

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOTECNIA, MECÂNICA DAS
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA DE ESTRUTURAS E COMPONENTES

MARCO ANTÔNIO BORGES TRALDI

D0021E10
GOIÂNIA
2010

Marco Antônio Borges Traldi

OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA DE ESTRUTURAS E COMPONENTES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, Mecânica das Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal de Goiás para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Mecânica das Estruturas

Orientadora: Dra. Sylvia Regina Mesquita de Almeida

D0021E10
GOIÂNIA
2010

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
GPT/BC/UFG**

T769o Traldi, Marco Antônio Borges.
Otimização de topologia de estruturas e componentes
[manuscrito] / Marco Antônio Borges Traldi. - 2010.
134 f. : il.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Sylvia Regina Mesquita de Almeida.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Escola
de Engenharia Civil, 2010.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras, tabelas, abreviaturas e símbolos.

1. Otimização de topologia. 2. Técnica de projeção. 3. Projeção p-
q 4. Mecânica das Estruturas. I. Título.

CDU: 624.04:519.6

Autorizamos a reprodução total ou parcial deste trabalho, para fins de estudo e pesquisa.

Goiânia, 25 / 10 / 2010

Assinatura:

e-mail: mabtraldi@gmail.com

Marco Antônio Borges Traldi

Otimização de topologia de estruturas e componentes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, Mecânica das Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal de Goiás para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Aprovada em ____ / ____ / ____.

Prof. Dra. Sylvia Regina Mesquita de Almeida (Presidente)
Universidade Federal de Goiás

Prof. Dr. Frederico Martins Alves da Silva (Membro interno)
Universidade Federal de Goiás

Prof. Dr. Luiz Eloy Vaz (Membro externo)
Universidade Federal Fluminense

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela inspiração e força de vontade a mim concedida.

Agradeço a minha orientadora, Sylvia Regina Mesquita de Almeida, pelas várias horas despendidas com suas ótimas explicações e também pelo companheirismo, indispensáveis para o desenvolvimento do meu trabalho.

Agradeço em especial à minha mãe, pelo apoio e pelo carinho nas horas mais difíceis.

Agradeço a meus familiares que me apoiaram nessa jornada.

Agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro por meio da concessão de bolsa de mestrado.

RESUMO

A otimização de topologia (OT) é uma técnica de otimização que visa auxiliar o projetista na fase de concepção estrutural, buscando a melhor distribuição de uma quantidade fixa de material em um domínio estendido de projeto. Combina um método de análise estrutural com um algoritmo de programação matemática (PM). Neste trabalho, a análise estrutural é feita pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) e o algoritmo de solução utilizado é o Critério de Otimalidade (CO). Um dos principais temas de pesquisa em OT remete às técnicas de regularização, necessárias para tornar as soluções livres das instabilidades numéricas clássicas do problema: a instabilidade do tabuleiro de xadrez (*checkerboard*) e a dependência de malha. O objetivo deste trabalho é estudar as técnicas de regularização tradicionais encontradas na literatura como o filtro de sensibilidade de Sigmund, *Continuous Approximation of Material Distribution* (CAMD) e técnicas de projeção. Uma nova técnica de projeção é proposta visando a obtenção de soluções próximas à forma vazio-sólido. A função objetivo é a flexibilidade média da estrutura, sendo imposta uma restrição ao volume total de material a ser distribuído. Utiliza-se o modelo *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP) para parametrizar a distribuição de materiais isotrópicos, e sua adaptação FGM-SIMP para materiais com gradação funcional (FGM). Para ilustrar o comportamento das técnicas estudadas são apresentados exemplos de aplicação, frutos das implementações computacionais realizadas.

Palavras-chave: Otimização de topologia. Técnica de projeção. Projeção $p-q$.

ABSTRACT

Topology optimization (TO) is an optimization technique that aims to help the designer in the phase of structural conception, seeking a better distribution of one fixed amount of material in a extended design domain. It combines a method of structural analysis with a mathematical programming (MP) algorithm. In this work, structural analysis is done by Finite Element Method (FEM) and the solution algorithm employed is the Optimality Criteria (OC). One of the main themes of research in TO refer to the regularization techniques, needed to make the solutions free of the classic numerical instabilities of the problem: the instability of the checkerboard and mesh dependency. The goal of this work is study the traditional regularization techniques found in literature as the sensitivity filter by Sigmund, Continuous Approximation of Material Distribution (CAMD) and projection techniques. A new projection technique is proposed in order to obtain solutions close to the void-solid form. The objective function is the mean compliance of the structure, and is imposed a restriction on the total volume of material to be distributed. Is used the model Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP) to parameterize the distribution of isotropic materials, and their adaptation FGM-SIMP for functionally graded materials (FGM). To illustrate the behavior of these techniques examples of application are shown, fruits of the computational implementation.

Keywords: *Topology optimization. Projection technique. Projection p-q.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Ponto de partida da (a) otimização de parâmetros, (c) otimização de forma e (e) otimização de topologia. Resultado final do processo da (b) otimização de parâmetros, (d) otimização de forma e (f) otimização de topologia.....	22
Figura 2.1 – OT aplicada a um consolo curto: (a) domínio estendido e topologias na (b) 1° iteração, (c) 5° iteração, (d) 10° iteração e (e) 20° iteração. (f) Solução final com 40% do volume do domínio estendido	30
Figura 2.2 – Domínio estendido sujeito a forças de corpo e de contorno	31
Figura 2.3 – Problema relaxado de OT. (a) Domínio estendido de projeto. (b) Solução em escala de cinza	35
Figura 2.4 – Rotina da aplicação do modelo SIMP na otimização de topologia.....	38
Figura 2.5 – Abordagem com base no elemento: (a) elemento Q4/U, (b) elemento Q8/U.....	39
Figura 2.6 – Instabilidade do tabuleiro de xadrez: (a) domínio estendido, (b) topologia obtida com presença da instabilidade, (c) descontinuidade das densidades dos elementos finitos da malha	42
Figura 2.7 – Outras instabilidades numéricas: (a) <i>layering</i> e (b) <i>islanding</i>	43
Figura 2.8 – Exemplo de solução com dependência de malha. (a) domínio estendido, (b) resultado para malha de 120 x 20 elementos, (c) 180 x 30 elementos e (d) 240 x 40 elementos	44
Figura 2.9– Parâmetros utilizados no filtro de sensibilidade: (a) raio e distância, (b) operador de convolução.....	47
Figura 2.10– Domínio estendido discretizado pelo MEF em elementos Q4/U: 120 elementos em x por 20 em y	49
Figura 2.11 – Influência do coeficiente de penalização para (ABE). Dados: malha de elementos Q4/U (120 x 20), $V_f = 50\%$, $r_{min} = 1,5$ (filtro de sensibilidade)	50
Figura 2.12 – Influência do coeficiente de penalização para (AVN). Dados: malha de elementos Q4/U (120 x 20), $V_f = 50\%$, $r_{min} = 1,5$ (filtro de sensibilidade)	51
Figura 2.13 – Influência do raio mínimo do filtro de sensibilidade para a ABE e AVN. Dados: malha de elementos Q4/U (120 x 20), $V_f = 50\%$, $p = 3,0$ (coeficiente de penalização).....	53

Figura 3.1 – Sistema de coordenadas adotado para o elemento finito: (a) Q4 e (b) Q8.....	55
Figura 3.2 – Conceito do CAMD aplicado aos elementos (a) Q4 e (b) Q8.....	57
Figura 3.3 – OT aplicada a um consolo curto: (a) domínio estendido; (b) topologia sem restrição de manufatura e (c) topologia com restrição de manufatura	61
Figura 3.4 – Características da técnica de projeção direta: (a) raio r_{proj} , delimitando os nós da malha que influenciam no cálculo da densidade do elemento e , (b) função peso da projeção linear e (c) função peso da projeção parabólica.....	62
Figura 3.5 – Projeção linear direta: distribuição espacial dos pesos	64
Figura 3.6 – Resultado obtido com a projeção direta: (a) domínio estendido, (b) topologia obtida com a projeção linear, (c) topologia obtida com a projeção parabólica, (d) <i>fading effect</i> na projeção linear e (e) <i>fading effect</i> na projeção parabólica.....	65
Figura 3.7 – Parâmetros da projeção de Le sobre a abordagem com base no elemento (ABE)	67
Figura 3.8 – Comparação entre a projeção linear direta e a projeção de Le. (a) Domínio estendido, (b) variáveis de projeto da projeção de Le (primeira camada), (c) densidades dos elementos da projeção de Le (segunda camada) e (d) densidades dos elementos da projeção linear direta (segunda camada)	68
Figura 3.9 – Características da projeção inversa: (a) raio r_{proj} , delimitando os nós da malha que influenciam no cálculo da densidade do elemento e , (b) função peso da projeção linear e (c) função peso da projeção parabólica.....	69
Figura 3.10 – Estruturas simuladas: (a) viga bi-apoiada na escala de 6:1 (utilizada nas análises do CAMD), (b) modelo reduzido da viga e (c) consolo curto na escala 2:1 (utilizado nas análises das técnicas de projeção).....	71
Figura 3.11 – Influência do raio de projeção nas projeções diretas. Dados: malha de elementos Q4/U (100 x 50), $V_f = 50\%$	72
Figura 3.12 – Influência do raio de projeção nas projeções inversas. Dados: malha de elementos Q4 (100 x 50), $V_f = 50\%$	73
Figura 3.13 – Dependência de malha no CAMD. Dados: malhas de elementos Q4/Q4 e Q8/Q4, $V_f = 50\%$, $p = 3,0$ (coeficiente de penalização)	74
Figura 3.14 – Dependência de malha nas projeções diretas. Dados: malhas de elementos Q4/U, $V_f = 50\%$	75
Figura 3.15 – Dependência de malha nas projeções inversas. Dados: malhas de elementos Q4/U, $V_f = 50\%$	75

Figura 4.1 – Critério de Otimalidade (CO): (a) caso em que as variáveis atualizadas são inferiores ao limite LB, (b) caso em que as variáveis atualizadas são superiores ao limite UB e (c) caso em que as variáveis atualizadas estão entre LB e UB	83
Figura 4.2 – Fluxo de procedimentos do CO (modificada de LE, 2006)	84
Figura 4.3 – Comportamento da função flexibilidade média mediante aumento da penalização	91
Figura 4.4 – Exemplo do emprego da técnica de continuação no coeficiente de penalização: (a) domínio estendido, (b) solução topológica sem continuação e (c) solução topológica com continuação	92
Figura 5.1 – Elementos finitos homogêneos e elementos com gradação: (a) variação do módulo de elasticidade em função das coordenadas, (b) variação discreta do módulo de elasticidade nos elementos homogêneos, (c) variação contínua do módulo de elasticidade nos elementos com gradação de propriedades	95
Figura 5.2 – Variação do módulo de elasticidade na direção x do domínio estendido de um componente constituído de material com gradação funcional	97
Figura 5.3 – Projeção linear direta aplicada à modelagem de FGM: obtenção das densidades d_i a partir das variáveis de projeto ρ_j . As variáveis de projeto ρ_j são projetadas para o nó i para a obtenção da segunda camada de variáveis (densidades d_i)	104
Figura 5.4 – Viga bi-apoiada: (a) proporções das dimensões, (b) tipo 1 de carregamento e (c) tipo 2 de carregamento	107
Figura 5.5 – Gradação de propriedades na direção x : (a) tipo 1 de gradação de propriedades e (b) tipo 2 de gradação de propriedades	107
Figura 5.6 – Aplicação do regime 1 para o tipo 1 de carregamento (P_1 e P_2 simultâneas) e tipo 1 de gradação. Topologia obtida para: (a) $\alpha = 0,00$, (b) $\alpha = 1,00$, (c) $\alpha = 3,00$ e (d) $\alpha = 5,00$	108
Figura 5.7 – Aplicação do regime 1 para o tipo 1 de carregamento (P_1 e P_2 simultâneas) e tipo 2 de gradação. Topologia obtida para: (a) $\alpha = 0,00$, (b) $\alpha = 1,00$, (c) $\alpha = 3,00$ e (d) $\alpha = 5,00$	109
Figura 5.8 – Aplicação do regime 1 para a carga P_2 do tipo 1 de carregamento. Topologia obtida para: (a) $\alpha = 0,00$, (b) $\alpha = 3,00$ (tipo 1 de gradação) e (c) $\alpha = 3,00$ (tipo 2 de gradação)	109

Figura 5.9 – Aplicação do regime 1 para a carga P_1 do tipo 1 de carregamento. Topologia obtida para: (a) $\alpha = 0,00$, (b) $\alpha = 3,00$ (tipo 1 de graduação) e (c) $\alpha = 3,00$ (tipo 2 de graduação)	110
Figura 5.10 – Aplicação do regime 1 para o tipo 1 de carregamento (P_1 e P_2 não simultâneas). Topologia obtida para: (a) $\alpha = 0,00$, (b) $\alpha = 3,00$ (tipo 1 de graduação) e (c) $\alpha = 3,00$ (tipo 2 de graduação).....	111
Figura 5.11 – Aplicação do regime 2 para o tipo 2 de carregamento (P_1 e P_3 simultâneas) e tipo 1 de graduação. Topologia obtida para: (a) $\alpha = 0,00$, (b) $\alpha = 1,00$, (c) $\alpha = 3,00$ e (d) $\alpha = 5,00$	112
Figura 5.12 – Aplicação do regime 2 para o tipo 2 de carregamento (P_1 e P_3 simultâneas) e tipo 2 de graduação. Topologia obtida para: (a) $\alpha = 0,00$, (b) $\alpha = 1,00$, (c) $\alpha = 3,00$ e (d) $\alpha = 5,00$	112
Figura 5.13 – Aplicação do regime 2 para a carga P_3 do tipo 2 de carregamento. Topologia obtida para: (a) $\alpha = 0,00$, (b) $\alpha = 3,00$ (tipo 1 de graduação) e (c) $\alpha = 3,00$ (tipo 2 de graduação)	113
Figura 5.14 – Aplicação do regime 2 para a carga P_1 do tipo 2 de carregamento. Topologia obtida para: (a) $\alpha = 0,00$, (b) $\alpha = 3,00$ (tipo 1 de graduação) e (c) $\alpha = 3,00$ (tipo 2 de graduação)	114
Figura 5.15 – Aplicação do regime 2 para o tipo 2 de carregamento (P_1 e P_3 não simultâneas). Topologia obtida para: (a) $\alpha = 0,00$, (b) $\alpha = 3,00$ (tipo 1 de graduação) e (c) $\alpha = 3,00$ (tipo 2 de graduação).....	115
Figura 6.1 – Projecção p - q : (a) região de influência de um elemento e ; (b) funções-peso associadas aos nós j contidos no interior do círculo de projecção do elemento e	119
Figura 6.2 – Fluxo de procedimentos empregados na projecção direta com continuação p - q	120
Figura 6.3 – Fluxo de procedimentos da Fase I da projecção p - q	120
Figura 6.4 – Fluxo de procedimentos da Fase II da projecção p - q	121
Figura 6.5 – Exemplo 1: domínio estendido da viga em balanço	123
Figura 6.6 – Topologias resultantes do exemplo 1: (a) resultado ao final da Fase I, (b) resultado ao final da Fase II com $q_{max} = 10$ e (c) resultado ao final da Fase II com $q_{max} = 25$	124
Figura 6.7 – Exemplo 2: domínio estendido da viga bi-apoiada e malha de elementos finitos	125

Figura 6.8 – Topologias resultantes do exemplo 2: (a) resultado ao final da Fase I, (b) resultado ao final da Fase II com $q_{max} = 10$ e (c) resultado ao final da Fase II com $q_{max} = 25$ 126

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1 – Resultados ao final das Fases I e II da projeção $p-q$ para o Exemplo 1 (viga em balanço). O N° de iterações entre parêntesis indica a soma da quantidade de iterações das Fases I e II.....	124
Tabela 6.2 – Resultados ao final das Fases I e II da projeção $p-q$ para o Exemplo 2 (<i>MBB-beam</i>). O N° de iterações entre parêntesis indica a soma da quantidade de iterações das Fases I e II.....	126

LISTA DE ABREVIATURAS

ABE	Abordagem com base no elemento
AVN	Abordagem com variáveis nodais
CAD	<i>Computer Aided Design</i> (desenho assistido por computador)
CAMD	<i>Continuous Approximation of Material Distribution</i>
CO	Critério de otimalidade
EF	Elemento finito
EPT	Estado plano de tensões
FGM	<i>Functionally Graded Materials</i>
FGM-SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization for Functionally Graded Materials</i>
KKT	<i>Karush-Kuhn-Tucker</i>
LB	<i>Lower Bound</i>
MBB-beam	<i>Messerschmitt-Bölkow-Blohm beam</i>
MEF	Método dos elementos finitos
OT	Otimização de topologia
PL	Programação linear
PLS	Programação linear seqüencial
PM	Programação matemática
PNL	Programação não-linear
PQ	Programação quadrática
PQS	Programação quadrática seqüencial

RBDO	<i>Reliability-Based Design Optimization</i>
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
UB	<i>Upper Bound</i>
2D	Bidimensional
3D	Tridimensional

LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLOS ROMANOS

a	Energia interna de deformação
\mathbf{B}	Matriz cinemática
B_e^k	Atualização da variável de projeto no CO
c	Função flexibilidade média da estrutura (<i>mean compliance</i>)
\mathbf{C}	Matriz constitutiva elástica
\mathbf{C}^s	Matriz constitutiva do material sólido
d_i	Densidade relativa de um elemento ou nó
$dist(j,i)$	Distância do elemento (ou nó) i ao elemento (ou nó) j
E	Módulo de elasticidade
E_G	Módulo de elasticidade do FGM
E_{ijkl}	Tensor elástico de um ponto
f	Forças de corpo
\mathbf{F}	Vetor de forças externas aplicadas à estrutura
$f(\mathbf{y})$	Função objetivo a ser minimizada
g_k	Restrições de desigualdade
h_j	Restrições de igualdade
H_j	Operador de convolução (filtro de sensibilidade de Sigmund)
i, j	Índices utilizados nas fórmulas de somatório

k	Remete aos pontos de Gauss
\mathbf{K}	Matriz de rigidez global da estrutura
\mathbf{K}_e	Matriz de rigidez do elemento finito e
\mathbf{K}_s	Matriz de rigidez de um elemento constituído por material sólido
L	Lagrangeano (ou função lagrangeana)
$L(u)$	Trabalho das forças externas que provoca campo de deslocamentos u
Mnd	Índice que mede a proximidade da topologia da forma 0-1
n	Número de variáveis de projeto
N	Número de elementos finitos da malha
N_i	Função de interpolação associada ao nó i de um elemento finito
n_e, n_g	Número de restrições de igualdade e de desigualdade, respectivamente
$nnel$	Número de nós de um elemento finito
$ndel$	Número de nós do elemento aos quais se associa uma densidade relativa
NPG	Número de pontos de Gauss utilizados na integração numérica
p	Coefficiente de penalização das densidades no modelo SIMP
$p_{máx}$	Máximo coeficiente de penalização
q	Expoente da projeção direta
$q_{máx}$	Máximo expoente na técnica de projeção
r_j	Distância do centróide de um elemento a um nó de posição j
r_{min}	Raio do filtro de sensibilidade de Sigmund
r_{proj}	Raio do círculo de projeção nas técnicas de projeção

s	Contorno do domínio estendido
S_i	Conjunto de elementos finitos que contém o nó i
t	Forças de contorno
$tolp$	Tolerância adotada para o incremento de p (na continuação de p)
$tolq$	Tolerância adotada para o incremento de q (na continuação de q)
u	Campo de deslocamentos da estrutura na condição de equilíbrio
\bar{u}	Campo de deslocamentos virtuais da estrutura
\mathbf{U}	Vetor de deslocamentos nodais da estrutura
\mathbf{U}_{ad}	Conjunto admissível de tensores elásticos
\mathbf{U}_e	Vetor de deslocamentos nodais do elemento finito e
\mathbf{V}	Vetor arbitrário e fixo de deslocamentos nodais da estrutura
V_f	Fração de volume (Razão entre Vol e o volume do domínio estendido)
Vol	Volume máximo admitido para a estrutura
v_e	Volume do elemento finito e
W	Dimensão do domínio estendido dos FGM
w_k	Peso associado ao ponto de Gauss k na integração numérica
$w(\mathbf{x}_j)$	Peso associado à densidade do nó de posição \mathbf{x}_j (técnicas de projeção)
\mathbf{x}	Coordenadas de um ponto do domínio estendido de projeto
X, Y	Coordenadas cartesianas normalizadas de um ponto de posição \mathbf{x}
\mathbf{y}	Vetor de variáveis de projeto

SÍMBOLOS GREGOS

α, β	Coefficientes que definem a gradação de propriedades nos FGM
Γ_t	Parte do contorno submetido à aplicação de forças
ε	Campo de deformações associada a u ou \bar{u}
ζ	Limite móvel do CO
η	Fator de ajuste utilizado para garantir a convergência do CO
λ	Multiplicador de Lagrange
$\rho(\mathbf{x})$	Densidade relativa associada ao ponto de coordenadas \mathbf{x}
ρ_i	Variável de projeto
Ω	Domínio estendido de projeto
Ω_m	Subconjunto de Ω formado pelos pontos dotados de material (sólido)
Ω_w^e	Região de influência de um elemento nas técnicas de projeção

SUMÁRIO

1. CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO	21
1.1. TIPOS DE OTIMIZAÇÃO	22
1.2. OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA (OT).....	24
1.3. OBJETIVOS DO TRABALHO E METODOLOGIA.....	26
1.4. ESTRUTURA DO TEXTO	27
2. CAPÍTULO 2: TÉCNICAS CLÁSSICAS DE OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA	29
2.1. CONCEITOS BÁSICOS DE OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA	29
2.2. FORMULAÇÃO CLÁSSICA DO PROBLEMA.....	31
2.3. RELAXAÇÃO DO PROBLEMA.....	34
2.4. O MODELO SIMP	36
2.5. ABORDAGEM COM BASE NO ELEMENTO (ABE).....	38
2.6. ABORDAGEM COM VARIÁVEIS NODAIS (AVN).....	40
2.7. INSTABILIDADES NUMÉRICAS.....	41
2.7.1. Instabilidade do tabuleiro de xadrez	41
2.7.2. O problema da dependência de malha	44
2.8. ESQUEMA DE REGULARIZAÇÃO: FILTRO DE SENSIBILIDADE DE SIGMUND	46
2.9. EXEMPLOS DAS IMPLEMENTAÇÕES COMPUTACIONAIS DAS ABORDAGENS CLÁSSICAS	49
2.9.1. Estudo da influência do coeficiente de penalização.....	49
2.9.2. Estudo da influência do raio do filtro de sensibilidade.....	52
2.10. CONSIDERAÇÕES FINAIS	53
3. CAPÍTULO 3: CONTROLE DE INSTABILIDADES.....	54
3.1. DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA DE MATERIAL (CAMD)	54
3.1.1. Funções de interpolação do MEF	54
3.1.2. Formulação do CAMD.....	56
3.2. TÉCNICAS DE PROJEÇÃO	60

3.2.1.	Características das técnicas de projeção	60
3.2.2.	Projeções diretas com função peso.....	61
3.2.2.1.	Projeção linear direta	64
3.2.2.2.	Projeção parabólica direta	65
3.2.3.	Projeção de Le.....	66
3.2.4.	Projeção inversa.....	69
3.2.5.	Resultados da implementação computacional do CAMD e das técnicas de projeção	70
3.2.5.1.	Influência do raio de projeção	71
3.2.5.2.	Dependência de malha.....	73
4.	CAPÍTULO 4: OTIMIZAÇÃO	76
4.1.	PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO: MÉTODOS DE SOLUÇÃO.....	76
4.1.1.	Condição de otimalidade.....	78
4.1.2.	Critério de otimalidade (CO)	79
4.2.	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	84
4.2.1.	Sensibilidade no problema de minimização da flexibilidade média	85
4.2.2.	Sensibilidade na ABE.....	86
4.2.3.	Sensibilidade na AVN.....	86
4.2.4.	Sensibilidade no CAMD.....	88
4.2.5.	Sensibilidade na técnica de projeção	89
4.3.	TÉCNICA DE CONTINUAÇÃO	90
5.	CAPÍTULO 5: APLICAÇÃO DE OT A MATERIAIS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL	93
5.1.	INTRODUÇÃO	93
5.2.	MODELO DE MATERIAL FGM-SIMP	96
5.2.1.	Regime 1 para a modelagem de FGM: CAMD e filtro de sensibilidade	99
5.2.2.	Regime 2 para a modelagem de FGM: CAMD e técnica de projeção linear direta.....	103
5.3.	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	106
5.3.1.	Exemplo da aplicação do regime 1.....	108
5.3.2.	Exemplo da aplicação do regime 2.....	112
6.	CAPÍTULO 6: PROJEÇÃO DIRETA COM CONTINUAÇÃO P-Q.....	116

6.1. INTRODUÇÃO.....	116
6.2. MOTIVAÇÃO.....	117
6.3. GENERALIZAÇÃO DA PROJEÇÃO DIRETA.....	118
6.4. METODOLOGIA DA PROJEÇÃO P-Q.....	119
6.5. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO: PROJEÇÃO P-Q.....	122
6.5.1. Exemplo 1: Viga em balanço.....	122
6.5.2. Exemplo 2: MBB-beam.....	125
7. CAPÍTULO 7: CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	128
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	131

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O progresso do conhecimento científico no que se refere à aplicação de métodos numéricos para solução de problemas de engenharia aprimorou o processo de projeto e permitiu a simulação do comportamento estrutural com maior refinamento. Contudo, percebe-se que a escolha dos parâmetros de projeto ainda é muito dependente da experiência e da sensibilidade dos projetistas. Cotidianamente, durante a fase de projeto de uma estrutura ou componente, ocorre um processo iterativo de tentativa e erro para a fixação de diversos parâmetros, tais como: a disposição espacial dos elementos estruturais, as formas de conexão e as características geométricas dos elementos. Essa dinâmica, que caracteriza a metodologia convencional de elaboração de projetos, se encerra quando o projetista, com base em sua experiência, decide ter alcançado uma boa solução estrutural. Novas técnicas têm sido amplamente estudadas na área de projetos de estruturas e componentes, buscando fazer com que o processo de alteração dos parâmetros de projeto obedeça a critérios baseados em formulações matemáticas. Dessa forma, surgiu a abordagem para elaboração de projetos usando técnicas de otimização. Nessa nova abordagem, alguns parâmetros de projeto são escolhidos para ter sua variação controlada pelo método de otimização, os quais passam a ser denominados variáveis de projeto. Os demais parâmetros permanecem fixos durante o processo, com valores escolhidos pelo projetista. Cabe ressaltar que o papel do projetista não é eliminado do processo, sendo importante para a escolha do tipo de abordagem a ser utilizada, de quais parâmetros serão transformados em variáveis de projeto e quais serão considerados parâmetros fixos, dos valores iniciais dos parâmetros e das variáveis *etc.* O papel do projetista também é fundamental na escolha do tipo de otimização a ser empregada e do algoritmo de otimização a ser utilizado.

Outro aspecto importante na otimização é a necessidade da quantificação da qualidade da solução, o que é feito através de um critério matemático denominado função objetivo. A formulação matemática do problema de otimização necessita ainda assegurar que os critérios de projeto sejam obedecidos, o que é feito impondo restrições ao problema. Dessa forma, o objetivo da otimização é extremizar a função objetivo, impondo que os possíveis conjuntos-solução atendam também às restrições.

1.1. TIPOS DE OTIMIZAÇÃO

Na literatura são citados três principais tipos de otimização estrutural, quais sejam: otimização de parâmetros, otimização de forma e otimização de topologia (OT). A otimização de parâmetros consiste na busca pelos melhores valores possíveis para determinados parâmetros dos elementos estruturais, como por exemplo, as características geométricas (dimensões, área, inércia da seção transversal *etc*). Nesse tipo de abordagem, o domínio da estrutura é fixo e conhecido antes do início do processo de otimização. É a abordagem mais tradicional, sendo bastante empregada nos problemas de determinação das dimensões ótimas para a seção transversal das barras de estruturas reticuladas (CHRISTOFORO; MARCONATO; OLIVEIRA, 2007), no traçado ótimo dos cabos de vigas de concreto protendido (ALMEIDA, 2001), dentre outros. A otimização de forma busca encontrar o melhor contorno (interno ou externo) de uma estrutura (BENDSØE; RODRIGUES, 1991). As variáveis de projeto são as coordenadas dos pontos que definem esses contornos (*Keypoints*). Essa técnica pode ser usada, por exemplo, para encontrar a melhor forma para furos de vigas. A otimização de topologia (OT), objeto de estudo desta dissertação, visa a distribuição ótima de material em um domínio estendido de projeto. A estrutura surge de forma natural no processo, por meio da definição da distribuição do material e das regiões vazias resultantes da ausência de material.

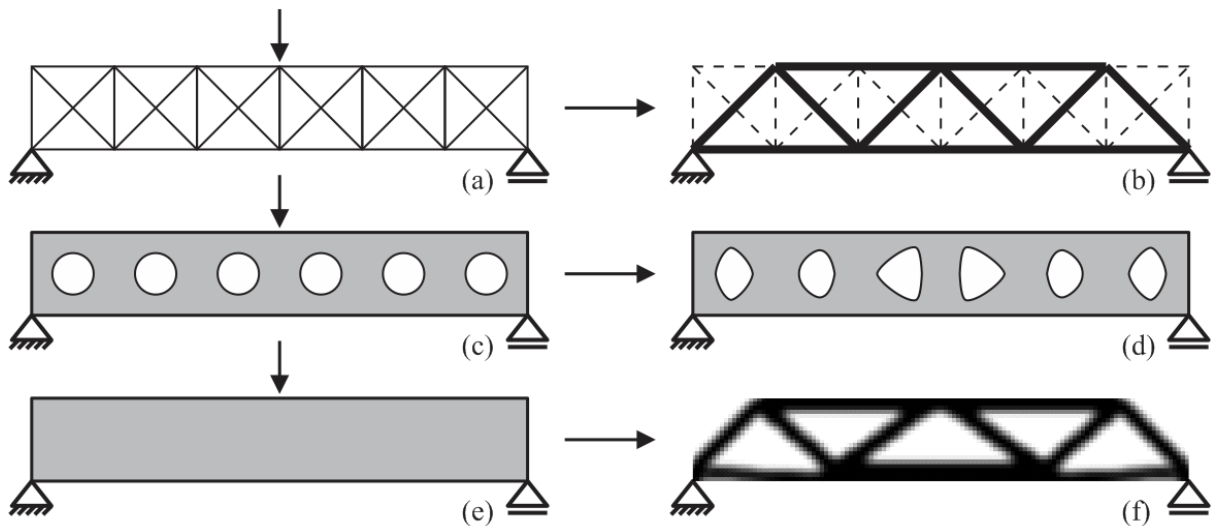


Figura 1.1 – Ponto de partida da (a) otimização de parâmetros, (c) otimização de forma e (e) otimização de topologia. Resultado final do processo da (b) otimização de parâmetros, (d) otimização de forma e (f) otimização de topologia.

A Figura 1.1 mostra esquematicamente um exemplo de cada tipo de abordagem tomada para a otimização de estruturas (BENDSØE; SIGMUND, 2003). A Figura 1.1 (a) mostra o ponto de

partida da otimização de parâmetros na análise de uma treliça plana. *A priori* são conhecidos o posicionamento e o comprimento de cada barra, sendo as áreas das seções transversais definidas como as variáveis de projeto. A Figura 1.1 (b) mostra o resultado obtido ao final do processo de otimização. As barras tracejadas correspondem àquelas com área da seção transversal nula. Ressalta-se que a posição dos elementos estruturais é fixa durante o processo e que não há a possibilidade de inclusão de novos elementos.

A Figura 1.1 (c) apresenta a configuração inicial no processo de otimização de forma aplicado a uma viga. São conhecidos, antes do início da otimização, a forma dos contornos dos furos da viga. O algoritmo de otimização busca o melhor contorno interno para os furos, sendo o resultado da otimização mostrado na Figura 1.1 (d). Na otimização de forma, os furos definidos inicialmente podem se unir durante o processo, contudo, novos furos não podem ser criados.

A Figura 1.1 (e) apresenta o ponto de partida no processo de otimização de topologia aplicado a uma viga bi-apoiada. O retângulo descreve o domínio estendido de projeto, que é a região geométrica no espaço onde se distribuirá o material de forma a obter a melhor estrutura. Nessa figura, todos os pontos do domínio possuem densidade intermediária (cinza). A Figura 1.1 (f) mostra o resultado obtido ao final do processo de otimização. A solução inicial, com densidade intermediária, dá lugar a regiões com densidades nulas (vazios) e regiões com densidades unitárias (sólidos), formando os elementos estruturais resistentes. Dessa forma, a estrutura e os furos surgem naturalmente do processo de otimização.

Atualmente, observa-se nas grandes indústrias a tendência de utilização integrada das técnicas de otimização, principalmente aliando a otimização de topologia à de parâmetros, visto que elas atuam em fases distintas na cadeia de projeto. A otimização de topologia é bastante útil na fase de concepção estrutural, onde não se conhece a topologia, ou seja, o posicionamento dos elementos estruturais resistentes. A otimização de parâmetros pode ser aplicada tendo como ponto de partida o resultado obtido pela OT, visando determinar as áreas ótimas das barras da topologia resultante. Embora com o uso ainda restrito no meio comum, essas técnicas têm permitido vasto avanço na produção de projetos de componentes, principalmente nos setores automobilístico, aeroespacial e biomecânico (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

1.2. OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA (OT)

A OT tem sido descrita na literatura como um problema de distribuição de material, no qual o objetivo é determinar a melhor maneira de se distribuir uma quantidade fixa de material em uma região no espaço (2D ou 3D), chamada de domínio estendido. Para modelar os pontos do domínio como sólido ou vazio associa-se uma variável de projeto a cada ponto dessa região. As variáveis geralmente são atualizadas por um algoritmo de programação matemática, com vistas a minimizar a função objetivo escolhida. Para determinar as direções de busca no algoritmo de otimização, ou seja, as direções de atualização das variáveis que implicam na redução do valor da função objetivo, são necessárias informações sobre as sensibilidades da função objetivo e das restrições em relação às variáveis de projeto. No clássico problema da minimização da flexibilidade média estrutural, estudado nesta dissertação, as sensibilidades da função objetivo dependem dos deslocamentos do domínio estendido. Dessa forma, algum método de análise estrutural, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), deve ser empregado para a obtenção do campo de deslocamentos.

O resultado encontrado ao fim do processo de OT é uma imagem “preta e branca”, cujo aspecto é mostrado na Figura 1.1 (f). Os *pixels* da imagem correspondem aos elementos finitos empregados na discretização do domínio estendido. *Pixels* com coloração preta representam pontos sólidos e com coloração branca pontos vazios. Assim, ficam determinados o número, a posição e a forma dos vazios e, conseqüentemente, a distribuição do material.

Para parametrizar a distribuição de material no domínio estendido, utiliza-se o chamado Método das Densidades (*Density Approach*), também conhecido como *Solid Isotropic Material with Penalization* - SIMP (BENDSØE, 1989¹ apud SIGMUND, 2007). Esse modelo associa as variáveis de projeto à rigidez física do material em cada ponto do domínio. Como as variáveis assumem um campo contínuo, emprega-se um coeficiente de penalização para a obtenção de estruturas na forma vazio-sólido (0-1).

Contudo, o Método das Densidades resulta em topologias susceptíveis à ocorrência de instabilidades numéricas, como a instabilidade do tabuleiro de xadrez e a dependência de malha (SIGMUND, 2007). Dessa forma, os resultados obtidos tornam-se satisfatórios apenas quando se empregam métodos de regularização no modelo. Sigmund e Petersson (1998)

¹ BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 1, n. 4, p. 193-202, 1989.

reúnem alguns métodos de regularização, descrevendo a conveniência para aplicação de cada um. Sigmund (2007) faz um apanhado sobre as técnicas de regularização tradicionais e recentes, abordando métodos de restrição e filtros de sensibilidade e de densidade encontrados na literatura.

Os métodos de restrição baseiam-se na idéia de limitar o espaço-solução do problema de OT, de forma a evitar resultados topológicos com instabilidades numéricas. Ambrosio e Buttazzo (AMBROSIO; BUTTAZZO, 1993² *apud* SIGMUND; PETERSSON, 1998) propuseram o método de restrição do perímetro, que impõe um limite superior ao perímetro total da estrutura. Essa restrição limita o aparecimento de uma quantidade cada vez maior de vazios nas topologias com o refinamento da malha, eliminando a não-unicidade de solução. Petersson e Sigmund (1998) propuseram uma restrição local aos gradientes da função densidade, eliminando variações bruscas de densidades entre elementos vizinhos. Em ambas as técnicas a instabilidade do tabuleiro de xadrez e a dependência de malha desaparecem ou ficam reduzidas nas topologias resultantes.

Os filtros de sensibilidade alteram o valor das sensibilidades analíticas através de uma expressão heurística, gerando novas sensibilidades cujos valores apresentam variações suaves entre elementos vizinhos. O filtro mais conhecido foi proposto por Sigmund e sua formulação pode ser encontrada em Sigmund (2001). Essa ferramenta apresenta o inconveniente de gerar topologias com alguns elementos dotados de densidades intermediárias. Esses elementos ocorrem predominantemente nas bordas das barras, caracterizando a transição de sólido para vazio. Esse fenômeno é denominado pela literatura de *fading effect*, e afasta a solução da forma vazio-sólido (0-1). Algumas modificações nessa ferramenta foram indicadas para a obtenção de estruturas com densidades mais próximas à forma vazio-sólido. Destacam-se os trabalhos de Borrvall (2001) e Wang e Wang (2005).

Dos filtros de densidade, são pioneiros os trabalhos de Bruns e Tortorelli (2001) e Bourdin (2001). Bruns e Tortorelli (2001) definem que a densidade de cada elemento finito, utilizada para obter sua rigidez, deve ser obtida através da multiplicação de um fator peso pelas variáveis de projeto associadas aos elementos de uma vizinhança previamente definida. Bourdin (2001) estuda o filtro de Bruns e Tortorelli (2001) e comprova a viabilidade do método.

² AMBROSIO, L.; BUTTAZZO, G. An optimal design problem with perimeter penalization. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 1, n. 1, p. 55-69, 1993.

Sigmund (2007) apresenta uma nova família de filtros de densidade baseados em operadores morfológicos de imagem. A idéia é gerar soluções topológicas 0-1 que atendam também a restrições de manufatura envolvendo a imposição de uma dimensão mínima para os vazios e para as barras. Foram apresentados dois tipos básicos de operadores: *Dilate* e *Erode*. Ambos são empregados para a obtenção das densidades dos elementos da malha a partir das variáveis de projeto. O *Erode* elimina qualquer barra que tenha espessura menor que uma dimensão previamente escolhida. O *Dilate* elimina os vazios com espessura menor que a dimensão escolhida. Outros dois operadores são apresentados, denominados de *Open* e *Close*. O operador *Open* é o resultado da aplicação do operador *Erode* seguido pelo *Dilate*, e o *Close* da aplicação do operador *Dilate* seguido pelo *Erode*.

Guest, Prévost e Belytschko (2004) propõem um filtro de densidade em que as variáveis de projeto são associadas aos nós da malha de elementos finitos. A rigidez dos elementos é obtida por um esquema de projeção, que utiliza uma função matemática para projetar as variáveis nodais para o domínio dos elementos. Duas funções foram avaliadas: função linear e não linear (*heaviside step function*). O uso da função linear resulta em topologias cujas barras apresentam elementos com densidades intermediárias, afastando a solução da forma vazio-sólido. A função peso não linear é recomendada pelos autores para a obtenção de topologias resultantes com poucas densidades intermediárias. Para ambas as projeções, a técnica garante soluções independentes de malha e livres da instabilidade do tabuleiro de xadrez. Além disso, pode ser imposta uma escala mínima para a espessura das barras. Trabalho recente, proposto por Almeida, Paulino e Silva (2009), cria a técnica de projeção inversa, ampliando as possibilidades de emprego dos esquemas de projeção. A projeção inversa possui as mesmas características que a projeção de Guest, Prévost e Belytschko (2004), porém, garante o controle sobre a dimensão mínima dos vazios das topologias resultantes.

1.3. OBJETIVOS DO TRABALHO E METODOLOGIA

A otimização de topologia tem se difundido rapidamente no meio industrial e acadêmico como uma ferramenta de auxílio no projeto de componentes estruturais. Apesar da evolução da técnica, algumas dificuldades relacionadas às instabilidades numéricas ainda permanecem nos modelos, sendo objeto de estudo de diversos grupos de pesquisa.

O objetivo geral deste trabalho é fazer um apanhado sobre algumas das técnicas de otimização de topologia encontradas na literatura, com fins de desenvolver algoritmos que possibilitem a obtenção da topologia ótima de estruturas para o problema da minimização da flexibilidade média. Os objetivos específicos são:

- a. Estudar e implementar algumas técnicas clássicas de OT;
- b. Estudar especificamente algumas técnicas de projeção encontradas na literatura;
- c. Propor nova técnica de projeção;

Para atingir os objetivos elencados, realiza-se uma revisão bibliográfica focada nos artigos mais tradicionais citados na literatura, além de algumas dissertações correlatas. Ênfase especial é dada à revisão dos esquemas de regularização baseados em técnicas de projeção, focando as potencialidades e problemas dessas técnicas. Desenvolve-se uma nova técnica de projeção, a partir da generalização das projeções diretas estudadas na etapa de revisão bibliográfica. Com fins de estudar o comportamento dos regimes clássicos em OT e da nova técnica de projeção, realizam-se suas implementações computacionais.

1.4. ESTRUTURA DO TEXTO

Esta seção apresenta uma descrição sumária do conteúdo desta dissertação, a qual foi organizada em sete capítulos.

No capítulo 2 apresenta-se uma revisão sobre tópicos relevantes em otimização de topologia. Inicialmente mostra-se a formulação do problema de OT para estruturas contínuas e, posteriormente, parte-se para a formulação na forma discreta empregando-se o Método dos Elementos Finitos (MEF). A formulação é descrita como um problema de distribuição de material no domínio estendido, empregando-se o modelo de material SIMP. São mostradas ainda algumas abordagens clássicas na otimização de topologia: abordagem com base no elemento (ABE) e abordagem com variáveis nodais (AVN). Apresenta-se uma revisão sobre as principais instabilidades numéricas em OT citadas na literatura: instabilidade de tabuleiro de xadrez e dependência de malha. Descreve-se o filtro de sensibilidade de Sigmund, técnica de regularização mais utilizada para eliminar as instabilidades. São apresentados resultados da implementação computacional da ABE, AVN e do filtro de sensibilidade de Sigmund.

O capítulo 3 apresenta dois esquemas de regularização: *Continuous Approximation of material distribution* (CAMD) e as técnicas de projeção. Ambos são empregados para a eliminação das instabilidades numéricas do problema de OT. O CAMD utiliza o conceito de gradação de propriedades no domínio dos elementos finitos, sendo útil no combate à instabilidade do tabuleiro de xadrez. É também incorporado aos algoritmos de OT utilizados para a modelagem de materiais com gradação funcional, objeto de estudo do capítulo 5. As técnicas de projeção, por sua vez, são capazes de eliminar as duas instabilidades do problema de OT (tabuleiro de xadrez e dependência de malha), além de introduzirem a possibilidade da imposição de restrições de manufatura. Alguns exemplos numéricos são apresentados no fim do capítulo.

O capítulo 4 apresenta uma revisão sobre o processo de análise de sensibilidade em algoritmos de otimização. Apresentam-se as expressões das sensibilidades da função flexibilidade média em relação às variáveis de projeto para as abordagens: ABE, AVN, CAMD e técnicas de projeção. Apresenta-se também o Critério de Otimalidade (CO), método utilizado nesta dissertação para a atualização das variáveis de projeto. Explora-se a técnica de continuação do coeficiente de penalização (p) do modelo SIMP.

O capítulo 5 apresenta a formulação do problema de OT para materiais com gradação funcional (FGM). Esses materiais apresentam propriedades mecânicas variáveis com a posição. Para sua modelagem, utiliza-se o modelo *Solid Isotropic Material with Penalization for Functionally Graded Materials* (FGM-SIMP), o qual mensura a variação do módulo de elasticidade do FGM ao longo do espaço. São mostrados dois regimes para a modelagem dos FGM, os quais empregam diferentes esquemas de regularização. O regime 1 emprega o filtro de sensibilidade de Sigmund e o regime 2 a projeção linear de Guest, Prévost e Belytschko (2004). Alguns resultados numéricos são apresentados, mostrando o comportamento diferenciado dos FGM em relação aos materiais homogêneos.

O capítulo 6 apresenta a projeção direta com continuação $p-q$, esquema alternativo que possibilita a obtenção de topologias resultantes sem instabilidade do tabuleiro de xadrez, livres da dependência de malha e próximas à forma vazio-sólido (0-1). Por fim, o capítulo 7 apresenta as conclusões alcançadas por meio do desenvolvimento desta dissertação, além de algumas sugestões para trabalhos futuros na área de otimização de topologia.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho teve como objetivo estudar e comparar algumas das técnicas de otimização de topologia encontradas na literatura, formuladas para o clássico problema da minimização da flexibilidade média com restrição de volume. Utilizou-se o modelo de material SIMP para parametrizar materiais isotrópicos e o modelo FGM-SIMP para modelar materiais com gradação funcional. O critério de otimalidade (CO) foi empregado como algoritmo de solução, se apresentando como uma boa ferramenta para resolver o problema estudado.

Foi feito um estudo sobre as instabilidades numéricas clássicas do problema de OT: instabilidade do tabuleiro de xadrez e dependência de malha. Através de implementação computacional da abordagem com base no elemento (ABE) e da abordagem com variáveis nodais (AVN) pôde-se perceber a ocorrência dessas instabilidades nas topologias resultantes. Estudaram-se algumas técnicas de regularização para eliminar as instabilidades numéricas. O filtro de sensibilidade de Sigmund foi implementado tanto na ABE quanto na AVN e mostrou-se capaz de eliminar o *checkerboard* e a dependência de malha. Estudou-se a influência que a variação do coeficiente de penalização e do raio do filtro causam nas soluções ótimas. As soluções dos modelos sem penalização ($p = 1$) apresentam-se repletas de densidades intermediárias. Com o acréscimo de p , a solução tende a aproximar-se da forma discreta 0-1. Quanto à variação do raio do filtro de sensibilidade percebeu-se que, para raios pequenos, as instabilidades não são eliminadas e que, para raios demasiadamente grandes, ocorre a formação acentuada do *fading effect* nas bordas das barras. Assim, conclui-se que o raio deve ser convenientemente escolhido de forma a resultar em topologias livres das instabilidades, mas com *fading effect* pouco pronunciado.

O CAMD foi implementado empregando-se elementos do tipo Q4/Q4 e Q8/Q4. Nas simulações realizadas, percebeu-se que não houve ocorrência da instabilidade do tabuleiro de xadrez. Contudo, para ambos os elementos, o refinamento da malha gerou topologias resultantes distintas, caracterizando a dependência de malha. Conclui-se também que o

elemento do tipo Q8/Q4 é mais caro computacionalmente que o Q4/Q4 e não gera ganhos significativos nos resultados.

Realizou-se um estudo sobre alguns esquemas de regularização baseados em técnicas de projeção. Foram implementadas as projeções linear e parabólica diretas, as projeções linear e parabólica inversas e a projeção de Le. Pelas simulações realizadas conclui-se que todos os esquemas de projeção eliminam o *checkerboard* e a dependência de malha. Além disso, nas projeções diretas e na de Le, o raio de projeção impõe controle direto sobre a espessura das barras das topologias resultantes. Nas projeções inversas, o raio de projeção controla a dimensão mínima dos vazios. O inconveniente das projeções diretas e inversas é o pronunciado aparecimento do *fading effect* nas topologias resultantes. Esse efeito é maior com a utilização de raios de projeção grandes.

Aplicou-se a OT na modelagem de FGM. Por meio de exemplos de aplicação, foi avaliado o comportamento das soluções ótimas mediante a gradação do módulo de elasticidade ao longo do domínio estendido de projeto. Empregaram-se dois tipos de modelagem: no tipo 1 utilizou-se o filtro de sensibilidade e no tipo 2 a técnica de projeção linear direta. Ambas mostraram-se eficientes, conduzindo a soluções ótimas sem instabilidades numéricas. Através da aplicação dos regimes, pode-se observar o comportamento diferenciado, no que tange à distribuição de material, dos FGM em relação aos materiais homogêneos. Nos FGM, as regiões do domínio estendido com baixo valor de módulo de elasticidade tendem a concentrar maior volume de material, distribuído em barras espessas. Nas regiões com elevado módulo de elasticidade, surgem barras finas.

Propôs-se um novo esquema de projeção baseado na generalização da projeção direta, com o objetivo de reduzir as configurações em *fading effect* das topologias resultantes. Os resultados de aplicação da projeção p - q mostraram sua capacidade de reduzir sensivelmente a quantidade de elementos com densidades intermediárias. Valores altos do expoente da projeção, q , mostraram-se eficientes, reduzindo o número de iterações do processo de otimização e gerando soluções mais rígidas se comparadas às obtidas com valores menores de q . Contudo, mais investigações podem ser feitas em trabalhos futuros com vistas a estudar o comportamento da projeção p - q com valores de expoentes maiores que os empregados nesta dissertação.

Ainda como tema para investigações futuras, sugere-se a continuação do estudo das técnicas de projeção, envolvendo uma melhor avaliação da viabilidade de aplicação da projeção $p-q$ em grandes sistemas estruturais, incluindo a modelagem de estruturas tridimensionais. Outra investigação possível remete à aplicação da projeção $p-q$ na modelagem de mecanismos flexíveis. Nesses mecanismos, as densidades intermediárias dificultam o pós-processamento da topologia resultante. Sugere-se também o estudo da projeção $p-q$ em problemas de multi-física.

Sugere-se ainda estudar-se o emprego de elementos indutores em OT para a geração de modelos alternativos de bielas e tirantes em estruturas de concreto armado. Outro tema relevante remete à obtenção de topologias alternativas com o uso da indução baseada em confiabilidade (RBDO – *Reliability-Based Design Optimization*).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA, S. R. M. **Contribuição ao projeto ótimo de cabos em vigas de concreto protendido**. 2001. 149 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil - Estruturas) – Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2001.
- ALMEIDA, S. R. M.; PAULINO, G. H.; SILVA, E. C. N. A simple and effective inverse projection scheme for void distribution control in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Berlin, v. 39, n. 4, p. 359-371, 2009.
- ALMEIDA, S. R. M.; PAULINO, G. H.; SILVA, E. C. N. Design of functionally graded structures in topology optimization. *In: ENGEOPT 2008 – INTERNATIONAL CONFERENCE ON ENGINEERING OPTIMIZATION*, 2008, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. **Proceedings...** Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 2008. 10 p.
- BARBARINI, L. H. M. **Síntese de cascos de embarcações através de métodos de otimização aplicados a curvas B-spline**. 2007. 125 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecatrônica) – Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.
- BATHE, K. J. **Finite element procedures**. Revision of: Finite element procedures in engineering analysis, 1982. New Jersey: Prentice-Hall, 1996. 1037 p.
- BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s.l.], v. 71, n. 2, p. 197-224, 1988.
- BENDSØE, M. P.; RODRIGUES, H. C. Integrated topology and boundary shape optimization of 2-D solids. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s.l.], v. 87, n. 1, p. 15-34, 1991.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. Material interpolation schemes in topology optimization. **Archive of Applied Mechanics**, Berlin, v. 69, n. 9-10, p. 635-654, 1999.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology optimization: theory, methods, and applications**. 2° ed. New York: Springer, 2003. 370 p.
- BORRVALL, T. Topology optimization of elastic continua using restriction. **Archives of Computational Methods in Engineering**, Netherlands, v. 8, n. 4, p. 351-385, 2001.
- BOURDIN, B. Filters in topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s.l.], v. 50, n. 9, p. 2143-2158, 2001.
- BRUNS, T. E.; TORTORELLI, D. A. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s.l.], v. 190, n. 26-27, p. 3443-3459, 2001.

CARBONARI, R. C. **Projeto de atuadores piezelétricos flexensionais usando o método de otimização topológica**. 2003. 168 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecatrônica) – Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

CHRISTOFORO, A. L.; MARCONATO, S. A. S.; OLIVEIRA, R. Z. G. Otimização numérica da área das seções transversais dos elementos componentes de estruturas planas do tipo treliça. **Revista Brasileira de Biometria**, São Paulo, v.25, n.3, p. 57-69, 2007.

COOK, R. D. **Finite element modeling for stress analysis**. 1° ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995. 320 p.

FILHO, A. A. **Elementos finitos: a base da tecnologia CAE**. 4° ed. São Paulo: Editora Érica, 2004. 320 p.

GUEST, J. K.; PRÉVOST, J. H.; BELYTSCHKO, T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s.l.], v. 61, n. 2, p. 238-254, 2004.

HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z. **Elements of structural optimization**. 3° ed. London: Kluwer Academic Publishers, 1992. 481 p.

KIM, J. H.; PAULINO, G. H. Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s.l.], v. 53, n. 8, p. 1903-1935, 2002a.

KIM, J. H.; PAULINO, G. H. Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials. **Transactions of the ASME**, New York, v. 69, n. 4, p. 502-514, 2002b.

KIYONO, C. Y. **Método de otimização topológica aplicado ao projeto de sonotrodos para transdutores piezelétricos**. 2008. 161 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

LAGUN, T. G. **Otimização de topologia de estruturas 2-D**. 2002. 84 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, PUC/RJ, Rio de Janeiro, 2002.

LE, C. H. **Achieving minimum length scale and design constraints in topology optimization: a new approach**. 2006. 99 f. Thesis (Master in Civil and Environmental Engineering) – Graduate College of the University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, 2006.

LIMA, C. R. **Projeto de mecanismos flexíveis usando o método de otimização topológica**. 2002. 146 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica/Mecatrônica) – Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

LIPPI, T. N. **Restrições de manufatura aplicadas ao método de otimização topológica**. 2008. 117 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

- MATSUI, K.; TERADA, K. Continuous approximation of material distribution for topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s.l.], v. 59, n. 14, p. 1925-1944, 2004.
- MIRACCA, F. B. **Otimização de estruturas com fluido contido sujeita a múltiplos carregamentos**. 2007. 123 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.
- NISHITANI, W. S. **Projeto de micromecanismos multifásicos usando o método da otimização topológica**. 2006. 165 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.
- PAULINO, G. H.; SILVA, E. C. N. Design of functionally graded structures in topology optimization. **Materials Science Forum**, Switzerland, v. 492-493, p. 435-440, 2005.
- PETERSSON, J.; SIGMUND, O. Slope constrained topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s.l.], v. 41, n. 8, p. 1417-1434, 1998.
- RAHMATALLA, S. F.; SWAN, C. C. A Q4/Q4 continuum structural topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Berlin, v. 27, n. 1-2, p. 130-135, 2004.
- SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Berlin, v. 21, n. 2, p. 120-127, 2001.
- SIGMUND, O. Morphology-based black and white filters for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Berlin, v. 33, n. 4-5, p. 401-424, 2007.
- SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local-minima. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Berlin, v. 16, n. 1, p. 68-75, 1998.
- SILVA, M. C. **Aplicação do método da otimização topológica para o projeto de mecanismos flexíveis menos suscetíveis à ocorrência de dobradiças**. 2007. 162 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica e Mecatrônica) – Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.
- STUMP, F. V. **Otimização topológica aplicada ao projeto de estruturas tradicionais e estruturas com gradação funcional sujeitas a restrição de tensão**. 2006. 243 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.
- SVANBERG, K. The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s.l.], v. 24, n. 2, p. 359-373, 1987.
- TALISCHI, C.; PAULINO, G. H.; LE, C. H. Honeycomb Wachspress finite elements for structural topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Berlin, v. 37, n. 6, p. 569-583, 2008.

WANG, M. Y.; WANG, S. Bilateral filtering for structural topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s.l.], v. 63, n. 13, p. 1911-1938, 2005.

ZHOU, M.; ROZVANY, G. I. N. The COC algorithm, part II: topological, geometrical and generalized shape optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s.l.], v.89, n. 1-3, p. 309-336, 1991.

ZHOU, M.; SHYY, Y. K.; THOMAS, H. L. Checkerboard and minimum member size control in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Berlin, v. 21, n. 2, p. 152-158, 2001.