms of the elements which the objects were thought to be made of" (Lawvere, 1966, p. 1). Meu ponto é simplesmente que tanto a proposta de Lawvere quanto a de Awodey são baseadas na ideia de que lidar com estruturas por meio de seus morfismos já era um método em ascensão dentro da matemática, mesmo antes da teoria das categorias, mas é essa teoria que consolida e melhor exemplifica esse tipo de abordagem.

exemplos paradigmáticos de categorias são objetos matemáticos estruturados junto com mapeamentos preservando essa estrutura, a uma certa categoria específica corresponde um certo tipo de estrutura. Então a seguinte proposta pode ser articulada:

> Uma categoria provê uma maneira de caracterizar e descrever estrutura matemática de um certo tipo, nomeadamente, em termos de preservação da mesma por mapeamentos entre objetos matemáticos que carregam a estrutura em questão. Uma categoria pode ser vista como consistindo de objetos carregando um certo tipo de estrutura junto com mapeamentos entre tais objetos preservando essa estrutura. Por exemplo, espaços topológicos e mapeamentos contínuos entre eles formam uma categoria, que chamamos "Top". Similarmente, "Group" é a categoria consistindo de grupos e homomorfismos de grupos, e "Sets" consiste em conjuntos e funções entre eles. Agora, o que esses exemplos, e aqueles obviamente similares, possuem em comum? Desejamos axiomatizar a noção de um "tipo de estrutura matemática" em temos de um "sistema de mapeamentos preservando estrutura". (Awodey, 1996, p. 212)

Para entendermos melhor o que significa dizer que uma categoria provê os meios para descrever uma estrutura de um certo tipo, talvez seja proveitoso que coloquemos a proposta em contexto, comparando-a com outras possíveis alternativas, como a noção de estrutura da teoria dos modelos. Afirmei no primeiro capítulo que a teoria dos modelos fornece uma noção de uma "estrutura para uma certa linguagem formal" e que essas estruturas eram definidas em termos de conjuntos. Também mencionei uma distinção entre dois usos da palavra estrutura: "estrutura modelo" e "estrutura abstrata", junto com a ideia de que o lema estruturalista deveria ser interpretado como asserindo que a matemática é sobre "estrutura" no sentido abstrato, sob pena de que caso contrário a doutrina estruturalista não lide com nenhum dos problemas que ela é chamada a resolver, especialmente com o dilema das múltiplas reduções.

Uma maneira possível de se fornecer uma noção de "estrutura" no sentido abstrato da palavra e, portanto, uma que se encaixe nos propósitos de uma filosofia estruturalista da matemática, é defini-la como classes de equivalência de estruturas no sentido da teoria dos modelos. Há dois principais problemas com essa proposta: 1) Assim como os exemplos mais paradigmáticos de categorias, tais classes de equivalências não são entidades legítimas para algumas teorias de conjuntos. Na melhor das hipóteses, elas são classes próprias que, portanto, não podem ser objetos de operações. 2) Ainda que essa redução fosse feita do ponto de vista de alguma teoria que não só permita classes arbitrariamente grandes como também permita que elas sejam manipuladas em perfeita analogia com conjuntos, resta o problema de que a frase "matemática é sobre estrutura abstrata" é no fundo falseada por essa solução, já que ela continua pressupondo estruturas-

modelo a partir dos quais estruturas abstratas são definidas. Assim, em última instância, a verdadeira matéria do discurso matemático ainda seriam coleções e indivíduos identificados por propriedades não estruturais.

Relacionada a essa noção de "estrutura" da teoria dos modelos, há aquela que aparece nos elementos de Bourbaki. Ao menos no entender de Awodey, a noção de estrutura empregada por Bourbaki é uma generalização da noção tradicional vinda das teorias de modelos, na medida em que ela é uma concepção análoga, mas que aceita possíveis estruturas correspondentes a linguagens de ordem superior. De forma um pouco vacilante, o autor chama as duas noções tanto de concepção "modelo-teórica" quanto de "noção de estrutura de Bourbaki" logo após distingui-las. Claro que isso se deve provavelmente ao fato de que o aspecto relevante ao argumento é precisamente aquilo que ambas possuem em comum. Awodey afirma que a noção de "estrutura de Bourbaki" é importante por dois aspectos:

1) A ideia de um conjunto domínio "equipado com uma estrutura" moldou a concepção *standard* de um objeto matemático;
2) Ela deixou claro que ao menos alguns fatos acerca de objetos matemáticos são válidos em virtude de sua estrutura.

Evidentemente, a palavra "estrutura" ocorre em 1) e 2) no seu sentido abstrato. O ponto é que propriedades matematicamente relevantes de *estruturas-modelo* são precisamente aquelas que são invariantes para certos isomorfismos, ou seja, aquelas que dependem tão somente da *estrutura abstrata* instanciada. Apesar disso, a própria noção de estrutura que foi empregada na elaboração e construção dos objetos matemáticos exige que cada objeto seja uma coleção particular construída a partir de elementos cuja identidade já era previamente determinada. Nos termos de Awodey, essa noção de uma estrutura de Bourbaki:

> [...] Deixou claro que pelo menos alguns fatores de objetos matemáticos, alguns fatos matemáticos sobre eles, dependem *somente* de sua estrutura. Por exemplo, uma vez que tenhamos caracterizado os números reais como um corpo ordenado completo, nada além da estrutura comum de um corpo ordenado completo é relevante para a matemática dos números reais. Em particular, não importa que os números reais devem ser conjuntos distintos diferenciando-se com respeito aos seus elementos, apesar de isso ser requirido pela própria concepção de estrutura que permitiu a caracterização estrutural inicial dos reais. Além disso, assim que tenhamos *uma* tal caracterização, descobrimos que há outras que serviriam igualmente bem. A descrição de Bourbaki de objetos matemáticos como conjuntos-mais-estrutura leva a uma perspectiva estrutural útil, a qual a linguagem e os métodos

> da própria teoria dos modelos não servem para descrever particularmente bem. (Awodey, 2003 , p. 211)

Um argumento em favor do estruturalismo sobre o qual falamos em mais detalhes, no primeiro capítulo, gira em torno da ideia de que teses estruturalistas estariam em plena harmonia com a prática matemática, na medida em que matemáticos praticantes não distinguiriam entre objetos por meio de propriedades que não respeitem alguma noção de isomorfismo dada. Essa mesma afirmação de que matemáticos praticantes não empregam propriedades não estruturais foi empregada por Awodey, no contexto com o qual estamos lidando agora, para justificar que a noção de estrutura de Bourbaki não se encaixa satisfatoriamente com a atividade dos matemáticos praticantes. Daí, a teoria das categorias surgiria de uma necessidade natural por uma linguagem e por métodos capazes de expressar e lidar melhor com questões relacionadas aos diferentes tipos de estrutura. Voltamos ao que temos chamado de "sugestão de Awodey": uma categoria forneceria métodos de se caracterizar e falar sobre estruturas de um dado tipo em termos de mapeamentos entre os objetos que possuem o tipo de estrutura em questão.

Uma noção categórica de estrutura é recomendada por Awodey principalmente pelo fato de que ela se encaixaria melhor com a tendência do matemático praticante em não se importar com propriedades que não sejam preservadas para uma certa noção de isomorfismo. Mesmo que possamos, se assim desejarmos, começar construindo uma categoria a partir da especificação de modelos de uma certa teoria junto com os homomorfismos entre esses modelos, ainda assim, a categoria determina aquele tipo de estrutura de uma maneira independente dos métodos iniciais de especificação[50] e, assim, é possível uma caracterização puramente categórica desse tipo de estrutura. A descrição categórica de uma certa estrutura gozaria de uma "invariância sintática" no sentido de que a descrição seria feita de tal modo que não dependeria de nenhuma escolha particular de alguma descrição modelo-teórica possível. Próprio ao modo modelo-teórico de se lidar com um certo tipo de estrutura é começar por uma lista de axiomas, i.e., uma teoria, que caracteriza a estrutura em questão e passar a considerar modelos que satisfazem os axiomas dessa lista, para em seguida considerar seus homomorfismos. Mas a

[50] "Generally, suppose we have somehow specified a particular kind of structure in terms of objects and morphisms, as in the examples above. Then that category characterizes that kind of mathematical structure, independently of the initial means of its specification. For example, the topology of a given space is determined by its continuous mappings to and from other spaces, regardless of whether it was initially specified in terms of open sets, limit points, a closure operator, or whatever. The category **Top** thus serves the purpose of characterizing the notion of 'topological structure'" (Awodey, 2012, p. 5)

caracterização do tipo de estrutura em questão pode também ser feita somente via as equações satisfeitas pelos homomorfismos da teoria axiomática do qual partimos, quando submetidos à operação de composição. Ou em uma formulação concisa: somente pela álgebra abstrata de morfismos da categoria formada pelos modelos e homomorfismos. Esse é o modo próprio da teoria das categorias de descrever estrutura.

Um interessante debate acerca do estatuto da teoria das categorias entre Awodey e Geoffrey Hellman, iniciou com o artigo de Hellman "Does Category Theory Provide a Framework to Mathematical Structuralism?"(2003). A tréplica de Awodey, no artigo "An Answer to Hellman's question: Does Category Theory Provides a Framework to Mathematical Structuralism" (2003) se baseia fundamentalmente em argumentar que as exigências impostas por Hellman para que teoria das categorias seja um *framework* autônomo são tipicamente fundacionalistas, mas a abordagem categórica seria conduzida de um ponto de vista não fundacional. Veremos os detalhes desse debate algumas seções à frente. Mas primeiro, nos interessa descrever uma proposta que foi elogiada por Hellman como "um dos mais sistemáticos esforços para desenvolver a teoria das categorias como alternativa fundacional à teoria de conjuntos".

3.4 "Many topoi view"

> A generalidade da teoria das categorias a habilitou a desempenhar um papel cada vez mais importante nos fundamentos da matemática. Sua emergência teve o efeito de sutilmente minar a doutrina prevalecente segundo a qual todos os conceitos matemáticos devem ser referidos a um universo fixo absoluto de conjuntos. Teoria das categorias, em contraste, sugere que todos os conceitos e asserções matemáticas devem ser considerados como possuindo significado apenas em relação a uma variedade de frameworks mais ou menos locais. (Bell, 1986, p. 410)
>
> O que eu sugiro é que aceitemos a natureza radicalmente subdeterminada do conceito de conjunto e abandonemos a busca pelo universo absoluto de conjuntos na forma que é proposta pela teoria de conjuntos clássica. (Bell, 1986, p. 412)

Na introdução a este capítulo, mencionamos alguns dos papéis que normalmente são atribuídos às teorias de conjuntos. Também deixamos claro que é em virtude desses papéis que se costuma dizer que a teoria pode "fundamentar a matemática". Esperamos que seja óbvio que reduzir toda a matemática a um pequeno número de asserções básicas não esgota todos os sentidos da expressão "fundamentar a matemática". Mesmo assim, essa é usualmente vista como uma das tarefas mais cruciais da fundamentação. Aqui pode-se colocar a questão: quando falamos em reduzir toda a matemática a um sistema

de asserções básicas, realmente levamos a sério a expressão "toda"? Porque se, de fato, a redução total a um único sistema de axiomas for uma condição necessária à fundamentação, então resultados já tradicionais da metamatemática mostram que teorias de conjuntos não podem, no fim das contas, prover fundamentos *últimos* nesse sentido estrito. E talvez nada mais possa.

Já em 1922, Thoralf Skolem concluiu que uma vez que os axiomas da teoria de conjuntos possam ser formulados em primeira ordem, uma axiomatização em termos de conjuntos "[...]não seria um fundamento último satisfatório para a matemática[...]"[51]. Se tratarmos a teoria dos modelos como uma teoria informal que pode ser aplicada à própria teoria formal de conjuntos, e Skolem o fazia, como consequência do já mencionado teorema de Löwenheim-Skolem, emergirá uma aparente contradição que ficou conhecida como o "paradoxo de Skolem". De acordo com tal "paradoxo", toda axiomatização contável da teoria de conjuntos *em primeira ordem*, se ela é consistente, então ela possui um modelo que é contável e que, portanto, contém apenas conjuntos enumeráveis. Uma vez que dos axiomas se segue a existência de um conjunto que não é contável, surge um estado de coisas aparentemente paradoxal: um modelo que contém apenas conjuntos enumeráveis satisfaz a sentença que intuitivamente diz que existe um conjunto não enumerável. A solução que Skolem sugere ao suposto paradoxo, que está também intimamente conectada a sua rejeição do caráter fundacional da teoria dos conjuntos, é que o conceito de *enumerabilidade*, bem como alguns outros conceitos que envolvem a cardinalidade de conjuntos, deve ser visto como relativo a uma interpretação para a teoria de conjuntos.

Matemáticos majoritariamente ignoraram essas alegações de Skolem[52]. Algumas décadas depois, em 1963, um outro desafio ao carácter fundacional da teoria dos conjuntos veio a ser colocado por Paul Cohen. Cohen construiu modelos para os axiomas de Zermelo-Fraenkel nos quais tanto a hipótese do *continuum* quanto o axioma da escolha são falseados. Os métodos que Cohen empregou foram posteriormente utilizados para criar múltiplos modelos para os axiomas de Zermelo-Fraenkel com propriedades distintas. Ao contrário do que aconteceu com a "relatividade" da teoria de conjuntos tal como apontada por Skolem, a indeterminação nos valores de verdade de proposições da matemática, trazida à tona pelos métodos de Cohen, foi vista por muitos matemáticos

[51] Cf. Skolem, 1922, p.301.
[52] Cf. Bell, 1986, p.411.

com seriedade. Agora, deve-se aprender a conviver com uma infinidade de diferentes teorias de conjuntos, todas elas sendo aparentemente aceitáveis do ponto de vista matemático. Qualquer pretensão de assumir que uma dada teoria é a única que descreve o universo real de todos os conjuntos parece ser, no mínimo, condenada à implausibilidade. A situação parece ter sido bem sintetizada por Kanamori:

> Com sugestões claras de um modo novo e concreto de construir modelos, teóricos conjuntistas apressaram-se e usando forcing rapidamente foi estabelecida uma cornucópia de resultados de consistência relativa [...] Rapidamente, ZFC tornou-se totalmente diferente da geometria euclidiana e muito mais parecida com a teoria dos grupos, com uma larga gama de modelos da teoria dos conjuntos sendo investigados por seu próprio interesse. A teoria dos conjuntos experimentou uma mudança profunda (...) (Kanamori, 2008, p. 351)

Outro resultado digno de menção é o par de teoremas da incompletude de Gödel. O primeiro deles estabelece que um sistema formal consistente capaz de expressar uma certa porção da aritmética é incompleto, na medida em que sempre existem sentenças expressas na linguagem do sistema tal que nem ela nem sua negação podem ser derivadas dos axiomas do sistema. O segundo teorema estabelece que um sistema consistente capaz de axiomatizar uma certa porção da aritmética não pode provar sua própria consistência. Então, do primeiro teorema se segue que a aritmética, argumentavelmente a porção mais fundamental da matemática, nunca pode ser completamente axiomatizada em um único sistema fundamental. Ao passo que o segundo teorema torna inviável que se demonstre a consistência absoluta de um sistema de axiomas capaz de expressar a aritmética, restando apenas provas de consistência relativa. Tais teoremas lançaram um balde de água fria em algumas expectativas fundacionalistas, na medida em que a aritmética é uma porção crucial da matemática a ser fundamentada. *Grosso modo*, podemos dizer que não é apenas o conceito de *conjunto*, como também o próprio conceito de *número* que está condenado a uma certa indeterminação.

A perspectiva dos muitos *topoi*, tal como sugerida por John Bell, pode ser vista como uma proposta de que essa indeterminação do conceito de "conjunto" seja abraçada de frente. Teoria das categorias incorpora naturalmente uma perspectiva na qual a ideia de um universo fixo de entidades dá lugar à possibilidade de variar o "contexto" de fundo no qual um certo conceito é interpretado. Uma vez que um conceito seja formulado em termos dos primitivos da teoria das categorias, mesmo que ele tenha inicialmente sido pensado como uma forma de caracterizar uma construção na categoria dos conjuntos, ele fica "livre" desse universo e passa a poder ser empregado para caracterizar construções "análogas" em outras categorias. Do ponto de vista proposto por Bell, pode-se falar em

um “tipo especial” de categoria que constituiria uma versão categórica da noção de um modelo para uma teoria de conjuntos. Essas categorias são vistas como *frameworks locais* cuja linguagem interna consiste em uma teoria local de conjuntos (ou talvez seja, na verdade, melhor dizer “teoria local de tipos”) capazes de substituir a teoria de conjuntos clássica em uma dada porção da matemática. Asserções matemáticas só possuiriam sentido, e, portanto, valor de verdade, em relação a um certo *framework* local.

Um “framework local” seria, para Bell, um topos equipado com um objeto dos números naturais. Uma vez que há a possibilidade de passar de uma categoria para outra por meio de um funtor e que esses *topoi* são categorias, é natural que a teoria das categorias não considere nenhum *framework* como absoluto. Em vez disso, o que há é uma intricada rede de *frameworks* relacionados uns aos outros por meio dos funtores. Particularmente relevante, nesse contexto nos quais topoi com objetos dos naturais são vistos como *frameworks* locais, são aqueles funtores que satisfazem condições específicas, os quais Bell denomina de “transformações contínuas”. A possibilidade de mudar de um *framework* para outro revela que conceitos matemáticos são relativos e que a instanciação do conceito no universo dos conjuntos constantes é apenas um caso especial que pode ser generalizado.

O termo “teoria local de conjuntos” deriva de uma analogia com as teorias locais do espaço empregadas na física relativística. Bell leva a analogia ainda mais além. Teoria especial da relatividade mostra que conceitos que expressam determinações espaciais ou temporais só ganham sentido em relação a um determinado quadro de referência inercial. Apenas após a especificação de um tal quadro de referência é que as sentenças que aplicam esses conceitos a eventos particulares podem ser julgadas verdadeiras ou falsas. Nessa teoria, pode-se empregar uma transformação de Lorentz para passar de um tal quadro de referência para outro, traduzindo-se as sentenças em questão. Ao longo desse processo de “tradução”, a distância espacial entre dois eventos e seu intervalo de separação no tempo não são necessariamente preservados. Mas, em seu lugar, emerge uma noção mais sútil de um intervalo no espaço-tempo que permaneceria invariante para transformações de um quadro de referência para outro. Algo similar acontece com o caso da matemática tal como desenvolvida em vários *topoi*. Asserções tipicamente conjuntísticas como o axioma da escolha e o princípio do terceiro excluído são válidas apenas para alguns *frameworks* particulares ao passo que outras coisas, como a aritmética construtiva, são invariantemente válidas para todos os *frameworks*. A noção de validade

absoluta para o universo fixo de conjuntos dá lugar à de *invariância* entendida como validade necessária em todos os *frameworks* locais.

Bell propõe, ao final de seu artigo *From Absolute to Local Mathematics,* uma curiosa consequência filosófica para a perspectiva pluralista que estaria implícita na teoria das categorias. Se a matemática for vista como falando sobre um certo universo fixo de entidades reais, tal como parece ser sugerido pela abordagem conjuntística, devemos como que forçar os conceitos empíricos que descrevem o mundo dado à experiência a ser expressos em termos desse universo fixo de entidades. Desse modo, estamos sempre correndo o perigo de que haja uma "distorção" no significado desses conceitos. Daí, o fato de que a matemática sirva aos propósitos de uma descrição acurada da nossa experiência do mundo real objetivo aparece como uma surpresa desconcertante, um "mistério" que o filósofo pode se esforçar para elucidar. Agora, se lidamos com uma multiplicidade de *frameworks* locais, escolhemos livremente aquele que mais se adequa aos conceitos que queremos exprimir. Então, o fato de que a matemática se conforme com o mundo real aparece como mero resultado da maneira como a construímos:

> Então, a interpretação local da matemática que é implícita na teoria das categorias concorda intimamente com a crença implícita de muitos matemáticos segundo a qual sua ciência diz respeito, em última instância, não a conjuntos abstratos, mas à estrutura do mundo real. (Bell,1986, p. 425)

Hellman aponta que a proposta de Bell possui diversos atrativos para aqueles que pretendem endossar uma perspectiva estruturalista:

> Do ponto de vista de uma perspectiva estruturalista, essa é uma visão claramente interessante e atrativa. Ela provê um tratamento estruturalista da teoria dos conjuntos ela mesma; evita a desconcertante metafísica do "mundo real dos conjuntos"; ilumina interrelações entre *topoi* assim como entre estruturas especiais da matemática ordinária (tomadas como objetos de categorias particulares), frequentemente fornecendo um entendimento mais profundo de conceitos matemáticos, revelando novos *links* via novos tipos de generalidade; como ilustrado pelos exemplos de Bell; e compartilha outras vantagens associadas a uma abordagem pluralista em detrimento de uma "pluralidade de absolutismos". (Hellman, 2003 , p.15)

Hellman, contudo, coloca dúvidas sobre a passagem, que Bell propõe e nós endossamos, das provas de independência de asserções como a hipótese do continuum ou o axioma da escolha para a adoção de uma posição pluralista. Aqueles que concedem que essas proposições não possuem valor de verdade absoluto e definido estão inclinados a assentir para essa passagem. Já aqueles que insistem que essas asserções possuem um valor de verdade definido, mesmo que seja difícil ou até mesmo impossível de determinar,

poderiam tomar isso como contando contra a perspectiva dos muitos *topoi* tal como proposta por Bell.

A lição principal que pretendemos extrair da abordagem pluralista e dos argumentos de Bell para justificá-la é que a indeterminação característica da teoria das categorias conta como um argumento em desfavor de sua autonomia e papel fundacional se, e somente se, a indeterminação já presente na teoria dos conjuntos também contar. Mesmo que ninguém possa fixar qual o *topos* que servirá como cenário fundacional definitivo para a matemática, a princípio isso não pode contar como um bom motivo para que se rejeite o papel fundacional da teoria das categorias, já que o mesmo pode ser dito de outros universos de coleções tais como aqueles descritos pelas teorias ortodoxas de conjuntos.

Além de a teoria das categorias incorporar o mesmo suposto "defeito" fundacional que as teorias de conjuntos possuem, i.e., a incapacidade de fixar univocamente as propriedades matemáticas do universo fundacional, ela também possui uma clara vantagem que se torna óbvia quando olhamos para a possibilidade de nos movermos de um *framework* fundacional para outro por meio de uma construção extremamente familiar e corriqueira aos envolvidos em teoria das categorias: um funtor. Um fundamento para a matemática deve prover, para usar a expressão de Maddy que apareceu no início do capítulo, uma "área unificada" ou, como preferimos dizer, um *solo comum* em cima do qual diferentes matemáticos, especializados nos mais diversos ramos, podem se apoiar e interagir entre si. Se estamos condenados a assumir que é impossível escolher um único universo de coleções para toda a matemática, qual alternativa poderia ser melhor do que escolher uma ferramenta capaz de expressar uma infinidade de universos e ser empregada com relativa facilidade para compreender as relações entre os diferentes universos fundacionais? É claro que não temos a intenção de dizer que estudiosos das teorias de conjuntos ortodoxas não gozam de nenhum método efetivo para compreender e expressar relações entre os diversos sistemas disponíveis. Tudo o que queremos fazer é ressaltar que para a teoria das categorias esses métodos são tão naturais e imediatos que, de fato, teoria das categorias tem sido utilizada como ferramenta para elucidar relações entre teorias de conjuntos ortodoxas.

3.5 As objeções de Hellman

Até agora, com exceção de alguns comentários pontuais sobre algumas dificuldades menores, temos falado sempre positivamente da ideia de que a teoria das categorias incorpora uma visão estruturalista da matemática e o faz de uma maneira autônoma em relação às teorias de conjuntos. Agora, é hora de começarmos a dar alguma expressão para a oposição a essa ideia.

Temos mencionado desde a introdução desta tese que um debate mais explícito sobre a autonomia da teoria das categorias e sua capacidade de fornecer fundamentos - ou um *framework* - para a matemática estruturalista surge com os desafios impostos por Geofrey Hellman principalmente em "*Does Category Theory Provides a Framework to Mathematical Structuralism*".

Propomos que as objeções que foram levantadas por Geofrey Hellman podem ser essencialmente divididas em três partes. Primeiramente, o autor reitera com algumas contribuições o argumento de Solomon Feferman contra o projeto fundacional categórico de Lawvere. Acredito que tal argumento pode ser estendido para qualquer projeto que prescreva a autonomia da teoria das categorias e possivelmente afetar outras propostas baseadas em teorias distintas. Em segundo lugar, temos algumas observações com o objetivo de levantar dúvidas sobre se realmente construções abstratas em termos de categorias seriam compreensíveis sem uma explicação em termos de outras teorias mais intuitivas, como teorias dos conjuntos. Por fim, o que acreditamos ser a objeção central do artigo é a que Hellman denomina de "o problema do endereço residencial". Esse problema gira em torno da ideia de que a teoria das categorias não pode, por si só, fornecer bases para que se decida sobre sentenças afirmando, de forma assertórica, a existência de estruturas tornando verdadeiras as sentenças da matemática. A seguir, discutiremos esses três argumentos em ordem.

3.5.1 Objeção de Feferman

O objetivo da seção que se segue é examinar um dos principais argumentos que foram oferecidos contra a tese de que a teoria das categorias possa constituir um fundamento autônomo para a matemática. O argumento foi apresentado por Solomon Feferman no artigo "Categorical Foundations and Foundations of Category Theory". Originalmente, ele foi desenhado para rejeitar a proposta de fundamentar a matemática em uma teoria da categoria de todas as categorias, mas seu impacto pode ser estendido para muito além dessa proposta específica. A premissa central desse argumento pode ser retraçada à asserção de que a noção de "classe desestruturada de objetos" é logicamente

anterior à noção de “estrutura”, já que essa última é definida como uma classe equipada com relações ou operações. Daí se seguiria que a teoria das categorias, assim como outras teorias algébricas, depende de noções externas e anteriores de “classe” e “operação sobre classes”. Por isso, ela não poderia ser vista como uma proposta autônoma de fundamentos para a matemática.

Desde sua publicação, algumas objeções têm sido feitas ao argumento de Feferman. Iremos expor aquela que parece ser a principal. Essa objeção se baseia no fato de que mesmo que os axiomas para a teoria geral das categorias sejam especificações algébricas de quecondições uma classe precisa satisfazer para ser uma categoria, teorias que descrevem uma categoria especifica não precisam ser lidas algebricamente tal como pressuposto pelo argumento de Feferman. Daí que se pode propor que qualquer teoria que descreva um *topos* seja ela mesma uma teoria autônoma das classes e operações tal como estipuladas pelos axiomas, mesmo que seja uma teoria “meramente local”. Se a intenção for fundamentar não apenas as teorias mais comuns da matemática, mas a própria teoria das categorias, podemos ainda empregar a teoria da categoria de todas as categorias.

Após detalharmos o argumento acima, construiremos nossa própria tentativa de objeção nos seguintes termos: o conceito de “estrutura” pode ser visto por uma teoria como primitivo, enquanto as classes desestruturadas podem ser tratadas como um caso limite de uma estrutura no qual se abstrai das operações ou relações envolvidas. Apesar da ordem das razões na qual uma estrutura é entendida como uma classe desestruturada equipada com operações ou relações ser a mais comumente adotada, a perspectiva inversa não só é possível como de fato já foi instanciada em algumas posições e teorias. De fato, esse ponto de vista é o mais natural para a teoria das categorias. Além disso, como vemos, adotar tal posição é uma condição necessária para um estruturalismo puro, no qual não se pressupõe que a matemática dependa de teorias sobre objetos que não sejam eles mesmos “meras” estruturas abstratas.

3.5.1.1 Preâmbulo ao argumento do Feferman

Será importante para nossos propósitos manter em mente uma diferença entre duas afirmações. A primeira delas, que chamaremos de tese (ou “sugestão”) de Awodey, consiste na afirmação de que, para os propósitos de uma abordagem estruturalista da matemática, deveríamos buscar a noção de estrutura dentro da teoria das categorias. Outra afirmação diferente é a de que a teoria das categorias nos fornece instrumentais para a

fundamentação da matemática de uma maneira alternativa e autônoma em relação aos fundamentos tradicionais em termos de teorias de conjuntos. Por motivos que ficarão evidentes, vamos chamar essa segunda afirmação de "tese de Mac Lane".

Agora, podemos nos perguntar qual a conexão entre a tese de Awodey e a de Mac Lane. Como veremos em mais detalhes posteriormente, Awodey vê sua proposta como intrinsecamente não fundacionalista e, portanto, não condicionada à tese de Mac Lane. Mas, de acordo com Hellman, a sugestão (ou "tese") de Awodey possuiria naturalmente a tese de Mac Lane como um *pressuposto* que, não sendo satisfeito, a impossibilitaria. Sobre a sugestão de Awodey, Hellman diz:

> Essa é uma sugestão intrigante. É naturalmente apreciada no contexto *da repetida alegação de Mac Lane de que a teoria das categorias provê um fundamento autônomo para a matemática como uma alternativa à teoria dos conjuntos*. A razão para isso deve ser clara: se teoria das categorias não for autônoma, mas antes precisar ser vista como sendo, em última instância, desenvolvida dentro da teoria dos conjuntos, então a sugestão de Awodey não poderia ser realizada, pelo menos não na maneira padrão de ler teoria dos conjuntos, a saber, como axiomatizando verdades centrais sobre a "hierarquia cumulativa" (presumivelmente consistindo de conjuntos como "átomos lógicos"). (Hellman, 2003, p. 2)

A objeção de Feferman é empregada para rejeitar a afirmação que estamos chamando de "tese de Mac Lane". Antes de dissertarmos com mais detalhes sobre o argumento, podemos apontar duas razões que parecem motivar matemáticos que trabalham com teoria das categorias a propor que ela é fonte de fundamentos autônomos para a matemática. Relembremos uma dificuldade envolvida na ideia de se pensar a teoria como redutível a alguma teoria mais fundamental das "coleções". Em suma, as mais exemplares amostras de categoria são "grandes demais" para poderem ser definidas como algum tipo de conjunto. Mesmo que adotemos alguma extensão da teoria de Zermelo-Fraenkel, como a teoria Von Neumann-Bernays-Gödel, para distinguir entre "classes próprias" e "conjuntos", a teoria das categorias ainda demandaria uma liberdade para manipular classes próprias que essa teoria estendida ainda não pode oferecer. Agora, suponha que por princípio consigamos adaptar nossas teorias de conjuntos para conseguir fornecer tudo que a teoria das categorias exige. Ainda assim, seria no mínimo duvidoso que o resultado desses arranjos artificiais se harmonizasse de forma natural com a maneira como a teoria das categorias é realmente conduzida.

Além disso, deixando de lado questões mais filosóficas ou lógicas, de um ponto de vista prático, é óbvio que uma fundamentação da matemática mais afim com a teoria das categorias se adaptaria de forma mais natural aos campos da matemática nos quais os

métodos da teoria das categorias já tenham se tornado canônicos. Anunciando a necessidade de uma tal fundamentação, Lawvere assim começa seu artigo no qual é apresentada a axiomatização da teoria da categoria de todas as categorias:

> No desenvolvimento matemático das décadas recentes se vê claramente a ascensão da convicção de que as propriedades relevantes dos objetos matemáticos são aquelas que podem ser estabelecidas em termos de sua estrutura abstrata e não em termos dos elementos que esses objetos foram pensados como sendo constituídos. Então, surge naturalmente a questão de se é possível dar um fundamento para a matemática que expresse sinceramente essa convicção acerca do que a matemática é sobre e, em particular, no qual classes e pertencimento a classes não desempenhe papel nenhum. Aqui, *por "fundamento" queremos dizer um único sistema de axiomas de primeira ordem no qual todos os objetos matemáticos usuais podem ser definidos e todas as suas propriedades usuais provadas*. *Um fundamento do tipo que temos em mente seria aparentemente muito mais natural e facilmente utilizável do que os fundamentos clássicos quando desenvolvendo tais assuntos como topologia algébrica, análise funcional, teorias de modelos de sistemas algébricos gerais, etc*. Claramente qualquer tal fundamento teria que contar com a teoria de Eilenberg-Mac Lane das categorias e funtores (Lawvere, 1966, p. 5, tradução minha).

Feferman apresenta seu argumento como uma objeção ao projeto fundacional de axiomatizar a matemática por meio de uma teoria da categoria de todas as categorias, tal como foi proposto por Lawvere no trecho acima. Ainda assim, o argumento pode obviamente ser lido de forma mais geral como um ataque a qualquer projeto fundacional baseado apenas na teoria das categorias[53]. Mais do que isso, podemos propor que, por princípio, o argumento pode ser aplicado a qualquer eventual proposta fundacional que implique na autonomia lógica de quaisquer teorias cujos objetos básicos sejam dotados de estrutura em alguma medida. Então, é razoável nos indagarmos se essa objeção não se aplicaria igualmente a propostas como os fundamentos univalentes dentro de uma teoria homotópica de tipos, que se baseiam em tomar como *primitivo* uma noção de coleção altamente rica em estrutura. Acreditamos que, no que diz respeito ao argumento de Feferman, a situação dessa proposta fundacional é análoga à da teoria das categorias. Por isso, nos servimos de alguns paralelos entre ambos os projetos para discutir a plausibilidade do argumento.

[53] Que a objeção tenha sido direcionada ao programa de fundamentação mencionado é explicitamente afirmado por Feferman. Meu ponto aqui é que parece trivial que a objeção possa ser estendida para qualquer projeto fundacional onde as noções da teoria das categorias apareçam como as mais fundamentais da matemática, desde que aceitemos, claro, a premissa de que as noções de classe e operação devem ser propriamente *explicadas* dentro da teoria fundamental.

3.5.1.2 O argumento propriamente dito

O ponto de partida do argumento é a premissa, difícil de ser posta em dúvida, segundo a qual fornecer as noções fundamentais de "coleção em geral" e de "operação arbitrária sobre coleções" é um dos requisitos essenciais de uma proposta de fundamentos para a matemática. Suponhamos que essa premissa esteja correta. Nesse caso, é possível argumentar que a teoria das categorias não poderia fornecer fundamentos últimos para a matemática, uma vez que ela pressuporia as noções mais fundamentais de "coleção" e "operação", em vez de propriamente esclarecê-las.

Essa conclusão se baseia na ideia de que conceitos introduzidos para se classificar estruturas, assim como o próprio conceito geral de estrutura, dependem definicionalmente das noções prévias de "classe" (ou "coleção") e de uma "operação" entre esses últimas. Dentre esses conceitos para se classificar estruturas estariam pelo menos conceitos algébricos como grupos, anéis, etc, mas também o conceito geral de "categoria", além dos conceitos mais específicos que resultam de acrescentar aos axiomas para categorias determinações posteriores, como o conceito de "topos" e outros que correspondem a categorias com certas propriedades específicas. Todos esses conceitos podem ser *explicitamente* definidos por sistemas de axiomas estruturais classificatórios que estipulam quais condições uma coleção equipada com operações deveria satisfazer para cair sob o conceito. Somente quando estamos de posse de conceitos não estruturados de "coleção" e "operação" é que é possível fazer sentido de definições da forma "uma estrutura do tipo x é uma coleção de elementos junto com operações satisfazendo tais axiomas...", mas essas definições são precisamente o ponto de partida das teorias estruturais. Portanto, as noções de "coleção" e "operação" deveriam ser buscadas em algum outro lugar que não em uma tal teoria estrutural. Como opções, temos teorias extensionais de conjuntos e teorias intensionais de tipos. Essa última alternativa é a defendida por Feferman.

Na verdade, as coisas ficam ainda piores para a autonomia da teoria das categorias do que essa formulação inicial do argumento sugere. Não só as noções de "coleção" e de "operação" são empregadas na hora de se definir o próprio conceito de categoria, como também aparecem de forma crucial nas etapas posteriores de desenvolvimento da teoria, na medida em que construções realizadas em termos de categorias são definidas como classes de - ou operações sobre - categorias:

> [...] ao explicar a noção de homomorfismos entre grupos ou funtores entre categorias, etc., devemos novamente entender o conceito de operação. Depois, para seguir a teoria das categorias para além das definições básicas, devemos lidar com questões de completude, que são formuladas em termos de coleções de morfismos. Depois, para verificar completude em categorias concretas, devemos formar a operação de produto cartesiano sobre coleções de suas estruturas. Então, em cada passo devemos fazer uso das noções não estruturadas de operação e coleção para explicar as noções estruturais a ser estudadas. A prioridade lógica e psicológica, se não a primazia das noções de operação e coleção é, portanto, evidente. (Feferman, 1977, p.150, tradução minha)

3.5.1.3 O que o argumento significa

Podemos começar a tentar entender o que de fato está em jogo no argumento acima nos colocando a seguinte questão: quando Feferman diz que a teoria das categorias não pode fornecer fundamentos para a matemática, o que a palavra "fundamentos" significaria aí? Ao longo de toda sua carreira, Lawvere claramente variou bastante o seu entendimento da ideia de que teoria das categorias é um fundamento para a matemática. Mas a citação que fornecemos alguns parágrafos acima traz explicitamente a ideia de que o "fundamento" baseado na teoria da categoria de todas as categorias seria um sistema de axiomas em primeira ordem que permitiria *provar* todas as propriedades *usuais* dos objetos matemáticos *usuais*. É interessante notar que essa proposta é formulada com o objetivo explícito de reduzir as sentenças ordinárias da matemática a um pequeno conjunto finito de asserções, mas sem que seja implicado, mencionado ou cogitado, a ideia de que tais asserções básicas seriam escolhidas por serem mais difíceis de negar - ou supor como falsas - do que as asserções derivadas. Em outros termos, "fundamentos" no sentido epistemológico não parecem estar em jogo nesse contexto. Essa é a proposta que Feferman diz explicitamente estar atacando. Mas creio que se lançarmos algumas dúvidas sobre se é exatamente essa ideia que é atingida pelo argumento, iluminamos alguns de seus pressupostos.

Em Marquis (1995) encontramos uma interessante análise dos diversos sentidos que a relação "x ser um fundamento para y" adquire em diversas filosofias da matemática. Na opinião do autor, a própria filosofia da matemática seria meramente a atividade de ordenar e escolher quais desses sentidos são mais fundamentais e relevantes, além de determinar como eles se relacionam entre si. Ainda de acordo com Marquis, o debate acerca do estatuto fundacional da teoria das categorias (bem como o desacordo entre as

partes envolvidas em tal discussão) pode até mesmo ser iluminado quando levamos em conta que aqueles que levantaram argumentos contra o estatuto fundacional da teoria, em geral, privilegiam um sentido "epistêmico" ou o "cognitivo" de "fundamentos", em detrimento de outros possíveis sentidos como o "lógico", que é associado à proposta axiomática de Lawvere. Marquis define a relação "x é fundamento cognitivo de y", onde tanto x quanto y são teorias, do seguinte modo: os conceitos da teoria y não podem ser *compreendidos* sem que já se tenha compreendido os conceitos da teoria x. Ou de modo equivalente: os conceitos da teoria x são necessários para que se entenda os conceitos da teoria y. Desse ponto de vista, podemos propor que o argumento de Feferman seja entendido precisamente como a alegação de que a teoria das categorias não pode ser um fundamento cognitivo para a matemática. Nessa interpretação, ele se basearia na tese de que para que se possa "entender" o que é uma estrutura - ou tipos particulares de estruturas tais como categorias - primeiro deve-se entender alguma noção "não estrutural" de "coleção" e "operação".

Formulado dessa maneira, a mais óbvia objeção que se poderia apresentar à Feferman - e de fato essa objeção foi sugerida por Mac Lane - é que o autor atribui uma espécie de prioridade psicológica aos conceitos de "coleção" e "operação" em relação aos conceitos ditos "estruturais", mas tal prioridade é, em larga medida, subjetiva. Matemáticos distintos possuem intuições distintas. Matemáticos que foram treinados de formas diferentes tendem a entender mais facilmente noções diferentes. Existe algo de arbitrário e subjetivo na hora de se decidir qual noção deve ser primeira na ordem do conhecimento. Não parece se seguir imediatamente do fato de que as pessoas primeiro aprendam um certo conceito via um outro conceito que elas já dominam, que o conceito posterior deva necessariamente ser definido em termos do conceito anterior. Não precisamos argumentar aqui contra essa tese. Mas gostaríamos de deixar claro que talvez ela esteja sendo tomada por garantida sem que necessariamente tenha sido defendida argumentativamente.

A essa objeção, Feferman certamente replicaria que quando ele fala em "prioridade" dos conceitos de *operação* e *coleção* em relação aos conceitos estruturais, não está se referindo ao tipo de "prioridade cognitiva" ou "psicológica" que tenho em mente e sim que:

> [...]os conceitos gerais de operação e coleção possuem prioridade *lógica* com respeito às noções estruturais (tais como 'grupo', 'categoria', etc.) *porque as últimas são definidas em termos da primeira e não conversamente*. Ao mesmo tempo, acredito que a experiência

> demonstra sua *prioridade psicológica*. Entendo que praticantes da teoria das categorias se sentem tão em casa em seu assunto que eles acham mais natural pensar em termos categóricos em vez de termos conjunto-teóricos, mas eu compararia isso com não precisar ouvir, uma vez que se aprendeu a compor músicas. (Feferman, 1977, p. 153, tradução minha, ênfase minha).

Então, podemos defender o argumento de Feferman dessa objeção afastando essa interpretação psicológico-cognitiva para o argumento. A afirmação que enfatizamos na citação acima parece deixar claro que a suposta anterioridade lógica dos conceitos de "classe" e "operação" é respaldada na *situação factual* de que o conceito de categoria seja introduzido como uma coleção de um certo tipo. De fato, uma definição algébrica do conceito de "categoria" nesses moldes é o ponto de partida de boa parte das apresentações da teoria e até mesmo de alguns trabalhos matemáticos fora do campo da teoria pura, mas que aplicam alguns de seus conceitos. O mesmo vale para outras teorias algébricas. Essa "ordem das definições" realmente parece a mais natural do ponto de vista ortodoxo, já que uma estrutura usualmente é definida como uma coleção equipada com certas relações ou operações. Feferman trata essa ordem como tão óbvia que ela não parece nem mesmo ter sido digna de uma justificação mais profunda do que a alegação de que é assim que de fato se procede em matemática. Mas existe a possibilidade de se proceder em uma ordem diferente?

É importante notar que essa ordem das definições não é desejável do ponto de vista de alguém que queira adotar uma versão purista do estruturalismo, i.e., uma forma de estruturalismo que não dependa de entidades matemáticas - ou conceitos matemáticos - não estruturais. Feferman explicitamente demanda que a noção pré-estrutural de conjunto seja anterior a de uma estrutura.

3.5.1.4 Uma sugestão de contraponto ao argumento

McLarty propõe que a teoria das categorias seja vista como uma teoria autônoma das classes. Nessa seção, examinamos a plausibilidade dessa afirmação. Apesar de defendermos que as noções de *classe desestruturada* e de uma o*peração em geral que não necessariamente preserva estrutura* não deveriam ser vistas como fundamentais e básicas, concordamos que qualquer teoria das classes descrita em termos categóricos cumpre esse papel em igualdade de condições com a de qualquer teoria de conjuntos tradicional.

A definição algébrica de categoria dada pelos axiomas de Eilenberg-Mac Lane faz referência explícita a alguma noção prévia e *indeterminada* de "classe", mas a teoria das categorias conta também com conceitos internos que cumprem o papel de corresponder a operações e coleções das outras teorias. Para deixar isso óbvio, considere o exemplo dos grupos de automorfismos. Um grupo de automorfismos pode ser descrito, em termos conjuntos-teóricos, como um conjunto domínio S equipado com um conjunto F de operações unárias $S \rightarrow S$, tal que:

i) A função identidade $\{f(x) = x | x \in S\} \in F$;

ii) Se $f(x)$ e $g(x) \in F$ então $f(g(x)) \in F$;

iii) Se $f(x) \in F$ então $f^{-1}(x) \in F$.

Mas podemos também descrever um grupo de automorfismos como simplesmente uma categoria formada por um certo objeto A junto com seu morfismo identidade Id_A correspondendo ao axioma (i), uma lista de endomorfismos $f: A \rightarrow A$ fechada sobre composição correspondendo ao (ii) e satisfazendo a condição de que todo morfismo f é um isomorfismo, correspondendo ao (iii). As "operações" mencionadas na definição tradicional conjunto-teórica de um grupo de automorfismos correspondem, precisamente, a *morfismos* em uma certa categoria; à "classe" que é o domínio do grupo corresponde um *objeto*. Desse modo, quando o teórico das categorias precisa do conceito de "operação", ele emprega o de "morfismo"; quando o conceito de "classe" se faz necessário, emprega-se o conceito de "objeto".

Na definição tradicional, um grupo consistia em um conjunto equipado com uma operação, que para muitos usuários de teorias de conjuntos também pode ser reduzida a um conjunto. Mas uma vez que formulemos o conceito de grupo de automorfismo categoricamente, o conceito passa a poder ser aplicado em outras categorias que não a dos conjuntos e, assim, ganha um novo nível de generalidade. Dessa maneira, os próprios conceitos de "objeto" e "morfismo" podem cumprir papéis muito similares aos conceitos de "conjunto" e "função", dentro de certos contextos particulares, mas ao mesmo tempo eles retêm uma generalidade maior que permite dizer que o conceito de objeto abarca outras coisas além de conjuntos e, claro, o mesmo pode ser dito do conceito de "morfismo" em relação ao de "função".

Dado que as noções de "objeto" e "morfismo" em algum sentido e alguma medida funcionam respectivamente tal como as noções de "conjunto" e "operação", parece plausível que alguém sustente, ao mesmo tempo, a posição de que os fundamentos da matemática devem residir em uma teoria geral das coleções e operações e a posição de

que a teoria das categorias é exatamente uma tal teoria. Essa posição parece de fato adotada por McLarty:

> Obviamente, concordo com Feferman que os fundamentos da matemática residem em uma teoria geral das operações e coleções, mas eu diria que correntemente a melhor teoria geral desses os chama de "setas" e "objetos". É a teoria das categorias. (McLarty, 2005, p. 49).

Uma objeção muito semelhante à que tenho em mente aqui foi proposta em outro contexto por Michael Shulman. Shulman argumenta por uma substituição dos fundamentos baseados em teorias de conjuntos por fundamentos baseados na teoria homotópica de tipos. Essa proposta é conhecida como "fundamentos univalentes". Tanto os fundamentos mais tradicionais quanto os fundamentos univalentes são baseados na noção de uma "coleção". Nos fundamentos clássicos, coleções são tratadas como conjuntos não estruturados de elementos cuja identidade é previamente determinada antes da reunião dos elementos na coleção. Mas nos fundamentos univalentes, as coleções básicas a partir das quais os objetos matemáticos são construídos são já uma estrutura algébrica bastante complexa conhecida como um "ω-grupoide" (ou também como "∞-grupoide"). A identidade de um elemento de um ω-grupoide é determinada por uma relação de identidade/equivalência[54] interna ao ω-grupoide. Além disso, há uma hierarquia infinita de relações de identidade de nível superior determinando se duas relações de identidade do nível inferior são uma mesma relação ou se são relações distintas, de tal modo que dois elementos podem vir a ser idênticos de *duas maneiras* diferentes. Apesar da complexidade formal em fazê-lo, essa estrutura pode, naturalmente, vir a ser definida dentro de alguma teoria de conjuntos qualquer. Nas palavras de Shulman:

> Um matemático moderno provavelmente tentaria dar uma definição de ∞-grupoide, tal como "um ∞-grupoide consiste de uma coleção de elementos, junto com uma coleção para cada dois elementos x, y de maneiras nas quais x = y e, para quaisquer duas maneiras f, g, uma coleção de maneiras nas quais f=g e assim por diante, mais operações...". Claramente, qualquer tal definição deve se referir a uma noção anterior de "coleção", a qual um matemático moderno provavelmente interpretaria como "conjunto". Essas definições de ∞-gropoides são comumente usadas, apesar de elas serem bastante complicadas combinatoriamente. (Shulman, 2017, p. 41, tradução minha)

[54] O mais famoso axioma da teoria, o axioma da univalência diz, informalmente, que identidade é equivalente a equivalência.

Apesar da noção de um *ω-grupoide* poder ser definida via a noção de *conjunto*, dentro da teoria homotópica de tipos ela é tratada como uma noção absolutamente primitiva. Do ponto de vista de um matemático treinado nos fundamentos tradicionais, pode ser mais natural começar pela noção não estruturada de um conjunto e depois introduzir um ω-grupoide, se necessário, como um conjunto com uma determinada estrutura adicional. Mas na teoria homotópica de tipos é a noção de "conjunto" que passa a ser introduzida como um caso limite de um ω-grupoide, um bastante "degenerado" no qual a identidade de cada elemento é dada trivialmente.

De acordo com Shulman, a teoria homotópica de tipos seria uma teoria sintética, no sentido de que, a noção primitiva de "ω-grupoide" seria "definida implicitamente" pelos axiomas da própria teoria.

A analogia que eu quero introduzir para o debate sobre o estatuto da teoria das categorias, reside na afirmação de Shulman de que não podemos rejeitar uma teoria fundacional sintética alegando que ela requer alguma noção que seja anterior à introdução da teoria. O fato de que a teoria não requer que seus conceitos sejam introduzidos dentro de alguma outra teoria é uma consequência trivial do simples fato de que ela é sintética[55]. É possível uma leitura da teoria das categorias que resulta em interpretá-la precisamente como uma teoria sintética das classes e das operações? Shulman não parece concordar que a teoria das categorias introduzidas pelos axiomas de Eilenberg e Mac Lane seja sintética no sentido que estamos falando, mas concede que versões da teoria da categoria de todas as categorias, como a de Lawvere, possam ser.

À primeira vista, essa possibilidade parece resolver algumas dificuldades, ao estabelecer que a teoria pode não demandar uma outra teoria das operações e classes como plano de fundo, já que é ela mesma uma das possíveis opções. Contudo, não devemos nos apressar aqui, pois uma dificuldade precisa primeiro ser contornada antes que essa proposta possa ser dita plausível. Ela pode ser expressa nos termos do parágrafo seguinte.

O argumento de Feferman pressupõe que tratemos os axiomas da teoria das categorias como "não-assertóricos" ou algébricos. O ponto é precisamente que as noções de coleção e de operação parecem necessárias para que se especifique o que é que significa dizer de *algo* que ele satisfaz os axiomas que formulamos: classes e operações seriam o que constituem esse "algo", que informalmente chamamos de "estrutura". Se o

[55] "We cannot dismiss a new synthetic foundational theory by claiming that it 'requires some preexisting notions': the simple fact of being synthetic means that it does not"(Shulman, 2018, p. 42)

ponto do argumento é que uma categoria realmente precise ser introduzida como uma coleção de um certo tipo, talvez alguém poderia não ficar satisfeito com a resposta de que a teoria das categorias é precisamente a teoria das classes e das operações. O que estaria em jogo não seria apenas uma noção de classe que possa ser fornecida de forma interna a uma categoria (pela noção de "objeto"), mas uma que deve ser fornecida antes que se introduza a noção de categoria, dando sentido preciso a uma definição da forma: "uma categoria é uma *classe* de objetos e uma *classe* de morfismos sujeitos a uma *operação* de composição com tais e tais propriedades...". Desse modo, pode-se argumentar que noções internas que figuram nos axiomas da teoria não seriam suficientes para prover o necessário, já que o que está em questão é precisamente uma noção anterior necessária para fazer sentido do próprio conceito de categoria e, consequentemente, dos conceitos de "objeto" e "morfismo" em uma categoria. Retornamos aqui à questão que fizemos no fim da seção passada. O defensor da autonomia da teoria das categorias precisa mostrar que exista alguma alternativa à ideia de usar como ponto de partida um conceito prévio de classe.

Se olharmos na formulação da proposta que Feferman diz estar atacando, veremos que Lawvere não formula suas teorias fundacionais por meio de alguma caracterização algébrica de categorias "muito abrangentes". Na verdade, se inspecionamos tanto as primeiras formulações da teoria da categoria dos conjuntos quanto da teoria da categoria de todas as categorias, vamos encontrar uma sofisticada formulação metateórica do que contaria como uma fórmula e um teorema da teoria a ser apresentada. Nessa formulação metateórica, nenhuma menção é feita aos axiomas algébricos classificatórios que foram originalmente empregados por Eilenberg e Mac Lane ou qualquer outro sistema similar. Lá, o que se pretende axiomatizar é quais as sentenças são consideradas verdadeiras do "ponto de vista" da categoria em questão e não quais as condições estruturais uma categoria precisaria satisfazer para ser uma categoria de todas as categorias ou de todos os conjuntos. A diferença pode parecer sutil à primeira vista. Mas é importante notar que a formulação não se serve de nenhum axioma que deva ser entendido de forma classificatória ou algébrica, mas apenas de asserções em sentido pleno.

Afirmações similares podem ser aplicadas a outras possíveis propostas fundacionais baseadas na teoria das categorias. Podemos nos perguntar quais as propriedades estruturais que caracterizam, por exemplo, o *topos* de todos os conjuntos ou algum outro topos particular. Mas podemos também afirmar assertoricamente os axiomas que caracterizam esse *topos*. Quando isso é feito, nenhuma referência a uma teoria geral

das categorias, no sentido que é dado pelos axiomas algébricos que Eilenberg e Mac Lane ofereceram, precisa figurar nos axiomas. Tudo que é necessário e suficiente é asserir o que é verdadeiro na linguagem interna da categoria em questão. É claro que a perspectiva algébrica segue útil para se ganhar transparência sobre as relações entre os diferentes contextos ou coisas similares. Mas é justo não se inferir disso que uma teoria fundacional particular, uma teoria local de conjuntos para usar a expressão de Bell, dependa logicamente dos axiomas algébricos da teoria geral das categorias.

Se uma teoria fundacional expressa na linguagem da teoria das categorias, como uma teoria interna de um *topos*, pode ser expressa por sentenças que possam ser entendidas de forma puramente assertórica, então torna-se plausível que ela seja concebida como uma teoria fundamental das coleções e operações. Se isso for plausível, então aquele que queira defender a posição de Feferman necessita de argumentos posteriores para explicar porque a teoria não poderia ela mesma ser pensada como uma teoria das noções de "coleção" e "operação".

Em sua resposta ao argumento de Feferman, McLarty pontua que, do ponto de vista dos axiomas de Eilenberg-Mac Lane, uma categoria é *qualquer coisa que satisfaça os axiomas*, mas do ponto de vista de alguma proposta de teoria de todas as categorias, uma categoria é simplesmente aquilo cuja existência se segue dos axiomas.

Assim, se o argumento de Feferman é contra o projeto de uma fundamentação da matemática em termos de uma categoria de todas as categorias, então ele erra o alvo. Aquilo que o argumento realmente mostra é que axiomas algébricos para categorias, como os axiomas de Eilenberg-Mac Lane, não podem ser fundamentos para a matemática, uma vez que eles de fato pressupõem um conceito prévio de classe e operação. Por isso, como diz McLarty, ninguém nunca propôs que tais axiomas servissem como fundamentos para a matemática. Fundamentos axiomáticos, como a teoria categoria de todas as categorias, não podem ser ditos pressupor tais conceitos ou, se puderem, é necessário evocar razões diferentes para justificar essa segunda tese.

Uma razão convincente parece ter sido fornecida por Hellman nos seguintes termos. A proposta de que essas teorias possam ser lidas de forma assertórica se baseia em um apelo a uma interpretação pretendida para as noções primitivas da teoria das categorias. Quando apelamos à ideia de que os axiomas estariam fornecendo a definição implícita dos conceitos de "classe" e "operação", estamos interpretando fixamente a operação categórica de composição como "composição de funções"; a noção de "objeto" está sendo interpretada como "domínio e contradomínio de funções"; e morfismos, por

sua vez, estão sendo vistos como funções ou mapeamentos. Contudo, muitas vezes teóricos das categorias se servem sistematicamente de uma leitura algébrica ou "formalista" dos axiomas e da consequente flexibilidade que essa leitura fornece aos conceitos básicos. Essa perspectiva "algébrica" não aparece apenas no desenvolvimento prático da matemática, mas também em algumas formulações de argumentos mais filosóficos.

Desde o capítulo anterior, temos tentado mostrar que os conceitos típicos da teoria das categorias gozam de uma flexibilidade talvez sem precedentes. Coisas tão diferentes quanto um universo de estruturas conectadas por homomorfismos e um sistema particular de objetos ordenados (desde que satisfaça condições apropriadas) podem ambos ser tratados como categorias. Portanto, pode-se considerar as relações entre essas construções por meio dos funtores que emergem dessa abordagem. Além disso, ao considerar as propriedades que essas diferentes categorias possuem, por meio das propriedades pertinentes à linguagem da teoria das categorias, podemos unificar o estudo dessas diferentes construções sob uma base comum. Desse modo, as múltiplas interpretações que os conceitos primitivos da teoria podem ter são um componente crucial para explicar seu poder "unificador", i.e., sua capacidade em fornecer uma linguagem comum para os diversos campos da matemática. Nas Palavras de Awodey:

> Em teoria das categorias, tais noções como relação, conexão, propriedade e operação são todas subsumidas à noção primitiva de morfismo. Ela é geral e flexível o suficiente para fazer o trabalho de todas essas noções e mais. Precisa de relações? Use produtos e monomorfismos; operações? Morfismos sobre produtos; homomorfismos? Considere a categoria de estruturas; conexões entre estruturas? Categorias de funtores. E assim por diante. Muitos fenômenos aparentemente diferentes podem ser descritos de uma forma uniforme e, assim, facilmente relacionável uns com os outros, pela linguagem da teoria das categorias. (Awodey, 2004 p. 10)

A possibilidade de "interpretações alternativas" para o conceito de categoria também pode ser empregada como uma premissa para justificar que a teoria é epistemicamente expansiva. Que tipo de conhecimento alguém ganha quando aprende teoria das categorias? Em que sentido a teoria das categorias pode ser dita alargar o conhecimento matemático? Quando subsumimos, por exemplo, tanto o conceito de uma tautologia em lógica quanto o de um "espaço topológico de um único ponto" sob o conceito de um "objeto terminal em uma categoria", passamos a reconhecer uma certa relação de semelhança estrutural bastante abstrata entre os dois primeiros conceitos em virtude de serem ambos casos particulares de uma propriedade universal. Essa relação é

uma legítima nova informação que não era exprimível anteriormente: é efetivamente um novo conhecimento sobre esses objetos.

Também é importante pontuar que, à primeira vista, é a possibilidade dessas interpretações alternativas que torna possível a autoaplicação que nos permite falar em uma categoria cujos objetos são categorias e cujos morfismos são funtores. Assim, se uma teoria da categoria de todas as categorias é de fato possível, parece ser o caráter "formal" dos axiomas de Eilenberg-Mac Lane que permite que a própria linguagem da teoria das categorias possa ser utilizada para axiomatizar as propriedades dessa categoria.

Argumentamos em favor da seguinte situação: por um lado é verdade que, na maioria das vezes, os axiomas da teoria das categorias são compreendidos como algébricos ou formais. Como tentei justificar, essa compreensão parece fundamental para articular uma visão estruturalista baseada na teoria das categorias. Mas também é verdade que os axiomas de uma teoria interna de uma categoria particular não precisam sempre ser entendidos através de alguma leitura algébrica de alguma asserção. Existe algum tipo de contradição real aqui? É proibido ou conceitualmente absurdo que os mesmos termos possam ser lidos uma hora como termos flexíveis abertos a múltiplas interpretações e outra como possuindo uma interpretação fixa num contexto fundacional particular?

Curiosamente, essa possibilidade de uma leitura algébrica e outra leitura assertórica é válida para as teorias fundacionais mais tradicionais baseadas em conjuntos. Pode-se ver uma determinada teoria axiomática de conjuntos como expressando verdades sobre um universo de objetos que supostamente abarcariam toda a matemática. Mas também é possível examinar quais as propriedades particulares que um determinado universo de conjuntos possui e como é que ele se distingue de todos os outros que poderiam ser propostos. Nesse sentido, André Joyal e Ieke Moerdjik, autores também relevantes no desenvolvimento da teoria dos topos, propuseram que cada teoria clássica de conjuntos fosse vista como uma "álgebra de Zermelo-Fraenkel" e que se falasse em uma "teoria algébrica dos conjuntos" [56]. Portanto, afirmações de que existe uma assimetria entre teorias tradicionais de conjuntos e teorias categóricas, de tal modo que só as primeiras podem ser lidas assertoricamente, ao passo que as segundas só poderiam ser lidas algebricamente são, no mínimo, discutíveis. Tanto teorias materiais de conjuntos quanto teorias estruturais em termos categóricos podem ser lidas assertórica ou algebricamente. O contexto e os objetivos são o que determina qual o tipo de leitura dos

[56] Cf. Joyal; Moerdijk, 1995.

axiomas que será adotado. Quando pretendemos fundamentar a matemática, no sentido de prover as mais essenciais premissas para as provas das proposições usuais da matemática, recorremos a uma leitura assertórica. Quando temos a intenção de contrastar, comparar e relacionar os diferentes "universos" que uma teoria de conjuntos, estrutural ou não, descreve, recorremos a uma leitura algébrica dos axiomas.

3.5.1.5 Porque acreditamos que o argumento não é válido

Não temos nenhum argumento contra a ideia de que uma teoria fundacional escrita em linguagem da teoria das categorias possa ela mesma ser uma teoria autônoma das classes, tal como proposto por McLarty, já que as sentenças que descrevem uma categoria particular podem perfeitamente ser entendidas de forma assertórica como as de qualquer teoria de conjuntos ou tipos. Mesmo assim, as razões pelas quais pretendemos rejeitar o argumento de Feferman são, na verdade, mais fundamentais. Rejeitamos a própria necessidade de se acreditar na premissa de que uma teoria de classes não estruturadas deve ser conceitual e logicamente anterior à noção de estrutura. A ideia de que uma teoria estrutural dependa logicamente de uma teoria não estrutural de classes, que seriam as coisas "instanciando" a estrutura, torna inviável que uma posição estruturalista "pura" forneça uma concepção adequada do objeto da matemática. Uma vez que em algum ponto do desenvolvimento dessa área do conhecimento seria necessário fazer referência a objetos com critérios de identidade extraestruturais, estruturalismo puro seria uma tese literalmente falsa.

É claro que quando Lawvere propõe a teoria elementar da categoria dos conjuntos como uma teoria autônoma de conjuntos, ele não está dizendo que esses conjuntos podem ser identificados a mais do que um isomorfismo. Pelo contrário, eles seriam meros "conjuntos abstratos" e, por isso, resultariam da abstração da identidade particular dos elementos.

Uma metáfora frequentemente empregada para descrever a relação entre um conjunto domínio e uma estrutura definida sobre o conjunto é pensá-lo como uma espécie de "suporte", uma base em cima da qual a estrutura pode ser construída ou equipada. Nessa metáfora existe uma assimetria clara entre o que é um conjunto domínio e o que seria, por exemplo, um monoide ou um grupo. Essa diferença se expressa nos seguintes termos. Suponhamos um certo conjunto A o qual podemos equipar com uma operação binária associativa com elemento neutro. Uma escolha de uma operação específica

satisfazendo essas condições singulariza um certo monoide M. Nessa situação, dizemos que o conjunto A é o domínio do monoide M. Se constatamos que a operação binária do monoide também possui um elemento inverso para qualquer elemento de A, então notamos que M não é apenas um monoide como também é de fato um grupo. M possui então uma estrutura de monoide e uma estrutura de grupo. Apenas para fins de diferenciar entre essa estrutura enquanto grupo e enquanto monoide, vamos chamar o grupo de G. De fato, G e M são o mesmo objeto matemático: um mesmo conjunto, equipado com uma mesma operação. Mas quando nos referimos ao monoide M, "esquecemos" a estrutura de grupo, ou seja, não levamos em conta que a operação possui elementos inversos. O conjunto A é o "suporte" em cima do qual tanto M quanto G podem ser construídos. Já a estrutura monoidal de M é uma estrutura mais genérica do que a estrutura de grupo que atribuímos a G; ela resulta de abstrair da operação sobre A uma certa determinação. Essa relação entre M e G não pode de forma alguma ser descrita como "M é o domínio de G". De fato, o uso da expressão "domínio" aqui, no contexto de uma teoria dos modelos, é tal que não se diz propriamente de uma estrutura algébrica que ela é o domínio, por exemplo, de seus homomorfismos. Estritamente falando, é sempre o conjunto subjacente que é o domínio de algum mapeamento, seja das operações algébricas, seja dos homomorfismos entre estruturas. Desse ponto de vista, a exigência imposta por Feferman de que primeiro seja dada à teoria das classes para que se possa num momento posterior se falar em estruturas de um dado tipo definidas sobre essas classes é razoável.

A maneira como a teoria das categorias lida com estrutura diverge em pontos cruciais desse cenário que descrevi no parágrafo anterior. Cada estrutura é vista como um "objeto" em uma categoria, e a noção de objeto é tratada como primitiva. Ao considerar as propriedades de um objeto, não é possível olhá-lo isoladamente. Temos que olhar para a categoria dentro da qual ele se encontra e levar em consideração as propriedades dos morfismos nos quais o objeto aparece como domínio ou contradomínio. Assim, o conjunto A é entendido como objeto na categoria dos conjuntos. O monoide M como objeto na categoria dos monoides e o grupo G como um objeto na categoria dos grupos. Grosseiramente falando, a diferença crucial entre essas categorias é uma questão de "riqueza" de morfismos disponíveis. A categoria dos conjuntos contém todas as funções arbitrárias entre conjuntos. A categoria dos monoides sobre esses conjuntos possui apenas aquelas funções que respeitam a estrutura de monoide e a categoria de grupos, por sua vez, apenas as que respeitam a estrutura de grupo. Quanto mais estrutura interna uma

categoria possui, i.e., mais morfismos estão disponíveis, menos específica é a estrutura interna dos objetos que a compõem.

Podemos nos perguntar qual a relação que uma categoria de grupos possui com a categoria dos monoides e dos conjuntos subjacentes. Relações entre categorias podem ser expressas em termos dos funtores que conseguimos descrever entre elas. Um clássico tipo de funtor que pode surgir entre duas categorias são os chamados "funtores de esquecimento". Apesar de não haver propriamente um consenso sobre como elaborar a definição formal e precisa do conceito, um funtor de esquecimento pode ser intuitivamente descrito como um funtor $F: A \rightarrow B$ que mapeia os objetos e morfismos de uma categoria A nos de uma categoria B de tal maneira que alguma "estrutura" dos objetos de A seja esquecida ao longo do mapeamento. Dada a categoria dos grupos sobre um universo de conjuntos, pode-se falar no funtor de esquecimento $U: Grupos \rightarrow Conjuntos$. Tal funtor mapeia cada grupo no conjunto domínio do grupo e cada homomorfismo de grupo na função subjacente. Mas pode-se também tomar a categoria dos grupos abelianos e se falar no funtor de esquecimento que mapeia um grupo abeliano "em si mesmo"[57] na categoria dos grupos, abstraindo da comutatividade da operação do grupo. Depois, o mesmo pode ser feito para se passar da categoria dos grupos para a dos monoides, dessa vez abstraindo da existência de um elemento inverso. Por fim, o mesmo se aplica na passagem da categoria dos monoides para a dos conjuntos. Pode-se, portanto, representar metaforicamente a relação entre essas categorias na seguinte pirâmide:

[57] Do ponto de vista conjuntístico, pode-se dizer que esse "grupo" seria literalmente o mesmo objeto, já que ele consistiria no mesmo conjunto equipado com a mesma operação e satisfazendo as mesmas propriedades. Note, porém, que do ponto de vista da teoria das categorias essa identificação não pode possuir sentido literal. Um objeto só existe no contexto de uma categoria e suas propriedades derivam dos mapeamentos que ele possui para com todos os outros objetos da categoria. O que importa, aqui, não é *de que* um objeto é feito, mas como ele se relaciona com os outros objetos do contexto. Um objeto na categoria dos grupos nunca é propriamente um objeto na categoria dos monoides, já que o sistema de mapeamentos nos quais ele aparece é outro.

A proposta do diagrama acima é representar a ordem de generalidade e especificidade da estrutura codificada em cada uma das categorias que estamos usando como exemplo. Uma vez que um mapeamento entre dois conjuntos não precisa preservar nenhuma estrutura para ser um mapeamento entre conjuntos, essa categoria é "mais ampla" e genérica. As outras categorias emergem da imposição de restrições cada vez mais fortes nos mapeamentos que podem habitar a categoria.

Esses "fatos categóricos" básicos parecem sugerir um tratamento da noção de estrutura muito diferente daquele típico das teorias de modelo. Um conjunto "desestruturado", aqui, não aparece como algo que meramente subjaz uma estrutura, mas que possuiria uma natureza inteiramente distinta dela. Aparece, na verdade, como um caso limite no qual as restrições sobre mapeamentos preservando estrutura foram removidas. Dessa forma, em um certo sentido, a seguinte afirmação é verdadeira: "Um conjunto está para um monoide assim como um monoide está para um grupo". Essa afirmação parece intolerável do ponto de vista das tradicionais teorias materiais de conjuntos e das teorias de modelos que se servem desses conjuntos como semântica de sistemas formais. Conjuntos são vistos por essas teorias como algo inteiramente distinto do que temos chamado de "estrutura abstrata". Já aqui, por outro lado, conjuntos são apenas um caso limite de uma estrutura na qual nada mais é relevante a não ser quantos elementos compõem a estrutura. Quantidade de elementos parece ser a única propriedade *necessariamente preservada* por um isomorfismo na categoria dos conjuntos.

O impacto dessa reflexão sobre o argumento de Feferman é, que do ponto de vista categórico, não se deveria aceitar a premissa de que a noção de classe precisa ser vista como anterior à noção de estrutura. A noção primitiva é a de um objeto em uma categoria. Tanto estruturas quanto classes "desestruturadas" são casos particulares de objetos em

certas categorias. Se defendermos a plausível posição de que a noção categórica adequada para desempenhar o papel de ser a noção de "estrutura" é o conceito de "objeto em uma categoria", então a noção de estrutura é um primitivo obviamente anterior à própria noção de conjunto. Conjuntos são casos particulares de objetos em uma categoria. Mas mesmo se a noção adequada de estrutura não for a de um objeto, não parece haver razões para acreditar que a definição de um conjunto necessite preceder a de uma estrutura.

Existe um sentido no qual a noção de "conjunto" é anterior a, por exemplo, a noção de um "monoide". No mesmo sentido que a noção de "monoide" é anterior a de "grupo". Portanto, dizer que a teoria dos conjuntos não estruturados precisa ser feita antes que se possa fazer uma teoria das estruturas de um dado tipo é algo similar a dizer que não se pode fazer teorias de grupos sem primeiro precisar de uma teoria geral dos monoides. Essa afirmação pode soar como algo razoável, mas relembremos que um passo importante na história da teoria das categorias foi a formulação inteiramente autônoma e categórica que Grothendieck forneceu para a categoria dos grupos abelianos. Ali, não houve nenhuma precedência definicional dessa categoria para com outras categorias que descreveriam alguma estrutura mais geral.

Podemos observar ainda que parece óbvio que uma proposta na qual uma noção primitiva de estrutura é primeiramente introduzida para em seguida caracterizarmos classes como tipos especiais (aliás um caso limite) de estruturas é desejável do ponto de vista de quem busque a elaboração de uma proposta estruturalista pura. A possibilidade de que uma teoria da categoria dos conjuntos funcione no lugar de uma teoria de conjuntos tradicional mostra, como nos atestou Lawvere na citação já mencionada, que, mesmo quando estamos falando sobre conjuntos, é verdadeiro aquilo que já havia sido percebido na álgebra: o que é importante reside sempre na forma. Se uma tal teoria de conjuntos puder em princípio substituir as teorias tradicionais nos seus papéis matematicamente relevantes, então não existiria a necessidade de se buscar uma teoria de conjuntos extraestruturais capazes de servir de suporte para estruturas.

Parece interessante notar que Hellman não pensa, tal como Feferman, que as noções imprescindíveis de uma "classe" e de uma "operação sobre classes" devam ser esclarecidas por alguma teoria matemática fundamental. No estruturalismo modal que é proposto por Hellman, essas duas noções seriam fornecidas pela lógica da linguagem subjacente na qual as teorias são formuladas. A noção fundamental seria a de "relação". E a noção de "relação" adequada para a matemática viria do cálculo de predicados de

ordem superior. Uma classe nada mais é do que uma propriedade, ou seja, uma relação unária, e uma operação é um certo tipo de relação entre duas classes.

Agora, essa possibilidade traz à tona uma acusação interessante que talvez seja uma versão mais forte e sofisticada da que foi proposta por Feferman. De fato, é inegável que alguns conceitos básicos da lógica devem ser empregados para que se possa formular uma teoria fundacional baseada na teoria das categorias. "Relação", "propriedade", "axioma", "teorema", "fórmula", entre outros, são conceitos que aparecem na formulação inicial da teoria. Uma primeira possibilidade é que se aceite o uso preliminar desses conceitos sem nenhum esclarecimento para em seguida preparar o terreno para prover definições em termos categóricos. Pelo menos com conceitos de "relação" e "propriedade" é fácil ver como isso seria feito. O problema aqui é que de fato existe um tipo de circularidade em se empregar um conceito básico para definir conceitos mais complexos e depois esclarecer os conceitos básicos em termos dos complexos. Se essa circularidade for tomada como insuportável, do ponto de vista das crenças filosóficas de alguém, então realmente parece difícil não concluir que existam noções lógicas básicas que precedem a teoria das categorias na ordem do conhecimento. Agora, do ponto de vista de um fundacionalista, é difícil concluir a partir dessa pressuposição que a teoria das categorias não possa fornecer fundamentos para a matemática, já que o mesmo parece ser literalmente válido para qualquer teoria extensional de classes ou intensional de tipos.

3.5.2 Autonomia "em sentido forte"

Mencionamos anteriormente que um padrão comum aos opositores da autonomia da teoria das categorias é uma concepção fortemente epistemológica do que seria um "fundamento" para a matemática. Uma observação específica proposta por Hellman deve servir bem ao propósito de ilustrar esse ponto. Não se trata propriamente de um argumento, mas de um questionamento ainda que muito esquemático, concernindo o que Hellman denomina "autonomia forte". Em seus termos, a teoria das categorias satisfaria uma tal "autonomia forte" se ela não só puder fornecer fundamentos para a matemática que se sustentem por si mesmos, mas além disso, se esses fundamentos forem capazes de um "desenvolvimento conceitual inteligível do início ao fim, genuinamente distintivo, sem qualquer desvio pela teoria de conjuntos" (Hellman, 2003, p.6). Hellman sabe que a

distinção entre autonomia fraca e forte não é muito precisa[58]. Em um esforço para tentar fazer sentido da ideia, podemos notar que a principal diferença entre esses dois tipos de autonomia reside em uma ênfase no sentido epistêmico ou cognitivo de "fundamentos", no último caso. A ideia de chamar a autonomia epistêmica de "forte" por oposição a algum tipo de fundamento "fraco", que seria meramente lógico, parece vir de uma crença de que autonomia lógica é necessária, mas não é suficiente para a autonomia epistêmica e que, portanto, a autonomia epistêmica apareceria como algo posterior que deve ser adicionado à autonomia lógica.

Um ponto de partida para colocar em dúvida a autonomia forte da matemática categórica surge naturalmente quando observamos que muitas vezes matemáticos falam sobre categorias de estruturas de um certo tipo, junto com seus homomorfismos, sem que tenham se preocupado detalhadamente com a definição precisa dessas construções. Assim, Hellman observa que, muitas vezes, a noção de um espaço topológico é "tomada por garantida" por teóricos das categorias, que falam "livremente" em uma categoria de todos os espaços topológicos. Desde que a teoria das categorias seja considerada uma mera ferramenta auxiliar, tal como ela foi inicialmente apresentada pelos seus criadores, não parece haver problema nenhum em se falar sobre uma categoria de espaços topológicos sem ter propriamente definido o que esses espaços são. Do ponto de vista de quem não considera a teoria autônoma, é perfeitamente aceitável simplesmente recorrer às construções conjuntistas tradicionais da topologia ortodoxa, nos casos em que forem demandadas explicações posteriores sobre, por exemplo, o que um espaço topológico é. Mas, aqueles que defendem a autonomia da teoria das categorias em relação às teorias de conjuntos não podem tomar espaços topológicos "por garantido", nesse sentido. Todas as noções mais fundamentais da topologia, por exemplo, as noções de um "conjunto aberto" e de uma "função contínua", deveriam ser construídas do início por meio dos conceitos primitivos categóricos.

Hellman concede que, de fato, tais construções feitas somente em termos dos primitivos categóricos já existem. Um possível exemplo que o autor sugere é a construção de um anel de números reais em um *topos* de feixes sobre um espaço topológico. Contudo,

[58] "This is, of course, not a precise distinction; perhaps we would only recognize 'strong autonomy' if we saw it (perhaps some category theorists have already seen it?). But unless and until it is achieved, the charge that category theory is "parasitic" on set theory in its recovery of ordinary mathematics will surely linger" (Hellman, 2003 , p.6).

mesmo essa construção *imitaria muito aproximadamente* aquela que Dedekind fez em termos de conjuntos. Então, levanta-se a seguinte dúvida sobre esses desenvolvimentos:

> Pode-se muito bem perguntar, contudo, se esses desenvolvimentos seriam (humanamente) compreensíveis sem uma familiaridade anterior com as ideias conjunto-teóricas. É verdade que isso vai além da "autonomia" em um sentido puramente lógico; *mas os objetivos de um framework fundacional são certamente tão epistemológicos quanto lógicos.* (Hellman, 2003, p. 7, ênfase minha)

Como fica óbvio tanto pela leitura dos "manuais", quanto pela nossa introdução no capítulo anterior, ao se introduzir conceitos de teoria das categorias, construções em termos de conjuntos são quase sempre os exemplos paradigmáticos fornecidos. Por isso, não é de modo algum claro que esses mesmos conceitos poderiam, ao menos em princípio, ser compreensíveis para quem não estivesse de início familiarizado com suas contrapartes formuladas em termos conjuntísticos. Para dar um exemplo, podemos colocar a questão: é de fato possível entender o que um produto categórico é sem o exemplo paradigmático de um produto cartesiano a partir do qual a noção pode ser generalizada?

Esse raciocínio, que abertamente enfatiza uma perspectiva epistemológica de fundamentos, faz lembrar de forma desconcertante a metáfora empregada por Feferman sobre a capacidade de compor músicas sem precisar ouvir. Também é o caso de nos perguntarmos se objeções que foram direcionadas ao argumento de Feferman se aplicam aqui. As construções que exemplificamos por meio de conjuntos, dependem conceitualmente de construções feitas em termos de teorias axiomáticas como a ZFC? É claro que nada impede que a linguagem da teoria das categorias seja usada para descrever propriedades de um universo dos conjuntos construídos a partir do $\emptyset$, mesmo que talvez apenas algumas propriedades. Porém, é óbvio que para elucidar e exemplificar conceitos básicos de teoria das categorias, não precisamos recorrer necessariamente a esse tipo de conjunto "puro" que é introduzido por teorias axiomáticas de conjuntos, sendo geralmente suficiente exemplificações intuitivas que não são baseadas em nenhuma teoria matemática precisa. Essas elucidações, que, aliás, não está nítido se são estritamente necessárias ou meros recursos pedagógicos, são suficientes para minar o que Hellman chama de "*autonomia forte*" da teoria?

Um aspecto que muitas vezes enfraquece a argumentação de Hellman é a pressuposição de que a expressão "teoria de conjuntos" sempre designa teorias materiais baseadas na relação de cópula e que, portanto, quando se fala em um *conjunto* deve-se

sempre estar se referindo a algo que habita num universo descrito por uma tal teoria. Deve ser deixado claro aqui que qualquer proposta categórica de uma teoria de conjuntos é tão *teoria de conjuntos* quanto qualquer outra. A diferença reside primariamente em quais conceitos são tomados como primitivos. Do ponto de vista de uma teoria categórica de conjuntos, conjuntos são introduzidos em termos das propriedades equacionais da operação de composição sobre funções que possuem conjuntos como domínios e contradomínios. Do ponto de vista das teorias materiais ou ortodoxas, a noção de pertencimento é que é o principal primitivo. Então, em qual sentido um esclarecimento em termos intuitivos envolvendo conjuntos seria um "desvio pela teoria de conjuntos"? Por que esse "desvio" precisaria ser pensado como um desvio pelas teorias materiais de conjuntos, em vez de uma passagem natural pela teoria da categoria dos conjuntos?

Esse aspecto problemático dos argumentos aparece já no início da apresentação. Hellman começa formulando sua posição nos seguintes termos. Mac Lane propunha a teoria das categorias como um fundamento autônomo. Ainda assim, oficialmente, nas apresentações mais formais, *Mac Lane usaria a teoria dos conjuntos como fundamentos*. Se essa realmente for a posição oficial, então a teoria das categorias não seria de fato autônoma, por motivos óbvios. Ao mesmo tempo, contudo, no que diz respeito a questões fundacionais, Mac Lane sugere uma alternativa: teorias de topos podem substituir a teoria dos conjuntos. Nesse caso, a matemática poderia vir a ser desenvolvida pela linguagem interna de um *topos*, constituída pelos primitivos da teoria das categorias mas "regulados" pelos axiomas adicionais em virtude dos quais uma categoria é dita ser um topos - ou, mais especificamente, um topos com o axioma de extensionalidade. As três objeções de Hellman se seguem então como objeções a esse projeto fundacional.

Podemos nos perguntar: qual é a teoria de conjuntos que Mac Lane tem em mente quando fala livremente sobre um conjunto? De acordo com McLarty, quando Mac Lane deixa implícito que trabalhará em algum universo de conjuntos, ao contrário do que Hellman parece ter entendido, esse universo de conjuntos é aquele que é descrito pela teoria elementar da categoria dos conjuntos, que seria o "fundamento preferido de Mac Lane". Embora essa teoria não seja baseada na relação primitiva de "cópula", mas sim na noção de composição de funções entre conjuntos, ela é tão teoria dos conjuntos quanto qualquer extensão dos axiomas de Zermelo-Fraenkel. Um ponto importante aqui é que não é estritamente correto dizer que a construção dos reais sugerida pelos teóricos das categorias, que mencionamos acima, *imitaria* aquela que já é feita na teoria dos conjuntos e que foi proposta por Dedekind. Ela, na verdade, é literalmente a mesma construção.

Em sua resposta a Hellman, McLarty esclarece que Dedekind não empregava a teoria dos topos, assim como ele também não empregava nenhuma das teorias modernas de conjuntos. Todas as noções informais que foram usadas por Dedekind em sua construção são *igualmente* formuláveis tanto nas teorias de conjuntos mais tradicionais quanto em termos de algum topos, não havendo nenhuma razão objetiva para se alegar que a construção em uma teoria de conjuntos ortodoxa é a própria construção de Dedekind ela mesma, ao passo que a versão categórica seria uma mera *cópia,* análoga à construção original.

> […] a construção dos reais de Dedekind em um topos não imita a construção de Dedekind. Ela é a construção de Dedekind. Evidentemente, Dedekind não trabalhava com teoria de topos. Mas ele também não trabalha com a teoria de Zermelo e nem mesmo com a teoria dos conjuntos de Cantor, nenhuma das quais sequer existia em 1858, quando ele produziu sua definição dos reais. Ele trabalhou com conjuntos, subconjuntos e ordenamentos, todos os quais podem ser formulados na teoria dos conjuntos de Cantor ou em ZF ou em teoria de topos— as duas últimas alcançando um nível de rigor que formal que Cantor não alcançou. (McLarty, 2004, p.39)

McLarty faz uma exposição razoavelmente detalhada de como se constrói, na teoria elementar da categoria dos conjuntos, a teoria dos números naturais, dos inteiros, dos racionais, etc. Depois de explicar que ainda haveria um caminho longo para trilhar antes de chegar à noção de um *espaço topológico* e a de um *objeto de números reais*, ele explicita a moral da história: após lidarmos com as primeiras definições iniciais, não é só que as teorias de conjuntos mais tradicionais e a teoria da categoria dos conjuntos são intertradutíveis, elas na verdade funcionam exatamente do mesmo modo. Toda construção em termos de alguma das teorias tradicionais seria, automaticamente e por natureza, uma construção aplicável à teoria da categoria dos conjuntos.

O que queremos concluir aqui, antes de passarmos à consideração da próxima objeção, é que não é o caso que a compreensão conceitual de construções feitas em termos da teoria das categorias necessite de referências, explícitas ou implícitas, a construções realizadas em termos de teorias axiomáticas tradicionais. Antes, o mais razoável é dizermos que tanto teoria das categorias quanto as teorias de conjuntos *pressupõem*, em algum sentido, uma noção intuitiva pré-matemática de coleção e os axiomas visam substituir essa noção por alguma outra mais precisa e, portanto, mais útil para propósitos matemáticos.

3.5.3 O problema do endereço residencial

Mencionei na seção 3.5.1, quando discorríamos sobre a objeção de Feferman, que existem abordagens para teorias de conjuntos que fazem uma leitura algébrica dos axiomas dessas teorias. Nessa leitura, tratamos cada axioma como uma condição puramente genérica que caracterizaria uma "álgebra de Zermelo-Fraenkel". Contudo, não é muito usual que os axiomas de teorias de conjuntos sejam concebidos dessa forma. Geralmente esses axiomas são concebidos como uma lista de asserções verdadeiras que descrevem o "universo dos conjuntos" - ou pelo menos a "hierarquia cumulativa dos conjuntos puros". Se assumirmos que um certo universo de conjuntos é de fato o universo de todas as entidades matemáticas, então os axiomas da teoria prescrevem exatamente quais objetos matemáticos existem - ou pelo menos quais as leis que regem a existência no contexto matemático. Nesse sentido, as teorias de conjuntos podem ser vistas precisamente como uma teoria da existência matemática. Nas palavras de Hellman:

> Nesse sentido, axiomas conjunto-teóricos constituem uma teoria da existência matemática, incluindo afirmações de que há conjuntos infinitos, de que há incontavelmente muitas cardinalidades incontáveis, de que há mais níveis ordinais do que o que pode ser "mensurado" por qualquer conjunto, etc. E axiomas fortes de infinitude, p. ex. axiomas de cardinais grandes, afirmam diretamente que vários conjuntos infinitos anormalmente grandes também existem. (Hellman, 2003, p. 10)

Em contraste com isso, é razoável alegar que geralmente os axiomas da teoria das categorias são lidos como sendo puramente algébricos, i.e., como caracterizando genericamente "o que quer que satisfaça os axiomas". Se segue dessa leitura que os termos da teoria não precisam necessariamente ser interpretados tal como recomenda a interpretação pretendida. Assim, para tomar um exemplo, morfismos não precisam ser funções e, consequentemente, a "composição" mencionada nos axiomas nem sempre precisa coincidir com a operação de composição entre duas funções. Na seção 3.4.1, tentamos argumentar sobre a importância e conveniência desse tipo de leitura.

No terceiro e principal argumento que Hellman mobiliza contra a autonomia da teoria das categorias, o autor aponta um preço que seria pago por quem propõe exatamente esse tipo de leitura algébrica dos axiomas da teoria das categorias. Hellman formula o problema neste trecho:

> Indo além da questão da autonomia propriamente dita, voltamo-nos agora para uma questão igualmente importante e intimamente relacionada, a da existência matemática. Esse problema tal como ele

> confronta a teoria das categorias pode ser colocado de forma muito simples: a questão realmente parece simplesmente não ser abordada! (Podemos chamá-lo de o problema do "endereço residencial": de onde as categorias vem e onde elas vivem?) [...] Ou, mais formalmente, quais axiomas governam a existência de categorias ou topoi? (Hellman, 2003, p. 9)

Então, a questão pode ser parafraseada da seguinte maneira: como decidir se uma categoria existe ou não? Quais são as dificuldades envolvidas em responder a essa pergunta? O problema aqui é que axiomas algébricos para a teoria das categorias, bem como axiomas para tipos específicos de categorias, não envolvem alegações existenciais assertóricas e, portanto, não podem ser respostas para a pergunta "Quais objetos matemáticos existem?". Não se trata aqui de dizer que nenhum quantificador existencial ocorre formalmente nesses axiomas, o que seria simplesmente falso. Também não é sobre dizer que esses quantificadores só ocorrem dentro de afirmações condicionais, o que seria verdadeiro para os axiomas universais que se aplicam a todas as categorias, mas falso para axiomas que caracterizam tipos específicos de categorias em virtude da existência interna de alguns objetos universais. O que realmente está em questão aqui é que mesmo as afirmações existenciais não condicionais devem ser lidas, nesse contexto, ao modo algébrico e não assertórico. Assim, por exemplo, o axioma da teoria dos tipos que afirma a existência de um objeto terminal é análogo a axiomas que afirmam que estruturas de um certo tipo possuem algum elemento que satisfaça uma certa propriedade, como o axioma do elemento neutro da teoria dos monoides ou grupos. Compare esses dois últimos axiomas ao do infinito em alguma teoria de conjuntos. O axioma do infinito é usualmente lido como afirmando de forma absoluta a existência de um conjunto com uma quantidade infinita de elementos. É precisamente esse último tipo de afirmação que é requerida para responder o problema da existência matemática. Axiomas algébricos podem ser usados para justificar que, em uma categoria de um certo tipo, existe algum objeto que satisfaz uma certa propriedade, mas não podem justificar, de forma absoluta, que uma certa categoria existe.

Antes de assumirmos que a leitura algébrica ou assertórica dos axiomas necessariamente expressa uma diferença entre teoria das categorias e teorias de conjuntos convém nos indagarmos em que medida as teorias de conjuntos são respostas satisfatórias e definitivas para uma questão como "Quais são todas as estruturas matemáticas que existem?". Certamente, teorias de conjuntos possuem afirmações existenciais que formalmente não estão condicionadas a nenhuma outra afirmação. Tais afirmações

podem, portanto, ser lidas como asserções verdadeiras que dizem simplesmente que existe um objeto com uma certa propriedade. Mas se segue daí que possam literalmente decidir todas as questões existenciais que poderíamos formular, ainda que utilizando apenas a própria linguagem da teoria? Se as mais utilizadas teorias de conjuntos não puderem decidir todas as questões sobre se um conjunto com uma certa propriedade existe ou não, e isso for considerado uma exigência fundamental para a autonomia de um *framework* para a matemática, então a teoria dos conjuntos ela mesma poderia ser acusada de depender de alguma outra coisa mais fundamental para decidir se existem ou não certos conjuntos. Particularmente, a questão sobre se há um conjunto de cardinalidade maior que o conjunto dos naturais e menor que o conjunto dos reais, a famosa querela sobre a Hipótese do *Continuum*, tem sido fonte de polêmica e tem sugerido para muitos uma abordagem pluralista, em alguma medida similar à visão dos muitos *topoi* que exploramos algumas seções atrás. Então, talvez, mesmo um entusiasta de teorias de conjuntos se veja forçado a se contentar tão somente com atribuições relativas de existência, no fim das contas.

Qual seria, propriamente, o problema de se assumir que toda sentença existencial da matemática é meramente uma atribuição, por assim dizer, "relativa" de existência? O problema seria o de cairmos na posição que podemos chamar de dedutivismo: toda sentença matemática, embora possa se parecer com uma verdade determinada, no fim das contas seria apenas uma afirmação hipotética cujo sentido dependeria da existência das estruturas que estamos investigando. Hellman assume que uma tal posição não é aceitável pois "ameaçaria despojar a matemática de qualquer conteúdo distintivo" (Hellman, 2003, p.9). Uma referência é feita ao ensaio de Quine "Truth by Convention". Uma olhada em um artigo de Hellman sobre o dedutivismo[59] deixa nítido que ele está se referindo à ideia de que, dentro dessa posição, a escolha dos axiomas hipotéticos que antecederiam as asserções matemáticas seria essencialmente arbitrária e, por isso, a maneira dedutivista de pensar poderia ser aplicada em todas as áreas do conhecimento. Matemática não teria propriamente uma matéria específica sobre a qual tratar.

Uma objeção que parece quase imediata à ideia de que sejam necessários axiomas ou alguma teoria, mesmo que informal, legislando sobre a existência de estruturas matemáticas tem forte inspiração na ideia hilbertiana de *verdade matemática*. Uma vez que não estamos lidando aqui com entidades concretas, parece razoável afirmar que da

[59] Hellman (2021).

consistência das proposições que descrevem uma certa estrutura matemática segue-se sua *existência enquanto estrutura abstrata*. É claro que estamos impedidos de demonstrar absolutamente a consistência dos axiomas da teoria geral dos *topos* ou mesmo de um *topos* em específico, mas nada impede que tratemos a consistência como uma hipótese de trabalho:

> Agora, pode-se estar tentado a apelar aqui para a metalógica: assumindo que axiomas de primeira ordem para teorias de topos sejam formalmente consistentes, o teorema da completude para a lógica de primeira ordem não garante a existência de um modelo? E não é isso suficiente para teoria das categorias? Mesmo se nós não pudermos construir uma prova formal de consistência, devido ao segundo teorema de incompletude de Gödel, ainda podemos considerar a existência de um modelo como uma hipótese de trabalho no mesmo nível que a consistência formal. (Hellman, 2003, p. 11)

Aqui, a afirmação de que a consistência garante a existência está sendo interpretada como um sinônimo do metateorema da completude para a lógica de primeira ordem. Se essa interpretação é correta, duas objeções podem ser e, efetivamente, foram levantadas a essa sugestão. Em primeiro lugar, essa saída implica comprometer a autonomia da teoria das categorias, já que o teorema da completude deve ser provado dentro de algum *framework* que usualmente é a teoria dos modelos. Uma vez que a teoria de modelos seria, nas palavras de Hellman, "formalmente parte da teoria dos conjuntos" (2003, p. 11), adotar esse metateorema como a lei fundamental que governa a existência no contexto da teoria das categorias privaria a teoria de sua suposta autonomia em relação a teoria dos conjuntos. Nessa opção, mesmo se as teorias clássicas de conjuntos vierem a ser banidas da prática matemática rotineira, ainda assim, em última instância, seria a uma tal teoria que recorreríamos para decidir quais categorias existem e, assim, acabaríamos por pressupor uma teoria de conjuntos no fim das contas.

Poder-se-ia supor, então, que a solução deveria vir de uma reformulação da própria metalógica feita de um ponto de vista puramente categórico. Mas como tal programa seria efetivamente concretizado? Naturalmente, já que as teorias de topos descrevem um universo de coleções "análogo" a um universo de conjuntos, poder-se-ia propor uma metalógica que se servisse de um *topos* determinado. Porém, se os axiomas que descrevem esse *topos* também devem ser entendidos algebricamente, então qualquer afirmação derivada desses axiomas é uma asserção hipotética geral que diz que em estruturas satisfazendo certas condições algumas propriedades valem. Portanto, continuaríamos sem uma solução absoluta para o problema da existência.

Em segundo lugar, os modelos cuja existência é estabelecida pelo teorema da completude não coincidem necessariamente com os modelos pretendidos. O teorema da completude para a lógica *de primeira ordem* não garante que a construção intuitiva que pretendemos axiomatizar "exista", mas apenas que exista alguma coisa que satisfaça os axiomas que formulamos, aceitando, por exemplo, modelos de cardinalidade superior ou inferior aos pretendidos, como mostra o teorema de Löwenheim-Skolem. Em um contexto estruturalista, esse ponto é especialmente sensível. Se os modelos possuem cardinalidades diferentes, eles não podem ser ditos compartilhar a mesma forma estrutural. Portanto, mesmo se o teorema da completude garantir que exista algo que satisfaça os axiomas, não está garantido que exista a estrutura que desejamos caracterizar, já que o modelo para os axiomas pode ser uma estrutura diferente da pretendida.

3.5.3.1 Uma saída possível ao problema

Embora Hellman tenha imposto a exigência de critérios para se fixar absolutamente o que existe no universo de discurso das sentenças da matemática, a própria solução que ele adota em sua proposta estruturalista é uma solução negativa[60]. Lembremos que, para o estruturalista modal, sentenças matemáticas não envolvem um compromisso com a existência efetiva de algum objeto, mas apenas com a possibilidade de certas estruturas. Assim, "O problema do endereço residencial é resolvido por eliminação: oficialmente, não precisa haver comprometimento com objetos em absoluto, apenas com o que (proposicionalmente) poderia ser o caso" (Hellman, 2006, p.20). É relevante que a possibilidade de uma solução negativa para o problema do endereço residencial possa contentar Hellman. A tentativa de solução presente na tréplica de Awodey, que veremos um pouco a frente, é precisamente uma solução desse tipo. A estratégia empregada consiste em desfazer o problema pela alegação de que ele só faz sentido de um ponto de vista fundacionalista, que seria fundamentalmente contrário ao tipo de matemática endossado pela teoria das categorias.

Para fornecer uma resposta coerente ao problema do endereço residencial, não é necessário rejeitar estritamente qualquer perspectiva fundacionalista. O argumento, assim como o de Feferman, baseia-se na leitura algébrica da teoria geral das categorias e da

[60] "The problem of the 'home address' is 'solved' by elimination: officially there need be no actual commitment to objects at all, only to what (propositionally) might be the case" (Hellman, 2003, p.20).

teoria que descreve uma categoria específica. No entanto, como veremos a seguir, é possível desafiar essa pressuposição conservando um projeto fundacionalista.

Hellman afirma categoricamente que "certamente, teóricos das categorias não pretendem que seus axiomas em primeira ordem para categorias ou topos sejam lidos assertoricamente[61]". Mas isso é tão "certamente" garantido? De acordo com McLarty, não. Ao responder algumas objeções ao projeto de fundamentos categóricos para a matemática, McLarty aponta para o fato de que não é verdade que, em geral, os axiomas da teoria sejam tomados sem nenhuma interpretação pretendida. O argumento de McLarty para essa afirmação é estatístico: nas então 50 últimas publicações da *Mathematical Reviews* que faziam referência à teoria das categorias, em 41 os axiomas possuíam interpretações muito bem definidas, já que eram empregados para se descrever categorias muito específicas dentro de algum contexto. Apenas em 7 publicações os axiomas eram realmente tratados de forma algébrica (McLarty, 2005, p.50)[62]. Deixando de lado essas questões estatísticas, se nem mesmo os axiomas de Eilenberg-Mac Lane para a teoria geral das categorias são de fato sempre empregados sem nenhuma interpretação pretendida, o caso dos axiomas para *topos* é provavelmente ainda mais grave. Deve-se esperar que, pelo menos informalmente, quando o matemático formula axiomas para um certo *topos*, ele sempre tem algum *topos*, i.e., algum universo de "domínios", "conjuntos" ou "tipos" muito específico em mente. Podemos fazer um esforço para tentar inferir uma possível objeção que Hellman poderia sugerir a quem contestar seu argumento por meio da afirmação de que os axiomas não são "tão estritamente algébricos assim": o apelo a uma interpretação pretendida não resolveria o problema da existência, porque ainda ficamos com a questão de determinar quais são as leis que governariam a existência dessas estruturas *pretendidas*.

Quando comentávamos as observações de Hellman acerca do argumento de Feferman, já mencionamos que se, por um lado, era razoável dizer que os axiomas da teoria geral das categorias eram algébricos, por outro lado, certamente axiomas para uma teoria da categoria de todas as categorias são planejados para descrever assertoricamente um "universo de entidades", fornecendo claramente as leis que governariam a existência

[61] "Surely category theorists do not intend their first-order axioms for categories or topoi to be read in any such fashion" (Hellman, 2003, p. 10).

[62] Se o leitor ficar curioso sobre as outras duas, tratam-se de um artigo do próprio McLarty sobre teoria das categorias e estruturalismo, e o texto contendo a tréplica de Awodey a Hellman, que abordaremos na seção seguinte.

das categorias. De fato, Hellman admite que seria um "pouco de exagero" dizer que o problema da existência das categorias não ter sido ainda discutido, já que a teoria da categoria de todas as categorias formulada por Lawvere contém axiomas existenciais explícitos. Podemos inferir de alguns comentários de Hellman duas prováveis objeções ou, talvez seria melhor dizer, dúvidas quanto à capacidade dessa proposta de resolver o problema da existência e garantir à teoria das categorias autonomia em relação a outros tipos de fundamentos:

1) A consistência da teoria de Lawvere foi posta em dúvida por Isbell;
2) Um exame da credibilidade dos axiomas de Lawvere enquanto verdades assertóricas se basearia em um entendimento prévio dos primitivos da teoria. Uma vez que a teoria é construída sobre a própria noção de "categoria", e uma categoria nada mais é do que uma coleção de um certo tipo, ela novamente pressuporia a noção de *coleção* no fim das contas.

Sobre o ponto 1) McLarty aponta que o próprio texto de Isbell, ao levantar dúvidas sobre a consistência dos axiomas de Lawvere, explica como seria possível consertá-los; além disso, Hellman teria ignorado várias outras propostas para uma tal teoria, o que inclui a própria de McLarty. De fato, Hellman comenta que as teorias de topos ofuscaram os esforços em axiomatizar uma categoria das categorias "ao custo de suspender a articulação de axiomas de existência no sentido assertórico" (Hellman, 2003, p.10). Sobre a possível objeção 2) é importante dizer, também em sintonia com McLarty, que em momento nenhum os axiomas da teoria da categoria das categorias pressupõem que se introduza o conceito de uma categoria via os axiomas algébricos de Eilenberg e Mac Lane. Do ponto de vista de uma teoria da categoria das categorias, uma categoria não é "qualquer coisa que satisfaça os axiomas de Eilenberg e Mac Lane" e sim "qualquer coisa cuja existência se siga dos próprios axiomas dessa teoria". Talvez devêssemos sugerir que estamos lidando com dois conceitos diferentes de "categoria", um conceito "externo" à teoria da categoria das categorias, dado pelos axiomas de Eilenberg e Mac Lane, e um conceito "interno". Na expressão "categoria de todas as categorias", a primeira ocorrência de "categoria" se refere a algo que é chamado de "categoria" por satisfazer os axiomas de Eilenberg e Mac Lane; a segunda ocorrência se refere a coisas que, apesar de também satisfazerem esses primeiros axiomas, recebem o nome "categorias" simplesmente por terem sua existência garantida nos axiomas assertóricos. O ponto aqui é que "categoria" no sentido "interno" não se refere a nenhuma classe importada de alguma teoria das classes e que calhou de satisfazer os axiomas classificatórios. Nas palavras de McLarty:

> O ponto chave para entender aqui é precisamente que fundamentos categóricos para a teoria das categorias não são fundamentos conjunto-teóricos para a teoria das categorias. Quando axiomatizamos a metacategoria das categorias pelos axiomas da CCAF [Categoria de todas categorias como fundamentos], as categorias não são 'qualquer coisa satisfazendo os axiomas da teoria das categorias'—*i.e.*, os axiomas de Eilenberg-Mac Lane. Elas são *qualquer coisa cuja existência se segue dos axiomas CCAF*. Elas precisamente não são conjuntos satisfazendo axiomas de Eilenberg-Mac Lane. Elas são categorias tal como descritas pelos axiomas de Lawvere para CCAF. (McLarty, 2005, p. 52).

Apesar de a teoria das categorias por si só não prover "axiomas substantivos para a existência matemática", isso não seria um problema, já que por si mesma ela é "uma teoria geral aplicável a muitas estruturas". Mas, o mesmo não é verdade de cada teoria fundacional específica que descreve uma certa categoria que é seu modelo pretendido. Cada uma dessas teorias, seja de *topos* ou de categorias de categorias, possui axiomas para existência bastante fortes e, assim, cada uma delas é por si mesma uma resposta para a questão "quais categorias existem?".

> […] cada fundamento categórico proposto é uma proposta de resposta. A teoria categórica de conjuntos diz: os conjuntos e as funções postas pelos axiomas existem (e assim as categorias construídas a partir desses conjuntos existem). Geometria diferencial sintética, tomada como um fundamento diz: os espaços suaves e mapeamentos postos pelos axiomas existem (e assim também existem as categorias construídas a partir deles). (McLarty, 2004, p. 42)

Então, ainda que os axiomas gerais para a teoria dos topos sejam genéricos, classificatórios e não assertóricos, o mesmo não é verdade sobre algumas de suas extensões.

> Hellman vê corretamente que os axiomas gerais para topos são entendidos como gerais e não assertóricos. Mas sua extensão para axiomas para a Geometria Diferencial Sintética é asserida como descrevendo uma realidade matemática particular. Esses axiomas são asseridos sobre a categoria dos espaços suaves. (McLarty, 2004, p. 44)

Geometria diferencial sintética (SDG), a teoria mencionada na citação anterior, é uma formulação axiomática para a geometria diferencial, cujos axiomas são asseridos de uma certa categoria particular. Mais importante ainda, uma vez que é argumentável que SDG descreve melhor o contínuo real do que a linha reta padrão construída em termos de teorias de conjuntos, podemos dizer que SDG é uma teoria sobre "formas e movimentos reais no mundo — não sobre objetos físicos movimentando-se e tendo forma — mas sobre

a realidade matemática das formas e movimentos tal como Aristóteles distingue em sua Física"[63].

Temos feito um esforço no sentido de explicitar pressupostos e limites para as objeções que Hellman propõe ao projeto de uma fundamentação categórica da matemática. O argumento parece assumir, por exemplo, que 1) a tese dedutivista é insustentável e que 2) uma teoria da categoria de todas as categorias talvez seja inconsistente, 2') mas se não o for ainda assim não é capaz de resolver o problema de fixar critérios para a existência de uma maneira tal que garanta a autonomia da teoria, já que ela dependeria conceitualmente da noção de categoria que seria, por sua vez, introduzida como uma classe de um certo tipo.

Para melhor entender o ponto 2'), creio ser útil os comentários a seguir. Linnebo e Pettigrew (2011)[64] apresentaram a mais explícita e clara versão do ponto 2'). Atacando a teoria da categoria de todas as categorias enquanto fundamento autônomo, eles impuseram a exigência de que uma teoria que sirva como fundamento para a matemática deve "possuir conteúdo". A fim de que as asserções da teoria possuam conteúdo, elas deveriam ser construídas com base em noções cujo sentido seria identificável de forma anterior à teoria. A falta de conteúdo seria:

> [...] o problema, por exemplo, com a teoria que consistisse da seguinte sentença: "the mome raths outgrabe". A razão pela qual a essa teoria falta conteúdo é que não há maneira de identificar, independentemente da teoria, o que seriam "mome raths" e o que significa "outgrabe". Sem identificar o assunto da teoria de um tal modo, as frases da teoria não fazem asserções com conteúdo. (Linnebo; Pettigrew, 2011, p. 231)

De fato, a teoria da categoria de todas as categorias poderia suprir suas frases com um conteúdo, ao apelar para alguma especificação externa do conceito de categoria. E isso, naturalmente, é feito por meio de axiomas como os de Eilenberg-Mac Lane. Mas, aqui, caímos na "objeção da independência lógica": tais axiomas definem categorias como espécies particulares do gênero "classe" (ou "conjunto" ou "coleção"). Já as teorias axiomáticas de conjuntos, por outro lado, poderiam facilmente lidar com essa possível objeção por meio da afirmação de que elas lidam com "coleções de coisas".

Dizer que teorias axiomáticas formais de conjuntos realmente lidam com "coleções" no mesmo sentido que essa expressão possuía fora da teoria parece uma

[63] A frase literal de McLarty possui leves diferenças que não alteram significativamente o sentido: "SDG is about actual shapes and motions in the world—not shaped and moving physical objects per se—but the mathematical reality of shapes and motions as Aristotle discusses that distinction in his Physics II.2"(McLarty, 2004, p.44).

[64] Cf. Linnebo; Pettigrew, 2011.

afirmação frágil, afinal é justamente a inconsistência da noção informal de coleção que parece ter motivado a criação dessas teorias. Considerações muito similares a algumas que fizemos quando examinávamos a objeção de Feferman também podem ser aplicadas aqui. Parece nítido haver aqui a pressuposição de que teorias precisam possuir uma ordem rígida de desenvolvimento, de tal maneira que os conceitos básicos de uma teoria deveriam ser inteiramente explicados antes que se pudesse progredir para as noções mais complexas. Deixando de lado essas considerações, também já foi apontado que do mesmo jeito que teoria dos conjuntos poderia se mostrar dotada de conteúdo ao afirmar que lida com "coleções de coisas", teoria das categorias poderia se mostrar dotada de conteúdo ao afirmar que lida com "maneiras de se combinar duas coisas para formar uma terceira" [65].

Agora, voltando à saída que McLarty propõe para o problema do endereço residencial, gostaríamos de finalizar ressaltando que ela é essencialmente realista, na medida em que prescreve que teorias de *topos* e similares são tentativas de descrever entidades realmente existentes, e fundacionalista, já que cada topos é tratado ele mesmo como uma proposta de fundamentos para uma porção da matemática e que, inclusive, funcionam de maneira muito similar à dos fundamentos tradicionais em termos conjuntísticos.

3.5.3.2 Uma saída não fundacionalista

Embora a teoria das categorias seja um *framework* amplamente utilizado por muitos matemáticos estruturalistas, formular um estruturalismo filosófico com base em uma interpretação correta dessa prática ainda é um problema em aberto. Awodey propõe que a teoria das categorias forneça uma noção precisa e flexível de "estrutura" que se harmonize melhor com a tendência da matemática moderna de se concentrar apenas na estrutura abstrata dos objetos matemáticos. No entanto, essa sugestão não é o mesmo que propor uma filosofia sistemática que possamos chamar de "estruturalismo categórico". Os detalhes de uma tal proposta precisariam ainda ser determinados e não é claro que todas as questões filosóficas importantes sobre o estatuto das estruturas, sua existência e a maneira como são conhecidas possam ser respondidas simplesmente caracterizando suas propriedades por meio dos métodos e notações típicos da teoria das categorias. Muito pelo contrário, o exame de algumas das posições que ilustramos parece já suficiente para

[65] Cf. Logan (2015).

demonstrar que não é surpreendente que teóricos com diferentes inclinações filosóficas possam formular suas considerações em termos da teoria das categorias. A sugestão de Awodey, que já abordamos brevemente num momento anterior, contrasta nitidamente com a proposta realista e fundacionalista de McLarty que acabamos de introduzir. A seção que se segue possui como objetivo formular melhor essa proposta e tentar compreender como ela poderia contornar, pelo menos nos pontos mais essenciais, os argumentos contra a autonomia da teoria das categorias que temos abordado.

No texto de 1996, onde foi proposto que a teoria das categorias forneceria uma noção mais adequada de estrutura do que a teoria dos conjuntos, texto esse que foi alvo das objeções de Hellman, é fácil ver que a pressuposição de que a sugestão teria como plano de fundo o caráter fundacional das teorias das categorias não é apropriada. Awodey tenta desvencilhar sua proposta de qualquer tipo de fundacionalismo já nesse primeiro texto:

> Deve ser notado *que minha proposta não é discutir fundamentos categóricos para a matemática* ou apresentar uma abrangente filosofia estruturalista da matemática baseada na teoria das categorias, mas elaborar a noção de uma estrutura matemática de uma perspectiva categórica, para que as discussões de outras questões possam prosseguir diretamente. Apesar de acreditar que algumas questões filosóficas básicas podem ser levantadas de modo profícuo por meio dessa noção de estrutura e que ela serve bem aos propósitos de uma filosofia estruturalista[...] (Awodey, 1996, p. 210, ênfase minha)

A partir dessa perspectiva, podemos afirmar que a teoria das categorias não fornece fundamentos alternativos para a matemática, mas sim adota uma abordagem radicalmente antifundacionalista por natureza. Em vez de prover fundamentos para a matemática, a teoria das categorias fornece uma linguagem e métodos que viabilizam a prática matemática sem depender do que geralmente chamamos de "fundamentos". Resumindo o ponto de vista codificado pelos métodos da teoria das categorias, Awodey afirma:

> A perspectiva estrutural da matemática codificada pelos métodos categóricos pode ser sumarizada no *slogan*: o assunto da matemática pura é forma invariante, não um universo de objetos matemáticos consistindo de átomos lógicos. (Awodey, 1996, p.235)

Devemos nos perguntar: a exigência de que um *framework* para a matemática estruturalista deve prover uma resposta para as questões existenciais, tal como pressuposto por Hellman, faz sentido do ponto de vista da matemática desenvolvida via teoria das categorias? De acordo com Awodey, ao propor o problema do endereço residencial, Hellman teria imposto uma exigência que só ganha sentido dentro do ponto de vista peculiar a um fundacionalista. Para o autor, esse ponto de vista, seria

caracterizado pela ideia de se construir objetos matemáticos específicos dentro de um sistema fundacional particular de tal modo que:

1) Haja objetos suficientes para se representar os objetos da matemática ordinária, números, espaços, álgebras, multiplicidades, etc.
2) Haja leis, axiomas e regras suficientes para se codificar todas as inferências e raciocínios que na matemática se faz sobre tais objetos.

A perspectiva categórica seria, por outro lado, caracterizada numa primeira aproximação grosseira por um ponto de vista que:

> [...]enfatiza forma em detrimento de conteúdo, descrições sobre construções, especificação de pressuposições sobre fundamentos dedutivos, definição de propriedades essenciais em detrimento da construção de objetos satisfazendo tais propriedades. (Awodey, 2003, p.3)

Em oposição à perspectiva que satisfaz as duas exigências mencionadas acima, que podemos chamar de um "fundacionalismo global[66]", na maneira propriamente categórica por excelência, especificamos apenas a informação ou estrutura absolutamente necessária naquele contexto, sem que se pressuponha algum "conhecimento último, especificação ou determinação completa dos objetos envolvidos". Pela linguagem e pelos métodos típicos da teoria das categorias, não haveria nenhuma necessidade de se comprometer com um universo fixo de todas as entidades matemáticas e nem mesmo com um sistema de todas as inferências.

É importante ressaltar que dizer que não há um comprometimento com um universo fixo de todas as entidades não é o mesmo que dizer que há vários desses universos. A proposta de Bell baseada na substituição de uma matemática interpretada sobre um universo único para uma matemática aberta à interpretação em diversos *topoi* correspondentes a diversas "teorias de conjuntos locais" ainda seria, essencialmente, um tipo de proposta fundacionalista. A questão de se existem diversos universos e sistemas de inferência para a matemática seria baseada, de acordo com Awodey, em uma pré-concepção fundacionalista da matemática. O autor alega, talvez de forma um pouco imprecisa demais, que a perspectiva categórica seria descrita de forma mais perspícua pela afirmação de que simplesmente não existem tais universos e sistemas.

A liberação do comprometimento com algum universo fixo de entidades, regidas por leis fixas, tornaria os axiomas e teoremas da matemática "essencialmente esquemáticos". O que significaria que eles gozam de um tipo de generalidade que *não*

[66] "Global" porque é baseado na ideia de que há uma única totalidade de objetos matemáticos, por exemplo, a totalidade de todos os conjuntos ou de todos os tipos, e que, consequentemente, respeitem uma única totalidade de leis e regras universais.

resulta do emprego de quantificadores varrendo universos fixos, mas sim do fato de que nenhuma informação acerca de um universo de objetos é contida nessas afirmações, a não ser aquelas absolutamente necessárias dentro daquele contexto. Todo teorema matemático possuiria, mesmo que *implicitamente,* uma forma geral grosseiramente expressa por: "se tais e tais condições forem o caso, então tal e tal é o caso". Awodey explica:

> Isto é, é assumido que as "coisas" às quais se refere possuem certas propriedades e então é demonstrado, usando os métodos de raciocínio tacitamente assumidos, que eles também possuem alguma outra propriedade. Qualquer grupo abeliano finitamente gerado possui uma certa decomposição; o grupo fundamental de qualquer espaço topológico age de um certo modo sobre o espaço de cobertura universal e assim por diante. Claro, muitos teoremas não possuem literalmente essa forma, mas todo teorema tem algumas condições sob as quais ele é válido. (Awodey, 2003, p. 7)

Tomemos qualquer teorema da álgebra, por exemplo, o teorema de Cauchy dentro da teoria dos grupos. O teorema diz que se G é um grupo finito e p é algum número primo que divide a ordem de G (ou seja, a cardinalidade do domínio de G) então G contém um elemento de ordem p, i.e., algum elemento x tal que p é o menor inteiro positivo e x^p é igual ao elemento neutro do grupo G[67]. Lembremos que a abordagem *bottom-up* ou fundacionalista é caracterizada por começar pelo desenvolvimento de uma ontologia cujos elementos básicos consistem em átomos lógicos a partir dos quais se constrói os objetos da matemática. Conceitos estruturais, tais como o conceito de *monoide*, *grupo* ou mesmo *categoria* são posteriormente introduzidos como uma forma de se reunir sobre um nome comum espécies de construções de acordo com sua morfologia, suas propriedades estruturais. Assim, para um fundacionalista, o teorema de Cauchy afirmaria algo da forma: "Para qualquer objeto X do domínio fixo de todos os objetos matemáticos tal que X seja um grupo finito vale tal e tal propriedade". A abordagem *top-down* reconhece que o teorema, em sua formulação geral, é mais universal do que a interpretação particular que o fundacionalista propõe dentro de seu sistema fundacional. Parafraseando Awodey para adaptá-lo ao meu exemplo: o teorema em questão não é uma quantificação universal sobre um domínio específico de objetos, pressupostos ou construídos, de alguma forma fixos e dados; o teorema em questão, embora fale sobre todos os grupos finitos, não é sobre todos os grupos dentro de um universo fixo e nem mesmo sobre todos os grupos finitos possíveis em algum domínio de todos os universos

[67] Cf. McKay, 1959, p. 119.

possíveis; é uma afirmação esquemática sobre uma estrutura aberta a possuir várias instâncias.

A inspiração para essa noção de "esquematicidade" é a reflexão de Mac Lane acerca do caráter "proteano" da matemática, tal como mencionado por Awodey. Contudo, não parece fácil extrair uma única noção muito precisa do que seja "proteano". De acordo com Mac Lane, quando ele diz que a matemática é "proteana" ele pretende dizer, em suas próprias palavras, que "cada estrutura matemática possui diferentes realizações empíricas". Entretanto, embora ele tenha usado o adjetivo "empírico", boa parte de seus exemplos podem ser melhor descritos como "estruturas matemáticas abstratas" sendo instanciadas em diferentes tipos de estruturas matemáticas abstratas. Já que nem sempre se trata de mostrar que algum objeto, operação ou proposição descreve diferentes situações empíricas, e sim que esses elementos admitem diferentes explicações ou definições em termos uns dos outros.

Dentre os exemplos em Mac Lane (1992), encontramos que a aritmética seria proteana porque:

a) Números naturais não são "objetos", mas "formas gerais" com diferentes "significados práticos".
b) Operações sobre números naturais estão sujeitas a diferentes interpretações por:

   b1) possuírem diferentes realizações empíricas;

   b2) por poderem ser introduzidas com diferentes definições;

c) Leis da aritmética entendidas como equações explicitando as propriedades algébricas das operações sobre naturais seriam proteanas por:

   c1) As mesmas leis poderem ser aplicadas a diferentes operações;

   c2) As mesmas leis se aplicarem como axiomas a estruturas algébricas muito diferentes (por exemplo, a lei de associatividade aparece como axioma da teoria dos grupos, dos semi-grupos e das álgebras de Hopf).

Os exemplos de Mac Lane não se limitam à aritmética, abrangendo também o cálculo e a geometria, por exemplo. A derivada de uma função $f(x) = y$ pode assumir diferentes interpretações, dependendo do domínio e contradomínio envolvidos. Se lidarmos com valores em um plano, onde x e y são coordenadas, a derivada da função corresponderá à inclinação de uma curva. Já se x representar tempo e y distância, a derivada representará a velocidade, enquanto se y for uma velocidade, a derivada será a

aceleração. Embora alguns tentem fixar a interpretação da derivada como "taxa de variação", isso presumiria que x representa tempo, o que nem sempre é o caso. Mac Lane conclui, então, que a derivada é uma forma geral com múltiplas interpretações. Considerações análogas também se aplicam à operação de integração.

Uma variedade de questões foi introduzida por Mac Lane como uma forma de demonstrar que a geometria também seria proteana. A noção de “similaridade” para duas figuras, que é uma das noções mais fundamentais de uma geometria, admitiria diferentes interpretações. Além desse caso, o próprio *subject matter* da geometria seria ambíguo. Usualmente começamos o estudo da geometria pelo plano bidimensional. Mas cumpre levantar a questão: de qual plano estamos falando? Do plano de Euclides? Ora, sabemos que a axiomatização de Euclides era imperfeita e foi corrigida por Hilbert. Mas isso faz o plano descrito pela axiomatização de Hilbert “o plano real”? Além disso, se o que realmente é dado é um mundo tridimensional e o plano é uma abstração, de qual plano no contínuo tridimensional estamos falando? Essas questões seriam absurdas, pois “o plano” seria “uma forma com diferentes realizações”.

A teoria das categorias seria recomendável, de acordo com Awodey, precisamente, pelo fato de tornar precisa essa noção de uma “afirmação esquemática sobre estruturas possuindo diversas instâncias”.

> Como, então, tornamos precisa a noção de asserções esquemáticas sobre estruturas que possuem diversas instâncias? Simplesmente usando a linguagem e os métodos usuais da teoria das categorias; eles automaticamente tratam objetos matemáticos como “estruturas”, e afirmações categóricas sobre eles são inerentemente “esquemáticas”, no sentido que é exigido. Isso é o que faz a teoria das categorias uma boa linguagem para o estruturalismo. Ela também fornece uma perspectiva essencialmente distinta da fundacional. (Awodey, 2003, p. 11)

A distinção entre uma abordagem *bottom-up* e uma abordagem *top-down* já foi tematizada em nosso primeiro capítulo. Lá, a questão foi colocada como uma diferença entre duas abordagens para a epistemologia da matemática. Por um lado, a posição *bottom-up* era intimamente ligada a uma visão fundacionalista da matemática, enquanto que a abordagem *top-down* é motivada por um desejo de liberar o conhecimento matemático da particularidade de um sistema de fundamentos único. Se a aritmética, para tomar uma área da matemática como exemplo, tem por objeto uma forma geral capaz de diferentes realizações, parece desejável compreendê-la como descrevendo algo que é transversal a diversos sistemas fundacionais possíveis.

Seria improvável se a diferença entre uma maneira de proceder que vai dos conceitos mais universais aos mais particulares e outra que faz o caminho inverso fosse considerada uma distinção relevante somente na epistemologia da matemática. Pelo contrário, é de se esperar que uma tal diferença seja sintomática de uma oposição filosófica mais sútil e geral. Tanto o conhecimento propriamente científico quanto o da vida ordinária parecem poder progredir em ambas as "direções". A formulação de uma regra geral a partir da observação de casos particulares, a compreensão de um todo complexo por meio das partes, a criação de um conceito mais geral por abstração a partir de um mais específico, entre outros casos, são todas manifestações particulares de conhecimentos desenvolvidos de baixo para cima. Por outro lado, naturalmente, a aplicação de uma regra geral a um caso particular, a caracterização de uma parte em virtude da maneira como ela compõe o todo e a explicação de um conceito mais particular em virtude de outros mais universais são exemplos de conhecimentos de cima para baixo.

Ambas as maneiras de pensar são legítimas e não só podem como de fato são aplicadas no processo de construção do conhecimento.

CONCLUSÃO

Iniciamos essa tese, já em nossa introdução, expressando o desejo de buscar alternativas viáveis a uma perspectiva fundacionalista e que hipostasiasse objetos matemáticos. Dissemos, então, que a tese mostraria que a teoria das categorias, ou melhor, que uma matemática que se servisse dessa linguagem de forma autônoma, possibilitaria uma tal perspectiva. Suspendemos nosso juízo sobre a asserção mais forte de que essa teoria demandaria necessariamente uma tal interpretação filosófica da matemática. A resposta que McLarty oferece para as questões postas por Hellman deixa claro que nem todo mundo está disposto a assentir que teoria das categorias prescinde de fundamentos e do entendimento de que estruturas matemáticas são realidades objetivas.

A tensão ou incompatibilidade entre as respostas de Awodey e de McLarty é óbvia. Apesar de ambas as respostas ressaltarem a autonomia da teoria das categorias,

temos uma proposta *fundacionalista* e outra *antifundacionalista*. Acreditamos que a possibilidade dessa tensão é um mero sintoma de uma propriedade mais geral da teoria das categorias. A teoria goza de algo como uma *neutralidade* - ou talvez seja melhor dizer *maleabilidade* - filosófica que parece torná-la compatível com uma desconcertante pluralidade de perspectivas antagônicas. Essa maleabilidade faz com que seja no mínimo duvidoso se de fato é possível se falar em uma filosofia ou tese única que possa receber o nome de "estruturalismo categórico". Daí que tenham surgido reclamações, como as feitas posteriormente por Hellman (2006), de que somos deixados num cenário de incerteza quando tentamos comparar o estruturalismo categórico com os outros *frameworks* já propostos. Afinal, esse framework não parece dispor de respostas claras para perguntas "simples" como "qual a lógica subjacente?" ou "estruturas como objetos matemáticos são eliminadas?". Em vez de esperar encontrar na teoria das categorias uma única forma particular bem delimitada de filosofia matemática, acreditamos que ela deve antes ser vista como uma linguagem estruturalista universal compatível com mais de uma forma possível de abordagem filosófica. A teoria das categorias poderia ser vista como o terreno comum dentro do qual disputas sobre teses particulares podem ser travadas. Acreditamos que esse "terreno comum" também deveria ser empregado em outros debates sobre os fundamentos da matemática e não precisaria ficar estritamente restrito às comparações e embates sobre diferentes tons de estruturalismo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AWODEY, Steven. Structure in mathematics and logic: A categorical perspective. **Philosophia mathematica**, v. 4, n. 3, p. 209-237, 1996.

AWODEY, Steven. An answer to G. Hellman's question "Does category theory provide a framework for mathematical structuralism?". *Philosophia mathematica, v. 12, n. 1: p. 54-64,* 2004.

AWODEY, Steve. **Category theory**. Oxford university press, 2006.

AWODEY, Steve. Structuralism, invariance, and univalence. **Philosophia Mathematica**, v. 22, n. 1, p. 1-11, 2014.

BELL, John L. Category theory and the foundations of mathematics. **The British journal for the philosophy of science**, v. 32, n. 4, p. 349-358, 1981.

BELL, John L. From absolute to local mathematics. **Synthese**, p. 409-426, 1986.

BENACERRAF, Paul. What numbers could not be. **The philosophical review**, v. 74, n. 1, p. 47-73, 1965.

CAMPBELL, Howard E. **The structure of arithmetic**. New York : Appleton-Century-Crofts, 1970.

RUDOLF, CARNAP, Rudolf. Eigentliche und uneigentliche Begriffe. Symposion: Philosophische Zeitschrift für Forschung und Aussprache, Bd. 1, H. 4, p. 355-374, 1927.

CARTER, Jessica. Structuralism as a philosophy of mathematical practice. **Synthese** v. 163, n. 2, p. 119-131, 2008.

CHANG, C., KEISLER, H. **Model theory***, 3°ed.* New York: Elsevier, 1990.

DIEUDONNÉ, Jean. **A history of algebraic and differential topology, 1900-1960**. Basel: Birkhäuser, 1989.

DEDEKIND, Richard. **Was sind und was sollen die Zahlen? Wiesbaden:** Vieweg + Teubner Verlag, 1965.

DUMMETT, Michael. **Frege:** Philosophy of mathematics. Melksham: Redwood Press Ltda., 1991.

EILENBERG, Samuel; MAC LANE, Saunders. General theory of natural equivalences. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 58, n. 2, p. 231-294, 1945.

EILENBERG, Samuel; CARTAN, Henri. Homological algebra. Princeton: Princeton University Press, 1956.

EILENBERG, Samuel; STEENROD, Norman. **Foundations of algebraic topology**. Princeton: Princeton University Press, 2015.

EINSTEIN, Albert. Geometry and experience. **Scientiæ studia**, v. 3, p. 665-675, 2005.

FEFERMAN, Solomon. Categorical foundations and foundations of category theory. In: BUTTS, Robert E.; HINTIKKA, Jaakko. (Org) **Logic, foundations of mathematics, and computability theory**. Springer, Dordrecht,. 1977, p. 149-169.

FIELD, Hartry. **Science without numbers**. New York: Oxford University Press, 2016.

GASSER, Marc. Structuralism and its ontology. Ergo: An open access journal of philosophy, v. 2, 2015.

GROTHENDIECK, Alexandre. Sur quelques points d'algèbre homologique. **Tohoku mathematical journal**, Second Series, v. 9, n. 2, p. 119-183, 1957.

HALE, Bob. Structuralism's unpaid epistemological debts. **Philosophia mathematica**, v. 4, n. 2, p. 124-147, 1996.

HELLMAN, Geoffrey. Mathematics without numbers: Towards a modal-structural interpretation. Oxford: Clarendon Press, 1989.

HELLMAN, Geoffrey. Does category theory provide a framework for mathematical structuralism? **Philosophia mathematica**, v. 11, n. 2, p. 129-157, 2003.

HELLMAN, Geoffrey. What is categorical structuralism? In: BENTHEM, Johan; HEINZMANN, Gerhard; REBUSCHI, Manuel; VISSER, Henk. (Org.) **The age of alternative logics**. Springer, Dordrecht, 2006. p. 151-161.

HELLMAN, Geoffrey. Does category theory provide a framework for mathematical structuralism? Philosophia mathematica, v. 11, n. 2, p. 129-157, 2003.

HELLMAN Geoffrey. If "if-then" then what? In: **Mathematics and its logics:** Philosophical Essays. Cambridge: Cambridge University Press., 2021, p. 237-255.

HELLMAN, Geoffrey. Three varieties of mathematical structuralism. **Philosophia mathematica**, v. 9, n. 2, p. 184-211, 2001.

HYLAND, Martin; POWER, John. The category theoretic understanding of universal algebra: Lawvere Theories and Monads. Electronic notes in theoretical computer science, v. 172, n. 1, p. 437-458, 2007.

JOHNSTONE, Peter T. **Sketches of an Elephant:** A Topos Theory Compendium: Volume 1. New York: Oxford University Press, 2002.

JOYAL, Andri; MOERDIJK, Ieke. Algebraic set theory. Cambridge University Press, 1995.

KANAMORI, A. Cohen and set theory. **The bulletin of symbolic logic**. V. 14, n. 3, p. 351-378, 2008.

KLEIN, Felix. A comparative review of recent researches in geometry. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 2, n. 10, p. 215-249, 1893.

KRÖMER, Ralph. **Tool and object: A history and philosophy of category theory**. Springer Science & Business Media, 2007.

LANDRY, Elaine., MARQUIS, Jean-Pierre. Categories in context: Historical, foundational, and philosophical. **Philosophia Mathematica**, v.13, n.1, New York: Oxford University Press p. 1–43, 2005.

LAWVERE, F. William. Functorial semantics of algebraic theories. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, v. 50, n. 5, p. 869. 1963.

LAWVERE, F. William. The category of categories as a foundation for mathematics. Em: **Proceedings of the conference on categorical algebra**. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1966. p. 1-20.

LAWVERE, Francis William. An elementary theory of the category of sets (long version) with commentary. **Reprints in theory and applications of categories**, v. 11, p. 1-35, 2005.

LINNEBO, Øystein; PETTIGREW, Richard. Category theory as an autonomous foundation. **Philosophia mathematica**, v. 19, n. 3, p. 227-254, 2011.

LOGAN, Shay. Category theory is a contentful theory. **Philosophia mathematica**, v. 23, n. 1, p. 110-115, 2015.

MAC LANE, Saunders. One universe as a foundation for category theory. **Reports of the midwest category seminar III**. Springer, Berlin, Heidelberg, p. 192-200, 1969.

MAC LANE, Saunders. **The protean character of mathematics**. New York: De Gruyter,, 1992.

MCKAY, James H. Another proof of Cauchy's group theorem. **Amer**. Math. Monthly, v. 66, n. 2, p. 119, 1959.

MADDY, Penelope. **Defending the axioms: On the philosophical foundations of set theory**. Oxford University Press, 2011.

MARQUIS, Jean-Pierre. **From a geometrical point of view: A study of the history and philosophy of category theory**. New York: Springer Science & Business Media, 2008.

MARQUIS, Jean-Pierre; REYES, Gonzalo. **The history of categorical logic: 1963-1977**.In: D. Gabbay & J. Woods (eds.). Handbook of the history of logic. Vol. 6. Amsterdam: Elsevier, 2012, p. 689–800.

MAYBERRY, John. On the consistency problem for set theory. British journal for the philosophy of Science, v. 28, n. 1, p. 1-34, 1977.

MAYBERRY, John. What is Required of a Foundation for Mathematics? **Philosophia mathematica**, v. 2, n. 1, p. 16-35, 1994.

MCLARTY, Colin. The uses and abuses of the history of topos theory. The British journal for the philosophy of science, v. 41, n. 3, p. 351-375. Oxford University Press, 1990.

MCLARTY, Colin. Numbers can be just what they have to. Noûs, v. 27, n. 4, p. 487-498, 1993.

MCLARTY, Colin. Exploring categorical structuralism.**Philosophia Mathematica**, v. 12, n. 1, New York: Oxford University Press,. p. 37-53, 2004.

MCLARTY, Colin. Learning from questions on categorical foundations. **Philosophia mathematica**, v. 13, n. 1, p. 44-60, 2005.

PARSONS, Charles. Frege's Theory of Number. In: BLACK, Max. (Ed.)**Philosophy in America**. Ithaca: Cornell University Press, 1965. p. 180-203.

PARSONS, Charles. The structuralist view of mathematical objects. Synthese, v. 84, n. 3, p. 303–346, 1990. doi:10.1007/BF00485186

POINCARÉ, Henri. **The foundations of science: Science and hypothesis, The value of science, Science and method**. New York: The Science Press, 1913.

PONT, Jean-Claude. **La topologie algébrique des origines à Poincaré**. 1974. Tese de Doutorado. ETH Zurich.

PUTNAM, Hilary. Mathematics without foundations. T**he journal of philosophy**, v. 64, n. 1, p. 5-22, 1967.

QUINE, Willard Van. Structure and nature. **The journal of philosophy**, v. 89, n. 1, p. 5-9, 1992.

RECK, Erich H.; PRICE, Michael P. Structures and structuralism in contemporary philosophy of mathematics. **Synthese**, v. 125, n. 3, p. 341-383, 2000.

RESNIK, M. Mathematics as a science of patterns: Ontology and reference. **Noûs**, Vol. 15, No. 4, Special issue on philosophy of mathematics, [S.L]: Wiley, p. 529- 550, 1981

RESNIK, Michael D. **Mathematics as a science of patterns**. Oxford: Oxford University Press, 1997.

RESNIK, Michael D. Non-ontological structuralism. Philosophia mathematica, Vol. 27, nº 3, p. 303–315, 2019.

RODIN, Andrei. Categories without structures. **Philosophia mathematica**, v. 19, n. 1, p. 20-46, 2011.

SANKAPPANAVAR, Hanamantagouda P.; BURRIS, Stanley. **A course in universal algebra.** Graduate texts math, v. 78, Berlin: Springer, 1981.

SHAPIRO, Stewart. **Philosophy of mathematics:** Structure and ontology. New York: Oxford University Press. 1997.

SHAPIRO, Stewart. Identity, indiscernibility, and ante rem structuralism: The tale of i and -i. **Philosophia mathematica**, v. 16, n. 3, p. 285-309, 2008.

SHULMAN, Michael. Homotopy type theory: A synthetic approach to higher equalities. In: LANDRY, Elaine. (Ed.) **Categories for the working philosopher**, Oxford: Oxford UNiversity Press, p. 36-57, 2017.

SHULMAN, Michael. Comparing material and structural set theories. **Annals of pure and applied logic**, v. 170, n. 4, p. 465-504, 2019.

STREICHER, Thomas et al. Universes in toposes. In: CROSILLA, Laura; SCHUSTER, Peter. **From sets and types to topology and analysis:** Towards practicable foundations for constructive mathematics. **Oxford Science Publications,** v. 48, p. 78-90, 2005.

SKOLEM, Thoralf. Some remarks on axiomatized set theory, In: VAN HEIJENOORT, Jean. From Frege to Gödel. Cambridge: Harvard University Press.1967, 1922, pp. 290–301.

TSEMENTZIS, Dimitris. Univalent foundations as structuralist foundations. **Synthese**, v. 194, n. 9, [SL]:Springer, p. 3583-3617, 2017.