

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ALACYR JOSÉ GOMES

Geometria Extrínseca de Campos de Vetores em \mathbb{R}^3

Goiânia
2016

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: Dissertação Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Alacyr José Gomes		
E-mail:	alacyr@ufg.br		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor	Professor adjunto nível II UFG		
Agência de fomento:		Sigla:	
País:	Brasil	UF:GO	CNPJ:
Título:	Geometria Extrínseca de Campos de Vetores em R3		
Palavras-chave:	Campos de vetores, Distribuição de planos, Equações diferenciais implícitas, Pontos parcialmente umbílicos, Linhas principais.		
Título em outra língua:	Extrinsic Geometry of Vector Fields in R3		
Palavras-chave em outra língua:	Vector Fields, Plane distribution, Implicit differential equtions, Partially umbilic points, Principal lines.		
Área de concentração:	Sistemas Dinâmicos		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	13/05/2016		
Programa de Pós-Graduação:	Doutorado em Matemática		
Orientador (a):	Ronaldo Alves Garcia		
E-mail:	ragarcia@ufg.br		
Co-orientador (a):*			
E-mail:			

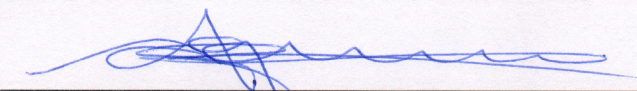
*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.



 Assinatura do (a) autor (a)

Data: 27 / 05 / 2016

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

ALACYR JOSÉ GOMES

Geometria Extrínseca de Campos de Vetores em \mathbb{R}^3

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos.

Orientador: Prof. Ronaldo Alves Garcia

Goiânia
2016

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Gomes, Alacyr José
Geometria Extínseca dos Campos de Vetores em R3 [manuscrito] /
Alacyr José Gomes. - 2016.
CXXXVIII, 128 f.

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de
Matemática e Estatística (IME) , Programa de Pós-Graduação em
Matemática, Goiânia, 2016.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui gráfico, lista de figuras.

1. Campos de vetores. 2. Distribuição de planos. 3. Equações
diferenciais implícitas. 4. Pontos parcialmente umbílicos. 5. Linhas
principais. I. Alves Garcia, Ronaldo, orient. II. Título.

ALACYR JOSE GOMES

GEOMETRIA EXTRÍNSECA DE CAMPOS DE VETORES EM R3

Tese defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática, aprovada em 13 de maio de 2016, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



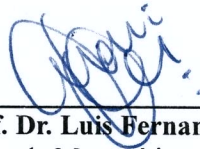
Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia

Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello

Departamento de Matemática Aplicada do IME - USP



Prof. Dr. Luis Fernando de Osorio Mello

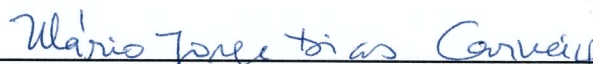
Instituto de Matemática e Computação- UNIFEI



Prof. Dr. Farid Tari

(via videoconferência)

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação ICMC- USP/São Carlos



Prof. Dr. Mario Jorge Dias Carneiro

Departamento de Matemática - UFMG

Dedico esse trabalho a minha esposa Maria Tereza, meus filhos Aline e Igor,
e aos meus netos Eduardo e Mariana.

Agradecimentos

- A Minha esposa, pais, filhos e netos, pelo apoio e companheirismo.
- Ao professor Ronaldo Alves Garcia, pela sua dedicada orientação e compreensão.
- Aos amigos e colegas do Instituto de Matemática e Estatística da UFG, pelo apoio e amizade.
- Ao Instituto de Matemática e Estatística da UFG, pela licença concedida.

Resumo

Gomes, Alacyr José. **Geometria Extrínseca de Campos de Vetores em \mathbb{R}^3** . Goiânia, 2016. 128p. Tese de Doutorado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho consideramos inicialmente campos de vetores regulares $\eta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e suas distribuições ortogonais de planos Δ_η . Apresentamos uma caracterização da curvatura normal associada a η e do sistema de equações diferenciais implícitas,

$$2(D\eta(dr), dr, \eta) + \langle \text{rot}(\eta), \eta \rangle \cdot \langle dr, dr \rangle = 0, \quad \langle dr, \eta \rangle = 0,$$

que definem duas folheações unidimensionais singulares e ortogonais, denominadas de folheações principais e cujas folhas são as linhas principais da distribuição Δ_η . A seguir descrevemos as configurações das folheações principais, numa vizinhança dos pontos singulares genéricos que constituem uma curva regular em \mathbb{R}^3 , denominados de pontos parcialmente umbílicos Darbouxianos e semi-Darbouxianos. Depois estudamos a estabilidade das linhas principais fechadas e apresentamos também um resultado de genericidade do tipo Kupka-Smale. Na parte final, estudamos a estrutura dos pontos singulares das folheações principais na vizinhança de um ponto singular hiperbólico do campo de vetores η .

Palavras-chave

Campos de vetores, Distribuição de planos, Equações diferenciais implícitas, Pontos parcialmente umbílicos, Linhas principais.

Abstract

Gomes, Alacyr José. **Extrinsic Geometry of Vector Fields in \mathbb{R}^3** . Goiânia, 2016. 128p. PhD. Thesis. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work we first consider regular vector fields $\eta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ and its orthogonal distribution of planes. We present a characterization of the normal curvature associated to η and the system of implicit differential equations

$$2(D\eta(dr), dr, \eta) + \langle \text{rot}(\eta), \eta \rangle \cdot \langle dr, dr \rangle = 0, \quad \langle dr, \eta \rangle = 0,$$

which define two one-dimensional singular and orthogonal foliations, which we call by principal foliations and whose leaves are the principal lines of the distribution Δ_η . Next we describe the configurations of the principal foliations in a neighborhood of the generic singular points that constitutes a regular curve in \mathbb{R}^3 , which are denoted by Darbouxian umbilic partially points and semi-Darbouxian. We proceed by studying the stability of the closed principal lines and we also present a Kupka-Smale genericity result. To conclude, we study the structure of the singularities of the principal foliations in a neighborhood of a singular hyperbolic point of the vector field η .

Keywords

Vector fields, Plane distribution, Implicit differential equations, Partially umbilic points, Principal lines.

Sumário

Lista de Figuras	10
INTRODUÇÃO	12
1 CARACTERIZAÇÃO DAS LINHAS DE CURVATURAS DE UM CAMPO	16
1.1 Curvatura normal de um campo	16
1.2 Segunda forma fundamental de uma distribuição de planos	23
2 CLASSIFICAÇÃO DOS PONTOS PARCIALMENTE UMBÍLICOS	24
2.1 Caracterização dos pontos parcialmente umbílicos	24
2.2 Levantamento de Lie-Cartan	31
2.3 Demonstração do Teorema 2.2.	34
2.4 Demonstração do Teorema 2.6.	41
2.5 Demonstração do Teorema 2.8.	46
3 LINHAS PRINCIPAIS COMPACTAS	55
3.1 Aplicação de primeiro retorno de órbita periódica	55
3.2 Aplicação de primeiro retorno de um ciclo principal	62
3.3 Hiperbolicidade	70
4 TRANSVERSALIDADE DAS VARIEDADES INVARIANTES	77
4.1 Transformação de Poincaré entre duas seções transversais a uma linha principal	77
4.2 Transversalidades entre conjuntos invariantes	83
5 CONFIGURAÇÃO PRINCIPAL DE CAMPOS COM SINGULARIDADE HIPERBÓLICA	90
5.1 Caso linear regular	91
5.2 Caso linear singular	93
5.3 Caso não linear singular	107
CONCLUSÕES	116
Referências Bibliográficas	117
A EQUAÇÃO REDUZIDA	119
B VARIEDADES INVARIANTES	121
C CONCEITOS DE TEORIA DE CONTROLE	123

D TOPOLOGIA EM VARIEDADES NÃO COMPACTAS

126

Índice Remissivo

128

Lista de Figuras

1.1	Definição da curvatura do campo η .	17
2.1	Configuração dos pontos parcialmente umbílicos Darbouxianos da Folheação $\mathcal{F}_1(\eta)$.	27
	(a) D_1	27
	(b) D_2	27
	(c) D_3	27
2.2	Configuração dos pontos parcialmente umbílicos Darbouxianos da Folheação $\mathcal{F}_2(\eta)$.	27
	(a) D_1	27
	(b) D_2	27
	(c) D_3	27
2.3	Configuração dos pontos parcialmente umbílicos semi-Darbouxianos D_{12} .	29
	(a) $\mathcal{F}_1(\eta)$	29
	(b) $\mathcal{F}_2(\eta)$	29
2.4	Configuração dos pontos parcialmente umbílicos semi-Darbouxianos D_{23} .	31
2.5	Configuração dos pontos parcialmente umbílicos Darbouxianos do tipo D_1 da Folheação $\mathcal{F}_1(\eta)$.	39
	(a) Projetivo	39
	(b) Identificado	39
	(c) D_1	39
2.6	Configuração dos pontos parcialmente umbílicos Darbouxianos do tipo D_2 da Folheação $\mathcal{F}_1(\eta)$.	40
	(a) Projetivo	40
	(b) Identificado	40
	(c) D_2	40
2.7	Configuração dos pontos parcialmente umbílicos Darbouxianos do tipo D_3 da Folheação $\mathcal{F}_1(\eta)$.	41
	(a) Projetivo	41
	(b) Identificado	41
	(c) D_3	41
2.8	Campo X_P restrito a variedade central $W^c(\beta_2)$.	45
2.9	Campo X_P na vizinhança de β_1 e β_2 e sua projeção.	45
2.10	Campo X_P na vizinhança de γ_i , $i = 2, 3$.	47
2.11	Campo X_P restrito a variedade central $W_{\gamma_1}^c$.	51
2.12	Campo X_P na vizinhança de γ_1 .	52
2.13	Projeção do campo X_P na vizinhança de γ_1 e sua projeção.	53
2.14	Projeção do campos X_P e $X_{\bar{P}}$ na vizinhança de γ_1 .	54

5.1	Configurações principais do sistema triplamente ortogonal de superfícies.	94
5.2	Configurações principais do sistema triplamente ortogonal de superfícies.	94
5.3	Configurações principais da Proposição 5.3 nos níveis $F(s, v, w) = k < 0$ com $b < 0 < a$.	96
5.4	Configurações principais da Proposição 5.3 nos níveis $F(s, v, w) = k = 0$ com $b < 0 < a$.	97
5.5	Configurações principais da Proposição 5.3 nos níveis $F(s, v, w) = k > 0$ com $b < 0 < a$.	97
5.6	Configurações principais da Proposição 5.3 nos níveis $F(s, v, w) = k > 0$, com $0 < b < a$.	98
5.7	Configurações principais da Proposição 5.3 nos níveis $F(s, v, w) = k > 0$, com $0 < a < b$.	98
5.8	Conjunto parcialmente umbílico singular.	113

INTRODUÇÃO

Na geometria diferencial clássica é comum o estudo de campos de vetores normais a uma superfície em um espaço Euclidiano tridimensional, e muitos invariantes métricos da superfície podem ser analisados com o auxílio de campos de vetores normais, por isso o nome geometria de campos de vetores ou de maneira equivalente, geometria da distribuição de planos ortogonais ao campo de vetores. Este caso é denominado holonômico. Uma distribuição de planos pode ser estudada num contexto mais amplo, ou seja, quando não for completamente integrável segundo Frobenius, conhecido na mecânica como caso não holonômico. A fundamentação teórica dos campos de vetores deste trabalho está baseada no livro de Aminov [1], que em seu texto cita que os fundamentos da geometria dos campos de vetores foram propostos por A. Voss no final do século XIX e seguidos nos trabalhos de Carathéodory, Liliental e Darboux. Em seu trabalho A. Voss definiu as noções de linhas de curvaturas e linhas assintóticas associadas a campos de vetores e considerou algumas classes especiais de campos vetoriais e sistemas mecânicos com restrições não holonômicos.

Em 1982 Gutierrez e Sotomayor no artigo [18], fizeram uma análise qualitativa das configurações das linhas de curvaturas principais no caso holonômico. Estes autores consideraram uma imersão $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde M^2 é uma variedade de dimensão 2 compacta e orientada. Mais tarde em 1989, Garcia, R. A. em sua tese de doutorado, fez uma análise qualitativa das configurações das linhas principais, na vizinhança dos pontos singulares denominados pontos parcialmente umbílicos, considerando uma imersão $\alpha : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, de uma variedade compacta M^3 de dimensão 3 em \mathbb{R}^4 . Posteriormente em 2012 Lopes, D., em sua tese de doutorado estudou as bifurcações dos pontos parcialmente umbílicos. Veja [7], [8], [12] e [13].

Neste trabalho motivado pelas linhas de curvaturas de uma distribuição de planos no caso holonômico, iremos analisar e apresentar resultados qualitativos de equações diferenciais implícitas que definem curvas associadas a uma distribuição de planos em \mathbb{R}^3 , nos casos holonômicos e não holonômicos. Por tradição também denominaremos essas curvas de linhas principais (linhas de curvaturas). Às folheações integrais associadas denominaremos de folheações principais \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 . Iremos analisar essas curvas na vizinhança dos pontos parcialmente umbílicos, singularidades das

equações diferenciais implícitas e das órbitas fechadas e também na vizinhança de pontos singulares hiperbólicos do campo de vetores ortogonal ao campo de planos.

No capítulo 1 vamos considerar um campo de vetores regular $\eta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^r , $r \geq 2$ e uma distribuição de planos Δ_η associada. Em seguida definimos a curvatura normal do campo de vetores unitários η ou curvatura da distribuição de planos Δ_η , numa carta $r = (s, v, w)$ de \mathbb{R}^3 , por

$$k_\eta(dr) = -\frac{\langle D\eta(dr), dr \rangle}{\langle dr, dr \rangle}, \quad (0.1)$$

sendo a distribuição de planos completamente integrável ou não.

Em seguida determinamos um sistema de equações diferenciais implícitas que caracterizam os campos de direções máximas e mínimas, segundo um problema de multiplicadores de Lagrange, dado por

$$L_1 \cdot ds^2 + L_2 \cdot dsdv + L_3 \cdot dsdw + L_4 \cdot dv^2 + L_5 \cdot dvdw + L_6 \cdot dw^2 = 0 \quad (0.2)$$

$$\eta_1 \cdot ds + \eta_2 \cdot dv + \eta_3 \cdot dw = 0 \quad (0.3)$$

com $L_i = L_i(s, v, w)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e $\eta_i = \eta_i(s, v, w)$, $i = 1, 2, 3$, dados por

$$\begin{aligned} L_1 &= \eta_1 \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial v} - \frac{\partial \eta_2}{\partial w} \right) + \eta_2 \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial s} + \frac{\partial \eta_1}{\partial w} \right) - \eta_3 \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial s} + \frac{\partial \eta_1}{\partial v} \right), \\ L_2 &= -2\eta_1 \frac{\partial \eta_3}{\partial s} + 2\eta_2 \frac{\partial \eta_3}{\partial v} - 2\eta_3 \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial s} \right), \\ L_3 &= 2\eta_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial s} + 2\eta_2 \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial w} - \frac{\partial \eta_1}{\partial s} \right) - 2\eta_3 \frac{\partial \eta_2}{\partial w}, \\ L_4 &= -\eta_1 \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial v} + \frac{\partial \eta_2}{\partial w} \right) - \eta_2 \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial s} - \frac{\partial \eta_1}{\partial w} \right) + \eta_3 \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial s} + \frac{\partial \eta_1}{\partial v} \right), \\ L_5 &= 2\eta_1 \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial v} - \frac{\partial \eta_3}{\partial w} \right) - 2\eta_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial v} + 2\eta_3 \frac{\partial \eta_1}{\partial w}, \\ L_6 &= \eta_1 \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial v} + \frac{\partial \eta_2}{\partial w} \right) - \eta_2 \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial s} + \frac{\partial \eta_1}{\partial w} \right) + \eta_3 \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial s} - \frac{\partial \eta_1}{\partial v} \right), \end{aligned}$$

equivalentemente supondo $\eta_1 \neq 0$, podemos determinar ds na equação (0.3) e substituindo em (0.2) temos,

$$L(s, v, w)dw^2 + M(s, v, w)dvdw + N(s, v, w)dv^2 = 0, \quad (0.4)$$

$$\eta_1(s, v, w)ds + \eta_2(s, v, w)dv + \eta_3(s, v, w)dw = 0. \quad (0.5)$$

Analogamente para $\eta_2 \neq 0$ e $\eta_3 \neq 0$.

No capítulo 2 iremos determinar o comportamento local das folheações \mathcal{F}_1 e

\mathcal{F}_2 , nas vizinhanças das singularidades da equação diferencial implícita (0.4), cujas soluções regulares são denominadas de folheações principais e cujas singularidades, definidas por $L(s, v, w) = M(s, v, w) = N(s, v, w) = 0$ são denominadas de pontos parcialmente umbílicos. Serão demonstrados resultados que caracterizam os 3 tipos genéricos de pontos parcialmente umbílicos. Mantendo a tradição, denominaremos de Darbouxianos D_1 , D_2 e D_3 , ver figuras 2.1 e 2.2, e o comportamento das folheações principais nas vizinhanças destes pontos. Também apresentaremos resultados sobre pontos que denominaremos de semi-Darbouxianos, pontos estes denotados por D_{12} e D_{23} (ver figuras 2.3 e 2.4). Estes resultados são análogos aos obtidos por Garcia, R. A. em sua tese de doutorado e Garcia, R. [8], e aos resultados do trabalho de Lopes, D., Sotomayor, J. e Garcia, R. A. em [13].

No capítulo 3 vamos analisar as folhas compactas ou linhas principais compactas que denominaremos de ciclos principais das folheações regulares, determinadas pelas equações implícitas (0.4) e (0.5), e também as órbitas periódicas do próprio campo η . Para isto iremos usar um referencial ortonormal definido ao longo da linha principal e estendê-lo a um sistema de coordenadas adequado numa vizinhança tubular da linha principal fechada. Determinamos a equação variacional que a derivada da transformação de Poincaré (transformação de primeiro retorno) deve satisfazer. Temos que $\pi'(0) = U(l)$, onde U é a solução da equação diferencial

$$\begin{aligned} \dot{U} &= MU \\ U(0) &= I, \end{aligned} \tag{0.6}$$

com

$$M(s) = \begin{pmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ -k_3(s) & B_2(s) \end{pmatrix}, \tag{0.7}$$

e

$$\begin{aligned} M_{11}(s) &= \frac{-k_3(s) \left(E_1(s) + k_1(s) \right) + F_1(s) \left(B_2(s) - 2A_1(s) \right) + B_{10}(s) + \frac{d}{ds} F_1(s)}{2 \left(k_2(s) - F_1(s) \right)}, \\ M_{12}(s) &= k_3(s) + \frac{k_1(s) B_2(s) - A_2(s) F_1(s) + \left(2B_2(s) - A_1(s) \right) F_2(s) + B_{11}(s) + \frac{d}{ds} F_2(s)}{2 \left(k_2(s) - F_1(s) \right)}. \end{aligned}$$

Em seguida usaremos estas equações para obter através de uma perturbação do campo η , um campo η_ε , $\varepsilon - C^r$ próximo de η , no qual a curva γ é um ciclo principal hiperbólico da folheação principal \mathcal{F}_1 . Para isso faremos uso de resultados da teoria

de controle que apresentamos no apêndice C, e podem ser encontrados em Coron, J. -M. [4], pag. 3 - 16 e Rifford e Ruggiero [17].

No capítulo 4 vamos demonstrar resultados relativos a conjuntos invariantes obtidos nos capítulos 2 e 3, conjuntos estes denominados de superfícies separatrizes parcialmente umbílicas e superfícies assintóticas aos ciclos principais hiperbólicos. Aqui também faremos uso de resultados da teoria de controle encontrados em Coron, J. -M. [4], pag. 11 e Chang, A. [3]. Em seguida vamos demonstrar resultados de genericidade do tipo Kupka-Smale na topologia de Whitney em $\mathfrak{X}_{\mathfrak{N}}^r(\mathbb{R}^3)$ (conjunto dos campos regulares de classe C^r), que apresentaremos no apêndice D e se encontram em Peixoto [15].

No capítulo 5 vamos considerar um campo de vetores η que tenha uma singularidade hiperbólica isolada, podemos observar que as equações diferenciais implícitas que caracterizam as linhas principais da distribuição de planos Δ_η , ainda são válidas. Vamos exibir as configurações principais de dois exemplos de campos de vetores η , uma cuja distribuição de planos Δ_η é completamente integrável e outro cuja distribuição de planos não é completamente integrável. No primeiro caso veremos que o conjunto parcialmente umbílico é constituído de duas retas que concorrem na origem e suas configurações principais são como no sistema triplamente ortogonal de superfícies de Dupin (ver figuras 5.1 e 5.2). No segundo caso mostraremos que o conjunto parcialmente umbílico é uma reta dupla que passa pela origem (ver figuras 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 e 5.7).

Mostraremos também, para uma classe de campos de vetores lineares η que contempla todos os tipos hiperbólicos que, genericamente, o conjunto dos pontos parcialmente umbílicos da distribuição de planos Δ_η é a união de duas retas concorrentes, ver Proposição 5.6 e Exemplo 5.7.

Em seguida mostraremos que para um campo de vetores η de classe C^r , $r \geq 2$, com singularidade hiperbólica na origem, cujo conjunto parcialmente umbílico da distribuição de planos associado a sua linearização seja a união de duas retas concorrentes na origem, o conjunto parcialmente umbílico da distribuição Δ_η é a união de duas curvas regulares γ_1 e γ_2 , com $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = (0, 0, 0)$ e $\gamma_1'(0) \wedge \gamma_2'(0) \neq (0, 0, 0)$.

CARACTERIZAÇÃO DAS LINHAS DE CURVATURAS DE UM CAMPO

1.1 Curvatura normal de um campo

Nesta seção iremos apresentar os conceitos e resultados preliminares que serão usados no decorrer deste trabalho.

Dado um campo de vetores $\eta = (\eta_1(s, v, w), \eta_2(s, v, w), \eta_3(s, v, w))$ regular em \mathbb{R}^3 , de classe C^r , $r \geq 2$, associado a este campo temos uma distribuição de planos ortogonal a η que denotaremos por Δ_η . Essa distribuição de planos é completamente integrável se, e somente se, $\langle \text{rot}\eta, \eta \rangle = 0$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual em \mathbb{R}^3 , ver Teorema de Frobenius [20] pag. 192.

Considere um plano Δ_0 da distribuição Δ_η passando por um ponto P_0 e um vetor $dr = (ds, dv, dw)$ contido neste plano tal que $P_0P = dr$, seja $\eta(P)$ o representante do campo η no ponto P e tome sua projeção ortogonal $\bar{\eta}(P)$ no plano definido pelo vetor $\eta(P_0)$ e a direção dr que determina um ângulo φ com $\eta(P_0)$, conforme figura 1.1. Definimos a curvatura normal do campo η unitário na direção dr , ou curvatura normal da distribuição Δ_η na direção dr , por

$$k_\eta(dr) = \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{-\varphi}{|dr|}. \quad (1.1)$$

Quando $P \rightarrow P_0$ temos que $\sin\varphi$ e φ são de mesma ordem infinitesimal, como $\bar{\eta}(P)$ e a projeção de $\eta(P)$ no plano definido por $\eta(P_0)$ e o vetor direcional dr temos que $\frac{\langle \bar{\eta}(P), dr \rangle}{|\bar{\eta}(P)|} = \frac{\langle \eta(P), dr \rangle}{|\eta(P)|}$ e $\sin\varphi = \frac{\langle \bar{\eta}(P), dr \rangle}{|\bar{\eta}(P)| \cdot |dr|}$, numa vizinhança de P_0 podemos escrever

$$\eta(P) = \eta(P_0) + D\eta(dr) + \mathcal{O}(dr), \quad (1.2)$$

onde $D\eta$ denota a diferencial do campo η , obtendo assim

$$\begin{aligned}
k_\eta(dr) &= \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{-\varphi}{|dr|} = \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{-\text{sen}\varphi}{|dr|} = \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{-\langle \bar{\eta}(P), dr \rangle}{|\bar{\eta}(P)| \cdot |dr|} \cdot \frac{1}{|dr|} \\
&= \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{-\langle \eta(P_0) + D\eta(dr) + \mathcal{O}(dr), dr \rangle}{|\bar{\eta}(P)| \cdot |dr|^2} = -\frac{\langle D\eta(dr), dr \rangle}{\langle dr, dr \rangle},
\end{aligned}$$

pois $|\bar{\eta}(P)| \rightarrow |\eta(P_0)| = 1$, quando $P \rightarrow P_0$. Para mais detalhes ver Aminov [1], pag 8.

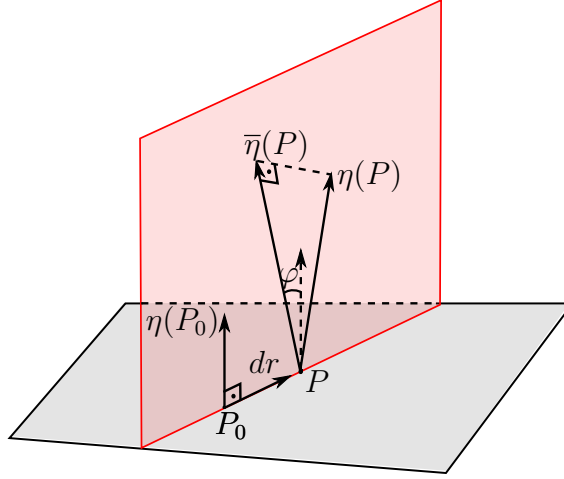


Figura 1.1: Definição da curvatura do campo η .

Observamos que a expressão obtida para a curvatura normal do campo η ou da distribuição de planos Δ_η

$$k_\eta(dr) = -\frac{\langle D\eta(dr), dr \rangle}{\langle dr, dr \rangle}, \quad (1.3)$$

depende apenas da direção dr e não de sua norma. O caso holonômico, ou seja, quando a distribuição de planos Δ_η é completamente integrável, a curvatura normal do campo na direção dr coincide com o conceito de curvatura normal associado à superfície. Variando a direção dr no círculo unitário \mathcal{S}^1 que é um conjunto compacto do plano, temos uma direção máxima e mínima para a curvatura normal do campo, que determinaremos a seguir.

Dado o campo unitário regular $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, com $\eta_i = \eta_i(r)$, $r = (s, v, w) \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, funções de classe C^k , $k \geq 2$, denote por $D\eta(dr) = (d\eta_1(r), d\eta_2(r), d\eta_3(r))$, $dr = (ds, dv, dw)$ e $d\eta_i(dr) = \langle \nabla \eta_i, dr \rangle$. Considere o problema de multiplicador de Lagrange:

$$\nabla k_\eta(dr) = \lambda \cdot \nabla G(dr), \quad G(dr) = \langle \eta, dr \rangle. \quad (1.4)$$

Diferenciando (1.3) em relação a variável dr temos

$$\begin{aligned} Dk_\eta(dr)(v) &= -\frac{(\langle D\eta(v), dr \rangle + \langle D\eta(dr), v \rangle) \cdot \langle dr, dr \rangle - 2\langle dr, v \rangle \langle D\eta(dr), dr \rangle}{\langle dr, dr \rangle^2} \\ &= \frac{1}{\langle dr, dr \rangle^2} \langle 2\langle D\eta(dr), dr \rangle \cdot dr - (D\eta + D\eta^t)(dr) \cdot \langle dr, dr \rangle, v \rangle, \end{aligned}$$

logo

$$\nabla k_\eta(dr) = \frac{1}{\langle dr, dr \rangle^2} (2\langle D\eta(dr), dr \rangle \cdot dr - (D\eta + D\eta^t)(dr) \cdot \langle dr, dr \rangle),$$

como $\nabla G(dr) = \eta$, temos a equação de autovetores

$$\frac{1}{\langle dr, dr \rangle^2} (2\langle D\eta(dr), dr \rangle \cdot dr - (D\eta + D\eta^t)(dr) \cdot \langle dr, dr \rangle) = \lambda \cdot \eta. \quad (1.5)$$

Como $|\eta| = 1$ e usando o fato que $\langle \eta, dr \rangle = 0$, fazendo o produto interno entre (1.5) e η determinamos

$$\lambda = - \left\langle \frac{(D\eta + D\eta^t)(dr)}{\langle dr, dr \rangle}, \eta \right\rangle, \quad (1.6)$$

voltando na equação (1.5) e substituindo o valor de λ temos

$$2\langle D\eta(dr), dr \rangle \cdot dr - (D\eta + D\eta^t)(dr) \cdot \langle dr, dr \rangle + \langle (D\eta + D\eta^t)(dr), \eta \rangle \cdot \eta \cdot \langle dr, dr \rangle = 0. \quad (1.7)$$

Fazendo o produto interno de (1.7) com o vetor $dr \wedge \eta$, onde \wedge denota o produto vetorial usual de \mathbb{R}^3 , obtemos uma outra forma equivalente para a equação de autovetores usando a notação de produto triplo misto usual

$$((D\eta + D\eta^t)(dr), dr, \eta) = 0. \quad (1.8)$$

Usando o fato que $(D\eta^t - D\eta)(dr) = dr \wedge \text{rot}(\eta)$, onde $\text{rot}(\eta)$ denota o rotacional do campo η e $D\eta^t$ a transposta de $D\eta$, podemos escrever (1.8) como

$$\begin{aligned} (2D\eta(dr) + D\eta^t(dr) - D\eta(dr), dr, \eta) &= 0 \\ 2(D\eta(dr), dr, \eta) + (dr \wedge \text{rot}(\eta), dr, \eta) &= 0 \\ 2(D\eta(dr), dr, \eta) + \langle \langle dr, dr \rangle \cdot \text{rot}(\eta) - \langle dr, \text{rot}(\eta) \rangle \cdot dr, \eta \rangle &= 0, \end{aligned}$$

assim o sistema

$$\begin{aligned} 2(D\eta(dr), dr, \eta) + \langle \text{rot}(\eta), \eta \rangle \cdot \langle dr, dr \rangle &= 0 \\ \langle dr, \eta \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} ((D\eta + D\eta^t)(dr), dr, \eta) &= 0 \\ \langle dr, \eta \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

caracterizam as direções máximas e mínimas do operador k_η restrito ao plano definido pela equação $\langle dr, \eta \rangle = 0$. Observe que no sistema (1.9) aparece o produto interno do campo com o seu rotacional, condição essa que caracteriza a integrabilidade total do campo.

O lema que segue nos diz que a hipótese do campo η ser unitário não é essencial para estudar o sistema de equações (1.9).

Lema 1.1. *O sistema de equações (1.9) não se altera quando multiplicamos o campo η por uma função escalar não nula $f(r)$.*

Demonstração. Multiplicando o campo η pela função escalar $f(r)$, temos

$$\begin{aligned} (2D(f(r)\eta)(dr), dr, f(r)\eta) + \langle \text{rot}(f(r)\eta), f(r)\eta \rangle \cdot \langle dr, dr \rangle &= 0 \\ 2(Df(r)(dr)\eta + f(r)D\eta(dr), dr, f(r)\eta) + \langle \nabla f(r) \wedge \eta + f(r) \text{rot}(\eta), f(r)\eta \rangle \cdot \langle dr, dr \rangle &= 0 \\ 2(f(r))^2(D\eta(dr), dr, \eta) + (f(r))^2 \langle \text{rot}(\eta), \eta \rangle \cdot \langle dr, dr \rangle &= 0 \\ (f(r))^2 \cdot [(2D\eta(dr), dr, \eta) + \langle \text{rot}(\eta), \eta \rangle \cdot \langle dr, dr \rangle] &= 0, \end{aligned}$$

como $\langle dr, \eta \rangle = 0$ e $f(r) \neq 0$, segue o resultado. \square

Podemos ainda interpretar a equação (1.5), lembrando que $\frac{\langle D\eta(dr), dr \rangle}{\langle dr, dr \rangle} = -k_\eta$ e denotando $(\frac{D\eta + D\eta^t}{2})(dr) = S(dr)$ como uma equação de autovetores do tipo

$$S(dr) - \langle S(dr), \eta \rangle \cdot \eta = -k_\eta \cdot dr. \quad (1.11)$$

A proposição a seguir descreve algumas propriedades do operador que define o lado esquerdo da equação de autovetores (1.11).

Proposição 1.2. *Seja $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definido por $P(v) = S(v) - \langle S(v), \eta \rangle \cdot \eta$, com $\eta \in \mathbb{R}^3$, $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico e $\pi = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, \eta \rangle = 0\}$, então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- 1) O núcleo do operador P denotado por $\ker(P)$ genericamente contém uma reta transversal ao plano π .
- 2) O plano π é invariante pelo operador P , isto é $P(\pi) \subseteq \pi$ e P restrito a π é um operador simétrico.
- 3) Os três autovalores de P são reais, sendo zero um autovalor simples com autovetor no $\ker(P)$.

Demonstração. Como o operador S é simétrico a matriz que o representa é

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}.$$

Sendo $v = (v_1, v_2, v_3)$, resolvendo a equação $P(v) = 0$ temos

$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} \eta_1 & b & c \\ \eta_2 & d & e \\ \eta_3 & e & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & \eta_1 \\ b & d & \eta_2 \\ c & e & \eta_3 \end{vmatrix}} \cdot v_3, \quad v_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & \eta_1 & c \\ b & \eta_2 & e \\ c & \eta_3 & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & \eta_1 \\ b & d & \eta_2 \\ c & e & \eta_3 \end{vmatrix}} \cdot v_3$$

como a propriedade do denominador não se anular é aberta segue a veracidade de 1). Para obter 2) basta usar a hipótese que $v, w \in \pi$ e verificar que $\langle P(v), \eta \rangle = 0$ e que $\langle P(v), w \rangle = \langle S(v), w \rangle = \langle v, S(w) \rangle = \langle v, P(w) \rangle$. Calculando o polinômio característico de P , temos

$$\begin{aligned} m(\lambda) &= \lambda(\lambda^2 + A\lambda + B), \\ A &= -a(\eta_2^2 + \eta_3^2) - f(\eta_1^2 + \eta_2^2) - d(\eta_1^2 + \eta_3^2) + 2(b \cdot \eta_1\eta_2 + c \cdot \eta_1\eta_3 + e \cdot \eta_2\eta_3), \\ B &= \eta_1^2(fd - e^2) + \eta_2^2(fa - c^2) + \eta_3^2(ad - b^2) \\ &\quad + 2\eta_1\eta_2(ec - bf) + 2\eta_1\eta_3(eb - cd) + 2\eta_1\eta_2(cb - ae), \end{aligned}$$

o que mostra que zero é um autovalor de P . Para mostrar que os outros autovalores são reais basta observar que o operador P restrito ao plano π é simétrico. \square

A Proposição (1.2) acima mostra que o problema de multiplicador de Lagrange definido na equação (1.4) tem 3 soluções críticas $k_0(p) = 0$, $k_1 = k_1(p)$ e $k_2 = k_2(p)$ reais cujos valores opostos denominaremos de **valores principais** ou **curvaturas principais**, associados a eles temos 3 direções que denominaremos de

direções principais, as curvas tangentes a essas direções serão denominadas *linhas de direções principais* ou simplesmente de *linhas principais*. Os pontos para os quais as três direções principais coincidirem serão denominados de *pontos umbílicos* e seu conjunto será denotado por $\mathcal{U}(\eta)$, os pontos onde apenas duas direções principais coincidem serão denominados de *pontos parcialmente umbílicos*. O conjunto dos pontos parcialmente umbílicos onde as curvaturas estão restritas ao plano $\Delta_\eta(p)$ será definido por $\mathcal{P}(\eta) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid k_1(p) = k_2(p)\}$. Associado aos campos de direções principais $k_1(p)$ e $k_2(p)$ as linhas de direções principais definem duas folheações ortogonais em $\mathbb{R}^3 - \mathcal{P}(\eta)$, que serão respectivamente, denotadas por $\mathcal{F}_1(\eta)$ e $\mathcal{F}_2(\eta)$ e denominadas de *folheações principais* do campo η ou equivalentemente da distribuição Δ_η . A folheação definida pelas linhas integrais do campo η denotada por \mathcal{F}_η também é ortogonal as folheações principais.

A Proposição 1.2 também nos diz que outra maneira de caracterizar as linhas principais é através do sistema

$$\begin{aligned} P(dr) &= \lambda \cdot dr & (1.12) \\ \langle \eta, dr \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Os sistemas de equações (1.9), (1.10) e (1.12) caracterizam de maneiras equivalentes as linhas principais do campo η ou da distribuição Δ_η . Com isso fixaremos a seguinte notação

$$\mathfrak{X}_{\mathbb{R}^3}^r = \{\text{Conjunto dos campos regulares de classe } C^r \text{ em } \mathbb{R}^3 \}.$$

A equação de autovetor obtida em (1.10) juntamente com a condição $\langle \eta, dr \rangle = 0$, equivale ao sistema de equações diferenciais implícitas do tipo

$$L_1 \cdot ds^2 + L_2 \cdot dsdv + L_3 \cdot dsdw + L_4 \cdot dv^2 + L_5 \cdot dvdw + L_6 \cdot dw^2 = 0 \quad (1.13a)$$

$$\eta_1 \cdot ds + \eta_2 \cdot dv + \eta_3 \cdot dw = 0, \quad (1.13b)$$

com

$$\begin{aligned} L_1 &= \eta_1 \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial v} - \frac{\partial \eta_2}{\partial w} \right) + \eta_2 \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial s} + \frac{\partial \eta_1}{\partial w} \right) - \eta_3 \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial s} + \frac{\partial \eta_1}{\partial v} \right), \\ L_2 &= -2\eta_1 \frac{\partial \eta_3}{\partial s} + 2\eta_2 \frac{\partial \eta_3}{\partial v} - 2\eta_3 \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial s} \right), \\ L_3 &= 2\eta_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial s} + 2\eta_2 \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial w} - \frac{\partial \eta_1}{\partial s} \right) - 2\eta_3 \frac{\partial \eta_2}{\partial w}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_4 &= -\eta_1 \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial v} + \frac{\partial \eta_2}{\partial w} \right) - \eta_2 \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial s} - \frac{\partial \eta_1}{\partial w} \right) + \eta_3 \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial s} + \frac{\partial \eta_1}{\partial v} \right), \\
L_5 &= 2\eta_1 \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial v} - \frac{\partial \eta_3}{\partial w} \right) - 2\eta_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial v} + 2\eta_3 \frac{\partial \eta_1}{\partial w}, \\
L_6 &= \eta_1 \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial v} + \frac{\partial \eta_2}{\partial w} \right) - \eta_2 \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial s} + \frac{\partial \eta_1}{\partial w} \right) + \eta_3 \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial s} - \frac{\partial \eta_1}{\partial v} \right),
\end{aligned}$$

ou equivalentemente, sem perda de generalidade, supondo $\eta_1 \neq 0$, podemos determinar ds em (1.13b), e obtermos o sistema

$$L(s, v, w)dw^2 + M(s, v, w)dwdv + N(s, v, w)dv^2 = 0, \quad (1.14a)$$

$$\eta_1(s, v, w)ds + \eta_2(s, v, w)dv + \eta_3(s, v, w)dw = 0. \quad (1.14b)$$

com

$$\begin{aligned}
L(s, v, w) &= \eta_1(\eta_1^2 + \eta_3^2) \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial v} + \frac{\partial \eta_2}{\partial w} \right) - \eta_3(\eta_1^2 + \eta_3^2) \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial v} + \frac{\partial \eta_2}{\partial s} \right) \\
&\quad + \eta_2(\eta_3^2 - \eta_1^2) \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial w} + \frac{\partial \eta_3}{\partial s} \right) + 2\eta_1\eta_2\eta_3 \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial s} - \frac{\partial \eta_3}{\partial w} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(s, v, w) &= -2\eta_2(\eta_1^2 + \eta_3^2) \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial v} + \frac{\partial \eta_2}{\partial s} \right) + 2\eta_3(\eta_1^2 + \eta_2^2) \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial s} + \frac{\partial \eta_1}{\partial w} \right) \\
&\quad + 2\eta_1(\eta_2^2 - \eta_3^2) \frac{\partial \eta_1}{\partial s} + 2\eta_1(\eta_1^2 + \eta_3^2) \frac{\partial \eta_2}{\partial v} - 2\eta_1(\eta_1^2 + \eta_2^2) \frac{\partial \eta_3}{\partial w},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(s, v, w) &= -\eta_1(\eta_1^2 + \eta_2^2) \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial w} + \frac{\partial \eta_3}{\partial v} \right) + \eta_3(\eta_1^2 - \eta_2^2) \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial v} + \frac{\partial \eta_2}{\partial s} \right) \\
&\quad + \eta_2(\eta_1^2 + \eta_2^2) \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial w} + \frac{\partial \eta_3}{\partial s} \right) + 2\eta_1\eta_2\eta_3 \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial s} \right).
\end{aligned}$$

O conjunto singular onde $L(s, v, w) = M(s, v, w) = N(s, v, w) = 0$ é o conjuntos dos pontos parcialmente umbílicos $\mathcal{P}(\eta)$.

Observação 1.3. Para determinar o conjunto dos pontos parcialmente umbílicos, definido por $L = M = N = 0$, basta resolver duas equações, que a solução anula a terceira, pois L , M e N , satisfazem a relação funcional

$$-(\eta_1^2 + \eta_3^2) \cdot L + \eta_2\eta_3 \cdot M - (\eta_1^2 + \eta_2^2) \cdot N = 0.$$

1.2 Segunda forma fundamental de uma distribuição de planos

Dada uma distribuição de planos Δ_η em \mathbb{R}^3 associada ao campo η , em Krouglov [11] tem uma definição da segunda forma fundamental de uma distribuição de planos, que foi dada anteriormente por Reinhart [16], como se segue.

Definição 1.4. *A segunda forma fundamental de uma distribuição de planos Δ_η é uma forma bilinear em Δ_η definida como*

$$II(X, Y) = \frac{1}{2} \langle \nabla_X Y + \nabla_Y X, \eta \rangle. \quad (1.15)$$

onde X e Y estão em Δ_η , η um campo normal unitário a Δ_η e ∇ é uma conexão de Levi-Civita do produto interno canônico em \mathbb{R}^3 .

Neste texto denotaremos a conexão de Levi-Civita do produto interno canônico em \mathbb{R}^3 por $DY(X) = \nabla_X Y$, que significa a derivada de Y na direção X . Como X e Y estão em Δ_η temos que $\langle X, \eta \rangle = 0$ e $\langle Y, \eta \rangle = 0$ diferenciando a primeira na direção de Y e a segunda na direção de X temos

$$\begin{aligned} \langle DX(Y), \eta \rangle &= -\langle D\eta(Y), X \rangle, \\ \langle DY(X), \eta \rangle &= -\langle D\eta(X), Y \rangle, \end{aligned} \quad (1.16)$$

substituindo (1.16) em (1.15) segue que

$$II(X, Y) = -\frac{1}{2} (\langle D\eta(Y), X \rangle + \langle D\eta(X), Y \rangle). \quad (1.17)$$

Em particular calculando (1.17) com $X = Y = dr$ e dividindo por $\langle dr, dr \rangle$ temos

$$\frac{II(dr, dr)}{\langle dr, dr \rangle} = -\frac{\langle D\eta(dr), dr \rangle}{\langle dr, dr \rangle} = k_\eta(dr). \quad (1.18)$$

CLASSIFICAÇÃO DOS PONTOS PARCIALMENTE UMBÍLICOS

2.1 Caracterização dos pontos parcialmente umbílicos

Para estudar o conjunto dos pontos parcialmente umbílicos $P(\eta)$ iremos usar uma ferramenta de desingularização conhecida por método de Lie Cartan ou levantamento de Lie Cartan

Considere o campo $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, de classe C^r , $r \geq 3$, escrito na carta (s, v, w) , e consideremos que os desenvolvimentos em Taylor das suas funções componentes em torno da origem sejam dadas por

$$\begin{aligned} \eta_1 &= a_0 + a_1s + a_2v + a_3w + a_{11}s^2 + a_{12}sv + a_{13}sw + a_{22}v^2 + a_{23}vw + a_{33}w^2 \\ &\quad + a_{111}s^3 + a_{112}s^2v + a_{113}s^2w + a_{122}sv^2 + a_{123}svw + a_{133}sw^2 + a_{222}v^3 \\ &\quad + a_{223}v^2w + a_{233}vw^2 + a_{333}w^3 + \mathcal{O}(4), \\ \eta_2 &= b_0 + b_1s + b_2v + b_3w + b_{11}s^2 + b_{12}sv + b_{13}sw + b_{22}v^2 + b_{23}vw + b_{33}w^2 \\ &\quad + b_{111}s^3 + b_{112}s^2v + b_{113}s^2w + b_{122}sv^2 + b_{123}svw + b_{133}sw^2 + b_{222}v^3 \\ &\quad + b_{223}v^2w + b_{233}vw^2 + b_{333}w^3 + \mathcal{O}(4), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \eta_3 &= c_0 + c_1s + c_2v + c_3w + c_{11}s^2 + c_{12}sv + c_{13}sw + c_{22}v^2 + c_{23}vw + c_{33}w^2 \\ &\quad + c_{111}s^3 + c_{112}s^2v + c_{113}s^2w + c_{122}sv^2 + c_{123}svw + c_{133}sw^2 + c_{222}v^3 \\ &\quad + c_{223}v^2w + c_{233}vw^2 + c_{333}w^3 + \mathcal{O}(4). \end{aligned}$$

Se o campo η não se anula numa vizinhança da origem $(0, 0, 0)$, sem perda de generalidade, suponhamos que $\eta(0, 0, 0) = (1, 0, 0)$, ou seja, considere $a_0 = 1$,

$b_0 = c_0 = 0$. Substituindo o campo η acima nas equações (1.14a) e (1.14b) obtemos

$$\begin{aligned} L(s, v, w) &= c_2 + b_3 + \left[a_1(b_3 + c_2) - b_1(a_3 + c_1) - c_1(a_2 + b_1) + b_{13} + c_{12} \right] s \\ &\quad + \left[-b_2(a_3 + c_1) + a_2b_3 - b_1c_2 + b_{23} + 2c_{22} \right] v \\ &\quad + [a_3c_2 - b_3c_1 - c_3(a_2 + b_1) + c_{23} + 2b_{33}]w + \mathcal{O}(2), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} M(s, v, w) &= 2(b_2 - c_3) + 2 \left[c_1(a_3 + c_1) - b_1(a_2 + b_1) + a_1(b_2 - c_3) + b_{12} - c_{13} \right] s \\ &\quad + 2 \left[c_2(a_3 + c_1) - b_1b_2 - a_2c_3 + 2b_{22} - c_{23} \right] v \\ &\quad + 2 \left[a_3b_2 - b_3(a_2 + b_1) + c_1c_3 - 2c_{33} + b_{23} \right] w + \mathcal{O}(2), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} N(s, v, w) &= -(c_2 + b_3) - \left[a_1(b_3 + c_2) - b_1(a_3 + c_1) - c_1(a_2 + b_1) + b_{13} + c_{12} \right] s \\ &\quad - \left[-b_2(a_3 + c_1) + a_2b_3 - b_1c_2 + b_{23} + 2c_{22} \right] v \\ &\quad - \left[a_3c_2 - b_3c_1 - c_3(a_2 + b_1) + c_{23} + 2b_{33} \right] w + \mathcal{O}(2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Supondo que $(0, 0, 0)$ esteja no conjunto singular $L(s, v, w) = M(s, v, w) = N(s, v, w) = 0$, obtemos as condições $c_3 = b_2$ e $c_2 = -b_3$. Fazendo uma rotação no plano Δ_0 podemos supor que o coeficiente do termo linear em v de $L(s, v, w)$ e $N(s, v, w)$ sejam nulos. Veja Proposição A.1 no apêndice A. Então, sem perda de generalidade, podemos considerar as funções L , M e N na forma reduzida como segue,

$$\begin{aligned} L_r(s, v, w) &= -q \cdot s - b \cdot w + \mathcal{O}(2), \\ M_r(s, v, w) &= Q \cdot s + (b - a) \cdot v + c \cdot w + \mathcal{O}(2), \\ N_r(s, v, w) &= q \cdot s + b \cdot w + \mathcal{O}(2), \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde

$$\begin{aligned} b &= (a_3 + c_1)b_3 + b_2(a_2 + b_1) - c_{23} - 2b_{33}, \\ b - a &= -2 \left[(a_3 + c_1)b_3 + b_2(a_2 + b_1) - 2b_{22} + c_{23} \right], \\ c &= -2 \left[(a_2 + b_1)b_3 - (a_3 + c_1)b_2 + 2c_{33} - b_{23} \right], \\ q &= (a_3 + c_1)b_1 + (a_2 + b_1)c_1 - b_{13} - c_{12}, \\ Q &= 2 \left[(a_3 + c_1)c_1 - (a_2 + b_1)b_1 + b_{12} - c_{13} \right]. \end{aligned}$$

A notação acima se justifica para manter a notação usual da classificação de pontos umbílicos de superfícies de dimensão 2 como em [18] e pontos parcialmente umbílicos em hipersuperfícies em dimensão 3, em [7] e [8].

Definição 2.1. *O ponto $p(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ parcialmente umbílico é dito Darbouxiano do tipo D_i , se com a notação reduzida de (2.5), satisfaz as condições T e D_i que seguem:*

$$T) \quad b(b-a) \neq 0.$$

$$D_1) \quad \left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2 < 0, \text{ ou}$$

$$D_2) \quad 1 < \frac{a}{b} < \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2, \quad a - 2b \neq 0, \text{ ou}$$

$$D_3) \quad \frac{a}{b} < 1.$$

Teorema 2.2. *Sejam $\eta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, de classe C^k , $k \geq 4$, e p um ponto parcialmente umbílico. Então existe uma vizinhança V_p de p , onde $C_\eta = \mathcal{P}(\eta) \cup V_p$ é uma curva suave de pontos D_i (Darbouxianos), tais que:*

- i) Se p é do tipo D_1 , existe uma única superfície separatriz invariante $W_1(C_\eta) \subset V_p$, com $\partial W_1(C_\eta) = C_\eta$, de classe C^{k-3} , fibrada sobre C_η cujas fibras são folhas de $\mathcal{F}_i(\eta)$. Além disso existe uma vizinhança V_{C_η} de C_η tal que o conjunto $V_{C_\eta} \setminus W_1(C_\eta)$ é um setor hiperbólico de $\mathcal{F}_i(\eta)$ (ver figuras 2.1(a) e 2.2(a)).*
- ii) Se p é do tipo D_2 , existem duas superfícies separatrizes invariantes $W_1(C_\eta)$ e $W_2(C_\eta) \subset V_p$, com $\partial W_1(C_\eta) = \partial W_2(C_\eta) = C_\eta$, de classe C^{k-3} , fibrada sobre C_η cujas fibras são folhas de $\mathcal{F}_i(\eta)$. Além disso existe uma vizinhança V_{C_η} de C_η tal que o conjunto $V_{C_\eta} \setminus W_1(C_\eta) \cup W_2(C_\eta)$ contém um setor hiperbólico e um setor parabólico da folheação $\mathcal{F}_i(\eta)$ (ver figuras 2.1(b) e 2.2(b)).*
- iii) Se p é do tipo D_3 , existem três superfícies separatrizes invariantes $W_1(C_\eta)$, $W_2(C_\eta)$ e $W_3(C_\eta) \subset V_p$, com $\partial W_1(C_\eta) = \partial W_2(C_\eta) = \partial W_3(C_\eta) = C_\eta$, de classe C^{k-3} , fibrada sobre C_η cujas fibras são folhas de $\mathcal{F}_i(\eta)$. Além disso existe uma vizinhança V_{C_η} de C_η tal que o conjunto $V_{C_\eta} \setminus W_1(C_\eta) \cup W_2(C_\eta) \cup W_3(C_\eta)$ contém 3 setores hiperbólicos da folheação $\mathcal{F}_i(\eta)$ (ver figuras 2.1(c) e 2.2(c)).*

As superfícies separatrizes invariantes W_1 , W_2 e W_3 , obtidas no Teorema 2.2 são denominadas **superfícies separatrizes invariantes parcialmente umbílicas**.

Observação 2.3. Os pontos parcialmente umbílicos são determinados pelo sistema $L_r(s, v, w) = M_r(s, v, w) = N_r(s, v, w) = 0$. Como a parte linear de $N_r(s, v, w) = -L_r(s, v, w)$, na vizinhança de $(0, 0, 0)$, o conjunto de pontos parcialmente umbílicos são determinados por $L_r(s, v, w) = M_r(s, v, w) = 0$.

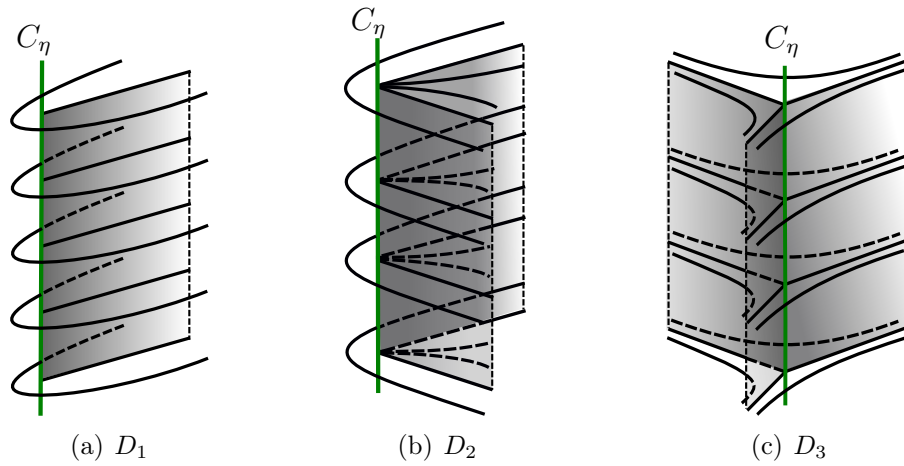


Figura 2.1: Configuração dos pontos parcialmente umbílicos Darbouxianos da Folheação $\mathcal{F}_1(\eta)$.

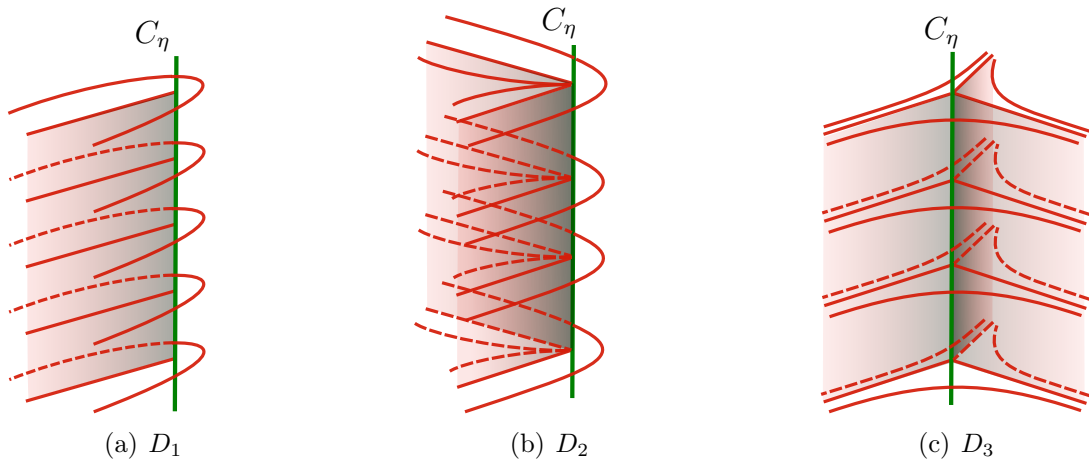


Figura 2.2: Configuração dos pontos parcialmente umbílicos Darbouxianos da Folheação $\mathcal{F}_2(\eta)$.

Lema 2.4. O conjunto dos pontos parcialmente umbílicos $\mathcal{P}(\eta)$ na vizinhança de um ponto parcialmente umbílico Darbouxiano p do tipo D_i , $i = 1, 2, 3$ é uma curva regular constituída de pontos do mesmo tipo.

Demonstração. Sem perda de generalidade, considere $p = (0, 0, 0)$ e L_r, M_r na forma reduzida (2.5). Como

$$\frac{\partial(L_r, M_r)}{\partial(v, w)}(0, 0, 0) = b(b - a) \neq 0, \quad (2.6)$$

pelo Teorema da função implícita existe uma vizinhança V_p tal que $v = v(s)$ e $w = w(s)$ ou seja se $q \in V_p \cap \mathcal{P}(\eta)$, podemos parametrizar $q = (s, v(s), w(s))$ que define localmente uma curva regular. Como as condições de classificação dos pontos parcialmente umbílicos Darbouxianos D_i , $i = 1, 2, 3$, são abertas segue o resultado.

□

Definição 2.5. O ponto $p(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ parcialmente umbílico é dito semi-Darbouxiano do tipo D_{12} , se com a notação reduzida de (2.5), satisfaz as condições que seguem:

D_{12}) $bc(b-a) \neq 0$, $a-2b=0$ e $\mathcal{X}_{12} \neq 0$,

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{12} = & -\frac{(bb_3 + b_2c)}{2cb^2}q^2 + \frac{b_2}{2cb}qQ - \frac{1}{4cb^2}[-2b^2b_1 + b(4a_1b_2^2 - 4a_1b_3^2 - 2a_2a_3b_3 + \\ & 2a_3^2b_2 - 2a_3b_1b_3 + 2a_3b_2c_1 - 4b_3^3 + 4b_2b_3^2 + 4a_2b_3c_3 - 4a_{22}b_2 - 2a_3b_{23} - 4a_{33}b_2 - 2b_1c_{23} - \\ & 2b_{12}b_2 + 2b_{13}b_3 - 2b_2c_{13} - 2b_{23}c_1 - 2b_3c_{12} + 4b_{233} + 4c_{223}) + c(-8a_1b_2b_3 - 2a_2^2b_3 + a_2a_3b_2 + \\ & a_2b_2c_1 - a_3^2b_3 - 3a_3b_1b_2 - 2a_3b_3c_1 + 2b_1^2b_3 - 3b_1b_2c_1 + 8b_2^2b_3 - b_3c_1^2 + 2a_2b_{23} + 8a_{22}b_3 - \\ & 4a_{23}b_2 - 2a_3b_{33} - 3a_3c_{23} + 2b_1b_{23} + 4b_{12}b_3 - 4b_2c_{12} - 2b_{33}c_1 - 3c_1c_{23} + 4b_{223} + 12c_{222})]q - \\ & \frac{1}{4cb}(8a_1b_2b_3 + 2a_2^2b_3 - a_2a_3b_2 - a_2b_2c_1 + a_3^2b_3 + 3a_3b_1b_2 + 2a_3b_3c_1 - 2b_1^2b_3 + 3b_1b_2c_1 - 8b_2^2b_3 + \\ & b_3c_1^2 - 2a_2b_{23} - 8a_{22}b_3 + 4a_{23}b_2 + 2a_3b_{33} + 3a_3c_{23} - 2b_1b_{23} - 4b_{12}b_3 + 4b_2c_{12} + 2b_{33}c_1 + 3c_1c_{23} - \\ & 4b_{223} - 12c_{222})Q - \frac{1}{4c}(2a_1a_2b_3 - 2a_1a_3b_2 + 6a_1b_1b_3 - 6a_1b_2c_1 - 4b_1b_2b_3 + 4b_2^2c_1 - 2a_{12}b_3 + \\ & 2a_{13}b_2 - 2a_2b_{13} + 4a_{22}c_1 + 2a_{23}b_1 + 2a_3b_{12} + 4b_1c_{12} - 4b_{11}b_3 + 4b_{12}c_1 + 4b_2c_{11} - 2b_{123} - 4c_{122}). \end{aligned}$$

Teorema 2.6. Seja p um ponto parcialmente umbílico semi-Darbouxiano do tipo D_{12} . Então existe uma vizinhança V_p de p , tal que $V_p \cap \mathcal{P}(\eta) = C_\eta$ é uma curva de classe C^{k-3} transversal ao plano $\Delta_\eta(p)$ em p , com $C_\eta = C_1 \cup \{p\} \cup C_2$, com um dos arcos de curva sendo do tipo D_1 e o outro arco do tipo D_2 , cuja interseção é o ponto p , tais que (ver figuras 2.3(a) e 2.3(b)):

i) Existe uma superfície separatriz parcialmente umbílica de $\mathcal{F}_2(\eta)$, $W_1(C_1) \cup F_1(p) \cup W_2(C_2)$, com:

- a) $W_1(C_1)$ é uma superfície separatriz do tipo D_1 .
- b) $W_2(C_2)$ é uma superfície separatriz do tipo D_2 .
- c) F_1 é uma folha de $\mathcal{F}_2(\eta)$, assintótica a p .

ii) Existe uma superfície separatriz parcialmente umbílica $W_3(C_2) \cup F_2$ de $\mathcal{F}_2(\eta)$, com:

- a) $W_3(C_2)$ é uma superfície separatriz do tipo D_2 .
- b) F_2 é uma folha de $\mathcal{F}_2(\eta)$, assintótica a p .

iii) Existe uma fatia de setor tridimensional S cuja fronteira ∂S é estratificada em estratos de dimensão dois, um e zero, com:

- a) $W_2(C_2) \cup W_3(C_2) \cup W_4(p)$ são estratos de dimensão dois. Além disso $W_4(p)$ é uma superfície invariante constituídas de folhas de $\mathcal{F}_2(\eta)$, assintóticas a p .

- b) $F_1 \cup C_2 \cup F_2$ são estratos de dimensão um.
c) p é um estrato de dimensão zero.
iv) O mesmo é verdade para folheação $\mathcal{F}_1(\eta)$ que é ortogonal a folheação $\mathcal{F}_2(\eta)$.

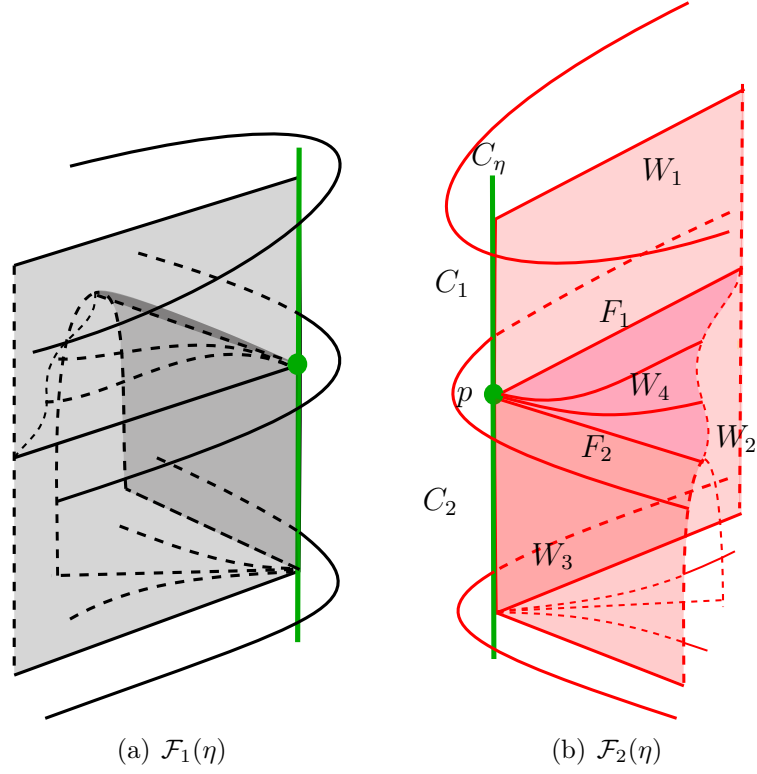


Figura 2.3: Configuração dos pontos parcialmente umbílicos semi-Darbouxianos D_{12} .

Definição 2.7. O ponto $p(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ parcialmente umbílico é dito semi-Darbouxiano do tipo D_{23} , se com a notação reduzida de (2.5), satisfaz às condições que seguem:

D_{23} $(b - a) \neq 0$, $bQ - cq \neq 0$ e $\mathcal{X}_{23} = A \cdot b + B \cdot c \neq 0$,
onde

$$\begin{aligned}
A = & -2b_1^2b_2 - 4(a_3 + c_1)b_1b_3 - 2b_1c_{23} - 4b_2^3 + 4a_1b_2^2 + 4b_2b_3^2 - 4(a_{23} + c_{12})b_3 \\
& + (2a_2^2 + 2a_3^2 + 4a_3c_1 + 2c_1^2 - 8a_{22} - 4b_{12})b_2 - 4a_1b_3^2 \\
& - 2a_2c_{23} - 2a_3b_{23} - 2b_{23}c_1 + 12b_{222} - 4c_{223}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
B = & b_1^2b_3 - 2(a_3 + c_1)b_1b_2 + b_1b_{23} + 4b_2^2b_3 - 4a_1b_2b_3 - 2(a_{23} + c_{12})b_2 \\
& + (-a_2^2 - a_3^2 - 2a_3c_1 - c_1^2 + 4a_{22} + 2b_{12})b_3 \\
& + a_2b_{23} - a_3c_{23} - c_1c_{23} + 2b_{223} + 6c_{222}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Teorema 2.8. *Seja p um ponto parcialmente umbílico semi-Darbouxiano do tipo D_{23} . Então existe uma vizinhança V_p de p , tal que $V_p \cap \mathcal{P}(\eta) = C_\eta$ é uma curva de classe C^{k-3} tangente ao plano $\Delta_\eta(p)$ em p , com $C_\eta = C_1 \cup \{p\} \cup C_2$, com um dos arcos de curva sendo do tipo D_2 e o outro arco do tipo D_3 , cuja interseção é o ponto p , tais que:*

- i) *Existem três superfícies regulares $W_1(C_\eta)$, $W_2(C_\eta)$ e $W_3(C_\eta)$ em V_p , ambas contendo a curva parcialmente umbílica C_η , a qual determina duas componentes conexas em cada superfície, onde uma componente conexa de $W_i(C_\eta) \setminus C_\eta$, $i = 1, 2, 3$ é invariante por $\mathcal{F}_1(\eta)$ e a outra por $\mathcal{F}_2(\eta)$, ver figuras 2.4(a) e 2.4(b).*
- ii) *Existe uma superfície $W_4(p)$ gerada por folhas de $\mathcal{F}_2(\eta)$ assintóticas a p , ver figura 2.4(b).*
- iii) *Existe um setor parabólico tridimensional S_1 na folheação $\mathcal{F}_1(\eta)$, tal que a fronteira ∂S_1 é a união de estratos de dimensão dois, um e zero (ver figura 2.4(a)):*
 - a) $W_2(C_\eta) \cup W_3(C_\eta)$ são estratos de dimensão dois.
 - b) $F_1 \cup F_2 \cup C_1 \cup C_2$ são estratos de dimensão um.
 - c) $\{p\}$ é o estrato de dimensão zero.
- iv) *Existe um setor parabólico tridimensional S_2 na folheação $\mathcal{F}_2(\eta)$, tal que a fronteira ∂S_2 é a união de estratos de dimensão dois, um e zero (ver figura 2.4(b)):*
 - a) $W_2(C_\eta) \cup W_3(C_\eta) \cup W_4(C_\eta)$ são estratos de dimensão dois.
 - b) $F_4 \cup F_3 \cup C_1$ são estratos de dimensão um.
 - c) $\{p\}$ é o estrato de dimensão zero.

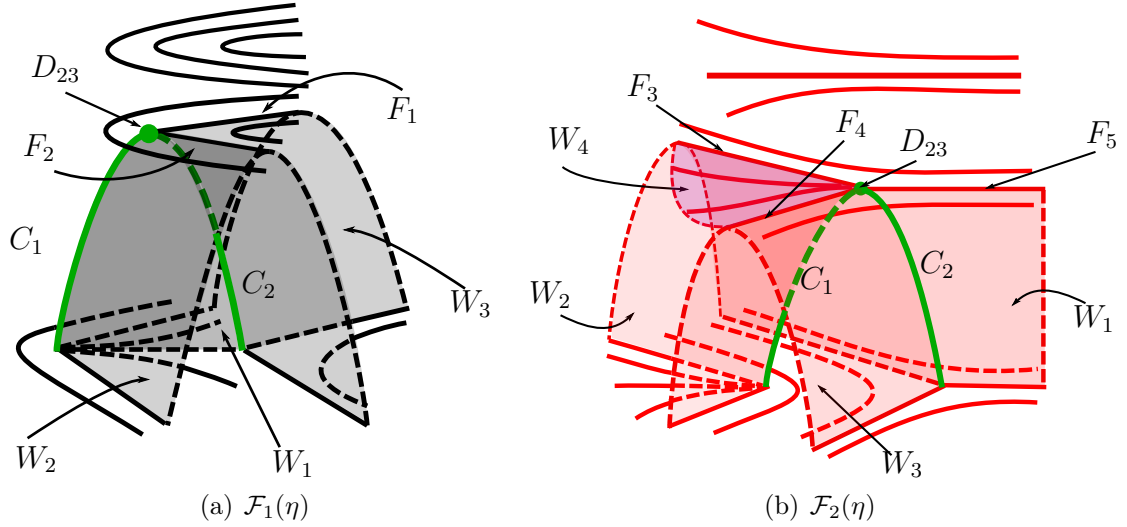


Figura 2.4: Configuração dos pontos parcialmente umbílicos semi-Darbouxianos D_{23} .

2.2 Levantamento de Lie-Cartan

Considerando a equação reduzida

$$L_r(s, v, w)dw^2 + M_r(s, v, w)dwdv + N_r(s, v, w)dv^2 = 0 \quad (2.9)$$

dividindo por dv^2 e fazendo $P = \frac{dw}{dv}$ obtemos a equação

$$\mathcal{L}(s, v, w, P) = L_r(s, v, w)P^2 + M_r(s, v, w)P + N_r(s, v, w) = 0, \quad (2.10)$$

que define localmente uma hipersuperfície no espaço projetivo $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, denominada *hipersuperfície de Lie-Cartan*. Derivando implicitamente a equação $\mathcal{L}(s, v, w, P) = 0$ em relação a t , temos

$$\mathcal{L}_s \cdot \frac{ds}{dt} + \mathcal{L}_v \cdot \frac{dv}{dt} + \mathcal{L}_w \cdot \frac{dw}{dt} + \mathcal{L}_P \cdot \frac{dP}{dt} = 0, \quad (2.11)$$

onde $\mathcal{L}_s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s}$, $\mathcal{L}_v = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}$, $\mathcal{L}_w = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}$ e $\mathcal{L}_P = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P}$. Considerando a condição de restrição ao plano $\Delta_\eta = 0$ dada por (1.14b) e diferenciando implicitamente em relação a t temos

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{\eta_1} \cdot \left(\eta_2 \frac{dv}{dt} + \eta_3 \frac{dw}{dt} \right). \quad (2.12)$$

Fazendo $\dot{v} = \frac{dv}{dt} = 1$, $\dot{w} = \frac{dw}{dt} = \dot{P}$, obtemos o campo tangente à hipersuperfície de Lie-Cartan na carta $(s, v, w, P = \frac{dw}{dv})$

$$X_P := \begin{cases} \dot{s} = \frac{1}{\eta_1} \cdot (\eta_2 + \eta_3 \cdot P) \cdot \mathcal{L}_P \\ \dot{v} = \mathcal{L}_P \\ \dot{w} = \mathcal{L}_P \cdot P \\ \dot{P} = - \left(\frac{1}{\eta_1} \cdot (\eta_2 + \eta_3 \cdot P) \cdot \mathcal{L}_s + \mathcal{L}_v + \mathcal{L}_w \cdot P \right) \end{cases} \quad (2.13)$$

Analogamente na carta $(s, v, w, \bar{P} = \frac{dw}{dv})$, temos

$$X_{\bar{P}} := \begin{cases} \dot{s} = \frac{1}{\eta_1} \cdot (\eta_2 \cdot \bar{P} + \eta_3) \cdot \mathcal{L}_{\bar{P}} \\ \dot{v} = \mathcal{L}_{\bar{P}} \cdot \bar{P} \\ \dot{w} = \mathcal{L}_{\bar{P}} \\ \dot{\bar{P}} = - \left(\frac{1}{\eta_1} \cdot (\eta_2 \cdot \bar{P} + \eta_3) \cdot \mathcal{L}_s + \mathcal{L}_v \cdot \bar{P} + \mathcal{L}_w \right) \end{cases} \quad (2.14)$$

As projeções das curvas integrais de X_P e $X_{\bar{P}}$, respectivamente por $\Pi_P(s, v, w, P) = (s, v, w)$ e $\Pi_{\bar{P}}(s, v, w, \bar{P}) = (s, v, w)$, são as linhas principais das folheações $\mathcal{F}_1(\eta)$ e $\mathcal{F}_2(\eta)$. As singularidades de X_P e $X_{\bar{P}}$, são respectivamente, dadas por $(0, 0, 0, P_i)$ e $(0, 0, 0, \bar{P}_i)$, que são as respectivas soluções de

$$\begin{cases} \mathcal{L}(s, v, w, P) = 0 \\ \frac{1}{\eta_1} \cdot (\eta_2 + \eta_3 \cdot P) \cdot \mathcal{L}_s + \mathcal{L}_v + \mathcal{L}_w \cdot P = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

e

$$\begin{cases} \mathcal{L}(s, v, w, \bar{P}) = 0 \\ \frac{1}{\eta_1} \cdot (\eta_2 \cdot \bar{P} + \eta_3) \cdot \mathcal{L}_s + \mathcal{L}_v \cdot \bar{P} + \mathcal{L}_w = 0 \end{cases}, \quad (2.16)$$

cujas projeções são os pontos parcialmente umbílicos de (2.9).

Para demonstrar os resultados a seguir iremos exibir os cálculos relativos ao campo de Lie-Cartan na carta $(s, v, w, P = \frac{dw}{dv})$, na outra carta é inteiramente análogo. Na carta $(s, v, w, P = \frac{dw}{dv})$, temos

$$X_P := \begin{cases} X_1 = \left[(b_1s + b_2v + b_3w + \mathcal{O}(2)) + (c_1s - b_3v + b_2w + \mathcal{O}(2)) \cdot P \right] \cdot X_2 \\ X_2 = \left[Qs + (b - a)v + cw + \mathcal{O}(2) \right] + \left[-2(qs + bw) + \mathcal{O}(2) \right] p + \mathcal{O}(2) \\ X_3 = P \cdot X_2 \\ X_4 = A_3(s, v, w) \cdot P^3 + A_2(s, v, w) \cdot P^2 + A_1(s, v, w) \cdot P + A_0(s, v, w) \end{cases} \quad (2.17)$$

com

$$\begin{aligned} A_3 = & b + \left(c_1q - 2a_1b_1b_2 - 2a_1b_3c_1 + 2b_1b_2^2 + 2b_2b_3c_1 - 2a_1b_{33} - a_1c_{23} + a_{12}b_2 \right. \\ & + a_{13}b_3 + a_2c_{13} + a_{23}c_1 - a_3c_{12} + 2a_{33}b_1 + 2b_1c_{13} + 2b_{11}b_2 + 2b_{13}c_1 + 2b_3c_{11} \\ & \left. - 2b_{133} - c_{123} \right) s + \left(-b_3q - 2a_1b_2^2 + 2a_1b_3^2 + a_2a_3b_3 - a_3^2b_2 + a_3b_1b_3 \right. \\ & - a_3b_2c_1 + 2b_2^3 - 2b_2b_3^2 - 2a_2b_{33} + 2a_{22}b_2 + a_3b_{23} + 2a_{33}b_2 + b_1c_{23} + b_{12}b_2 \\ & \left. - b_{13}b_3 + b_2c_{13} + b_{23}c_1 + b_3c_{12} - 2b_{233} - 2c_{223} \right) v + \left(b_2q - 4a_1b_2b_3 + 4b_2^2b_3 \right. \\ & + 2a_2c_{33} + 2a_{23}b_2 - 2a_3b_{33} - 2a_3c_{23} + 4a_{33}b_3 + 2b_1c_{33} + 2b_{13}b_2 + 2b_3c_{13} \\ & \left. + 2b_{33}c_1 - 6b_{333} - 2c_{233} \right) w + \mathcal{O}(2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 = & -c + \left(b_1q - c_1Q + a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 - a_1b_1b_3 + a_1b_2c_1 + 2b_1b_2b_3 - 2b_2^2c_1 \right. \\ & - 2a_1b_{23} + 4a_1c_{33} + a_{12}b_3 - a_{13}b_2 + a_2b_{13} + 2a_{22}c_1 + 3a_{23}b_1 - a_3b_{12} - 4a_{33}c_1 \\ & \left. + 4b_1b_{13} + 2b_1c_{12} + 2b_{11}b_3 + 2b_{12}c_1 - 2b_2c_{11} - 4c_1c_{13} - 3b_{123} - 2c_{122} + 4c_{133} \right) s \\ & + \left(b_2q + b_3Q - 4a_1b_2b_3 + a_2^2b_3 - a_2a_3b_2 - a_2b_2c_1 + a_3b_1b_2 - b_1^2b_3 + b_1b_2c_1 \right. \\ & + 4b_2^2b_3 - a_2b_{23} + 4a_2c_{33} + 2a_{23}b_2 - 2a_3b_{22} + 4a_{33}b_3 + b_1b_{23} + 2b_{13}b_2 + 2b_{22}c_1 \\ & \left. + 2b_3c_{13} - 2c_1c_{23} - 6b_{223} - 6c_{222} + 4c_{233} \right) v + \left(b_3q - b_2Q + 2a_1b_2^2 - 2a_1b_3^2 \right. \\ & + a_2a_3b_3 - a_3^2b_2 + a_3b_1b_3 - a_3b_2c_1 - 2b_2^3 + 2b_2b_3^2 + 2a_2b_{33} + 2a_{22}b_2 + 4a_{23}b_3 \\ & - 3a_3b_{23} + 4a_3c_{33} - 6a_{33}b_2 + 4b_1b_{33} + b_1c_{23} + b_{12}b_2 + 3b_{13}b_3 - 3b_2c_{13} + b_{23}c_1 \\ & \left. + b_3c_{12} - 4c_1c_{33} - 6b_{233} - 2c_{223} + 12c_{333} \right) w + \mathcal{O}(2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 = & a - 2b + \left(-c_1q - b_1Q - 2a_1b_1b_2 - 2a_1b_3c_1 + 2b_1b_2^2 + 2b_2b_3c_1 - 4a_1b_{22} \right. \\
& + 2a_1b_{33} + 3a_1c_{23} + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 + a_2c_{13} + 4a_{22}b_1 - 3a_{23}c_1 - a_3c_{12} - 2a_{33}b_1 \\
& + 4b_1b_{12} - 2b_1c_{13} + 2b_{11}b_2 - 2b_{13}c_1 + 2b_3c_{11} - 4c_1c_{12} - 4b_{122} + 2b_{133} + 3c_{123} \Big) s \\
& + \left(b_3q - b_2Q - 2a_1b_2^2 + 2a_1b_3^2 + a_2a_3b_3 + 2a_2b_3c_1 - a_3^2b_2 + a_3b_1b_3 - 3a_3b_2c_1 \right. \\
& + 2b_1b_3c_1 + 2b_2^3 - 2b_2b_3^2 - 2b_2c_1^2 - 4a_2b_{22} + 2a_2b_{33} + 4a_2c_{23} + 6a_{22}b_2 + 4a_{23}b_3 \\
& + a_3b_{23} - 2a_{33}b_2 + 4b_1b_{22} - b_1c_{23} + 3b_{12}b_2 + b_{13}b_3 - b_2c_{13} + b_{23}c_1 + 3b_3c_{12} \\
& \left. - 12b_{222} + 2b_{233} + 6c_{223} \right) v + \left(-b_2q - Qb_3 - 4a_1b_2b_3 + 4b_2^2b_3 + 2a_2c_{33} \right. \\
& + 4a_{22}b_3 - 2a_{23}b_2 - 4a_3b_{22} + 2a_3b_{33} + 2a_3c_{23} + 2b_1b_{23} - 2b_1c_{33} + 2b_{12}b_3 \\
& \left. - 2b_2c_{12} - 2b_{33}c_1 - 2c_1c_{23} - 4b_{223} + 6b_{333} + 6c_{233} \right) w + \mathcal{O}(2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_0 = & \left(-b_1q - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - 3a_1b_1b_3 + 3a_1b_2c_1 + 2b_1b_2b_3 - 2b_2^2c_1 + a_{12}b_3 \right. \\
& - a_{13}b_2 + a_2b_{13} - 2a_{22}c_1 - a_{23}b_1 - a_3b_{12} - 2b_1c_{12} + 2b_{11}b_3 - 2b_{12}c_1 - 2b_2c_{11} \\
& \left. + b_{123} + 2c_{122} \right) s + \left(-b_2q - 4a_1b_2b_3 - a_2^2b_3 + a_2a_3b_2 + a_2b_2c_1 - a_3b_1b_2 + b_1^2b_3 \right. \\
& - b_1b_2c_1 + 4b_2^2b_3 + a_2b_{23} + 4a_{22}b_3 - 2a_{23}b_2 - 2a_3b_{22} + b_1b_{23} + 2b_{12}b_3 - 2b_2c_{12} \\
& \left. - 2b_{22}c_1 + 2b_{223} + 6c_{222} \right) v + \left(-b_3q + 2a_1b_2^2 - 2a_1b_3^2 - a_2a_3b_3 + a_3^2b_2 - a_3b_1b_3 \right. \\
& + a_3b_2c_1 - 2b_2^3 + 2b_2b_3^2 + 2a_2b_{33} - 2a_{22}b_2 - a_3b_{23} - 2a_{33}b_2 - b_1c_{23} - b_{12}b_2 \\
& \left. + b_{13}b_3 - b_2c_{13} - b_{23}c_1 - b_3c_{12} + 2b_{233} + 2c_{223} \right) w + \mathcal{O}(2).
\end{aligned}$$

2.3 Demonstração do Teorema 2.2.

Vamos agora fazer o estudo do campo de Lie-Cartan X_P para provar o Teorema 2.2.

Lema 2.9. *Se a curva de pontos parcialmente umbílicos Darbouxianos denotada por C_η obtida no Lema 2.4 é do tipo:*

- i) D_1 , então o campo X_P tem uma linha de singularidades γ_1 .
- ii) D_2 ou D_3 , então X_P tem três linhas de singularidades γ_i , $i = 1, 2, 3$.

Demonstração. As singularidades do campo de Lie-Cartan são caracterizadas pelo sistema

$$\begin{cases} L_r(s, v, w) = 0 \\ M_r(s, v, w) = 0 \\ A_3(s, v, w)P^3 + A_2(s, v, w)P^2 + A_1(s, v, w)P + A_0(s, v, w) = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Pelo Lema 2.4 como $b(b - a) \neq 0$ podemos na vizinhança de $p = (0, 0, 0)$ escrever $v = v(s)$ e $w = w(s)$, substituindo em $L_r(s, v, w) = 0$ e $M_r(s, v, w) = 0$, determinamos

$$v(s) = \frac{cq - bQ}{b(b - a)} \cdot s + \mathcal{O}(2), \quad w(s) = -\frac{q}{b} \cdot s + \mathcal{O}(2). \quad (2.19)$$

Substituindo na terceira equação de (2.18) temos

$$C(s, P) = (b + \mathcal{O}(1))P^3 + (-c + \mathcal{O}(1))P^2(a - 2b + \mathcal{O}(1))P + (0 + \mathcal{O}(1)) = 0,$$

cujos discriminante em relação a variável projetiva P é

$$\text{disc}(C(s, P), P) = c^2 - 4b(a - 2b) + \mathcal{O}(1) = \left(\left(\frac{c}{2b} \right)^2 - \frac{a}{b} + 2 \right) \cdot 4b^2 + \mathcal{O}(1).$$

Se C_η é do tipo D_1 , temos $\left(\frac{c}{2b} \right)^2 - \frac{a}{b} + 2 < 0$, então existe uma única solução $P(s)$ de $C(s, P) = 0$ que determina uma curva de singularidades de X_P , intersectando o eixo projetivo P em $P_1(0) = 0$. No caso em que C_η é do tipo D_2 ou D_3 , temos $\left(\frac{c}{2b} \right)^2 - \frac{a}{b} + 2 > 0$, então existem três soluções $P_i(s)$, $i = 1, 2, 3$ de $C(s, P) = 0$, que intersectam respectivamente o eixo projetivo P em

$$P_1(0) = 0, \quad P_2(0) = \frac{c}{2b} - \sqrt{\left(\frac{c}{2b} \right)^2 - \frac{a}{b} + 2}, \quad P_3(0) = \frac{c}{2b} + \sqrt{\left(\frac{c}{2b} \right)^2 - \frac{a}{b} + 2},$$

que determinam três linhas de singularidades de X_P , intersectando o eixo projetivo P em $P_i(0)$, $i = 1, 2, 3$. \square

Lema 2.10. *Seja X_P o campo de Lie-Cartan tangente à hipersuperfície $\mathcal{L}(s, v, w, P) = 0$, se a condição:*

- i) D_1 se verifica, então a curva de singularidades γ_1 é normalmente hiperbólica do tipo sela.*
- ii) D_2 se verifica, então as curvas de singularidades γ_i , $i = 1, 2, 3$ são normalmente hiperbólicas, uma do tipo atratora (repulsora), entre duas do tipo sela.*

iii) D_3 se verifica, então as curvas de singularidades γ_i , $i = 1, 2, 3$ são normalmente hiperbólicas do tipo sela.

Demonstração. Considere o campo X_P e sua jacobiana avaliada nas curvas de singularidades obtidas no Lema 2.9, que é dada por

$$DX_P(\gamma_i(s)) = \begin{pmatrix} 0 + \mathcal{O}(s) & 0 + \mathcal{O}(s), & 0 + \mathcal{O}(s), & 0 + \mathcal{O}(s), \\ Q - 2qP_i + \mathcal{O}(s) & b - a + \mathcal{O}(s) & c - 2bP_i + \mathcal{O}(s), & 0 + \mathcal{O}(s) \\ (Q - 2qP_i)P_i + \mathcal{O}(s) & (b - a)P_i + \mathcal{O}(s) & (c - 2bP_i)P_i + \mathcal{O}(s) & 0 + \mathcal{O}(s) \\ * & * & * & \frac{\partial X_4}{\partial P} \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

onde $\frac{\partial X_4}{\partial P}(\gamma_i(s)) = 3bP_i^2 - 2cP_i + a - 2b + \mathcal{O}(s)$, cujo polinômio característico numa vizinhança de $(0, 0, 0, P_i(0))$ é

$$p(\lambda) = -\lambda^2 \left(\lambda - 3bP_i^2 + 2cP_i - a + 2b \right) \left[\lambda - (b - a) - (c - 2bP_i)P_i \right] + \mathcal{O}(s). \quad (2.21)$$

i) Se a condição $D_1 \left(\frac{a}{b} > \left(\frac{c}{2b} \right)^2 + 2 \right)$ é satisfeita temos pelo Lema 2.9 uma única curva invariante $\gamma_1(s)$ que passa em $P_1(s) = 0$, os autovalores de $DX_P(\gamma_1(s))$, são

$$\begin{aligned} \lambda_1(s) &= \lambda_2(s) = 0 + \mathcal{O}(s), \\ \lambda_3(s) &= \frac{\partial X_4}{\partial P}(\gamma_1) = a - 2b + \mathcal{O}(s), \\ \lambda_4(s) &= b - a + \mathcal{O}(s). \end{aligned} \quad (2.22)$$

como $\frac{a}{b} - 2 > \left(\frac{c}{2b} \right)^2 > 0$, segue que $\frac{a - 2b}{b} > 0$, assim:

- Caso $b > 0$, temos $a - 2b > 0$, com isso $a - b > b > 0$, portanto para s pequeno $\lambda_3(s) \cdot \lambda_4(s) < 0$.
- Caso $b < 0$ temos $a - b < b < 0$, com isso $a - b < b < 0$, e para s pequeno, novamente $\lambda_3(s) \cdot \lambda_4(s) < 0$.

Portanto, em ambos os casos $\gamma_1(s)$ é normalmente hiperbólica do tipo sela.

Nos casos D_2 e D_3 o Lema 2.9 diz que existem três curvas invariantes $\gamma_i(s)$, $i =$

1, 2, 3, que passam em $(0, 0, 0, P_i(0))$. Os autovalores de $DX_P(\gamma_1(s))$, são

$$\begin{aligned}\lambda_1(s) &= \lambda_2(s) = 0 + \mathcal{O}(s), \\ \lambda_3(s) &= \frac{\partial X_4}{\partial P}(\gamma_1) = a - 2b + \mathcal{O}(s), \\ \lambda_4(s) &= b - a + \mathcal{O}(s),\end{aligned}\tag{2.23}$$

e de $DX_P(\gamma_i(s))$, $i = 2, 3$ são

$$\begin{aligned}\lambda_1(s) &= \lambda_2(s) = 0 + \mathcal{O}(s), \\ \lambda_3(s) &= \frac{\partial X_4}{\partial P}(\gamma_i) = b(P_i(0))^2 + 2b - a + \mathcal{O}(s), \\ \lambda_4(s) &= -b((P_i(0))^2 + 1) + \mathcal{O}(s).\end{aligned}\tag{2.24}$$

ii) No caso em que a condição $D_2\left(1 < \frac{a}{b} < \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2, a - 2b \neq 0\right)$ é satisfeita, iremos analisar apenas quando $b > 0$ e $a - 2b < 0$, os demais casos se verificam de maneira análoga.

Como $b > 0$, segue que $b - a < 0$, sendo $a - 2b < 0$, segue que:

- Em $P_1(0)$, temos $\frac{\lambda_3(s)}{\lambda_4(s)} = \frac{a - 2b}{b - a} + \mathcal{O}(s) > 0$, assim para s pequeno temos que $\gamma_1(s)$ é normalmente hiperbólica do tipo nó.
- Em $P_2(0)$ e $P_3(0)$, temos $\frac{\lambda_3(s)}{\lambda_4(s)} = -1 + \frac{a - b}{b((P_i(0))^2 + 1)} + \mathcal{O}(s) < 0$, assim para s temos que $\gamma_i(s)$, $i = 2, 3$, é normalmente hiperbólica do tipo sela.

Como neste caso $P_2(0) \cdot P_3(0) = \frac{a - 2b}{b} < 0$, concluímos que a curva $\gamma_1(s)$ está entre as curvas $\gamma_2(s)$ e $\gamma_3(s)$, para s pequeno.

iii) Caso em que $D_3\left(\frac{a}{b} < 1\right)$ se verifica.

- Em $P_1(0)$, temos $\frac{\lambda_3(s)}{\lambda_4(s)} = \frac{a - 2b}{b - a} + \mathcal{O}(s)$.
- Em $P_2(0)$ e $P_3(0)$, temos $\frac{\lambda_3(s)}{\lambda_4(s)} = -1 + \frac{a - b}{b((P_i(0))^2 + 1)} + \mathcal{O}(s)$.
 - Se $b > 0$, segue que $a - b < 0$ e $a - 2b < 0$, assim para s pequeno $\frac{\lambda_3(s)}{\lambda_4(s)} < 0$.
 - Se $b < 0$, segue que $a - b > 0$ e $a - 2b > 0$, para s pequeno novamente temos $\frac{\lambda_3(s)}{\lambda_4(s)} < 0$.

Nos três casos $\gamma_i(s)$, $i = 1, 2, 3$ é normalmente hiperbólica do tipo sela.

Analisemos agora a restrição do campo de Lie-Cartan $X_{\mathcal{L}}$ restrito à hipersuperfície de Lie-Cartan $\mathcal{L}(s, v, w, P) = 0$ escrita na carta reduzida. Diferenciando (2.10) em relação a variável w e avaliando em $(0, 0, 0, P_i(0))$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}(0, 0, 0, P_i(0)) &= \frac{\partial L_r}{\partial w}(0, 0, 0)P_i(0)^2 + \frac{\partial L_r}{\partial w}(0, 0, 0)P_i(0) + \frac{\partial N_r}{\partial w}(0, 0, 0) \\ &= -b(P_i(0))^2 + c(P_i(0)) + b = \begin{cases} b, & i = 1 \\ a - b, & i = 2, 3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Como $b(a - b) \neq 0$, temos $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}(0, 0, 0, P_i(0)) \neq 0$, então pelo Teorema da função implícita podemos escrever $w = w(s, v, P)$ numa vizinhança de $(0, 0, 0, P_i(0))$. Assim a restrição do campo de Lie-Cartan X_P à hipersuperfície de Lie-Cartan é dado por

$$X_{\mathcal{L}} := \begin{cases} \dot{s} = X_1(s, v, w(s, v, P), P), \\ \dot{v} = X_2(s, v, w(s, v, P), P), \\ \dot{P} = X_4(s, v, w(s, v, P), P), \end{cases} \quad (2.25)$$

cuja parte linear em $(0, 0, 0, P_i(0))$ tem um autovalor nulo e os outros dois não nulos satisfazendo as mesmas condições de λ_3 e λ_4 obtidos em (2.23) e (2.24), cujos autovalores correspondentes em $(0, 0, 0, P_i(0))$ são tangentes às curvas de singularidades $\gamma_i(s)$ $i = 1, 2, 3$, seguindo assim a demonstração do lema. \square

Iremos agora dar a demonstração do Teorema 2.2. Ao longo da demonstração vamos considerar o caso em que $b > 0$, sendo o outro semelhante.

Suponha que C_{η} seja do tipo D_1 . Pelos Lemas 2.9 e 2.10, existe uma única curva de singularidades γ_1 do campo de Lie-Cartan X_P que é normalmente hiperbólica do tipo sela. O Teorema de Variedades Invariantes B.3 que se encontra no apêndice B, garante que existem uma vizinhança V_{γ_1} de $\gamma_1(s)$ e uma variedade invariante bidimensional estável $W_{\gamma_1}^s$ e uma instável $W_{\gamma_1}^u$ de classes C^{r-3} , onde $\gamma_1 = W_{\gamma_1}^s \cap W_{\gamma_1}^u$.

Pelas equações dos autovalores (2.22), temos que $(0, 0, 0, 1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\frac{\partial X_4}{\partial P}(\gamma_1)$ que é positivo para s suficientemente pequeno, pois estamos considerando $b > 0$, portanto o eixo projetivo P é invariante por X_P . Segue então pela unicidade do Teorema de Variedades Invariantes B.3, que $W_{\gamma_1}^u$ é o espaço produto de γ_1 pelo eixo projetivo, portanto $\Pi(W_{\gamma_1}^u) = C_{\eta}$.

Considere $V_{C_{\eta}} = \Pi(V_{\gamma_1})$ e $W(C_{\eta}) = \Pi(W_{\gamma_1}^s)$, então:

- Como Π é injetiva, existe uma única superfície separatriz $W(C_{\eta})$ de classe

C^{r-3} , que é fibrada sobre C_η e cujas fibras são folhas de $\mathcal{F}_1(\eta)$.

- Existe uma vizinhança tubular V_{C_η} de C_η , tal que o conjunto $V_{C_\eta} \setminus W(C_\eta)$ é um setor hiperbólico de $\mathcal{F}_1(\eta)$, como na figura 2.5.

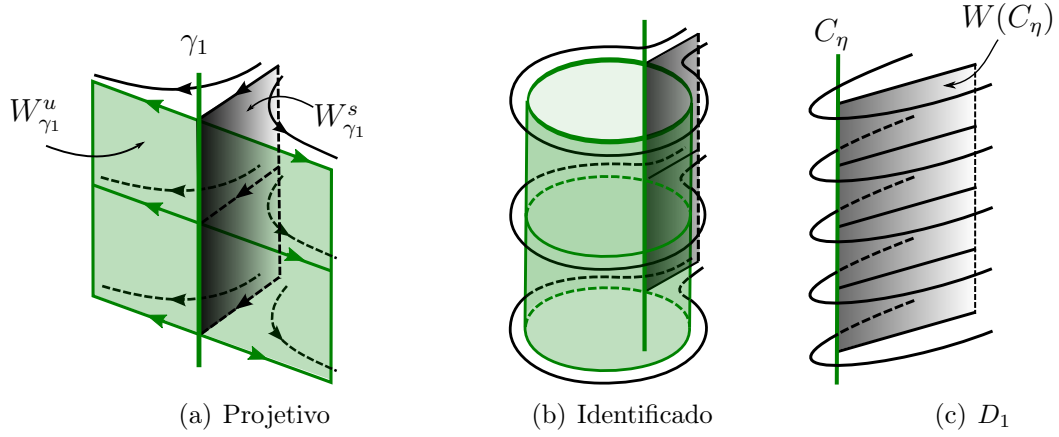


Figura 2.5: Configuração dos pontos parcialmente umbilicos Darbouxianos do tipo D_1 da Folheação $\mathcal{F}_1(\eta)$.

Suponha que C_η seja do tipo D_2 . Os Lemas 2.9 e 2.10 garantem que existem três curvas de singularidades γ_i $i = 1, 2, 3$ do campo de Lie-Cartan X_P , γ_1 é normalmente hiperbólica do tipo atratora e está entre γ_2 e γ_3 as quais são normalmente hiperbólicas do tipo sela.

Novamente temos que $(0, 0, 0, 1)$ é autovetor associado ao autovalor $\frac{\partial X_4}{\partial P}(\gamma_i)$, para $i = 1, 2, 3$ ou seja, o eixo projetivo P é invariante por X_P . Como estamos considerando $b > 0$ temos que:

- Para γ_1 o autovalor $\frac{\partial X_4}{\partial P}(\gamma_1)$ é negativo para s suficientemente pequeno.
- Para $\gamma_i, i = 1, 2$ o autovalor $\frac{\partial X_4}{\partial P}(\gamma_i)$ é positivo para s suficientemente pequeno.

Portanto pelo Teorema de Variedades Invariantes B.3 temos que:

- Para $i = 2, 3$ existem vizinhança V_{γ_i} de $\gamma_i(s)$ e variedades invariantes bidimensionais $W_{\gamma_i}^s$ estáveis e $W_{\gamma_i}^u$ instáveis de classe C^{r-3} , onde $\gamma_i = W_{\gamma_i}^s \cap W_{\gamma_i}^u$.
- Já para γ_1 , temos $W_{\gamma_1}^u = \phi$.

Como $\Pi(W_{\gamma_1}^s) = \Pi(W_{\gamma_1}^u) = C_\eta$, considerando $W_1(C_\eta) = \Pi(W_{\gamma_2}^s)$ e $W_2(C_\eta) = \Pi(W_{\gamma_3}^s)$:

- $W_1(C_\eta)$ e $W_2(C_\eta)$ são variedades invariantes de classe C^{r-3} , que são fibradas sobre C_η e cujas fibras são as folhas de $\mathcal{F}_1(\eta)$.

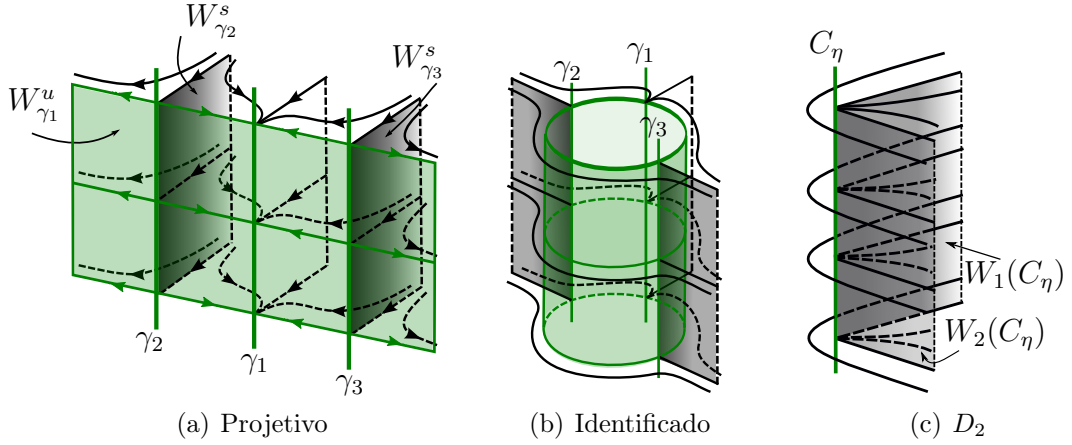


Figura 2.6: Configuração dos pontos parcialmente umbílicos Darbouxianos do tipo D_2 da Folheação $\mathcal{F}_1(\eta)$.

- Existe uma vizinhança tubular V_{C_η} de C_η , tal que o conjunto $V_{C_\eta} \setminus (W_1 \cup W_2 \cup C_\eta)$ é constituído de um setor hiperbólico e de um setor parabólico de $\mathcal{F}_1(\eta)$, como na figura 2.6.

Caso C_η seja do tipo D_3 . Os Lemas 2.9 e 2.10 garantem que existem três curvas de singularidades γ_i $i = 1, 2, 3$ do campo de Lie-Cartan X_P , todas normalmente hiperbólicas do tipo sela.

Novamente temos que $(0, 0, 0, 1)$ é autovetor associado ao autovalor $\frac{\partial X_4}{\partial P}(\gamma_i)$, para $i = 1, 2, 3$ ou seja o eixo projetivo P é invariante por X_P , se $b > 0$ temos que:

- Para γ_1 o autovalor $\frac{\partial X_4}{\partial P}(\gamma_1)$ é negativo para s suficientemente pequeno.
- Para $\gamma_i, i = 1, 2$ o autovalor $\frac{\partial X_4}{\partial P}(\gamma_i)$ é positivo para s suficientemente pequeno.

Portanto pelo Teorema de Variedades Invariantes B.3, temos que existem vizinhança V_{γ_i} de $\gamma_i(s)$ e variedades invariantes bidimensionais $W_{\gamma_i}^s$ estáveis e $W_{\gamma_i}^u$ instáveis de classe C^{r-3} , onde $\gamma_i = W_{\gamma_i}^s \cap W_{\gamma_i}^u$, para $i = 1, 2, 3$.

Como $\Pi(W_{\gamma_1}^s) = \Pi(W_{\gamma_1}^u) = C_\eta$, considerando $W_1(C_\eta) = \Pi(W_{\gamma_1}^u)$, $W_2(C_\eta) = \Pi(W_{\gamma_2}^s)$ e $W_3(C_\eta) = \Pi(W_{\gamma_3}^s)$, segue que:

- $W_i(C_\eta)$, $i = 1, 2, 3$ são variedades invariantes de classe C^{r-3} , que são fibradas sobre C_η e cujas fibras são a folhas de $\mathcal{F}_1(\eta)$.
- Existe uma vizinhança tubular V_{C_η} de C_η , tal que o conjunto $V_{C_\eta} \setminus (W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup C_\eta)$ é constituído de três setores hiperbólicos de $\mathcal{F}_1(\eta)$, como na figura 2.7.

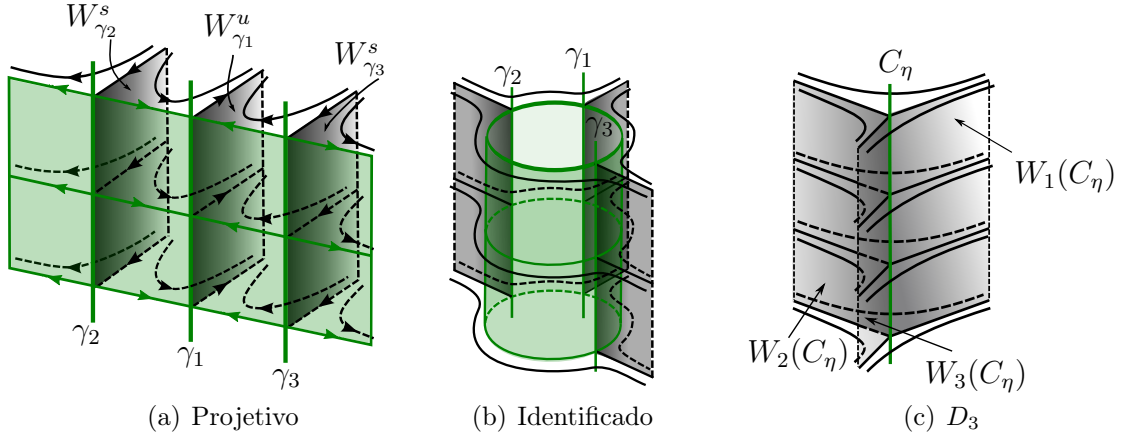


Figura 2.7: Configuração dos pontos parcialmente umbílicos Darbouxianos do tipo D_3 da Folheação $\mathcal{F}_1(\eta)$.

□

2.4 Demonstração do Teorema 2.6.

Para uma melhor compreensão e não cansar o leitor, dividiremos a demonstração em três lemas e depois concluiremos.

Lema 2.11. *Se $p \in \mathcal{P}(\eta)$ é um ponto parcialmente umbílico do tipo D_{12} , então existe uma vizinhança $V(p) \subset \mathcal{P}(\eta)$ de p , tal que o campo de Lie-Cartan X_P tangente à hipersuperfície de Lie-Cartan possui duas curvas de singularidades β_1 e β_2 .*

Demonstração. Usando a condição $a = 2b$ satisfeitas pelos pontos do tipo D_{12} em (2.18), como no Lema 2.4 temos que o jacobiano

$$\frac{\partial(L_r, M_r)}{\partial(v, w)}(0, 0, 0) = b(b - a) = -b^2 \neq 0. \quad (2.26)$$

Portanto o Teorema da função implícita garante que numa vizinhança de $s = 0$ podemos escrever

$$v(s) = \frac{cq - bQ}{b^2} \cdot s + \mathcal{O}(2), \quad w(s) = -\frac{q}{b} \cdot s + \mathcal{O}(2). \quad (2.27)$$

Avaliando X_4 do campo X_P obtido em (2.18), no ponto $(s, v(s), w(s), P)$, com a condição $a = 2b$, e lembrando que \mathcal{X}_{12} abaixo é dado na definição 2.5, temos

$$X_4(s, v(s), w(s), P) = C(s, p) = A_3(s)P^3 + A_2(s)P^2 + A_1(s)P + A_0(s) \quad (2.28)$$

$$= bP^3 - cP^2 + \frac{\mathcal{X}_{12}}{2b^2} \cdot s + \mathcal{O}(s^2), \quad (2.29)$$

cujas raízes para $s = 0$ são $P = 0$ e $P = \frac{c}{b}$. Diferenciando verificamos que

$$\frac{\partial C}{\partial P}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 C}{\partial P^2}(0, 0) = -2c, \quad \frac{\partial C}{\partial s}(0, 0) = \frac{\mathcal{X}_{12}}{2b^2} \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 C}{\partial P^2}(0, \frac{c}{b}) = \frac{c^2}{b} \neq 0,$$

donde podemos concluir que existe uma única curva β_1 transversal ao eixo projetivo P no ponto $(s, P) = (0, \frac{c}{b})$ e uma única curva β_2 tangente ao eixo projetivo P em $(s, P) = (0, 0)$, concluindo a demonstração. \square

Lema 2.12. *Se $p \in \mathcal{P}(\eta)$ é um ponto parcialmente umbílico do tipo D_{12} , então curva β_1 transversal ao eixo projetivo P no ponto $(s, P) = (0, \frac{c}{b})$, obtida no Lema 2.11 é normalmente hiperbólica do tipo sela.*

Demonstração. Calculando os autovalores de $DX_P(\beta_1(s))$, obtemos

$$\lambda_1(s) = 0 + \mathcal{O}(s), \quad \lambda_2(s) = 0 + \mathcal{O}(s), \quad \lambda_3(s) = \frac{c^2}{b} + \mathcal{O}(s), \quad \text{e} \quad \lambda_4(s) = -\frac{b^2+c^2}{b} + \mathcal{O}(s),$$

assim o produto dos autovalores não nulos é $\lambda_3(s) \cdot \lambda_4(s) = -\frac{c^2(b^2+c^2)}{b^2} + \mathcal{O}(s)$, que para s suficientemente pequeno é negativo. Portanto, pelo Teorema B.3 do apêndice, concluímos que β_1 é um conjunto normalmente hiperbólico do tipo sela na vizinhança de $\beta_1(0)$, portanto existe uma variedade invariante atratora que denotaremos por $W_{\beta_1(s)}^s$ e uma variedade invariante repulsora $W_{\beta_1(s)}^u$, tais que $W_{\beta_1(s)}^s \cap W_{\beta_1(s)}^u = \beta_1(s)$. \square

Lema 2.13. *Se $p \in \mathcal{P}(\eta)$ é um ponto parcialmente umbílico do tipo D_{12} , então existe uma variedade central contendo a curva β_2 obtida no Lema 2.11.*

Demonstração. Calculando a derivada da variedade de Lie-Cartan dada em (2.10) em relação a variável w , sujeita à condição $a = 2b$ que caracteriza os pontos D_{12} , temos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}(0, 0, 0, 0) = b \neq 0,$$

portanto o Teorema da função implícita garante que numa vizinhança da origem, podemos determinar $w = w(s, v, P)$. Fazendo os cálculos determinamos

$$w(s, v, P) = -\frac{q}{b} \cdot s + \left(\frac{m_1}{b^3} q^2 + \frac{m_2}{b^2} q + \frac{m_3}{b} \right) \cdot s^2 + \left(\frac{m_4}{b^2} q + \frac{m_5}{b} \right) \cdot sv \quad (2.30)$$

$$- \left(\frac{bQ - cq}{b^2} \right) \cdot sP - \frac{m_6}{4b} \cdot v^2 + vP + \mathcal{O}(3), \quad (2.31)$$

onde

$$\begin{aligned} m_1 &= 2a_1 b_2 b_3 - 2b_2^2 b_3 - a_2 c_{33} - a_{23} b_2 + a_3 b_{33} + a_3 c_{23} - 2a_{33} b_3 - b_1 c_{33} \\ &\quad - b_{13} b_2 - b_3 c_{13} - b_{33} c_1 + 3b_{333} + c_{233}, \end{aligned}$$

$$m_2 = -2a_1b_1b_2 - 2a_1b_3c_1 + 2b_1b_2^2 + 2b_2b_3c_1 - 2a_1b_{33} - a_1c_{23} + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 + a_2c_{13} \\ + a_{23}c_1 - a_3c_{12} + 2a_{33}b_1 + 2b_1c_{13} + 2b_{11}b_2 + 2b_{13}c_1 + 2b_3c_{11} - 2b_{133} - c_{123},$$

$$m_3 = 2a_1b_1c_1 - 2b_1b_2c_1 + a_1b_{13} + a_1c_{12} - a_{12}c_1 - a_{13}b_1 - a_2c_{11} - a_3b_{11} \\ - 3b_1c_{11} - 3b_{11}c_1 + b_{113} + c_{112},$$

$$m_4 = 2a_1b_2^2 - 2a_1b_3^2 - a_2a_3b_3 + a_3^2b_2 - a_3b_1b_3 + a_3b_2c_1 - 2b_2^3 + 2b_2b_3^2 + 2a_2b_{33} - 2a_{22}b_2 \\ - a_3b_{23} - 2a_{33}b_2 - b_1c_{23} - b_{12}b_2 + b_{13}b_3 - b_2c_{13} - b_{23}c_1 - b_3c_{12} + 2b_{233} + 2c_{223},$$

$$m_5 = a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + 3a_1b_1b_3 - 3a_1b_2c_1 - 2b_1b_2b_3 + 2b_2^2c_1 - a_{12}b_3 + a_{13}b_2 - a_2b_{13} \\ + 2a_{22}c_1 + a_{23}b_1 + a_3b_{12} + 2b_1c_{12} - 2b_{11}b_3 + 2b_{12}c_1 + 2b_2c_{11} - b_{123} - 2c_{122},$$

$$m_6 = 8a_1b_2b_3 + 2a_2^2b_3 - a_2a_3b_2 - a_2b_2c_1 + a_3^2b_3 + 3a_3b_1b_2 + 2a_3b_3c_1 - 2b_1^2b_3 \\ + 3b_1b_2c_1 - 8b_2^2b_3 + b_3c_1^2 - 2a_2b_{23} - 8a_{22}b_3 + 4a_{23}b_2 + 2a_3b_{33} + 3a_3c_{23} \\ - 2b_1b_{23} - 4b_{12}b_3 + 4b_2c_{12} + 2b_{33}c_1 + 3c_1c_{23} - 4b_{223} - 12c_{222}.$$

Rescrevendo o campo X_P dado em (2.17) numa vizinhança da origem na carta (s, v, P) , com a condição $a = 2b$, com $w = w(s, v, P)$, como em (2.30), temos

$$X_P = \begin{cases} X_1 = \frac{(b_1b + b_3q)(bQ - cq)}{b^2} s^2 + \left[(b_1b + b_3q) - b_2 \frac{(bQ - cq)}{b} \right] sv + bb_2v^2 \\ \quad + \mathcal{O}(3) + \left[\frac{(bQ - cq)}{b^3} \left(b(b_3Q - c_1b + cb_1) + q(b_2b - 2b_3c) \right) \right] s^2 \\ \quad + \left(c_1b - (b_3Q + b_1c + b_2q) + \frac{c(b_2Q + 2b_3q)}{b} - \frac{b_2c^2q}{b^2} \right) vs \\ \quad - bcv^2 + \mathcal{O}(3) \Big] \cdot P + \mathcal{O}(P^2) \\ X_2 = \frac{(bQ - cq)}{b} s - bv + \mathcal{O}(2) + \left[\frac{(cq - bQ)}{b^2} s + cv + \mathcal{O}(2) \right] \cdot P + \mathcal{O}(P^2) \\ X_4 = \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) \cdot P + (-c + \mathcal{O}(1)) \cdot P^2 + (b + \mathcal{O}(1)) \cdot P^3 + \mathcal{O}(P^4). \end{cases} \quad (2.32)$$

Avaliando a jacobiana $DX_P(\beta_2(P))$, com $s = 0$ e $v = 0$ segue que

$$DX_P(\gamma_2(P)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & -b + cP + \mathcal{O}(P^2) & 0 \\ * & * & -2cP + 3bP^2 + \mathcal{O}(P^3) \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

e os seus autovalores são

$$\lambda_1(P) = 0, \quad \lambda_2(P) = -b + cP + \mathcal{O}(P^2), \quad \lambda_3(P) = -2cP + 3bP^2 + \mathcal{O}(P^3).$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que $b > 0$, portanto para P suficientemente pequeno temos $\lambda_2(P) < 0$, donde pelo Teorema de variedades invariantes B.3 do apêndice existe uma variedade invariante atratora, de classe C^{r-3} tal que $\beta_2(P)$ seja atratora. Denotaremos essa variedade por $W^s(\beta_2(P))$.

Se $v = 0$, existe vizinhança de $\beta_2(0)$ e uma variedade central $v = v(s, P)$ bidimensional que denotaremos por $W^c(\beta_2)$, de classe C^{r-3} , tal que a curva de singularidades β_2 esteja contida. Através do Teorema da função implícita, e cálculos diretos determinamos a variedade central numa vizinhança de $(0, 0)$ por

$$v(s, P) = \frac{(bQ - cq)}{b^2} \cdot s + \mathcal{O}(2). \quad (2.34)$$

Vamos a seguir determinar o retrato de fase do campo X_P , restrito à variedade central $W^c(\beta_2)$.

Reescrevendo o campo X_P dado em (2.35) com $v = v(s, P)$,

$$X_P = \begin{cases} X_1 = \dot{s} = f(s, v(s, P), P) \\ X_2 = \dot{v} = -b \cdot v(s, P) + g(s, v, P) , \\ X_4 = \dot{P} = \chi_{12} \cdot s + h(s, v(s, P), P) \end{cases}, \quad (2.35)$$

como $\chi_{12} \neq 0$, reescalando o tempo fazendo $\tau = \chi_{12} \cdot t$ e restringindo o campo X_P a variedade central $W^c(\beta_2)$ temos

$$X_P|_{W^c(\beta_2)} = \begin{cases} X_1 = s' = B(s, P) \\ X_4 = P' = s + A(s, P) \end{cases},$$

onde

$$B(s, P) = \frac{1}{\chi_{12}} \cdot f(s, v(s, P), P),$$

$$A(s, P) = \frac{1}{\chi_{12}} \cdot h(s, v(s, P), P).$$

Como os jatos $J_1 A(0, 0) = J_1 B(0, 0) = 0$, sendo $s = s(P)$ solução de $s + A(s, P) = 0$, numa vizinhança de $(0, 0)$, $B(s(P), P) \equiv 0$ e

$$G(P) = \left(\frac{\partial A}{\partial P} + \frac{\partial B}{\partial s} \right) (s(P), P) = \frac{1}{\chi_{12}} \cdot P + \mathcal{O}(P^2), \quad \chi_{12} \neq 0,$$

pelo Teorema 3.5 de singularidades nilpotentes dado em [5], pag. 116. Concluimos que o retrato de fase do campo X_P restrito a variedade central $W^c(\beta_2)$ é como na

figura 2.8. Portanto pelos Lemas 2.12 e 2.13 concluímos que o retrato de fase do

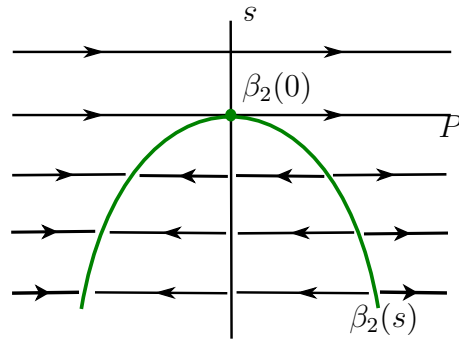


Figura 2.8: Campo X_P restrito a variedade central $W^c(\beta_2)$.

campo X_P na vizinhança das curvas de singularidades β_1 e β_2 juntamente com suas variedades invariantes e central é como na figura 2.9(a). \square

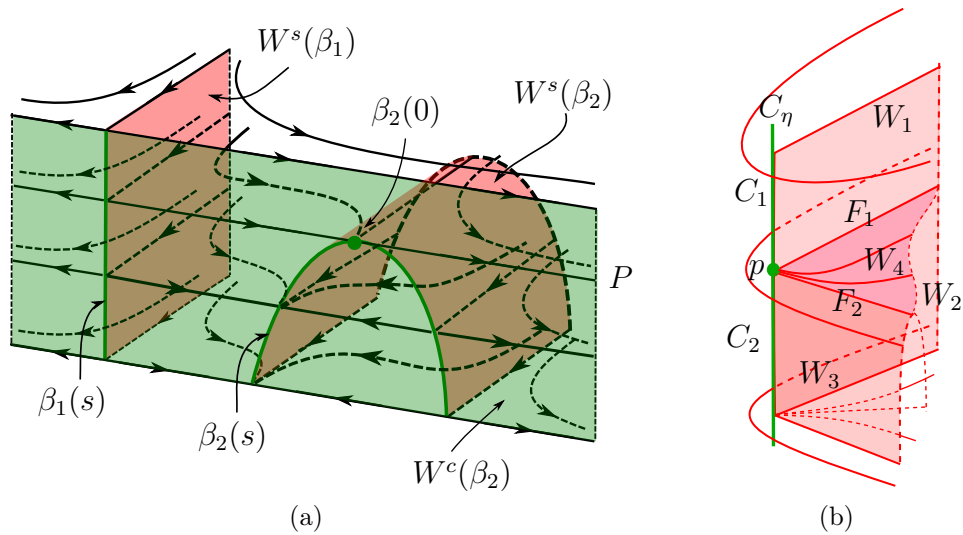


Figura 2.9: Campo X_P na vizinhança de β_1 e β_2 e sua projeção.

Demonstração do Teorema 2.6. Seja $p \in C_\eta$ um ponto do tipo D_{12} , o Lema 2.11 garante que o campo de Lie-Cartan X_P tem duas curvas de singularidades β_1 e β_2 , o Lema 2.12, garante que β_1 é normalmente hiperbólica do tipo sela, com variedade invariante bidimensional estável $W_{\beta_1}^s$ e variedade invariante bidimensional instável $W_{\beta_1}^u$, com $W_{\beta_1}^s \cap W_{\beta_1}^u = \beta_1$, cujo retrato de fase é como mostra a figura 2.9(a). O Lema 2.13 diz que β_2 tem uma variedade central bidimensional $W_{\beta_2}^c$ e uma variedade invariante estável bidimensional $W_{\beta_2}^s$. Temos também que as projeções destas variedades são tais que $\Pi(W_{\beta_1}^u) = \Pi(W_{\beta_2}^c) = C_\eta$, admitindo que $\Pi(W_{\beta_1}^s) = W_1$ e $\Pi(W_{\beta_2}^s) = W_3$, observe que as projeções das órbitas assintóticas à P são projetadas por Π em folhas unidimensionais assintóticas à P formando uma superfície invariante

bidimensional W_4 . Os pontos de $C_\eta = C_1 \cup p \cup C_2$ que se encontram em C_1 são do tipo D_1 e os que estão em C_2 são do tipo D_2 , como mostra a figura 2.9(b), concluindo assim a demonstração teorema. \square

2.5 Demonstração do Teorema 2.8.

Lema 2.14. *Seja C_η o conjunto dos pontos parcialmente umbílicos, se $p \in C_\eta$ é do tipo D_{23} , definido em 2.7, então o campo de Lie-Cartan X_P tangente a superfície de Lie-Cartan $\mathcal{L}(s, v, w, P) = 0$ tem três linhas de singularidades que denotaremos por γ_i , $i = 1, 2, 3$.*

Demonstração. Impondo a condição $a = b$ em (2.18), condição esta satisfeita pelos pontos D_{23} caracterizados na definição 2.7, obtemos que

$$\frac{\partial(L_r, M_r)}{\partial(s, w)}(0, 0, 0) = bQ - cq \neq 0. \quad (2.36)$$

Segue do Teorema da função implícita que para s pequeno, podemos escrever $s = s(v)$ e $w = w(v)$ em $L_r(s(v), v, w(v)) = M_r(s(v), v, w(v)) = 0$ e determinar

$$s(v) = \frac{-1}{bQ - cq} \cdot (A \cdot b + B \cdot c) \cdot v^2 + (\mathcal{O})(v^3), \quad (2.37)$$

$$w(v) = \frac{1}{bQ - cq} \cdot (A \cdot q + B \cdot Q) \cdot v^2 + (\mathcal{O})(v^3), \quad (2.38)$$

com A e B dados respectivamente por (2.7) e (2.8) na definição 2.7.

Avaliando X_4 do campo de Lie-Cartan X_P obtido em (2.17), com a condição $a = b$ em $(s(v), v, w(v), P)$, temos

$$X_4(s(v), v, w(v), P) = A_3(v)P^3 + A_2(v)P^2 + A_1(v)P + A_0(v) = 0,$$

desenvolvendo em Taylor os coeficientes obtemos

$$(b + \mathcal{O}(v))P^3 + (-c + \mathcal{O}(v))P^2 + (-b + \mathcal{O}(v))P + (0 + \mathcal{O}(v)) = 0, \quad (2.39)$$

cujos discriminante em função da variável v na vizinhança de $v = 0$ é

$$D(v) = -\frac{1}{27}b^2(c^2 + b^2) + \mathcal{O}(v),$$

que para v suficientemente pequeno é negativo e portanto a equação (2.39) tem três soluções reais distintas,

$$P_1(v) = 0 + \mathcal{O}(v), \quad P_2(v) = \frac{c - \sqrt{c^2 + 4b^2}}{2b} + \mathcal{O}(v) \quad \text{e} \quad P_3(v) = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4b^2}}{2b} + \mathcal{O}(v).$$

Estas três soluções determinam três curvas de singularidades γ_i , $i = 1, 2, 3$ para o campo X_P , tais que $\Pi(\gamma_i) = C_\eta$. Estas curvas singulares podem ser parametrizadas por $\gamma_i(v) = (s(v), v, w(v), P_i(v))$, $i = 1, 2, 3$, onde $s(v)$ e $w(v)$ são dada, respectivamente, em (2.37) e (2.38). \square

Observação 2.15. Calculando a derivada parcial da função que define a superfície de Lie-Cartan $\mathcal{L}(s, v, w, P)$ em relação a variável s no ponto $(0, 0, 0, P_i(0))$, para $i = 2, 3$, temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s}(0, 0, 0, P_i(0)) = \frac{(bQ - cq)(c + (-1)^i \sqrt{c^2 + 4b^2})}{2b^2} \neq 0,$$

donde concluímos que a superfície de Lie-Cartan é regular na vizinhança de $P_i(0)$, $i = 2, 3$.

Lema 2.16. Com as mesmas hipóteses do Lema 2.14, as curvas γ_i , para $i = 2, 3$ são normalmente hiperbólicas do tipo sela para o campo X_P na vizinhança de γ_i , cujo retrato de fase é como na figura 2.10.

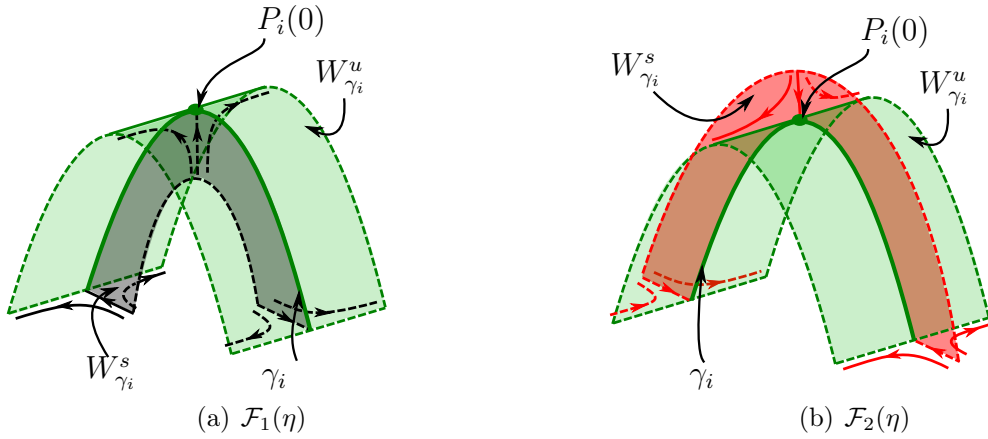


Figura 2.10: Campo X_P na vizinhança de γ_i , $i = 2, 3$.

Demonstração. Avaliando o campo de Lie-Cartan X_P dado em (2.17), com a condição $a = b$, linearizando e avaliando em γ_i , $i = 2, 3$ na vizinhança de $v = 0$, temos

$$DX_P(\gamma_i(v)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q - 2qP_i(0) & 0 & c - 2bP_i(0) & 0 \\ P_i(0)(Q - 2qP_i(0)) & 0 & P_i(0)(c - 2bP_i(0)) & 0 \\ * & * & * & -b - 2cP_i(0) + 3b(P_i(0))^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(v), \quad (2.40)$$

que tem dois autovalores nulos $\lambda_1(v) = \lambda_2(v) = 0$ e dois autovalores não nulos

$$\begin{aligned}\lambda_3(v) &= cP_i(0) - 2b(P_i(0))^2 + \mathcal{O}(v) = -b((P_i(0))^2 + 1) + \mathcal{O}(v), \\ \lambda_4(v) &= 3b(P_i(0))^2 - 2cP_i(0) - b + \mathcal{O}(v) = b((P_i(0))^2 + 1) + \mathcal{O}(v).\end{aligned}$$

Para v suficientemente pequeno temos $\lambda_3(v) \cdot \lambda_4(v) < 0$, portanto pelo Teorema B.3 do apêndice, concluimos que γ_i , $i = 2, 3$ são normalmente hiperbólicas do tipo sela para X_p . \square

Lema 2.17. *Com as mesmas hipóteses do Lema 2.14, existe uma variedade central $W_{\gamma_1}^c$, contendo a curva de singularidades γ_1 e uma variedade invariante atratora $W_{\gamma_1}^s$ (repulsora $W_{\gamma_1}^u$) tal que $W_{\gamma_1}^s \cap W_{\gamma_1}^c = \gamma_1$ e o retrato de fase de X_P na vizinhança de γ_1 é como nas figuras 2.12(a) e 2.12(b).*

Demonstração. Calculando a derivada parcial da função que define a superfície de Lie-Cartan definida pela equação $\mathcal{L}(s, v, w, P) = 0$ dada em (2.10) em relação a variável w , usando a condição $a = b$ e avaliando em $(0, 0, 0, 0)$, temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}(0, 0, 0, 0) = -b \neq 0.$$

Portanto pelo Teorema da função implícita podemos determinar $w = w(s, v, P)$ através da equação $\mathcal{L}(s, v, w(s, v, P), P) = 0$, numa vizinhança de $(0, 0, 0, 0)$. Fazendo os cálculos obtemos

$$w(s, v, P) = -\frac{q}{b} \cdot s + A_{11} \cdot s^2 + A_{12} \cdot sv + \frac{bQ - cq}{b^2} \cdot sP + A_{22} \cdot v^2 + \mathcal{O}(3), \quad (2.41)$$

onde

$$\begin{aligned}A_{11} &= \frac{1}{b^3} \left[-2b_2^2 b_3 + 2a_1 b_2 b_3 - (a_{23} + b_{13})b_2 - (2a_{33} + c_{13})b_3 - a_2 c_{33} + a_3 b_{33} \right. \\ &\quad \left. + a_3 c_{23} - b_1 c_{33} - b_{33} c_1 + 3b_{333} + c_{233} \right] \cdot q^2 - \frac{1}{b^2} \left[2a_1 b_1 b_2 + 2a_1 b_3 c_1 - 2b_1 b_2^2 \right. \\ &\quad \left. - 2b_2 b_3 c_1 + 2a_1 b_{33} + a_1 c_{23} - a_{12} b_2 - a_{13} b_3 - a_2 c_{13} - a_{23} c_1 + a_3 c_{12} - 2a_{33} b_1 \right. \\ &\quad \left. - 2b_1 c_{13} - 2b_{11} b_2 - 2b_{13} c_1 - 2b_3 c_{11} + 2b_{133} + c_{123} \right] \cdot q + \frac{1}{b} \left[2a_1 b_1 c_1 - 2b_1 b_2 c_1 \right. \\ &\quad \left. + a_1 b_{13} + a_1 c_{12} - a_{12} c_1 - a_{13} b_1 - a_2 c_{11} - a_3 b_{11} - 3b_1 c_{11} - 3b_{11} c_1 + b_{113} + c_{112} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{12} = & -\frac{1}{b^2} [2a_1b_2^2 - 2a_1b_3^2 - a_2a_3b_3 + a_3^2b_2 - a_3b_1b_3 + a_3b_2c_1 - 2b_2^3 + 2b_2b_3^2 + 2a_2b_{33} \\
& - 2a_{22}b_2 - a_3b_{23} - 2a_{33}b_2 - b_1c_{23} - b_{12}b_2 + b_{13}b_3 - b_2c_{13} - b_{23}c_1 - b_3c_{12} \\
& + 2b_{233} + 2c_{223}] \cdot q - \frac{1}{b} [a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + 3a_1b_1b_3 - 3a_1b_2c_1 - 2b_1b_2b_3 + 2b_2^2c_1 \\
& - a_{12}b_3 + a_{13}b_2 - a_2b_{13} + 2a_{22}c_1 + a_{23}b_1 + a_3b_{12} + 2b_1c_{12} - 2b_{11}b_3 + 2b_{12}c_1 \\
& + 2b_2c_{11} - b_{123} - 2c_{122}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{22} = & -\frac{1}{2b} [4a_1b_2b_3 + a_2^2b_3 + a_3^2b_3 + 2a_3b_1b_2 + 2a_3b_3c_1 - b_1^2b_3 + 2b_1b_2c_1 - 4b_2^2b_3 \\
& + b_3c_1^2 - a_2b_{23} - 4a_{22}b_3 + 2a_{23}b_2 + a_3c_{23} - b_1b_{23} - 2b_{12}b_3 + 2b_2c_{12} + c_1c_{23} \\
& - 2b_{223} - 6c_{222}].
\end{aligned}$$

O campo X_P dado em (2.17), com $w = w(s, v, P)$, obtido em (2.41) na vizinhança da origem da carta (s, v, P) , pode ser escrito como

$$X_P := \begin{cases} X_1 = \dot{s} = \left(\frac{b_3q - bb_1}{b} \cdot s - \frac{b_2}{b} \cdot v + \mathcal{O}(2) \right) \cdot X_2 \\ X_2 = \dot{v} = \frac{bQ - cq}{b} \cdot s + \mathcal{O}(2) \\ X_4 = \dot{P} = B_s \cdot s + B_v \cdot v - b \cdot P + \mathcal{O}(2) \end{cases}, \quad (2.42)$$

com

$$\begin{aligned}
B_s = & -\frac{b_3}{b} \cdot q^2 - \frac{1}{b} \left(2a_1b_2^2 - 2a_1b_3^2 - a_2a_3b_3 + a_3^2b_2 - a_3b_1b_3 + a_3b_2c_1 - 2b_2^3 + 2b_2b_3^2 \right. \\
& + 2a_2b_{33} - 2a_{22}b_2 - a_3b_{23} - 2a_{33}b_2 - bb_1 - b_1c_{23} - b_{12}b_2 + b_{13}b_3 - b_2c_{13} - b_{23}c_1 \\
& \left. - b_3c_{12} + 2b_{233} + 2c_{223} \right) \cdot q - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - 3a_1b_1b_3 + 3a_1b_2c_1 + 2b_1b_2b_3 \\
& - 2b_2^2c_1 + a_{12}b_3 - a_{13}b_2 + a_2b_{13} - 2a_{22}c_1 - a_{23}b_1 - a_3b_{12} - 2b_1c_{12} + 2b_{11}b_3 \\
& - 2b_{12}c_1 - 2b_2c_{11} + b_{123} + 2c_{122},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_v = & b_2 \cdot q - 4a_1b_2b_3 - a_2^2b_3 - a_3^2b_3 - 2a_3b_1b_2 - 2a_3b_3c_1 + b_1^2b_3 - 2b_1b_2c_1 + 4b_2^2b_3 \\
& - b_3c_1^2 + a_2b_{23} + 4a_{22}b_3 - 2a_{23}b_2 - a_3c_{23} + b_1b_{23} + 2b_{12}b_3 - 2b_2c_{12} - c_1c_{23} \\
& + 2b_{223} + 6c_{222}.
\end{aligned}$$

Calculando $DX_P(s, v, P)$ e avaliando em $\gamma_1(v)$, temos

$$DX_P(\gamma_1(v)) = \begin{pmatrix} -\frac{b_2(bQ-cq)}{b} \cdot v & 0 & 0 \\ \frac{bQ-cq}{b} & 0 & 0 \\ * & * & -b \end{pmatrix} + \mathcal{O}(v^2), \quad (2.43)$$

cujos autovalores na vizinhança de $v = 0$ são

$$\lambda_1(v) = 0 + \mathcal{O}(v), \quad \lambda_2(v) = -\frac{b_2}{b}(bQ - cq) \cdot v + \mathcal{O}(v^2) \quad \text{e} \quad \lambda_3(v) = -b + \mathcal{O}(v).$$

Pelo Teorema de variedades invariantes B.3 do apêndice, para $b > 0$ temos que para v suficientemente pequeno $\lambda_3(v) < 0$, e portanto existe uma variedade bidimensional invariante estável de classe C^{r-3} que denotaremos por $W_{\gamma_1}^s$ e é mostrada na figura.

No caso em que $v = 0$, o teorema garante que existe uma variedade central bidimensional de classe C^{r-3} que numa vizinhança de $\gamma_1(0)$ contém a curva de singularidades γ_1 . Através do Teorema da função implícita e fazendo cálculos, podemos determinar uma parametrização da variedade central $W_{\gamma_1}^c$ numa vizinhança da origem, dada por

$$P(s, v) = A_{10} \cdot s + A_{01} \cdot v + \mathcal{O}(2), \quad (2.44)$$

com

$$\begin{aligned} A_{10} = \frac{1}{b^3} & \left((b_2c - b_3b)q^2 + b_2bQq + [b^2b_1 + b(-2a_1b_2^2 + 2a_1b_3^2 + a_2a_3b_3 - a_3^2b_2 + a_3b_1b_3 \right. \\ & - a_3b_2c_1 + 2b_2^3 - 2b_2b_3^2 - 2a_2b_{33} + 2a_{22}b_2 + a_3b_{23} + 2a_{33}b_2 + b_1c_{23} + b_{12}b_2 - b_{13}b_3 \\ & + b_2c_{13} + b_{23}c_1 + b_3c_{12} - 2b_{233} - 2c_{223}) + c(-4a_1b_2b_3 - a_2^2b_3 - a_3^2b_3 - 2a_3b_1b_2 \\ & - 2a_3b_3c_1 + b_1^2b_3 - 2b_1b_2c_1 + 4b_2^2b_3 - b_3c_1^2 + a_2b_{23} + 4a_{22}b_3 - 2a_{23}b_2 - a_3c_{23} \\ & + b_1b_{23} + 2b_{12}b_3 - 2b_2c_{12} - c_1c_{23} + 2b_{223} + 6c_{222})]q + b(4a_1b_2b_3 + a_2^2b_3 + a_3^2b_3 \\ & + 2a_3b_1b_2 + 2a_3b_3c_1 - b_1^2b_3 + 2b_1b_2c_1 - 4b_2^2b_3 + b_3c_1^2 - a_2b_{23} - 4a_{22}b_3 + 2a_{23}b_2 \\ & + a_3c_{23} - b_1b_{23} - 2b_{12}b_3 + 2b_2c_{12} + c_1c_{23} - 2b_{223} - 6c_{222})Q - b^2(a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 \\ & + 3a_1b_1b_3 - 3a_1b_2c_1 - 2b_1b_2b_3 + 2b_2^2c_1 - a_{12}b_3 + a_{13}b_2 - a_2b_{13} + 2a_{22}c_1 + a_{23}b_1 \\ & \left. + a_3b_{12} + 2b_1c_{12} - 2b_{11}b_3 + 2b_{12}c_1 + 2b_2c_{11} - b_{123} - 2c_{122}) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{01} = \frac{1}{b} & [b_2q - (4a_1b_2b_3 + a_2^2b_3 + a_3^2b_3 + 2a_3b_1b_2 + 2a_3b_3c_1 - b_1^2b_3 + 2b_1b_2c_1 - 4b_2^2b_3 \\ & + b_3c_1^2 - a_2b_{23} - 4a_{22}b_3 + 2a_{23}b_2 + a_3c_{23} - b_1b_{23} - 2b_{12}b_3 + 2b_2c_{12} + c_1c_{23} \\ & - 2b_{223} - 6c_{222})]. \end{aligned}$$

Afim de analisar o retrato de fase do campo X_P , restrito a variedade central $W_{\gamma_1}^c$, rescrevendo o campo X_P dado em (2.42) com $P = P(s, v)$ dado em (2.44), obtemos

$$X_P = \begin{cases} X_1 = \dot{s} = F(s, v, P(s, v)) \\ X_2 = \dot{v} = \frac{bQ - cq}{b} \cdot s + G(s, v, P(s, v)) \\ X_4 = \dot{P} = -bP(s, v) + H(s, v, P(s, v)) \end{cases} \quad (2.45)$$

Como $\frac{bQ - cq}{b} \neq 0$, reescalando o tempo fazendo $\tau = \frac{bQ - cq}{b} \cdot t$ e restringindo o campo X_P a variedade central $W_{\gamma_1}^c$ temos o campo

$$X_P|_{W_{\gamma_1}^c} = \begin{cases} X_1 = s' = U(s, v) \\ X_2 = v' = s + V(s, v) \end{cases},$$

onde

$$U(s, v) = \frac{b}{bQ - cq} \cdot F(s, v, P(s, v)),$$

$$V(s, v) = \frac{b}{bQ - cq} \cdot H(s, v, P(s, v)).$$

Como os jatos $J_1U(0, 0) = J_1V(0, 0) = 0$, sendo $s = s(v)$ solução de $s + V(s, v) = 0$, numa vizinhança de $(0, 0)$, $U(s(v), v) \equiv 0$ e

$$\phi(v) = \left(\frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial U}{\partial s} \right) (s(v), v) = \frac{\chi_{23}}{bQ - cq} \cdot v + \mathcal{O}(v^2), \quad \chi_{23} \neq 0,$$

onde χ_{23} é dado na definição 2.7. Segue do Teorema 3.5 de singularidades nilpotentes dado em [5], pag. 116, que o retrato de fase do campo X_P restrito a variedade central $W_{\gamma_1}^c$ é como na figura 2.11. Portanto concluímos que o retrato de fase do campo X_P

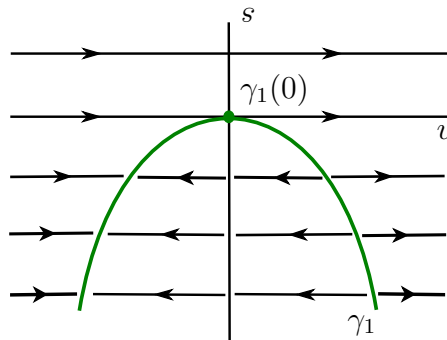


Figura 2.11: Campo X_P restrito a variedade central $W_{\gamma_1}^c$.

na vizinhança da curva singular γ_1 é como nas figuras 2.12(a) e 2.12(b). \square

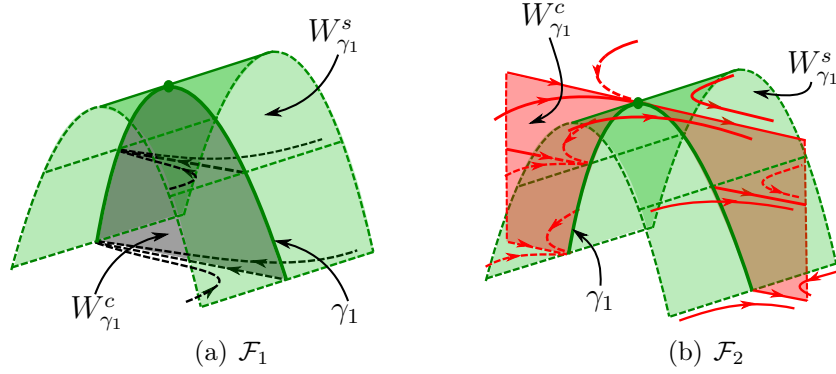
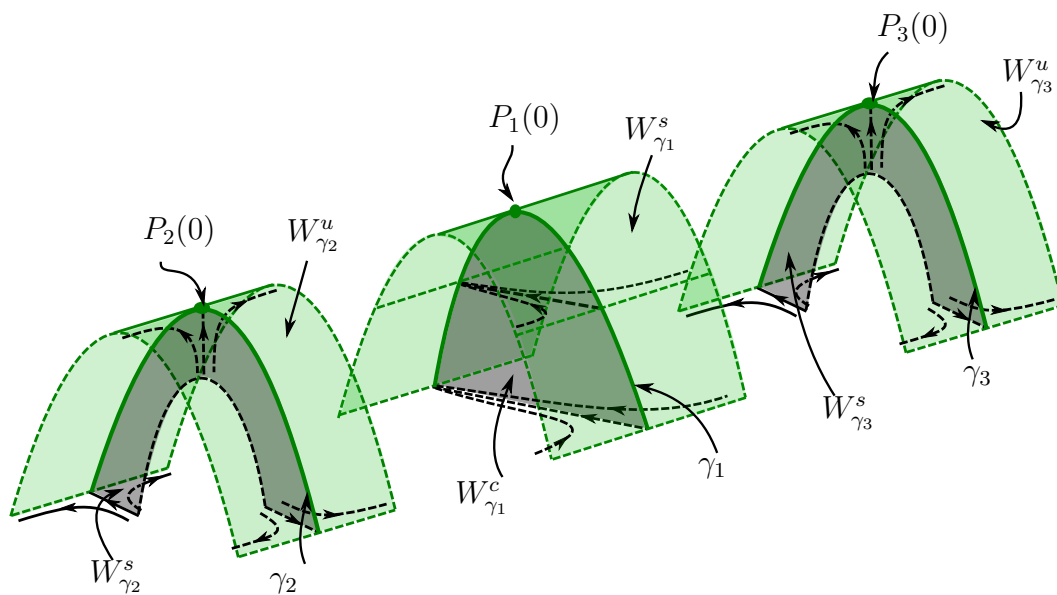
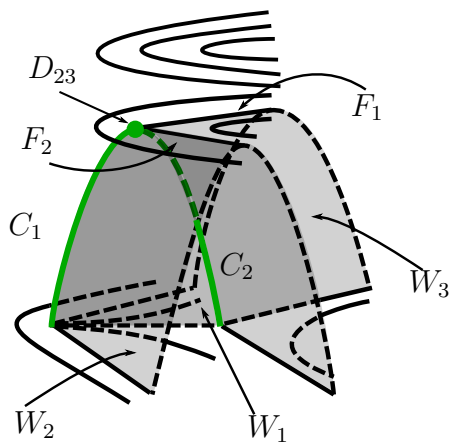


Figura 2.12: Campo X_P na vizinhança de γ_1 .

Demonstração do Teorema 2.8. Seja $p \in C_\eta$ um ponto do tipo D_{23} , o Lema 2.14 garante que o campo de Lie-Cartan X_P tem três curvas de singularidades $\gamma_i(v)$ $i = 1, 2, 3$, o Lema 2.16, garante que $\gamma_2(v)$ e $\gamma_3(v)$ são normalmente hiperbólicas do tipo sela, com variedades bidimensionais invariantes estáveis $W_{\gamma_i}^u$, $i = 2, 3$ e variedades bidimensionais invariantes instáveis $W_{\gamma_i}^s$, $i = 2, 3$, com $W_{\gamma_i}^s \cap W_{\gamma_i}^u = \gamma_i$, $i = 2, 3$, cujos retratos de fase são como nas figuras 2.10(a) e 2.10(b). Pelo Lema 2.17, a curva singular $\gamma_1(v)$ de X_P , tem uma variedade bidimensional invariante estável $W_{\gamma_1}^s$ e uma variedade central bidimensional $W_{\gamma_1}^c$, tais que $W_{\gamma_1}^s \cap W_{\gamma_1}^c = \gamma_1$, como mostra as figuras 2.14(a) e 2.14(b). Podemos observar também que a projeção Π é tal que $\Pi(W_{\gamma_i}^u) = \Pi(W_{\gamma_i}^s) = C_\eta$, $i = 2, 3$. Admitindo que $\Pi(W_{\gamma_i}^s) = W_i$, $i = 2, 3$ e $\Pi(W_{\gamma_1}^c) = W_1$ e observando que as órbitas assintóticas à $P_i(0)$ são projetadas por Π em folhas unidimensionais assintóticas a singularidade $p = D_{23}$, cuja união constitui uma superfície invariante bidimensional que denotaremos por W_4 . Os pontos de $C_\eta = C_1 \cup p \cup C_2 \cup$ que se encontram em C_1 são do tipo D_2 e os que se encontram em C_2 são do tipo D_3 , veja as figuras 2.13(b) e 2.14(b). \square

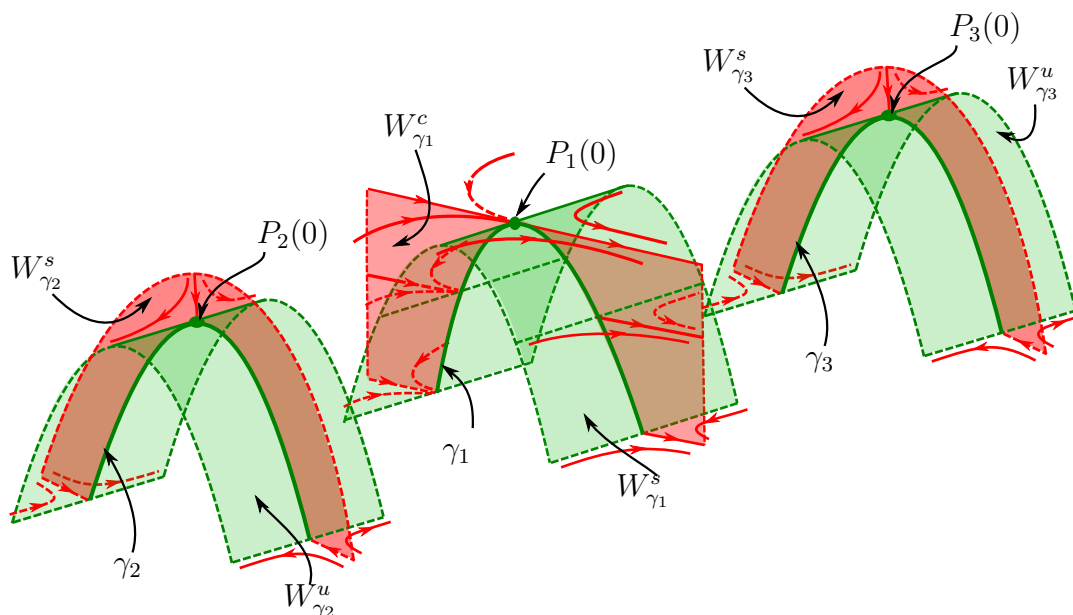


(a) Retrato de fase do campo X_P na superfície de Lie-Cartan.

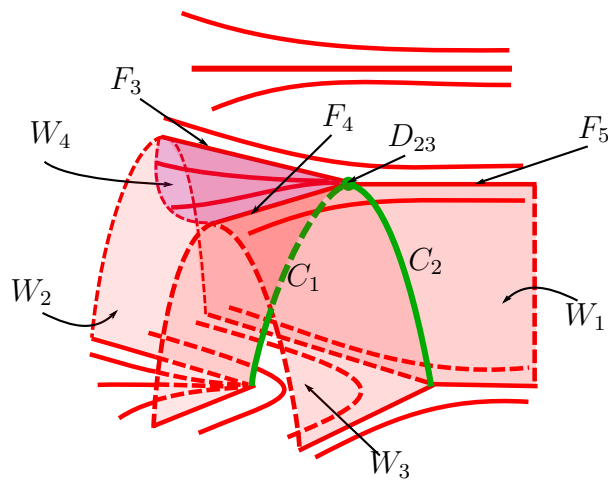


(b) \mathcal{F}_1 Projeção de X_P .

Figura 2.13: *Projeção do campo X_P na vizinhança de γ_1 .*



(a) Retrato de fase do campo $X_{\bar{P}}$ na superfície de Lie-Cartan.



(b) F_2 Projeção de $X_{\bar{P}}$.

Figura 2.14: *Projeção do campo $X_{\bar{P}}$ na vizinhança de γ_1 .*

LINHAS PRINCIPAIS COMPACTAS

Neste capítulo iremos analisar a transformação de primeiro retorno de uma órbitas fechadas do campo de vetores η e de uma linha principal compacta γ , determinada pelo sistema (1.10). As linhas principais compactas das folheações $\mathcal{F}_1(\eta)$ e $\mathcal{F}_2(\eta)$ da distribuição de planos Δ_η serão denominadas de *ciclos principais*. Suporemos que a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ esteja parametrizada pelo comprimento de arco s tenha comprimento L .

3.1 Aplicação de primeiro retorno de órbita periódica

Primeiramente iremos determinar a aplicação de primeiro retorno de uma órbita fechada de um campo de vetores, que na literatura é denominada como *aplicação de Poincaré*.

Consideremos um triedro ortonormal de campos $\{X, N, B\}$ regulares positivamente orientado em \mathbb{R}^3 as suas respectivas curvas integrais γ , γ_N e γ_B , que suponhamos estarem parametrizadas pelos seus comprimentos de arcos, definem um sistema triplamente ortogonal de curvas. O triedro $\{X, N, B\}$ define para cada curva integral um triedro de Darboux que satisfazem os seguintes sistemas de equações diferenciais,

$$\begin{aligned} DX(X) &= X' = k_1N + k_2B, \\ DN(X) &= N' = -k_1X + k_3B, \\ DB(X) &= B' = -k_2X - k_3N, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
DN(N) &= k_1^N B + k_2^N X, \\
DB(N) &= -k_1^N N + k_3^N X, \\
DX(N) &= -k_2^N N - k_3^N B,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
DB(B) &= k_1^B X + k_2^B N, \\
DX(B) &= -k_1^B B + k_3^B N, \\
DN(B) &= -k_2^B B - k_3^B X,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Aqui admitiremos também que o colchete de Lie entre dois campos X e Y denotado por $[X, Y]$ seja dado por $[X, Y] = DX(Y) - DY(X)$, onde $DX(Y)$ é a derivada do campo X na direção do campo Y .

A definição da vizinhança tubular da curva γ , usada na demonstração do Teorema 3.1 abaixo, foi motivada pelo exercício 1 da página 307 que se encontra em Sotomayor [19].

Teorema 3.1. *Sejam X um campo de vetores de classe C^r em \mathbb{R}^3 com $r \geq 2$, γ uma órbita fechada de X de comprimento L e suponha que exista uma vizinhança $V_\delta(\gamma)$ de γ tal que $|X| = 1$ e considere um triedro ortonormal $\{X, N, B\}$ nesta vizinhança. Seja π a transformação de Poincaré definida em $V_\delta(\gamma) \cap \Sigma$, onde Σ é uma seção transversal a γ . Então a derivada da transformação de Poincaré é dada por $\pi'(0) = U(L)$, onde U é solução da equação diferencial*

$$\begin{aligned}
\dot{U} &= AU, \\
U(0) &= I, A(s) = A(s + L),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

com

$$A(s) = \begin{pmatrix} \langle [X, N], N \rangle & \langle [X, B], N \rangle \\ \langle [X, N], B \rangle & \langle [X, B], B \rangle \end{pmatrix},$$

onde os colchetes de Lie estão calculados na curva γ .

Demonstração. Considere a parametrização α de uma vizinhança tubular de γ definida na carta (s, v, w) por

$$\alpha(s, v, w) = \gamma(s) + v \cdot N(s) + w \cdot B(s) \tag{3.5}$$

e a representação em série de Taylor do campo $X \circ \alpha$ por

$$X(\alpha(s, v, w)) = X(\gamma(s)) + v \cdot DX(N(s)) + w \cdot DX(B(s)) + \dots \quad (3.6)$$

Calculando as derivadas parciais de α e usando as equações de Darboux

$$DX(X) = X' = k_1N + k_2B, \quad (3.7)$$

$$DN(X) = N' = -k_1X + k_3B, \quad (3.8)$$

$$DB(X) = B' = -k_2X - k_3N, \quad (3.9)$$

temos

$$\alpha_s = (1 - k_1v - k_2w + \dots)X(s) + (-k_3w + \dots)N(s) + (k_3 + \dots)B(s), \quad (3.10)$$

$$\alpha_v = N(s), \quad (3.11)$$

$$\alpha_w = B(s). \quad (3.12)$$

A parametrização α define uma conjugação entre um campo Y e o campo X , tomando a equação de conjugação $D\alpha(Y) = X \circ \alpha$ e escrevendo a matriz $D\alpha$ relativa as bases $\{ds, dv, dw\}$ e $\{X, N, B\}$, respectivamente do domínio de α e da sua imagem na vizinhança tubular de γ , temos

$$D\alpha(Y) = \begin{pmatrix} 1 - k_1v - k_2w + \dots & 0 & 0 \\ -k_3w + \dots & 1 & 0 \\ k_3v + \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Escrevendo $X \circ \alpha$ na base $\{X, N, B\}$, temos

$$\begin{aligned} X(\alpha(s, v, w)) &= (1 + v\langle DX(N), X \rangle + w\langle DX(B), X \rangle + \dots) \cdot X \\ &+ (v\langle DX(N), N \rangle + w\langle DX(B), N \rangle + \dots) \cdot N \\ &+ (v\langle DX(N), B \rangle + w\langle DX(B), B \rangle + \dots) \cdot B. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Igualando as equações (3.13) e (3.14) obtemos as coordenadas do campo Y dadas por

$$\begin{aligned} Y_1 &= 1 + (k_1 + \langle DX(N), X \rangle) \cdot v + (k_2 + \langle DX(B), X \rangle) \cdot w + \dots, \\ Y_2 &= \langle DX(N), N \rangle \cdot v + (k_3 + \langle DX(B), N \rangle) \cdot w + \dots, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$Y_3 = (-k_3 + \langle DX(N), B \rangle) \cdot v + \langle DX(B), B \rangle \cdot w + \dots. \quad (3.16)$$

Considerando $Y_1 = \frac{ds}{dt}$, $Y_2 = \frac{dv}{dt}$ e $Y_3 = \frac{dw}{dt}$ podemos escrever

$$\frac{dv}{ds} = \langle DX(N), N \rangle \cdot v + (k_3 + \langle DX(B), N \rangle) \cdot w + \dots, \quad (3.17)$$

$$\frac{dw}{ds} = (-k_3 + \langle DX(N), B \rangle) \cdot v + \langle DX(B), B \rangle \cdot w + \dots. \quad (3.18)$$

Derivando as equações (3.17) e (3.18) em relação às condições iniciais v_0 e w_0 e calculando em $v_0 = 0$ e $w_0 = 0$, obtemos o sistema de equações diferenciais

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial v_0} & \frac{\partial v}{\partial w_0} \\ \frac{\partial w}{\partial v_0} & \frac{\partial w}{\partial w_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle DX(N), N \rangle & k_3 + \langle DX(B), N \rangle \\ -k_3 + \langle DX(N), B \rangle & \langle DX(B), B \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial v_0} & \frac{\partial v}{\partial w_0} \\ \frac{\partial w}{\partial v_0} & \frac{\partial w}{\partial w_0} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Usando as derivadas de Lie $[X, N] = DX(N) - DN(X)$ e $[X, B] = DX(B) - DB(X)$, podemos escrever

$$A(s) = \begin{pmatrix} \langle DX(N), N \rangle & k_3 + \langle DX(B), N \rangle \\ -k_3 + \langle DX(N), B \rangle & \langle DX(B), B \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle [X, N], N \rangle & \langle [X, B], N \rangle \\ \langle [X, N], B \rangle & \langle [X, B], B \rangle \end{pmatrix}.$$

□

Observação 3.2. É essencial apenas que o triedro $\{X, N, B\}$ seja ortonormal ao longo de γ .

Observação 3.3. As entradas da matriz $A(s)$ obtida no Teorema 3.1 podem ser interpretadas pelas curvaturas relativas as curvas γ , γ_N e γ_B que estão definidas pelos sistemas (3.1), (3.2) e (3.3), por

$$A(s) = \begin{pmatrix} \langle [X, N], N \rangle & \langle [X, B], N \rangle \\ \langle [X, N], B \rangle & \langle [X, B], B \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_2^N & k_3 + k_3^B \\ -(k_3 + k_3^N) & -k_1^B \end{pmatrix}.$$

O resultado obtido no Teorema (3.4) generaliza para dimensão $n > 3$ o resultado obtido no Teorema (3.1), com mesmas interpretações geométricas.

Teorema 3.4. *Sejam X_1 um campo de vetores de classe C^2 em \mathbb{R}^n , γ uma órbita fechada de X_1 de comprimento L , que supomos parametrizada pelo comprimento do arco em relação a variável x_1 e suponha que exista uma vizinhança $V_\delta(\gamma)$ de γ tal que $|X_1| = 1$ e considere um referencial ortonormal $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ nesta vizinhança. Seja π a transformação de Poincaré definida em $V_\delta(\gamma) \cap \Sigma$, onde Σ é uma seção transversal a γ . Então a derivada da transformação de Poincaré é dada por $\pi'(0) = U(L)$, onde U é solução da equação diferencial*

$$U' = AU$$

$$U(0) = I_n, A(x_1) = A(x_1 + L)$$

com

$$A(s) = \begin{pmatrix} \langle [X_1, X_2], X_2 \rangle & \langle [X_1, X_3], X_2 \rangle & \cdots & \langle [X_1, X_n], X_2 \rangle \\ \langle [X_1, X_2], X_3 \rangle & \langle [X_1, X_3], X_3 \rangle & \cdots & \langle [X_1, X_n], X_3 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle [X_1, X_2], X_n \rangle & \langle [X_1, X_3], X_n \rangle & \cdots & \langle [X_1, X_n], X_n \rangle \end{pmatrix},$$

onde os colchetes de Lie estão calculados na curva γ .

Demonstração. Considere o sistema de coordenadas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ em \mathbb{R}^n e x_1 o parâmetro comprimento de arco de γ tal que $\gamma'(x_1) = X_1(x_1)$. Seja

$$\alpha(x) = \gamma(x_1) + \sum_{i=2}^n x_i \cdot X_i(x_1), \quad (3.20)$$

$$\alpha(x_1, 0, \dots, 0) = \gamma(x_1),$$

uma parametrização da vizinhança tubular de γ escrita em relação ao referencial ortonormal $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ calculado ao longo da curva γ , cujas equações de Darboux são dadas por

$$DX_i(X_1) = X_i'(x_1) = \sum_{j=1}^n k_{ij}(x_1) \cdot X_j(x_1), \quad (3.21)$$

$$k_{ji} = -k_{ij}, \quad k_{ii} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Diferenciando a equação (3.21) em relação as variáveis x_i com $i = 1, 2, \dots, n$, como $\gamma'(x_1) = X_1(x_1)$ temos

$$\alpha_{x_1} = X_1(x_1) + \sum_{i=2}^n x_i \cdot X'_i(x_1) \quad (3.22)$$

$$\alpha_{x_i} = X_i(x_1), \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (3.23)$$

usando as equações de Darboux (3.21) podemos escrever (3.22) como

$$\alpha_{x_1} = \left(1 + \sum_{i=2}^n k_{i1} \cdot x_i\right) \cdot X_1(x_1) + \left(\sum_{i=2}^n k_{i2} \cdot x_i\right) \cdot X_2(x_1) + \dots + \left(\sum_{i=2}^n k_{in} \cdot x_i\right) \cdot X_n(x_1).$$

Assim considerando a matriz $D\alpha$ em relação às bases x_i e X_i respectivamente do domínio de α e da sua imagem na vizinhança tubular de γ , obtemos

$$D\alpha = \begin{pmatrix} 1 + \sum_{i=2}^n k_{i1} \cdot x_i & 0 & \dots & 0 \\ \sum_{i=2}^n k_{i2} \cdot x_i & & & \\ \vdots & & & \\ \sum_{i=2}^n k_{in} \cdot x_i & & & I_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Consideremos agora a representação em Taylor do campo $X_1 \circ \alpha$ na vizinhança tubular de γ dada por

$$X_1(\alpha(x)) = X_1(\gamma(x_1)) + \sum_{i=2}^n x_k \cdot DX_1(X_i) + \mathcal{O}(2). \quad (3.25)$$

Como $X_1(\alpha(x_1, 0, \dots, 0)) = X_1(\gamma(x_1)) = X_1(x_1) = \gamma'(x_1)$, escrevendo $X_1 \circ \alpha = X_1(\alpha)$ na base $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, temos

$$\begin{aligned} X_1(\alpha(x)) &= \left(1 + \sum_{i=2}^n \langle DX_1(X_i), X_1 \rangle \cdot x_i + \mathcal{O}(2)\right) \cdot X_1 \\ &+ \left(\sum_{i=2}^n \langle DX_1(X_i), X_2 \rangle \cdot x_i + \mathcal{O}(2)\right) \cdot X_2 \\ &\vdots \\ &+ \left(\sum_{i=2}^n \langle DX_1(X_i), X_n \rangle \cdot x_i + \mathcal{O}(2)\right) \cdot X_n. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Usando o fato que α é uma parametrização e portanto define uma conjugação entre um campo Y de \mathbb{R}^n e o campo X_1 pela equação de conjugação $D\alpha(Y) = X(\alpha)$, analogamente a demonstração do Teorema 3.1, obtemos o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}\frac{dx_2}{dx_1} &= \sum_{i=2}^n \left(\langle DX_1(X_i), X_1 \rangle - k_{i2} \right) \cdot x_i + \mathcal{O}(2), \\ \frac{dx_3}{dx_1} &= \sum_{i=2}^n \left(\langle DX_1(X_i), X_1 \rangle - k_{i3} \right) \cdot x_i + \mathcal{O}(2), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dx_1} &= \sum_{i=2}^n \left(\langle DX_1(X_i), X_1 \rangle - k_{in} \right) \cdot x_i + \mathcal{O}(2).\end{aligned}$$

Diferenciando em relação às condições iniciais $x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0$ e avaliando em $x_2^0 = x_3^0 = \dots = x_n^0 = 0$, temos o sistema

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx_1} \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_j^0} \right) &= \sum_{i=2}^n \left(\langle DX_1(X_i), X_1 \rangle - k_{i2} \right) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0}, \\ \frac{d}{dx_1} \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_j^0} \right) &= \sum_{i=2}^n \left(\langle DX_1(X_i), X_1 \rangle - k_{i3} \right) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0}, \\ &\vdots \\ \frac{d}{dx_1} \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_j^0} \right) &= \sum_{i=2}^n \left(\langle DX_1(X_i), X_1 \rangle - k_{in} \right) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0},\end{aligned}$$

com $j = 2, 3, \dots, n$. Interpretando matricialmente temos $\frac{d}{dx_1} U = A(x_1) \cdot U$, com $U = \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} \right)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ e $A(x_1) = (\langle DX_1(X_i), X_1 \rangle - k_{ij})$, como γ é fechada de comprimento L temos que $U(0) = I_n$ e $A(x_1 + L) = A(x_1)$. Lembrando que $k_{ji} = -k_{ij}$, $k_{ii} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $[X_i, X_j] = DX_i(X_j) - DX_j(X_i)$, usando as equações de Darboux (3.21) concluímos que $\langle DX_i(X_1), X_j \rangle = k_{ij}$ e portanto podemos escrever a matriz $A(x_1) = \left(\langle [X_1, X_i], X_j \rangle \right)$, com $i, j = 2, 3, \dots, n$. \square

3.2 Aplicação de primeiro retorno de um ciclo principal

O resultado a seguir versa sobre a derivada da transformação de Poincaré de uma linha principal γ da folheação $\mathcal{F}_1(\eta)$ da distribuição de planos Δ_η . Suponhamos para fixar a notação que γ seja linha de fluxo de um campo X_1 contido nesta distribuição de planos.

Considere um campo $\eta \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}^3}^r$, $r \geq 2$ e seja γ uma linha principal da folheação $\mathcal{F}_1(\eta)$ da distribuição de planos Δ_η e X_1 um campo na distribuição Δ_η , tal que $X_1(s) = X_1(\gamma(s)) = \gamma'(s)$, e $X_2(s)$ o vetor unitário normal a curva γ tal que $\{X_1(s), X_2(s)\}$ seja uma base positivamente orientada do plano contido na distribuição Δ_η que passa por $\gamma(s)$. Defina um triedro ortonormal positivamente orientado em $\gamma(s)$ dado por $\{X_1(s), X_2(s), N(s)\}$, onde $N(s) = X_1(s) \wedge X_2(s)$, com $\tilde{N}(s) = N(\gamma(s)) = \eta(s)$, cujas equações de Darboux são

$$\begin{aligned} DX_1(X_1) &= k_1 X_2 + k_2 N, \\ DX_2(X_1) &= -k_1 X_1 + k_3 N, \\ DN(X_1) &= -k_2 X_1 - k_3 X_2. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Seja a vizinhança $V_\delta(\gamma)$ da linha de fluxo γ como acima e uma parametrização α na carta (s, v, w) dada por

$$\alpha(s, v, w) = \gamma(s) + v \cdot X_2(s) + w \cdot N(s), \tag{3.28}$$

cuja matriz jacobiana $D\alpha(s, v, w)$ relativa às bases $\{ds, dv, dw\}$ e $\{X_1, X_2, N\}$ é dada por

$$D\alpha(s, v, w) = \begin{pmatrix} 1 - k_1(s)v - k_2(s)w & 0 & 0 \\ -k_3(s)w & 1 & 0 \\ k_3(s)v & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denotando $\alpha(s, v, w) = p$, considere os campos de vetores X_1 e X_2 cujas parametrizações na vizinhança $V_\delta(\gamma)$ sejam

$$\begin{aligned}
X_1(p) &= X_1(s) \\
&+ \left(A_1(s)v + A_2(s)w + \frac{1}{2}A_{10}(s)v^2 + A_{11}(s)vw + \frac{1}{2}A_{01}(s)w^2 + \mathcal{O}(3) \right) X_2(s) \\
&+ \left(B_1(s)v + B_2(s)w + \frac{1}{2}B_{10}(s)v^2 + B_{11}(s)vw + \frac{1}{2}B_{01}(s)w^2 + \mathcal{O}(3) \right) N(s), \quad (3.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_2(p) &= (C_1(s)v + C_2(s)w + \frac{1}{2}C_{10}(s)v^2 + C_{11}(s)vw + \frac{1}{2}C_{01}(s)w^2 + \mathcal{O}(3)) X_1(s) \\
&+ \left(1 + E_1(s)v + E_2(s)w + \frac{1}{2}E_{10}(s)v^2 + E_{11}(s)vw + \frac{1}{2}E_{01}(s)w^2 + \mathcal{O}(3) \right) X_2(s) \\
&+ \left(F_1(s)v + F_2(s)w + \frac{1}{2}F_{10}(s)v^2 + F_{11}(s)vw + \frac{1}{2}F_{01}(s)w^2 + \mathcal{O}(3) \right) N(s). \quad (3.30)
\end{aligned}$$

O campo de vetores $N(p)$ cuja parametrização na vizinhança $V_\delta(\gamma)$ é dada por

$$N(\alpha(s, v, w)) = N(p) = X_1(p) \wedge X_2(p). \quad (3.31)$$

Calculando as derivadas de N nas direções s , v e w , respectivamente,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} N(p) &= \left(-k_2(s) + \left(F_1(s)k_1(s) - E_1(s)k_2(s) - \frac{d}{ds}(B_1(s)) \right) v \right. \\
&\quad \left. + \left(F_2(s)k_1(s) - E_2(s)k_2(s) - \frac{d}{ds}(B_2(s)) \right) w + \mathcal{O}(2) \right) \cdot X_1(s) \\
&\quad + \left(-k_3(s) - \left(E_1(s)k_3(s) + B_1(s)k_1(s) + \frac{d}{ds}F_1(s) \right) v \right. \\
&\quad \left. - \left(E_2(s)k_3(s) + k_1(s)B_2(s) + \frac{d}{ds}(F_2(s)) \right) w + \mathcal{O}(2) \right) \cdot X_2(s) \\
&\quad + \left(\left(-F_1(s)k_3(s) - B_1(s)k_2(s) + \frac{d}{ds}E_1(s) \right) v \right. \\
&\quad \left. + \left(-F_2(s)k_3(s) - B_2(s)k_2(s) + \frac{d}{ds}E_2(s) \right) w + \mathcal{O}(2) \right) \cdot N(s),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v}N(p) = & \left(-B_1(s) + \left(2A_1(s)F_1(s) - 2B_1(s)E_1(s) - B_{10}(s) \right)v \right. \\
& + \left(A_2(s)F_1(s) + A_1(s)F_2(s) - B_2(s)E_1(s) - E_2(s)B_1(s) \right. \\
& \left. \left. - B_{11}(s) \right)w + \mathcal{O}(2) \right) \cdot X_1(s) \\
& + \left(-F_1(s) + \left(2B_1(s)C_1(s) - F_{10}(s) \right)v + \left(B_1(s)C_2(s) + B_2(s)C_1(s) \right. \right. \\
& \left. \left. - F_{11}(s) \right)w + \mathcal{O}(2) \right) \cdot X_2(s) \\
& + \left(E_1(s) + \left(-2A_1(s)C_1(s) + E_{10}(s) \right)v + \left(-A_1(s)C_2(s) - A_2(s)C_1(s) \right. \right. \\
& \left. \left. + E_{11}(s) \right)w + \mathcal{O}(2) \right) \cdot N(s),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w}N(p) = & \left(-B_2(s) + \left(A_2(s)F_1(s) + A_1(s)F_2(s) - B_2(s)E_1(s) - E_2(s)B_1(s) \right. \right. \\
& \left. \left. - B_{11}(s) \right)v + \left(2F_2(s)A_2(s) - 2E_2(s)B_2(s) - B_{01}(s) \right)w + \mathcal{O}(2) \right) \cdot X_1(s) \\
& + \left(-F_2(s) + \left(B_1(s)C_2(s) + B_2(s)C_1(s) - F_{11}(s) \right)v \right. \\
& \left. + \left(2B_2(s)C_2(s) - F_{01}(s) \right)w + \mathcal{O}(2) \right) \cdot X_2(s) \\
& + \left(E_2(s) + \left(-A_1(s)C_2(s) - A_2(s)C_1(s) + E_{11}(s) \right)v \right. \\
& \left. + \left(-2A_2(s)C_2(s) + E_{01}(s) \right)w + \mathcal{O}(2) \right) \cdot N(s).
\end{aligned}$$

Como estamos denotando $p = \alpha(s, v, w)$, temos que $dp = D\alpha(s, v, w) \cdot (ds, dv, dw)$. Calculando o produto misto e a equação do plano (1.10) que caracterizam as linhas principais, dado por $\left((DN + DN^t)(dp), dp, N(p) \right) = 0$ e $\langle N(p), dp \rangle = 0$, obtendo o sistema de equações

$$\begin{aligned}
L_1 \cdot ds^2 + L_2 \cdot dsdv + L_3 \cdot dsdw + L_4 \cdot dv^2 + L_5 \cdot dvdw + L_6 \cdot dw^2 &= 0, \\
N_1 \cdot ds + N_2 \cdot dv + N_3 \cdot dw &= 0. \quad (3.32)
\end{aligned}$$

com $L_i = L_i(p)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e $N_i = N_i(p)$, $i = 1, 2, 3$, dados por

$$N_1(p) = (k_3(s) - B_1(s))v - B_2(s)w + \mathcal{O}(2),$$

$$N_2(p) = -F_1(s)v - F_2(s)w + \mathcal{O}(2),$$

$$N_3(p) = 1 + E_1(s)v + E_2(s)w + \mathcal{O}(2).$$

$$\begin{aligned} L_1(p) = & B_1(s) + k_3(s) + \left(-B_1(s)k_1(s) + 3B_1(s)E_1(s) - 2k_1(s)k_3(s) + F_2(s)k_3(s) \right. \\ & \left. + E_1(s)k_3(s) - 2A_1(s)F_1(s) + F_1(s)B_2(s) + B_{10}(s) + \frac{d}{ds}F_1(s) \right)v \\ & + \left(-2B_1(s)k_2(s) + 2B_1(s)E_2(s) + k_1(s)B_2(s) + 2k_3(s)E_2(s) - 2F_1(s)k_3(s) \right. \\ & - A_1(s)F_2(s) - A_2(s)F_1(s) + F_2(s)B_2(s) + B_2(s)E_1(s) + B_{11}(s) \\ & \left. + \frac{d}{ds}F_2(s) \right)w + \mathcal{O}(2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(p) = & -2k_2(s) + 2F_1(s) + \left(-4B_1(s)C_1(s) - B_1(s)B_2(s) + 2k_1(s)k_2(s) \right. \\ & - 4E_1(s)k_2(s) - B_2(s)k_3(s) + F_1(s)F_2(s) + F_1(s)E_1(s) + 2F_{10}(s) \\ & \left. - 2\frac{d}{ds}B_1(s) \right)v + \left(-2B_2(s)C_1(s) - 2B_1(s)C_2(s) + 2B_1(s)k_3(s) \right. \\ & + 2k_2(s)^2 - 4E_2(s)k_2(s) - 2F_1(s)k_2(s) + 2F_2(s)k_1(s) + 2k_3(s)^2 + 2F_1(s)E_2(s) \\ & \left. + F_2(s)^2 - F_2(s)E_1(s) - B_2(s)^2 + 2F_{11}(s) - 2\frac{d}{ds}B_2(s) \right)w + \mathcal{O}(2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_3(p) = & -E_1(s) + F_2(s) + \left(2A_1(s)C_1(s) - B_2(s)C_1(s) - B_1(s)C_2(s) + B_1(s)^2 \right. \\ & + B_1(s)k_3(s) - 2F_1(s)k_2(s) - F_2(s)k_1(s) + E_1(s)k_1(s) - 2F_1(s)E_2(s) \\ & + F_2(s)E_1(s) - E_1(s)^2 - E_{10}(s) + F_{11}(s) \left. \right)v + \left(A_2(s)C_1(s) + A_1(s)C_2(s) \right. \\ & - 2B_2(s)C_2(s) + B_1(s)B_2(s) - 3F_2(s)k_2(s) + E_1(s)k_2(s) + 2B_2(s)k_3(s) \\ & \left. - F_2(s)E_2(s) - E_1(s)E_2(s) - E_{11}(s) + F_{01}(s) \right)w + \mathcal{O}(2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_4(p) = & -B_1(s) - k_3(s) + \left(-F_2(s)B_1(s) - 2B_1(s)E_1(s) - B_1(s)k_1(s) \right. \\ & - 2E_1(s)k_3(s) + 2A_1(s)F_1(s) - B_{10}(s) - \frac{d}{ds}F_1(s) \left. \right)v + \left(-F_2(s)B_2(s) \right. \\ & + A_1(s)F_2(s) - 2B_1(s)E_2(s) - k_1(s)B_2(s) - 2k_3(s)E_2(s) + A_2(s)F_1(s) \\ & \left. - B_{11}(s) - \frac{d}{ds}F_2(s) \right)w + \mathcal{O}(2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_5(p) = & -B_2(s) + \left(A_1(s)F_2(s) + B_1(s)E_2(s) + F_1(s)B_1(s) - B_1(s)k_2(s) \right. \\
& - 2B_2(s)E_1(s) - 2F_1(s)k_3(s) + A_2(s)F_1(s) - B_{11}(s) + \frac{d}{ds}E_1(s) \Big) v \\
& + \left(-F_2(s)B_1(s) - 2F_2(s)k_3(s) + 2A_2(s)F_2(s) - B_2(s)E_2(s) + 2F_1(s)B_2(s) \right. \\
& \left. - B_2(s)k_2(s) - B_{01}(s) + \frac{d}{ds}E_2(s) \right) w + \mathcal{O}(2),
\end{aligned}$$

$$L_6(p) = \left(F_2(s)B_1(s) - B_1(s)E_1(s) - F_1(s)B_2(s) \right) v - B_2(s)E_1(s)w + \mathcal{O}(2).$$

Na carta (s, v, w) considere duas seções transversais, $\Sigma_1 = \{s = 0\}$ e $\Sigma_2 = \{s = L\}$. Seja γ e uma vizinhança tubular $V_\delta(\gamma)$, sendo γ uma linha principal da distribuição, definida implicitamente pelo sistema de equações

$$\left((DN(p) + DN^t(p))(dp), dp, N(p) \right) = 0, \quad (3.33)$$

$$\langle N(p), dp \rangle = 0. \quad (3.34)$$

Defina a transformação de Poincaré $\pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$, por $\pi(v_0, w_0) = \left(v(L, v_0, w_0), w(L, v_0, w_0) \right)$, com $v(0, v_0, w_0) = v_0$ e $w(0, v_0, w_0) = w_0$. Para calcular a derivada da transformação de Poincaré, vamos considerar o sistema (3.32) reescrito como

$$\begin{aligned}
L_1 \cdot + L_2 \cdot \frac{dv}{ds} + L_3 \cdot \frac{dw}{ds} + L_4 \cdot \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + L_5 \cdot \frac{dv}{ds} \frac{dw}{ds} + L_6 \cdot \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 = 0, \\
N_1 + N_2 \cdot \frac{dv}{ds} + N_3 \cdot \frac{dw}{ds} = 0. \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Derivando as equações (3.35) em relação às condições iniciais v_0 e w_0 e avaliando em $(s, 0, 0)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial v_0} + \frac{\partial L_1}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial v_0} + L_2 \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial v}{\partial v_0} \right) + L_3 \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial w}{\partial v_0} \right) &= 0, \\
\frac{\partial N_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial v_0} + \frac{\partial N_1}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial v_0} + N_2 \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial v}{\partial v_0} \right) + N_3 \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial w}{\partial v_0} \right) &= 0, \\
\frac{\partial L_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial w_0} + \frac{\partial L_1}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial w_0} + L_2 \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial v}{\partial w_0} \right) + L_3 \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial w}{\partial w_0} \right) &= 0, \\
\frac{\partial N_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial w_0} + \frac{\partial N_1}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial w_0} + N_2 \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial v}{\partial w_0} \right) + N_3 \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial w}{\partial w_0} \right) &= 0,
\end{aligned}$$

que matricialmente é escrito como

$$\begin{pmatrix} L_2 & L_3 \\ N_2 & N_3 \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial v_0} & \frac{\partial v}{\partial w_0} \\ \frac{\partial w}{\partial v_0} & \frac{\partial w}{\partial w_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial L_1}{\partial v} & -\frac{\partial L_1}{\partial w} \\ -\frac{\partial N_1}{\partial v} & -\frac{\partial N_1}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial v_0} & \frac{\partial v}{\partial w_0} \\ \frac{\partial w}{\partial v_0} & \frac{\partial w}{\partial w_0} \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Por simplicidade denotaremos a equação (3.36) por

$$A(s) \cdot \frac{d}{ds} U(s) = B(s) \cdot U(s). \quad (3.37)$$

Proposição 3.5. *Seja γ uma linha principal parametrizada pelo comprimento de arco s da folheação $\mathcal{F}_1(\eta)$ de uma distribuição de planos Δ_η , e suponha que exista uma vizinhança $V_\delta(\gamma)$ de γ tal que o triedro ortonormal $\{X_1, X_2, N\}$ definido em γ , e os campos $X_1(p)$ e $X_2(p)$ dados respectivamente, por (3.29) e (3.30) na vizinhança $V_\delta(\gamma)$. Então:*

i) $B_1(s) = -k_3$ e $F_1(s) - k_2(s) \neq 0$.

ii) *A transformação de Poincaré $\pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$, onde $\Sigma_1 = \{s = 0\}$ e $\Sigma_2 = \{s = L\}$ são seções transversais a γ , na vizinhança $V_\delta(\gamma)$ é tal que $\pi'(0) = U(L)$, onde U é a solução da equação diferencial*

$$\begin{aligned} \dot{U} &= MU, \\ U(0) &= I, \end{aligned} \quad (3.38)$$

com

$$M(s) = \begin{pmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ -k_3(s) & B_2(s) \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

e

$$\begin{aligned} M_{11}(s) &= \frac{-k_3(s) \left(E_1(s) + k_1(s) \right) + F_1(s) \left(B_2(s) - 2A_1(s) \right) + B_{10}(s) + \frac{d}{ds} F_1(s)}{2 \left(k_2(s) - F_1(s) \right)}, \\ M_{12}(s) &= k_3(s) + \frac{k_1(s) B_2(s) - A_2(s) F_1(s) + \left(2B_2(s) - A_1(s) \right) F_2(s) + B_{11}(s) + \frac{d}{ds} F_2(s)}{2 \left(k_2(s) - F_1(s) \right)}. \end{aligned}$$

Demonstração. Como γ é curva integral de um campo de vetores, definido implici-

tamente pelo sistema de equações

$$\left((DN(p) + DN^t(p))(dp), dp, N(p) \right) = 0, \quad (3.40)$$

$$\langle N(p), dp \rangle = 0, \quad (3.41)$$

temos que $dp = (ds, 0, 0)$ e $dp = (0, dv, 0)$ satisfazem a equação

$$\left((DN(p) + DN^t(p))(dp), (dp), N(p) \right) = 0,$$

pela primeira equação de (3.32), temos $L_1(s, 0, 0) = L_4(s, 0, 0) = 0$, como γ não tem pontos parcialmente umbílicos temos $L_2(s, 0, 0) \neq 0$, portanto temos que $B_1(s) = -k_3(s)$ e $F_1(s) - k_2(s) \neq 0$ o que demonstra *i*).

Para provar o item *ii*), considere o sistema de equações diferenciais obtido em (3.36), com a notação simplificada de (3.37). Calculando o determinante da matriz $A(s)$, pelo item *i*) temos $\det(A(s)) = 2(F_1(s) - k_2(s)) \neq 0$, segue então que a matriz $A(s)$ é inversível. Com as condições iniciais $v(0, v_0, w_0) = v_0$ e $w(0, v_0, w_0) = w_0$ temos $U(0) = I$, portanto concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}U(s) &= (A(s))^{-1}B(s) \cdot U(s) \\ U(0) &= I. \end{aligned}$$

O que conclui o resultado pois $(A(s))^{-1}B(s) = M(s)$. □

Observação 3.6. No caso em que a distribuição Δ_η seja completamente integrável temos que $k_3(s) = 0$. De fato, ao longo da linha de fluxo $\gamma(s)$, temos

$$\text{rot}N = \text{rot}(X_1 \wedge X_2) = \text{div}X_2 \cdot X_1 - \text{div}X_1 \cdot X_2 + [X_1, X_2],$$

portanto

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \text{rot}N, N \rangle = \langle [X_1, X_2], N \rangle = \langle DX_1(X_2) - DX_2(X_1), N \rangle \\ &= \langle DX_1(X_2), N \rangle - \langle DX_2(X_1), N \rangle = B_1(s) - k_3 = -2k_3(s). \end{aligned}$$

Voltando na segunda equação do sistema (3.32) que define a distribuição de planos Δ_η na vizinhança tubular do ciclo principal γ , equação essa que é dada pela forma diferencial $\omega = \langle N(p), dp \rangle = 0$, a condição de integrabilidade de Frobenius é dada por $\omega \wedge d\omega = 0$. Escrevendo ω no sistema de coordenadas (s, v, w) , temos

$$\omega(s, v, w) = N_1(s, v, w) \cdot ds + N_2(s, v, w) \cdot dv + N_3(s, v, w) \cdot dw \quad (3.42)$$

com

$$\begin{aligned} N_1(s, v, w) = & -vB_1(s) - wB_2(s) + \left(F_1(s)A_1(s) - E_1(s)B_1(s) - \frac{1}{2}B_{10}(s) \right) v^2 \\ & + (A_2(s)F_2(s) - B_2(s)E_2(s) - \frac{1}{2}B_{01}(s))w^2 + \left(F_2(s)A_1(s) \right. \\ & \left. + F_1(s)A_2(s) - B_{11}(s) - E_2(s)B_1(s) - E_1(s)B_2(s) \right) vw + \mathcal{O}(3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2(s, v, w) = & -vF_1(s) - wF_2(s) + \left(-\frac{1}{2}F_{10}(s) + B_1(s)C_1(s) \right) v^2 + \left(-\frac{1}{2}F_{01}(s) \right. \\ & \left. + B_2(s)C_2(s) \right) w^2 + \left(-F_{11}(s) + B_1(s)C_2(s) + B_2(s)C_1(s) \right) vw + \mathcal{O}(3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_3(s, v, w) = & 1 + vE_1(s) + wE_2(s) + \left(\frac{1}{2}E_{10}(s) - A_1(s)C_1(s) \right) v^2 + \left(\frac{1}{2}E_{01}(s) \right. \\ & \left. - A_2(s)C_2(s) \right) w^2 + \left(E_{11}(s) - A_1(s)C_2(s) - A_2(s)C_1(s) \right) vw + \mathcal{O}(3). \end{aligned}$$

Diferenciando a forma diferencial ω (3.43), temos

$$d\omega = -\frac{\partial N_1}{\partial v} ds \wedge dv - \frac{\partial N_2}{\partial w} ds \wedge dw + \left(\frac{\partial N_3}{\partial v} - \frac{\partial N_2}{\partial w} \right) dv \wedge dw. \quad (3.43)$$

Calculando temos

$$\omega \wedge d\omega = f(s, v, w) \cdot ds \wedge dv \wedge dw = 0,$$

onde

$$f(s, v, w) = N_1 \cdot \left(\frac{\partial N_3}{\partial v} - \frac{\partial N_2}{\partial w} \right) + N_2 \cdot \left(\frac{\partial N_1}{\partial w} - \frac{\partial N_3}{\partial s} \right) + N_3 \cdot \left(\frac{\partial N_2}{\partial s} - \frac{\partial N_1}{\partial v} \right). \quad (3.44)$$

Usando a condição de integrabilidade temos que $f(s, v, w) \equiv 0$, assim $f(s, 0, 0) = -2k_3(s) = 0$, diferenciando f em relação as variáveis v e w e avaliando em $v = 0$ e $w = 0$, com $k_3(s) = 0$, temos

$$\begin{aligned} f_v(s, 0, 0) &= F_1(s) \left(B_2(s) - 2A_1(s) \right) + B_{10}(s) - \frac{d}{ds} F_1(s), \\ f_w(s, 0, 0) &= -F_2(s)A_1(s) - F_1(s)A_2(s) + B_{11}(s) - \frac{d}{ds} F_2(s). \end{aligned}$$

Resolvendo as equações $f_v(s, 0, 0) = 0$ e $f_w(s, 0, 0) = 0$, respectivamente em $B_{10}(s)$ e $B_{11}(s)$ e substituindo no sistema (3.38), e usando a condição $k_3(s) = 0$ temos

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial v_0} & \frac{\partial v}{\partial w_0} \\ \frac{\partial w}{\partial v_0} & \frac{\partial w}{\partial w_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\frac{d}{ds} F_1(s)}{F_1(s) - k_2(s)} & \frac{-B_2(s) \left(2F_2(s) + E_1(s) + k_1(s) \right) - \frac{d}{ds} F_1(s)}{F_1(s) - k_2(s)} \\ 0 & B_2(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial v_0} & \frac{\partial v}{\partial w_0} \\ \frac{\partial w}{\partial v_0} & \frac{\partial w}{\partial w_0} \end{pmatrix}$$

que pode ser resolvido usando as condições iniciais $\frac{\partial v}{\partial v_0}(0, 0, 0) = 1$, $\frac{\partial v}{\partial w_0}(0, 0, 0) = 0$, $\frac{\partial w}{\partial v_0}(0, 0, 0) = 0$ e $\frac{\partial w}{\partial w_0}(0, 0, 0) = 1$, obtendo

$$\frac{\partial w}{\partial v_0}(s) = 0,$$

$$\ln \left(\frac{\partial w}{\partial w_0}(L) \right) = \int_0^L B_2(s) ds,$$

$$\ln \left(\frac{\partial v}{\partial v_0}(L) \right) = \int_0^L \frac{-\frac{d}{ds} F_1(s)}{F_1(s) - k_2(s)} ds, \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w_0}(L) &= \exp \left(\int_0^L B_2(s) ds \right) \\ &\cdot \left(\int_0^L \exp \left(\int_0^s B_2(t) dt \right) \frac{-B_2(L) \left(2F_2(s) + E_1(s) + k_1(s) \right) - \frac{d}{ds} F_1(s)}{F_1(s) - k_2(s)} ds + C \right). \end{aligned}$$

É importante observar que a equação (3.45) que determina $\frac{\partial v}{\partial v_0}(L)$ é da mesma forma da equação que determina a derivada da transformação de Poincaré de um ciclo principal $c : [0, L] \rightarrow \mathbb{M}^2$ que se encontra no trabalho de Sotomayor e Gutierrez [18].

3.3 Hiperbolicidade

Nesta seção serão apresentados resultados sobre a hiperbolicidade de campos de vetores e também para linhas principais fechadas de uma distribuição de planos em dimensão 3, será dado também uma generalização para dimensão n , no caso de campos. Diremos que linha principal fechada γ de comprimento L é um **ciclo principal hiperbólico**, se a derivada da transformação de Poincaré $\pi'(0) = U(L)$, obtida na proposição (3.5) não tiver autovalores na esfera unitária \mathbf{S}^1 .

O lema a seguir será usado nas demonstrações que seguem.

Lema 3.7. *Seja $U(s)$ uma solução da equação diferencial $Z' = A(s)Z$ em \mathbb{R}^n , com a condição inicial $U(0) = I_n$. Então $V(s) = e^{\varepsilon s}U(s)$ é uma solução do sistema $Z' = (A(s) + \varepsilon I_n)Z$, com $V(0) = I_n$.*

Demonstração. Derivando a função $V(s) = e^{\varepsilon s}U(s)$ em relação a s e usando a hipótese de $U(s)$ ser solução de $Z' = A(s)Z$ temos

$$V'(s) = \varepsilon e^{\varepsilon s}U(s) + e^{\varepsilon s}U'(s) = (\varepsilon I_n + A(s))e^{\varepsilon s}U(s) = (A(s) + \varepsilon I_n)V(s),$$

e $V(0) = e^{\varepsilon \cdot 0}U(0) = I_n$. □

Teorema 3.8. *Seja γ uma órbita fechada do campo X de classe C^∞ em \mathbb{R}^3 . Dado $\varepsilon > 0$ existe um campo X_ε de classe C^∞ em \mathbb{R}^3 tal que $\|X_\varepsilon - X\|_r < \varepsilon$ e γ é uma órbita fechada hiperbólica de X_ε .*

Demonstração. Considere o campo $X_\varepsilon = X + \varepsilon \cdot \phi(v, w) \cdot (vN + wB)$, sendo ϕ uma função de classe C^∞ e suporte compacto com $\phi(v, w) = 1$ para todo (v, w) tal que $\|(v, w)\| \leq \varepsilon$. É claro que $\|X_\varepsilon - X\|_r < \varepsilon$. Vamos mostrar que γ é uma órbita fechada hiperbólica de X_ε . Compondo o campo X_ε com a parametrização α de (3.5), temos

$$X_\varepsilon(\alpha(s, v, w)) = X(\alpha(s, v, w)) + \varepsilon \cdot \phi(v, w) \cdot (vN + wB), \quad (3.46)$$

que escrito no referencial $\{X, N, B\}$ é

$$\begin{aligned} X_\varepsilon(\alpha(s, v, w)) &= (1 + \langle DX(N), X \rangle \cdot v + \langle DX(B), X \rangle \cdot w + \dots) \cdot X \\ &+ [(\varepsilon\phi(v, w) + \langle DX(N), N \rangle) \cdot v + \langle DX(B), N \rangle \cdot w + \dots] \cdot N \quad (3.47) \\ &+ [(\langle DX(N), B \rangle) \cdot v + (\varepsilon\phi(v, w) + \langle DX(B), B \rangle) \cdot w + \dots] \cdot B. \end{aligned}$$

Analogamente à demonstração do Teorema 3.1, usando um campo conjugado a X_ε obtemos

$$\frac{dv}{ds} = (\varepsilon\phi(v, w) + \langle DX(N), N \rangle) \cdot v + (k_3 + \langle DX(B), N \rangle) \cdot w + \dots, \quad (3.48)$$

$$\frac{dw}{ds} = (-k_3 + \langle DX(N), B \rangle) \cdot v + (\varepsilon\phi(v, w) + \langle DX(B), B \rangle) \cdot w + \dots. \quad (3.49)$$

Derivando as equações (3.48) e (3.49) em relação às condições iniciais v_0 e w_0 e calculando em $v_0 = 0$ e $w_0 = 0$, como $\phi(0, 0) = 1$ obtemos o sistema de equações diferenciais

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial v_0} & \frac{\partial v}{\partial w_0} \\ \frac{\partial w}{\partial v_0} & \frac{\partial w}{\partial w_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon + \langle DX(N), N \rangle & k_3 + \langle DX(B), N \rangle \\ -k_3 + \langle DX(N), B \rangle & \varepsilon + \langle DX(B), B \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial v_0} & \frac{\partial v}{\partial w_0} \\ \frac{\partial w}{\partial v_0} & \frac{\partial w}{\partial w_0} \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

que pode ser escrito como $V'(s) = (A(s) + \varepsilon I)V(s)$, que pelo Lema (3.7) tem como solução $V(s) = e^{\varepsilon s}U(s)$, com $U(s)$ solução do problema de Cauchy (3.4), com isso se γ não é uma órbita hiperbólica para X , ou seja, mesmo se alguns autovalores de $U(L)$ estão na esfera unitária \mathbf{S}^1 , γ será uma órbita fechada hiperbólica de X_ε . \square

Teorema 3.9. *Seja γ uma órbita fechada do campo X de classe C^∞ em \mathbb{R}^n . Dado $\varepsilon > 0$ existe um campo X_ε de classe C^∞ em \mathbb{R}^n tal que $\|X_\varepsilon - X\|_r < \varepsilon$ e γ é uma órbita fechada hiperbólica de X_ε .*

Demonstração. A demonstração segue os mesmos passos da demonstração do Teorema (3.8), com a notação obtida no Teorema (3.4).

Lema 3.10. *Com as mesmas hipóteses da Proposição (3.5), considere a perturbação η_ε do campo η na vizinhança $V_\delta(\gamma)$ dada por*

$$\eta_\varepsilon(p) = N_\varepsilon(p) = X_{1\varepsilon}(p) \wedge X_2(p) \quad (3.51)$$

com

$$X_{1\varepsilon}(p) = X_1(p) + \varepsilon \left(\phi_1(s) \cdot w + \phi_2(s) \cdot v^2 + \phi_3(s) \cdot vw \right) N(s), \quad (3.52)$$

com $\phi_i(s) \in (C^\infty, (0, L))$ para todo $i = 1, 2, 3$. Então as condições $B_1(s) = -k_3$ e $F_1(s) - k_2(s) \neq 0$ são invariantes sob essa perturbação, e γ é uma linha principal fechada de comprimento L . A derivada da transformação de Poincaré π_ε definida em $V_\delta(\gamma) \cap \Sigma$, onde Σ é uma seção transversal a γ é dada por $\pi'_\varepsilon(0) = V(L)$, e V é solução do problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{V}(s) &= M_\varepsilon(s)V(s) \\ V(0) &= I_2, \quad M_\varepsilon(s) = M_\varepsilon(s+L) \end{aligned} \quad (3.53)$$

com

$$M_\varepsilon(s) = M(s) + \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} \frac{\phi_1(s)F_1(s) + 2\phi_2(s)}{2(k_2(s) - F_1(s))} & \frac{(2F_2(s) + k_1(s))\phi_1(s) + \phi_3(s)}{2(k_2(s) - F_1(s))} \\ 0 & \phi_1(s) \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

$M(s)$ como em (4.5) da Proposição (3.5).

Demonstração. Considere os campos $X_{1\varepsilon}(p)$ (3.52) e $X_2(p)$ (3.30) e calcule o campo

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(p) &= X_{1\varepsilon}(p) \wedge X_2(p) \\ &= N(p) + \varepsilon \left(-\phi_1(s)w - \phi_2(s)v^2 + (\phi_1(s)E_1(s) - \phi_3(s))vw \right. \\ &\quad \left. - \phi_1(s)E_2(s)w^2 + \mathcal{O}(3) \right) \cdot X_1(s) \\ &\quad + \varepsilon \left(\phi_1(s)C_1(s)vw + \phi_1(s)C_2(s)w^2 + \mathcal{O}(3) \right) \cdot X_2(s). \end{aligned}$$

Calculando as derivadas de $N_\varepsilon(p)$ nas direções s , v e w , respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} N_\varepsilon(p) &= \frac{\partial}{\partial s} N(p) + \varepsilon \cdot \left(-\frac{d}{ds} \phi_1(s)w + \mathcal{O}(2) \right) \cdot X_1(s) \\ &\quad - \varepsilon \cdot \left(E_1(s)k_1(s)\phi_1(s)w + \mathcal{O}(2) \right) \cdot X_2(s) - \varepsilon \cdot \left(k_2(s)\phi_1(s)w + \mathcal{O}(2) \right) \cdot N(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} N_\varepsilon(p) &= \frac{\partial}{\partial v} N(p) - \varepsilon \cdot \left(2\phi_2(s)v + (\phi_1(s)E_1(s) + \phi_3(s))w + \mathcal{O}(2) \right) \cdot X_1(s) \\ &\quad + \varepsilon \cdot \left(\phi_1(s)C_1(s)w + \mathcal{O}(2) \right) \cdot X_2(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w} N_\varepsilon(p) &= \frac{\partial}{\partial w} N(p) - \varepsilon \cdot \left(\phi_1(s)v + (\phi_1(s)E_1(s) + \phi_3(s))v \right. \\ &\quad \left. + 2\phi_1(s)E_2(s)w + \mathcal{O}(2) \right) \cdot X_1(s) \\ &\quad + \varepsilon \cdot \left(\phi_1(s)C_1(s)v + 2\phi_1(s)C_2(s) + \mathcal{O}(2) \right) \cdot X_2(s). \end{aligned}$$

Calculando o produto misto e a equação do plano que caracterizam as linhas principais, obtidos em (1.10), dados, respectivamente, por $\left((DN_\varepsilon + DN_\varepsilon^t)(dp), dp, N_\varepsilon(p) \right) = 0$ e $\langle N_\varepsilon(p), dp \rangle = 0$, obtendo o sistema de equações

$$L_{\varepsilon 1} \cdot ds^2 + L_{\varepsilon 2} \cdot dsdv + L_{\varepsilon 3} \cdot dsdw + L_{\varepsilon 4} \cdot dv^2 + L_{\varepsilon 5} \cdot dvdw + L_{\varepsilon 6} \cdot dw^2 = 0,$$

$$N_{\varepsilon 1} \cdot ds + N_{\varepsilon 2} \cdot dv + N_{\varepsilon 3} \cdot dw = 0, \quad (3.55)$$

com $L_{\varepsilon i} = L_{\varepsilon i}(p)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e $N_{\varepsilon i} = N_{\varepsilon i}(p)$, $i = 1, 2, 3$, dados por

$$N_{\varepsilon 1}(p) = (k_3(s) - B_1(s))v - (B_2(s) + \varepsilon\phi_1(s))w + \mathcal{O}(2),$$

$$N_{\varepsilon 2}(p) = -F_1(s)v - F_2(s)w + \mathcal{O}(2),$$

$$N_{\varepsilon 3}(p) = 1 + E_1(s)v + E_2(s)w + \mathcal{O}(2),$$

$$L_{\varepsilon 1}(p) = L_1(p) + \varepsilon \cdot \left(\left(\phi_1(s)F_1(s) + 2\phi_2(s) \right)v + \left(\phi_1(k_1(s) + F_2(s) + E_1(s)) \right. \right. \\ \left. \left. + \phi_3(s) \right)w + \mathcal{O}(2) \right),$$

$$L_{\varepsilon 2}(p) = L_2(p) + \varepsilon \cdot \left(-\phi_1(s)(B_1(s) + k_3(s))v + (2\phi_1^2(s)\varepsilon - 2\phi_1(s)B_2(s) \right. \\ \left. - 2\phi_1(s)C_1(s) - 2\frac{d}{ds}\phi_1(s))w + \mathcal{O}(2) \right),$$

$$L_{\varepsilon 3}(p) = L_3(p) - \varepsilon \cdot \phi_1(s) \left(C_1(s)v - (2k_3(s) - B_1(s) - 2C_2(s))w + \mathcal{O}(2) \right),$$

$$L_{\varepsilon 4}(p) = L_4(p) + \varepsilon \cdot \left(-2\phi_2(s)v - (\phi_1(s)F_2(s) + \phi_1(s)k_1(s) - \phi_3(s))w + \mathcal{O}(2) \right),$$

$$L_{\varepsilon 5}(p) = L_5(p) - \varepsilon \cdot \left(\phi_1(s) + (2\phi_1(s)E_1(s) + \phi_3(s))v \right. \\ \left. + \phi_1(s)(E_2(s) - 2F_1(s) + k_2(s))w + \mathcal{O}(2) \right),$$

$$L_{\varepsilon 6}(p) = L_6(p) - \varepsilon \cdot \phi_1(s) \left(F_1(s)v + E_1(s)w + \mathcal{O}(2) \right).$$

Substituindo na equação variacional (3.36), obtemos

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon 2} & L_{\varepsilon 3} \\ N_{\varepsilon 2} & N_{\varepsilon 3} \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial v_0} & \frac{\partial v}{\partial w_0} \\ \frac{\partial w}{\partial v_0} & \frac{\partial w}{\partial w_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial L_{\varepsilon 1}}{\partial v} & -\frac{\partial L_{\varepsilon 1}}{\partial w} \\ -\frac{\partial N_{\varepsilon 1}}{\partial v} & -\frac{\partial N_{\varepsilon 1}}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial v_0} & \frac{\partial v}{\partial w_0} \\ \frac{\partial w}{\partial v_0} & \frac{\partial w}{\partial w_0} \end{pmatrix}, \quad (3.56)$$

que denotaremos por

$$A_\varepsilon(s) \cdot \frac{d}{ds} U(s) = B_\varepsilon(s) \cdot U(s). \quad (3.57)$$

Avaliando em $(s, 0, 0)$, temos $L_{\varepsilon 1}(s) = L_2(s)$, $L_{\varepsilon 2}(s) = L_2(s)$, o que garante a invariância das condições $B_1(s) = -k_3$ e $F_1(s) - k_2(s) \neq 0$.

Temos também em $(s, 0, 0)$ que $L_{\varepsilon 3}(s) = L_3(s)$, $N_{\varepsilon 2}(s) = N_2(s)$ e $N_{\varepsilon 3}(s) = N_3(s)$, e portanto o determinante $\det(A_\varepsilon(s)) = 2(F_1(s) - k_2(s)) \neq 0$, segue então que a matriz $A_\varepsilon(s)$ é inversível. Com as condições iniciais $v(0, v_0, w_0) = v_0$ e $w(0, v_0, w_0) = w_0$ temos $U(0) = I$, portanto concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} U(s) &= (A_\varepsilon(s))^{-1} B_\varepsilon(s) \cdot U(s) \\ U(0) &= I. \end{aligned}$$

O que conclui o resultado pois $(A_\varepsilon(s))^{-1} B_\varepsilon(s) = M_\varepsilon(s)$. \square

Teorema 3.11. *Seja γ uma linha principal fechada de comprimento L da folheação $\mathcal{F}_1(\eta)$ da distribuição de planos Δ_η . Dado $\varepsilon > 0$, existe um campo η_ε em $\mathfrak{X}_{\text{gr}}^r(\mathbb{R}^3)$, tal que $\|\eta_\varepsilon - \eta\|_r < \varepsilon$, com γ sendo uma linha principal fechada hiperbólica de $\mathcal{F}_1(\eta_\varepsilon)$.*

Demonstração. Considere o problema de controle

$$\dot{V}(s) = A(s)V(s) + \sum_{i=1}^3 u_i(s)E_i(s)V(s), \quad k \geq 1, \quad (3.58)$$

com controles

$$\begin{aligned} u_1(s) &= \varepsilon \cdot \frac{\phi_1(s)F_1(s) + 2\phi_2(s)}{2(F_1(s) - k_2(s))}, \\ u_2(s) &= \varepsilon \cdot \frac{\phi_1(s)(2F_2(s) + k_1(s)) + \phi_3(s)}{2(F_1(s) - k_2(s))}, \\ u_3(s) &= \varepsilon \cdot \phi_1(s), \end{aligned}$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}$ e $\phi_i(s) \in \mathbb{R}$ de suporte compacto,

$$E_1(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Defina a sequência $\{B_i^j(s)\}$, $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2$ por

$$\begin{aligned} B_i^1(s) &= E_i(s), \\ B_i^2(s) &= [E_i(s), A(s)] = A(s)E_i(s) - E_i(s)A(s), \end{aligned}$$

como

$$B_1^2(s) = A(s)E_1(s) - E_1(s)A(s) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ -k_3(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomando $\bar{s} \in [0, L]$ tal que $k_3(\bar{s}) \neq 0$, temos que $\{E_1(\bar{s}), E_2(\bar{s}), E_3(\bar{s}), B_1^2(\bar{s})\}$ é uma base do espaço $M_2(\mathbb{R})$ (matrizes de ordem 2 com coeficientes reais), portanto

$$\text{Span}\{B_i^j(\bar{s}) \mid i \in \{1, \dots, 3\}, j = 1, 2\} = T_{I_2}M_2(\mathbb{R}), \quad (3.59)$$

assim pelo Teorema C.2 do apêndice C, o sistema de controle (3.58) é controlável em $[0, L]$, ou seja V é solução do problema de Cauchy (4.3) como no Lema (3.10). Portanto se algum autovalor de $U(L)$ estiver na esfera unitária \mathbf{S}^1 , sendo U solução do problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{U}(s) &= M(s)U(s), \\ U(0) &= I_2, M(s) = M(s+L) \end{aligned} \quad (3.60)$$

com $M(s)$ dada por (4.5), podemos obter um campo η_ε , C^r próximo a η , cuja derivada da transformação de Poincaré seja como no Lema (3.10), tal que os autovalores de $V_\varepsilon(s)$ não estejam em \mathbf{S}^1 . \square

TRANSVERSALIDADE DAS VARIEDADES INVARIANTES

Neste capítulo vamos analisar a transversalidades entre linhas parcialmente umbílicas e separatrizes parcialmente umbílicas, que foram definidas no capítulo 2 e as superfícies assintóticas que definiremos a seguir.

Se γ_i é um ciclo principal hiperbólico da folheação $\mathcal{F}_i(\eta)$, $i = 1, 2$ da distribuição de planos Δ_η , onde η é um campo em $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}^r(\mathbb{R}^3)$, $r \geq 2$, o Teorema 3.11 da seção 3.3, garante a existência de duas superfícies invariantes locais numa vizinhança de γ_i , denotadas por ${}_{loc}W_i^s(\gamma_i)$ e ${}_{loc}W_i^u(\gamma_i)$, $i = 1, 2$. Os saturados destas superfícies pela folheação $\mathcal{F}_i(\eta)$, serão aqui denominadas de **superfícies assintóticas ao ciclo principal** γ_i , as superfícies invariantes imersas em \mathbb{R}^3 de classe C^{r-2} obtidas pelas saturações de ${}_{loc}W_i^s(\gamma_i)$ e ${}_{loc}W_i^u(\gamma_i)$ por $\mathcal{F}_i(\eta)$, serão denotadas por

$$W_i^s(\gamma_i) = \text{sat}({}_{loc}W_i^s(\gamma_i)),$$

$$W_i^u(\gamma_i) = \text{sat}({}_{loc}W_i^u(\gamma_i)).$$

4.1 Transformação de Poincaré entre duas seções transversais a uma linha principal

Nesta seção descreveremos as equações variacionais que determinam a transformação de Poincaré entre duas seções transversais a uma linha principal de uma folheação $\mathcal{F}_i(\eta)$, $i = 1, 2$ da distribuição de planos Δ_η do campo de vetores regular η .

Lema 4.1. *Seja γ uma linha principal parametrizada pelo comprimento de arco s da folheação $\mathcal{F}_1(\eta)$ de uma distribuição de planos Δ_η . Suponha que exista uma vizinhança $V_\delta(\gamma)$ de γ , e considere um triedro ortonormal $\{X_1, X_2, N\}$ definido em γ , e os campos $X_1(p)$ e $X_2(p)$ dados respectivamente, por (3.29) e (3.30) na vizinhança*

$V_\delta(\gamma)$. Considere a perturbação do campo η dada por

$$\eta_\varepsilon(p) = N_\varepsilon(p) = X_{1\varepsilon}(p) \wedge X_2(p), \quad (4.1)$$

com

$$X_{1\varepsilon}(p) = X_1(p) + \varepsilon\phi(s)v \cdot N(s), \quad (4.2)$$

e $\phi \in (C^\infty, (0, L))$. Então a derivada em relação ao parâmetro de perturbação ε da transformação de Poincaré $\pi_\varepsilon : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$, onde $\Sigma_1 = \{s = 0\}$ e $\Sigma_2 = \{s = L\}$ são seções transversais a γ , na vizinhança $V_\delta(\gamma)$ é dada por $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \pi_\varepsilon(0) = V(L)$, com $V(s)$ solução do problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{V}(s) &= M(s)V(s) + M_\varepsilon(s), \\ V(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

com

$$M_\varepsilon(s) = \phi(s) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2(k_2(s) - F_1(s)) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$M(s)$ como em (4.5) da Proposição (3.5). dada por

$$M(s) = \begin{pmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ -k_3(s) & B_2(s) \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

e

$$\begin{aligned} M_{11}(s) &= \frac{-k_3(s)(E_1(s) + k_1(s)) + F_1(s)(B_2(s) - 2A_1(s)) + B_{10}(s) + \frac{d}{ds}F_1(s)}{2(k_2(s) - F_1(s))}, \\ M_{12}(s) &= k_3(s) + \frac{k_1(s)B_2(s) - A_2(s)F_1(s) + (2B_2(s) - A_1(s))F_2(s) + B_{11}(s) + \frac{d}{ds}F_2(s)}{2(k_2(s) - F_1(s))}. \end{aligned}$$

Demonstração. Considere os campos $X_{1\varepsilon}(p)$ definido em (4.2), $X_1(p)$ e $X_2(p)$ definidos, respectivamente, em (3.29) e (3.30) e defina o campo

$$\begin{aligned}
N_\varepsilon(p) &= X_{1\varepsilon}(p) \wedge X_2(p) \\
&= N(p) - \varepsilon\phi(s)v \left(1 + E_1(s)v + E_2(s)w + \frac{1}{2}E_{10}(s)v^2 + E_{11}(s)vw \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}E_{01}(s)w^2 \right) \cdot X_1(s) \\
&\quad + \varepsilon\phi(s)v \left(C_1(s)v + C_2(s)w + \frac{1}{2}C_{10}(s)v^2 + C_{11}(s)vw \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}C_{01}(s)w^2 \right) \cdot X_2(s).
\end{aligned}$$

Diferenciando temos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} N_\varepsilon(p) &= \frac{\partial}{\partial s} N(p) + \varepsilon \cdot \left(-\frac{d}{ds}\phi(s)v + \mathcal{O}(2) \right) \cdot X_1(s) \\
&\quad - \varepsilon \cdot \left(k_1(s)\phi(s)v + \mathcal{O}(2) \right) \cdot X_2(s) - \varepsilon \cdot \left(k_2(s)\phi(s)v + \mathcal{O}(2) \right) \cdot N(s),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v} N_\varepsilon(p) &= \frac{\partial}{\partial v} N(p) - \varepsilon \cdot \phi(s) \left(1 + E_1(s)v + E_2(s)w + \mathcal{O}(2) \right) \cdot X_1(s) \\
&\quad + \varepsilon \cdot \phi(s) \left(2C_1(s)v + C_2(s)w + \mathcal{O}(2) \right) \cdot X_2(s),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w} N_\varepsilon(p) &= \frac{\partial}{\partial w} N(p) - \varepsilon \cdot \phi(s) \cdot \left(E_2(s)v + \mathcal{O}(2) \right) \cdot X_1(s) \\
&\quad + \varepsilon \cdot \phi(s) \cdot \left(C_2(s)v + \mathcal{O}(2) \right) \cdot X_2(s).
\end{aligned}$$

Calculando o produto misto e a equação do plano que caracteriza as linhas principais, obtidos em (1.10), dados, respectivamente, por $\left((DN_\varepsilon + DN_\varepsilon^t)(dp), dp, N_\varepsilon(p) \right) = 0$ e $\langle N_\varepsilon(p), dp \rangle = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
L_{\varepsilon 1} \cdot ds^2 + L_{\varepsilon 2} \cdot dsdv + L_{\varepsilon 3} \cdot dsdw + L_{\varepsilon 4} \cdot dv^2 + L_{\varepsilon 5} \cdot dvdw + L_{\varepsilon 6} \cdot dw^2 &= 0, \\
N_{\varepsilon 1} \cdot ds + N_{\varepsilon 2} \cdot dv + N_{\varepsilon 3} \cdot dw &= 0, \quad (4.6)
\end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon 1} \cdot + L_{\varepsilon 2} \cdot \frac{dv}{ds} + L_{\varepsilon 3} \cdot \frac{dw}{ds} + L_{\varepsilon 4} \cdot \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + L_{\varepsilon 5} \cdot \frac{dv}{ds} \frac{dw}{ds} + L_{\varepsilon 6} \cdot \left(\frac{dw}{ds}\right)^2 = 0, \\ N_{\varepsilon 1} + N_{\varepsilon 2} \cdot \frac{dv}{ds} + N_{\varepsilon 3} \cdot \frac{dw}{ds} = 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

com $L_{\varepsilon i} = L_{\varepsilon i}(p)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e $N_{\varepsilon i} = N_{\varepsilon i}(p)$, $i = 1, 2, 3$, dados por

$$\begin{aligned} N_{\varepsilon 1}(p) &= \left(\varepsilon \phi(s) + k_3(s) - B_1(s)\right)v - B_2(s)w + \mathcal{O}(2), \\ N_{\varepsilon 2}(p) &= -F_1(s)v - F_2(s)w + \mathcal{O}(2), \\ N_{\varepsilon 3}(p) &= 1 + E_1(s)v + E_2(s)w + \mathcal{O}(2), \end{aligned}$$

$$L_{\varepsilon 1}(p) = L_1(p) + \varepsilon \cdot \phi(s) \cdot \left(1 + \left(-k_1(s) + 3E_1(s)\right)v + 2\left(E_2(s) - k_2(s)\right)w + \mathcal{O}(2)\right),$$

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon 2}(p) &= L_2(p) + \varepsilon \cdot \left[\left(-\phi(s)\left(B_2(s) + 4C_1(s)\right) - 2\frac{d}{ds}\phi(s)\right)v \right. \\ &\quad \left. + 2\phi(s)\left(k_3(s) - C_2(s)\right)w + \mathcal{O}(2)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon 3}(p) &= L_3(p) + \varepsilon \cdot \phi(s) \cdot \left(\left(2\varepsilon \phi(s) + 2B_1(s) + k_3(s) - C_2(s)\right)v \right. \\ &\quad \left. + B_2(s)w + \mathcal{O}(2)\right), \end{aligned}$$

$$L_{\varepsilon 4}(p) = L_4(p) - \varepsilon \cdot \phi(s) \left(1 + \left(k_1(s) + F_2(s) + 2E_1(s)\right)v + 2E_2(s)w + \mathcal{O}(2)\right),$$

$$L_{\varepsilon 5}(p) = L_5(p) + \varepsilon \cdot \phi(s) \cdot \left(E_2(s) - k_2(s) + F_1(s)\right)v - F_2(s)w + \mathcal{O}(2),$$

$$L_{\varepsilon 6}(p) = L_6(p) - \varepsilon \cdot \phi(s) \cdot \left(\left(F_2(s) - E_1(s)\right)v + \mathcal{O}(2)\right).$$

Diferenciando o sistema de equações (4.7) em relação ao parâmetro de perturbação

ε e avaliando em $(s, 0, 0, 0)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{\varepsilon 1}}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L_{\varepsilon 1}}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L_{\varepsilon 1}}{\partial \varepsilon} + L_{\varepsilon 2} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \right) + L_{\varepsilon 3} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial w}{\partial \varepsilon} \right) &= 0, \\ \frac{\partial N_{\varepsilon 1}}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial N_{\varepsilon 1}}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial N_{\varepsilon 1}}{\partial \varepsilon} + N_{\varepsilon 2} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \right) + N_{\varepsilon 3} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial w}{\partial \varepsilon} \right) &= 0, \end{aligned}$$

que na forma matricial pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon 2} & L_{\varepsilon 3} \\ N_{\varepsilon 2} & N_{\varepsilon 3} \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial L_{\varepsilon 1}}{\partial v} & -\frac{\partial L_{\varepsilon 1}}{\partial w} \\ -\frac{\partial N_{\varepsilon 1}}{\partial v} & -\frac{\partial N_{\varepsilon 1}}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\partial L_{\varepsilon 1}}{\partial \varepsilon} \\ -\frac{\partial N_{\varepsilon 1}}{\partial \varepsilon} \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

que por simplicidade denotaremos por

$$A_{\varepsilon}(s) \cdot \frac{d}{ds} V(s) = B_{\varepsilon}(s) \cdot V(s) + C_{\varepsilon}(s). \quad (4.9)$$

Como $L_{\varepsilon 2}(s, 0, 0, 0) = L_2(s, 0, 0, 0)$, $L_{\varepsilon 3}(s, 0, 0, 0) = L_3(s, 0, 0, 0)$, $N_{\varepsilon 2}(s, 0, 0, 0) = N_2(s, 0, 0, 0)$, $N_{\varepsilon 3}(s, 0, 0, 0) = N_3(s, 0, 0, 0)$ e por γ ser linha principal da folheação $\mathcal{F}_1(\eta)$, segue que $B_1(s) = -k_3$ e $F_1(s) - k_2(s) \neq 0$, conseqüentemente a matriz $A_{\varepsilon}(s)$ será inversível, pois $\det(A_{\varepsilon}(s)) = 2(F_1(s) - k_2(s)) \neq 0$, como $\frac{\partial v}{\partial \varepsilon}(0, 0, 0, 0) = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}(0, 0, 0, 0) = 0$, podemos escrever o sistema (4.9) como,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} V(s) &= M(s) \cdot V(s) + M_{\varepsilon}(s), \\ V(0) &= 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

pois, $(A_{\varepsilon}(s))^{-1} B_{\varepsilon}(s) = M(s)$, e $(A_{\varepsilon}(s))^{-1} C_{\varepsilon}(s) = M_{\varepsilon}(s)$. Invertendo a matriz

$$A_{\varepsilon}(s) = \begin{pmatrix} -2(k_2(s) - F_1(s)) & F_2(s) - E_1(s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e multiplicando pela matriz

$$C_{\varepsilon}(s) = \begin{pmatrix} -\phi(s) \\ 0 \end{pmatrix},$$

temos

$$M_\varepsilon(s) = \phi(s) \begin{pmatrix} \frac{1}{2(k_2(s) - F_1(s))} \\ 0 \end{pmatrix},$$

o que conclui a demonstração. \square

Teorema 4.2. *Seja γ uma linha principal da folheação $\mathcal{F}_1(\eta)$ da distribuição de planos Δ_η , como no Lema 4.1. Então existe uma vizinhança $V_\varepsilon(\gamma)$ e um campo η_ε em $\mathfrak{X}_{\text{gr}}^r(\mathbb{R}^3)$, com $\|\eta_\varepsilon - \eta\|_r < \varepsilon$, tal que $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \pi_\varepsilon(0) \neq 0$, onde $\pi_\varepsilon : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ é a transformação de Poincaré entre as seções transversais $\Sigma_1 = \{s = 0\}$ e $\Sigma_2 = \{s = L\}$ da curva γ , na vizinhança $V_\delta(\gamma)$.*

Demonstração. Considere o problema de controle da equação diferencial linear não homogênea

$$\dot{V}(s) = M(s)V(s) + A(s)u(s), \quad (4.11)$$

com $A(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e o controle $u(s) = \frac{\phi(s)}{2(k_2(s) - F_1(s))}$, onde $M(s)$ é solução do problema de Cauchy (3.38)

$$\begin{aligned} \dot{U} &= MU, \\ U(0) &= I, M(s) = M(s + L), \end{aligned}$$

com

$$M(s) = \begin{pmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ -k_3(s) & B_2(s) \end{pmatrix},$$

e

$$\begin{aligned} M_{11}(s) &= \frac{-k_3(s)(E_1(s) + k_1(s)) + F_1(s)(B_2(s) - 2A_1(s)) + B_{10}(s) + \frac{d}{ds}F_1(s)}{2(k_2(s) - F_1(s))}, \\ M_{12}(s) &= k_3(s) + \frac{k_1(s)B_2(s) - A_2(s)F_1(s) + (2B_2(s) - A_1(s))F_2(s) + B_{11}(s) + \frac{d}{ds}F_2(s)}{2(k_2(s) - F_1(s))}. \end{aligned}$$

Defina a sequência $A_1(s) = A(s)$, $A_2(s) = \frac{d}{ds}A_1(s) - M(s)A(s) = \begin{pmatrix} * \\ k_3(s) \end{pmatrix}$, como podemos tomar $\bar{s} \in (0, L)$ tal que $k_3(\bar{s}) \neq 0$, segue que $\mathcal{Q} = [A(\bar{s}), A_2(\bar{s})]$ tem posto 2, portanto pelo Teorema C.4 do apêndice C, segue que o sistema

(4.11) é completamente controlável em $[0, L]$, ou seja podemos tomar $\phi(s)$ com suporte compacto em $[0, L]$ e portanto o controle $u(s)$ em $[0, L]$ seja tal que $V(L) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \pi_\varepsilon(0) \neq 0$, numa vizinhança $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ de $\varepsilon = 0$. \square

Corolário 4.3. *Seja γ um ciclo principal de comprimento L da folheação $\mathcal{F}_1(\eta)$ da distribuição de planos Δ_η , como no Lema 4.1. Então existe uma vizinhança $V_\varepsilon(\gamma)$ e um campo η_ε em $\mathfrak{X}_{\mathfrak{R}^3}(\mathbb{R}^3)$, com $\|\eta_\varepsilon - \eta\|_r < \varepsilon$, tal que:*

i) A transformação de Poincaré $\pi_\varepsilon : \Sigma \rightarrow \Sigma$, com $\Sigma = \Sigma_1 = \Sigma_2$ a seção transversal a γ , tenha um número finito de pontos fixos $p \in \Sigma \cap V_\varepsilon(\gamma)$, todos elementares, ou seja, $\pi'_\varepsilon(p)$ não tem autovalores no círculo unitário \mathbf{S}^1 .

ii) A curva γ não é ciclo principal de $\mathcal{F}_1(\eta_\varepsilon)$, $\varepsilon \neq 0$.

Demonstração. Como o Teorema 4.2 garante que $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \pi_\varepsilon(0) \neq 0$ numa vizinhança $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ de $\varepsilon = 0$, a aplicação $P : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times \Sigma \rightarrow \Sigma$ dada por $P(\varepsilon, p) = (p, \pi_\varepsilon(p))$, é tal que $\frac{\partial P}{\partial \varepsilon}(0, 0) = \left(0, \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \pi_\varepsilon(0)\right) \neq (0, 0)$, ou seja a aplicação P é transversal ao conjunto $\mathcal{D} = \{(p, p) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : p \in \Sigma\}$, numa vizinhança de $(0, 0)$. Portanto o conjunto $\mathfrak{h} = \{\varepsilon : P_\varepsilon \text{ é transversal a } \mathcal{D}\}$, com $P_\varepsilon(p) = P(\varepsilon, p)$ é denso no intervalo $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, conseqüentemente os pontos fixos da transformação de Poincaré π_ε , com $\varepsilon \in \mathfrak{h}$ são todos elementares, concluindo assim o item *i*).

Para que γ seja ciclo principal de $\mathcal{F}_1(\eta_\varepsilon)$, $(ds, dv, dw) = (ds, 0, 0)$ terá que ser solução do sistema (4.6), com $v = w = 0$ ou seja

$$\left(B_1(s) + k_3(s) + \varepsilon \phi(s)\right) \cdot ds^2 = 0,$$

como γ é ciclo principal de $\mathcal{F}_1(\eta)$, temos que $B_1(s) + k_3(s) = 0$, como podemos escolher $\phi(s) \neq 0$, segue que para todo $\varepsilon \neq 0$, γ não será ciclo principal de $\mathcal{F}_1(\eta_\varepsilon)$, concluindo *ii*). \square

4.2 Transversalidades entre conjuntos invariantes

Nesta seção estaremos interessados em estudar as posições relativas entre as superfícies assintóticas e as superfícies separatrizes parcialmente umbílicas.

Agora fixaremos algumas notações com o intuito de demonstrar resultados de genericidade na geometria extrínseca de campos de vetores, para as folheações singulares $\mathcal{F}_1(\eta)$ e $\mathcal{F}_2(\eta)$, da distribuição de planos Δ_η de um campo de vetores η em

$\mathfrak{X}_{\mathfrak{R}}^r(\mathbb{R}^3)$, $r \geq 2$. Resultados tipo Kupka-Smale para campos de vetores que podem ser encontrados em [14].

Observemos que \mathbb{R}^3 não é uma variedade compacta. Então considere $\mathfrak{X}_{\mathfrak{R}}^r(\mathbb{R}^3)$ com a topologia definida no artigo de Peixoto [15], que reescrevemos no apêndice D. Para isso considere uma decomposição de \mathbb{R}^3 por compactos K_m , $m \in \mathbb{N}$, tais que

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots \subset K_m \subset K_{m+1} \subset \cdots \subset \mathbb{R}^3, \quad (4.12)$$

cujos abertos na topologia em $\mathfrak{X}_{\mathfrak{R}}^r(\mathbb{R}^3)$ sejam dados por

$$\mathcal{A}(\eta, \delta(p)) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \{\tilde{\eta} : d(\eta, \tilde{\eta}, K_m - \overset{\circ}{K}_{m-1}) < \delta_i = \inf_{K_m - \overset{\circ}{K}_{m-1}} \delta(p)\}. \quad (4.13)$$

Os ciclos principais da folheação $\mathcal{F}_i(\eta)$ serão denotados por γ_{ij} e as linhas parcialmente umbílicas por c_{ij} , onde $i = 1, 2$ indica a que folheação $\mathcal{F}_i(\eta)$ pertence e j indica a enumerabilidade das linhas parcialmente umbílicas e ciclos principais. As superfícies assintóticas serão denotadas por $W_{ij}(H) = \text{Sat}(\text{loc}W_{ij}^s(\gamma_{ij})) \cup \text{Sat}(\text{loc}W_{ij}^u(\gamma_{ij}))$, observe que $\gamma_{ij} = \text{Sat}(\text{loc}W_{ij}^s(\gamma_{ij})) \cap \text{Sat}(\text{loc}W_{ij}^u(\gamma_{ij}))$. As separatrizes parcialmente umbílicas serão denotadas por $W_{ij}(S, K_m) = \text{Sat}(\text{loc}W(c_{ij}, K_m))$.

Essas superfícies assintóticas e as superfícies separatrizes parcialmente umbílicas podem se intersectar das seguintes maneiras:

- Auto-interseção de linhas parcialmente umbílicas.
- interseção entre linhas parcialmente umbílicas distintas.
- interseção de superfícies assintóticas e superfícies separatrizes parcialmente umbílicas.
- Auto-interseção de superfícies assintóticas.
- Interseções entre superfícies assintóticas distintas.

O conjunto dos campos η de $\mathfrak{X}_{\mathfrak{R}}^r(\mathbb{R}^3)$, $r \geq 2$, que satisfazem uma das propriedades abaixo será denotado por \mathcal{G}_i , $i = 1, 2, 3$:

- 1) $\mathcal{P}(\eta)$ o conjunto dos pontos parcialmente umbílicos, é uma subvariedade de dimensão 1 de \mathbb{R}^3 , cujas componentes conexas são linhas parcialmente umbílicas constituídas de pontos Darbouxianos e Semi-Darbouxianos.
- 2) Todos os ciclos principais das folheações $\mathcal{F}_i(\eta)$, $i = 1, 2$ são hiperbólicos.
- 3) Todas as interseções entre separatrizes umbílicas e superfícies assintóticas das folheações $\mathcal{F}_i(\eta)$, $i = 1, 2$, são transversais.

O conjunto que satisfazem as propriedades 1) e 2) será denotado por \mathcal{G}_{12} e o que satisfazem as propriedades 1), 2) e 3), por \mathcal{G}_{123} .

Os resultados de transversalidade a seguir tratam das interseções das separatrizes parcialmente umbílicas e superfícies assintóticas, para os outros tipos de interseções citadas acima podemos demonstrar de maneira análoga. Primeiramente demonstraremos alguns resultados para regiões compactas $K \subset \mathbb{R}^3$, como na topologia de $\mathfrak{X}_{\mathfrak{R}}^r(\mathbb{R}^3)$, com os abertos definidos em (4.13).

Seja $\mathfrak{X}_{\mathfrak{R}}^r(K)$, o conjunto dos campos regulares η de classe C^r no compacto $K \subset \mathbb{R}^3$, com a topologia C^r . Definamos os seguintes conjuntos

$\mathfrak{X}^r(L, K) = \{\eta \in \mathcal{G}_1: \text{cujos ciclos principais que passam por } K \text{ e tem comprimento menor ou igual a } L, \text{ sejam hiperbólicos}\}$.

$\tilde{\mathfrak{X}}^r(L, K) = \{\eta \in \mathfrak{X}^r(L, K): \text{Todas interseções entre superfícies separatrizes parcialmente umbílicas e superfícies assintóticas aos ciclos principais com comprimento menor ou igual a } L \text{ e passam por } K, \text{ sejam transversais}\}$.

Teorema 4.4. \mathcal{G}_1 é aberto e denso em $\mathfrak{X}_{\mathfrak{R}}(\mathbb{R}^3)$.

Demonstração. A demonstração segue de maneira análoga, pelos argumentos de transversalidade como no caso compacto, demonstrado em Lopes, Sotomayor e Garcia [13].

Lema 4.5. *Seja $\eta \in \mathfrak{X}^r(L, K)$ e suponhamos que exista interseção entre uma separatriz umbílica $W(S)$ e uma superfície assintótica $W(H)$, da folheação $\mathcal{F}_1(\eta)$. Então dado $\varepsilon > 0$, existe um campo $\eta_\varepsilon \in \mathfrak{X}^r(L, K)$ tal que $\|\eta_\varepsilon - \eta\|_r < \varepsilon$, tal que $W(S)(\eta_\varepsilon)$ e $W(H)(\eta_\varepsilon)$ se intersectam transversalmente.*

Demonstração. Sejam c uma curva parcialmente umbílica e γ um ciclo principal da folheação $\mathcal{F}_1(\eta)$ do campo η e suponha que $W(S)$ e $W(H)$ se intersectam. Considere uma vizinhança compacta da linha parcialmente umbílica c e uma vizinhança compacta do ciclo principal γ , vizinhanças estas, respectivamente, contidas em $locW(c)$ e $locW(\gamma)$, cujos bordos são os domínios fundamentais de $W(S)$ e $W(H)$, respectivamente, denotados por $W^0(c)$ e $W^0(\gamma)$. As aplicações que associam o campo η a essas vizinhanças fundamentais são contínuas, ou seja $\eta \rightarrow W^0(c)$ e $\eta \rightarrow W^0(\gamma)$ são contínuas, portanto dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que se $\|\eta_\varepsilon - \eta\|_r < \delta$, teremos que $W^0(S)(\eta)$ está $\varepsilon - C^r$ - próxima de $W^0(S)(\eta_\varepsilon)$ e $W^0(H)(\eta)$ está $\varepsilon - C^r$ - próxima de $W^0(H)(\eta_\varepsilon)$. Defina agora para cada inteiro n os

seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} W^n(S) &= \{p \in W(S) : d(p, W^0(S)) \leq n\}, \\ W^n(H) &= \{p \in W(H) : d(p, W^0(H)) \leq n\}, \end{aligned}$$

onde d é a distância induzida em $W^0(S)$ e $W^0(H)$. Novamente temos que as aplicações $\eta \rightarrow W^n(S)$ e $\eta \rightarrow W^n(H)$, são contínuas. Além disso $W^n(S)$ e $W^n(H)$ são subvariedades compactas com bordo de \mathbb{R}^3 . Considere uma vizinhança \mathcal{V} do campo η em $\mathfrak{X}^r(L, K)$ e o conjunto $\tilde{\mathfrak{X}}_n^r(L, K) = \{\eta \in \mathcal{V} : W^n(S) \text{ é transversal a } W^n(H)\}$.

Afirmção: Para todo $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\tilde{\mathfrak{X}}_n^r(L, K)$ é aberto e denso em \mathcal{V} .
Consequentemente $\mathfrak{X}^r(L, K) \cap \mathcal{V} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathfrak{X}}_n^r(L, K)$ é denso em \mathcal{V} .

Abertura: Se $\tilde{\eta} \in \tilde{\mathfrak{X}}_n^r(L, K)$, como $W^n(S)(\tilde{\eta})$ é transversal a $W^n(H)(\tilde{\eta})$, e da continuidade das aplicações $\tilde{\eta} \rightarrow W^n(S)(\tilde{\eta})$ e $\tilde{\eta} \rightarrow W^n(H)(\tilde{\eta})$, segue direto a abertura.

Densidade: Considere o conjunto $\mathcal{K} = W^n(S) \cap W^n(H)$, que sabemos ser compacto pois $W^n(S)$ e $W^n(H)$ também são. Como $W^n(S) \cap W^n(H)$ tem somente pontos regulares da folheação $\mathcal{F}_1(\eta)$ do campo η , podemos considerar as folhas de $\mathcal{F}_1(\eta)$ orientadas numa vizinhança do compacto \mathcal{K} e associar a um campo de linhas $\mathcal{L}_1(\eta)$, assim, para cada $p \in \mathcal{K}$, existe um fluxo tubular $(F_p, f_{n,p})$, contendo p e um número b_p tal que $[-b_p, b_p] \times I^2 \subset f_{n,p}$, tal que o campo de linhas $(f_{n,p})_* \mathcal{L}_1(\eta)$ coincida com o campo unitário em $[-b_p, b_p] \times I^2$. Suponha que $(W^{2n}(S) \cap F_p) \cap (W^{2n}(H) \cap F_p)$ tenha apenas uma componente conexa, se necessário diminua F_p . Como \mathcal{K} é compacto tome uma cobertura finita $\{V_1, V_2, \dots, V_l\}$ de \mathcal{K} , por abertos e fluxos tubulares $(F_k, f_{\eta,k})$, correspondentes, como os obtidos acima. Pela continuidade das aplicações $\eta \mapsto W^n(S)$ e $\eta \mapsto W^n(H)$, existe uma vizinhança $\tilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}$ de η , de modo que para todo $\tilde{\eta} \in \tilde{\mathcal{V}}$, tenhamos

$$W^n(S)(\tilde{\eta}) \cap W^n(H)(\tilde{\eta}) \subset \bigcap_{k=1}^l V_k.$$

Para cada $\tilde{\eta} \in \tilde{\mathcal{V}}$ e $k = 1, 2, \dots, l$, diminuindo a vizinhança se necessário, podemos supor a existência do fluxo tubular $(F_{\tilde{\eta},k}, f_{\tilde{\eta},k})$, com $V_k \subset F_{\tilde{\eta},k}$ e $[-b_p, b_p] \times I^2 \subset f_{\tilde{\eta},k}(F_{\tilde{\eta},k})$ de tal modo que o fecho de V_k esteja contido no interior de $f_{\tilde{\eta},k}^{-1}([-b_p, b_p] \times I_{1/4}^2)$. Seja agora $\tilde{\mathcal{V}}_k$ o conjunto dos campos $\eta \in V_k$ tal que $W^n(S)(\tilde{\eta})$

seja transversal a $\eta \in V_k$ tal que $W^n(H)(\tilde{\eta})$ em \bar{V}_k fecho da vizinhança V_k . Observe que $\tilde{\mathcal{V}}_k$ é um conjunto aberto em $\tilde{\mathcal{V}}$. Como $\tilde{\mathcal{V}} \cap \mathcal{V} = \bigcap_{k=1}^l \tilde{\mathcal{V}}(k)$, resta agora mostrar que cada $\tilde{\mathcal{V}}(k)$ é denso em $\tilde{\mathcal{V}}$. Tomemos um campo de vetores $\eta \in \tilde{\mathcal{V}} \cap \mathfrak{X}^r(L, K)$ e denote por

$$\begin{aligned} S_{\pm}(\eta) &= f_{\eta,k}(W^n(S) \cap F_{\eta,k}) \cap \{\pm b_k\} \times I^2 \\ H_{\mp}(\eta) &= f_{\eta,k}(W^n(H) \cap F_{\eta,k}) \cap \{\pm b_k\} \times I^2. \end{aligned}$$

Devemos agora mostrar que $W^n(S)(\eta)$ é transversal a $W^n(H)(\eta)$ em V_k . Para isso basta mostra que $S_+(\eta)$ seja transversal a $H_+(\eta)$ em $\{b_k\} \times I_{1/4}^2$. Defina a aplicação

$$\pi_{\tilde{\eta}} : f_{\eta,k}^{-1}(-b_k \times 0) \longrightarrow f_{\eta,k}^{-1}(b_k \times 0),$$

que a cada ponto $p \in f_{\eta,k}^{-1}(-b_k \times 0)$ associa o ponto de interseção da folha de $\mathcal{F}_1(\tilde{\eta})$ que passa por p com a seção transversal $f_{\eta,k}^{-1}(b_k \times 0)$. Considere a restrição do campo η ao conjunto F_k tal que para toda perturbação como no Teorema 4.2, podemos obter um campo $\eta_{\varepsilon} \in \mathfrak{X}^r(L, K)$, tal que $\|\eta_{\varepsilon} - \eta\|_r < \varepsilon$, com $\frac{\partial \pi_{\varepsilon}}{\partial \varepsilon}(0) \neq 0$ temos que $H_+(\tilde{\eta})$ e $S_+(\tilde{\eta})$ sejam transversais para todo ponto $p \in f_{\eta,k}^{-1}(-b_k \times 0)$. Completando assim a demonstração do Lema. \square

Teorema 4.6. *O conjunto $\tilde{\mathfrak{X}}^r(L, K_m)$ é residual em $\mathfrak{X}^r(L, K_m)$.*

Demonstração. Basta mostrar que dado um campo $\eta \in \mathfrak{X}^r(L, K_m)$, existe uma vizinhança \mathcal{V} de η em $\mathfrak{X}^r(L, K_m)$, tal que $\tilde{\mathfrak{X}}^r(L, K_m) \cap \mathcal{V}$, contenha um conjunto residual em \mathcal{V} e isto segue direto do Lema 4.5. \square

Lema 4.7. *Seja $\eta \in \mathcal{G}_1$, dado $L > 0$ e γ um ciclo principal hiperbólico de $\mathcal{F}_i(\eta)$, $i = 1, 2$, de comprimento $\leq L$. Então existe uma vizinhança tubular de γ , $V(\gamma)$ em \mathbb{R}^3 e uma vizinhança do campo η , $\mathcal{V}(\eta) \in \mathcal{G}_1$, tal que todo campo $\tilde{\eta} \in \mathcal{V}(\eta)$ tenha ciclo principal $\gamma(\tilde{\eta}) \subset V(\gamma)$, e todo ciclo principal de $\tilde{\eta}$ distinto de $\gamma(\tilde{\eta})$ que passa por $\mathcal{V}(\eta)$, tem comprimento $> L$ e $\gamma(\tilde{\eta})$ varia continuamente com $\tilde{\eta}$.*

Demonstração. A demonstração é inteiramente análoga ao caso de órbitas periódicas de campos de vetores. Ver seção 2 capítulo 3 Melo e Palis [14]. \square

Corolário 4.8. *Considere $\eta \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{R}^3}^r(K_m)$, onde K_m seja um compacto como na decomposição de \mathbb{R}^3 por exaustão de compactos definida em (D.1). Dado $L > 0$, existe apenas uma quantidade finita de ciclos principais na folheação $F_i(\eta)$, cujo comprimento seja menor ou igual a L . Em particular a quantidade de ciclos principais hiperbólicos de $F_i(\eta)$ é enumerável.*

Demonstração. A demonstração segue diretamente do Lema 4.7. Observando que estamos nos compactos K_m e que as linhas parcialmente umbílicas Darbouxianas e SemiDarbouxianas são curvas regulares como demonstrado nos Lema 2.4 e Teoremas 2.6 e 2.8, portanto temos apenas uma quantidade finita nestes compactos. \square

Lema 4.9. *Seja K_m um subconjunto compacto de \mathbb{R}^3 , como em (4.12), e $\eta \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{R}}^r(\mathbb{R}^3)$ tal que η não tenha pontos parcialmente umbílicos em K_m e que as ciclos principais que passam por K_m tenham comprimento $\leq L$. Então existe uma vizinhança \mathcal{V} de η em $\mathfrak{X}_{\mathfrak{R}}^r(\mathbb{R}^3)$, tal que todo ciclo principal de $\tilde{\eta} \in \mathcal{V}$ tenha comprimento $> L$.*

Demonstração. Para cada ponto $p \in K_m$, associamos uma vizinhança U_m de \mathbb{R}^3 e uma vizinhança \mathcal{V}_m de η em $\mathfrak{X}_{\mathfrak{R}}^r(\mathbb{R}^3)$, tal que se $\tilde{\eta} \in \mathcal{V}_m$, então os ciclos principais de $\tilde{\eta}$ que passam por U_m tenham comprimento $> L$. Então tome uma subcobertura finita U_m e suas vizinhanças correspondentes \mathcal{V}_m , e tome a vizinhança $\mathcal{V} = \bigcap_{m=1}^{n<\infty} \mathcal{V}_m$ que satisfaz o desejado, concluindo a demonstração. \square

Teorema 4.10. *O conjunto $\mathfrak{X}^r(L, K_m)$ é aberto e denso em \mathcal{G}_1 .*

Demonstração.

Abertura. Seja $\eta \in \mathfrak{X}^r(L, K_m)$, então para cada compacto K_m tome $p \in K_m$ tal que p não seja ponto parcialmente umbílico e nem esteja em ciclo principal de $\mathcal{F}_i(\eta)$, $i = 1, 2$ de comprimento $\leq L$. Seja \mathcal{W} uma vizinhança de η em \mathcal{G}_1 , tal que sempre que $\tilde{\eta} \in \mathcal{W}$, todo ciclo principal $\gamma(\tilde{\eta})$ que passa pela vizinhança W de γ tenha comprimento $> L$. Se p é parcialmente umbílico ou pertence a um ciclo principal, aplicando o Lema 4.7, podemos achar vizinhanças U e V em K_m e vizinhanças, respectivamente, correspondentes \mathcal{U} e \mathcal{V} . Como K_m é compacto, temos um número finitos de U_i , V_i e W_i cobrindo K_m , de modo que a interseções das correspondentes vizinhanças em $\mathfrak{X}^r(L, K_m)$, contenha um conjunto aberto de pontos em $\mathfrak{X}^r(L, K_m)$. Com isto temos que para cada K_m , existe um real $\delta_m > 0$ tal que sempre que $\tilde{\eta} \in \mathcal{A}(\eta, \delta(p))$, $\delta(p) > 0$ como na topologia de \mathbb{R}^3 definida em (4.13), provando a abertura.

Densidade. Tome $\eta \in \mathcal{G}_1$ e um aberto $\mathcal{A}(\eta, \delta(p))$, $\delta(p) > 0$, podemos achar $\tilde{\eta} \in \mathfrak{X}(L, K_m)$, arbitrariamente próximo de η , obtido por uma perturbação de η em uma pequena vizinhança $K_m \subset K_{m+1}$ e tal que

$$d(\eta, \tilde{\eta}, K_j - \overset{\circ}{K}_{j-1}) < \delta_j, \quad j \leq m.$$

Fazendo sucessivas modificações em η para obter o campo $\tilde{\eta}$, modificações estas como no caso de órbitas periódicas de campos de vetores, que mantiveram $\tilde{\eta} = \eta$

fora de K_{m+1} , ver seção 2 capítulo 3 [14], então temos que $\tilde{\eta} \in \mathcal{A}(\eta, \delta(p))$ e portanto $\tilde{\eta} \in \mathfrak{X}(L, K_m) \cap \mathcal{A}(\eta, \delta(p))$. Isto conclui a demonstração do teorema. \square

Teorema 4.11. *O conjunto \mathcal{G}_{123} é residual em $\mathfrak{X}_{\mathfrak{R}}^r(\mathbb{R}^3)$.*

Demonstração. Basta observar que

$$\mathcal{G}_{123} = \bigcap_{L=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \tilde{\mathfrak{X}}^r(L, K_m),$$

que segue diretamente dos Teoremas 4.4 e 4.6. \square

CONFIGURAÇÃO PRINCIPAL DE CAMPOS COM SINGULARIDADE HIPERBÓLICA

Neste capítulo iremos discutir as configurações principais de campos $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, que contém uma singularidade hiperbólica. Podemos observar pelo Lema 1.1 que as equações diferenciais implícitas que caracterizam as linhas principais da distribuição de planos Δ_η , se estendem analiticamente para campos η com singularidades hiperbólicas. Vamos exibir as configurações principais de dois exemplos de campos de vetores lineares hiperbólicos η . Uma cuja distribuição de planos Δ_η é completamente integrável e outra cuja distribuição de planos não é completamente integrável. No primeiro caso veremos que o conjunto parcialmente umbílico é constituído de duas retas que concorrem na origem e suas configurações principais são como no sistema triplamente ortogonal de superfícies de Dupin (ver figuras 5.1 e 5.2). No segundo caso mostraremos que o conjunto parcialmente umbílico é uma reta dupla que passa pela origem (ver figuras 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 e 5.7). Mostraremos também que a configuração principal na vizinhança de um ponto parcialmente umbílico regular do campo linear η é sempre do tipo D_1 .

Exibiremos uma classe de campos de vetores lineares η que apresenta todos os tipos hiperbólicos, que genericamente, o conjunto dos pontos parcialmente umbílicos da distribuição de planos Δ_η é a união de duas retas concorrentes, ver Proposição 5.6 e exemplo 5.7.

Em seguida mostraremos que para um campo de vetores η de classe C^r , $r \geq 2$, com singularidade hiperbólica na origem, cujo conjunto parcialmente umbílico da distribuição de planos associado a sua linearização seja a união de duas retas concorrentes na origem, o conjunto parcialmente umbílico da distribuição Δ_η é a união de duas curvas regulares γ_1 e γ_2 , com $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = (0, 0, 0)$ e $\gamma_1'(0) \wedge \gamma_2'(0) \neq (0, 0, 0)$.

5.1 Caso linear regular

Primeiramente considere um campo η na carta (u, v, w) de \mathbb{R}^3 linear que não se anule numa vizinhança da origem, de tal modo que $\eta(0, 0, 0) = (a_0, 0, 0)$, $a_0 \neq 0$, ou seja,

$$\begin{aligned}\eta_1 &= a_0 + a_1s + a_2v + a_3w, \\ \eta_2 &= b_1s + b_2v + b_3w, \\ \eta_3 &= c_1s + c_2v + c_3w.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Por simplicidade de notação considere o campo η em (5.1) na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \eta_1(s, v, w) \\ \eta_2(s, v, w) \\ \eta_3(s, v, w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\tag{5.2}$$

que de maneira ainda mais simples é denotado por

$$\eta = A \cdot r + B,\tag{5.3}$$

com $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ uma matriz, $r = (s, v, w)^t$, sem perda de generalidade suponhamos que $\eta(0, 0, 0) = (1, 0, 0)$, ou seja, admitamos que $B = (1, 0, 0)^t$, na equação (5.3). Substituindo o campo η linear (5.1) no sistema de equações (1.14a) e (1.14b), com a condição $\eta(0, 0, 0) = (1, 0, 0)$, temos

$$L(s, v, w)dw^2 + M(s, v, w)dwdv + N(s, v, w)dv^2 = 0,\tag{5.4}$$

com

$$\begin{aligned}L(s, v, w) &= c_2 + b_3 + \left[a_1(b_3 + c_2) - b_1(a_3 + c_1) - c_1(a_2 + b_1) \right]s \\ &\quad + \left[-b_2(a_3 + c_1) + a_2b_3 - b_1c_2 \right]v \\ &\quad + \left[a_3c_2 - b_3c_1 - c_3(a_2 + b_1) \right]w + \mathcal{O}(2),\end{aligned}\tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}M(s, v, w) &= 2(b_2 - c_3) + 2 \left[c_1(a_3 + c_1) - b_1(a_2 + b_1) + a_1(b_2 - c_3) \right]s \\ &\quad + 2 \left[c_2(a_3 + c_1) - b_1b_2 - a_2c_3 \right]v \\ &\quad + 2 \left[a_3b_2 - b_3(a_2 + b_1) + c_1c_3 \right]w + \mathcal{O}(2),\end{aligned}\tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
N(s, v, w) = & -(c_2 + b_3) - \left[a_1(b_3 + c_2) - b_1(a_3 + c_1) - c_1(a_2 + b_1) \right] s \\
& - \left[-b_2(a_3 + c_1) + a_2b_3 - b_1c_2 \right] v \\
& - \left[a_3c_2 - b_3c_1 - c_3(a_2 + b_1) \right] w + \mathcal{O}(2).
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Sendo $(0, 0, 0)$ um ponto parcialmente umbílico ou seja uma singularidade dos coeficientes L, M e N da equação diferencial implícita (5.3), teremos $c_2 = -b_3$ e $c_3 = b_2$. Rescrevendo os coeficientes L, M e N com estas condições, temos

$$\begin{aligned}
L_l(s, v, w) = & (-a_2c_1 - a_3b_1 - 2b_1c_1) \cdot s \\
& + (a_2b_3 - a_3b_2 + b_1b_3 - b_2c_1) \cdot v \\
& + (-a_2b_2 - a_3b_3 - b_1b_2 - b_3c_1) \cdot w + \mathcal{O}(2),
\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
M_l(s, v, w) = & 2(-a_2b_1 + a_3c_1 - b_1^2 + c_1^2) \cdot s \\
& + 2(-a_2b_2 - a_3b_3 - b_1b_2 - b_3c_1) \cdot v \\
& + 2(-a_2b_3 + a_3b_2 - b_1b_3 + b_2c_1) \cdot w + \mathcal{O}(2),
\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
N_l(s, v, w) = & -(-a_2c_1 - a_3b_1 - 2b_1c_1) \cdot s \\
& - (a_2b_3 - a_3b_2 + b_1b_3 - b_2c_1) \cdot v \\
& - (-a_2b_2 - a_3b_3 - b_1b_2 - b_3c_1) \cdot w + \mathcal{O}(2).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Proposição 5.1. *Sejam o campo $\eta = (\eta_1(s, v, w), \eta_2(s, v, w), \eta_3(s, v, w))$ dado em (5.2) e p um ponto parcialmente umbílico. Se*

$$(b_2^2 + b_3^2) [(a_2 + b_1)^2 + (a_3 + c_1)^2] \neq 0,$$

então a configuração principal de η é do tipo D_1 numa vizinhança de $V(p)$ de p .

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos que o ponto singular p seja a origem. Cálculos diretos mostram que a condição de transversalidade T da definição de pontos parcialmente umbílicos 2.1 é

$$\frac{\partial(L, M)}{\partial(v, w)}(0, 0, 0) = 2(b_2^2 + b_3^2) [(a_2 + b_1)^2 + (a_3 + c_1)^2] \neq 0. \tag{5.11}$$

Como $b_2^2 + b_3^2 \neq 0$, suponhamos sem perda de generalidade que $b_2 \neq 0$. Como

a Proposição A.1 no apêndice A garante que as condições que definem os pontos parcialmente umbílicos são invariantes sob uma rotação no plano e portanto podemos considerar o coeficiente de v em L_l dado em (5.8) identicamente nulo, podemos assim determinar

$$a_3 = \frac{a_2 b_3 + b_1 b_3 - b_2 c_1}{b_2}.$$

Substituindo em L_l , M_l e N_l , dados respectivamente, em (5.8), (5.9) e (5.10), temos a notação reduzida dos coeficientes, dadas por

$$\begin{aligned} L_l(s, v, w) &= -q \cdot s - b \cdot w + \mathcal{O}(2), \\ M_l(s, v, w) &= Q \cdot s + (b - a) \cdot v + c \cdot w + \mathcal{O}(2), \\ N_l(s, v, w) &= q \cdot s + b \cdot w + \mathcal{O}(2), \end{aligned} \tag{5.12}$$

onde

$$\begin{aligned} b &= \frac{(b_2^2 + b_3^2)(a_2 + b_1)}{b_2}, \\ b - a &= -2 \frac{(b_2^2 + b_3^2)(a_2 + b_1)}{b_2}, \\ c &= 0, \\ q &= \frac{(b_1 b_3 + b_2 c_1)(a_2 + b_1)}{b_2}, \\ Q &= -2 \frac{(b_1 b_2 - b_3 c_1)(a_2 + b_1)}{b_2}. \end{aligned}$$

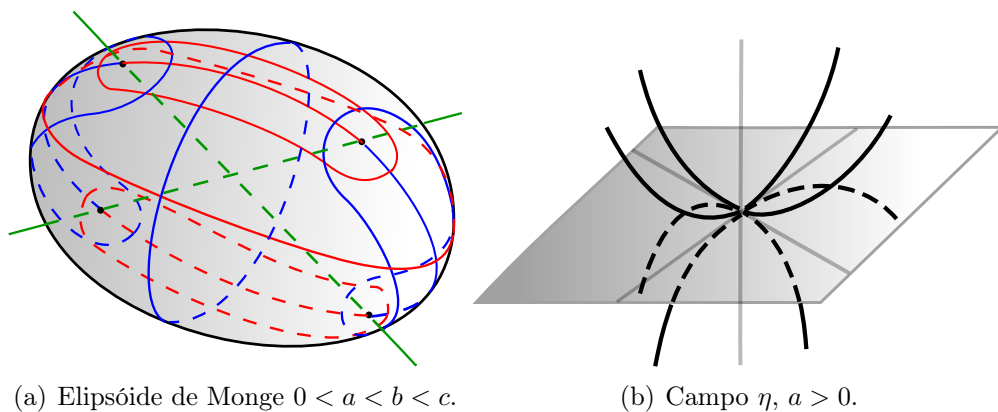
Calculando a condição T) de transversalidade da definição 2.1, $b(b - a) = -2b^2 \neq 0$, verificando a condição que classifica o ponto parcialmente umbílico como do tipo D_1 , D_2 ou D_3 , na definição 2.1, temos $\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2 = -1$. Portanto o ponto singular é do tipo D_1 . \square

5.2 Caso linear singular

Vamos agora analisar alguns exemplos de campos η lineares cujo ponto $(0, 0, 0)$ seja uma singularidade hiperbólica, neste caso o campo η é dado pela equação (5.3), com $B = 0$. Um primeiro caso a considerar é quando a matriz A for diagonal, ou seja $a_{ij} = 0$, quando $i \neq j$. Neste caso a distribuição de planos Δ_η associada ao campo η é completamente integrável, como veremos na proposição a seguir.

Proposição 5.2. Sejam $\eta = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ v \\ w \end{pmatrix}$ com $a < b < c$. Então:

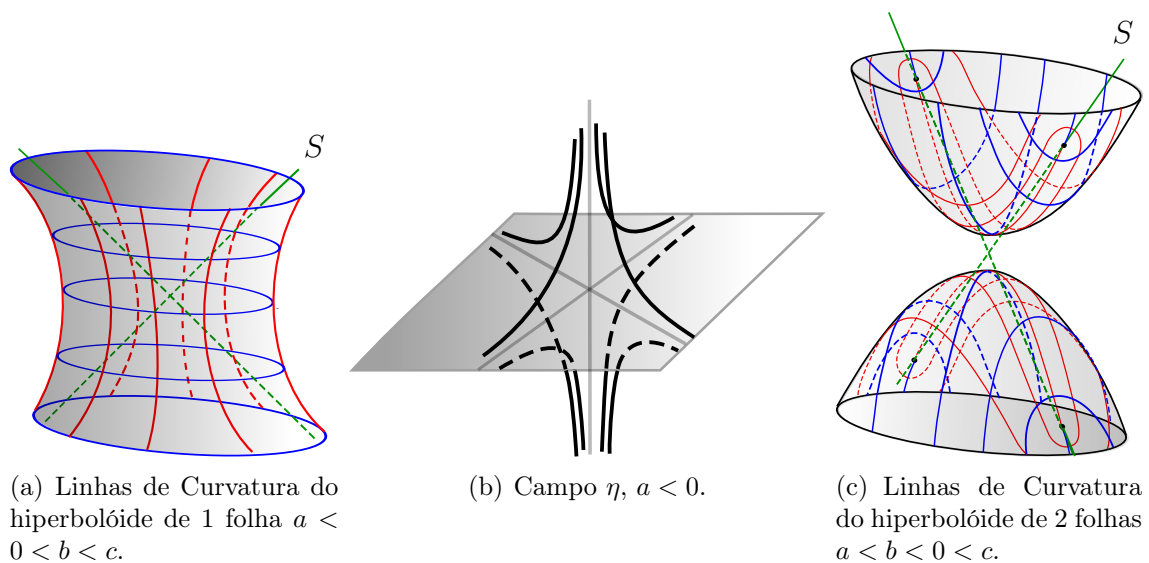
- i) A distribuição de planos Δ_η associada ao campo η é completamente integrável.
- ii) O conjunto de pontos parcialmente umbílicos é constituído de um par de retas C_1 e C_2 concorrentes na origem. Os pontos de $C_1 \cup C_2 - \{(0,0,0)\}$, são do tipo D_1 .
- iii) As suas configurações principais em torno de $(0,0,0)$ são como no sistema triplamente ortogonal de superfícies conforme Teorema de Dupin, como nas figuras 5.1. e 5.2



(a) Elipsóide de Monge $0 < a < b < c$.

(b) Campo η , $a > 0$.

Figura 5.1: Configurações principais do sistema triplamente ortogonal de superfícies.



(a) Linhas de Curvatura do hiperbolóide de 1 folha $a < 0 < b < c$.

(b) Campo η , $a < 0$.

(c) Linhas de Curvatura do hiperbolóide de 2 folhas $a < b < 0 < c$.

Figura 5.2: Configurações principais do sistema triplamente ortogonal de superfícies.

Demonstração. Cálculos diretos mostram que $\text{rot}\eta(s, v, w) = 0$, pelo Teorema de integrabilidade de Frobenius segue a integrabilidade da distribuição de planos Δ_η . Para provar o item *ii*), substituindo as coordenadas do campo η na equação(1.14a), que caracteriza as linhas principais e os pontos parcialmente umbílicos temos

$$L(s, v, w)dw^2 + M(s, v, w)dwdv + N(s, v, w)dv^2 = 0, \quad (5.13)$$

com

$$\begin{aligned} L(s, v, w) &= \frac{2bc(a-c)}{a} \cdot vw, \\ M(s, v, w) &= \frac{2a^2(b-c)}{a} \cdot s^2 + \frac{2b^2(a-c)}{a} \cdot v^2 + \frac{2c^2(b-a)}{a} \cdot w^2, \\ N(s, v, w) &= -\frac{2bc(a-b)}{a} \cdot vw. \end{aligned}$$

O conjunto dos pontos parcialmente umbílicos é constituído dos pontos (s, v, w) tais que $L(s, v, w) = M(s, v, w) = N(s, v, w) = 0$. $L = N = 0$ se é somente se $v = 0$ ou $w = 0$.

- Se $w = 0$, para que M seja zero teremos

$$2a^2(b-c) \cdot s^2 + 2b^2(a-c) \cdot v^2 = 0,$$

como $a < b < c$, segue que $s = 0$ e $v = 0$, conseqüentemente a única solução é o ponto $(0, 0, 0)$.

- Se $v = 0$, para que seja zero com a condição $a < b < c$, teremos

$$2a^2(b-c) \cdot s^2 - 2c^2(a-b) \cdot w^2 = 0,$$

cuja solução é um par de retas concorrentes na origem. Que os pontos de $C_1 \cup C_2 - \{(0, 0, 0)\}$, são do tipo D_1 , segue diretamente da Proposição 5.1.

Para provar o item *iii*) basta observarmos que o campo $\eta = \nabla f(s, v, w)$, onde

$$f(s, v, w) = \frac{a}{2}s^2 + \frac{b}{2}v^2 + \frac{c}{2}w^2 - k = 0, \quad k > 0. \quad (5.14)$$

A quádrlica definida por $f(s, v, w) = 0$, faz parte de um sistema do tipo

$$g(\lambda) = \frac{s^2}{A^2 - \lambda} + \frac{v^2}{B^2 - \lambda} + \frac{w^2}{C^2 - \lambda} = 1, \quad (5.15)$$

que constitui um sistema triplamente ortogonal de superfícies, para o qual o Teorema de Dupin [21] pag.206, determina que se interceptam nas linhas de curvaturas,

portanto para cada superfície nível k determinada pela equação (5.14), teremos uma configuração como mostra as figuras 5.1. e 5.2. \square

Vamos agora analisar um exemplo em que o campo η se anula em $(0, 0, 0)$ e a distribuição de planos Δ_η não é completamente integrável.

Proposição 5.3. *Sejam $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ v \\ w \end{pmatrix}$ com $a \neq 0$, $a \neq b$, $c \neq 0$ e o sistema de equações diferenciais implícitas definido pelas equações (1.14a) e (1.14b) então:*

- i) *A distribuição de planos Δ_η do campo η não é completamente integrável e o conjunto singular S dos pontos parcialmente umbílicos é a reta dupla $S = \{(s, v, w) \in \mathbb{R}^3 | v = 0, w = 0\}$.*
- ii) *As trajetórias do campo $X_1 = (0, -\eta_3, \eta_2)$ são soluções do sistema definido pelas equações (1.14a) e (1.14b) e os planos $s = s_0$ são invariantes pelas soluções de X_1 cujas trajetórias são do tipo foco, conforme figuras 5.3(b), 5.4(b), 5.5(b), 5.6(b) e 5.7(b).*
- iii) *A função $F(s, v, w) = abs^2 + (b^2 + c^2)(v^2 + w^2) - k$ é uma integral primeira do campo $X_2 = \eta \wedge X_1$, cujas trajetórias são soluções do sistema (1.14a) e (1.14b) e são do tipo hélices espirais, conforme figuras 5.3(a), 5.4(a), 5.5(a), 5.6(a) e 5.7(a).*

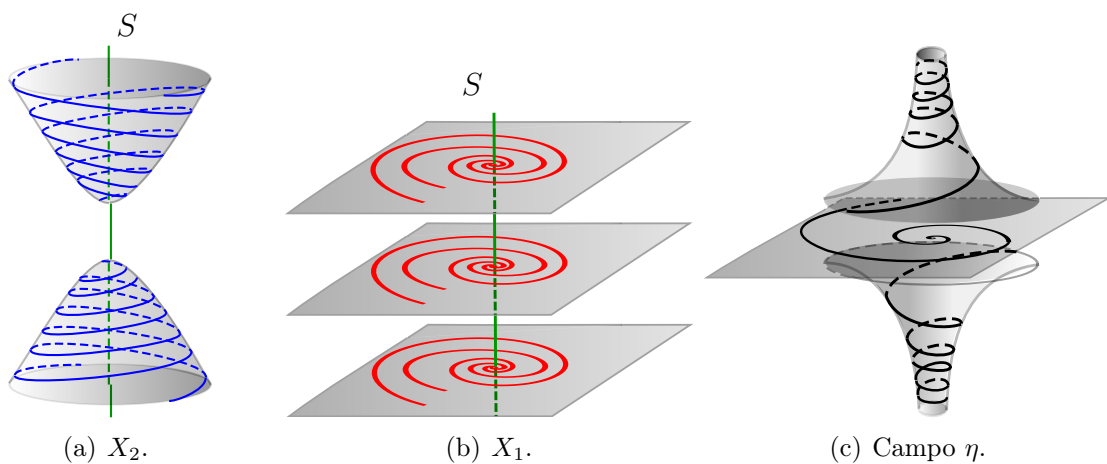


Figura 5.3: Configurações principais da Proposição 5.3 nos níveis $F(s, v, w) = k < 0$ com $b < 0 < a$.

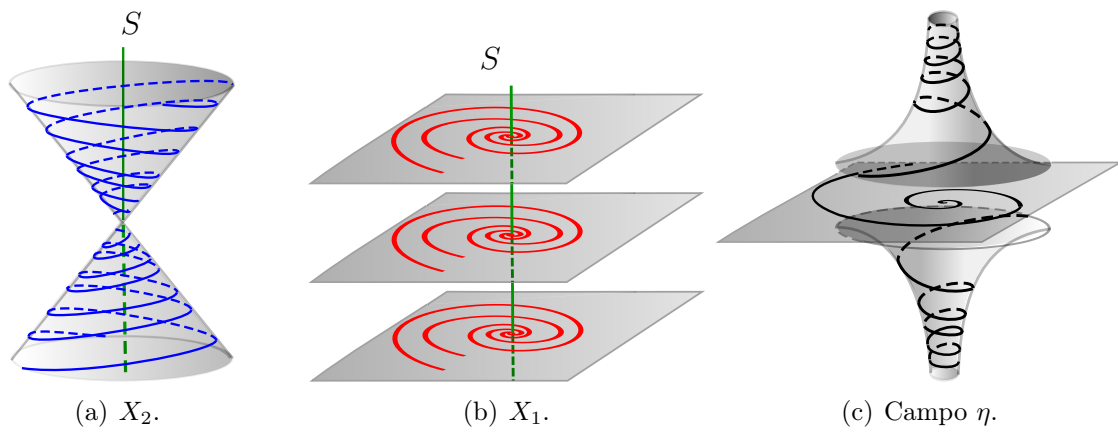


Figura 5.4: Configurações principais da Proposição 5.3 nos níveis $F(s, v, w) = k = 0$ com $b < 0 < a$.

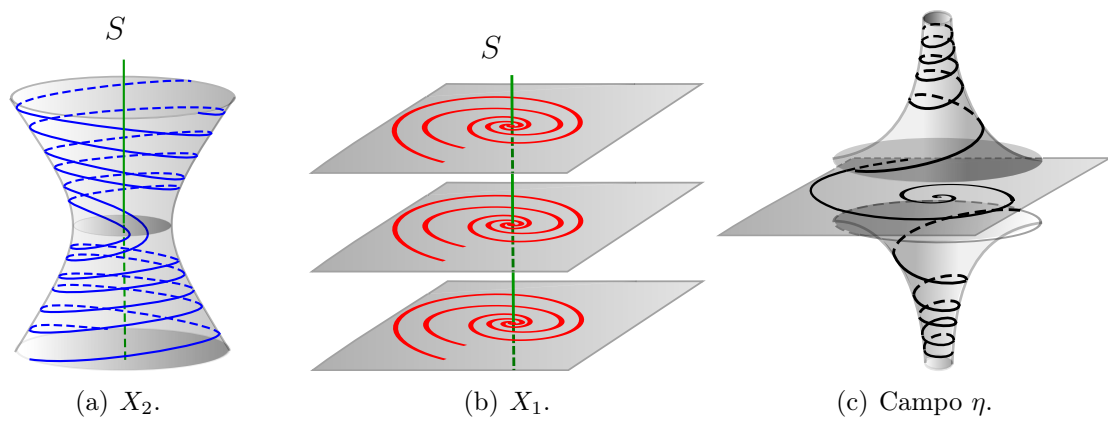


Figura 5.5: Configurações principais da Proposição 5.3 nos níveis $F(s, v, w) = k > 0$ com $b < 0 < a$.

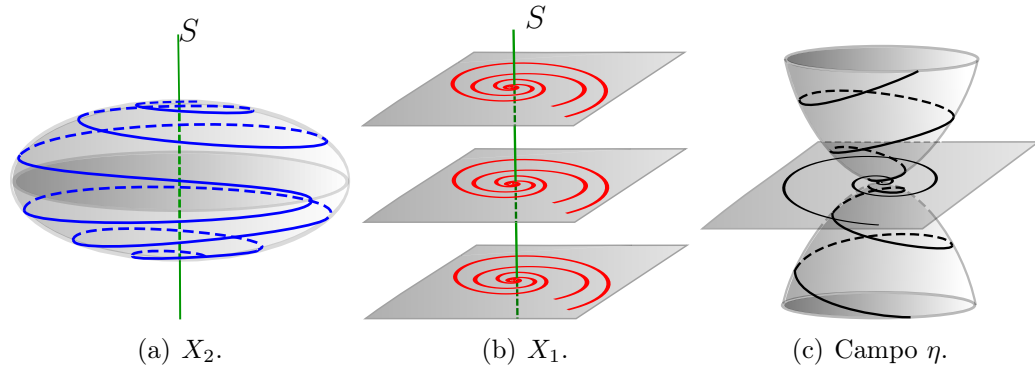


Figura 5.6: Configurações principais da Proposição 5.3 nos níveis $F(s, v, w) = k > 0$, com $0 < b < a$.

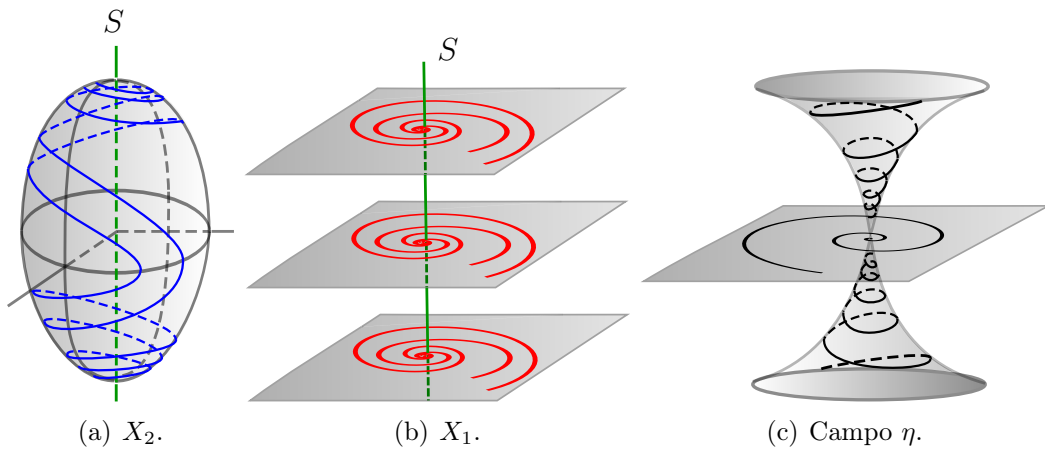


Figura 5.7: Configurações principais da Proposição 5.3 nos níveis $F(s, v, w) = k > 0$, com $0 < a < b$.

Demonstração. A não integrabilidade de Δ_η segue direto do Teorema de integrabilidade de Frobenius, pois cálculos diretos mostram que $\langle \text{rot}\eta, \eta \rangle = -2bs$ e $b \neq 0$. Substituindo o campo η no sistema de equações (1.10), que caracteriza as linhas principais, temos

$$ds \left[((ab - b^2 - c^2)w - acv)dv + ((b^2 + c^2 - ab)v - acw)dw - acsds \right] = 0, \quad (5.16)$$

$$asds + (bv + cw)dv + (-cv + bw)dw = 0. \quad (5.17)$$

- Se $s \neq 0$, resolvendo a equação (5.17) em ds e substituindo na equação (5.16), temos

$$L(s, v, w)dw^2 + M(s, v, w)dvdw + N(s, v, w)dv^2 = 0, \quad (5.18)$$

com

$$L(s, v, w) = (a - b)(bv + cw)(bw - cv), \quad (5.19)$$

$$M(s, v, w) = (a - b)[(b + c)v + (c - b)w][(b - c)v + (b + c)w], \quad (5.20)$$

$$N(s, v, w) = -L(s, v, w), \quad (5.21)$$

como $a \neq b$, os pontos parcialmente umbílicos são determinados por $L(s, v, w) = M(s, v, w) = 0$ que se verifica se, e somente se, $v = w = 0$, ou seja, o conjunto dos pontos parcialmente umbílicos é o eixo s .

- Se $s = 0$, voltando em (5.16) e (5.17), teremos que a única solução é $v = w = 0$.

Portanto o conjunto dos pontos umbílicos é a reta $S = \{(s, v, w) \in \mathbb{R}^3 | v = 0, w = 0\}$, o que conclui *i*).

Para provar *ii*), resolvendo o sistema definido pelas equações (5.16) e (5.17) em (ds, dv, dw) , temos duas soluções determinadas pelos sistemas

$$\begin{cases} ds = 0 \\ (bv + cw)dv + (-cv + bw)dw = 0 \end{cases}, \quad (5.22)$$

e

$$\begin{cases} ds \neq 0 \\ as(cv - bw)ds - (b^2 + c^2)(v^2 + w^2)dw = 0, \\ (cv - bw)dv + (bv + cw)dw = 0 \end{cases}, \quad (5.23)$$

os quais determinam dois campos X_1 e X_2 ,

$$X_1 : \begin{cases} \dot{s} = 0 \\ \dot{v} = cv - bw = -\eta_3, \\ \dot{w} = bv + cw = \eta_2 \end{cases}, \quad (5.24)$$

e

$$X_2 = X_1 \wedge \eta : \begin{cases} \dot{s} = (b^2 + c^2)(v^2 + w^2) \\ \dot{v} = -as(bv + cw) \\ \dot{w} = -as(-cv + bw) \end{cases}, \quad (5.25)$$

e cujas trajetórias são soluções do sistema de equações diferenciais implícitas (5.16) e (5.17). Observe que os planos $s = s_0$ são invariantes pelas soluções de X_1 e suas trajetórias são do tipo foco, o que mostra que as trajetórias de X_1 são como nas figuras 5.3(b), 5.4(b), 5.5(b), 5.6(b) e 5.7(b). O que conclui *ii*).

Para demonstrar o item *iii*), defina a função

$$f(s, v, w) = abs^2 + (c^2 + b^2)(v^2 + w^2) - k,$$

e observe que $\langle X_2, \nabla f \rangle = 0$, com isso temos que a função f é uma integral primeira do campo X_2 , portanto as trajetórias do campo X_2 que são do tipo espirais, estão contidas nas superfícies de níveis $f(s, v, w) = k$, que são quádricas. Observe também que o campo X_2 é ϕ -reversível, onde ϕ é a involução $\phi(s, v, w) = (-s, v, w)$, pois $D\phi(p) \cdot X_2(p) = -X_2(\phi(p))$. Mostrando assim que as trajetórias do campo X_2 são como nas figuras 5.3(a), 5.4(a), 5.5(a), 5.6(a) e 5.7(a). O que conclui o item *iii*) e portanto a Proposição 5.3. \square

A seguir apresentaremos dois resultados, que caracterizam os conjuntos singulares de pontos parcialmente umbílicos de campos, cuja parte linear tem dois autovalores complexos e um real, primeiro discutiremos o campo linear, depois campos não lineares, mas com parte linear não nula.

Observação 5.4. A matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ que representa uma transformação linear em \mathbb{R}^3 na carta (u, v, w) , que tem dois autovalores complexos com partes reais não nulas, um autovalor real não nulo e deixa o plano vw invariante, em geral pode ser escrita na forma

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ \alpha & b & c \\ \beta & -c & b \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, existe uma rotação de um ângulo $\theta \neq 0$ que conjuga a matriz A a uma matriz

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ \alpha_1 & b & c \\ \beta_1 & -c & b \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

com $\beta_1 = 0$. De fato, se considerarmos a matriz de rotação em torno do eixo s dada por

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ 0 & \text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

a matriz $B = R_\theta \cdot A \cdot R_\theta^{-1}$ é

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ \alpha \cos \theta - \beta \operatorname{sen} \theta & b & c \\ \beta \cos \theta + \alpha \operatorname{sen} \theta & -c & b \end{pmatrix},$$

a equação $B_{31} = 0$, admite uma solução não nula $\theta = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

Proposição 5.5. *Sejam $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ \alpha & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ v \\ w \end{pmatrix}$ com $a \neq 0$, $a \neq b$,*

$\alpha \neq 0$, $c \neq 0$ e o sistema de equações diferenciais implícitas definido pelas equações (1.14a) e (1.14b), então a distribuição de planos Δ_η do campo η não é completamente integrável e o conjunto singular S dos pontos parcialmente umbílicos é a união de duas retas que concorrem na origem.

Demonstração. Calculando, temos que $\langle \operatorname{rot} \eta, \eta \rangle = -2acs - \alpha(cv - bw)$ que não é identicamente nulo, portanto o Teorema de integrabilidade de Frobenius garante que a distribuição de plano Δ_η associada ao campo η não é completamente integrável. Para determinar o conjunto dos pontos parcialmente umbílicos, substituímos o campo η no sistema (1.10), e teremos

$$\alpha A \left(ds^2 - dv^2 \right) + 2Bdsdv + Cdsdw + \alpha Ddvdw = 0, \quad (5.28)$$

$$asds + (\alpha s + bv + cw)dv - Adw = 0, \quad (5.29)$$

com

$$A = (cv - bw),$$

$$B = -(a - b)(cv - bw),$$

$$C = -\alpha(a - 2b) - 2(a - b)(bv + cw),$$

$$D = -(\alpha s + bv + cw).$$

Primeiramente vamos analisar o caso em que $s \neq 0$. Resolvendo a equação (5.29) em ds determinamos

$$ds = -\frac{1}{as} \left[(\alpha s + bv + cw)dv - Adw \right], \quad (5.30)$$

substituindo ds em (5.28) temos

$$L(s, v, w)dv^2 + M(s, v, w)dvdw + N(s, v, w)dw^2 = 0 \quad (5.31)$$

com

$$L(s, v, w) = -A \left(\alpha(a^2 - 2ab)s^2 + 2ab(a - b)sv + 2ac(a - b)sw - \alpha c^2 v^2 + 2abcvw - ab^2 w^2 \right), \quad (5.32)$$

$$M(s, v, w) = -2\alpha^2 abs^3 + 2\alpha ab(a - 2b)s^2 v + 2\alpha ac(a - 2b)s^2 w + (2a(b^2 - c^2)(a - b) - 2\alpha^2 c^2)sv^2 + 4bc(2a^2 - 2ab + \alpha^2)svw - (2a(b^2 - c^2)(a - b) + 2\alpha^2 b^2)sw^2 - 2b\alpha c^2 v^3 + 2\alpha c(2b^2 - c^2)v^2 w - 2ab(b^2 - 2c^2)vw^2 - 2ab^2 cw^3, \quad (5.33)$$

$$N(s, v, w) = A \left(\alpha(a^2 - 2ab + \alpha^2)s^2 + 2b(a^2 - ab + \alpha^2)sv + 2c(a^2 - ab + \alpha^2)sw + \alpha b^2 v^2 + 2abcvw + \alpha c^2 w^2 \right). \quad (5.34)$$

Os pontos parcialmente umbílicos são determinados por $L(s, v, w) = M(s, v, w) = N(s, v, w) = 0$, se $A = 0$ ou seja $w = \frac{c}{b}v$ temos que $L(s, v, w) = N(s, v, w) = 0$, substituindo este valor de w em (5.33) e igualando a zero temos

$$\frac{2as}{b^2} \left[\alpha bs + (b^2 + c^2)v \right] \left[(b^2 + c^2)(a - b)v - \alpha b^2 s \right] = 0, \quad (5.35)$$

cujas soluções em v são

$$v_1 = -\frac{\alpha b}{b^2 + c^2}s, \quad v_2 = \frac{\alpha b^2}{(a - b)(b^2 + c^2)}s.$$

Determinamos assim duas retas concorrentes na origem

$$l_1 = \left(s, -\frac{\alpha b}{b^2 + c^2}s, -\frac{\alpha c}{b^2 + c^2}s \right), \quad (5.36)$$

$$l_2 = \left(s, \frac{\alpha b^2}{(a - b)(b^2 + c^2)}s, \frac{\alpha bc}{(a - b)(b^2 + c^2)}s \right), \quad (5.37)$$

que são soluções do sistema de equações (1.14a) e (1.14b). Resta agora mostrar que não existem mais pontos parcialmente umbílicos além destes que estão em $l_1 \cup l_2$. Para isso fazemos a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} s = \bar{s} \\ v = \bar{v} + v_1 \\ w = \bar{w} + w_1 \end{cases}, \quad (5.38)$$

onde v_1 e w_1 são as coordenadas da reta l_1 . Reescrevendo $M(s, v, w)$, $N(s, v, w)$ neste novo sistema de coordenadas temos

$$\begin{aligned} M(s, \bar{v}, \bar{w}) &= -2\alpha a^2 b s^2 \bar{v} - 2\alpha a^2 c s^2 \bar{w} + 2a(b^2 - c^2)(a - b)s\bar{v}^2 \\ &\quad + 8abc(a - b)s\bar{v}\bar{w} - 2a(b^2 - c^2)(a - b)s\bar{w}^2 - 2\alpha bc^2 \bar{v}^3 \\ &\quad + 2\alpha c(2b^2 - c^2)\bar{v}^2 \bar{w} - 2\alpha b(b^2 - 2c^2)\bar{v}\bar{w}^2 - 2\alpha b^2 c \bar{w}^3, \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$N(s, \bar{v}, \bar{w}) = (c\bar{v} - b\bar{w}) \cdot Q, \quad (5.40)$$

com

$$Q(s, \bar{v}, \bar{w}) = -\alpha a^2 s^2 + 2ab(a - b)s\bar{v} + 2ac(a - b)s\bar{w} + \alpha c^2 \bar{v}^2 + 2\alpha bc\bar{v}\bar{w} + \alpha b^2 \bar{w}^2.$$

$N(s, \bar{v}, \bar{w}) = 0$, se e somente, se $\bar{w} = \frac{c}{b}\bar{v}$ ou $Q(s, \bar{v}, \bar{w}) = 0$. Para resolver o caso $Q(s, \bar{v}, \bar{w}) = 0$, basta determinar o núcleo da transformação linear H que define a forma quadrática Q , que tem como matriz hessiana

$$H = \begin{pmatrix} -2\alpha a^2 & 2ab(a - b) & 2ac(a - b) \\ 2ab(a - b) & 2\alpha b^2 & 2\alpha bc \\ 2ac(a - b) & 2\alpha bc & 2\alpha c^2 \end{pmatrix}.$$

Calculando, encontramos como núcleo o subespaço gerado pelo vetor $[0, -c, b]$, avaliando $M(s, \bar{v}, \bar{w})$ no núcleo $\{(0, -ct, bt) : t \in \mathbb{R}\}$ de $N(s, \bar{v}, \bar{w})$, temos

$$M(0, -ct, bt) = -2a(a - b)(b^2 + c^2)^2 t^2 s \neq 0,$$

se $ts \neq 0$. Portanto, $M(s, \bar{v}, \bar{w})$ não se anula no núcleo de $N(s, \bar{v}, \bar{w})$ fora da origem.

No caso em que $\bar{w} = \frac{c}{b}\bar{v}$, cálculos diretos mostram que

$$M(s, \bar{v}, \frac{c}{b}\bar{v}) = \frac{2a}{b^2}(b^2 + c^2) \left((a - b)(b^2 + c^2)\bar{v} - \alpha abs \right) s\bar{v} = 0, \quad (5.41)$$

cujas soluções em \bar{v} são

$$\bar{v}_1 = 0, \quad \bar{v}_2 = \frac{\alpha ab}{(a - b)(b^2 + c^2)} s.$$

Substituindo $\bar{v}_1 = 0$ e $\bar{w}_1 = \frac{c}{b}\bar{v}_1 = 0$ em (5.38), temos a solução $v = v_1$ e $w = w_1$ que definem a reta l_1 . Substituindo agora \bar{v}_2 e $\bar{w}_2 = \frac{c}{b}\bar{v}_2$ em (5.38), temos

$$\begin{aligned} v &= \bar{v}_2 + v_1 = \frac{\alpha ab}{(a-b)(b^2+c^2)}s - \frac{\alpha b}{b^2+c^2}s \\ &= \frac{\alpha b^2}{(a-b)(b^2+c^2)}s = v_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= \bar{w}_2 + w_1 = \frac{c}{b} \frac{\alpha ab}{(a-b)(b^2+c^2)}s - \frac{\alpha c}{b^2+c^2}s \\ &= \frac{\alpha bc}{(a-b)(b^2+c^2)}s = w_2, \end{aligned}$$

que definem a reta l_2 .

Analisemos agora o caso em que $s = 0$, voltemos no sistema de equações (5.28) e (5.29), substituindo $s = 0$, temos

$$\alpha A \left(ds^2 - dv^2 \right) + 2Bdsdv + Cdsdw - \alpha(bv + cw)dvdw = 0, \quad (5.42)$$

$$(bv + cw)dv - Adw = 0. \quad (5.43)$$

Se $A = cv - bw = 0$ e $bv + cw = 0$, temos a origem $(0, 0, 0)$, como única solução. Se $A \neq 0$, resolvendo a equação (5.43) em dw encontramos

$$dw = -\frac{bv + cw}{A}dv,$$

substituindo em (5.42) obtemos

$$dw = -\alpha Ads^2 + 2(a-b)(b^2+c^2)(v^2+w^2)dsdv + \alpha(b^2+c^2)(v^2+w^2)dv^2 = 0,$$

a qual não admite pontos parcialmente umbílicos para $A \neq 0$. Segue então que, se $s = 0$ o único ponto parcialmente umbílico é a origem. Portanto, o conjunto dos pontos parcialmente umbílicos é $l_1 \cup l_2$, concluindo a demonstração. \square

A seguir mostraremos uma classe mais ampla de campos de vetores η lineares, rica em exemplos, que genericamente a sua distribuição de planos é não integrável e seu conjunto parcialmente umbílico é um par de retas concorrentes.

Proposição 5.6. *Sejam $\eta = \begin{pmatrix} f(s, v, w) \\ g(s, v, w) \\ h(s, v, w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_s & f_v & f_w \\ -f_v & f_s & g_w \\ h_s & h_v & h_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ v \\ w \end{pmatrix}$ linear,*

com $(0,0,0)$ uma singularidade hiperbólica de η . Então sob condições genéricas nos coeficientes das funções coordenadas do campo η , a sua distribuição de planos Δ_η não é completamente integrável e o conjunto singular S dos pontos parcialmente umbílicos é a união de duas retas concorrentes na origem.

Demonstração. Para simplificar a notação consideremos $f = f(s, v, w)$, $g = g(s, v, w)$ e $h = h(s, v, w)$. Calculando o rotacional $\text{rot}(\eta)$, temos

$$\langle \text{rot}\eta, \eta \rangle = (h_v - g_w)f + (f_w - h_s)g - 2f_v h,$$

que não é identicamente nulo e portanto a distribuição de planos Δ_η , não é completamente integrável.

Denotando $r = (s, v, w)$ e substituindo na equação

$$((D\eta + D\eta^t)(r)(dr), dr, \eta) = 0, \quad (5.44)$$

calculando obtemos a equação

$$L_1 \cdot ds^2 + L_2 \cdot dsdv + L_3 \cdot dsdw + L_4 \cdot dv^2 + L_5 \cdot dvdw + L_6 \cdot dw^2 = 0, \quad (5.45)$$

onde

$$\begin{aligned} L_1 &= (f_w + h_s)g, \\ L_2 &= -(f_w + h_s)f + (g_w + h_v)g, \\ L_3 &= -2(f_s - h_w)g - (g_w + h_v)h, \\ L_4 &= -(g_w + h_v)f, \\ L_5 &= 2(f_s - h_w)f + (f_w + h_s)h, \\ L_6 &= (g_w + h_v)f - (f_w + h_s)g. \end{aligned}$$

A equação da distribuição do plano Δ_η é

$$\langle \eta, dr \rangle = f \cdot ds + g \cdot dv + h \cdot dw = 0. \quad (5.46)$$

Se $f \neq 0$, podemos determinar $ds = -\frac{1}{f}(gdv + hdw)$ em (5.46), substituindo em (5.45), temos

$$L(s, v, w)dw^2 + M(s, v, w)dw dv + N(s, v, w)dv^2 = 0. \quad (5.47)$$

com

$$\begin{aligned} L &= (g_w + h_v)f^3 - (f_w + h_s)f^2g + (g_w + h_v)fh^2 - 2(f_s - h_w)fgh + (f_w + h_s)gh^2, \\ M &= 2(f_s - h_w)f^3 + 2(f_w + h_s)f^2h + 2(f_s - h_w)fg^2 + 2(f_w + h_s)g^2h, \\ N &= -(g_w + h_v)f^3 + (f_w + h_s)f^2g - (g_w + h_v)fg^2 + (f_w + h_s)g^3, \end{aligned}$$

cujo conjunto parcialmente umbílico é determinado por $L(s, v, w) = M(s, v, w) = N(s, v, w) = 0$. Resolvendo $M = 0$ em h temos

$$h = \frac{h_w - f_s}{f_w + h_s}f,$$

substituindo em $L = 0$, obtemos

$$\left[(f_w + h_s)^2 + (h_w - f_s)^2 \right] \left[(g_w + h_v)f - (f_w + h_s)g \right] \cdot f^2 = 0.$$

Portanto, fora do plano $f = 0$, genericamente temos a reta

$$\{(g_w + h_v)f - (f_w + h_s)g = 0, (f_s - h_w)f - (f_w + h_s)h = 0\}$$

que é a interseção de dois planos, como solução. No plano $f = 0$, temos que a equação da distribuição de planos é dada por $gdv + hdw = 0$, que fora do plano $h = 0$, determinamos

$$dw = -\frac{g}{h}dv,$$

substituindo em (5.47), com $f = 0$, temos

$$(f_w + h_s)gh^2ds^2 + gh \left[(f_s - h_w)g + (g_w + h_v)h \right] dsdv - (f_w + h_s)(h^2 + g^2)gdv^2 = 0,$$

que admite somente a reta $\{g = 0, f = 0\}$ como conjunto de pontos umbílicos fora do plano $h = 0$. No caso $h = 0$ e $f = 0$, teremos que a distribuição de planos será dada por $gdv = 0$, substituindo na equação (5.47) com $f = g = 0$ temos

$$g \left((f_w + h_s)ds^2 + 2(h_w - f_s)dsdw - (f_w + h_s)dw^2 \right) = 0,$$

cujas únicas singularidades são dadas por $g = 0$, mas como já temos $f = h = 0$, a única solução possível quando $f = g = 0$ é a origem, pois estamos supondo que o campo η tem a origem como singularidade hiperbólica. Portanto, sob condições genéricas nos coeficientes das funções coordenadas do campo linear η , o conjunto dos pontos parcialmente umbílicos é a união das retas $\{f = 0, g = 0\}$ e $\{(g_w + h_v)f - (f_w + h_s)g = 0, (f_s - h_w)f - (f_w + h_s)h = 0\}$, que concorrem na

origem. □

Exemplo 5.7. O campo de vetores

$$\eta = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & a \\ -1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & b \end{array} \right) \begin{pmatrix} s \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

é um campo linear como no Teorema 5.6, que conforme variarmos os parâmetros a e b , obtemos todos os tipos 5 tipos genéricos de campos lineares hiperbólicos em \mathbb{R}^3 , (ver Arnold [2] ou Sotomayor [19]), cuja distribuição de planos Δ_η não são completamente integráveis. Por exemplo:

- $a = 0$ e $b = 2$, autovalores $2, -1 + i$ e $-1 + i$, condição de integrabilidade $\langle \text{rot}\eta, \eta \rangle = -2s - 4w$,
- $a = 0$ e $b = -3$, autovalores $-3, -1 + i$ e $-1 + i$, condição de integrabilidade $\langle \text{rot}\eta, \eta \rangle = -2s + 6w$,
- $a = 0$ e $b = -\frac{1}{2}$, autovalores $-\frac{1}{2}, -1 + i$ e $-1 + i$, condição de integrabilidade $\langle \text{rot}\eta, \eta \rangle = -2s + w$,
- $a = 2$ e $b = 1$, autovalores $-1, \sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$, condição de integrabilidade $\langle \text{rot}\eta, \eta \rangle = -4s - 2v$,
- $a = 1$ e $b = -0, 1$, autovalores aproximados $-1, 2, -0, 5$ e $-0, 3$, condição de integrabilidade $\langle \text{rot}\eta, \eta \rangle = -3s + 1, 2w - v$.

5.3 Caso não linear singular

Teorema 5.8. *Seja $X = X(s, v, w)$ um campo de classe C^r , $r \geq 2$, com parte linear como o campo η do Teorema 5.6. Então existe uma vizinhança da origem, tal que o conjunto dos pontos parcialmente umbílicos é a união de duas curvas regulares γ_1 e γ_2 , com $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = (0, 0, 0)$ e $\gamma_1'(0) \wedge \gamma_2'(0) \neq (0, 0, 0)$.*

Demonstração. Como X tem parte linear como no Teorema 5.6, podemos escrever

$$X(s, v, w) = X_1 \cdot \frac{\partial}{\partial s} + X_2 \cdot \frac{\partial}{\partial v} + X_3 \cdot \frac{\partial}{\partial w}, \quad (5.48)$$

com

$$X_1 = as + a_{11}s^2 + a_{12}sv + a_{13}sw + a_{22}v^2 + a_{23}vw + a_{33}w^2 + \mathcal{O}(3), \quad (5.49)$$

$$X_2 = \alpha s + bv + cw + b_{11}s^2 + b_{12}sv + b_{13}sw + b_{22}v^2 + b_{23}vw + b_{33}w^2 + \mathcal{O}(3), \quad (5.50)$$

$$X_3 = -cv + bw + c_{11}s^2 + c_{12}sv + c_{13}sw + c_{22}v^2 + c_{23}vw + c_{33}w^2 + \mathcal{O}(3). \quad (5.51)$$

Substituindo as coordenadas X_1 , X_2 e X_3 do campo X no sistema (1.10) que caracteriza as linhas de curvaturas

$$\begin{aligned} ((DX + DX^t)(dr), dr, X) &= 0, \\ \langle dr, X \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (5.52)$$

obtemos o sistema

$$A_{11}ds^2 + A_{12}dsdv + A_{13}dsdw + A_{22}dv^2 + A_{23}dvdw + A_{33}dw^2 = 0, \quad (5.53)$$

$$X_1ds + X_2dv + X_3dw = 0, \quad (5.54)$$

com

$$\begin{aligned} A_{11} &= -bwa\alpha + cv\alpha + \alpha(a_{13} + c_{11})s^2 + (a_{12}c + a_{13}b + a_{23}\alpha + 2bc_{11} + 2b_{11}c)vs \\ &+ (-a_{12}b + a_{13}c + 2a_{33}\alpha - 2bb_{11} + 2cc_{11})ws \\ &+ (2a_{22}c + a_{23}b + bc_{12} + b_{12}c - c_{22}\alpha)v^2 \\ &+ (-2a_{22}b + 2a_{23}c + 2a_{33}b - bb_{12} + bc_{13} + b_{13}c + cc_{12} - c_{23}\alpha)wv \\ &+ (-a_{23}b + 2a_{33}c - bb_{13} + cc_{13} - c_{33}\alpha)w^2 + \mathcal{O}(3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{12} &= -2c(a-b)v + 2b(a-b)w + (-aa_{13} - 2bc_{11} + b_{13}\alpha + c_{12}\alpha)s^2 \\ &+ (-aa_{23} + ac_{12} - 4a_{11}c + bb_{13} - bc_{12} + 2b_{12}c + b_{23}\alpha + 2c_{22}\alpha)vs \\ &+ (-2aa_{33} + ac_{13} + 4a_{11}b - 2bb_{12} - 2bc_{13} + b_{13}c + 2b_{33}\alpha + cc_{12} + c_{23}\alpha)ws \\ &+ (2ac_{22} - 2a_{12}c + bb_{23} + 4b_{22}c)v^2 \\ &+ (2ac_{23} + 2a_{12}b - 2a_{13}c - 4bb_{22} + 2bb_{33} - bc_{23} + 3b_{23}c + 2cc_{22})wv \\ &+ (2ac_{33} + 2a_{13}b - 2bb_{23} - 2bc_{33} + 2b_{33}c + cc_{23})w^2 + \mathcal{O}(3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{13} = & -\alpha(a-2b)s - 2b(a-b)v - 2c(a-b)w + (aa_{12} - 3a_{11}\alpha + 2bb_{11} + 2c_{13}\alpha)s^2 \\
& + (2aa_{22} - ab_{12} - 4a_{11}b - a_{12}\alpha + 2bb_{12} + 2bc_{13} + b_{13}c + cc_{12} + 2c_{23}\alpha)vs \\
& + (aa_{23} - ab_{13} - 4a_{11}c - a_{13}\alpha + bb_{13} - bc_{12} + 2cc_{13} + 4c_{33}\alpha)ws \\
& + (-2ab_{22} - 2a_{12}b + a_{22}\alpha + 2bb_{22} + 2bc_{23} + b_{23}c + 2cc_{22})v^2 \\
& + (-2ab_{23} - 2a_{12}c - 2a_{13}b + a_{23}\alpha + bb_{23} - 2bc_{22} + 4bc_{33} + 2b_{33}c + 3cc_{23})wv \\
& + (-2ab_{33} - 2a_{13}c + a_{33}\alpha - bc_{23} + 4cc_{33})w^2 + \mathcal{O}(3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{22} = & bw\alpha - cv\alpha + (-ab_{13} - ac_{12} + c_{11}\alpha)s^2 \\
& + (-ab_{23} - 2ac_{22} - a_{12}c - 2b_{11}c + c_{12}\alpha)vs \\
& + (-2ab_{33} - ac_{23} + a_{12}b + 2bb_{11} + c_{13}\alpha)ws + (-2a_{22}c - b_{12}c + c_{22}\alpha)v^2 \\
& + (2a_{22}b - a_{23}c + bb_{12} - b_{13}c + c_{23}\alpha)wv + (a_{23}b + bb_{13} + c_{33}\alpha)w^2 + \mathcal{O}(3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{23} = & -\alpha^2s - b\alpha v - c\alpha w + (2ab_{12} - 2ac_{13} - a_{12}\alpha - 3b_{11}\alpha)s^2 \\
& + (4ab_{22} - 2ac_{23} - a_{12}b - a_{13}c - 2a_{22}\alpha - 2bb_{11} - 2b_{12}\alpha - 2cc_{11})vs \\
& + (2ab_{23} - 4ac_{33} - a_{12}c + a_{13}b - a_{23}\alpha + 2bc_{11} - 2b_{11}c - 2b_{13}\alpha)ws \\
& + (-2a_{22}b - a_{23}c - bb_{12} - b_{22}\alpha - cc_{12})v^2 \\
& + (-2a_{22}c - 2a_{33}c - bb_{13} + bc_{12} - b_{12}c - b_{23}\alpha - cc_{13})wv \\
& + (-a_{23}c + 2a_{33}b + bc_{13} - b_{13}c - b_{33}\alpha)w^2 + \mathcal{O}(3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{33} = & (ab_{13} + ac_{12} - a_{13}\alpha - 2c_{11}\alpha)s^2 + (ab_{23} + 2ac_{22} - a_{13}b - a_{23}\alpha - 2bc_{11} - c_{12}\alpha)vs \\
& + (2ab_{33} + ac_{23} - a_{13}c - 2a_{33}\alpha - 2cc_{11} - c_{13}\alpha)ws - b(a_{23} + c_{12})v^2 \\
& + (-a_{23}c - 2a_{33}b - bc_{13} - cc_{12})wv - c(2a_{33} + c_{13})w^2 + \mathcal{O}(3).
\end{aligned}$$

Resolvendo a equação (5.54) em ds e substituindo em (5.53), temos a equação

$$L(u, v, w)dw^2 + M(s, v, w)dwdv + N(u, v, w)dv^2 = 0, \quad (5.55)$$

com

$$L(s, v, w) = A_{11}X_2^2 - A_{12}X_1X_2 + A_{22}X_1^2, \quad (5.56)$$

$$M(s, v, w) = 2A_{11}X_2X_3 - A_{12}X_1X_3 - A_{13}X_1X_2 + A_{23}X_1^2, \quad (5.57)$$

$$N(s, v, w) = A_{11}X_3^2 - A_{13}X_1X_3 + A_{33}X_1^2. \quad (5.58)$$

Observe que $L(s, v, w)$, $M(s, v, w)$ e $N(s, v, w)$ tem os jatos de grau dois identicamente nulos, ou seja começa com parte homogênea não nula cúbica. Iremos aplicar a técnica de desingularização conhecida como blowing-up projetivo, para isso façamos a seguinte mudança de coordenadas singular quando $x = 0$,

$$s = x,$$

$$v = xy,$$

$$w = xz,$$

em $L(s, v, w)$, $M(s, v, w)$ e $N(s, v, w)$, obtendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3}L(x, y, z) &= \left[(b_{13} + c_{12})a^3 - \alpha(a_{13} + c_{11})a^2 - 2abc_{11}\alpha \right] x - ac\alpha(a - 2b)y \\ &\quad + ab\alpha(a - 2b)z + \left[(3a_{11}b_{13} + 3a_{11}c_{12} - a_{12}c_{11} - a_{13}b_{11} - 2b_{11}c_{11})a^2 \right. \\ &\quad \left. + (-2a_{11}a_{13}\alpha - 2bb_{11}c_{11} - 2c_{11}c_{13}\alpha)a - 2a_{11}bc_{11}\alpha \right] x^2 \\ &\quad + \left[(b_{23} + 2c_{22})a^3 + (a_{12}c - a_{13}b - a_{23}\alpha)a^2 + \left(-2c_{11}b^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (2b_{11}c - 2c_{12}\alpha)b + (-4a_{11}\alpha + 2c_{13}\alpha)c \right) a + 2a_{11}bc\alpha \right] xy \\ &\quad + \left[(2b_{33} + c_{23})a^3 + (-a_{12}b - a_{13}c - 2a_{33}\alpha)a^2 + \left(-2b_{11}b^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (4a_{11}\alpha - 2cc_{11} - 4c_{13}\alpha)b \right) a - 2a_{11}b^2\alpha \right] xz \\ &\quad - 2abc(a - b)y^2 + 2a(b^2 - c^2)(a - b)yz + 2abc(a - b)z^2 + \mathcal{O}(3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3}M(x, y, z) = & -2ab\alpha^2 + \left[2(b_{12} - c_{13})a^3 - 2\alpha(a_{12} + b_{11})a^2 \right. \\
& \left. + 2\alpha(a_{11}\alpha - 2bb_{11} - c_{13}\alpha)a - 2a_{11}b\alpha^2 \right] x + 2ab\alpha(a - 2b)y \\
& + 2ac\alpha(a - 2b)z + 2 \left[(3a_{11}b_{12} - 3a_{11}c_{13} - a_{12}b_{11} + a_{13}c_{11} - b_{11}^2 + c_{11}^2)a^2 \right. \\
& \left. + \left((-b_{11}^2 + c_{11}^2)b - 2a_{11}a_{12}\alpha - 2b_{11}c_{13}\alpha \right) a + a_{11}^2\alpha^2 - 2a_{11}bb_{11}\alpha \right. \\
& \left. - a_{11}c_{13}\alpha^2 + a_{13}c_{11}\alpha^2 + c_{11}^2\alpha^2 \right] x^2 \\
& + 2 \left[(2b_{22} - c_{23})a^3 + (-a_{12}b - a_{13}c - 2a_{22}\alpha)a^2 + \left(-2b_{11}b^2 + (4a_{11}\alpha \right. \right. \\
& \left. \left. - 2b_{12}\alpha - 2cc_{11} - 2c_{13}\alpha)b - c_{23}\alpha^2 \right) a - 2a_{11}b^2\alpha - \alpha^2(a_{12}b + a_{13}c) \right] xy \\
& + 2 \left[(b_{23} - 2c_{33})a^3 + (-a_{12}c + a_{13}b - a_{23}\alpha)a^2 + \left(2c_{11}b^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + (-2b_{11}c - 2b_{13}\alpha)b + 2\alpha(2a_{11} - c_{13})c - 2c_{33}\alpha^2 \right) a - 2a_{11}bc\alpha \right] xz \\
& + 2 \left[(b^2 - c^2)(a^2 - ba) - c^2\alpha^2 \right] y^2 + 4bc(2a^2 - 2ab + \alpha^2)yz \\
& + 2 \left[-(b^2 - c^2)(a^2 - 2ba - b^2\alpha^2) \right] z^2 + \mathcal{O}(3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3}N(x, y, z) = & \left[-(b_{13} + c_{12})a^3 + \alpha(a_{13} + c_{11})a^2 + \alpha(2bc_{11} - b_{13}\alpha - c_{12}\alpha)a \right. \\
& \left. + \alpha^3(a_{13} + c_{11}) \right] x + c\alpha(a^2 - 2ab + \alpha^2)y - b\alpha(a^2 - 2ab + \alpha^2)z \\
& + \left[(-3c_{11}b_{13} - 3c_{11}c_{12} + a_{11}c_{11} + a_{13}b_{11} + 2b_{11}c_{11})a^2 \right. \\
& + (2c_{11}a_{13}\alpha + 2bb_{11}c_{11} - 2b_{11}b_{13}\alpha - 2b_{11}c_{12}\alpha + 2b_{12}c_{11}\alpha)a \\
& \left. + 2c_{11}bc_{11}\alpha - \alpha^2(c_{11}b_{13} + c_{11}c_{12} + a_{11}c_{11} - 3a_{13}b_{11} - 2b_{11}c_{11}) \right] x^2 \\
& + \left[(-b_{23} - 2c_{22})a^3 + (-a_{11}c + a_{13}b + a_{23}\alpha)a^2 \right. \\
& \left. + \left(2c_{11}b^2 + (-2b_{11}c - 2b_{13}\alpha)b + 2\alpha(2c_{11} - b_{12})c - \alpha^2(b_{23} + 2c_{22}) \right) a \right. \\
& \left. + \alpha(-2c_{11}c + 3a_{13}\alpha + 4c_{11}\alpha)b + \alpha^2(a_{11} + 4b_{11})c + a_{23}\alpha^3 \right] xy \\
& + \left[-(2b_{33} + c_{23})a^3 + (a_{11}b + a_{13}c + 2a_{33}\alpha)a^2 + \left(2b_{11}b^2 - 2\alpha(b_{13} + c_{12})c \right. \right. \\
& \left. \left. + (-4c_{11}\alpha + 2b_{12}\alpha + 2cc_{11} + 2c_{13}\alpha)b - \alpha^2(2b_{33} + c_{23}) \right) a \right. \\
& \left. + 2c_{11}b^2\alpha - \alpha^2(a_{11} + 4b_{11})b + \alpha^2(3a_{13} + 4c_{11})c + 2a_{33}\alpha^3 \right] xz \\
& + 2bc(a^2 - ab + \alpha^2)y^2 - 2(b^2 - c^2)(a^2 - ba + \alpha^2)yz \\
& - 2bc(a^2 - ab + \alpha^2)z^2 + \mathcal{O}(3).
\end{aligned}$$

Fazendo o blowing-up nas retas l_1 e l_2

$$l_1 = \left(s, -\frac{\alpha b}{b^2 + c^2}s, -\frac{\alpha c}{b^2 + c^2}s \right), \quad (5.59)$$

$$l_2 = \left(s, \frac{\alpha b^2}{(a-b)(b^2 + c^2)}s, \frac{\alpha bc}{(a-b)(b^2 + c^2)}s \right), \quad (5.60)$$

obtidas, respectivamente, em (5.36) e (5.37), que constituem o conjunto parcialmente umbílico do Teorema 5.3, temos as retas

$$\bar{l}_1 = \left(x, -\frac{\alpha b}{b^2 + c^2}, -\frac{\alpha c}{b^2 + c^2} \right), \quad (5.61)$$

$$\bar{l}_2 = \left(x, \frac{\alpha b^2}{(a-b)(b^2 + c^2)}, \frac{\alpha bc}{(a-b)(b^2 + c^2)} \right). \quad (5.62)$$

Fazendo $\bar{L}(x, y, z) = \frac{1}{x^3}L(x, y, z)$, $\bar{M}(x, y, z) = \frac{1}{x^3}L(x, y, z)$, cálculos mostram que o jacobiano $\frac{\partial(\bar{L}, \bar{M})}{\partial(y, z)}(x, y, z)$, avaliado em $P_1 = \left(0, -\frac{\alpha b}{b^2 + c^2}, -\frac{\alpha c}{b^2 + c^2}\right)$ e $P_2 = \left(0, \frac{\alpha b^2}{(a-b)(b^2 + c^2)}, \frac{\alpha bc}{(a-b)(b^2 + c^2)}\right)$, é

$$\frac{\partial(\bar{L}, \bar{M})}{\partial(y, z)}(P_1) = \frac{\partial(\bar{L}, \bar{M})}{\partial(y, z)}(P_2) = -2\alpha a^4(b^2 + c^2) \neq 0.$$

Portanto o Teorema da função implícita garante que existem uma vizinhança de $x = 0$ e curvas regulares $\bar{\gamma}_1(x)$ e $\bar{\gamma}_2(x)$, cujo blowing down são curvas regulares numa vizinhança de $s = 0$, respectivamente, dadas por

$$\begin{aligned} \gamma_1(s) &= \left(s + \mathcal{O}(s^2), -\frac{\alpha b}{b^2 + c^2}s + \mathcal{O}(s^2), -\frac{\alpha c}{b^2 + c^2}s + \mathcal{O}(s^2)\right), \\ \gamma_2(s) &= \left(s + \mathcal{O}(s^2), \frac{\alpha b^2}{(a-b)(b^2 + c^2)}s + \mathcal{O}(s^2), \frac{\alpha bc}{(a-b)(b^2 + c^2)}s + \mathcal{O}(s^2)\right), \end{aligned}$$

que concorrem na origem e são respectivamente, tangentes às retas l_1 e l_2 , satisfazendo, portanto, a condição $\gamma_1'(0) \wedge \gamma_2'(0) \neq (0, 0, 0)$, ver Figuras 5.8(a) e 5.8(b), como queríamos demonstrar. \square

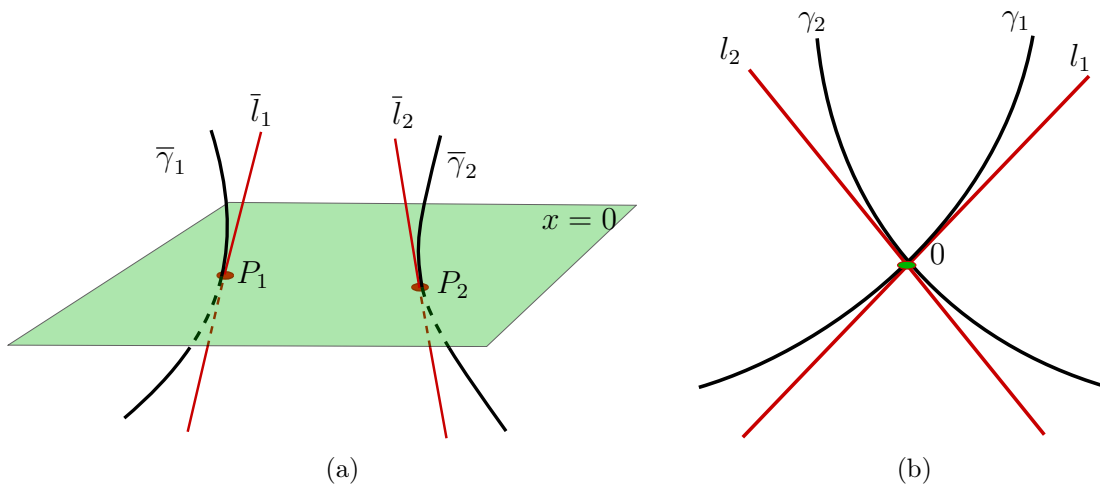


Figura 5.8: Conjunto parcialmente umbílico singular.

Teorema 5.9. *Seja η um campo de vetores de classe C^r , $r \geq 2$, com singularidade hiperbólica na origem, cujo conjunto parcialmente umbílico da sua linearização seja a união de duas retas l_1 e l_2 concorrentes na origem. Então o conjunto parcialmente umbílico da distribuição Δ_η , genericamente é a união de duas curvas regulares γ_1 e γ_2 , tangentes respectivamente, às retas l_1 e l_2 na origem, isto é $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) =$*

$(0, 0, 0)$ e $\gamma'_1(0) \wedge \gamma'_2(0) \neq (0, 0, 0)$, sendo $\gamma'_1(0)$ e $\gamma'_2(0)$ respectivamente, as direções das retas l_1 e l_2 .

Demonstração. A demonstração segue os mesmos passos da demonstração do Teorema 5.8.

CONCLUSÕES

Neste trabalho analisamos o comportamento das duas folheações integrais singulares $\mathcal{F}_1(\eta)$ e $\mathcal{F}_2(\eta)$ definidas pelo sistema de equações diferenciais implícitas $2\langle D\eta(dr), dr, \eta \rangle + \langle \text{rot}(\eta), \eta \rangle \cdot \langle dr, dr \rangle = 0$, que definem as linhas principais associadas as direções máximas e mínimas de um problema de multiplicador de Lagrange da função $k_\eta(dr) = -\frac{\langle D\eta(dr), dr \rangle}{\langle dr, dr \rangle}$, que representa a curvatura normal de um campo regular $\eta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, restrita a distribuição de planos Δ_η , completamente integrável ou não, definida pela equação diferencial $\langle dr, \eta \rangle = 0$.

No segundo capítulo mostramos como se comporta localmente as folheações $\mathcal{F}_1(\eta)$ e $\mathcal{F}_2(\eta)$, na vizinhança dos pontos singulares denominados de pontos parcialmente umbílicos Darbouxianos D_1 , D_2 e D_3 e semi-Darbouxianos D_{12} e D_{23} .

No terceiro capítulo estudamos o comportamento assintótico das folhas compactas γ (ciclos principais), e obtivemos, com uso de resultados da teoria de controle, resultados de hiperbolicidade dos ciclos principais de $\mathcal{F}_1(\eta)$ e $\mathcal{F}_2(\eta)$ e também das órbitas fechadas do campo η .

No quarto capítulo obtivemos resultados de genericidade do tipo Kupka-Smale para as folheações $\mathcal{F}_1(\eta)$ e $\mathcal{F}_2(\eta)$.

No quinto capítulo, consideramos a classe de campos

$$\eta = \begin{pmatrix} f(s, v, w) \\ g(s, v, w) \\ h(s, v, w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_s & f_v & f_w \\ -f_v & f_s & g_w \\ h_s & h_v & h_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

lineares, que contém exemplos dos 5 tipos genéricos de singularidades hiperbólicas na origem. Mostramos que sob condições genéricas a distribuição de planos Δ_η não é completamente integrável, e que o conjunto dos pontos parcialmente umbílicos é a união de duas retas concorrentes na origem. Mostramos também que um campo η de classe C^r , $r \geq 2$, com singularidade hiperbólica, genericamente o conjunto parcialmente umbílico da distribuição Δ_η , é a união de duas curvas regulares γ_1 e γ_2 , com $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = (0, 0, 0)$ e $\gamma_1'(0) \wedge \gamma_2'(0) \neq (0, 0, 0)$. Mostramos também como é o comportamento das folheações $\mathcal{F}_1(\eta)$ e $\mathcal{F}_2(\eta)$, na vizinhança das singularidades

hiperbólicas dos campos $\eta_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ v \\ w \end{pmatrix}$, com $a < b < c$, como mostra

as figuras 5.1 e 5.2, e $\eta_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ v \\ w \end{pmatrix}$, com $a \neq 0$, $a \neq b$, $c \neq 0$,

como mostra as figuras 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 e 5.7. A distribuição de planos Δ_{η_1} é completamente integrável e a distribuição de planos Δ_{η_2} não o é.

Referências Bibliográficas

- [1] AMINOV, Y. **The geometry of vector fields**. Gordon and Breach Publishers, Amsterdam, 2000.
- [2] ARNOLD, V. I. **Ordinary differential equations**. Springer Textbook. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [3] CHANG, A. **An algebraic characterization of controllability**. *IEEE Trans. Automat. Control*, 68:112–113, 1965.
- [4] CORON, J.-M. **Control and nonlinearity**, volume 136 de **Mathematical Surveys and Monographs**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [5] DUMORTIER, F.; LLIBRE, J.; ARTÉS, J. C. **Qualitative theory of planar differential systems**. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [6] FENICHEL, N. **Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows**. *Indiana Univ. Math. J.*, 21:193–226, 1971/1972.
- [7] GARCIA, R. A. **Linhas de curvaturas de hipersuperfícies imersas no espaço \mathbb{R}^4** . *Pré-Plublição- IMPA, (Thesis), Série F(27)*, 1989.
- [8] GARCIA, R. A. **Principal curvature lines near partially umbilic points in hypersurfaces immersed in \mathbb{R}^4** . *Comp. and Appl. Math.*, 20:121–148, 2001.
- [9] HIRSCH, M. W.; PUGH, C. C.; SHUB, M. **Invariant manifolds**. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 583. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.
- [10] HIRSCH, M. W. **Differential topology**. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976. Graduate Texts in Mathematics, No. 33.
- [11] KROUGLOV, V. **A note on the conjecture of Blair in contact Riemannian geometry**. *Tohoku Math. J. (2)*, 64(4):561–567, 2012.
- [12] LOPES, D. **Pontos parcialmente umbílicos em famílias a um parâmetro de hipersuperfícies imersas em \mathbb{R}^4** . *IME-USP, (Tese)*, 2012.

- [13] LOPES, D.; SOTOMAYOR, J.; GARCIA, R. **Partially umbilic singularities of hypersurfaces of \mathbb{R}^4** . *Bull. Sci. Math.*, 139(4):431–472, 2015.
- [14] PALIS, JR., J.; DE MELO, W. **Introdução aos sistemas dinâmicos**, volume 6 de **Projeto Euclides [Euclid Project]**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1978.
- [15] PEIXOTO, M. M. **On an approximation theorem of Kupka and Smale**. *J. Differential Equations*, 3:214–227, 1967.
- [16] REINHART, B. L. **The second fundamental form of a plane field**. *J. Differential Geom.*, 12(4):619–627 (1978), 1977.
- [17] RIFFORD, L.; RUGGIERO, R. O. **Generic properties of closed orbits of Hamiltonian flows from Mañé's viewpoint**. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (22):5246–5265, 2012.
- [18] SOTOMAYOR, J.; GUTIERREZ, C. **Structurally stable configurations of lines of principal curvature**. In: *Bifurcation, ergodic theory and applications (Dijon, 1981)*, volume 98 de **Astérisque**, p. 195–215. Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [19] SOTOMAYOR, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
- [20] SPIVAK, M. **A comprehensive introduction to differential geometry V.1**. Publish or Perish, INC, 3 edition, 1999.
- [21] SPIVAK, M. **A comprehensive introduction to differential geometry V.3**. Publish or Perish, INC, 3 edition, 1999.

EQUAÇÃO REDUZIDA

Proposição A.1. *Existe uma rotação de um ângulo θ , $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, no plano $\{v, w\}$, tal que o termo linear em v de $L(s, v, w)$ e $N(s, v, w)$, dados respectivamente, por (2.2) e (2.4) sejam nulos.*

Demonstração. Considere a equação

$$L(s, v, w)dw^2 + M(s, v, w)dwdv + N(s, v, w)dv^2 = 0, \quad (\text{A.1})$$

com

$$\begin{aligned} L(s, v, w) &= -q \cdot s - E \cdot v - b \cdot w + \mathcal{O}(2), \\ M(s, v, w) &= Q \cdot s + (b - a) \cdot v + c \cdot w + \mathcal{O}(2), \\ N(s, v, w) &= q \cdot s + E \cdot v + b \cdot w + \mathcal{O}(2), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde

$$\begin{aligned} b &= -\left[a_3 c_2 - b_3 c_1 - c_3(a_2 + b_1) + c_{23} + 2b_{33} \right], \\ b - a &= 2\left[c_2(a_3 + c_1) - b_1 b_2 - a_2 c_3 + 2b_{22} - c_{23} \right], \\ c &= 2\left[a_3 b_2 - b_3(a_2 + b_1) + c_1 c_3 - 2c_{33} + b_{23} \right], \\ q &= -\left[a_1(b_3 + c_2) - b_1(a_3 + c_1) - c_1(a_2 + b_1) + b_{13} + c_{12} \right], \\ Q &= 2\left[c_1(a_3 + c_1) - b_1(a_2 + b_1) + a_1(b_2 - c_3) + b_{12} - c_{13} \right], \\ D &= b_2(a_3 + c_1) - a_2 b_3 + b_1 c_2 - b_{23} - 2c_{22}. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned}
s &= s, \\
v &= \cos(\theta) \cdot v_1 + \operatorname{sen}(\theta) \cdot w_1, \\
w &= -\operatorname{sen}(\theta) \cdot v_1 + \cos(\theta) \cdot w_1,
\end{aligned}$$

em (A.1), temos a equação

$$L(s, v_1, w_1)dw_1^2 + M(s, v_1, w_1)dw_1dv_1 + N(s, v_1, w_1)dv_1^2 = 0, \quad (\text{A.3})$$

com

$$\begin{aligned}
L(s, v_1, w_1) &= -\bar{q} \cdot s - \bar{E} \cdot v_1 - \bar{b} \cdot w_1 + \mathcal{O}(2), \\
M(s, v_1, w_1) &= \bar{Q} \cdot s + (\bar{b} - \bar{a}) \cdot v_1 + \bar{c} \cdot w_1 + \mathcal{O}(2), \\
N(s, v_1, w_1) &= \bar{q} \cdot s + \bar{E} \cdot v_1 + \bar{b} \cdot w_1 + \mathcal{O}(2),
\end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

onde

$$\begin{aligned}
\bar{b} &= (E - c) \cos^2(\theta) \operatorname{sen}(\theta) - E \operatorname{sen}^3(\theta) + b \cos^3(\theta) + (a - 2b) \cos(\theta) \operatorname{sen}^2(\theta), \\
\bar{b} - \bar{a} &= (4E - c) \cos^2(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + (b - a) \cos^3(\theta) + (a - 5b) \cos(\theta) \operatorname{sen}^2(\theta) + c \operatorname{sen}^3(\theta), \\
\bar{c} &= (4E - c) \cos(\theta) \operatorname{sen}^2(\theta) + c \cos^3(\theta) + (5b - a) \cos^2(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + (a - b) \operatorname{sen}^3(\theta), \\
\bar{q} &= q \cos^2(\theta) - Q \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) - q \operatorname{sen}^2(\theta), \\
\bar{Q} &= Q \cos^2(\theta) + 4q \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) - Q \operatorname{sen}^2(\theta), \\
\bar{E} &= E \cos^3(\theta) + (c - E) \cos(\theta) \operatorname{sen}^2(\theta) + (a - 2b) \cos^2(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + b \operatorname{sen}^3(\theta).
\end{aligned}$$

Como $\cos(\theta) \neq 0$, em $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, podemos escrever

$$\bar{E} = \cos(\theta)^3 \left(E + (a - 2b) \operatorname{tg}(\theta) + (c - E) \operatorname{tg}^2(\theta) + b \operatorname{tg}^3(\theta) \right). \quad (\text{A.5})$$

Como a função $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, monótona e crescente, portanto, sobrejetiva, e como o segundo fator da equação (A.5) é cúbico, então existe um ângulo θ , em $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ que anula \bar{E} . \square

VARIEDADES INVARIANTES

Esta seção é um breve resumo de conjuntos normalmente hiperbólicos e a sua relação com o conceito de variedades invariantes, que é o conceito de variedades invariantes normalmente hiperbólicas, que é de forma natural uma generalização de conjuntos hiperbólicos, ver N. Fenichel [6]. A forma que será apresentada aqui pode ser encontrada em [7] ou em [12]. Para uma leitura mais completa sugerimos [9].

Sejam M uma variedade de dimensão n de classe C^{r+1} , $X : M \rightarrow TM$ um campo de vetores de classe C^r e $\Lambda \subset M$ uma subvariedade de classe C^r de codimensão l , tal que $X|_{\Lambda} \equiv 0$. sejam $DX(p) : T_pM \rightarrow T_pM$ é a linearização de X em $p \in \Lambda$ e E_p^s, E_p^c, E_p^u , respectivamente, os autoespaços associados a $DX(p)$ com parte real negativa, nula e positiva.

Definição B.1. Dizemos que o conjunto Λ é normalmente hiperbólico para o campo X se a aplicação $QX : \Lambda \rightarrow T_pM/T_p\Lambda$ é invertível.

- Se E_p^s e E_p^u são não vazios diremos que Λ é normalmente hiperbólico do tipo sela.
- Se $E_p^s \neq \phi$ e $E_p^u = \phi$, diremos que Λ é normalmente hiperbólico do tipo atrator.
- Se $E_p^u \neq \phi$ e $E_p^s = \phi$, diremos que Λ é normalmente hiperbólico do tipo repulsor.

Se Λ é normalmente hiperbólico para X , então $E_p^c = T_p\Lambda$.

Definição B.2. Se Λ é normalmente hiperbólico para X , diremos que a variedade $W^s(\Lambda)$ é uma variedade estável para X se:

- $\Lambda \subset W^s(\Lambda)$.
- $W^s(\Lambda)$ é invariante pelo fluxo de X .
- $W^s(\Lambda)$ for tangente à $E_p^s \oplus E_p^c$ em p para todo $p \in \Lambda$.

De maneira análoga definimos a variedade instável $W^u(\Lambda)$ de X .

Teorema B.3. Sejam M uma variedade de classe C^{r+1} , $1 \leq r \leq \infty$, $X : M \rightarrow TM$ um campo de classe C^r e $\Lambda \subset M$ um conjunto normalmente hiperbólico para X . Se

a aplicação $QX(p)$ possui n_1 autovalores com partes reais negativas e n_2 com partes reais positivas, para todo $p \in \Lambda$, então:

- i) *Existem variedades estáveis $W^s(\Lambda)$ e instáveis $W^u(\Lambda)$ de classe C^r tangentes em $p \in \Lambda$ à $E_p^s \oplus E_p^c$ e $E_p^u \oplus E_p^c$, respectivamente.*
- ii) *Qualquer conjunto localmente invariante contido numa vizinhança de Λ está contido em $W^s(\Lambda) \cup W^u(\Lambda)$.*
- iii) *Existe uma vizinhança V de Λ tal que:*
 - $\{p \in V : X_t(p) \in V, \forall t \in \mathbb{R}\} = \Lambda$,
 - $\{p \in V : X_t(p) \in V, \forall t \geq 0\} \subset W^s(\Lambda)$,
 - $\{p \in V : X_t(p) \in V, \forall t \leq 0\} \subset W^u(\Lambda)$,

onde $X_t(p)$ é o fluxo de X .

- iv)
 - $W^s(\Lambda) = \{p \in M : \omega(p) \subset \Lambda\}$, onde $\omega(p)$ denota o conjunto ω -limite de p ,
 - $W^u(\Lambda) = \{p \in M : \alpha(p) \subset \Lambda\}$, onde $\alpha(p)$ denota o conjunto α -limite de p ,
- v) $W^s(\Lambda)$ é fibrado por uma família de subvariedades de classe C^r $\{W^{ss}(p) : p \in \Lambda\}$, localmente invariantes com $T_p W^{ss}(\Lambda) = E_p^s, \forall p \in \Lambda$. $W^u(\Lambda)$ é fibrado de maneira análoga,

Ao leitor interessado, a demonstração se encontra em Fenichel [6] e Hirsch, Pugh e Shub [9].

CONCEITOS DE TEORIA DE CONTROLE

Agora iremos discutir alguns resultados preliminares da teoria de controle que usaremos na seção 3.3 e 4.5. Para uma leitura mais ampla em teoria do controle indicamos Coron [4].

Considere um sistema de controle de sistemas de equações diferenciais lineares homogêneo em $M_n(\mathbb{R})$ (matrizes de ordem $n \geq 1$ com entradas reais) da forma

$$\dot{X}(s) = A(s)X(s) + \sum_{i=1}^k u_i(s)B_i(s)X(s), \quad k \geq 1, \quad (\text{C.1})$$

com $X(s)$ em $M_n(\mathbb{R})$, os controles $u_i(s)$ em $L^1([0, L] : \mathbb{R}^k)$, $k \geq 1$ e $s \in [0, L]$, $L > 0$, $A(s)$, $B_i(s)$ aplicações suaves em $M_n(\mathbb{R})$, com $i = 1, 2, \dots, k$, e o problema de Cauchy

$$\dot{X}(s) = A(s)X(s) + \sum_{i=1}^k u_i(s)B_i(s)X(s), \quad k \geq 1, \quad (\text{C.2})$$

$$X(0) = X_0.$$

Definição C.1. *O sistema de controle (C.1) é completamente controlável ou controlável se, para cada $(X_0, X_1) \in M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$, existe um controle $u(t) = (u_1(s), \dots, u_k(s))$ em $L^\infty((0, L) : \mathbb{R}^k)$, tal que a solução $X \in C^0([0, L], M_2(\mathbb{R}))$ do problema de Cauchy (C.2) satisfaz $X(L) = X_1$.*

O teorema a seguir, nos garante uma condição suficiente para a controlabilidade de (C.1), e se encontra em Rifford e Ruggiero [17].

Teorema C.2. *Seja $L > 0$, e as aplicações suaves $s \in [0, L] \rightarrow A(s), B_1(s) \dots B_k(s) \in M_2(\mathbb{R})$. Defina k seqüências de aplicações*

$$\{B_1^j\}, \dots, \{B_k^j\} : [0, L] \rightarrow T_{I_n} M_n(\mathbb{R}),$$

por

$$\begin{aligned} B_i^0(s) &:= B_i(s), \\ &\vdots \\ B_i^j(s) &:= \frac{d}{ds} B_i^{j-1}(s) - [B_i^{j-1}(s), A(s)]. \end{aligned} \tag{C.3}$$

para todo $s \in [0, L]$ e cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Assumindo que existe um $\bar{s} \in [0, L]$, tal que

$$\text{Span}\{B_i^j(\bar{s}) \mid i \in \{1, \dots, k\}, j \in \mathbb{N}\} = T_{I_n} M_2(\mathbb{R}). \tag{C.4}$$

Então, o sistema de controle (C.1) é controlável em $[0, L]$.

Agora vamos falar sobre a controlabilidade de sistemas de controle de sistemas de equações diferenciais lineares não homogêneos. Considere o problema de controle

$$\dot{X}(s) = M(s)X(s) + A(s)u(s), \tag{C.5}$$

com $X(s)$ em \mathbb{R}^n , os controle $u(s)$ em $L^1([0, L] : \mathbb{R}^k)$, $k \geq 1$ e $s \in [0, L]$, $L > 0$, $M(s) \in L^\infty([0, L] : M_{n \times n}(\mathbb{R}))$, $A(s) \in L^\infty([0, L] : M_{k \times n}(\mathbb{R}))$, e o problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{X}(s) &= M(s)X(s) + A(s)u(s), \\ X(0) &= X_0. \end{aligned} \tag{C.6}$$

Definição C.3. O sistema de controle (C.5) é controlável se, para cada $(X_0, X_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, existe um controle $u(t)$ em $L^\infty((0, L) : \mathbb{R}^k)$, tal que a solução $X \in C^0([0, L], \mathbb{R}^n)$ do problema de Cauchy (C.6) satisfaz $X(L) = X_1$.

A proposição a seguir, nos garante uma condição suficiente para a controlabilidade de (C.1), e se encontra em Coron [4] e sua demonstração se encontra em A. Chang [3].

Teorema C.4. Sejam as aplicações $M(s)$, $A(s)$ de classe $C^\infty \in [0, L]$, $L > 0$. Defina por indução a sequência de aplicações $A_i : [0, L] \rightarrow T_{I_n}(M_{k \times n}(\mathbb{R}))$, por

$$\begin{aligned} A_1(s) &:= A(s), \\ &\vdots \\ A_i(s) &:= \frac{d}{ds} A_{i-1}(s) - M(s)A_{i-1}(s), \quad i \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{C.7}$$

seja $\mathcal{Q}(s) = [A(s), A_2(s), \dots, A_n(s), \dots]$. Uma condição suficiente para o sistema de controle (C.5) ser completamente controlável é que o posto de $\mathcal{Q}(\bar{s}) = n$ para algum $\bar{s} \in (0, L]$.

TOPOLOGIA EM VARIEDADES NÃO COMPACTAS

Nesta seção iremos apresentar uma topologia para o estudo de campos de vetores definidos em variedades não compactas. Apresentaremos aqui como Peixoto em [15].

Seja $M^n = M$ uma variedade não compacta de dimensão n a topologia C^r de Whitney $r \geq 1$, no espaço $\mathfrak{X}^r(M)$ dos campos de vetores em M é definida como segue.

Seja

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots \subset K_i \subset K_{i+1} \subset \cdots \subset M, \quad (\text{D.1})$$

uma decomposição de M por exaustão de compactos K_i , com interior não vazio $\overset{\circ}{K}_i \subset K_{i+1}$. Se X é um campo de vetores em $\mathfrak{X}^r(M)$ e $\delta(x) > 0$ é uma função positiva em M , seja

$$\delta_i = \inf \left\{ \delta(x), \quad x \in K_i - \overset{\circ}{K}_{i-1} \right\}, \quad K_0 = \phi.$$

$$\mathcal{A}(X, \delta(x)) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{Y : d(X, Y, K_i - \overset{\circ}{K}_{i-1}) < \delta_i\}, \quad (\text{D.2})$$

onde d é distância usual C^r em compactos, ver [10].

O conjunto $\mathcal{A}(X, \delta(x))$ forma uma base de uma vizinhança de X na topologia em $\mathfrak{X}^r(M)$.

Observação D.1. Uma observação importante é que esta base não depende da decomposição de M e nem da métrica escolhida em cada compacto K_i .

Teorema D.2. *O conjunto $\mathfrak{X}^r(M)$ com a topologia definida acima é Baire.*

Demonstração. Seja $B_i, i = 1, 2, \dots$ uma família de conjuntos abertos e densos em $\mathfrak{X}^r(M)$. Escolha arbitrariamente $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e um aberto $\mathcal{A}(X, \delta(x))$, contendo X como definido em (D.2). Para provar o teorema devemos achar um campo Y de

classe C^r tal que

$$Y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \cap \mathcal{A}(X, \delta(x)). \quad (\text{D.3})$$

Escolha $X_1 \in B_1 \cap \mathcal{A}(X, \delta(x))$ e $0 < \delta_1(x) < \frac{\delta(x)}{2}$, tal que

$$\mathcal{A}(X_1, \delta_1(x)) \subset B_1 \cap \mathcal{A}(X, \delta(x)),$$

então escolha $X_2 \in B_2 \cap \mathcal{A}(X_1, \delta_1(x))$ e $0 < \delta_2(x) < \frac{\delta_1(x)}{2}$, tal que

$$\mathcal{A}(X_2, \delta_2(x)) \subset B_2 \cap \mathcal{A}(X_1, \delta_1(x))$$

continuando assim obtemos uma sequência de campos X_i de classe C^r e funções positivas $\delta_i(x)$ em, M , $i = 1, 2, \dots$ tais que

$$\mathcal{A}(X_i, \delta_i(x)) \subset \mathcal{A}(X_{i-1}, \delta_{i-1}(x)) \subset \dots \subset \mathcal{A}(X, \delta(x)) \subset B_1 \cap \dots \cap B_i \cap \mathcal{A}(X, \delta(x)).$$

$X_i \in \mathcal{A}(X_{i-1}, \frac{1}{2^i} \delta(x))$. Calculando o limite pontualmente temos que $\lim_{i \rightarrow \infty} X_i = Y$ satisfaz a condição desejada, concluindo o resultado. \square

Índice Remissivo

- Aplicação de Poincaré, 55
- Ciclo principal, 55
hiperbólico, 70
- Colchete de Lie, 56
- Completamente controlável, 123
- Conjunto \mathcal{G}_{123} , 85
- Conjunto \mathcal{G}_{12} , 85
- Conjunto \mathcal{G}_i , 84
- Conjunto normalmente hiperbólico, 121
- Conjunto normalmente hiperbólico do tipo atrator, 121
- Conjunto normalmente hiperbólico do tipo repulsor, 121
- Conjunto normalmente hiperbólico do tipo sela, 121
- Curvatura normal de um campo, 16
- Curvaturas principais, 20
- Direções principais, 21
- Folheações principais, 21
- Frobenius, 16
- Hipersuperfície de Lie-Cartan, 31
- Holonômico, 17
- Lagrange, 20
- Linhas de direções principais, 21
- Linhas principais, 21
- Pontos parcialmente umbílicos, 21
Darbouxianos, 26
Semi-Darbouxianos, 28, 29
- Pontos umbílicos, 21
- Segunda forma fundamental de Δ_η , 23
- Superfícies assintóticas ao ciclo principal, 77
- Superfícies separatrizes invariantes parcialmente umbílicas, 26
- Valores principais, 20
- Variedades invariantes normalmente hiperbólica, 121