

UNIVERSIDADE FEDERAL GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

THIAGO RODRIGUES CAVALCANTE

**Existência de uma Solução não Trivial  
para uma Classe de Problemas Elípticos  
Super Quadrático**

Goiânia - GO  
2013

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1 **1. Identificação do material bibliográfico:**     **Dissertação**     **Tese**

2 **2. Identificação da Tese ou Dissertação**

Autor (a):		Thiago Rodrigues Cavalcante			
E-mail:		thiago_cavalc@hotmail.com			
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não					
Vínculo empregatício do autor			Prof. Substituto IME-UFG		
Agência de fomento:		CNPQ		Sigla:	CNPQ
País:	Brasil	UF:	GO	CNPJ:	33654831-0001/36
Título:	Existência de uma solução não trivial para uma classe de problemas elípticos super quadráticos				
Palavras-chave:	Problema de Dirichlet, Superlinear, Métodos Variacionais, Teorema de Linking, Condições (P.S.) e (Ce).				
Título em outra língua:	Existence of a nontrivial solution for a class of elliptic problems super quadratic.				
Palavras-chave em outra língua:	Dirichlet problem, superlinear, Variational Methods, Linking Theorem , Conditions (P.S.) and (Ce).				
Área de concentração:	Análise				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	13/12/2013				
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado em Matemática				
Orientador (a):	Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva				
E-mail:	eddomingos@hotmail.com				
Co-orientador (a):*					
E-mail:					

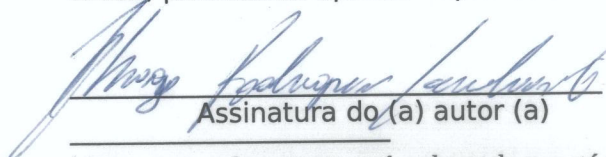
\*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento     SIM     NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

  
Assinatura do(a) autor (a)

Data: 28/01/14

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

THIAGO RODRIGUES CAVALCANTE

# **Existência de uma Solução não Trivial para uma Classe de Problemas Elípticos Super Quadrático**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Área de concentração:** Análise.

**Orientador:** Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva

Goiânia - GO  
2013

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
GPT/BC/UFG**

C376e Cavalcante, Thiago Rodrigues.  
Existência de solução para uma classe de problemas elípticos superlineares-subcríticos [manuscrito] / Thiago Rodrigues Cavalcante. - 2013.  
100 f.

Orientador: Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,  
Instituto de Matemática e Estatística, 2013.

Bibliografia.  
Apêndices.

1. Dirichlet, Problemas de. 2. Métodos variacionais (Matemática). 3. Linking, Teorema de. I. Título.

CDU: 517.95

**THIAGO RODRIGUES CAVALCANTE**

**EXISTÊNCIA DE UMA SOLUÇÃO NÃO TRIVIAL PARA  
UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS SUPER  
QUADRÁTICO**

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 13 de dezembro de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

*Edcarlos D. de Silva*

---

**Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva**  
Instituto de Matemática e Estatística-UFG  
Presidente da Banca

*José Anderson Valença Cardoso*

---

**Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso**  
Departamento de Matemática-UFS

*Marcos Leandro Mendes Carvalho*

---

**Prof. Dr. Marcos Leandro Mendes Carvalho**  
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

**Thiago Rodrigues Cavalcante**

Graduou-se Bacharel em Matemática na UFG - Universidade Federal de Goiás. Durante o Mestrado, na UFG - Universidade Federal de Goiás, foi bolsista do CNPq e desenvolveu um trabalho teórico na área de equações diferenciais parciais.

Este trabalho é dedicado à minha família por completo, minha mãe Edsonia Rodrigues Fragoso, meu pai Rosival Moreira Cavalcante, minha irmã Thuany Rodrigues Cavalcante, minha esposa Rakel Vaz da Silva. E dedico a pessoa que eu mais amo no mundo, a qual espero que se orgulhe do seu pai um dia, minha filha Nathália Vaz Cavalcante.

---

## Agradecimentos

---

Agradeço sobretudo a meu Deus pela força espiritual e pela saúde concedida a mim para que eu pudesse concluir este trabalho.

Sou imensamente grato à meus pais por todo apoio, minha mãe Edsonia Rodrigues Cavalcante, por ter feito de tudo pra que eu concluísse meus estudos e transformado em realidade esse sonho, posso não falar à todo momento mas a amo demais. Meu pai Rosival Moreira Cavalcante, pelo apoio incondicional e confiança, sempre me incentivando de uma maneira ou outra, meu exemplo de vida um cara super inteligente que eu amo demais. Minha irmã Thuany Rodrigues Cavalcante por sempre ter sido sincera, amiga e companheira comigo e sempre ter acreditado em mim, uma pessoa que eu amo demais e sei que está muito orgulhosa do seu irmão.

Agradeço minha esposa Rakel Vaz da Silva por ter entrado na minha vida e me transformado em um homem de verdade, pela paciência nos momentos difíceis por conta do nervosismo e a ansiedade inerente à relação deste trabalho, sei que o estresse foi grande. Obrigado por ter feito de mim um pai e me dado o maior presente do mundo, nossa filha Nathália Vaz Cavalcante, razão de eu ter concluído este trabalho. O sentimento que tenho por elas deve ter outro nome pois amor é pouco, Thiamo pra todo o sempre minha branca.

Aos meus primos Frederico Soares e Eduardo Emílio por sempre terem acreditado em mim, até quando eu estive próximo de desistir foram um dos únicos que me apoiaram. Ao meu velho primo Rômulo Aguiar Cavalcante, só nos dois sabemos o que passamos e ele sempre esteve comigo de um jeito ou de outro.

Agradeço ao meu orientador Edcarlos Domingos da Silva pela dedicação, paciência e pelos ensinamentos. Pela simplicidade e ter se mostrado mais do que um orientador mas um amigo, um cara simples e humilde o qual espero trabalhar e aprender mais em um futuro próximo.

Por fim quero agradecer meus amigos de mestrado Bruno Trindade, Caike Damke, Fabiano Rodrigues, Dassael Fabrício pelas horas e horas de estudo e dedicação, pelo café do fim de tarde, pelas discussões referentes ao trabalho e porque não pelas tardes de Pamonharia, as quais faziam com que o estresse diminuísse.

E por fim, agradeço aos meus amigos, *Os Brutíssimos*, Daiane, Hudson, Lívio, Lorena,

Ludimila, Mamed, Vinicius(Aids), Willy e Wandré por todos os momentos maravilhosos que vivemos.

"Prefiro morrer de pé, do que viver de joelhos."

**José Dias Nunes,**  
*Tião Carreiro.*

---

## Resumo

---

Rodrigues Cavalcante, Thiago. **Existência de uma Solução não Trivial para uma Classe de Problemas Elípticos Super Quadrático**. Goiânia - GO, 2013. 98p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Goiás.

Nesta dissertação analisamos questões de existência de uma solução fraca para uma classe de problemas de Dirichlet elípticos superlineares. Aqui não consideramos a condição de Ambrosetti-Rabinowitz, a qual restringe algumas funções não lineares. Obtemos os principais resultados desta dissertação via Métodos variacionais, tais como o Teorema do Passo da Montanha e um Teorema de Linking. Além disso, utilizamos a Teoria Espectral e as condições de Palais-Smale ( $P.S.$ ) e Cerami ( $C_e$ ).

### Palavras-chave

Problema de Dirichlet, Superlinear, Métodos Variacionais, Teorema de Linking, Condições ( $P.S.$ ) e ( $C_e$ ).

---

## Abstract

---

Rodrigues Cavalcante, Thiago. **Existence of Solution Problems Elliptical Superlineares-subcritical**. Goiânia - GO, 2013. 98p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Goiás.

In this dissertation we analyze questions of existence of a weak solution for a class of superlineares elliptic Dirichlet problems. Here we do not consider the Ambrosetti Rabinovitz condition, which restricts some nonlinearities. We obtain main results of this dissertation via Variational Methods, such as Mountain Pass Theorem and Linking Theorem. Furthermore, we use Palais-Smale condition ( $PS$ ) or Cerami condition ( $Ce$ ).

### Keywords

Dirichlet problem, superlinear, Variational Methods, Linking Theorem, Conditions ( $PS$ ) or ( $Ce$ )

---

# Sumário

---

Notações	11
Introdução	13
1 Preliminares	19
1.1 O Espectro do Operador $(-\Delta + a)$	20
1.1.1 Desigualdades Variacionais	25
1.2 Regularidade do Funcional	27
1.3 Métodos Variacionais	37
1.3.1 Teorema do Passo da Montanha	38
1.3.2 Teorema de Linking	39
2 Existência de uma solução não trivial para uma classe de problemas elípticos superquadráticos sob a hipótese $(P.S.)^*$	44
2.1 Análise do Problema	44
2.2 Demonstração do Teorema 2.1	56
3 Existência de uma solução não trivial para uma classe de problemas elípticos superquadráticos sob a hipótese $(C_e)^*$	73
3.1 Análise do Problema	73
3.2 Demonstração do Teorema 3.1	78
A Resultados de Análise Funcional	90
A.1 Imersões de Sobolev	90
A.1.1 Espaços de Sobolev	90
A.1.2 Imersões Contínuas e Compactas	91
A.2 Resultados de Teoria Espectral	92
B Resultados de Medida e Integração	94
Referências Bibliográficas	96



---

## Notações

---

### Notações Gerais

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$	conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$
$\partial\Omega$	fronteira de $\Omega$
$ \Omega $	medida do conjunto $\Omega$
$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$	gradiente da função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	Laplaciano de $u$
$D^\alpha u = \frac{\partial^{ \alpha } u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$	onde o multi-índice $\alpha$ é dado por $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ , $ \alpha  = \sum_{i=1}^N \alpha_i$
$\rightharpoonup$	convergência fraca
$\hookrightarrow$	imersão contínua
$\overset{cpt.}{\hookrightarrow}$	imersão compacta
$(P.S.)$	condição de Palais - Smile
$(P.S.)^*$	condição de Palais - Smile Estrela
$(Ce)$	condição de Cerammi
$(Ce)^*$	condição Cerammi Estrela

### Espaços de Funções

$C^k(\Omega)$	espaço das funções contínuas e $k$ -diferenciáveis
$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\overline{\Omega}) : \sup_{x,y \in \Omega} \frac{ u(x) - u(y) }{ x - y ^\alpha} < \infty, \text{ com } x \neq y \text{ e } 0 < \alpha < 1 \right\}$	
$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{ u \in C^k(\Omega) : D^j u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), \text{ para todo }  j  \leq k \}$	
$L^p(\Omega) = \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável e } \int_\Omega  u ^p < \infty, 1 \leq p < \infty \}$	
$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável e }  u(x)  \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ para alguma constante } C > 0 \}$	
$W^{k,p}(\Omega) = \{ u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : u \in L^p(\Omega) \text{ e } D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall 0 \leq  \alpha  \leq k \}$	
$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\ \cdot\ _{k,p}}$	
$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$	

$\|\cdot\|_p$ norma no espaço  $L^p(\Omega)$  $\|\cdot\|$ norma no espaço  $H_0^1(\Omega)$

---

## Introdução

---

Neste trabalho abordaremos resultados que garantem a existência de uma solução fraca não trivial para uma classe de problemas Elípticos de Dirichlet Superlineares Subcrítico. Aplicaremos alguns métodos variacionais tais como o Teorema do Passo da Montanha, Teorema de Linking e alguns resultados da Teoria Espectral.

O problema Elíptico de Dirichlet em questão nesta dissertação é o seguinte:

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u + a(x)u = g(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde  $a \in L^p(\Omega)$  para  $p > N/2$ ,  $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ , é um domínio limitado, cuja fronteira  $\partial\Omega$  é uma variedade suave.

Encontrar soluções do problema  $(\mathbf{P})$  é equivalente a encontrar pontos críticos do funcional  $I$  associado a  $(\mathbf{P})$  definido no espaço  $E = H_0^1(\Omega)$  por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) |u|^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u) dx, \quad \forall u \in E = H_0^1(\Omega),$$

onde a função  $G : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$G(x, u) = \int_0^u g(x, s) ds; \quad x \in \Omega, u \in \mathbb{R}.$$

A dificuldade encontrada nesse trabalho foi o fato de omitirmos a condição superquadrática no infinito de Ambrosetti-Rabinowitz, a qual é dada por:

**(AR)** Existem  $\mu > 2$  e  $L > 0$  tais que :

$$0 < \mu G(x, u) \leq g(x, u)u, \quad \forall |u| \geq L, x \in \Omega.$$

Fazendo algumas manipulações e usando propriedades da função logarítmica mostramos que **(AR)** implica na seguinte desigualdade

$$G(x, u) \geq a |u|^\mu - b, \quad \forall u \in \mathbb{R}, x \in \Omega,$$

para algumas constantes  $a, b > 0$ . Donde concluímos que uma função  $G$  satisfazer a condição **(AR)** implica que esta função satisfaça a seguinte desigualdade

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{G(x, u)}{|u|^\mu} > a > 0.$$

Em um célebre artigo do ano de 1995 [19], Shujie Li e Michel Willem garantiram a existência de uma solução não trivial para o problema **(P)** usando a condição  $(PS)^*$ . Alguns lemas de deformação onde a não linearidade do funcional  $f$  satisfizesse a condição de **(AR)** foram utilizados para demonstrar que as sequências Palais-Smale eram limitadas. Além deste trabalho existem outros na literatura que também utilizam da hipótese de **(AR)** como pode ser visto em [10], [15], [19] e [23]. Entretanto a condição de **(AR)** não é satisfeita para algumas não linearidades, como é o caso das seguintes funções:

$$\begin{aligned} F(x, u) &= u^2 \ln(1 + u^2), \\ G(x, u) &= |u|^2 \left( \ln \left( \frac{|u|^4}{3} - |u|^2 + 1 \right) \right)^3, \\ H(x, u) &= \frac{1}{2} |u|^{\frac{4}{3}} + |u|^2 \ln(1 + |u|^2). \end{aligned}$$

O objetivo deste trabalho é garantir a existência de uma solução fraca não trivial para o problema **(P)** sem utilizar da condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Para este fim, baseados nos artigos [14], [28] e [18], estudamos o que foi feito por Li e Willem em [19] e além da existência de soluções para o caso em que a não linearidade satisfaz **(AR)**, garantimos a existência de uma solução não trivial para **(P)**, omitindo a condição de Ambrosetti-Rabinowitz, adotando novas condições superquadrática as quais são satisfeitas pelas funções citadas  $F, G$  e  $H$ . Assim estudamos as não linearidades que garantem a existência de uma solução fraca não trivial para o caso de problemas elípticos do tipo superquadráticos que não satisfazem a condição **(AR)**.

Nosso trabalho foi motivado pelos artigos de Qin Jiang e Chun-Lei Tang [14], o qual utiliza o Teorema de Linking Local (ver preliminares 1.17) para garantir a existência de uma solução não trivial para o problema **(P)**, utilizando a condição  $(PS)^*$ . Nos baseamos também no artigo de Xiuming Mo, Ping Jing, Yan Zhao e Anmin Mao [28], o qual também faz uso do Lema de Linking 1.17, agora utilizando a condição  $(Ce)^*$ . Além destes dois artigos, nosso estudo sobre a teoria espectral para o problema de autovalores referente ao problema **(P)** foi baseado no artigo de Gongbao Li e Chunhua Wang [18].

No decorrer deste trabalho garantimos que o funcional em questão possui a estrutura geométrica de linking local na origem ver 1.11. Adicionalmente nos pontos críticos deste funcional é garantido uma certa compacidade no espaço de dimensão infinita  $H_0^1(\Omega)$ , compacidade essa garantida pelas condições de Palais-Smale ou Cerami.

Nas preliminares dessa dissertação, analisamos autovalores dos operadores elípticos do problema:

$$(PA) \begin{cases} -\Delta u + a(x)u = \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$  é um domínio aberto, suave e limitado e  $a \in L^p(\Omega)$  com  $p > \frac{N}{2}$ .

O principal resultado da preliminar da dissertação é o seguinte lema (c.f. [26]).

**Lema 0.1** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N \geq 3$ ) um domínio limitado e  $a \in L^p(\Omega)$  com  $p > \frac{N}{2}$ . Então a sequência de todos os autovalores  $\{\lambda_j\}_{j=1}^{+\infty}$  do problema satisfaz*

$$-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

e  $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \infty$ .

Aqui garantimos que  $-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$  é a sequência de todos os autovalores do problema de autovalores (PA), cada  $\lambda_j$  é repetido de acordo com sua multiplicidade. Além disso, tomamos o conjunto  $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$  das respectivas autofunções correspondentes aos autovalores em  $H_0^1(\Omega)$  normalizadas em  $L^2(\Omega)$ , ou seja,  $\int_{\Omega} e_i e_j = \delta_{ij}$ . Aqui  $\delta_{ij}$ , é o Delta de Kronecker dado por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} = 1, & \text{se } i = j, \\ = 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (0-1)$$

Donde concluímos que

$$\int_{\Omega} \nabla e_i \nabla e_j + a(x) e_i e_j dx = \lambda_i \int_{\Omega} e_i e_j dx = \lambda_i \delta_{ij}, \quad \forall i, j.$$

Além disso mostramos, usando o Teorema Espectral, (cf. Brezis [4]), que o conjunto  $\{e_1, e_2, \dots\}$  é ortonormal total.

Enunciamos os teoremas do Passo da Montanha e o Teorema de Linking demonstrando alguns resultados de suma importância no decorrer da dissertação.

No segundo capítulo vamos garantir a existência de uma solução não trivial para (P) sem a condição (AR) e sob novas condições superquadrática no infinito. Neste capítulo analisamos as seguintes funções

$$G(x, u) = |u|^2 \left( \ln \left( \frac{|u|^4}{3} - |u|^2 + 1 \right) \right)^3$$

e

$$F(x, u) = u^2 \ln(1 + u^2),$$

onde  $x \in \Omega$ ,  $u \in \mathbb{R}$ . Verificamos que estas funções não satisfazem **(AR)**. Porém  $F$  e  $G$  satisfazem as hipóteses do principal resultado do capítulo, a saber:

**(G1)**

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{G(x, u)}{|u|^2} = \infty \text{ uniformemente em } \Omega;$$

**(G2)**

$$\lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{G(x, u)}{|u|^2} = 0 \text{ uniformemente em } \Omega;$$

**(G3)** Existem constantes  $1 < \lambda < \frac{N+2}{N-2}$  e  $a_1 > 0$  tais que :

$$|g(x, u)| \leq a_1(|u|^\lambda + 1), \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R};$$

**(G4)** Existem constantes  $\beta > \frac{2N}{N+2} \lambda$ ,  $a_2 > 0$  e  $L > 0$  tais que:

$$ug(x, u) - 2G(x, u) \geq a_2 |u|^\beta, \forall |u| \geq L, x \in \Omega.$$

Além disso, se 0 é um autovalor do problema  $-\Delta + a$  (com condição de contorno de Dirichlet), então consideraremos a seguinte hipótese:

**(G5)** Existe  $\delta > 0$  tal que:

$$(i) G(x, u) \geq 0 \quad \forall |u| \leq \delta \quad x \in \Omega,$$

ou

$$(ii) G(x, u) \leq 0 \quad \forall |u| \leq \delta \quad x \in \Omega.$$

Se  $0 \notin \sigma(\Delta + a)$ , ou seja, 0 não é um autovalor do problema de autovalores associado ao problema **(P)**, garantimos que o funcional  $I$  possui a Geometria do Linking Local, utilizando o Lema 2.2, (cf. Seção 2.1.)

O principal resultado deste capítulo é o seguinte teorema:

**Teorema 0.2** *Suponhamos que  $G$  satisfaz **(G-1)**, **(G-2)**, **(G-3)**, **(G-4)**. Se 0 é um autovalor do problema  $-\Delta + a$  consideramos a hipótese **(G-5)**. Então o problema **(P)** possui uma solução fraca e não trivial.*

Para demonstrar esse teorema definimos o funcional  $I$  no espaço  $E = H_0^1(\Omega)$  por:

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) |u|^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u) dx, \quad u \in E = H_0^1(\Omega).$$

Para garantir a existência de uma solução não trivial para **(P)** utilizamos o Teorema de Linking Local (cf. Lema 1.17, via artigo de Li and Willem [19]).

Provamos que o funcional  $I$  satisfaz as hipóteses  $(\mathbf{f}_1) - (\mathbf{f}_4)$  do Teorema de Linking Local sob a condição  $(P.S.)^*$  e garantimos assim a existência de uma solução fraca não trivial para o problema  $(\mathbf{P})$ .

No Capítulo 03 consideramos um caso mais geral, omitimos as hipóteses superlineares  $(\mathbf{G-3})$  e  $(\mathbf{G-4})$  impostas por Qin Jiang e Chun-Lei Tang [14]. Neste ponto supomos novas condições superquadráticas no infinito, as quais não nos garante que toda sequência  $(PS)$  ou  $(PS)^*$  é limitada. Porém com tais condições superquadráticas, somos capazes de mostrar, que toda sequência  $(Ce)$  ou  $(Ce)^*$  é limitada. Sendo assim garantimos uma solução não trivial para  $(\mathbf{P})$  agora utilizando da condição  $(Ce)^*$  a qual é mais fraca que a condição  $(PS)^*$ . Por exemplo considere as seguintes funções

$$\begin{aligned} G(x, u) &= \frac{1}{2} |u|^{\frac{8}{3}} + |u|^2 \ln(1 + |u|^2) \quad x \in \Omega, u \in \mathbb{R}. \\ \Gamma(x, u) &= \theta |u|^{\theta-2} u + (\theta - 1) |u|^{\theta-3} u \sin^2(u) + |u|^{\theta-1} \theta \sin(2u) \quad x \in \Omega, u \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde  $2 < \theta < 3$ . Verificamos que as funções  $G$  e  $\Gamma$  satisfazem as hipóteses  $(\mathbf{G1})$  e  $(\mathbf{G2})$ .

Definimos a seguinte função

$$\overline{G}(x, u) = \frac{u}{2} g(x, u) - G(x, u).$$

Suponhamos que a função  $\overline{G}$  satisfaça

$(\overline{\mathbf{G3}})$

$$\begin{aligned} (i) \quad & \overline{G}(x, u) \geq a_3 |u|^\beta, \quad |u| \geq R; \\ (ii) \quad & \left| \frac{g(x, u)}{u} \right|^\sigma \leq a_4 \overline{G}(x, u), \quad |u| \geq R, \end{aligned} \tag{0-2}$$

onde  $a_3, a_4 > 0$ ,  $\sigma > \frac{N}{2} + 1$ ,  $\beta > q + 1$  com  $q = \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1}$ .

Se  $0$  é um autovalor do operador  $-\Delta + a$  (com condição de contorno de Dirichlet), consideramos a hipótese  $(\mathbf{G5})$ .

Nosso principal resultado desse capítulo é o seguinte teorema:

**Teorema 0.3** *Suponhamos que  $G$  satisfaz  $(\mathbf{G-1}), (\mathbf{G-2}), (\overline{\mathbf{G-3}})$ . Se  $0 \in \sigma(-\Delta + a)$  suponhamos a hipótese  $(\mathbf{G-5})$ . Então o problema  $(\mathbf{P})$  possui pelo menos uma solução fraca não trivial.*

Para demonstrar tal teorema definimos o funcional,

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) |u|^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u) dx, \quad u \in E = H_0^1(\Omega).$$

---

Mostramos que o funcional  $I$  satisfaz as condições do Lema de Linking Local 1.17, sob a condição  $(Ce)^*$  o qual é demonstrado em [20]. Garantimos assim a existência de uma solução fraca não trivial para  $(\mathbf{P})$ . Esse capítulo nos remete a um caso mais geral do que o estudado no Capítulo 02, pois a hipótese  $(Ce)^*$  é mais fraca do que a hipótese  $(PS)^*$ .

No apêndice são citados resultados clássicos de análise funcional como as imersões compactas e contínuas nos espaços de Sobolev e algumas desigualdades variacionais. Alguns resultados de Teoria Espectral que são usados no decorrer da dissertação e resultados clássicos de EDP. Adicionalmente apresentamos alguns resultados de medida e integração com o objetivo de tornar este texto auto contido.

## Preliminares

Neste capítulo será apresentado a teoria espectral de operadores compactos para o problema linear associado ao seguinte problema de autovalor:

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\mathbf{PA})$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ , é um domínio aberto, suave e limitado.

Aqui  $a \in L^p(\Omega)$  com  $p > N/2$ . Vamos garantir a existência de uma sequência de autovalores

$$-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots,$$

onde cada autovalor  $\lambda_j$  é repetido de acordo com sua multiplicidade. Além disso, temos que  $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \infty$ . Consideramos  $\{e_1, e_2, \dots, e_N, \dots\}$  as respectivas autofunções associadas aos autovalores em  $H_0^1(\Omega)$  e ortogonais em  $L^2(\Omega)$ . Garantimos que o primeiro autovalor do problema **(PA)** tem a seguinte representação

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + a(x)u^2 dx; u \in H_0^1(\Omega) \text{ e } \int_{\Omega} |u|^2 dx = 1 \right\} > -\infty.$$

Estudaremos detalhadamente as desigualdades variacionais relacionadas ao problema **(PA)**.

Considerando  $H$  um espaço de Hilbert, definimos as derivadas de Gâteaux e de Fréchet. Garantimos a regularidade do funcional  $I$  associado ao problema **(P)** definido no espaço  $E = H_0^1(\Omega)$  como

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) |u|^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u) dx, \forall u \in E = H_0^1(\Omega),$$

onde a função  $G : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $G(x, u) = \int_0^u g(x, s) ds$ .

Na seção seguinte enunciamos alguns métodos variacionais de suma importância na demonstração dos principais teoremas da dissertação, tais como o Teorema do Passo

da Montanha e o Teorema de Linking. Adicionalmente daremos algumas definições necessárias para o entendimento do texto.

Finalmente demonstramos um resultado de suma importância no trabalho, que nos permite concluir a demonstração dos Teoremas centrais desta dissertação. Este resultado nos garante que toda sequência  $(P.S.)$  ou  $(Ce)$  limitada para o funcional  $I$  possui subsequência convergente em  $H_0^1(\Omega)$ .

## 1.1 O Espectro do Operador $(-\Delta + a)$

Consideremos os seguintes Lemas, (cf. seção 2.4 [26]).

**Lema 1.1** *Sejam  $N \geq 3$ ,  $a \in L^p(\Omega)$ . Então o funcional*

$$\begin{aligned} \mathcal{X} : H_0^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \mathcal{X}(u) = \int_{\Omega} a(x)u^2 dx \end{aligned}$$

*é fracamente contínuo, ou seja, para toda sequência  $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$  tal que  $u_n \rightharpoonup u$  então  $\mathcal{X}(u_n) \rightarrow \mathcal{X}(u)$ .*

**Lema 1.2** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado em  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ ,  $a \in L^p(\Omega)$  com  $p > \frac{N}{2}$ . Então o primeiro autovalor do problema **(P)**  $\lambda_1$  satisfaz*

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + a(x)u^2 dx; u \in H_0^1(\Omega) \text{ e } \int_{\Omega} |u|^2 dx = 1 \right\} > -\infty.$$

Com base nestes Lemas, vamos demonstrar o principal resultado relativo a Teoria Espectral para o problema **(PA)**.

**Lema 1.3** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$  um domínio limitado,  $a \in L^p(\Omega)$  com  $p > N/2$ . Então a sequência de todos os autovalores  $\{\lambda_j\}_{j=1}^{+\infty}$  do problema **(PA)** satisfaz*

$$-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

e

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \infty.$$

*Prova:*

Pelo Lema 1.2 temos que  $\lambda_1 > -\infty$ . Consequentemente existe um  $\lambda_0 > 0$ , suficientemente grande, tal que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + a(x)u^2 dx + \int_{\Omega} \lambda_0 |u|^2 dx > 0; \forall u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0.$$

Sendo assim, vamos definir o seguinte produto interno equivalente em  $H_0^1(\Omega)$

$$\langle u, v \rangle_{\lambda_0} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + a(x)uv dx + \int_{\Omega} \lambda_0 uv dx > 0; \forall u, v \in H_0^1(\Omega), u, v \neq 0.$$

Note que em **(PA)** multiplicando a primeira igualdade por  $v$  e integrando em ambos os lados ficamos com

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v + a(x)uv dx = \lambda \int_{\Omega} uv dx.$$

Agora, adicionando em ambos os lados o termo  $\int_{\Omega} \lambda_0 uv dx$  concluímos que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v + a(x)uv dx + \int_{\Omega} \lambda_0 uv dx = \lambda \int_{\Omega} uv dx + \int_{\Omega} \lambda_0 uv dx,$$

ou seja,

$$\langle u, v \rangle_{\lambda_0} = (\lambda + \lambda_0) \int_{\Omega} uv dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega). \quad (1-1)$$

Agora, fixado  $u \in L^2(\Omega)$ , considere a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_u : H_0^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \mathfrak{F}_u(\varphi) = \int_{\Omega} u\varphi dx. \end{aligned}$$

Utilizando o Teorema de Representação de Riesz temos que existe um único  $\omega \in H_0^1$  tal que

$$\int_{\Omega} uv dx = \langle \omega, v \rangle_{\lambda_0}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Consequentemente, pela equação (1-1), segue a seguinte identidade

$$\langle u, v \rangle_{\lambda_0} = (\lambda + \lambda_0) \langle \omega, v \rangle_{\lambda_0}, \quad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Fazendo algumas manipulações na identidade acima temos que

$$\langle u - (\lambda + \lambda_0)\omega, v \rangle_{\lambda_0} = 0, \quad \forall v \in H_0^1.$$

Donde segue que  $u - (\lambda + \lambda_0)\omega = 0$ , ou de forma equivalente,  $(\lambda + \lambda_0)\omega = u$ .

Consequentemente temos que  $\omega = \omega_u$ , ou seja,  $\omega$  pode ser entendido com sendo uma aplicação dado por

$$\begin{aligned} K : L^2(\Omega) &\rightarrow H_0^1(\Omega) \\ u &\mapsto \omega = Ku, \end{aligned}$$

onde  $\omega$  é o representante para a função  $\mathfrak{F}_u$  definida anteriormente e

$$\mathfrak{F}_u(\varphi) = \int_{\Omega} u\varphi dx = \langle \omega, \varphi \rangle_{\lambda_0}, \quad \forall \varphi \in H_0^1.$$

Portanto temos que  $(\lambda + \lambda_0)Ku = u$ , ou equivalentemente, para  $(\lambda + \lambda_0) \neq 0$ ,

$$Ku = \frac{1}{\lambda + \lambda_0}u.$$

Tomando  $\mu = \frac{1}{\lambda + \lambda_0}$  obtemos que

$$\begin{cases} K(u) = \mu u, u \in H_0^1(\Omega) \\ \lambda = \frac{1}{\mu} - \lambda_0, \mu \neq 0. \end{cases} \quad (1-2)$$

Neste momento vamos verificar que  $K$  é uma aplicação linear e contínua. Inicialmente tomemos  $u_1$  e  $u_2$  em  $H_0^1(\Omega)$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Para verificar a linearidade de  $K$  devemos verificar os seguintes itens:

$$(i) K(u_1 + u_2) = K(u_1) + K(u_2),$$

$$(ii) K(\alpha u_1) = \alpha K(u_1).$$

Pela definição da aplicação  $K$ , temos que existem  $\omega_1$  e  $\omega_2 \in H_0^1(\Omega)$  tais que  $\omega_1 = K(u_1)$  e  $\omega_2 = K(u_2)$ . Logo temos as seguintes igualdades

$$\begin{cases} \int_{\Omega} u_1 v dx = \langle \omega_1, v \rangle_{\lambda_0}, \\ \int_{\Omega} u_2 v dx = \langle \omega_2, v \rangle_{\lambda_0}, v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1-3)$$

Assim sendo

$$\int_{\Omega} (u_1 + u_2)v dx = \langle \omega_1 + \omega_2, v \rangle_{\lambda_0}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Donde podemos concluir que

$$\langle \omega_{u_1+u_2}, v \rangle_{\lambda_0} = \langle \omega_1 + \omega_2, v \rangle_{\lambda_0}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Logo segue que  $K(u_1 + u_2) = K(u_1) + K(u_2)$ . Similarmente mostramos o item (ii) e concluímos a linearidade da aplicação  $K$ .

Para mostrar que  $K$  é contínua considere as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} \|K(u)\|_{\lambda_0}^2 &= \int_{\Omega} uK(u)dx \\ &\leq \|u\|_2 \|K(u)\|_2, \\ &\leq C\|u\|_2 \|K(u)\|, \quad u \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Donde segue que  $\|K(u)\| \leq C\|u\|_2$ ;  $\forall u \in L^2(\Omega)$ , ou seja,  $K$  é uma aplicação contínua. Aqui utilizamos a imersão contínua  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ , (cf. Apêndice A.3).

Agora consideremos o operador inclusão  $i : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ . Utilizando as imersões compactas de Sobolev, (cf. Apêndice A.4), sabemos que este operador inclusão é compacto. Deste modo, consideremos o operador composição

$$\begin{aligned} T = (K \circ i) : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ u &\longmapsto Tu = w, \end{aligned}$$

onde

$$\langle (K \circ i)u, v \rangle_{\lambda_0} = \int_{\Omega} uv dx \quad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Desde que  $K$  seja contínua e  $i$  compacto concluímos então que a composição  $T$  é compacta.

Agora vamos mostrar que esse operador é autoadjunto, isto é,

$$\langle (K \circ i)u, v \rangle_{\lambda_0} = \langle u, (K \circ i)v \rangle_{\lambda_0} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Note que, utilizando a definição da aplicação  $K$ , temos que

$$\langle Ku, v \rangle_{\lambda_0} = \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} vudx = \langle Kv, u \rangle_{\lambda_0}, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Donde concluímos que esse operador  $(K \circ i)$  é autoadjunto.

**Observação 1.4** Neste momento vamos verificar que o núcleo do nosso operador é trivial. Neste caso devemos verificar que 0 não é um autovalor do operador

$$\begin{aligned} T = K \circ i : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ u &\longmapsto Tu = w. \end{aligned}$$

Note que

$$\langle Tu, v \rangle_{\lambda_0} = \int_{\Omega} uv dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Suponhamos que  $Tu = 0$ , ou seja,  $u \in \ker(T)$ . Então temos que

$$0 = \langle 0, v \rangle_{\lambda_0} = \int_{\Omega} uv dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular, essa igualdade vale para  $v = u$ , donde segue  $\int_{\Omega} u^2 = 0$ , ou seja,  $u \equiv 0$  q.t.p em  $\Omega$ . Provando que  $\ker(T) = \{0\}$ . Logo temos que o núcleo do operador  $T$  é trivial. Consequentemente 0 não pode ser um autovalor do operador  $T$ .

Agora, aplicando o Teorema Espectral para Operadores Auto-Adjuntos Compac-  
tos (cf Apêndice A.16) temos uma sequência de autovalores  $\mu_j$  tal que  $\lim_{\infty} \mu_j = 0$ . Donde  
temos que

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\bigoplus_{j=1}^{+\infty} \langle e_j \rangle}.$$

Além disso,  $(e_j)_{j=1}^{+\infty}$  formam uma sequência ortonormal em  $(H_0^1(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\lambda_0})$ , isto  
é,  $\langle e_i, e_j \rangle_{\lambda_0} = \delta_{ij}$  onde  $\delta_{ij}$  é o Delta de Kronecker definido por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (1-4)$$

Em particular temos, pela definição de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\lambda_0}$ , que  $\|e_i\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i + \lambda_0}} \quad \forall i \in \mathbb{N}$ .

Analisando **(PA)**, com  $u = e_i$  ficamos com

$$\begin{cases} -\Delta e_i + a(x)e_i = \lambda_i e_i & \text{em } \Omega, \\ e_i = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Donde segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla e_i \nabla e_j + a(x)e_i e_j dx &= \lambda_i \int_{\Omega} e_i e_j dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i + \lambda_0}}, \quad i = j. \\ &= 0, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

□

Temos ainda que dado  $u \in H_0^1(\Omega)$  é possível escrever  $u$  da seguinte maneira

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \langle u, e_i \rangle_{\lambda_0} e_i,$$

onde  $\langle u, e_i \rangle_{\lambda_0}$  são os coeficientes de Fourier.

### 1.1.1 Desigualdades Variacionais

Sejam  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{j-1}$ , onde  $\varphi_j = \frac{e_j}{\|e_j\|_2}$ , as  $(j-1)$  primeiras autofunções em  $H_0^1(\Omega)$  associadas ao problema de autovalores **(PA)**.

Considerando

$$\lambda_j = \inf_{\|u\|_2=1} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + a(x)u^2 dx, u \in H_0^1(\Omega); \int_{\Omega} u\varphi_1 = 0, \int_{\Omega} u\varphi_2 = 0, \dots, \int_{\Omega} u\varphi_{j-1} = 0 \right\},$$

temos a seguinte estimativa

$$\lambda_j \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + a(x)u^2 dx}{\int_{\Omega} u^2}, u \neq 0.$$

Consequentemente

$$\lambda_j \int_{\Omega} u^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + a(x)u^2 dx, \forall u \in \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{j-1} \rangle^{\perp}. \quad (1-5)$$

Essa é a primeira desigualdade variacional.

Agora vamos deduzir uma segunda desigualdade variacional. Considere  $u \in \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{j-1} \rangle$ . Logo segue que  $u$  pode ser escrito como a seguinte soma

$$u = \sum_{i=1}^{j-1} c_i \varphi_i.$$

Portanto segue que o produto interno definido anteriormente em (1.1) pode ser visto como

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle_{\lambda_0} &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + a(x)u^2 dx + \lambda_0 \int_{\Omega} u^2 \\ &= \int_{\Omega} |\nabla \sum_{i=1}^{j-1} c_i \varphi_i|^2 + a(x) \left( \sum_{i=1}^{j-1} c_i \varphi_i \right)^2 dx \\ &\quad + \lambda_0 \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^{j-1} c_i \varphi_i \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Note que o termo direito da desigualdade anterior pode ser reescrito retirando o termo

$\sum_{i=1}^{j-1} c_i$  do integrando, já que este por sua vez independe de  $x$  de modo que ficamos com

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle_{\lambda_0} &= \sum_{i=1}^{j-1} c_i^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_i|^2 + a(x) \varphi_i^2 dx \\ &+ \lambda_0 \sum_{i=1}^{j-1} c_i^2 \int_{\Omega} \varphi_i^2 dx \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} c_i^2 \left( \int_{\Omega} |\nabla \varphi_i|^2 + a(x) \varphi_i^2 dx + \lambda_0 \int_{\Omega} \varphi_i^2 dx \right). \end{aligned}$$

Donde segue que

$$\langle u, u \rangle_{\lambda_0} = \sum_{i=1}^{j-1} c_i^2 \langle \varphi_i, \varphi_i \rangle_{\lambda_0}. \quad (1-6)$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i, \varphi_i \rangle_{\lambda_0} &= \int_{\Omega} |\nabla \varphi_i| |\nabla \varphi_i| + a(x) \varphi_i \varphi_i dx \\ &+ \lambda_0 \int_{\Omega} \varphi_i^2 dx. \\ &= \lambda_i \int_{\Omega} \varphi_i^2 dx + \lambda_0 \int_{\Omega} \varphi_i^2 dx. \end{aligned}$$

Consequentemente, temos que  $\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle_{\lambda_0} = (\lambda_i + \lambda_0) \int_{\Omega} \varphi_i^2 dx$ . Porém note que como  $\int_{\Omega} \varphi_i^2 dx = 1$ , segue que

$$\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle_{\lambda_0} = \lambda_i + \lambda_0.$$

Observe neste momento que pela equação (1-6),

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle_{\lambda_0} &= \sum_{i=1}^{j-1} c_i^2 (\lambda_i + \lambda_0) \\ &\leq \sum_{i=1}^{j-1} c_i^2 (\lambda_{j-1} + \lambda_0). \end{aligned}$$

Note que o termo  $(\lambda_{j-1} + \lambda_0)$  independe de  $i$ , portanto podemos retirá-lo do somatório, ficando com

$$\langle u, u \rangle_{\lambda_0} \leq (\lambda_{j-1} + \lambda_0) \sum_{i=1}^{j-1} c_i^2.$$

Agora, usando o fato de que  $\int_{\Omega} \varphi_i^2 dx = 1$ , podemos reescrever essa desigualdade da

seguinte forma

$$\begin{aligned}\langle u, u \rangle_{\lambda_0} &\leq (\lambda_{j-1} + \lambda_0) \sum_{i=1}^{j-1} c_i^2 \int_{\Omega} \varphi_i^2 dx \\ &= (\lambda_{j-1} + \lambda_0) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{j-1} c_i^2 \varphi_i^2 dx \\ &= (\lambda_{j-1} + \lambda_0) \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^{j-1} c_i \varphi_i \right)^2 dx.\end{aligned}$$

Donde concluímos que  $\langle u, u \rangle_{\lambda_0} \leq (\lambda_{j-1} + \lambda_0) \int_{\Omega} u^2 dx$ . Consequentemente segue que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + a(x)u^2 dx + \lambda_0 \int_{\Omega} u^2 \leq (\lambda_{j-1} + \lambda_0) \int_{\Omega} u^2 dx$$

Portanto, temos a segunda desigualdade variacional, dada por

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + a(x)u^2 dx \leq \lambda_{j-1} \int_{\Omega} u^2 dx \quad \forall u \in \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{j-1} \rangle. \quad (1-7)$$

## 1.2 Regularidade do Funcional

Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Consideremos as seguintes definições

**Definição 1.5 (Derivada segundo Gâteaux)** *Considere um funcional  $I : H = H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ . Então  $I$  é diferenciável no sentido de Gâteaux se o seguinte limite existir:*

$$\langle I'(u), v \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t}, \quad \forall v \in H. \quad (1-8)$$

**Definição 1.6 (Derivada segundo Fréchet)** *Seja um funcional  $I : H \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que  $I$  é diferenciável no sentido de Fréchet se o seguinte limite é verificado:*

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{I(u + v) - I(u) - \langle I'(u), v \rangle}{\|v\|} = 0, \quad \forall u \in H. \quad (1-9)$$

**Observação 1.7** *Observemos que se o funcional  $I$  possui derivada de Fréchet contínua sobre  $H$  então temos que  $f \in C^1(H, \mathbb{R})$ .*

Vamos garantir essa regularidade para o funcional associado ao problema **(P)** dado por

$$I : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \quad (1-10)$$

$$u \mapsto I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + a(x)u^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u) dx, \quad (1-11)$$

onde  $G(x, u) = \int_0^u g(x, s) ds$ . Neste intuito vamos calcular a derivada de  $I$  em  $u \in H$  aplicada em algum vetor arbitrário  $v \in H$ , ou seja, vamos calcular o seguinte limite:

$$\langle I'(u), v \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t}.$$

Note que a diferença  $I(u + tv) - I(u)$  é equivalente à seguinte expressão

$$\left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u + tv)|^2 - |\nabla u|^2 dx + a(x)(u + tv)^2 - a(x)u^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u + tv) + G(x, u) dx \right].$$

Neste caso segue que

$$\begin{aligned} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + a(x)uv dx + \frac{t}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + a(x)v^2 dx \\ &+ \int_{\Omega} \frac{G(x, u) - G(x, u + tv)}{t} dx. \end{aligned}$$

Logo temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \langle I'(u), v \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} \\ \langle I'(u), v \rangle &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + a(x)uv dx + \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{G(x, u) - G(x, u + tv)}{t} dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, vamos verificar que a função  $\frac{G(x, u) - G(x, u + tv)}{t}$  é dominada por uma função em  $L^1(\Omega)$ . Garantindo assim as hipóteses necessárias para a utilização do Teorema da Convergência Dominada, (cf. Apêndice B.5). Para isso, vamos definir a seguinte função:

$$\begin{aligned} \xi : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi(s) &= G(x, u + stv). \end{aligned}$$

Então temos que, por construção da função  $G$ ,  $\xi'(s) = g(x, u + stv)tv$ . Além disso pela continuidade da função  $G$  podemos aplicar o teorema do valor médio na função  $\xi$ , ou seja, temos que existe um número  $c \in [0, 1]$  tal que

$$\xi(1) - \xi(0) = \xi'(c).$$

Portanto seguem as seguintes estimativas:

$$G(x, u + stv) - G(x, u) = g(x, u + ctv)tv, \quad c \in (0, 1).$$

$$\frac{G(x, u) - G(x, u + tv)}{t} = g(x, u + ctv)v, \quad c \in (0, 1).$$

Logo, como a função  $g$  tem um crescimento subcrítico dado por

$$|g(x, s)| \leq C |s|^\lambda + C, \quad \forall (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

onde  $1 < \lambda < 2^* - 1$ . Segue que a seguinte estimativa

$$\frac{G(x, u) - G(x, u + tv)}{t} \leq [C + C|u + ctv|^\lambda]|v|. \quad (1-12)$$

Agora, consideremos a seguinte função

$$\begin{aligned} \phi : [0, +\infty] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi(t) &= t^r, \quad r > 1. \end{aligned}$$

Analisando as derivadas da função  $\phi$  temos que  $\phi''(t) = r(r-1)t^{r-2} \geq 0$ ,  $t \geq 0$ . Donde podemos concluir que a função  $\phi(t)$  é convexa. Consequentemente temos que

$$\phi(at + b(1-t)) \leq t\phi(a) + (1-t)\phi(b); \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Como

$$\phi(a+b) = \phi\left(\frac{1}{2}(2a) + \frac{1}{2}(2b)\right).$$

segue da convexidade da função  $\phi$  que

$$\phi(a+b) \leq \frac{1}{2}\phi(2a) + \frac{1}{2}\phi(2b).$$

Donde concluímos que

$$|a+b|^r \leq \frac{1}{2}|2a|^r + \frac{1}{2}|2b|^r \leq 2^{r-1}(|a|^r + |b|^r); \quad \forall a, b \in \mathbb{R}; \quad r > 1.$$

Portanto, voltando na inequação (1-12), ficamos com as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \frac{G(x, u) - G(x, u + tv)}{t} &\leq C + C(|u|^\lambda + |ctv|^\lambda)|v| \\ &\leq C + C|u|^\lambda|v| + C|v|^{\lambda+1} \in L^1(\Omega), \end{aligned}$$

onde  $u, v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq 2^*$ .

Concluindo que a função  $\frac{G(x, u) - G(x, u + tv)}{t}$  é dominada por uma função em  $L^1(\Omega)$ . Podemos então aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Apêndice

B.5). Assim temos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{G(x, u) - G(x, u + tv)}{t} dx &= - \int_{\Omega} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(x, u + tv) - G(x, u)}{t} dx \\ &= - \int_{\Omega} g(x, u) v dx. \end{aligned}$$

Neste momento, voltando na definição 1.5, temos que

$$\langle I'(u), v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + a(x) u v dx - \int_{\Omega} g(x, u) v dx.$$

Agora, queremos garantir a regularidade do funcional  $I$  em questão, ou seja, mostrar que o funcional é de classe  $C^1$ . Para isso, vamos decompor  $I$  definido anteriormente (1-10), em dois funcionais definidos por

$$Q(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + a(x) u^2 dx,$$

$$J(u) = \int_{\Omega} G(x, u) dx, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Verificando que os funcionais  $Q$  e  $J$  são de classe  $C^1$  mostramos que o funcional  $f$  é de classe  $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ .

Seja  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Então para cada  $v \in H_0^1(\Omega)$ , temos que

$$\langle Q'(u), v \rangle = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Q(u + tv) - Q(u)}{t}, \quad v \in H = H_0^1(\Omega).$$

Note que como  $Q(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + a(x) u^2 dx$  é uma função quadrática, então temos que

$$\frac{Q(u + tv) - Q(u)}{t} = \frac{1}{t} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} 2t \nabla u \nabla v + t^2 |\nabla v|^2 + 2ta(x) uv + t^2 a(x) v^2 \right).$$

Donde segue que

$$\begin{aligned} \langle Q'(u), v \rangle &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} 2 \nabla u \nabla v + t \nabla v^2 + 2a(x) uv + ta(x) v^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + a(x) uv dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ &= \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

Portanto  $\langle u, v \rangle$  é a candidata a derivada de  $Q$ . Para garantir a existência da derivada de Fréchet de  $Q$  tome  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Então para cada  $v \in H_0^1(\Omega)$ , vamos calcular o seguinte limite

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{Q(u + v) - Q(u) - \langle Q'(u), v \rangle}{\|v\|}.$$

Note que,

$$\begin{aligned} Q(u+v) - Q(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + 2\nabla u \nabla v + 2a(x)uv + a(x)v^2 dx. \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + a(x)uv + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + a(x)v^2 dx. \end{aligned}$$

Logo, como  $\langle Q'(u), v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + a(x)uv dx$ , segue que

$$\begin{aligned} \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{Q(u+v) - Q(u) - \langle Q'(u), v \rangle}{\|v\|} &= \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + a(x)v^2}{\|v\|} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto provamos que  $Q$  é diferenciável em  $H_0^1(\Omega)$  com

$$\langle Q'(u), v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + a(x)uv dx.$$

Para verificarmos a continuidade de  $Q'$  consideremos uma sequência  $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$  com  $u_n \rightarrow u$  em  $H_0^1(\Omega)$ . Devemos provar que  $Q'(u_n) \rightarrow Q'(u)$  em  $H^{-1}$ , ou equivalentemente,

$$\|Q'(u_n) - Q'(u)\|_{H^{-1}} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Dados  $\varepsilon > 0$ ,  $v \in H_0^1(\Omega)$  tal que  $\|v\| \leq 1$  temos que para  $n$  suficientemente grande, usando a desigualdade de Hölder (cf. Apêndice B.2) e as imersões de Sobolev (cf. Apêndice A.3), as seguintes estimativas

$$|(Q'(u_n) - Q'(u))v| \leq C\|u_n - u\|\|v\| < \varepsilon, \quad C > 0.$$

Donde segue que

$$\|Q'(u_n) - Q'(u)\|_{H^{-1}} = \sup_{\|v\| \leq 1} |(Q'(u_n) - Q'(u))v| \leq \varepsilon,$$

ou seja,

$$\|Q'(u_n) - Q'(u)\|_{H^{-1}} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Consequentemente  $Q'$  é contínua. Portanto  $Q \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ .

Agora, vamos analisar o funcional

$$J(u) = \int_{\Omega} G(x, u) dx, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Temos que a Derivada de Gâteaux de  $J$ , pela definição da função  $G$  é dada por

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_{\Omega} g(x, u) v dx.$$

Vamos garantir a existência da derivada de Frechet do funcional  $J$ , ou seja, vamos mostrar a seguinte igualdade:

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{J(u+v) - J(u) - \langle J'(u), v \rangle}{\|v\|} = 0, \quad u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Para tanto considere a seguinte função  $h(w) = J(u+w) - J(u) - \langle J'(u), w \rangle$ ,  $w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ . Equivalente temos que

$$h(w) = J(u+w) - J(u) - \int_{\Omega} g(x, u) w dx.$$

Sendo assim, utilizando a definição do funcional  $J$  temos que

$$h(w) = \int_{\Omega} (G(x, u+w) - G(x, u)) dx - \int_{\Omega} g(x, u) w dx, \quad w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Observe que

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} G(x, u+tw) dt = G(x, u+w) - G(x, u), \quad w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Então segue a seguinte igualdade

$$h(w) = \int_{\Omega} \left[ \int_0^1 \frac{d}{dt} G(x, u+tw) dt \right] dx - \int_{\Omega} g(x, u) w dx, \quad w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Utilizando a Regra da Cadeia temos que

$$h(w) = \int_{\Omega} \left[ \int_0^1 g(x, u+tw) w dt \right] dx - \int_{\Omega} g(x, u) w dx, \quad w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Consequentemente temos que a função  $h$  é dada por

$$h(w) = \int_{\Omega} \left[ \int_0^1 g(x, u+tw) w dt \right] dx - \int_{\Omega} \left[ \int_0^1 g(x, u) w dt \right] dx.$$

Donde segue que

$$h(w) = \int_{\Omega} \left[ \int_0^1 (g(x, u+tw) - g(x, u)) w dt \right] dx.$$

Neste momento somos capazes de provar, utilizando o Teorema de Fubini (cf. Apêndice B.1), a seguinte igualdade

$$h(w) = \int_0^1 \left[ \int_{\Omega} (g(x, u + tw) - g(x, u)) w dx \right] dt.$$

Consequentemente temos a estimativa

$$|h(w)| \leq \int_0^1 \left[ \int_{\Omega} |g(x, u + tw)w - g(x, u)w| dx \right] dt. \quad (1-13)$$

Agora vamos aplicar a desigualdade de Hölder no lado esquerdo da desigualdade acima. Note que, como foi citado anteriormente, a função  $g$  tem um crescimento subcrítico dado por:

$$|g(x, u)| \leq a_1(|u|^\lambda + 1),$$

com  $1 < \lambda < \frac{n+2}{n-2}$ ,  $a_1 > 0$ . Pela imersão contínua de Sobolev (cf. A.3) observamos que

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad \text{para todo } 1 \leq p \leq 2^*.$$

Adicionalmente temos que  $r = \frac{2N}{N+2} \geq 1$ . Logo segue que

$$r < r\lambda < \frac{2n}{n+2} \frac{n+2}{n-2} = 2^*.$$

Neste momento somos capazes de verificar que utilizando as imersões contínuas de Sobolev (cf. Apêndice A.3) segue que

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{r\lambda}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega).$$

Analisando o crescimento subcrítico de  $g$ , ficamos com :

$$\begin{aligned} |g(x, u)|^r &\leq a_1^r(|u|^\lambda + 1)^r \\ &\leq a|u|^{\lambda r} + b, \quad x \in \Omega; u \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde  $a, b > 0$ .

Como  $g \in L^r(\Omega)$  e  $\frac{1}{r} + \frac{1}{2^*} = 1$  pela desigualdade de Hölder, (cf. Apêndice B.2) segue que

$$\int_{\Omega} |(g(x, u + tw) - g(x, u))w| dx \leq \| (g(x, u + tw) - g(x, u)) \|_r \|w\|_s,$$

para  $s = 2^*$ . Agora, analisando a desigualdade (1-13) temos a seguinte estimativa

$$|h(w)| \leq \int_0^1 \|(g(x, u+tw) - g(x, u))\|_r \|w\|_s dt.$$

Note que

$$w \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \implies w \rightarrow 0 \text{ em } L^q(\Omega) \text{ para todo } q \in [1, 2^*].$$

Portanto temos que

$$u + tw \rightarrow u \text{ em } L^q(\Omega), q \in [1, 2^*].$$

Agora tomando  $q \geq \lambda$  segue que  $\frac{q}{\lambda} \geq 1$ . Além disso, analisando como foi anteriormente com a função  $G$ , temos que

$$\begin{aligned} |g(x, u+tw) - g(x, u)|^{\frac{q}{\lambda}} &\leq C|g(x, u+tw)|^{\frac{q}{\lambda}} + C|g(x, u)|^{\frac{q}{\lambda}} \\ &\leq C\left(|u+tw|^{\frac{q}{\lambda}}\right)^\lambda + C\left(|u|^{\frac{q}{\lambda}}\right)^\lambda + C. \end{aligned}$$

Donde seguem as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} |g(x, u+tw) - g(x, u)|^{\frac{q}{\lambda}} &\leq C|u|^q + C|tw|^q + C \\ &\leq C|u|^q + C|t|^q|w|^q + C \\ &\leq C|u|^q + C|w|^q + C. \end{aligned}$$

Tomando uma sequência  $(w_n) \subset H_0^1(\Omega)$ , tal que  $w_n \rightarrow 0$  em  $H_0^1(\Omega)$ . Então temos que:

$$\begin{aligned} w_n &\rightarrow 0 \text{ em } L^p(\Omega); \\ w_n &\rightarrow 0 \text{ q.t.p em } \Omega; \\ w_n &\leq \zeta \text{ com } \zeta \in L^p(\Omega), 1 \leq p < 2^*. \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} |g(x, u+tw_n) - g(x, u)|^{\frac{q}{\lambda}} &\leq CC|u|^q + C|w_n|^q + C \\ &\leq C|u|^q + C\zeta^q \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Donde segue a seguinte convergência

$$g(\cdot, u+tw) \rightarrow g(\cdot, u) \text{ em } L^{\frac{q}{\lambda}}(\Omega).$$

Por outro lado, temos que  $r = \frac{2n}{n+2} < \frac{q}{\lambda}$ . Além disso, tomando  $q$  suficientemente grande temos que  $L^{\frac{q}{\lambda}}(\Omega) \subset L^r(\Omega)$ . Com isso somos capazes de verificar que

$$g(\cdot, u + tw) \rightarrow g(\cdot, u) \text{ em } L^r(\Omega).$$

Consequentemente temos que

$$\frac{|h(w)|}{\|w\|} \leq \int_0^1 \|(g(x, u + tw) - g(x, u))\|_r dt.$$

Portanto

$$0 \leq \lim_{w \rightarrow 0} \frac{|h(w)|}{\|w\|} \leq \lim_{w \rightarrow 0} \int_0^1 \|(g(x, u + tw) - g(x, u))\|_r dt$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, (cf. Apêndice B.5), segue que

$$0 \leq \lim_{w \rightarrow 0} \frac{|h(w)|}{\|w\|} \leq \int_0^1 \lim_{w \rightarrow 0} \|(g(x, u + tw) - g(x, u))\|_r dt = 0.$$

Logo temos que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h(w)|}{\|w\|} = 0$ , isto é,  $J$  é Frechet diferenciável com derivada

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_{\Omega} g(x, u)v \, dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Neste momento, vamos verificar a continuidade de  $J'$  concluindo que  $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ . Para tanto considere uma sequência  $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$  com  $u_n \rightarrow u$  em  $H_0^1(\Omega)$ . Devemos provar que  $J'(u_n) \rightarrow J'(u)$  em  $H^{-1}$ , ou equivalentemente,

$$\|J'(u_n) - J'(u)\|_{H^{-1}} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Analisando o que foi feito anteriormente, temos que verificar que  $J'$  é contínua, isso é o mesmo que mostrar a seguinte convergência

$$g(x, (u + v)) \rightarrow g(x, u) \text{ em } L^r(\Omega), \text{ quando } v \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Isto por sua vez é equivalente a

$$g(x, u + v_n) \rightarrow g(x, u), \text{ com } v_n \rightarrow 0, v_n \in H_0^1(\Omega).$$

Com efeito, considere  $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$  com  $v_n \rightarrow 0$ . Segue das imersões contínuas de Sobolev (cf. Apêndice A.1) que

$$\begin{aligned} v_n &\rightharpoonup u && \text{em } H_0^1(\Omega), \\ v_n &\rightarrow u && \text{em } L^p(\Omega); \forall 1 \leq p < 2^*, \\ v_n(x) &\rightarrow u(x) && \text{q.t.p. em } \Omega, \\ |v_n(x)| &\leq \varphi(x) && \text{para alguma } \varphi(x) \in L^p(\Omega). \end{aligned} \tag{1-14}$$

Como a função  $g$  é contínua então temos que

$$g(x, u + v_n) \rightarrow g(x, u) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Portanto temos que

$$|g(x, u + v_n) - g(x, u)|^r \rightarrow 0 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Por outro lado como

$$|g(x, u + v_n) - g(x, u)|^r \leq (|g(x, u + v_n)| + |g(x, u)|)^r,$$

concluimos por (1-14) que

$$|g(x, u + v_n) - g(x, u)|^r \leq 2^r (\varphi(x))^r \in L^1(\Omega).$$

Agora, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Apêndice B.5), temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |g(x, u + v_n) - g(x, u)|^r dx \rightarrow 0,$$

ou seja, temos a seguinte convergência

$$g(x, u + v) \rightarrow g(x, u) \text{ em } L^r(\Omega) \text{ com } v \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Agora, por definição temos que

$$\|J'(u + v_n) - J'(u)\|_{H^{-1}} = \sup_{\|v\| \leq 1} |\langle J'(u + v_n) - J'(u), v \rangle|.$$

Note que

$$|\langle J'(u + v_n) - J'(u), v \rangle| = \left| \int_{\Omega} (g(x, u + v_n) - g(x, u)) v dx \right|.$$

Donde obtemos

$$|\langle J'(u + v_n) - J'(u), v \rangle| \leq \int_{\Omega} |(g(x, u + v_n) - g(x, u))| |v| dx.$$

Pela desigualdade de Hölder segue que

$$|\langle J'(u + v_n) - J'(u), v \rangle| \leq \| (g(x, u + v_n) - g(x, u)) \|_r \|v\|_s,$$

onde  $s = 2^*$ . Portanto, para  $\|v\| \leq 1$ , temos

$$|\langle J'(u + v_n) - J'(u), v \rangle| \leq C \| (g(x, u + v_n) - g(x, u)) \|_r.$$

Consequentemente temos a seguinte estimativa

$$|\langle J'(u + v_n) - J'(u), v \rangle| \leq C \| (g(x, u + v_n) - g(x, u)) \|_r \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

O que nos garante a seguinte convergência

$$J'(u + v_n) \longrightarrow J'(u) \text{ em } H_0^{-1}.$$

Mostrando assim que  $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ .

Portanto temos que  $f'$  será contínuo para qualquer  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Donde segue que  $f \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$  garantindo assim a regularidade do funcional  $f$ .

Este fato é de suma importância no decorrer da dissertação, pois sem esta regularidade o funcional em questão não satisfaz as hipóteses necessárias para a demonstração dos principais resultados deste trabalho.

## 1.3 Métodos Variacionais

Nesta seção abordaremos alguns resultados importantes utilizados nos principais teoremas desta dissertação. A utilização de Métodos Variacionais em Equações Diferenciais tem como objetivo explorar técnicas para resolução de problemas oriundos de E.D.P's não lineares, as quais buscam uma formulação variacional que nos remete a resolução do problema original. Tal formulação estará intimamente ligada à procura de pontos críticos de um funcional  $I$  apropriado, tais pontos críticos serão as soluções fracas procuradas da E.D.P em questão.

### 1.3.1 Teorema do Passo da Montanha

Antes de enunciarmos o Teorema do Passo da Montanha vamos citar algumas definições

Sejam  $\mathbf{X}$  um espaço de Banach,  $(u_n)$  uma sequência em  $\mathbf{X}$  e  $I$  um funcional definido  $I : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ .

**Definição 1.8** Dizemos que  $\{u_n\}$  é uma sequência de Palais-Smale, ou simplesmente (P.S.), em  $\mathbf{X}$  se  $\{I(u_n)\}$  é limitado e  $I'(u_n) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Se  $I(u_n) \rightarrow c$ , então a (P.S.)-sequência é denotada por  $(PS)_c$ -sequência. Um funcional  $I$  satisfaz a condição de Palais-Smale ou simplesmente (P.S.), respectivamente  $(P.S.)_c$ , em  $\mathbf{X}$ , se para toda (PS)-sequência, respectivamente  $(PS)_c$ -sequência, possui uma subsequência convergente na norma de  $\mathbf{X}$ .

**Definição 1.9** Um funcional  $I$  satisfaz a condição de Cerami no nível  $c, c > 0$ , ou simplesmente  $(C)_c$  em  $\mathbf{X}$  se qualquer sequência  $(u_n)$  tal que

$$I(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \text{ e } (1 + \|u_n\|) \|I'(u_n)\|_{\mathbf{X}^*} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

possui subsequência convergente.

O Teorema do Passo da Montanha é um dos resultados mais importantes utilizados na intenção de encontrar um valor crítico para um funcional  $f \in C^1(\mathbf{X}; \mathbb{R})$  sobre certas hipóteses em  $f$ .

Para isso vamos supor que o funcional  $f$  satisfaça as seguintes hipóteses:

**(PM-1)**  $f \in C^1(\mathbf{X}, \mathbb{R})$ ,  $f(0) = 0$  e  $\exists r, \rho > 0$  tais que

$$f(u) \geq \rho, \forall u \in S_r = \{u \in \mathbf{X} : \|u\| = r\}.$$

**(PM-2)**  $\exists e \in \mathbf{X}$  com  $\|e\| > r$  tal que  $f(e) \leq 0$ .

Se um funcional  $f$  satisfaz as condições **(PM-1)** e **(PM-2)** então dizemos que  $f$  possui a geometria do Passo da Montanha. Além disso, denote por  $\Gamma$  o conjunto de todos os caminhos que ligam  $u = 0$  e  $u = e$ , isto é,

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], \mathbf{X}) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}. \quad (1-15)$$

Claramente  $\Gamma \neq \emptyset$ , pois  $\gamma(t) = te$  é tal que  $\gamma \in \Gamma$ .

Como  $\gamma \in C([0, 1], \mathbf{X})$  e  $S_r$  divide o espaço em duas componentes conexas, uma sendo limitada e a outra ilimitada. Então podemos considerar:

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max\{J(\gamma(t)) : t \in [0, 1]\} \geq \rho > 0. \quad (1-16)$$

onde  $\rho$  é obtido da condição **(PM-1)**.

**Teorema 1.10 (Passo da Montanha)** *Suponha que  $I \in C^1(\mathbf{X}; \mathbb{R})$  satisfaz as condições **(PM-1)**, **(PM-2)** e  $(PS)_c$ , onde  $c$  é dado por (1-16). Então  $c$  é um valor crítico não nulo para  $I$ , ou seja, existe  $z \in \mathbf{X}$ , não nulo, tal que  $I(z) = c$  e  $I'(z) = 0$ .*

*Prova:* Veja [3], Capítulo 8, Seção 8.1. □

Existem várias aplicações do Teorema 1.10, dentre as quais, a seguinte tem como objetivo obter uma solução clássica não trivial de um problema de Dirichlet da forma:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1-17)$$

Encontrar uma solução fraca  $u \in H_0^1(\Omega)$  para esse problema é o mesmo que encontrar  $u$  que satisfaça

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla h - f(x, u) h dx = 0, \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \quad (1-18)$$

Equivalentemente é o mesmo que encontramos um ponto crítico do funcional dado por

$$\varphi(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(x, u) dx, \quad u \in H_0^1(\Omega), \quad (1-19)$$

onde  $F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;  $x \in \Omega$ . Introduzindo algumas condições de fronteira, hipóteses adequadas para a função  $f$ , condições de crescimento e superquadraticidade conseguimos mostrar que o funcional  $\varphi$  satisfaz as hipóteses do Teorema 1.10 mostrando assim que existe uma solução não trivial com energia positiva para o problema em questão (1-17).

Vamos introduzir agora uma generalização da geometria do Teorema do Passo da Montanha o qual será de suma importância na demonstração dos principais resultados desta dissertação.

### 1.3.2 Teorema de Linking

Seja  $\mathbf{X}$  um espaço de Banach tal que  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^1 \oplus \mathbf{X}^2$ . Antes de enunciarmos o Teorema de Linking consideremos as seguintes definições:

**Definição 1.11** *Dizemos que um funcional  $I \in C^1(\mathbf{X}, \mathbf{R})$  possui um linking local na origem se, para algum  $r > 0$ , temos que*

$$(i) \quad I(u) \geq 0 \quad \forall u \in X^1 \text{ com } \|u\| \leq r,$$

$$(ii) I(u) \leq 0 \quad \forall u \in X^2 \text{ com } \|u\| \leq r.$$

**Observação 1.12** Vamos verificar que se  $I$  possui um linking local na origem então  $0$  é um ponto crítico de  $I$ .

Note que, para  $h \in X^1$ , segue que

$$\langle I'(0), h \rangle = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{I(0+th) - I(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{I(th)}{t} \geq 0.$$

Além disso, para  $h \in X^1$ , temos novamente que

$$\langle I'(0), h \rangle = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{I(0+th) - I(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{I(th)}{t} \leq 0.$$

Donde segue que  $\langle I'(0), h \rangle = 0, \forall h \in X^1$ .

Similarmente, tomando  $h \in X^2$ , mostramos a mesma igualdade. Donde segue que

$$\langle I'(0), h \rangle = 0, \forall h \in X = X^1 \oplus X^2.$$

Portanto,  $0$  é um ponto crítico de  $I$ .

Considere duas seqüências de subespaços de  $X$ , dadas por

$$X_0^1 \subset X_1^1 \subset \dots \subset X^1,$$

$$X_0^2 \subset X_1^2 \subset \dots \subset X^2$$

tais que

$$X^j = \overline{\cup_{n \in \mathbb{N}} X_n^j}, \quad j = 1, 2.$$

Tomando  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , denotemos por  $X_\alpha$  o seguinte espaço

$$X_\alpha = X_{\alpha_1}^1 \oplus X_{\alpha_2}^2.$$

Com essas notações, segue algumas definições

**Definição 1.13 (Seqüência Admissível)**

Uma seqüência  $(\alpha_n) \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  é dita admissível se uma das duas componentes de  $\alpha_n$  tende pra infinito quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Definição 1.14 (Condição (PS)\*)**

Um funcional  $I \in C^1(X, \mathbb{R})$  satisfaz a condição (P.S.)\* se toda seqüência  $(u_{\alpha_n})$ , onde a seqüência  $(\alpha_n)$  é admissível, tal que

$$(u_{\alpha_n}) \in X_{\alpha_n}, \quad \sup I(u_{\alpha_n}) < \infty, \quad I'(u_{\alpha_n}) \rightarrow 0,$$

contém uma subsequência que converge .

**Definição 1.15** (*Condição*  $(Ce)^*$ )

Um funcional  $f \in C^1(X, \mathbb{R})$  satisfaz a condição  $(Ce)^*$  se toda sequência  $(u_{\alpha_n})$ , onde a sequência  $(\alpha_n)$  é admissível, tal que

$$(u_{\alpha_n}) \in X_{\alpha_n}, \sup I(u_{\alpha_n}) < \infty, (1 + \|u_{\alpha_n}\|)I'(u_{\alpha_n}) \rightarrow 0,$$

contém uma subsequência que converge.

**Observação 1.16** Note que a condição  $(P.S.)^*$  é uma condição mais fraca do que a condição de Palais Smale original. Além disso, temos que a condição  $(P.S.)$  implica na condição  $(P.S.)^*$ , ou seja, todo funcional que satisfaz a condição  $(P.S.)$  satisfaz a condição  $(P.S.)^*$ . Adicionalmente, temos que se  $f$  satisfaz  $(Ce.)$  então  $f$  satisfaz a condição  $(Ce.)^*$ , ver [19].

Neste momento vamos enunciar um lema que é de suma importância no decorrer da dissertação, o qual é utilizado na demonstração dos dois principais resultados deste trabalho. Este resultado também é conhecido com Teorema do Linking Local.

**Lema 1.17** Suponha que  $I \in C^1(X, \mathbb{R})$  satisfaz:

(f<sub>1</sub>)  $X \neq \{0\}$  e  $I$  possui um linking local na origem, ou seja, para algum  $r > 0$

$$(i) I(u) \geq 0, \quad \forall u \in X^1 \text{ com } \|u\| \leq r,$$

$$(ii) I(u) \leq 0, \quad \forall u \in X^2 \text{ com } \|u\| \leq r.$$

(f<sub>2</sub>)  $I$  satisfaz a condição  $(P.S.)^*$ ;

(f<sub>3</sub>)  $I$  leva conjuntos limitados em conjuntos limitados;

(f<sub>4</sub>)  $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} I(u) = -\infty \text{ com } u \in X_m^1 \oplus X^2.$$

Então  $f$  possui pelo menos um ponto crítico não trivial.

**Observação 1.18** Sob a condição (f<sub>1</sub>) segue que  $0 \in X$  é ponto crítico do funcional  $I$ .

A demonstração desse lema é encontrada detalhadamente em [19]. É importante citar neste momento que este lema supõe que o funcional  $I$  satisfaz a condição  $(P.S.)^*$ . O resultado também é válido supondo a condição  $(Ce)^*$ . Este caso é estudado detalhadamente no Capítulo 3 desta dissertação e demonstrado em [20].

Consideremos agora, mais um lema de suma importância para os nossos propósitos que garante que se uma sequência  $(P.S.)$  é limitada, então esta sequência admite subsequência que converge forte para um ponto crítico do funcional  $I$ .

**Lema 1.19** *Toda sequência (P.S.) limitada para o funcional  $I$  possui subsequência convergente em  $H_0^1(\Omega)$ .*

*Prova:*

Considere uma sequência (P.S.) limitada  $(u_n) \in H_0^1(\Omega)$ . Sendo  $H_0^1(\Omega)$  um espaço de Banach reflexivo, considerando de uma subsequência de  $(u_n)$  se necessário, temos que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega), \\ u_n &\longrightarrow u \text{ em } L^p(\Omega); \forall 1 \leq p < 2^*, \\ u_n(x) &\longrightarrow u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \\ |u_n(x)| &\leq \psi(x) \text{ para alguma } \psi \in L^p(\Omega). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que  $u_n \longrightarrow u$  em  $H_0^1(\Omega)$ . Note que, como  $(u_n)$  é uma sequência (P.S.) temos que  $I'(u_n) \longrightarrow 0$  em  $H_0^1(\Omega)$ . Donde segue que

$$|\langle I'(u_n), \varphi \rangle| \leq \|I'(u_n)\| \|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

De forma equivalente temos que

$$\frac{|I'(u_n)\varphi|}{\|\varphi\|} \leq \frac{1}{n}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (1-20)$$

Utilizando a última estimativa e um resultado obtido na seção anterior, quando calculamos a derivada de Gâteaux do funcional  $I$  (1.5), temos que

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} a(x) u_n \varphi \, dx - \int_{\Omega} g(x, u_n) \varphi \, dx \right| \leq \frac{1}{n} \|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Fazendo  $\varphi = u_n - u$  obtemos por um lado que

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla (u_n - u) \, dx - \int_{\Omega} a(x) (u_n) (u_n - u) \, dx - \int_{\Omega} g(x, u_n) (u_n - u) \, dx \right| \leq \frac{1}{n} \|u_n - u\|.$$

Por outro lado temos que:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla (u_n - u) \, dx \right| &\leq \left| \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla (u_n - u) - a(x) u_n (u_n - u) - g(x, u_n) (u_n - u) \right| dx \\ &+ \left| \int_{\Omega} a(x) u_n (u_n - u) \right| dx \\ &- \left| \int_{\Omega} g(x, u_n) (u_n - u) \right| dx. \end{aligned}$$

Note que por 1.3.2, segue que

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla (u_n - u) \, dx \right| \leq \frac{1}{n} \|u_n - u\| + \left| \int_{\Omega} a(x) u_n (u_n - u) \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} g(x, u_n) (u_n - u) \, dx \right|.$$

Agora fazendo  $n \rightarrow +\infty$  em ambos os lados da desigualdade acima e usando o Teorema da convergência Dominada de Lebesgue, obtemos as seguintes convergências:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} a(x) u_n (u_n - u) \, dx \right| &\rightarrow 0, \\ \frac{1}{n} \|u_n - u\| &\rightarrow 0, \\ \left| \int_{\Omega} f(x, u_n) (u_n - u) \, dx \right| &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Consequentemente segue que

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla (u_n - u) \, dx \right| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Em particular, temos que  $\|u_n\|^2 \rightarrow \|u\|^2$ , utilizando a convergência  $\int_{\Omega} \nabla u_n \nabla u \rightarrow \|u\|^2$ .

Donde segue que

$$\|u_n\|^2 \rightarrow \|u\|^2$$

Como  $u_n \rightharpoonup u$  fracamente em  $H_0^1(\Omega)$  segue que

$$\|u_n - u\|^2 = \|u_n\|^2 - 2 \langle u_n, u \rangle + \|u\|^2 \rightarrow 0$$

Consequentemente  $u_n \rightarrow u$  fortemente em  $H_0^1(\Omega)$ .

Assim  $(u_n)$  possui uma subsequência convergente em  $H_0^1(\Omega)$  desde que mostremos que toda sequência  $(PS)_c$  para  $f$  seja limitada. Isto conclui a demonstração do Lema 1.19 que será de grande valia no decorrer desta dissertação.

□

## Existência de uma solução não trivial para uma classe de problemas elípticos superquadráticos sob a hipótese $(P.S.)^*$

### 2.1 Análise do Problema

Neste capítulo vamos garantir a existência de uma solução não trivial para uma classe de problemas de Dirichlet sem que necessariamente valha a condição de Ambrosetti-Rabinowitz a qual é muito conhecida na literatura. A condição de Ambrosetti-Rabinowitz restringe o estudo dos problemas elípticos superlineares, excluindo algumas funções não lineares.

A classe de problemas de Dirichlet em questão é a seguinte

$$(P) \begin{cases} -\Delta u + a(x)u = g(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde  $a \in L^p(\Omega)$  para  $p > \frac{N}{2}$ ,  $g \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ , onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ , é um domínio limitado, cuja fronteira  $\partial\Omega$  é uma superfície suave.

Suponha que  $G : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $G(x, u) = \int_0^u g(x, s) ds$  satisfaz:

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{G(x, u)}{|u|^2} = +\infty, \text{ uniformemente em } \Omega.$$

Em 1995 em um célebre artigo Li and Willem [19] mostraram que existe uma solução não trivial para o problema  $(P)$  utilizando a condição superquadrática no infinito de Ambrosetti-Rabinowitz, a qual é dada por:

**(AR)** Existem  $\mu > 2$  e  $L > 0$  tais que :

$$0 < \mu G(x, u) \leq g(x, u)u, \quad \forall |u| \geq L, \quad x \in \Omega.$$

Fazendo algumas manipulações em (2.1) e utilizando propriedades da função logarítmica, temos que a hipótese **(AR)** implica em :

$$G(x, u) \geq a |u|^\mu - b, \forall u \in \mathbb{R}, \forall x \in \Omega, \text{ para alguns } a \text{ e } b > 0.$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade acima por  $|u|^\mu$  temos que

$$\frac{G(x, u)}{|u|^\mu} \geq a - \frac{b}{|u|^\mu}, u \in \mathbb{R}, x \in \Omega.$$

Logo, como  $\mu > 2$  segue que

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{G(x, u)}{|u|^\mu} \geq a > 0.$$

Em particular, temos que

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{G(x, u)}{|u|^\mu} > 0.$$

Portanto se uma função  $G$  satisfaz **(AR)** temos que

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{G(x, u)}{|u|^\mu} > 0. \quad (2-1)$$

Neste caso toda função  $G$  que satisfaz a desigualdade

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{G(x, u)}{|u|^\mu} \leq 0 \quad (2-2)$$

não satisfaz **(AR)**. O que é o caso de algumas funções não lineares como por exemplo as seguintes funções

$$\begin{aligned} G(x, u) &= |u|^2 \left( \ln \left( \frac{|u|^4}{3} - |u|^2 + 1 \right) \right)^3; x \in \Omega, u \in \mathbb{R}. \\ F(x, u) &= u^2 \ln(1 + u^2); x \in \Omega, u \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Verificaremos que (2-2) é satisfeita para as funções  $F$  e  $G$  descritas anteriormente.

Inicialmente veja que

$$\frac{G(x, u)}{|u|^\mu} = \frac{1}{|u|^{\mu-2}} \ln^3 \left( \frac{|u|^4}{3} - |u|^2 + 1 \right), u \in \mathbb{R}, x \in \Omega.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor  $u > 0$ . Sendo assim temos as seguintes

identidades:

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{G(x, u)}{u^\mu} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u^{\mu-2}} \ln^3 \left( \frac{u^4}{3} - u^2 + 1 \right), u \in \mathbb{R}, x \in \Omega.$$

Aplicando a regra de L'Hospital no lado direito da igualdade anterior ficamos com as seguintes estimativas

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u^{\mu-2}} \ln^3 \left( \frac{u^4}{3} - u^2 + 1 \right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln^2 \left( \frac{u^4}{3} - u^2 + 1 \right)}{(\mu-2)u^{\mu-3}} \left( \frac{\frac{4u^3}{3} - 2u}{\frac{u^4}{3} - u^2 + 1} \right).$$

Equivalentemente temos a seguinte identidade

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u^{\mu-2}} \ln^3 \left( \frac{u^4}{3} - u^2 + 1 \right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln^2 \left( \frac{u^4}{3} - u^2 + 1 \right)}{(\mu-2)u^{\mu-2}} \left( \frac{\frac{4u^4}{3} - 2u^2}{\frac{u^4}{3} - u^2 + 1} \right). \quad (2-3)$$

Note que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4u^4}{3} - 2u^2}{\frac{u^4}{3} - u^2 + 1} = 4. \quad (2-4)$$

Portanto, temos que

$$\left| \frac{\frac{4u^4}{3} - 2u^2}{\frac{u^4}{3} - u^2 + 1} \right| \leq C, |u| > K$$

para algumas constantes  $C, K > 0$ .

Neste caso, segue a seguinte estimativa

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{G(x, u)}{u^\mu} \leq \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 \left( \frac{u^4}{3} - u^2 + 1 \right)}{(\mu-2)u^{\mu-2}} C.$$

Procedendo da mesma forma que foi feito em (2-3) temos que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{G(x, u)}{u^\mu} \leq \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{C \ln \left( \frac{u^4}{3} - u^2 + 1 \right)}{(\mu-2)^2 u^{\mu-2}}, x \in \Omega; u \in \mathbb{R}.$$

Aplicando novamente L'Hospital no lado direito da desigualdade, repetindo o processo de (2-3) e como  $\mu - 2 > 0$  chegamos a conclusão de que:

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{G(x, u)}{u^\mu} \leq \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{C}{(\mu-2)^3} \frac{1}{u^{\mu-2}} = 0.$$

Portanto  $G$  satisfaz a desigualdade (2-2). Isto implica que função  $G$  não satisfaz a condição **(AR)**.

Similarmente seguem as mesmas desigualdades para o caso em que  $u < 0$ .  
Analisando a função  $F$  dada por

$$F(x, u) = u^2 \ln(1 + u^2); x \in \Omega, u \in \mathbb{R},$$

temos que

$$\frac{F(x, u)}{|u|^\mu} = \frac{1}{|u|^{\mu-2}} \ln(1 + u^2), x \in \Omega, u \in \mathbb{R}.$$

Utilizando o mesmo processo que foi feito em (2-3), como  $\mu - 2 > 0$ , segue que

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{F(x, u)}{|u|^\mu} \leq \lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{C}{(\mu - 2) u^{\mu-2}} = 0.$$

Portanto  $F$  não satisfaz **(AR)**. Consequentemente para tais funções não é garantida a existência de uma solução não trivial para o problema **(P)**, baseando-se no artigo de Li e Willem de 1995 [19].

Neste capítulo vamos garantir a existência de uma solução não trivial para o problema **(P)** sob uma nova condição superquadrática no infinito, a qual absorve casos como das funções citadas anteriormente.

Consideremos as seguintes hipóteses sob a função  $G : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$G(x, u) = \int_0^u g(x, s) ds, u \in E = H_0^1(\Omega).$$

**(G1)**

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{G(x, u)}{|u|^2} = \infty \text{ uniformemente em } \Omega;$$

**(G2)**

$$\lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{G(x, u)}{|u|^2} = 0 \text{ uniformemente em } \Omega;$$

**(G3)** Existem constantes  $1 < \lambda < \frac{n+2}{n-2}$ ,  $a_1 > 0$  tais que :

$$|g(x, u)| \leq a_1(|u|^\lambda + 1), \quad \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R};$$

**(G4)** Existem constantes  $\beta > \frac{2n}{n+2} \lambda$ ,  $a_2 > 0$  e  $L > 0$  tais que:

$$ug(x, u) - 2G(x, u) \geq a_2 |u|^\beta, \quad \forall |u| \geq L, \quad x \in \Omega.$$

Além disso, se 0 é um autovalor do problema de autovalores associado ao problema **(P)**, ou seja,  $0 \in \sigma(-\Delta + a)$ , consideraremos a seguinte hipótese:

(G5) Existe  $\delta > 0$  tal que:

$$(i) G(x, u) \geq 0 \quad \forall |u| \leq \delta \quad x \in \Omega,$$

ou

$$(ii) G(x, u) \leq 0 \quad \forall |u| \leq \delta \quad x \in \Omega.$$

O principal resultado desse capítulo é o seguinte teorema:

**Teorema 2.1** *Suponha que  $G$  satisfaz (G-1), (G-2), (G-3), (G-4). Se  $0 \in \sigma(-\Delta + a)$  assumamos adicionalmente (G-5). Então o problema (P) possui uma solução fraca não trivial.*

Antes de demonstrar o teorema, consideremos um resultado de suma importância. Para tanto vamos definir os seguintes subespaços:

$$\begin{aligned} X_n^1 &= \langle \phi_{k+1}, \phi_{k+2}, \dots, \phi_{k+n+1} \rangle, \quad n \in \mathbb{N}; \\ X_n^2 &= X^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

onde

$$-\infty < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots < \lambda_k = 0 < \lambda_{k+1} < \lambda_{k+2} < \dots$$

Observe que  $X_n^1$  é o espaço gerado pelas  $n$  autofunções  $\phi_{k+1}, \phi_{k+2}, \dots, \phi_{k+n+1}$ , cujos autovalores são positivos.

**Lema 2.2** *Suponhamos que a função  $G$  satisfaz as hipóteses (G-1), (G-2), (G-3) e (G-4). Se  $0 \notin \sigma(-\Delta + a)$  o funcional  $I$  satisfaz a Geometria do Linking Local, ou seja, para algum  $r > 0$ , temos que*

$$(i) I(u) \geq 0 \quad \forall u \in X^1, \text{ com } \|u\| \leq r,$$

$$(ii) I(u) \leq 0 \quad \forall u \in X^2, \text{ com } \|u\| \leq r.$$

*Prova*

Por hipótese,  $0 \notin \sigma(-\Delta + a)$ , então temos que existe um  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $\lambda_j < 0 < \lambda_{j+1}$ . Sabemos que o funcional  $I$  associado ao problema (P) é dado por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + a(x) |u|^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u) dx, \quad u \in H_0^1(\Omega), \quad x \in \Omega.$$

Segue da hipótese (G-2) que dado  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , tal que

$$|G(x, t)| \leq \varepsilon |t|^2; \quad \forall |t| \leq \delta, \quad \text{uniformemente em } \Omega. \quad (2-5)$$

Além disso, temos que existe  $M > 0$ , tal que

$$\sup_{\delta \leq |t| \leq M} \frac{|G(x, t)|}{|t|^s} \leq C_s, \quad (2-6)$$

onde  $C_s > 0$  para  $2 < s < 2^*$ .

Donde segue que

$$|G(x, t)| \leq C_s |t|^s; \quad \delta \leq |t| \leq M. \quad (2-7)$$

Resta avaliarmos o crescimento da função  $G$  fora do intervalo compacto  $[-M, M]$ . Para isso note que pela hipótese **(G-3)** temos que existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|G(x, t)| \leq C(1 + |t|^{\lambda+1}).$$

Equivalentemente temos que

$$\frac{|G(x, t)|}{|t|^{\lambda+1}} \leq \frac{C(1 + |t|^{\lambda+1})}{|t|^{\lambda+1}}.$$

Donde segue que

$$\frac{|G(x, t)|}{|t|^{\lambda+1}} \leq C_M; \quad \forall |t| \geq M.$$

Logo temos que

$$|G(x, t)| \leq C_M |t|^{\lambda+1}; \quad \forall |t| \geq M. \quad (2-8)$$

Utilizando as equações (2-5), (2-7) e (2-8), concluímos que

$$\begin{aligned} |G(x, t)| &\leq \varepsilon |t|^2 + C_s |t|^s + C_M |t|^{\lambda+1}; \quad \forall t \in \mathbb{R}. \\ &\leq \varepsilon |t|^2 + C_s |t|^{\lambda+1} + C_M |t|^{\lambda+1}; \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto temos que a função  $G$  tem o seguinte crescimento

$$|G(x, t)| \leq \varepsilon |t|^2 + C_{M,\lambda} |t|^{\lambda+1}; \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde  $s = \lambda + 1 > 2$ . Analisando o funcional  $I$  ficamos com a seguinte estimativa

$$f(u) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + a(x) |u|^2 dx - \int_{\Omega} \varepsilon |u|^2 + C |u|^{\lambda+1} dx.$$

Donde segue que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + a(x) |u|^2 dx - \varepsilon \|u\|_2^2 - C \|u\|_{\lambda+1}^{\lambda+1}. \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + a(x) |u|^2 dx - \varepsilon \|u\|_2^2 - C \|u\|_{\lambda+1}^{\lambda+1}. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \varepsilon \|u\|_2^2 - C \|u\|^{\lambda+1} \quad \forall u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (2-9)$$

**Observação 2.3** Note que como 0 não é um autovalor do problema (PA) então  $u^0 \equiv 0$ , ou seja, tomando  $u \in H_0^1(\Omega)$ , temos que  $u = u^+ + u^-$ . Portanto,  $\|u\|^2 = Q(u^+) + Q(u^-)$ . Além disso, segue que para algum  $j \in \mathbb{N}$  temos que

$$\lambda_{j-1} < 0 < \lambda_j.$$

Neste momento vamos utilizar as desigualdades variacionais referentes ao problema (P) deduzidas nas preliminares desta dissertação, (1-5) e (1-7), dadas por

$$\lambda_j \int_{\Omega} u^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + a(x)u^2 \, dx \quad \forall u \in \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{j-1} \rangle^{\perp} \text{ (ortogonal em } L^2(\Omega)\text{)}.$$

e

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + a(x)u^2 \, dx \leq \lambda_{j-1} \int_{\Omega} u^2 \, dx \quad \forall u \in \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{j-1} \rangle.$$

Temos por (2-9) que

$$f(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \varepsilon \|u\|_2^2 - C \|u\|^{\lambda+1} \quad \forall u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Em particular essa desigualdade vale para  $u^+$ , ou seja, temos que

$$f(u^+) \geq \frac{1}{2} \|u^+\|^2 - \varepsilon \|u^+\|_2^2 - C \|u^+\|^{\lambda+1}.$$

Observe que  $\|u^+\|_2^2 = \int_{\Omega} (u^+)^2 \, dx$ . Donde pela desigualdade variacional (1-5) segue que

$$f(u^+) \geq \frac{1}{2} \|u^+\|^2 - \varepsilon \frac{\|u^+\|^2}{\lambda_j} - C \|u^+\|^{\lambda+1}.$$

Portanto temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} f(u^+) &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2\varepsilon}{\lambda_j}\right) \|u^+\|^2 - C \|u^+\|^{\lambda+1}. \\ &\geq \frac{1}{4} \|u^+\|^2 - C \|u^+\|^{\lambda+1}. \\ &= \frac{1}{4} \|u^+\|^2 (1 - C \|u^+\|^{\lambda-1}) \geq 0, \end{aligned}$$

para todo  $u \in E^+$   $\|u^+\| \leq r_1$ . Aqui  $r_1 > 0$  foi tomado suficientemente pequeno.

Por outro lado, analisando o funcional  $f$  em  $u^-$  temos que

$$f(u^-) = -\frac{1}{2}\|u^-\|^2 - \int_{\Omega} G(x, u^-) dx.$$

Note que

$$G(x, t) \geq -|G(x, t)| \geq -\varepsilon|t|^2 - C|t|^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Analisando a desigualdade (2-9) ficamos com

$$f(u^-) \leq -\frac{1}{2}\|u^-\|^2 + \varepsilon\|u^-\|_2^2 + C\|u^-\|^{\lambda+1}.$$

Como temos que  $\|u^-\|_2^2 = \int_{\Omega} (u^-)^2 dx$ , segue pela desigualdade variacional (1-7) que

$$f(u^-) \leq -\frac{1}{2}\|u^+\|^2 + \varepsilon \frac{\|u^-\|^2}{\lambda_{j-1}} + C\|u^-\|^{\lambda+1}.$$

Portanto temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} f(u^+) &\leq -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2\varepsilon}{\lambda_{j-1}}\right) \|u^-\|^2 + C\|u^+\|^{\lambda+1}. \\ &\leq -\frac{1}{4}\|u^-\|^2 + C\|u^+\|^{\lambda+1}. \\ &= -\frac{1}{4}\|u^+\|^2(1 - C\|u^+\|^{\lambda-1}) \leq 0, \end{aligned}$$

para todo  $u \in E^-$   $\|u^+\| \leq r_2$ . Aqui  $r_2 > 0$  foi tomado suficientemente pequeno.

Consequentemente, para  $r = \min\{r_1, r_2\}$ , quando 0 não é um autovalor do problema de autovalores associado ao problema **(P)**, o funcional  $f$  possui um Linking Local na origem.  $\square$

Antes de partirmos para a demonstração do Teorema 2.1 é plausível notar que as hipóteses **(G-1)** e **(G-2)** são mais gerais do que a condição **(AR)**. Existem funções que satisfazem as hipóteses do Teorema e não satisfazem **(AR)**, por exemplo, temos as funções  $F$  e  $G$  citadas anteriormente. Neste momento vamos verificar que tanto a função  $F$  quanto a função  $G$  satisfazem as hipóteses do Teorema 2.1.

Note que

$$F(x, u) = u^2 \ln(1 + u^2)$$

satisfaz

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{F(x, u)}{|u|^2} = \lim_{|u| \rightarrow +\infty} \ln(1 + u^2) = \infty \text{ uniformemente em } \Omega;$$

$$\lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{F(x, u)}{|u|^2} = \lim_{|u| \rightarrow 0} \ln(1 + u^2) = 0 \text{ uniformemente em } \Omega.$$

De onde concluímos que  $F$  satisfaz **(G-1)** e **(G-2)**.

Para verificar que a função  $F$  satisfaz **(G-3)** devemos exibir a função  $f$  a qual é dada por:

$$f(x, u) = \frac{\partial F(x, u)}{\partial u}, \quad x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$f(x, u) = 2u \ln(1 + u^2) + u^2 \frac{2u}{(1 + u^2)}, \quad x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Equivalentemente temos que:

$$f(x, u) = 2u \left( \ln(1 + u^2) + \frac{u^2}{(1 + u^2)} \right).$$

Observe que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^2}{1 + u^2} = 1. \quad (2-10)$$

Além disso, temos que o seguinte limite é satisfeito

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + u^2)}{1 + u^2} = 0.$$

Então podemos concluir que

$$\ln(1 + u^2) \leq C(1 + u^2), \quad x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Donde seguem as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} |f(x, u)| &\leq 2uC(1 + u^2) + 2uM, \\ |f(x, u)| &\leq a_1(u^2 + 1), \quad x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

para alguma constante  $a_1 > 0$ . Sendo assim, tomando  $\lambda = 2$ , mostramos que  $F$  satisfaz **(G-3)**.

Neste momento vamos verificar que  $F$  satisfaz **(G-4)**. Note que

$$uf(x, u) - 2F(x, u) = 2u^2 \left( \frac{u^2}{1 + u^2} \right), \quad x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, utilizando (2-10) temos que dado  $\varepsilon > 0$  existe um  $M > 0$  tal que

$$\frac{u^2}{1 + u^2} > (1 - \varepsilon), \quad |u| \geq M.$$

Donde segue que

$$\begin{aligned} uf(x, u) - 2F(x, u) &\geq 2u^2(1 - \varepsilon) \\ &= 2u^2 - 2\varepsilon \\ &\geq a_2u^2, \end{aligned}$$

para alguma constante  $a_2 > 0$  e  $|u| \geq M$ . Adicionalmente, tomando  $\beta = 2$  devemos verificar que  $\beta = 2 > \frac{2N\lambda}{N+2}$ , para  $1 < \lambda < \frac{N+2}{N-2}$ . Note que temos as seguintes implicações

$$\beta = 2 > \frac{2N\lambda}{N+2} \Leftrightarrow \lambda < \frac{2(N+2)}{2N} \Leftrightarrow \lambda < \frac{(N+2)}{N}.$$

Mas por hipótese temos que  $1 < \lambda < \frac{N+2}{N-2}$  e como  $N \geq 3$  segue que  $\frac{(N+2)}{N} > \frac{N+2}{N-2}$ . Consequentemente temos que

$$\lambda < \frac{N+2}{N-2} < \frac{N+2}{N},$$

donde concluímos que  $F$  satisfaz **(G-4)**.

Para verificarmos **(G-5)** basta verificar que  $F$  satisfaz a geometria de Linking na origem quando 0 é um autovalor do problema  $-\Delta + a$ . Já vimos no Lema 2.2 que se 0 não for um autovalor de  $-\Delta + a$  a geometria do linking é satisfeita. Note que a função  $F$  dada por

$$F(x, u) = u^2 \ln(1 + u^2),$$

numa vizinhança da origem é sempre positiva, ou seja, existe um  $\delta > 0$ , tal que

$$F(x, u) \geq 0, \quad \forall |u| \leq \delta \quad x \in \Omega.$$

Portanto temos que  $F$  satisfaz **(G-5)**.

Agora resta mostrarmos que  $G$  satisfaz as hipóteses do Teorema 2.1. Analisando como foi feito anteriormente com a função  $F$  temos que

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{G(x, u)}{|u|^2} = \lim_{|u| \rightarrow +\infty} \ln^3 \left( \frac{u^4}{3} - u^2 + 1 \right) = \infty \text{ uniformemente em } \Omega;$$

$$\lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{G(x, u)}{|u|^2} = \lim_{|u| \rightarrow 0} \ln^3 \left( \frac{u^4}{3} - u^2 + 1 \right) = 0 \text{ uniformemente em } \Omega.$$

De onde concluímos que  $G$  satisfaz **(G-1)** e **(G-2)**.

Para verificarmos que  $G$  satisfaz **(G-3)** devemos exibir a função  $g$  a qual é dada por:

$$g(x, u) = \frac{\partial G(x, u)}{\partial u}, \quad x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Equivalentemente temos que

$$g(x, u) = 2u \ln^3 \left( \frac{u^4}{3} - u^2 + 1 \right) + 3u \ln^2 \left( \frac{u^4}{3} - u^2 + 1 \right) \frac{\frac{4u^4}{3} - 2u^2}{\frac{u^4}{3} - u^2 + 1}.$$

Já mostramos anteriormente que a função

$$\frac{\frac{4u^4}{3} - 2u^2}{\frac{u^4}{3} - u^2 + 1}$$

é limitada para  $|u| > M, u \neq 0$ . Além disso, somos capazes de verificar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln^k t}{|t|^\varepsilon} = 0; \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Donde segue a seguinte estimativa

$$\ln^k t \leq C_\varepsilon + C_\varepsilon |t|^\varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente temos que

$$\begin{aligned} |g(x, u)| &\leq C + C_\varepsilon |u|^\varepsilon \\ &\leq C |u| + C_\varepsilon |u|^{\varepsilon+1}, \quad x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Neste caso concluímos que

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \left| \frac{g(x, u)}{|u|^{\varepsilon+1}} \right| \leq C_\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Em particular temos que

$$|g(x, u)| \leq a_1 (|u|^\lambda + 1), \quad \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

com  $\lambda = \varepsilon + 1$ . Concluindo assim que  $G$  satisfaz a hipótese **(G-3)**.

Para mostrarmos que  $G$  satisfaz **(G-4)**, analogamente como foi feito com a função  $F$ , devemos calcular a seguinte expressão

$$ug(x, u) - 2G(x, u) = 2u^2 \ln^2 \left( \frac{u^4}{3} - u^2 + 1 \right) \frac{\frac{4u^4}{3} - 2u^2}{\frac{u^4}{3} - u^2 + 1}, \quad x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Note que por (2-4), temos a seguinte estimativa

$$\frac{\frac{4u^4}{3} - 2u^2}{\frac{u^4}{3} - u^2 + 1} \geq 4 - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad |u| \geq K,$$

onde  $K > 0$ . Por outro lado, usando o fato de que

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 u}{u} = 0,$$

segue que

$$\left| \frac{\ln^2 u}{u} \right| < \varepsilon \text{ para } |u| \geq K,$$

ou ainda,

$$-\varepsilon |u| < \ln^2 u < \varepsilon |u|, \quad x \in \Omega, \quad |u| > K > 0.$$

Portanto

$$\ln^2 u > C |u| - C; \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Analogamente podemos concluir que

$$\ln^2 \left( \frac{u^4}{3} - u^2 + 1 \right) \geq C \left( \frac{u^4}{3} - u^2 + 1 \right) - C; \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Donde ficamos com

$$ug(x, u) - 2G(x, u) \geq Cu^2 - C, \quad x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente verificamos que  $G$  satisfaz **(G-4)**.

Para verificarmos **(G-5)**, basta verificarmos a geometria de Linking na Origem para a função  $G$ , quando 0 é um autovalor do problema  $-\Delta + a$ .

Note que a a função

$$G(x, u) = |u|^2 \left( \ln \left( \frac{|u|^4}{3} - |u|^2 + 1 \right) \right)^3; \quad x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}$$

próximo da origem é sempre positiva, ou seja, existe um  $\delta > 0$  tal que

$$G(x, u) \geq 0 \quad \forall |u| \leq \delta \quad x \in \Omega.$$

Portanto a função  $G$  satisfaz **(G-5)** e consequentemente temos que demonstrando o Teorema 2.1 garantimos a existência de uma solução não trivial para o problema **(P)** considerando funções que não satisfazem a condição de **(AR)**.

*Prova*

## 2.2 Demonstração do Teorema 2.1

Considere o funcional  $I$  definido no espaço  $E = H_0^1(\Omega)$  por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) |u|^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u) dx, \quad u \in E = H_0^1(\Omega), \quad x \in \Omega.$$

**Observação 2.4** *Seja  $u \in E = H_0^1(\Omega)$ . Sabemos que existem únicos  $u^- \in E^-$ ,  $u^+ \in E^+$  e  $u^0 \in E^0$  tais que  $u = u^+ + u^- + u^0$ . Mais especificamente,  $E^+$  é o autoespaço gerado pelas autofunções do problema de autovalores (PA) associado à autovalores positivos. Similarmemente temos que  $E^-$  é o autoespaço gerado pelas autofunções onde os autovalores respectivos são negativos e  $E^0$  é o autoespaço gerado pelo autovalor  $\lambda = 0$ .*

Assim sendo, podemos definir o funcional como

$$I(u) = \frac{1}{2}(Q(u^+) - Q(u^-)) - \int_{\Omega} G(x, u) dx, \quad u^- \in E^-, \quad u^+ \in E^+, \quad (2-11)$$

onde  $E^-$  e  $E^+$  são os respectivos espaços gerados pelos autovetores associados a suas autofunções com autovalores negativos e positivos do problema  $-\Delta + a$ , respectivamente. Aqui o funcional  $Q$  é dado por

$$Q(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + a(x)u^2 dx, \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

o qual foi devidamente estudado nas preliminares desta dissertação, (cf.(1-10)). Observe que encontrar uma solução fraca  $u$  para o problema (P) equivale encontrar os pontos críticos não nulos do funcional  $I$  em  $E = H_0^1(\Omega)$ . Além disso, verificamos na preliminar desta dissertação que a derivada de  $I$  é dada por:

$$\langle I'(u), v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} a(x)uv dx - \int_{\Omega} g(x, u)v dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega),$$

ou equivalentemente,

$$\langle f'(u), v \rangle = \langle u^+ - u^-, v \rangle - \int_{\Omega} g(x, u)v dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Seguem de (G-3) e (G-4) as seguintes desigualdades:

- 1)  $2 < \lambda + 1 < \frac{N+2}{N-2} + 1 = \frac{2N}{N-2} = 2^*$ , ou seja,  $\lambda + 1 < 2^*$ .
- 2)  $\frac{2N}{N+2}\lambda - \lambda < \beta - \lambda$ .

Então, segue que

$$\beta - \lambda > \frac{2N\lambda - N\lambda - 2\lambda}{N+2},$$

ou seja,

$$\frac{\lambda(N-2)}{N+2} < \beta - \lambda.$$

Portanto verificamos que

$$\frac{1}{\beta - \lambda} < \frac{N+2}{\lambda(N-2)}.$$

Neste caso para cada  $\beta > 0$  segue que

$$\frac{\beta}{\beta - \lambda} < \beta \frac{N+2}{\lambda(N-2)}.$$

Entretanto temos as seguintes desigualdades:

$$1 < \lambda < \frac{N+2}{N-2}, \quad 1 < \frac{N+2}{\lambda(N-2)} + 1.$$

Neste caso segue que

$$\frac{2N\lambda}{N+2} \frac{N+2}{\lambda(N-2)} < \beta \frac{N+2}{\lambda(N-2)}$$

mostrando que

$$\frac{\beta}{\beta - \lambda} < \frac{2N}{N-2} = 2^*.$$

Por outro lado, usando que  $2 < 2^*$ , segue que

$$1 + \lambda < 2^*, \quad \frac{\beta}{\beta - \lambda} < 2^*.$$

Usando as imersões contínuas de Sobolev temos que existe uma constante  $C > 0$  tal que :

$$\|u\|_{L^1} \leq C\|u\|,$$

$$\|u\|_{L^2} \leq C\|u\|,$$

$$\|u\|_{L^{1+\lambda}} \leq C\|u\|,$$

$$\|u\|_{L^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}}} \leq C\|u\|, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Neste momento, usaremos um lema também conhecido como Teorema de Linking Local, do artigo de Li e Willem [19] para garantir a existência de uma solução não trivial para o problema **(P)**. Este Teorema está nas preliminares da dissertação, ver Lema 1.17. Inicialmente, note que tomando  $X = H_0^1(\Omega) = X^1 \oplus X^2$ , onde esses subespaços de  $H_0^1(\Omega)$  são dados por uma combinação em soma direta dos espaços  $E^+$ ,  $E^-$ ,  $E^0$ , definidos anteriormente. Esta combinação depende diretamente do fato de 0 ser ou não um autovalor do problema  $-\Delta + a$ . Se 0 é um autovalor de  $(-\Delta + a)$  então essa combinação será definida a partir da hipótese **(G5)** do Teorema 2.1. Para o caso em que 0 não é um

autovalor do operador  $-\Delta + a$  consideramos o Lema 2.2 o qual nos garante que o funcional  $I$  possui a geometria do Linking Local. Então vamos verificar que o funcional  $I$  satisfaz as condições  $(\mathbf{f}_1) - (\mathbf{f}_4)$  do Lema 1.17, sob as hipóteses do Teorema 2.1, o qual vai garantir a existência de uma solução fraca não trivial para o problema  $(\mathbf{P})$ .

Primeiramente, vamos verificar que o funcional  $I$ , possui um Linking Local na origem, ou seja, vamos verificar que ele satisfaz a hipótese  $(\mathbf{f}_1)$  do Lema de Linking Local 1.17, isto é, para algum  $r > 0$  verificaremos que

$$(i) I(u) \geq 0, \quad u \in X^1 \text{ com } \|u\| \leq r,$$

$$(ii) I(u) \leq 0, \quad u \in X^2 \text{ com } \|u\| \leq r.$$

Note que a função  $G$  possui o seguinte crescimento

$$|G(x, u)| \leq a_1(|u|^{\lambda+1} + |u|), \quad \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

onde usamos  $(\mathbf{G-3})$ . Agora, por  $(\mathbf{G-2})$  temos que dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_1 > 0$  tal que :

$$|G(x, u)| < \varepsilon |u|^2, \quad \forall |u| < \delta_1.$$

Assim temos a seguinte desigualdade

$$|G(x, u)| \leq \varepsilon u^2 + |u|^{\lambda+1} M, \quad (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Aqui  $M > 0$  é uma constante que depende de  $\Omega$ ,  $a_1$  e de  $\delta_1$ .

Neste caso, temos a seguinte estimativa

$$\left| \int_{\Omega} G(x, u) dx \right| \leq \varepsilon \int_{\Omega} u^2 dx + M \int_{\Omega} |u|^{\lambda+1} dx, \quad u \in X. \quad (2-12)$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \|u\|_2 &\leq C\|u\|; \\ \|u\|_{1+\lambda} &\leq C\|u\|, \quad u \in X. \end{aligned}$$

Portanto segue de (2-12) e das desigualdades anteriores que

$$\left| \int_{\Omega} G(x, u) dx \right| \leq \varepsilon C^2 \|u\|^2 + MC^{\lambda+1} \|u\|^{\lambda+1}, \quad \forall u \in X.$$

Vamos considerar o caso em que 0 é um autovalor do operador  $(-\Delta + a)$ , caso contrário o resultado segue pelo Lema 2.2. Suponhamos verdadeiro o item

$$(ii) \ G(x, u) \leq 0, \quad |u| \leq \delta, \quad x \in \Omega$$

obtido da hipótese **(G-5)**.

Sejam  $X = E$ ,  $X^1 = E^+ \oplus E^0$ ,  $X^2 = E^-$  onde  $E^0 = \ker(-\Delta + a)$ .

**Observação 2.5** Neste momento é importante salientar que caso escolhêssemos o item

$$(i) \ G(x, u) \geq 0, \quad |u| \leq \delta, \quad x \in \Omega.$$

da hipótese **(G-5)**, a diferença seria a escolha desses subespaços  $X^1$  e  $X^2$ , os quais seriam  $X^1 = E^- \oplus E^0$ ,  $X^2 = E^+$ . Neste caso, a geometria segue de forma semelhante.

Consideremos os seguintes subespaços:

$$\begin{aligned} X_n^1 &= \langle \phi_{k+1}, \phi_{k+2}, \dots, \phi_{k+n+1} \rangle, \quad n \in \mathbb{N}; \\ X_n^2 &= X^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

onde

$$-\infty < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots < \lambda_k = 0 < \lambda_{k+1} < \lambda_{k+2} < \dots$$

Observe que  $X_n^1$  é o espaço gerado pelas  $n$  autofunções  $\phi_{k+1}, \phi_{k+2}, \dots, \phi_{k+n+1}$ , cujos autovalores são positivos. Assim conseguimos provar neste que

$$E^+ = \overline{\bigcup_n X_n^1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Note que tomando  $u \in E^-$  temos que  $u^+ \equiv 0$ . Analisando o funcional  $I$  para  $u \in E^-$  ficamos com

$$I(u) = -\frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\Omega} G(x, u) dx; \quad u \in E^-.$$

Contudo, usando as estimativas anteriores, segue que

$$\left| \int_{\Omega} G(x, u) dx \right| \leq \varepsilon C^2 \|u\|^2 + MC^{\lambda+1} \|u\|^{\lambda+1}.$$

Donde temos que

$$-\int_{\Omega} G(x, u) dx \leq \varepsilon C^2 \|u\|^2 + MC^{\lambda+1} \|u\|^{\lambda+1}, \quad u \in E^-.$$

Portanto segue a seguinte desigualdade

$$I(u) \leq -\frac{1}{2}\|u\|^2 + \varepsilon C^2 \|u\|^2 + MC^{\lambda+1} \|u\|^{\lambda+1}; u \in E^-.$$

Tomando  $\varepsilon = \frac{1}{4C^2}$  temos que

$$\begin{aligned} I(u) &\leq -\frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\|u\|^2 + MC^{\lambda+1} \|u\|^{\lambda+1} \\ &\leq -\frac{1}{4}\|u\|^2 + MC^{\lambda+1} \|u\|^{\lambda+1}; u \in E^-. \end{aligned} \quad (2-13)$$

Note que  $\lambda + 1 > 2$ . Assim fazendo  $K = MC^{\lambda+1}$  ficamos com:

$$\begin{aligned} I(u) &\leq -\frac{1}{4}\|u\|^2 + K\|u\|^{\lambda+1} \\ &\leq \|u\|^2(-1/4 + K\|u\|^{\lambda-1}); u \in E^-. \end{aligned}$$

Majorando o termo  $(-1/4 + K\|u\|^{\lambda-1})$  digamos por  $-1/8$ , ficamos com a seguinte estimativa

$$\|u\|^{\lambda-1} < \frac{1}{8K} \Rightarrow \|u\| < \left(\frac{1}{8K}\right)^{\frac{1}{\lambda-1}}; u \in E^-.$$

Consequentemente temos que

$$f(u) \leq 0, u \in E^- = X^2,$$

com  $\|u\| \leq r_0$  onde  $r_0 = \left(\frac{1}{8K}\right)^{\frac{1}{\lambda-1}}$ . Concluindo que o funcional  $f$ , satisfaz a parte *i*) da hipótese **(f<sub>1</sub>)** do Lema de Linking Local.

Neste momento note que como  $E^0 = \ker(-\Delta + a)$  temos que  $E^0 \subset C(\Omega, \mathbb{R})$ . Pela equivalência de normas para o espaço de dimensão finita  $E^0$  existe uma constante  $C_1 > 0$  tal que :

$$\begin{cases} \|v\|_\infty \leq C_1 \|v\|, \\ \|v\| \leq C_1 \|v\|_{L^1}, v \in E^0. \end{cases}$$

Consideremos  $u = u^0 + u^+ \in X^1 = E^+ \oplus E^0$  tal que  $\|u\| \leq r_1$ , onde  $r_1 = \frac{\delta}{2C_1}$ . Vamos dividir  $\Omega$  em dois subespaços:

$$\Omega_1 = \left\{ x \in \Omega; |u^+(x)| \leq \frac{\delta}{2} \right\}, \quad \Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1.$$

Como  $u^0 \in E^0$ , da equivalência de normas segue que para alguma constante  $C > 0$  temos

$$\|u^0\|_\infty \leq C_1 \|u^0\| \text{ e } \|u^0\| \leq C_1 \|u^0\|_{L^1}.$$

Logo temos que

$$|u^0(x)| \leq \|u^0\|_\infty \leq C_1 \|u^0\|, \quad u_0 \in E^0. \quad (2-14)$$

Porém, usando que

$$\|u\| = \|u^0 + u^+\| \leq \|u^0\| + \|u^+\|, \quad (2-15)$$

vemos que

$$\|u^0\| \leq \|u\|.$$

Assim podemos concluir que

$$|u^0(x)| \leq \|u^0(x)\|_\infty \leq C_1 \|u^0\| \leq C_1 \|u\| \leq C_1 r_1 = C_1 \frac{\delta}{2C_1} = \frac{\delta}{2}, \quad \|u\| \leq r_1.$$

Donde concluimos que

$$|u^0(x)| \leq \frac{\delta}{2}, \text{ com } \|u\| \leq r_1. \quad (2-16)$$

Por outro lado, como  $u \in X^1$  temos que

$$u(x) = u^0(x) + u^+(x), \text{ e } |u(x)| \leq |u^0(x)| + |u^+(x)| \quad x \in \Omega. \quad (2-17)$$

Em particular, tomando  $x \in \Omega_1 \Rightarrow |u^+(x)| \leq \frac{\delta}{2}$ , ou seja, utilizando as estimativas (2-16) e (2-17), ficamos com

$$|u(x)| \leq |u^0(x)| + \frac{\delta}{2} \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Então podemos concluir que

$$|u(x)| \leq \delta, \quad x \in \Omega_1.$$

Como supomos o item ii) da hipótese **(G-5)** temos que

$$\int_{\Omega_1} G(x, u) dx \leq 0.$$

Por outro lado, considerando  $x \in \Omega_2$ , temos que  $\frac{\delta}{2} < |u^+(x)|$ .

Donde segue que

$$|u^+(x)| + |u^+(x)| > \frac{\delta}{2} + |u^+(x)|.$$

Conseqüentemente temos que

$$2|u^+(x)| > \frac{\delta}{2} + |u^+(x)|.$$

Logo, como  $|u(x)| \leq |u^0(x)| + |u^+(x)|$  e  $|u^0(x)| \leq \frac{\delta}{2}$  segue que

$$|u(x)| \leq \frac{\delta}{2} + |u^+(x)| \leq 2|u^+(x)|.$$

Concluindo que

$$|u(x)| \leq 2|u^+(x)|, \forall x \in \Omega_2.$$

Note que como

$$|G(x, u)| \leq \varepsilon u^2 + |u|^{\lambda+1} M, \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Utilizando que  $|u(x)| \leq 2|u^+(x)|$ , temos que

$$|G(x, u)| \leq 4\varepsilon(u^+)^2 + 2^{\lambda+1} M |u^+|^{\lambda+1}, \forall x \in \Omega_2, u \in X^1 = E^0 \oplus E^+, \|u\| \leq r_1.$$

Donde seguem as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} G(x, u) dx &\leq 4\varepsilon \int_{\Omega_2} (u^+)^2 dx + 2^{\lambda+1} M \int_{\Omega_2} |u^+|^{\lambda+1} dx \\ &\leq 4\varepsilon (\|u^+\|_{L^2})^2 + 2^{\lambda+1} M (\|u^+\|_{L^{\lambda+1}})^{\lambda+1}. \\ &\leq 4\varepsilon C^2 \|u^+\|^2 + 2^{\lambda+1} M C^{\lambda+1} \|u^+\|_{L^{\lambda+1}}, \end{aligned}$$

onde  $u \in X^1$ ;  $\|u\| \leq r_1$ .

Neste caso segue que tomando  $\varepsilon = \frac{1}{16C^2}$  ficamos com

$$\int_{\Omega_2} G(x, u) dx \leq \frac{1}{4} \|u^+\|^2 + 2^{\lambda+1} M C^{\lambda+1} \|u^+\|^{\lambda+1}.$$

Deste modo temos que

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2} \|u^+\|^2 - \int_{\Omega_1} G(x, u) dx - \int_{\Omega_2} G(x, u) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u^+\|^2 - \int_{\Omega_2} G(x, u) dx, u \in X^1. \end{aligned}$$

Analogamente, temos que

$$\int_{\Omega_2} G(x, u) dx \leq \frac{1}{4} \|u^+\|^2 + 2^{\lambda+1} M C^{\lambda+1} \|u^+\|^{\lambda+1}, u \in E^+.$$

Portanto segue a seguinte desigualdade

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \|u^+\|^2 - \frac{1}{4} \|u^+\|^2 - 2^{\lambda+1} MC^{\lambda+1} \|u^+\|^{\lambda+1}, \quad u \in E^+.$$

Assim segue que

$$I(u) \geq \frac{1}{4} \|u^+\|^2 - 2^{\lambda+1} MC^{\lambda+1} \|u^+\|^{\lambda+1}, \quad u \in E^+.$$

Analisando da mesma forma que foi feito em (2-13), concluímos que

$$f(u) \geq 0, \quad u \in X^1 \text{ com } \|u\| \leq r \text{ para } 0 < r \leq \min\{r_0, r_1\}.$$

Aqui tomamos  $r_0, r_1 > 0$  suficientemente pequenos.

Mostrando assim que o funcional  $f$ , satisfaz a parte *ii*) da hipótese **(f1)** do Lema de Linking Local.

Concluímos então que o funcional  $I$  possui um linking local na origem mesmo quando 0 é um autovalor do problema **(PA)**.

Agora vamos verificar que o funcional  $I$  satisfaz a condição  $(P.S.)^*$ , ou seja, vamos mostrar a parte **(f2)** do Lema do Linking Local 1.17.

Seja  $(u_{\alpha_n})$  uma sequência tal que  $(\alpha_n)$  é uma sequência admissível e  $(u_{\alpha_n}) \in X_{\alpha_n}$ , onde  $\sup_n I(u_{\alpha_n}) < \infty$  e além disso temos que  $I'_{\alpha_n}(u_{\alpha_n}) \rightarrow 0$ . Vamos verificar que  $(u_{\alpha_n})$  é limitada em  $X$ .

Para tanto, considerando uma subsequência se necessário, suponhamos por absurdo que  $\|u_{\alpha_n}\| \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Note que pela hipótese **(G-4)** temos que:

$$ug(x, u) - 2G(x, u) \geq a_2 |u|^\beta - a_3 \quad \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

para alguns  $a_2, a_3 > 0$ . Neste caso, temos a seguinte estimativa

$$2I(u) - \langle I'(u), u \rangle = \int_{\Omega} ug(x, u) - 2G(x, u) dx. \quad (2-18)$$

$$\geq \int_{\Omega} (a_2 |u|^\beta - a_3) dx. \quad (2-19)$$

Logo temos que segue a seguinte desigualdade

$$2I(u) - \langle I'(u), u \rangle \geq a_2 \int_{\Omega} |u|^\beta - a_3 |\Omega| dx.$$

Analisando para  $u = u_{\alpha_n}$  ficamos com :

$$2I(u_{\alpha_n}) - \langle I'(u_{\alpha_n}), u_{\alpha_n} \rangle \geq a_2 \int_{\Omega} |u_{\alpha_n}|^{\beta} - a_3 |\Omega| dx.$$

Agora, temos por hipótese que

$$C = \sup_n I(u_{\alpha_n}) < \infty,$$

ou seja,  $I(u_{\alpha_n})$  é limitada. Além disso temos também que

$$I'_{\alpha_n}(u_{\alpha_n}) \longrightarrow 0.$$

Portanto segue por um lado que dado  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |\langle I'(u_{\alpha_n}), u_{\alpha_n} \rangle| &\leq \|I'(u_{\alpha_n})\| \|u_{\alpha_n}\|. \\ &\leq \varepsilon \|u_{\alpha_n}\| \end{aligned}$$

Donde

$$|2I(u_{\alpha_n}) - \langle I'(u_{\alpha_n}), u_{\alpha_n} \rangle| < C + \varepsilon \|u_{\alpha_n}\|$$

para alguma constante  $C > 0$ .

Consequentemente, temos que

$$\int_{\Omega} |u_{\alpha_n}|^{\beta} dx \leq K + \varepsilon \|u_{\alpha_n}\|,$$

onde  $K > 0$  é uma constante. Dividindo ambos os lados da desigualdade acima por  $\|u_{\alpha_n}\|$ , segue que

$$\varepsilon \|u_{\alpha_n}\| + \frac{K}{\|u_{\alpha_n}\|} \geq \int_{\Omega} \frac{|u_{\alpha_n}|^{\beta}}{\|u_{\alpha_n}\|} dx.$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$  e usando o fato de que  $\|u_{\alpha_n}\| \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , ficamos com

$$\int_{\Omega} \frac{|u_{\alpha_n}|^{\beta}}{\|u_{\alpha_n}\|} dx \rightarrow 0.$$

Agora reescreva  $u_{\alpha_n}$  da seguinte maneira

$$u_{\alpha_n} = u_{\alpha_n}^+ + u_{\alpha_n}^- + u_{\alpha_n}^0 \in E^+ \oplus E^- \oplus E^0.$$

Aqui  $E^+$  é o espaço gerado pelas autofunções positivas,  $E^-$  é o espaço gerado pelas autofunções negativas e  $E^0 = \ker(-\Delta + a)$ , como foi definido anteriormente. Analisando

a derivada do funcional  $f$  aplicado a  $u_{\alpha_n}$  temos as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} \langle I'(u_{\alpha_n}), u_{\alpha_n}^+ \rangle &= \|u_{\alpha_n}^+\|^2 - \int_{\Omega} u_{\alpha_n}^+ g(x, u_{\alpha_n}^+) dx \\ &\geq \|u_{\alpha_n}^+\|^2 - \int_{\Omega} |u_{\alpha_n}^+| |g(x, u_{\alpha_n}^+)| dx. \end{aligned}$$

Note que por **(G-2)** temos que

$$\int_{\Omega} |g(x, u_{\alpha_n}^+)| dx \leq \int_{\Omega} a_1 (|u_{\alpha_n}^+|^{\lambda} + 1) dx.$$

Donde ficamos com

$$\langle I'(u_{\alpha_n}), u_{\alpha_n}^+ \rangle \geq \|u_{\alpha_n}^+\|^2 - a_1 \int_{\Omega} |u_{\alpha_n}^+|^{\lambda} |u_{\alpha_n}^+| dx - a_1 \int_{\Omega} |u_{\alpha_n}^+| dx \quad (2-20)$$

Neste momento observe que :

$$\frac{\beta - \lambda}{\beta} + \frac{\lambda}{\beta} = 1.$$

Portanto, usando a Desigualdade de Hölder (ver apêndice B.2) no lado esquerdo da desigualdade anterior ficamos com as seguintes estimativas.

$$\int_{\Omega} |u_{\alpha_n}^+|^{\lambda} |u_{\alpha_n}^+| dx \leq \left[ \int_{\Omega} (|u_{\alpha_n}^+|^{\lambda})^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \int_{\Omega} (|u_{\alpha_n}^+|)^q \right]^{\frac{1}{q}},$$

onde  $q = \frac{\beta}{\beta - \lambda}$ ,  $p = \frac{\beta}{\lambda}$ .

Assim temos que

$$\int_{\Omega} |u_{\alpha_n}^+|^{\lambda} |u_{\alpha_n}^+| dx \leq \left( \int_{\Omega} (|u_{\alpha_n}^+|^{\lambda})^{\frac{\beta}{\lambda}} \right)^{\frac{\lambda}{\beta}} \left( \int_{\Omega} (|u_{\alpha_n}^+|)^{\frac{\beta}{\beta - \lambda}} \right)^{\frac{\beta - \lambda}{\beta}}.$$

Por (2-20) obtemos a seguinte desigualdade :

$$\langle I'(u_{\alpha_n}), u_{\alpha_n}^+ \rangle \geq \|u_{\alpha_n}^+\|^2 - a_1 \|u_{\alpha_n}^+\|_{\beta}^{\lambda} \|u_{\alpha_n}^+\|_{\frac{\beta}{\beta - \lambda}} - a_1 \|u_{\alpha_n}^+\|_1.$$

Agora, usando as Imersões de Sobolev temos que existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\langle I'(u_{\alpha_n}), u_{\alpha_n}^+ \rangle \geq \|u_{\alpha_n}^+\|^2 - a_1 C \|u_{\alpha_n}^+\|_{\beta}^{\lambda} \|u_{\alpha_n}^+\| - a_1 C \|u_{\alpha_n}^+\|.$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade anterior por  $\|u_{\alpha_n}^+\|^2$  ficamos com

$$\frac{\langle I'(u_{\alpha_n}), u_{\alpha_n}^+ \rangle}{\|u_{\alpha_n}^+\|^2} \geq \frac{\|u_{\alpha_n}^+\|^2}{\|u_{\alpha_n}^+\|^2} - \frac{a_1 C \|u_{\alpha_n}^+\|_{\beta}^{\lambda} \|u_{\alpha_n}^+\|}{\|u_{\alpha_n}^+\|^2} - \frac{a_1 C \|u_{\alpha_n}^+\|}{\|u_{\alpha_n}^+\|^2}. \quad (2-21)$$

Observe que como

$$|\langle I'(u_{\alpha_n}), u_{\alpha_n}^+ \rangle| \leq \|I'(u_{\alpha_n})\| \|u_{\alpha_n}^+\|.$$

Donde ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{\langle I'(u_{\alpha_n}), u_{\alpha_n}^+ \rangle}{\|u_{\alpha_n}\|^2} &\leq \frac{\|I'(u_{\alpha_n})\| \|u_{\alpha_n}^+\|}{\|u_{\alpha_n}\|^2} \\ &\leq \frac{\|I'(u_{\alpha_n})\|}{\|u_{\alpha_n}\|} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Agora, analisando novamente em 2-21, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\|u_{\alpha_n}^+\|^2}{\|u_{\alpha_n}\|^2} - \frac{a_1 C \|u_{\alpha_n}\|_{\beta}^{\lambda} \|u_{\alpha_n}^+\|}{\|u_{\alpha_n}\|^2} - \frac{a_1 C \|u_{\alpha_n}^+\|}{\|u_{\alpha_n}\|^2} \right) \leq 0. \quad (2-22)$$

Vamos calcular separadamente os limites em cada termo da expressão anterior.

Note que como  $u_{\alpha_n} = u_{\alpha_n}^+ + u_{\alpha_n}^- + u_{\alpha_n}^0 \in E^+ \oplus E^- \oplus E^0$ , temos a seguinte estimativa

$$\frac{a_1 C \|u_{\alpha_n}\|_{\beta}^{\lambda} \|u_{\alpha_n}^+\|}{\|u_{\alpha_n}\|^2} \leq \frac{a_1 C \|u_{\alpha_n}\|_{\beta}^{\lambda} \|u_{\alpha_n}\|}{\|u_{\alpha_n}\|^2} = \frac{a_1 C \|u_{\alpha_n}\|_{\beta}^{\lambda}}{\|u_{\alpha_n}\|}.$$

Além disso, como temos que

$$\frac{\|u_{\alpha_n}\|_{\beta}^{\lambda}}{\|u_{\alpha_n}\|} = \frac{(\int |u_{\alpha_n}|^{\beta})^{\frac{\lambda}{\beta}}}{\|u_{\alpha_n}\|}.$$

Sabemos que vale a seguinte convergência

$$\int \frac{|u_{\alpha_n}|^{\beta}}{\|u_{\alpha_n}\|} dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Então, como  $\lambda < \beta \Rightarrow \frac{\lambda}{\beta} < 1$ , segue que

$$\frac{(\int |u_{\alpha_n}|^{\beta})^{\frac{\lambda}{\beta}}}{\|u_{\alpha_n}\|} \leq \int \frac{|u_{\alpha_n}|^{\beta}}{\|u_{\alpha_n}\|}.$$

Assim temos que

$$\frac{(\int |u_{\alpha_n}|^{\beta})^{\frac{\lambda}{\beta}}}{\|u_{\alpha_n}\|} \rightarrow 0.$$

Donde concluímos o seguinte limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 C \|u_{\alpha_n}\|_{\beta}^{\lambda} \|u_{\alpha_n}^+\|}{\|u_{\alpha_n}\|^2} = 0.$$

Analogamente, segue que

$$0 \leq \frac{a_1 C \|u_{\alpha_n}^+\|}{\|u_{\alpha_n}\|^2} \leq \frac{a_1 C}{\|u_{\alpha_n}\|} = \frac{a_1 C}{\|u_{\alpha_n}\|} \rightarrow 0.$$

Analisando o limite (2-22) e substituindo os limites anteriores concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_{\alpha_n}^+\|}{\|u_{\alpha_n}\|} = 0. \quad (2-23)$$

Procedendo de forma semelhante ao que foi feito anteriormente, agora para  $u_{\alpha_n}^-$ , mostramos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_{\alpha_n}^-\|}{\|u_{\alpha_n}\|} = 0. \quad (2-24)$$

Agora verificaremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_{\alpha_n}^0\|}{\|u_{\alpha_n}\|} = 0$$

Note que por **(G-4)** temos que existe  $\delta > 0$  tal que:

$$ug(x, u) - 2G(x, u) \geq a_2 |u|^\beta,$$

com  $\beta > \frac{2N\lambda}{N+2}$ ,  $|u| \geq L$ , onde  $1 < \lambda < \frac{N+2}{N-2}$ ,  $a_2 > 0$ ;  $L > 0$ .

Como  $\beta > \frac{2n\lambda}{n+2} > 1$  temos que  $|u|^\beta > |u|$ .

Donde podemos concluir que

$$ug(x, u) - 2G(x, u) \geq a_2 |u|^\beta > a |u|, \quad |u| \geq L,$$

para algum  $L > 0$ .

Consequentemente segue que

$$ug(x, u) - 2G(x, u) \geq a |u| - b, \quad \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

onde  $a, b$  são constantes. Portanto, usando a estimativa (2-18) temos que

$$\begin{aligned} 2I(u_{\alpha_n}) - \langle I'(u_{\alpha_n}), u_{\alpha_n} \rangle &= \int_{\Omega} u_{\alpha_n} g(x, u_{\alpha_n}) - 2G(x, u_{\alpha_n}) dx \\ &\geq a \int_{\Omega} |u_{\alpha_n}| dx - b |\Omega|. \end{aligned}$$

Usando que  $|u_{\alpha_n}| = |u_{\alpha_n}^0 + u_{\alpha_n}^- + u_{\alpha_n}^+|$  e utilizando a desigualdade triangular ficamos com

$$\begin{aligned} 2I(u_{\alpha_n}) - \langle I'(u_{\alpha_n}), u_{\alpha_n} \rangle &\geq a \int_{\Omega} |u_{\alpha_n}^0 + u_{\alpha_n}^- + u_{\alpha_n}^+| dx - b |\Omega| \\ &\geq a \int_{\Omega} |u_{\alpha_n}^0| dx - a \int_{\Omega} |u_{\alpha_n}^-| dx - a \int_{\Omega} |u_{\alpha_n}^+| dx - b |\Omega|. \end{aligned}$$

Como  $u_{\alpha_n}^0 \in E^0$ , temos pela equivalência de normas que existe uma constante  $C_1 > 0$  tal que

$$\|u_{\alpha_n}^0\| \leq C_1 \|u_{\alpha_n}^0\|_1 = C_1 \int_{\Omega} |u_{\alpha_n}^0| dx.$$

Donde segue que

$$\int_{\Omega} |u_{\alpha_n}^0| dx \geq \frac{\|u_{\alpha_n}^0\|}{C_1}.$$

Consequentemente obtemos a seguinte estimativa

$$2I(u_{\alpha_n}) - \langle I'(u_{\alpha_n}), u_{\alpha_n} \rangle \geq \frac{a}{C_1} \|u_{\alpha_n}^0\| - Ca(\|u_{\alpha_n}^+\| + \|u_{\alpha_n}^-\|) - b |\Omega|.$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade acima por  $\|u_{\alpha_n}\|$  ficamos com

$$\frac{2I(u_{\alpha_n})}{\|u_{\alpha_n}\|} - \frac{\langle I'(u_{\alpha_n}), u_{\alpha_n} \rangle}{\|u_{\alpha_n}\|} \geq \frac{a}{C_1} \frac{\|u_{\alpha_n}^0\|}{\|u_{\alpha_n}\|} - Ca \frac{(\|u_{\alpha_n}^+\| + \|u_{\alpha_n}^-\|)}{\|u_{\alpha_n}\|} - b \frac{|\Omega|}{\|u_{\alpha_n}\|}.$$

Agora, fazendo  $n \rightarrow \infty$  temos que o lado esquerdo da desigualdade acima tende à 0. Por outro lado,

$$\frac{\|u_{\alpha_n}^+\|}{\|u_{\alpha_n}\|}$$

e

$$\frac{\|u_{\alpha_n}^-\|}{\|u_{\alpha_n}\|}$$

também tendem para 0, (veja (2-23) e (2-24)). Deste modo concluímos que  $\frac{\|u_{\alpha_n}^0\|}{\|u_{\alpha_n}\|}$  também tende para 0.

Sendo assim temos que

$$1 = \frac{\|u_{\alpha_n}\|}{\|u_{\alpha_n}\|} \leq \frac{\|u_{\alpha_n}^+\| + \|u_{\alpha_n}^-\| + \|u_{\alpha_n}^0\|}{\|u_{\alpha_n}\|} \rightarrow 0.$$

a qual é uma contradição.

Então  $(u_{\alpha_n})$  é limitada em  $X$ . Assim tomando uma subsequência se necessário, temos que  $u_{\alpha_n} \rightharpoonup u$  em  $X$ .

Denotando  $u_{\alpha_n}$  por  $u_n$  e tomando um função teste  $\varphi$  ficamos com a seguinte identidade

$$\langle I'(u_n), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} a(x) u_n \varphi dx - \int_{\Omega} g(x, u_n) \varphi dx, \quad \varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Analogamente temos que

$$\langle I'(u), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} a(x) u \varphi dx - \int_{\Omega} g(x, u) \varphi dx, \quad \varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Tomando  $\varphi = u_n - u$ , temos que:

$$\langle I'(u_n), u_n - u \rangle = \int_{\Omega} \nabla u_n [\nabla(u_n - u)] dx + \int_{\Omega} a(x) u_n (u_n - u) dx - \int_{\Omega} g(x, u_n) (u_n - u) dx.$$

Similarmente segue que

$$\langle I'(u), u_n - u \rangle = \int_{\Omega} \nabla u [\nabla(u_n - u)] dx + \int_{\Omega} a(x) (u_n - u) dx - \int_{\Omega} g(x, u) (u_n - u) dx.$$

Note que

$$\langle I'(u_n), u_n - u \rangle - \langle I'(u), u_n - u \rangle = \langle I'(u_n) - I'(u), u_n - u \rangle.$$

Neste caso temos que

$$\begin{aligned} \langle I'(u_n) - I'(u), u_n - u \rangle &= \int_{\Omega} \nabla u_n [\nabla(u_n - u)] - \nabla u [\nabla(u_n - u)] dx \\ &+ \int_{\Omega} a(x) [u_n (u_n - u) - u (u_n - u)] dx \\ &- \int_{\Omega} [g(x, u_n) - g(x, u)] (u_n - u) dx \\ &= \int_{\Omega} [\nabla(u_n - u)] (\nabla u_n - \nabla u) dx \\ &+ \int_{\Omega} a(x) (u_n - u)^2 - [g(x, u_n) - g(x, u)] (u_n - u) dx. \end{aligned}$$

Assim temos que

$$\|u_n - u\|^2 = \langle I'(u_n) - I'(u), u_n - u \rangle + \int_{\Omega} [-a(u_n - u)^2 + (g(x, u_n) - g(x, u))(u_n - u)] dx.$$

Agora, usando alguns resultados de análise funcional encontrados no apêndice desta dissertação, tais como a proposição A.6, temos que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u; \\ u_n &\longrightarrow u \text{ em } L^p(\Omega), 1 \leq p \leq 2^*; \\ u_n(x) &\longrightarrow u(x) \text{ q.t.p em } \Omega; \\ |u_n| &\leq h \text{ para alguma } h \in L^p. \end{aligned}$$

Portanto segue que  $(u_{\alpha_n}) \longrightarrow u$  em  $X$ . Adicionalmente temos que  $I'(u) = 0$  e  $I(u) > 0$ . Assim o funcional  $I$  satisfaz a condição  $(P.S.)^*$ , ou seja, mostramos que o funcional  $I$  satisfaz a condição  $(\mathbf{f}_2)$  do Lema do Linking Local na origem 1.17.

Vamos garantir que o funcional  $I$  leva conjuntos limitados em conjuntos limitados, ou seja, verificar a parte  $(\mathbf{f}_3)$  Seja  $B \subset H_0^1(\Omega)$  limitado, ou seja, consideremos que  $B_R \subset B(0, R)$  onde  $R > 0$ . Devemos mostrar que  $I(B)$  é limitado. Temos que  $B_R = \{u \in H_0^1(\Omega); \|u\| \leq R\}$ . Temos que  $I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$  é dado por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) |u|^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u) dx, u \in H_0^1(\Omega).$$

Então temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} I(u) &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) |u|^2 dx + \int_{\Omega} [C + c |u|^{\lambda+1}] dx. \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) |u|^2 dx + C |\Omega| + \|u\|_{\lambda+1}^{\lambda+1}. \end{aligned}$$

Note que como  $\lambda + 1 < 2^* = \frac{2n}{n-2}$ . Temos, utilizando a desigualdade de Hölder, (cf. Apêndice B.2) e as imersões de Sobolev, (cf. Apêndice A.3) que segue a seguinte desigualdade

$$I(u) \leq \frac{1}{2} R^2 + C |\Omega| + C R^{\lambda+1} < \infty,$$

onde  $R > 0$  é dado pelo conjunto  $B_R$ . Consequentemente, o funcional  $I$  leva conjuntos limitados em conjuntos limitados, mostrando assim a parte  $(\mathbf{f}_3)$  do Lema do Linking Local.

Verificaremos a parte  $(\mathbf{f}_4)$  do Lema do Linking Local, ou seja, vamos provar que o funcional  $I$  satisfaz:

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} I(u) = -\infty, \forall m \in \mathbb{N} \text{ com } u \in X_m^1 \oplus X^2.$$

Observe que  $E^0$  e  $X_m^1$  são espaços com dimensões finitas. Neste caso, temos que pela equivalência de normas, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|u\| \leq C \|u\|_2; u \in X_m^1 \oplus X^2,$$

onde os espaços  $X_m^1$  e  $X^2$  são definidos como sendo

$$X_m^1 = \langle e_0, e_1, \dots, e_m \rangle \quad m \in \mathbb{N}$$

e

$$X_m^2 = X^2 = E^- \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Aqui temos que  $X_m^1$  é o espaço gerado pelas  $m$  autofunções  $\varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}, \dots, \varphi_{k+m+1}$ , tal que  $\lambda_k < 0 < \lambda_{k+1}$ , ou seja, autofunções cujos autovalores associados são positivos.

Usando **(G-1)**, ou seja, usando que

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{G(x, u)}{|u|^2} = \infty \quad \text{uniformemente em } \Omega,$$

podemos concluir que

$$\frac{G(x, u)}{|u|^2} \geq C, \quad \text{para } |u| \geq L,$$

para algum  $L > 0$ .

Neste caso segue que

$$G(x, u) \geq C |u|^2 - d, \quad \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Analisando o funcional  $I$  ficamos com

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u^+\|^2 - \frac{1}{2} \|u^-\|^2 - \int_{\Omega} G(x, u) dx \quad u \in X_m^1 \oplus X^2.$$

Então seguem as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2} \|u^+\|^2 - \frac{1}{2} \|u^-\|^2 - \int_{\Omega} G(x, u) dx. \\ &\leq \frac{1}{2} \|u^+\|^2 - \frac{1}{2} \|u^-\|^2 - \int_{\Omega} (C^2 |u|^2 - d) dx. \\ &\leq \frac{1}{2} \|u^+\|^2 - \frac{1}{2} \|u^-\|^2 - C^2 \|u\|_2^2 + d |\Omega|. \end{aligned}$$

Agora utilizando a desigualdade triangular ficamos com

$$\begin{aligned} I(u) &\leq \frac{1}{2} \|u^+\|^2 - \frac{1}{2} \|u^-\|^2 - C^2 (\|u^+\|_2^2 + \|u^-\|_2^2 + \|u^0\|_2^2) + d |\Omega| \\ &\leq \frac{1}{2} \|u^+\|^2 - \frac{1}{2} \|u^-\|^2 - C^2 (\|u^+\|_2^2 + \|u^0\|_2^2) + d |\Omega| \\ &\leq \frac{1}{2} \|u^+\|^2 - \frac{1}{2} \|u^-\|^2 - C^2 \|u^+\|_2^2 - C^2 \|u^0\|_2^2 + d |\Omega|. \end{aligned}$$

Usando as imersões de Sobolev sabemos que

$$\|u\| \leq C \|u\|_2, \quad u \in X = H_0^1(\Omega),$$

para alguma constante  $C > 0$ .

Então, segue que

$$\begin{aligned} I(u) &\leq \frac{1}{2} \|u^+\|^2 - \frac{1}{2} \|u^-\|^2 - \|u^+\|^2 - \|u^0\|^2 + d |\Omega|. \\ &\leq -\frac{1}{2} \|u^+\|^2 - \frac{1}{2} \|u^-\|^2 - \|u^0\|^2 + d |\Omega|. \end{aligned}$$

Usando o fato que  $u^+, u^-, u^0$  são ortogonais em  $L^2(\Omega)$  temos que

$$I(u) \leq -\frac{1}{2} \|u\|^2 + d |\Omega|, \quad u \in X_m^1 \oplus X^2.$$

Consequentemente

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} I(u) = -\infty.$$

Assim mostramos que o funcional  $I$  satisfaz as hipóteses do Lema 1.17 garantindo assim a existência de uma solução fraca não trivial para o problema **(P)**. Isto finaliza a demonstração do Teorema 2.1

□

## Existência de uma solução não trivial para uma classe de problemas elípticos superquadráticos sob a hipótese $(Ce)^*$

---

### 3.1 Análise do Problema

No capítulo anterior garantimos a existência de uma solução fraca não trivial para o problema **(P)** utilizando a condição  $(P.S.)^*$ . Neste capítulo vamos garantir a existência de uma solução fraca não trivial para **(P)**, utilizando a condição  $(Ce)^*$ . Mais especificamente estudaremos o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = g(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\mathbf{P})$$

onde  $a \in L^p(\Omega)$  para  $p > \frac{N}{2}$ ,  $g \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ , é um domínio limitado cuja fronteira  $\partial\Omega$  é uma variedade suave. Consideramos a seguinte função  $G : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$G(x, u) = \int_0^u g(x, s) ds, \text{ com } u \in \mathbb{R}, x \in \Omega.$$

No Capítulo 2 encontramos uma solução fraca não trivial  $u$  para o problema **(P)**, sem a condição **(AR)** a qual foi substituída por um nova condição superquadrática, esta condição inclui funções que não satisfazem a condição **(AR)**. Como exemplo temos as funções  $F$  e  $G$  citadas no capítulo anterior. Tais condições superquadráticas são mais fracas que as hipóteses usuais, (cf. o Teorema 2.1). Neste capítulo vamos garantir a existência de uma solução para o problema **(P)** em um caso mais geral, sem a condição superlineares **(AR)** e sem as hipóteses **(G-3)** e **(G-4)** do Teorema 2.1 do capítulo anterior. Sob tais condições os problemas superlineares se tornam mais delicados.

Não sabemos ao certo sob as novas hipóteses se uma sequência  $(P.S.)$  ou  $(P.S.)^*$  é limitada. Porém vamos garantir que toda sequência  $(Ce)$  ou  $(Ce)^*$  é limitada. Assim

usando resultados clássicos provaremos que tal sequência converge para um ponto crítico não trivial do funcional  $f$  o qual é uma solução fraca do problema **(P)**.

A garantia de existência de uma solução não trivial para o problema **(P)** sob uma nova condição superquadrática está intimamente ligada ao fato de que o funcional energia satisfaça a condição  $(Ce)^*$ .

Consideremos as seguintes hipóteses :

**(G1)**

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{G(x, u)}{|u|^2} = +\infty \text{ uniformemente em } \Omega;$$

**(G2)**

$$\lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{G(x, u)}{|u|^2} = 0 \text{ uniformemente em } \Omega.$$

Neste momento vamos definir a seguinte função

$$\bar{G}(x, u) = \frac{u}{2}g(x, u) - G(x, u).$$

Vamos supor que a função  $\bar{G}$  satisfaça

**(G3)**

$$\begin{aligned} (i) \quad & \bar{G}(x, u) \geq a_3 |u|^\beta, \quad |u| \geq R; \\ (ii) \quad & \left| \frac{g(x, u)}{u} \right|^\sigma \leq a_4 \bar{G}(x, u), \quad |u| \geq R, \end{aligned} \tag{3-1}$$

onde  $a_3, a_4 > 0$ ,  $\sigma > \frac{N}{2} + 1$ ,  $\beta > q + 1$  com  $q = \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1}$ .

Se  $0$  é um autovalor do problema de autovalores  $-\Delta + a$  (com condição de contorno de Dirichlet) consideremos a seguinte hipótese:

**(G5)** Existe  $\delta > 0$  tal que:

$$\begin{aligned} (i) \quad & G(x, u) \geq 0, \quad \forall |u| \leq \delta, \quad x \in \Omega \text{ ou} \\ (ii) \quad & G(x, u) \leq 0, \quad \forall |u| \leq \delta, \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Se  $0 \notin \sigma(\Delta + a)$  consideraremos o Lema 2.2 o qual nos garante o resultado.

Nosso principal resultado desse capítulo é o seguinte teorema:

**Teorema 3.1** *Suponhamos que  $G$  satisfaz **(G-1)**, **(G-2)**, **(G3)**. Se  $0 \in \sigma(-\Delta + a)$  suponhamos a hipótese **(G-5)**. Então o problema **(P)** possui pelo menos uma solução fraca não trivial.*

Note que essa nova hipótese  $\overline{\mathbf{G3}}$  é mais geral do que as hipóteses omitidas  $\mathbf{(G-3)}$  e  $\mathbf{(G-4)}$  consideradas no capítulo anterior.

Neste capítulo vamos considerar a seguinte função

$$G(x, u) = \frac{1}{2} |u|^{8/3} + |u|^2 \ln(1 + |u|^2), \quad u \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega.$$

Verificaremos que a função  $G$  descrita acima satisfaz as condições  $\mathbf{(G-1)}$ ,  $\mathbf{(G-2)}$ ,  $\mathbf{(G-5)}$  e  $\overline{\mathbf{G3}}$ . Além disso, temos que esta função não satisfaz as condições  $\mathbf{(G-3)}$  e  $\mathbf{(G-4)}$  descritas no capítulo 2.

Inicialmente veja que

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{G(x, u)}{|u|^2} = \lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{|u|^{2/3}}{2} + \ln(1 + |u|^2) = +\infty \text{ uniformemente em } \Omega.$$

Adicionalmente, temos que

$$\lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{G(x, u)}{|u|^2} = \lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{|u|^{2/3}}{2} + \ln(1 + |u|^2) = 0 \text{ uniformemente em } \Omega.$$

Portanto  $G$  satisfaz as condições  $\mathbf{(G-1)}$  e  $\mathbf{(G-2)}$ .

Para mostrar que  $G$  satisfaz  $\overline{\mathbf{G3}}$  precisamos calcular a função  $\overline{G}$ ,

$$\overline{G}(x, u) = \frac{u}{2} g(x, u) - G(x, u), \quad x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Neste caso precisamos explicitar a função quem é a função  $g$ , a qual é dada por

$$g(x, u) = \frac{\partial G(x, u)}{\partial u}, \quad x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Sem perda de generalidade podemos supor  $u > 0$ . Então segue que

$$g(x, u) = \frac{\partial G(x, u)}{\partial u} = \frac{8}{6} u^{5/3} + 2u \ln(1 + u^2) + u^2 \frac{2u}{1 + u^2}.$$

Consequentemente, temos que a função  $g$  é dada por

$$g(x, u) = \frac{4}{3} u^{5/3} + 2u \left( \ln(1 + u^2) + \frac{u^2}{1 + u^2} \right), \quad x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Donde segue que  $\overline{G}$  é dada por:

$$\overline{G}(x, u) = \frac{u^{8/3}}{6} + \frac{u^4}{1 + u^2}, \quad x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Neste momento, vamos verificar que a função  $\overline{G}$  satisfaz as condições *i*) e *ii*) da hipótese  $\overline{\mathbf{G3}}$  descritas em (3.1).

Note que

$$\frac{\overline{G}(x, u)}{u^{8/3}} = \frac{1}{6} + \frac{u^4}{1+u^2} \left( \frac{1}{u^{8/3}} \right).$$

De onde segue que

$$\frac{\overline{G}(x, u)}{u^{8/3}} = \frac{1}{6} + \frac{u^4}{u^{8/3} + u^{14/3}}.$$

O que equivale a seguinte expressão

$$\frac{\overline{G}(x, u)}{u^{8/3}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{u^{2/3} + u^{-2/3}},$$

ou ainda, temos que

$$\frac{\overline{G}(x, u)}{u^{8/3}} = \frac{1}{6} + \frac{u^{2/3}}{u^{4/3} + 1},$$

Como uma consequência temos que

$$\limsup_{u \rightarrow +\infty} \frac{\overline{G}(x, u)}{u^{8/3}} = \frac{1}{6} > 0.$$

Assim segue que

$$\overline{G}(x, u) \leq \frac{1}{6} u^\beta, \quad x \in \Omega, \quad |u| \geq R$$

para alguma potência  $\beta > 8/3$ . Isto demonstra a parte *i*) da hipótese  $\overline{\mathbf{G-3}}$ .

Neste momento temos que, pela definição da função  $g$  segue que

$$\frac{g(x, u)}{u} = \frac{4}{3} u^{2/3} + 2 \left( \ln(1+u^2) + \frac{u^2}{1+u^2} \right), \quad x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Vamos definir a seguinte função

$$\xi(x, u) = \left| \frac{g(x, u)}{u} \right|^\sigma, \quad x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Equivalentemente temos que a função  $\xi$  é dada por

$$\xi(x, u) = \left| \frac{4}{3} u^{2/3} + 2 \left( \ln(1+u^2) + \frac{u^2}{1+u^2} \right) \right|^\sigma, \quad x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Note que as funções  $\ln(1+u^2)$  e  $\frac{u^2}{1+u^2}$  são limitadas no intervalo definido por  $|u| < R$ ,

onde  $R > 0$  é fixo. Consequentemente temos o seguinte limite

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{\xi(x, u)}{|u|^{2\sigma/3}} = K > 0.$$

Neste caso segue a seguinte desigualdade

$$\left| \frac{g(x, u)}{u} \right|^\sigma \geq \left( \frac{4}{3} u^{\frac{2}{3}} \right)^\sigma (K - \varepsilon), \quad x \in \Omega, \quad |u| \geq R.$$

Analogamente devemos ser capazes de provar o seguinte limite

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}(x, u)}{|u|^{8/3}} = 1/6 > 0.$$

Usando que a função  $\bar{G}$  é dada por

$$\bar{G}(x, u) = \frac{u^{8/3}}{6} + \frac{u^4}{1+u^2}.$$

segue que

$$\bar{G}(x, u) \geq \frac{u^{8/3}}{6}, \quad \text{para } |u| \leq R_1.$$

Queremos mostrar que

$$\left| \frac{g(x, u)}{u} \right|^\sigma \leq a_4 \bar{G}(x, u), \quad \text{para } |u| \geq R. \quad (3-2)$$

Tomando  $|u| \geq \max\{R, R_1\}$  temos que :

$$\left| \frac{g(x, u)}{u} \right|^\sigma \leq K u^{\frac{2\sigma}{3}}.$$

Adicionalmente temos que

$$\bar{G}(x, u) \geq \frac{u^{8/3}}{6} \quad \text{para } |u| \geq R.$$

Agora, note que

$$K u^{\frac{2\sigma}{3}} \leq \frac{u^{8/3}}{6}, \quad \text{para } |u| \geq R.$$

Assim verificamos (3-2) para

$$\frac{2\sigma}{3} \leq \frac{8}{3},$$

ou seja, para  $\sigma \leq 4$ .

Mas como  $\sigma > \frac{n}{2} + 1$  e  $4 > \frac{n}{2} + 1$ , basta tomarmos  $\sigma \leq 4$  e  $R = \max\{R, R_1\}$

Verificando que a função  $G$  satisfaz a parte *ii*) da hipótese  $\overline{(\mathbf{G-3})}$ . Portanto temos que a função  $G$  satisfaz a hipótese  $\overline{(\mathbf{G-3})}$ .

Para verificar  $(\mathbf{G-5})$  basta notarmos que 0 é um ponto de máximo ou mínimo local da função  $G$ . Adicionalmente  $G(x, 0) = 0$ ,  $G'(x, 0) = 0$  e  $G''(x, 0) > 0$  ou  $G''(x, 0) < 0$ . Então, analisado a função  $G$  notamos que existe um  $\delta > 0$  tal que

$$G(x, u) \geq 0, \quad \forall |u| \leq \delta$$

ou seja,  $G$  satisfaz a hipótese  $(\mathbf{G-5})$ . Concluimos que a função  $G$  satisfaz as hipóteses  $(\mathbf{G-1}), (\mathbf{G-2}), (\mathbf{G-5})$  e  $\overline{(\mathbf{G3})}$ .

*Prova*

## 3.2 Demonstração do Teorema 3.1

Seja  $I : E = H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}(Q(u^+) - Q(u^-)) - \int_{\Omega} G(x, u) dx,$$

com  $u^- \in E^-$ ,  $u^+ \in E^+$ , onde  $E^-$  e  $E^+$  são os respectivos espaços gerados pelos autovetores associados a seus autovalores negativos e positivos do seguinte problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\mathbf{PA})$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$  é um domínio aberto, suave e limitado,  $a \in L^p(\Omega)$  com  $p > N/2$ . O funcional  $Q$  é o mesmo estudado detalhadamente nas preliminares da dissertação.

Na prova desse teorema vamos usar o Teorema Local de Linking sob a condição  $(Ce)^*$ , citado no Lema 1.17, (cf Seção 1.3.2) das preliminares desta dissertação. Com este intuito, verificaremos que o funcional  $I$  satisfaz as hipóteses,

- (f<sub>1</sub>)  $I$  possui um Linking Local na origem;
- (f<sub>2</sub>)  $I$  satisfaz a condição  $(Ce)^*$ ; (cf. Definição 1.15);
- (f<sub>3</sub>)  $I$  leva conjuntos limitados em conjuntos limitados;
- (f<sub>4</sub>)  $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} I(u) = -\infty \quad \text{com } u \in X_m^1 \oplus X^2.$$

Consideremos o caso em que 0 é um autovalor do problema  $-\Delta + a$  sob o item *ii*), ou seja,

$$(ii) \quad G(x, u) \leq 0, \quad |u| \leq \delta, \quad x \in \Omega.$$

É importante salientar que caso escolhêssemos o item  $i$ ) da hipótese **(G-5)**, a diferença seria a escolha dos subespaços  $X^1$  e  $X^2$ , (cf. Observação 2.5). Note que, usando **(G-3)** temos que

$$|g(x, u)|^\sigma \leq a_4 |u|^\sigma \overline{G}(x, u), \quad u \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega.$$

Equivalentemente temos que

$$|g(x, u)|^\sigma \leq a_4 |u|^\sigma \left( \frac{u}{2} g(x, u) - G(x, u) \right).$$

Utilizando a hipótese **(G-1)** segue que existe  $M > 0$  tal que

$$\frac{G(x, u)}{|u|^2} \geq M, \quad \text{sempre que } |u| \geq R' = R'(M).$$

Donde temos a seguinte estimativa

$$|g(x, u)|^\sigma \leq u^\sigma a_4 \left( \frac{u}{2} g(x, u) - M |u|^2 \right).$$

Suponhamos, sem perda de generalidade que  $u > 0$ . Tome

$$|u| \geq R_1 = \text{máx}\{R, R'\},$$

onde  $R > 0$  é dado pela hipótese **(G-3)**. Fazendo algumas manipulações na desigualdade acima temos que

$$|g(x, u)|^\sigma \leq C |u|^{\sigma+1} |g(x, u)|,$$

para alguma constante  $C > 0$ .

Equivalentemente temos que

$$|g(x, u)|^{\sigma-1} \leq |u|^{\sigma+1} C, \quad \text{com } |u| \geq R_1 = \text{máx}\{R, R'\}.$$

Consequentemente temos a seguinte estimativa

$$|g(x, u)| \leq |u|^{\frac{\sigma+1}{\sigma-1}} C \quad \text{com } |u| \geq R_1, \quad x \in \Omega.$$

Neste caso, segue que existe uma constante  $C_0 > 0$  tal que

$$|g(x, u)| \leq C |u|^q + C_0, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega.$$

Donde concluímos que existem constantes  $C_1$  e  $C_2$  tais que:

$$|g(x, u)| \leq C_1 + C_2 |u|^q, \quad x \in \Omega; \quad u \in \mathbb{R}.$$

Adicionalmente podemos provar que

$$|G(x, u)| \leq \int_0^u |g(x, s)| ds. \quad (3-3)$$

$$\leq C_1|u| + C_2|u|^{q+1}; \quad x \in \Omega; \quad u \in \mathbb{R}. \quad (3-4)$$

Portanto temos que

$$|G(x, u)| \leq C_1|u| + C_2|u|^{q+1}.$$

Por outro lado, pela hipótese **(G-2)** segue que existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$G(x, u) \leq \varepsilon|u|^2, \quad |u| \leq \delta; \quad x \in \Omega$$

Logo temos que existe  $C_\varepsilon > 0$  tal que

$$|G(x, u)| \leq \varepsilon|u|^2 + C_\varepsilon|u|^{q+1}, \quad x \in \Omega; \quad u \in \mathbb{R}.$$

Agora, seja  $X = E$ ,  $X^1 = E^+ \oplus E^0$ ,  $X^2 = E^-$  onde  $E^0 = \ker(-\Delta + a)$ . Aqui consideramos  $E^+$  o autoespaço gerado pelas autofunções do problema de autovalores **(PA)** associado à autovalores positivos,  $E^-$  é o autoespaço gerado pelas autofunções onde os autovalores respectivos são negativos e  $E^0$  é o autoespaço gerado pelo autovalor  $\lambda = 0$ .

**Observação 3.2** *Note que, caso considerássemos o item*

$$(i) \quad G(x, u) \geq 0, \quad |u| \leq \delta, \quad x \in \Omega.$$

*da hipótese (G-5), a escolha desses subespaços  $X^1$  e  $X^2$  seria alterada da seguinte forma,  $X^1$  seria dado por  $X^1 = E^- \oplus E^0$  e  $X^2$  por  $X^2 = E^+$ . A prova da geometria neste caso é similar ao que fazemos considerando o item (ii) da hipótese (G-5).*

Consideremos  $\varphi_n$  as autofunções do problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Vamos definir os seguintes espaços:

$$\begin{aligned} X_n^1 &= \langle \varphi_{j+1}, \varphi_{j+2}, \dots, \varphi_{j+n+1} \rangle, \quad n \in \mathbb{N}. \\ X_n^2 &= (X_n^1)^\perp, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

onde  $\lambda_{j-1} < 0 < \lambda_j$ . Tomando  $u \in X^2$ , como  $X^2 = E^-$ , segue que  $u^+ \equiv 0$ .  
Analisando o funcional  $I$  temos que

$$I(u) = -\frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\Omega} G(x, u)dx, \quad u \in X^2.$$

Por outro lado, temos que

$$|G(x, u)| \leq \varepsilon |u|^2 + C_{\varepsilon} |u|^{q+1}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Podemos provar que

$$I(u) \leq -\frac{1}{2}\|u\|^2 + \varepsilon \int_{\Omega} |u|^2 + C_{\varepsilon} \int_{\Omega} |u|^{q+1}, \quad u \in X^2.$$

Como temos que  $q+1 < 2^*$  segue pelas imersões contínuas de Sobolev que existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$I(u) \leq -\frac{1}{2}\|u\|^2 + \varepsilon C \|u\|^2 + C \|u\|^{q+1}, \quad u \in X^2.$$

Assim, podemos concluir que

$$I(u) \leq \|u\|^2 \left( -\frac{1}{2} + \varepsilon C + C \|u\|^{q-1} \right), \quad u \in X^2.$$

Majorando o termo entre parênteses, digamos por  $-\frac{1}{4}$  e tomando  $K = \varepsilon C$  ficamos com a seguinte estimativa

$$\|u\| \leq \left( \frac{1-4k}{4C} \right)^{\frac{1}{q-1}}.$$

Sendo assim basta tomar  $r_1 = \left( \frac{1-4k}{4C} \right)^{\frac{1}{q-1}}$  que obtemos

$$I(u) \leq 0, \quad \|u\| \leq r_1, \quad u \in X^2.$$

Demonstrando assim o item *i*) da hipótese  $(\mathbf{f}_1)$  do Lema de Linking Local 1.17.

Neste momento, vamos verificar o item *ii*) da hipótese  $(\mathbf{f}_1)$ .

Temos que  $X^1 = E^+ \oplus E^0$ . Vamos decompor  $X^1$  em  $V \oplus W$ , onde  $V = \ker(-\Delta + a)$  e  $W = (X^2 + V)^{\perp}$ . Considere  $u \in X^1$ , tal que  $u = v + w$ , com  $v \in V$ ,  $w \in W$ . Usando que  $V$  possui dimensão finita, temos que existe  $C > 0$  tal que

$$\|v\|_{\infty} \leq C \|v\|, \quad v \in V.$$

Suponhamos que  $\|u\| \leq \frac{\lambda}{2C}$ . Vamos dividir  $\Omega$  em dois subespaços definidos por

$$\Omega_1 = \left\{ x \in \Omega; |w(x)| \leq \frac{\delta}{2} \right\}, \quad \Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1.$$

Tomando  $x \in \Omega_1$  temos que  $|w(x)| \leq \frac{\delta}{2}$  o que implica na seguinte desigualdade

$$|u(x)| \leq |v(x)| + \frac{\delta}{2} \quad (3-5)$$

Por outro lado, como para  $v \in V$  temos que

$$\|v\|_\infty \leq C\|v\| \text{ e } \|v\| \leq C\|u\|_{L^1}.$$

Então seguem as seguintes estimativas

$$|v(x)| \leq \|v\|_\infty \leq C\|v\|, \quad v \in V.$$

Porém, como temos que  $\|u\| = \|v + w\|$  então  $\|v\| \leq \|u\|$ . Consequentemente  $\|v\| \leq \frac{\lambda}{2C}$ .

Donde concluímos que

$$C\|v\| \leq \frac{\lambda}{2}, \text{ para } v \in V.$$

Portanto, usando (3-5) segue que

$$|u(x)| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \quad x \in \Omega_1,$$

ou seja  $|u(x)| \leq \delta$ . Como supomos **(G-5) ii)** temos que

$$\int_{\Omega_1} G(x, u) dx \leq 0.$$

Adicionalmente, tomando  $x \in \Omega_2$ , segue que

$$|w(x)| > \frac{\delta}{2} \Rightarrow \frac{\delta}{2} + |w(x)| < 2|w(x)|.$$

Assim vemos novamente por (3-5) que

$$|u(x)| \leq \frac{\delta}{2} + |w(x)| \leq 2|w(x)|.$$

Portanto temos que

$$|u(x)| \leq 2|w(x)|, \quad x \in \Omega_2.$$

Note que

$$|G(x, u)| \leq \varepsilon u^2 + |u|^{q+1} C_\varepsilon, \quad \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Em particular, para  $x \in \Omega_2$  ficamos com seguinte estimativa

$$|G(x, u)| \leq 4\varepsilon w^2 + 2^{q+1} C_\varepsilon |w|^{q+1}, \quad x \in \Omega_2, \quad u \in X^1 = E^0 \oplus E^+,$$

onde  $\|u\| \leq \frac{\delta}{2C}$ .

Donde temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} G(x, u) dx &\leq 4\varepsilon \int_{\Omega_2} w^2 dx + 2^{q+1} C_\varepsilon \int_{\Omega_2} |w|^{q+1} dx. \\ &\leq 4\varepsilon \|w\|_{L^2}^2 + 2^{q+1} C_\varepsilon \|w\|_{L^{q+1}}^{q+1}. \end{aligned}$$

Pelas imersões de Sobolev, temos que existe uma constante  $C > 0$ , tal que

$$\int_{\Omega_2} G(x, u) dx \leq \varepsilon C^2 \|w\|^2 + 2^{q+1} C_\varepsilon C^{q+1} \|w\|^{q+1}.$$

Analisando o funcional  $I$  ficamos com as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2} \|w\|^2 - \int_{\Omega_1} G(x, u) dx - \int_{\Omega_2} G(x, u) dx. \\ &\geq \frac{1}{2} \|w\|^2 - 4\varepsilon C^2 \|w\|^2 - 2^{q+1} C_\varepsilon C^{q+1} \|w\|^{q+1}. \end{aligned}$$

Portanto segue que

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \|w\|^2 - 4\varepsilon C^2 \|w\|^2 - 2^{q+1} C_\varepsilon C^{q+1} \|w\|^{q+1}.$$

Equivalentemente concluímos que

$$I(u) \geq \|w\|^2 \left( \frac{1}{2} - 4\varepsilon C^2 - 2^{q+1} C_\varepsilon C^{q+1} \|w\|^{q-1} \right).$$

Majorando o termo da direita da desigualdade e analisando como foi feito anteriormente concluímos que

$$I(u) \geq 0, \quad u \in X^1, \quad \|u\| \leq r_2.$$

Assim tomando  $r = \min \left\{ r_1, r_2, \frac{\lambda}{2C} \right\}$ , concluímos a demonstração da hipótese **(f<sub>1</sub>)** do Lema 1.17.

Neste momento vamos verificar que o funcional  $I$  satisfaz a hipótese **(f<sub>2</sub>)** do Lema de Linking Local 1.17, ou seja, vamos verificar que  $I$  satisfaz a condição  $(Ce)^*$ .

Vamos proceder de forma análoga ao que foi feito no capítulo anterior. Considere uma sequência  $(u_{\alpha_n})$ , com  $(\alpha_n)$  uma sequência admissível,  $(u_{\alpha_n}) \in X_{\alpha_n}$  tal que

$$C = \sup_n |I(u_{\alpha_n})| < \infty$$

e

$$(1 + \|u_{\alpha_n}\|) \|I'(u_{\alpha_n})\| \rightarrow 0.$$

Note que existe  $C > 0$  tal que:

$$\left| I(u_{\alpha_n}) - \frac{\langle I'(u_{\alpha_n}), (u_{\alpha_n}) \rangle}{2} \right| \leq C.$$

Por outro lado, temos que o lado esquerdo da desigualdade acima é igual a

$$\int_{\Omega} \bar{G}(x, u_{\alpha_n}) dx.$$

Logo segue que

$$\int_{\Omega} \bar{G}(x, u_{\alpha_n}) dx \leq C,$$

para alguma constante  $C > 0$ .

Agora consideremos o seguinte subconjunto de  $\Omega$

$$\Omega_R = \{x \in \Omega; |u(x)| > R \text{ para algum } R > 0\}.$$

Utilizando a hipótese  $(\bar{\mathbf{G3}})$  do Teorema 3.1 e a desigualdade anterior temos que

$$\int_{\Omega_R} a_3 |u_{\alpha_n}|^{\beta} dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_R} \overline{G(x, u_{\alpha_n})} dx \leq C.$$

Além disso, segue da hipótese  $(\bar{\mathbf{G3}})$  que  $\sigma > \frac{N}{2} + 1$ ,  $\beta > q + 1$ , onde  $q = \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1}$ .

Portanto, usando que

$$\begin{cases} \sigma + 1 > \frac{N+4}{2} > 0, \\ \sigma - 1 > \frac{N}{2} > 0, \end{cases} \quad (3-6)$$

podemos provar que

$$q = \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} > \frac{N + 4}{N}.$$

Consequentemente temos que

$$\beta = q + 1 > 2 + \frac{4}{n} > 2.$$

Logo temos que

$$\int_{\Omega_R} a_3 |u_{\alpha_n}|^2 dx + \int_{\Omega|\Omega_R} \bar{G}(x, u_{\alpha_n}) dx \leq C.$$

Neste caso temos a seguinte desigualdade

$$\int_{\Omega_R} |u_{\alpha_n}|^2 dx \leq C_R,$$

para alguma constante  $C_R > 0$ . Assim segue que

$$\begin{aligned} \|u_{\alpha_n}\|_2^2 &= \int_{\Omega_R} |u_{\alpha_n}|^2 dx + \int_{\Omega|\Omega_R} |u_{\alpha_n}|^2 dx \\ &\leq C_R, \end{aligned} \quad (3-7)$$

Agora suponhamos por absurdo que

$$\|u_{\alpha_n}\| \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (3-8)$$

Denotando  $u_{\alpha_n} = u_n$  e tomando  $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja, temos que  $\|v_n\| = 1$ .

Além disso, temos que

$$|v_n|_s \leq C_s, \quad s \in [1, 2^*].$$

Usando (3-7), temos que segue as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} \|v_n\|_2^2 &= \frac{1}{\|u_n\|^2} \int_{\Omega_R} |u_{\alpha_n}|^2 dx. \\ &\leq \frac{C}{\|u_n\|^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Agora, por (3-8),

$$\int_{\Omega} |v_n|^2 dx \rightarrow 0. \quad (3-9)$$

Note que, utilizando a Desigualdade de Interpolação, ver B.7, para  $s \in [1, 2^*]$ , onde

$$\frac{1}{s} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{t},$$

$$1 \leq t \leq s \leq 2 \text{ ou } 2 \leq s \leq t \leq \infty,$$

concluimos que

$$\int_{\Omega} |v_n|^s dx \leq \left( \int_{\Omega} |v_n|^t dx \right)^{\frac{(1-\theta)s}{t}} \left( \int_{\Omega} |v_n|^2 dx \right)^{\frac{\theta s}{2}}.$$

Usando a convergência (3-9) e o fato de que  $\left(\int_{\Omega} |v_n|^t\right)^{\frac{(1-\theta)s}{t}}$  é limitada, temos que

$$\|v_n\|_s^s \rightarrow 0,$$

para cada  $s \in [2, 2^*]$ .

Por outro lado, desde que  $\dim \ker(-\Delta + a) < \infty$ , temos que:

$$\langle I'(u_n), (u_n^+ - u_n^-) \rangle = \|u_n^+ + u_n^-\| - \int_{\Omega} g(x, u_n)(u_n^+ - u_n^-) dx.$$

Neste momento, observe que  $\|u_n\| = Q(u_n^+) + Q(u_n^0) - Q(u_n^-)$ , onde o funcional  $Q$  é definido por

$$Q(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + a(x)u^2 dx$$

estudado detalhadamente na Seção 1.2 do Capítulo 1.

Este fato implica que

$$\langle I'(u_n), (u_n^+ - u_n^-) \rangle = \|u_n\|^2 - \|u_n^0\|^2 - \int_{\Omega} g(x, u_n)(u_n^+ - u_n^-) dx.$$

Manipulando o termo  $\|u_n\|^2$  de maneira conveniente, ficamos com a seguinte identidade:

$$\frac{\langle I'(u_n), (u_n^+ - u_n^-) \rangle}{\|u_n\|^2} = 1 - \frac{\int_{\Omega} g(x, u_n)(u_n^+ - u_n^-) dx}{\|u_n\|^2} - \frac{\|u_n^0\|^2}{\|u_n\|^2}.$$

Utilizando as imersões contínuas e compactas de Sobolev, temos que existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\frac{\langle I'(u_n), (u_n^+ - u_n^-) \rangle}{\|u_n\|^2} + C \frac{\|u_n^0\|_2^2}{\|u_n\|^2} = 1 - \frac{\int_{\Omega} g(x, u_n)(u_n^+ - u_n^-) dx}{\|u_n\|^2}.$$

Donde concluímos que

$$\frac{\langle I'(u_n), (u_n^+ - u_n^-) \rangle}{\|u_n\|^2} + C \|v_n^0\|_2^2 = 1 - \frac{\int_{\Omega} g(x, u_n)(u_n^+ - u_n^-) dx}{\|u_n\|^2}.$$

Portanto segue que

$$1 - \frac{\int_{\Omega} g(x, u_n)(u_n^+ - u_n^-) dx}{\|u_n\|^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Agora analisando apenas a integral acima temos que

$$\left| \frac{\int_{\Omega} g(x, u_n)(u_n^+ - u_n^-) dx}{\|u_n\|^2} \right| \leq \frac{\int_{\Omega} |g(x, u_n)| |u_n^+ - u_n^-| dx}{\|u_n\|^2}.$$

Note que a integração anterior pode ser reescrita como

$$\left| \frac{\int_{\Omega} g(x, u_n)(u_n^+ - u_n^-) dx}{\|u_n\|^2} \right| \leq \frac{\int_{\Omega} |g(x, u_n)| |v_n|^2 dx}{|u_n|}.$$

Agora, utilizando a desigualdade de Hölder no lado esquerdo da desigualdade acima, ficamos com a seguinte estimativa

$$\left| \frac{\int_{\Omega} g(x, u_n)(u_n^+ - u_n^-) dx}{\|u_n\|^2} \right| \leq C \left( \int_{\Omega} \left| \frac{g(x, u_n)}{u_n} \right|^{\sigma} dx \right)^{1/\sigma} \left( \int_{\Omega} |v_n|^{2\sigma'} dx \right)^{1/\sigma'},$$

onde  $2\sigma' < 2^*$ .

Pelo item *ii*) da hipótese 3.1, ou seja,

$$a_4 \bar{G}(x, u_n) \geq \left| \frac{g(x, u_n)}{u_n} \right|^{\sigma},$$

segue que

$$\left| \frac{\int_{\Omega} g(x, u_n)(u_n^+ - u_n^-) dx}{\|u_n\|^2} \right| \leq C \left( \int_{\Omega} \bar{G}(x, u_n) dx \right) \left( \int_{\Omega} |v_n|^{2\sigma'} dx \right)^{1/\sigma'}.$$

Adicionalmente temos que

$$\int_{\Omega} |v_n|^{2\sigma'} dx \rightarrow 0.$$

Além disso

$$\left| \int_{\Omega} \bar{G}(x, u_n) dx \right| \leq C,$$

para algum  $C > 0$ .

Portanto, temos que

$$\left| \frac{\int_{\Omega} g(x, u_n)(u_n^+ - u_n^-) dx}{\|u_n\|^2} \right| \rightarrow 0.$$

Neste caso concluímos que  $1 = 0$  a qual é uma contradição. Logo  $u_{\alpha_n}$  é limitada em  $H_0^1(\Omega)$ . Tomando uma subsequência se necessário, temos que  $u_{\alpha_n} \rightharpoonup u$  em  $X$ . Agora, analisando como foi feito no capítulo anterior (cf, Proposição A.6 listada no apêndice A), concluímos que  $u_{\alpha_n} \rightarrow u$  em  $X$ . Portanto o funcional  $I$  satisfaz a condição  $(Ce)^*$ , demonstrando assim a hipótese parte  $(\mathbf{f}_2)$  do Lema do Linking Local na origem 1.17.

Para mostrar a hipótese  $(\mathbf{f}_3)$  do Lema do Linking Local 1.17, observe que por um lado temos

$$|g(x, u)| \leq C + C |u|^q, \quad u \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega.$$

Por outro lado, como  $\int_0^u g(x, s) ds = G(x, u)$ , segue que

$$|G(x, u)| = \left| \int_0^1 g(x, us) u ds \right|, \quad u \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega.$$

Donde seguem as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} |G(x, u)| &\leq \int_0^1 |g(x, us)| |u| ds. \\ &\leq \int_0^1 (C + C |u|^q) |u| ds. \\ &\leq C + C |u|^{q+1}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Analisando o funcional  $I$ , ficamos com

$$|I(u)| \leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + \int_{\Omega} |G(x, u)| dx.$$

Portanto podemos concluir que

$$\begin{aligned} |I(u)| &\leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + \int_{\Omega} C + C |u|^{q+1} dx. \\ &\leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + C|\Omega| + C \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx. \end{aligned}$$

Equivalentemente, temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} |I(u)| &\leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + C \|u\|^{q+1} + C. \\ &\leq \frac{R^2}{2} + CR^{q+1} + C, \quad u \in H_0^1(\Omega); \|u\| \leq R. \end{aligned}$$

Como  $(q+1) < 2^*$ , concluímos que  $I$  leva conjuntos limitados em conjuntos limitados. Assim mostramos o item **(f<sub>3</sub>)** do Lema de Linking Local 1.17.

Finalmente vamos garantir que o funcional  $I$  satisfaz a hipótese **(f<sub>4</sub>)** do Lema de Linking Local 1.17, ou seja, devemos provar que

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} I(u) = -\infty, \quad \text{com } u \in X_m^1 \oplus X^2, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Note que por **(G-1)**, temos que existem  $M, R > 0$  tais que

$$G(x, u) \geq M|u|^2, \quad |u| \geq R, \quad x \in \Omega.$$

Seja  $u \in X_m^1 \oplus X^2$ , onde estes espaços  $X_m^1$  e  $X^2$  foram definidos anteriormente durante a demonstração da hipótese **(f<sub>1</sub>)** do Lema de Linking Local.

Neste caso somos capazes de provar as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - \int_{\Omega} G(x, u) dx. \\ &\leq \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - M \int_{\Omega} |u|^2 dx + C_M, \quad u \in X_m^1 \oplus X^2. \end{aligned}$$

Donde podemos concluir que

$$\begin{aligned} I(u) &\leq \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - M \left( \int_{\Omega} |u^+|^2 dx + \int_{\Omega} |u^0|^2 dx \right). \\ &\leq \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - M\|u^+\|_2^2 - M\|u^0\|_2^2 + C. \end{aligned}$$

Aqui, utilizamos que  $E^-$  e  $E^+$  são ortogonais em  $L^2(\Omega)$ .

Agora, pelas imersões de Sobolev temos que existe  $C > 0$  tal que

$$\begin{aligned} I(u) &\leq \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - MC\|u^+\|^2 - MC\|u^0\|^2. \\ &\leq \frac{1}{2}\|u^+\|^2 \left( 1 - \frac{MC}{2} \right) - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - MC\|u^0\|^2 + C. \end{aligned}$$

Donde concluimos que

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} I(u) = -\infty, \quad u \in X_m^1 \oplus X^2.$$

Isto demonstra a parte **(f<sub>4</sub>)** do Lema de Linking 1.17. Então garantimos a existência de uma solução não trivial para o problema **(P)**. Mais especificamente, o problema **(P)** possui uma solução fraca  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que  $I(u) > 0$  e  $I'(u) = 0$ .

□

## Resultados de Análise Funcional

---

### A.1 Imersões de Sobolev

#### A.1.1 Espaços de Sobolev

Sejam  $\Omega$  um domínio limitado,  $1 \leq p \leq \infty$  e  $k \geq 0$  um inteiro. Definimos o espaço de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  como sendo o conjunto de todas as funções  $u \in L^p(\Omega)$  tais que  $D^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall 0 \leq |\alpha| \leq k$ , onde  $\alpha$  é um multi-índice e  $D^\alpha u$  denota a derivada no sentido fraco. Como  $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ , estamos assumindo que todas as derivadas fracas de ordem menor ou igual a  $k$  existem. Uma outra observação importante é que valem as seguintes inclusões

$$C_0^\infty(\Omega) \subseteq W^{k,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega).$$

Podemos representar o Espaço de Sobolev pelo seguinte conjunto:

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : u \in L^p(\Omega) \text{ e } D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall 0 \leq |\alpha| \leq k \right\}.$$

Observe que se  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  então  $u \in L^p(\Omega)$ , de modo que toda função de  $W^{k,p}(\Omega)$  está em  $L_{loc}^1(\Omega)$ .

Consideremos também o seguinte conjunto

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}}.$$

Em outras palavras,  $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$  se, e somente se, existe uma sequência  $\{u_n\}$  em  $C_0^\infty(\Omega)$  tal que  $u_n \rightarrow u$  em  $W_0^{k,p}(\Omega)$ .

Na dissertação trabalhamos com os espaços de Sobolev tomando  $k = 1$  e  $p = 2$ , ou seja, com os espaços

$$W^{1,2}(\Omega) \text{ e } W_0^{1,2}(\Omega)$$

os quais são espaços de Hilbert. E denotaremos  $W_0^{1,2}(\Omega)$  por  $H_0^1(\Omega)$ .

## A.1.2 Imersões Contínuas e Compactas

Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais normado e consideremos as seguintes definições:

### Definição A.1 (Imersão Contínua ( $U \hookrightarrow V$ ))

Dizemos que a inclusão  $U \subset V$  é uma imersão contínua se a aplicação inclusão  $I : U \rightarrow V$  é contínua, ou seja,  $U$  está imerso continuamente em  $V$  se existe uma constante  $C$  tal que

$$\|u\|_V \leq C\|u\|_U \quad \forall u \in U.$$

### Definição A.2 (Imersão Compacta ( $U \xrightarrow{cpt.} V$ ))

Se a aplicação inclusão além de contínua ela for compacta, dizemos que a imersão  $U \hookrightarrow V$  é compacta, ou seja, sequências limitadas em  $U$  possuem subsequências convergentes em  $V$ .

Agora vamos enunciar os Teoremas das Imersões Contínuas e Compactas de Sobolev

**Teorema A.3 (Imersões de  $W_0^{k,p}$ )** Sejam  $\Omega$  um domínio limitado em  $\mathbb{R}^N$  com o bordo suave,  $k \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq p < \infty$ . Então valem as seguintes imersões

1. se  $kp < N$ , então  $W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ , para todo  $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-kp}$ ;
2. se  $kp = N$ , então  $W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ , para todo  $1 \leq q < \infty$ ;
3. se  $kp > N$ , então  $W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-\lceil \frac{N}{p} \rceil - 1, \alpha}(\overline{\Omega})$ , onde

$$\alpha = \begin{cases} \lceil \frac{N}{p} \rceil + 1 - \frac{N}{p}, & \text{se } \frac{N}{p} \notin \mathbb{Z}; \\ \text{qualquer número entre } (0, 1), & \text{se } \frac{N}{p} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

e  $\lceil \frac{N}{p} \rceil$  denota o maior inteiro menor do que  $\frac{N}{p}$ .

**Teorema A.4 (Imersões compactas de  $W_0^{1,p}$ )** Seja  $\Omega$  um domínio limitado em  $\mathbb{R}^N$  com o bordo suave, então as seguintes imersões são compactas

1. se  $1 \leq p < N$ , então  $W_0^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{cpt.} L^q(\Omega)$ , para todo  $1 \leq q < \frac{Np}{N-p}$ ;
2. se  $p = N$ , então  $W_0^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{cpt.} L^q(\Omega)$ , para todo  $1 \leq q < \infty$ ;
3. se  $p > N$ , então  $W_0^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{cpt.} C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ , para todo  $0 < \alpha < 1 - \frac{N}{p}$ .

**Proposição A.5 (Desigualdade de Poincaré)** Suponha que  $1 \leq p < \infty$  e  $\Omega$  um domínio aberto e limitado de  $\mathbb{R}^N$ . Então existe uma constante  $C$  (dependendo de  $\Omega$  e  $p$ ) tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular, a expressão  $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$  é a norma a qual é equivalente a norma  $\|u\|_{W^{1,p}}$ .

Em  $H_0^1(\Omega)$  a expressão  $\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$  é um produto escalar que induz a norma  $\|\nabla u\|_{L^2}$  a qual é equivalente a norma  $\|u\|_{H^1}$ .

A desigualdade de Poincaré implica que as normas

$$\|u\|_{H_0^1} = \left( \int_{\Omega} |u|^2 + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2} \quad e \quad \|u\| = \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{1/2}$$

são equivalentes em  $H_0^1(\Omega)$ .

Agora segue um resultado de convergência fraca de suma importância no decorrer da dissertação, o qual garante que toda sequência limitada em um espaço de Banach reflexivo admite sequência convergindo fraco.

**Proposição A.6** *Considere  $(x_n)$  uma sequência em  $X = H_0^1(\Omega)$ . Então temos as seguintes implicações*

- i  $x_n \rightharpoonup u$  em  $H_0^1(\Omega) \Leftrightarrow \langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \forall f \in X^*$ .
- ii Se  $x_n \rightarrow u$  então  $x_n \rightharpoonup u$ .
- iii Se  $x_n \rightharpoonup u$  em  $H_0^1(\Omega)$  então  $(\|x_n\|)$  é limitada e  $\|x_n\| \leq \liminf \|x_n\|$ .
- iv Se  $x_n \rightharpoonup u$  em  $H_0^1(\Omega)$  e  $f_n \rightarrow f$  então  $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ .

A demonstração dessa proposição é encontrada no Livro do Haim Brezis, [4].

## A.2 Resultados de Teoria Espectral

Seja  $X = (X, \|\cdot\|)$  um espaço normado sobre  $\mathbb{R}$ . Consideremos as seguintes definições:

**Definição A.7 (Espaço de Banach)**

Se  $X$  é completo segundo a norma  $\|\cdot\|$ , ou seja, dada uma sequência de Cauchy  $(x_n) \subseteq X$ ,  $\exists x \in X$  tal que  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ , dizemos que  $X$  é um espaço de Banach.

**Definição A.8 (Operador Limitado)**

Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços de Banach, então  $T : X \rightarrow Y$  é dito limitado se

$$\|T\| = \sup_{x \in X} \{|Tx| < \infty; \|x\| \leq 1\}.$$

**Observação A.9** *Uma aplicação linear  $T$  é limitada se, e somente se, é contínua.*

**Definição A.10 (Espaço dos Operadores Lineares  $\mathfrak{L}(X, Y)$ )**

O espaço dos operadores lineares é dado por

$$\mathfrak{L}(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y ; T \text{ Linear e Contínuo}\}.$$

**Observação A.11** Se  $X = Y$  então  $\mathfrak{L}(X, Y) = \mathfrak{L}(X)$ .

**Definição A.12 (Auto-Valor(Valor Próprio))**

$\lambda \in \mathbb{R}$  é um **autovalor** de  $T$  se  $\lambda \notin \sigma(T)$ , ou seja, o operador  $T - \lambda I$  não é injetivo. Se  $\lambda$  é um autovalor de  $T$ , então denotamos  $X_\lambda$  o subespaço de todos os  $x \in X$  tais que  $Tx = \lambda x$ .

**Definição A.13 (Espectro)**

$\lambda \in \mathbb{R}$  pertence ao **espectro** de  $T$ , ou seja,  $\lambda \in \sigma(T)$ , se o operador  $T - \lambda I$  é invertível (bijetivo com inversa contínua.)

**Observação A.14** Se o espaço  $X$  tiver dimensão finita, então  $\sigma(T)$  coincide com o conjunto de todos os autovalores de  $T$

**Definição A.15 Operador Auto Adjunto** Seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $T \in \mathfrak{L}(H)$ . Um operador  $T \in \mathfrak{L}(H)$  é dito **Auto Adjunto** se  $T = T^*$ , ou seja,

$$(Tu, v) = (u, Tv) \quad \forall u, v \in H.$$

Este teorema que segue é um resultado fundamental. Ele afirma que cada operador compacto auto-adjunto pode ser diagonalizável de uma forma apropriada. É conhecido Teorema Espectral.

**Teorema A.16 (Teorema Espectral)**

Seja  $H$  um espaço de Hilbert separável e  $T$  um operador compacto auto-adjunto. Então existe uma base de Hilbert formado por autovetores de  $T$ .

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em Brezis [4].

## Resultados de Medida e Integração

**Teorema B.1 (Teorema de Fubini)** *Sejam  $A \subset \mathbb{R}^M$  e  $B \subset \mathbb{R}^P$ , com  $M + P = N$  e  $I = A \times B \subseteq \mathbb{R}^N$ . Denotemos um ponto  $(x, y) \in I$  de tal forma que  $x \in A$  e  $y \in B$ .*

*Consideremos uma função  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em  $I = A \times B$ , então temos que*

$$\int_{I=A \times B} f \, dx = \int_A \left[ \int_B f(x, y) \, dy \right] dx = \int_B \left[ \int_A f(x, y) \, dx \right] dy.$$

**Teorema B.2 (Desigualdade de Hölder)** *Sejam  $f \in L^p(\Omega)$  e  $g \in L^q(\Omega)$ , com  $1 \leq p \leq \infty$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então  $fg \in L^1(\Omega)$  e*

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

**Observação B.3 (Desigualdade de Hölder Generalizada)** *Sejam  $f_1, f_2, \dots, f_k$  funções tais que  $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ ,  $1 \leq i \leq k$ , onde  $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1$ . Então o produto  $f = f_1 f_2 \dots f_k$  está em  $L^p(\Omega)$  e vale*

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \dots \|f_k\|_{p_k}. \quad (\text{B-1})$$

**Teorema B.4 (Teorema da convergência dominada de Lebesgue)** *Considere  $(u_n)$  um sequência de funções em  $L^p(\Omega)$  que satisfaz*

1.  $u_n(x) \rightarrow u(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ .
  2. Existe uma função  $h \in L^p$  tal que para todo  $n$ ,  $|u_n(x)| \leq h(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ .
- Então  $u \in L^p$  e  $\|u_n - u\|_{L^p} \rightarrow 0$ .

**Teorema B.5 (Recíproca do Teorema da convergência dominada de Lebesgue)**

*Sejam  $(u_n)$  um sequência em  $L^p(\Omega)$  e  $u \in L^p(\Omega)$ , tal que  $\|u_n - u\|_{L^p} \rightarrow 0$ . Então existem uma subsequência  $(u_{n_k})$  de  $(u_n)$  e uma função  $h \in L^p(\Omega)$  tal que*

$$\begin{aligned} (u_{n_k})(x) &\longrightarrow u(x) \text{ q.t.p em } \Omega, \\ |(u_{n_k})(x)| &\leq h(x) \text{ q.t.p em } \Omega. \end{aligned}$$

**Lema B.6 (Lema de Fatou)** *Considere  $(f_n)$  um sequência de funções mensuráveis não negativas em  $\Omega$ , então*

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n.$$

**Teorema B.7 (Teorema da Interpolação para normas  $L^p$ )** *Considere  $r, s, t \in \mathbb{R}$  tais que  $1 \leq s \leq r \leq t \leq \infty$  e  $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{(1-\theta)}{t}$ .*

*Suponhamos que  $u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$ . Então  $u \in L^r(\Omega)$  e além disso:*

$$\|u\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^s}^{\theta} \|u\|_{L^t}^{1-\theta}.$$

As demonstrações desses resultados, podemos ser encontrados no Livro do Brezis, ver [4].

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] AGMON, S; DOUGLIS, A; NIRENBERG, L. **Estimatives near the boundary for solutions of elliptic p.d.e. satisfying a general boundary value condition i.** *Comm. Pure Appl. Math.*, 12:623–727, 1959.
- [2] AMBROSETTI, A; ARCOYA, D. **An Introduction to Nonlinear Functional Analysis and Elliptic Problems.** Birkhäuser, 2012.
- [3] AMBROSETTI, A; MALCHIODI, A. **Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems.** Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [4] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.** Springer, 2010.
- [5] COSTA, D. G; MAGALHÃES, C. A. **Variational elliptic problems which are nonquadratic at infinity.** *Nonlinear Anal. TMA.*, 23:1401–1412, 1994.
- [6] COSTA, D. G; MIYAGAKI, O. H. **Nontrivial solutions for perturbations of the p-laplacian on unbounded domains.** *J. Math. Anal. Appl.*, 193:737–755, 1995.
- [7] DE BARROS E SILVA, E. A. **Linking theorems and applications to semilinear elliptic problems at resonance.** *Nonlinear Analysis*, 16:455–477, 1991.
- [8] DE FIGUEIREDO, D. G. **Positive solutions of semilinear elliptic problems.** Springer, Berlin-New York, 1982.
- [9] DRABEK, P. **On the resonance problem with nonlinearity which has arbitrary linear growth.** *J. Math. Anal. Appl.*, 127:435–442, 1987.
- [10] FAN, X.-L; ZHAO, Y.-Z. **Linking and multiplicity results for the p-laplacian on unbounded cylinders.** *Mathematical Analysis and Applications*, 260:479–489, 2001.
- [11] FURTADO, M. F. **Notas de Aula de EDP 2.** Universidade de Brasília, Brasília.
- [12] GILBARG, D; TRUDINGER, N. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.** Springer, Berlin-New York, 1998.

- [13] ISNARD, C. **Introdução à Medida e Integração**. IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [14] JIANG, Q; TANG, C.-L. **Existence of a nontrivial solution for a class of superquadratic elliptic problems**. *Nonlinear Analysis*, 69:523–529, 2008.
- [15] JIU, Q; SU, J. **Existence and multiplicity results for dirichlet problems with p-laplacian**. *Math. Anal. Appl.*, 281:587–601, 2003.
- [16] JR., J. **A boundary value problem with a periodic nonlinearity**. *Nonlinear Analysis TMA.*, 10:207–213, 1986.
- [17] KREYSIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. Wiley Classics Library, Canadá, 1978.
- [18] LI, G; WANG, C. **The existence of a nontrivial solution to a nonlinear elliptic problem of linking type without the ambrosetti–rabinowitz condition**. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae*, 36:461–480, 2011.
- [19] LI, S; WILLEM, M. **Applications of local linking to critical points theory**. *JMAA*, 189:6–32, 1995.
- [20] LUAN, S; MAO, A. **Periodic solutions for a class of non-autonomous hamiltonian systems**. *Nonlinear Analysis*, 61:1413–1426, 2005.
- [21] OU, Z.-Q; TANG, C.-L. **Existence of homoclinic solution for the second order hamiltonian systems**. *Math. Anal. Appl.*, 291:203–213, 2004.
- [22] OU, Z.-Q; TANG, C.-L. **Periodic and subharmonic solutions for a class of superquadratic hamiltonian systems**. *Nonlinear Analysis*, 58:245–258, 2004.
- [23] P.H.RABINOWITZ. **Periodic solutions of hamiltonian systems**. *Comm. Pure Appl. Math.*, 31:157–184, 1978.
- [24] SCHECHTER, M. **Superlinear elliptic boundary value problems**. *Manuscripta Math.*, 86:253–265, 1995.
- [25] SMOLLER, J. **Shock waves and reaction-diffusion equations**. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [26] WILLEM, M. **Minimax Theorems**. Birkhauser Boston, Inc., Boston, 1996.
- [27] WU, X.-P; TANG, C.-L. **Remarks on existence and multiplicity of solutions for a class of semilinear elliptic equations**. *JMAA*, 319:369–376, 2006.

- [28] XIUMING MO, PING JING, Y. Z; MAO, A. **Existence of a nontrivial solution for a class of superquadratic elliptic problems.** *Advances in Pure Mathematics*, 2:314–317, 2012.