

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

JEFFERSON DOS SANTOS E SILVA

**Problemas elípticos quasilineares
envolvendo não-linearidades
interagindo com autovalores de alta
energia**

Goiânia
2019

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: ☐ Dissertação ☒ Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

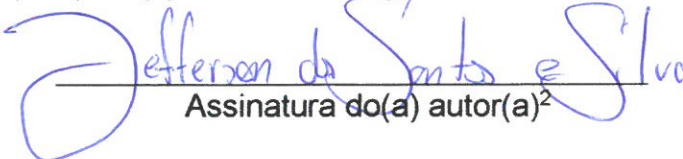
Nome completo do autor: Jefferson dos Santos e Silva

Título do trabalho: Problemas elípticos quasilineares envolvendo não-linearidades interagindo com autovalores de alta energia

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM ☐ NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.


Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:



Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 04 / 04 / 2019

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

² A assinatura deve ser escaneada.

JEFFERSON DOS SANTOS E SILVA

**Problemas elípticos quasilineares
envolvendo não-linearidades
interagindo com autovalores de alta
energia**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva

Goiânia
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Silva, Jefferson dos Santos e
Problemas Elípticos Quasilineares Envolvendo Não-Linearidades
Interagindo com Autovalores de Alta Energia [manuscrito] / Jefferson
dos Santos e Silva. - 2019.
131 f.

Orientador: Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, , Programa
de Pós-Graduação em Matemática, Cidade de Goiás, 2019.
Bibliografia. Apêndice.

1. Equação de Schrödinger Quasilinear. 2. Problemas de
Autovalores. 3. Métodos Variacionais. 4. Teorema de Linking . I. Silva,
Edcarlos Domingos da, orient. II. Título.

CDU 517.95



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.

Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

ATA DA REUNIÃO DA BANCA EXAMINADORA DA DEFESA DE TESE DE JEFFERSON DOS SANTOS E SILVA – Ao décimo terceiro dia do mês de março do ano de dois mil e dezenove (13/03/2019), às 14:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Edcarlos Domingos da Silva - Orientador, Prof. Marcos Leandro Mendes Carvalho, Prof. Maxwell Lizete da Silva, Prof. Uberlândio Batista Severo e Prof. Marcelo Fernandes Furtado, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Lemat do Instituto de Matemática e Estatística, procederem a avaliação da defesa de tese intitulada: **“Problemas elípticos quasilineares envolvendo não-linearidades interagindo com autovalores de alta energia”**, em nível de Doutorado, área de concentração em Análise, de autoria de Jefferson dos Santos e Silva, discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. Edcarlos Domingos da Silva que fez a apresentação formal dos membros da Banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor da tese que, em 45 minutos procedeu à apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da Banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1513 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta o Programa de Pós-Graduação em Matemática e procedidas às correções recomendadas, a tese foi **APROVADA** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **DOUTOR EM MATEMÁTICA**, na área de concentração em Análise pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do PPGM da versão definitiva da tese, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 17:00 horas a presidência da mesa encerrou esta sessão de defesa de tese e para constar eu, Ana Maria Pereira Pinto, secretária do PPGM, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, será assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva
Presidente - IME/UFG

Prof. Dr. Marcos Leandro Mendes Carvalho
Membro – IME/UFG

Prof. Maxwell Lizete da Silva
Membro – IME/UFG

Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo
Membro – DM/UEPB

Prof. Marcelo Fernandes Furtado
Membro – MAT/UNB

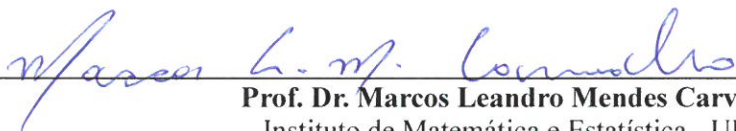
JEFFERSON DOS SANTOS E SILVA

PROBLEMAS ELÍPTICOS QUASILINEARES ENVOLVENDO
NÃO-LINEARIDADES INTERAGINDO COM AUTOVALORES
DE ALTA ENERGIA

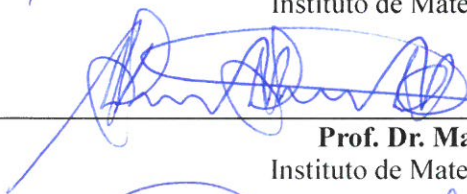
Tese defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática, aprovada em 13 de março de 2019, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



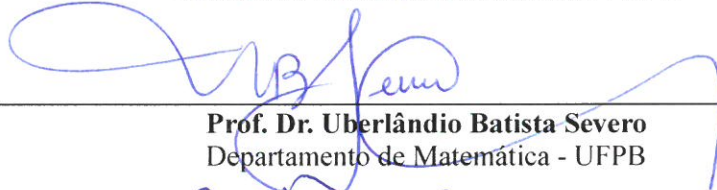
Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva
Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Presidente da Banca



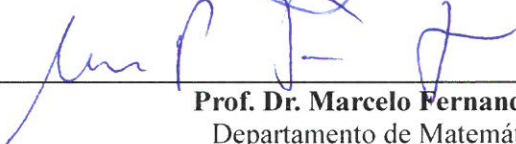
Prof. Dr. Marcos Leandro Mendes Carvalho
Instituto de Matemática e Estatística - UFG



Prof. Dr. Maxwell Lizete da Silva
Instituto de Matemática e Estatística - UFG



Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo
Departamento de Matemática - UFPB



Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado
Departamento de Matemática – UnB

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Jefferson dos Santos e Silva

Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual Vale do Acaraú e Mestre em Matemática, pela Universidade Federal de Goiás, cuja área de concentração é Álgebra. Durante o Doutorado foi bolsista da Capes e desenvolveu trabalhos na área de Análise com dedicação nos estudos de Equações de Schrödinger Quasilineares.

Em memória de meu avô. Saudades eternas.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter permitido que eu concretiza-se este sonho. São muitas as graças que eu recebi de Vós. Nunca me abandonaste em todo esse trajeto, ao qual por longos caminhos pude sentir a Sua mão me sustentando nos momentos mais críticos. Por tudo que tens feito em minha vida e de minha família. Eu Te louvo, agradeço e confio em Vós meu Senhor.

Agradeço a minha filha Maria José. Essa princesa nasceu durante o desenvolvimento desta Tese e me proporcionou, nas suas primeiras semanas de vida, a oportunidades de demonstrar alguns dos resultados durante as madrugadas em claro.

Agradeço a minha esposa Alessandra, pela paciência e compreensão da minha ausência. Por ter proporcionados os melhores momentos de minha vida. Seria impossível partir deste mundo com completa felicidade sem ter te conhecido. Você trouxe para minha vida o meu bem mais precioso.

Agradeço a minha mãe Eunice, pelas orações e amor dedicados a minha criação. Admiro tanto esta mulher e levo seus ensinamentos em meu coração.

Agradeço ao meu pai Maurício. Homem humilde que me ensinou o dom da paciência, tenho orgulho de ser seu filho.

Agradeço aos meus irmãos, Paulo Henrique e Paula Cristina, por serem exemplos em minha vida. Este trabalho é uma homenagem a vocês que sempre me apoiaram.

Agradeço a minha avó Lionídia, tios, tias, cunhados, sogro, sobrinhos e afilhada. Vocês formam uma família perfeita.

Agora, com lágrimas em meus olhos mas com um enorme orgulho, agradeço a minha avó Selvina e minha sogra Maria José. Essas mulheres testemunharam a minha entrada no curso de doutorado. Porém, o destino não possibilitou que as mesmas pudessem ver eu concretizar esse sonho. São dois anjos que vivem lá no Alto, e me ajudaram a concretizar esse trabalho. Hoje tenho em minha memória e no meu coração um lugar reservado a vocês. Poderei um dia esquecer de tudo, mas peço a Deus que eu nunca esqueça de vocês.

Agradeço imensamente ao meu orientador Edcarlos Domingos da Silva pela paciência e dedicação que me conduziu para a realização deste trabalho. Sou eternamente grato por ter acreditado em meu potencial e por ter aceitado me orientar, mesmo sabendo

que eu havia estudado uma área quase disjunta a essa exposta neste trabalho. Este professor foi um grande conselheiro e amigo. Sou honrado por ter sido orientado por um grande profissional com conhecimento imensurável. Reconheço que sua ajuda foi inestimável para que este trabalho fosse finalizado. Estarei sempre colocando você e sua família em minhas orações. Quero carregar essa amizade por toda minha vida. Você "salvou a lavoura" inúmeras vezes.

Meus agradecimentos aos professores, Uberlândio Batista Severo e Marcelo Fernandes Furtado, por aceitarem compor a banca examinadora de minha defesa. Sou grato por terem contribuído para que este trabalho chegasse a esta versão.

Meu sincero agradecimento ao professor Marcos Leandro Mendes Carvalho por ter aceitado compor a banca examinadora de minha defesa. Levo comigo todos os seus conselhos, que são de grande valor para minha formação, e a sua sincera amizade. Espero que possamos desenvolver trabalhos futuros. Tenho grande admiração por seu trabalho e pelas qualidades que encontrei em você. Reconheço que necessito de uma boa aula de como pescar um belo tucunaré.

Agradeço profundamente o professor Maxwell Lizete da Silva por ter contribuído para a finalização de minha Tese. Suas observações feitas, com uma leitura minuciosa, foram de grande valia para o aperfeiçoamento deste trabalho. Principalmente os "bodes" que foram encontrados antes da defesa deste Trabalho. Isso foi fundamental para que eu estivesse mais bem preparado para a arguição do meu trabalho.

Agradeço aos meus professores, Durval Tono, Edcarlos Domingos, José Valdo Gonçalves, Kaye Oliveira da Silva, Iavdat Ilyasov e todos os demais professores do IME, que contribuíram grandiosamente para a minha formação neste período de doutorado.

Agradeço aos meus colegas de mestrado e doutorado, em especial, Dassael F., Fernando (colombiano), Laredo Rennan (um grande amigo deste a fase que estudávamos grupos policíclicos, Gap,...), Pedro B. (bença!), Tiago Calvalcanti (meu irmão nesta área, sou grato a este torcedor do palmeiras), Marcos Roberto (Amigo de área e um irmão que carrego para toda vida), Vando Adona (Goianápolis), Lucas Vidal, Ilton Menezes (Parceiro), Stefânio Moreno (aprendi Galerki com este cara), Karla Carolina, Gustavo Silvestre e Lucas Gabriel, pelo convívio e parceria nos estudos. Sempre lembrarei de vocês.

Agradeço ao amigos de todas as horas, Fábio Patriarca (Fábão), Eudes (Seu Eudes), Célio (mito), Alessandro Martins (Amigos budweiser), Daniela e Suzani, por terem ombreado comigo por todo este período.

Finalizando esses agradecimento, agradeço a todos os funcionários do IME-UFG. Estendo meus agradecimentos a Capes pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

"É necessário que Ele cresça e que eu diminua."

João 3:30,
Bíblia Sagrada.

Resumo

Silva, Jefferson dos Santos. **Problemas elípticos quasilineares envolvendo não-linearidades interagindo com autovalores de alta energia**. Goiânia, 2019. 130p. Tese de Doutorado Relatório de Graduação. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Nesta tese, usando métodos variacionais, obtemos soluções não triviais para a equação elíptica quasilinear cujo termo não linear interage com autovalores de alta energia de um problema linear. Aqui consideramos os casos em que a não linearidade é subcrítica ou crítica. Devido a presença do termo quasilinear, tratar os problemas propostos no presente trabalho torna-se inviável usando de forma direta o funcional energia, devido ao fato que o funcional energia não está bem definido no espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$. Portanto aplicamos uma mudança de variável obtendo um funcional energia auxiliar associado a um problema elíptico semilinear. Para este funcional é possível mostrar a existência de uma estrutura de Linking levando em conta diversos comportamentos do potencial. Além disso, pontos críticos deste funcional são soluções fracas do problema semilinear.

Palavras-chave

Equação de Schrödinger Quasilinear, Problemas de Autovalores, Métodos Variacionais, Teorema de Linking

Abstract

Silva, Jefferson dos Santos. . Goiânia, 2019. 130p. PhD. Thesis Relatório de Graduação. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this thesis, using variational methods, we obtain nontrivial solutions for the quasilinear elliptic equations whose the nonlinear term interacts with high eigenvalues for the linear problem. Here we consider also the cases where the nonlinearity is subcritical or critical. Due to the presence of the quasilinear term in order to treat the problems proposed in the present work which becomes infeasible using directly the functional energy due the fact that it does not well defined in the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^N)$. Hence we apply a change variable obtaining an auxiliary energy functional associated with a semilinear elliptic problem. For this functional is possible to show the existence of a Linking structure taking into account several behaviors on the potential. Furthermore, critical points for that functional are weak solutions of the semilinear problem.

Keywords

Quasilinear Schrödinger equation, Eigenvalues Problem, Variational Methods, Linking Theorem

Sumário

Notações	11
Introdução	13
1 Equações de Schrödinger Quasilinear Interagindo com Autovalores com Alta Energia	24
1.1 Preliminares e Formulação Variacional	36
1.1.1 Formulação Variacional para a Estrutura de Linking	40
1.2 O Linking Local na Origem	48
1.3 A Condição de Palais Smale	54
1.4 A prova dos Principais Resultados	62
2 Equação de Schrödinger Quasilinear com Termo Subcrítico	64
2.1 Preliminares e Formulação para o Problema (2-1)	67
2.2 A Geometria do Funcional Energia	71
2.3 A Prova do Teorema Principal	89
3 Equação de Schrödinger Quasilinear com Termo Crítico	95
3.1 Preliminares e Formulação para o Problema (3-1)	97
3.2 A Geometria do Funcional Energia	98
3.3 A Prova do Teorema Principal	118
4 Apêndice	123
4.1 Integrabilidade Uniforme e Tightness	123
Referências Bibliográficas	126

Notações

No presente trabalho, usaremos as seguintes notações:

- $M, C, C_1, C_2, \dots$ denotam constantes positivas (possivelmente diferentes);
- $B_R(x_0)$ denota a bola aberta de raio R com centro no ponto $x_0 \in \mathbb{R}^N$;
- $\partial B_R(x_0)$ denota a fronteira da bola $B_R(x_0)$;
- $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$;
- A dualidade entre os espaços E e E' , X e X' , serão representados por $\langle \cdot, \cdot \rangle$;
- O suporte de uma função ϕ será representada por $\text{supp } \phi$;
- A convergência fraca será representada por " $\rightharpoonup$ " e a convergência forte por " $\rightarrow$ ";
- $|A|$ denota a medida de Lebesgue de um conjunto mensurável A de $\mathbb{R}^N$;
- Dado um espaço E denotamos por $\dim(E)$ a dimensão de E .
- $B_n = o_n(1)$ se $B_n \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$;
- $[u > \delta] = \{x \in \mathbb{R}^N : u(x) > \delta\}$, de forma semelhante denotamos os conjuntos $[u < \delta]$, $[u \leq \delta]$, $[u \geq \delta]$ e $[u = \delta]$;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$;
- $\Delta(u) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$;
- $C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \equiv C(\mathbb{R}^N)$ denota o espaço das funções contínuas e $C_0(\mathbb{R}^N)$ são as funções contínuas com suporte compacto.
- $C^k(\mathbb{R}^N)$, para $K \geq 1$ inteiro, denota o espaços das funções k -vezes continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^N$ e $C_0^k(\mathbb{R}^N) = C^k(\mathbb{R}^N) \cap C_0(\mathbb{R}^N)$.
- $C^\infty(\mathbb{R}^N) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(\mathbb{R}^N)$ e $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) = C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C_0(\mathbb{R}^N)$.
- $C_{0,r}^\infty(\mathbb{R}^N) = \{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) : u \text{ é radial}\}$
- $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in C(\mathbb{R}^N) : \sup_{x,y \in \mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}$ com $0 < \alpha < 1$.
- $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, $k \geq 1$ inteiro, denota o conjunto de funções que estão em $C^k(\mathbb{R}^N)$ tais que todas as derivadas parciais de ordem até k pertencem a $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$.
- $C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ denota as funções $u \in C(\mathbb{R}^N)$ tais que $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ para todo compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

- $C_{loc}^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ denota o conjunto de funções que estão em $C^k(\mathbb{R}^N)$ tais que todas as derivadas parciais de ordem até k pertencem a $C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$.
- $L^p(\mathbb{R}^N) := \left\{ u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx < \infty \right\}$ com $1 \leq p < \infty$ são os espaços de Lebesgue munido com a norma

$$\|u\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

- $L_{loc}^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p < \infty$ denota os espaço das funções localmente integráveis.
- Dada uma função mensurável $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definimos

$$\|u\|_\infty := \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N\}$$

e

$$L^\infty(\mathbb{R}^N) := \{u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \|u\|_\infty < \infty\}.$$

- $\mathcal{F} := \{w : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : w \geq 0, w \in L^\alpha(\mathbb{R}^N) \text{ para algum } \alpha > N/2\}$
- $L^2(\mathcal{B}_2, \mu) = \{u : \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\mathcal{B}_2} u^2 V(x) dx < \infty\}$ onde $\mathcal{B}$ é um conjunto não vazio e mensurável na medida μ .
- Dado $K \in \mathcal{F}$ definimos o espaço de Lebesgue com peso

$$L^2(\mathbb{R}^N, K_\infty) = \left\{ u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^N} K_\infty(x) |u|^2 dx < \infty \right\}.$$

- $H^1(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \phi dx = - \int_{\mathbb{R}^N} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx, i = 1, \dots, N \right\}.$
- $H_r^1(\mathbb{R}^N, V) = \overline{C_{0,r}^\infty(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_V}$, onde V é um potencial radial.
- Dado $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, definimos

$$u^+(x) = \max\{u(x), 0\} \quad \text{e} \quad u^-(x) = -\min\{u(x), 0\}.$$

- $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \phi dx = - \int_{\mathbb{R}^N} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx, i = 1, \dots, N \right\}.$
- $X := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx < \infty \right\}.$

Introdução

Estudaremos neste trabalho a existência de solução não trivial para a seguinte equação de Schrödinger quasilinear

$$i\partial_t z = -\Delta z + W(x)z - \Delta l(|z|^2)l'(|z|^2)z - h(x, |z|^2)z, \quad x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \quad (0-1)$$

onde $N \geq 3$, $z \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, $W \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é uma função denominada potencial, $l \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ é uma função adequada e $h \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma função satisfazendo algumas hipóteses adequadas. Equações da forma (0-1) aparecem como modelo de vários fenômenos físicos para diversos tipos de função l . Por exemplo, assumindo que $l(t) = 1$ obtemos a equação clássica de Schrödinger semilinear (veja por exemplo [2, 23, 44]). Neste ambiente, temos uma vasta lista de resultados concentrados em existência, não existência, multiplicidade de soluções bem como o comportamento dessas soluções, veja [2, 44]. Para o caso $l(t) = t$, a equação obtida modela problemas da mecânica de fluidos, física dos plasmas e mecânica quântica dissipativa, (veja por exemplo [18, 21, 30, 38]). Neste presente trabalho concentraremos em encontrar soluções não triviais para o caso em que $l(t) = t$. Neste caso, nossos resultados se aplicam os modelos físicos supracitados. Se $l(t) = \sqrt{1+t}$, então a equação (0-1) modela o problema de laser de alta irradiância em um plasma, bem como a auto-canalização de um laser ultracurto de alta potência [22]. Caso seja considerado $l(t) = t^{\alpha/2}$, para $\alpha > 0$, temos um modelo para problemas de filme superfluido. Para essa escolha de função l o problema tem sido extensivamente estudado por diversos autores, veja [32, 33, 34, 40, 51, 52]. Para o problema (0-1), uma solução da forma $z(x, t) = \exp(-iEt)u(x)$ com $E \in \mathbb{R}$ é chamada de onda estacionária. É bem conhecido que, ao buscar tais soluções para a equação (0-1) obtemos uma equação elíptica com a seguinte forma estrutural:

$$-\Delta u + V(x)u - \Delta[l(u^2)]l'(u^2)u = g(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (0-2)$$

onde $V = W - E$ é uma nova função potencial e $h(x, |u|^2)u = g(x, u)$. Como mencionado anteriormente o caso em que $l(t) = 1$, temos a equação semilinear de Schrödinger clássica,

isto é, obtemos a seguinte equação

$$-\Delta u + V(x)u = g(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (0-3)$$

Para este caso temos uma grande quantidade de trabalhos que exploram existência (não existência) de soluções considerando hipóteses distintas sobre o potencial (veja por exemplo em [2, 11, 41, 44, 50]). Em [44], P. H. Rabinowitz mostrou a existência de solução não trivial para equação (0-3) quando o potencial V é coercivo e estritamente positivo, isto é, $V(x) \rightarrow \infty$ quando $|x| \rightarrow \infty$ e existe $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq V_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. T. Bartsch e Z. Q. Wang em [2], consideraram $g \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e ímpar na segunda variável, isto é, $g(x, -t) = -g(x, t)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}$, obtendo existência e multiplicidade de soluções para equação (0-3) onde o potencial V é estritamente positivo. Os autores em [2] consideraram o caso em que conjunto de nível $\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\}$ tem medida de Lebesgue finita para todo $M > 0$. Tal condição sobre o potencial V generaliza a condição usada por P. H. Rabinowitz em [44]. Em [50], A. Szulkin e T. Weth mostraram existência de soluções de energia mínima considerando potenciais V periódicos usando algumas hipóteses sobre o espectro do operador $-\Delta + V$. Inspirado pelo trabalho de Pankov, ver [41], foi obtido a existência de solução por meio de minimização no conjunto

$$\mathcal{M} := \{u \in E \setminus E^- : \Phi'(u)u = 0 \text{ e } \Phi'(u)v = 0 \text{ para todo } v \in E^-\},$$

onde $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ é o funcional energia associado a equação semilinear, $E = H^1(\mathbb{R}^N)$, com $E = E^+ \oplus E^-$, ver [41]. É importante mencionar que soluções de energia mínima são chamadas de Ground States. Por definição, $\mathcal{M}$ contém todos os pontos críticos não triviais do funcional Φ . Quando o funcional $\Phi \in C^2(E, \mathbb{R})$, temos que $\mathcal{M}$ é uma variedade de classe C^1 denominada Variedade de Nehari Generalizada. Em [13] Y. Ding e A. Szulkin mostraram a existência e multiplicidade de soluções bound state com potencial mudando de sinal. É importante enfatizar que uma solução bound state é uma solução com energia finita. Em [11], M. Del Pino e P. Felmer, mostraram existência de solução não trivial para o seguinte problema semilinear

$$-\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u = g(x, u), \quad x \in \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \text{ e } u > 0 \text{ em } \Omega, \quad (0-4)$$

onde Ω é um domínio ilimitado em $\mathbb{R}^N$ com fronteira vazia ou suave e ε é um parâmetro positivo. Ao mesmo tempo, os autores em [11] assumem o potencial V localmente Hölder contínuo satisfazendo a seguinte condição local: Existe um conjunto aberto e limitado Λ compactamente contido em Ω tal que

$$0 < V_0 \leq \inf_{x \in \Lambda} V(x) < \min_{x \in \partial\Lambda} V(x). \quad (0-5)$$

Aplicando um método de penalização, M. Del Pino e P. Felmer, mostraram que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que (0-4) possui uma solução u_ε para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Como mencionamos anteriormente, estamos interessados em estudar o caso em que $l(t) = t$. Neste caso temos que a equação (0-2) fica da forma

$$-\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = g(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (0-6)$$

Nosso principal objetivo aqui é considerar uma estrutura de Linking, estudando os casos em que o termo não linear $g(x, u)$ interaja com autovalores alta energia do problema linear de autovalores. A presença do termo quasilinear $\Delta(u^2)u$ impõem algumas dificuldades quando estamos interessados em utilizar métodos variacionais. Mais precisamente, devido ao fato que o funcional energia associado a equação (0-6) não está bem definido em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Para contornar essa dificuldade, usamos a mudança de variável f introduzida em [9], dada implicitamente na expressão

$$\begin{cases} f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+2f^2(t)}}, & t \geq 0 \\ f(t) = -f(t), & t \leq 0. \end{cases} \quad (0-7)$$

Fazendo $u = f(v)$ na equação (0-6), obtemos uma problema auxiliar

$$-\Delta u + V(x)f(u)f'(u) = g(x, f(u))f'(u), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (0-8)$$

Este problema possui um funcional energia J associado que é bem definido e de classe C^1 . Para este funcional conseguimos mostrar que possui uma estrutura de Linking associada. Esta estrutura será detalhada nos capítulos seguintes.

Para problemas quasilineares podemos destacar os trabalhos [14, 17, 16, 28, 36, 39, 40, 54, 55]. Em [54], E. A. B. Silva e G. F. Vieira provaram, usando uma versão local do Teorema do Passo da Montanha, a existência de solução não trivial considerando o potencial e a não linearidade assintoticamente periódicos. Os mesmos autores em [55], mostraram sobre as mesmas condições destacadas anteriormente, mas com a presença de um termo envolvendo o expoente crítico de Sobolev, a existência de solução não trivial para a equação de Schrödinger quasilinear. Em [39], J. M. do Ó e U. B. Severo, trabalhando em um espaço de Orlicz - Sobolev, mostraram a existência de soluções positivas quando o potencial V satisfaz a condição $V^{-1} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e a não linearidade é do tipo concavo convexo. É importante enfatizar que a condição colocada sobre o potencial V permite que os autores recuperem imersões compactas para um subespaço adequado. Nos trabalhos [16, 17], M. F. Furtado, E. D. Silva e M. L. Silva mostram, trabalhando num Espaço de Orlicz - Sobolev, a existência soluções não triviais com nível de energia dado pelo Teorema do Passo da Montanha. Nesses trabalhos, para obtenção de tais soluções, o

potencial V é estritamente positivo e satisfaz as condições introduzidas por T. Bartsch e Z. Q Wang [2]. A classe de potenciais V considerada em [2], é tal que o conjunto de nível $\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\}$ tem medida de Lebesgue finita para todo $M > 0$. Essa condição, permite mostrar que o espaço

$$X := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < \infty \right\} \quad (0-9)$$

está imerso compactamente nos espaços de Lebesgue $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq s < 2^*$, onde $2^* = 2N/(N-2)$ denota o expoente crítico de Sobolev. Destacamos aqui que todos esses trabalhos supracitados adotam as seguintes hipóteses:

- (H₁) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x,t)}{t} = K_0(x)$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$.
- (H₂) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(x,t)}{t^3} = K_\infty(x)$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$.
- (H₃) Existe uma constante $C > 0$ tal que $|g(x,t)| \leq C(1 + |t|^{p-1})$, para todo $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^N$ com $4 \leq p \leq 2 \cdot 2^*$.

As funções $K_0, K_\infty \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha > N/2$. Consideremos os parâmetros, $\lambda_1(K)$ e $\mu_1(K)$, os quais denotam o primeiro autovalor dos problemas lineares com pesos K_0 e K_∞ , dados respectivamente por:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \lambda K(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (P_\lambda)$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu K(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (P_\mu)$$

Sobre as condições (H₁) – (H₃) o funcional energia J associado ao problema auxiliar (0-8) satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha, desde que $\lambda_1(K_0) < 1 < \mu_1(K_\infty)$. Assim, o problema (0-6) possui solução fraca não trivial. Em nosso trabalho, mostramos existência de soluções não triviais para o caso em que a não linearidade interage com autovalores de alta energia do problema linear (P_λ) . Mais precisamente, consideraremos o caso em que

$$\lambda_j(K_0) < 1 < \lambda_{j+1}(K_0),$$

para algum $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 1$. É importante enfatizar que para este caso a geometria do Teorema do Passo da Montanha não é verificada. Contudo, sob essa condição o funcional energia J satisfaz a geometria de Linking.

Este trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro capítulo mostramos a existência de soluções para a seguinte equação quasilinear

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = g(x, u), & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (0-10)$$

Neste capítulo consideraremos que V é um potencial estritamente positivo e contínuo satisfazendo as hipóteses introduzidas por T. Bartsch e Z. Q. Wang [2]. Mais especificamente, consideraremos as seguintes hipóteses sobre V :

- (V₁) $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) \geq V_0 > 0$;
 (V₂) para qualquer $M > 0$,

$$|\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\}| < +\infty.$$

Como enfatizamos anteriormente essas condições permitem mostrar que X , definido em (0-9), é um subespaço fechado de $H^1(\mathbb{R}^N)$ e está imerso compactamente nos espaços $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq s < 2^*$. Essa hipótese sobre o potencial V generaliza as hipóteses V coercivo e $V^{-1} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, apresentadas nos trabalhos [39] e [44], respectivamente. No início deste capítulo apresentamos exemplos de potenciais que satisfazem cada uma dessas condições. Note que a classe dos potenciais coercivos e a classe de potenciais com inverso integrável não definem a mesma classe de potenciais. Além das hipóteses (V₁) e (V₂), consideraremos que o potencial V cumpre a seguinte condição

- (V₃) Existe $2 < p < 2^*$ tal que

$$S_p = \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p dx\right)^{2/p}} > 0.$$

A condição (V₃) está relacionada com resultados de imersões compactas do espaço das funções radiais em $H^1(\mathbb{R}^N)$ nos espaços de Lebesgue com peso (veja [58]). Em [58], os autores mostraram que $H_r^1(\mathbb{R}^N, V)$ está imerso compactamente no espaço de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^N, Q)$ com peso Q para $2 < p < 2^*$, onde Q denota um potencial radial que satisfaz algumas condições assintóticas.

O principal objetivo neste capítulo é considerar que o termo não linear g é assintoticamente linear ou superlinear no infinito. Estamos interessados em usar o Teorema de Linking Local introduzido S. Lu e M. Willem [25]. Recentemente em [36], S. Lu e J. Zhou, mostraram usando o mesmo Teorema de Linking local, existência de solução não trivial para a equação quasilinear de Schrödinger com potencial indefinido satisfazendo a hipótese de T. Bartsch e Z. Q. Wang, [2], e não linearidade satisfazendo a condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Para o nosso propósito, necessitamos considerar que o termo

não linear g interaja com autovalores de um problema linear de autovalores. Neste caso, introduzimos primeiramente a classe de funções

$$\mathcal{F} := \{w : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : w > 0, w \in L^\alpha(\mathbb{R}^N) \text{ para algum } \alpha > N/2\}.$$

Pedimos as seguintes hipóteses sobre a não linearidade:

(G_0) Existe $K_0 \in \mathcal{F}$ tal que

$$\liminf_{s \rightarrow 0} \frac{2G(x, s)}{s^2} = K_0(x), \text{ uniformemente para q. t. p. } x \in \mathbb{R}^N.$$

(G_∞) Existe $K_\infty \in \mathcal{F}$ com $K_\infty \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{4G(x, s)}{s^4} = K_\infty(x), \text{ uniformemente para q. t. p. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Assumindo que a não linearidade g é assintoticamente linear no infinito consideraremos a seguinte condição de crescimento para g :

(g_1) Existem $a \in L^{2N/(N+2)}(\mathbb{R}^N) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^N)$, $b \in L^{2 \cdot 2^*/(2 \cdot 2^* - r)}(\mathbb{R}^N) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^N)$, $r \in (2, 4)$, $\alpha > N/2$ tal que

$$|g_\infty(x, s)| \leq a(x)|s| + b(x)|s|^{r-1}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N, s \in \mathbb{R},$$

onde $g_\infty(x, s) = g(x, s) - K_\infty(x)s^3$, $(x, s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Portanto, a não linearidade g possui crescimento subcrítico. Em nosso primeiro resultado estamos interessados no caso em que $g(x, \cdot)$ se comporta como s na origem e se comporta como s^3 no infinito. É bom enfatizar que as mesmas condições foram abordadas em [16, 17], sendo grande inspiração para o primeiro capítulo desta Tese. Ainda no Capítulo 1, consideraremos dois problemas de autovalores, para cada $K \in \mathcal{F}$

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \lambda K(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in X. \end{cases}$$

o qual admite um primeiro autovalor $\lambda_1(K) > 0$. Mais especificamente, obtemos uma sequência de autovalores $(\lambda_j(K))_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda_j(K) \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$. O mesmo fenômeno ocorre com o problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu K(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Motivados em parte por [16, 17], podemos enunciar o primeiro resultado deste capítulo:

Teorema 0.0.1 (Caso Assintoticamente Linear) *Suponha que V satisfaz $(V_1) - (V_2)$ e g satisfaz (g_1) , (G_0) e (G_∞) . Então o problema (0-10) admite duas soluções fracas não triviais desde que $\lambda_j(K_0) < 1 < \lambda_{j+1}(K_0)$ para algum $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 1$ e $\mu_1(K_\infty) > 1$.*

Em nosso segundo resultado do Capítulo 1 estamos interessados no caso em que o termo g é superlinear no infinito. Mais especificamente, consideraremos a seguinte condição:

(g_∞)

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{g(x, s)}{s^3} = +\infty, \text{ uniformemente } x \in \mathbb{R}^N.$$

Nesse ambiente, trocamos a condição de crescimento (g_1) por:

(g_2) Existem $\tilde{a}, \tilde{b} \in L^\alpha(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\alpha > N/2$ tal que

$$|g(x, s)| \leq \tilde{a}(x)|s| + \tilde{b}(x)|s|^{p-1}$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}^N$, $s \in \mathbb{R}$ e $4 < p < 2 \cdot 2^*$.

É bom enfatizar que tratando de funções g que cumprem a condição (g_∞) , podemos considerar a condição de Ambrosetti-Rabinowitz (AR), isto é, existe $\theta > 4$ tal que

$$0 < \theta G(x, t) = \theta \int_0^t g(x, \tau) d\tau \leq t g(x, t), \quad \text{para qualquer } t \in \mathbb{R}. \quad (\text{AR})$$

A condição (AR) é uma preciosa ferramenta para mostrar que as sequências de Palais - Smale são limitadas. O nosso segundo resultado deste Capítulo é apresentado da seguinte forma:

Teorema 0.0.2 (Caso Superlinear) *Suponha que V satisfaz $(V_1) - (V_2)$ e g satisfaz (g_2) , (G_0) , (g_∞) e (AR). Então o problema (0-10) admite ao menos uma solução fraca não trivial desde que $\lambda_j(K_0) < 1 < \lambda_{j+1}(K_0)$ para algum $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 1$.*

Para demonstrarmos os resultados mencionados, usamos a mudança de variável f , dada em [9]. Assim, obtemos um problema semilinear cujo funcional energia está bem definido e possui uma geometria de Linking Local na origem, quando g possui crescimento subcrítico.

No Capítulo 2 desta Tese, estudamos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = \lambda q(x)u + \mu K(x)|u|^{p-2}u + h(x), & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (0-11)$$

onde $4 < p < 2 \cdot 2^*$. Neste capítulo trataremos o caso onde o potencial V é contínuo, estritamente positivo e 1-periódico em cada varável. Mais precisamente, consideraremos a seguinte hipótese:

(V₁) V é contínuo e 1-periódico em $x_1, \dots, x_N$. Assumiremos que existem constantes positivas V_0, V_∞ , tais que $V_0 \leq V(x) \leq V_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Essa hipótese sobre o potencial V no Capítulo 2 não implica em algum tipo de compacidade na imersão de X em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq s \leq 2^*$. Este fato impede que possamos mostrar que um dado funcional energia satisfaz a condição de Palais-Smale. Em [14], X. D. Fang e A. Szulkin, obtém resultados de existência e multiplicidade para equações quasilineares com potencial satisfazendo a condição (V₁). Como apresentamos anteriormente, em [54, 55], os autores trabalhando com potenciais assintoticamente periódicos obtiveram soluções não triviais. Adicionalmente, os autores em [54, 55] mostraram existência de soluções não triviais para o caso em que o potencial V é 1-periódico em $x_1, \dots, x_N$.

A parte não linear da equação (0-11) satisfaz as seguintes hipóteses:

(q₁) $q \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha > N/2$ com $q(x) > 0$. Assumiremos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} q(x - y_n)^\alpha dx = 0, \text{ uniformemente em } n \in \mathbb{N} \quad (0-12)$$

onde $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N$ satisfaz $|y_n| \rightarrow \infty$ com $n \rightarrow \infty$.

(K₁) K é contínuo e 1-periódico em $x_1, \dots, x_N$. Assumiremos que existe uma constante positiva k_0 tal que $K(x) \geq k_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

(h₁) $h \in L^{2N/(N+2)}(\mathbb{R}^N)$.

A hipótese (q₁) nos permite mostrar que o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ está imerso compactamente no espaço de Lebesgue com peso

$$L^2(\mathbb{R}^N, q) = \left\{ u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^N} q(x)|u|^2 dx < \infty \right\}.$$

Essa imersão compacta é fundamental quando estamos interessados mostrar que um dado funcional energia possui uma geometria de Linking. É importante enfatizar que neste caso, o funcional energia J não é invariante por translações em $\mathbb{R}^N$. Assim, a hipótese (q₁) permite controlar o funcional com translações no $\mathbb{R}^N$. Note que, não existe $q \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ ao qual é 1-periódica em $x_1, \dots, x_N$. Na parte introdutória do Capítulo 2, apresentamos alguns exemplos de funções q e K que satisfazem as condições (q₁) e (K₁), respectivamente. A geometria de Linking que estamos interessados em explorar neste Capítulo é apresentada em [47] (Teorema 2.7.3). Esse resultado abstrato permite obter sequências de Palais-Smale para um determinado nível de energia. Assim, consideraremos que o parâmetro λ esteja entre dois autovalores consecutivos do problema linear com peso q , onde $q \in \mathcal{F}$

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \lambda q(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (0-13)$$

O principal resultado deste capítulo é enunciado da seguinte forma:

Teorema 0.0.3 *Suponha que V , q , K e h satisfazem (V_1) , (q_1) , (K_1) e (h_1) , respectivamente. Suponha que exista $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 1$ tal que $\lambda_j < \lambda < \lambda_{j+1}$. Então existem $\mu_1 > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que para $\mu > \mu_1$ e $0 \leq \|h\|_{2N/(N+2)} < \varepsilon$ obtemos que:*

- (i) *o problema (0-11) possui ao menos uma solução fraca para cada $h \neq 0$,*
- (ii) *o problema (0-11) possui ao menos uma solução fraca não trivial para $h \equiv 0$.*

É importante enfatizar que se $h \neq 0$, então $u \equiv 0$ não é solução do problema (0-11).

Novamente, tratar o problema 0-11 do ponto de vista variacional é inviável, uma vez que o termo quasilinear $\Delta(u^2)u$ nos fornece um funcional energia que não está bem definido em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Neste caso, contornamos essa dificuldade fazendo a mudança de variável $u = f(v)$, com f dada em (0-7), obtendo assim um funcional energia bem definido em $H^1(\mathbb{R}^N)$ ao qual é de classe C^1 . Este funcional satisfaz a geometria de Linking apresentada por M. Schechter em [46], desde que μ seja suficientemente grande e $\|h\|_{2N/(N+2)}$ seja pequena suficiente. Usando argumentos de densidade mostramos que o limite fraco da sequência de Palais-Smale é um ponto crítico do funcional modificado. Assim, para cada $h \neq 0$, temos uma solução não trivial para o problema (0-11). Para considerar o caso em que $h \equiv 0$, usando os resultados de P. L. Lions [29], mostramos que as sequências de Palais-Smale satisfaz a condição de não anulamento. Este fato permite transladar a sequência de Palais-Smale de modo a garantir um ponto crítico não trivial.

No terceiro capítulo desta Tese estudamos o caso crítico do problema estudado no Capítulo 2, formulado da seguinte forma

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = \lambda q(x)u + \mu K(x)|u|^{p-2}u + |u|^{2 \cdot 2^* - 2}u + h(x), & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (0-14)$$

onde $4 < p < 2 \cdot 2^*$. Nesse capítulo assumimos as mesmas condições sobre as funções V , q , K e h consideradas no Capítulo 2. Devido a presença do termo $|u|^{2 \cdot 2^* - 2}u$, o problema dado na equação (0-14) é chamado crítico. Em [49], U. B. Severo, E. Gloss e E. D. Silva mostraram um resultado de existência e não existência para a equação

$$-\Delta u + V(x)u + \frac{k}{2}\Delta(u^2)u = h(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N \quad (0-15)$$

onde $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e k é um parâmetro real. Neste trabalho os autores apresentam uma identidade de Pohozaev associada ao problema (0-15). Como aplicação dessa identidade, usando condições apropriadas sobre o potencial V e $h(u) = |u|^{p-2}u$, os autores mostraram que não existe solução clássica, isto é, $u \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, para $p \geq 2 \cdot 2^*$. Como consequência, adotando $k = -2$, $p = 2 \cdot 2^*$ é o expoente

crítico para a classe de problemas quasilineares governados pelo termo $\Delta(u^2)u$. Em [55], E. A. B. Silva e G. F. Vieira provaram, usando uma versão local do Teorema do Passo da Montanha, existência de solução não trivial para a equação

$$-\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = K(x)|u|^{2^*-2}u + g(x, u), \quad u > 0 \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (0-16)$$

onde V e g são assintoticamente periódicos e K é 1-periódico nas variáveis $x_1, \dots, x_N$. Devido a presença do termo crítico e a falta de compacidade do problema, mostrar que o funcional energia satisfaz a condição de Palais - Smale é inviável. Sendo assim, os autores mostraram, usando os resultados de P. L. Lions [29], que as sequências de Palais - Smale que convergem fracamente para zero satisfazem a condição de não anulamento, desde que o nível minimax dado pelo Teorema do Passo da Montanha seja menor que uma constante fixada. Neste caso, é possível obter uma solução fraca não trivial para equação (0-16). Boa parte dos estudos realizados sobre problemas elípticos envolvendo o expoente crítico de Sobolev possui como fonte de inspiração o trabalho de H. Brézis e L. Nirenberg [5].

Neste capítulo seguimos as mesmas ideias usadas no Capítulo 2. Relembremos que o Teorema abstrato que usamos neste capítulo é o Teorema de Linking de Schecter, [47] (Teorema 2.7.3). Desta forma, pedimos novamente que o parâmetro λ está entre dois autovalores consecutivos do problema linear (0-13).

O principal resultado deste capítulo é enunciado como segue:

Teorema 0.0.4 *Suponha que V , q , K e h satisfazem (V_1) , (q_1) , (K_1) e (h_1) , respectivamente. Suponha que exista $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 1$ tal que $\lambda_j < \lambda < \lambda_{j+1}$. Então existem $\mu_0 > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que para $\mu > \mu_0$ e $0 \leq \|h\|_{2N/(N+2)} < \varepsilon$ obtemos que:*

- (i) *o problema (0-14) possui ao menos uma solução fraca para cada $h \neq 0$,*
- (ii) *o problema (0-14) possui ao menos uma solução fraca não trivial para $h \equiv 0$.*

Analogamente, se $h \not\equiv 0$, então $u \equiv 0$ não é solução do problema (0-14).

Enfatizamos que a grande novidade deste capítulo é considerar o caso em que a não linearidade apresenta um termo crítico e interage com autovalores de alta energia. Esse fato permite o surgimento de algumas dificuldades quando estamos interessados em utilizar métodos variacionais. Primeiramente, o potencial V é limitado. Portanto, não recuperamos a imersão compacta para o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ nos espaços de Lebesgue $L^s(\mathbb{R}^N)$. Este fato é o que nos motiva estudar o problema (0-14). Note que o problema (0-14) envolve o expoente crítico. Deste modo não conseguimos mostrar que a condição de não anulamento é satisfeita para todo nível minimax positivo. Assim, seguindo as mesmas ideias usadas em [55], mostraremos que o nível minimax dado pelo Teorema de Linking de Schecter [47] está abaixo de uma constante fixada para concluir que o não anulamento é satisfeito. Tal condição é crucial para garantir existência de soluções não triviais quando a condição de Palais-Smale não é possível ser verificada.

Novamente, fazemos a mudança de variável $u = f(v)$, no funcional energia associada ao problema (0-14). Assim, obtemos um funcional auxiliar bem definido que possui a geometria desejada. Usando o Teorema de Linking de Schecter, [47] (Teorema 2.7.3), obtemos uma sequência de Palais-Smale para um determinado nível de energia c_μ . As sequências de Palais-Smale são limitadas e, novamente argumentando por densidade, o limite fraco é um ponto crítico do funcional modificado. Assim, se $h \neq 0$, então o limite fraco nos fornece uma solução fraca não trivial para o problema (0-14). Para contornar o caso em que o limite fraco das sequência de Palais-Smale é zero, mostramos que a condição de não anulamento é satisfeita desde que $h \equiv 0$. Como mencionamos anteriormente, adaptamos as ideias usadas em [55] para o nosso funcional, mostrando assim que o não anulamento é válido desde que $c_\mu < S^{N/2}/2N$, onde S denota a melhor constante da imersão de Sobolev de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ no espaço $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Devido ao fato de estarmos lidando com um problema com uma estrutura de Linking, seguir as ideias usadas em [55], para mostrar que o nível c_μ está abaixo da constante $S^{N/2}/2N$, é inviável. Para contornar esse problema, mostramos que $c_\mu \rightarrow 0$ quando $\mu \rightarrow \infty$. Este fato permite que possamos garantir, usando as mesmas ideias do Capítulo 2, a existência de uma solução fraca não trivial quando $h \equiv 0$.

Para tornar fácil a leitura de cada um dos capítulos seguintes, repetiremos em cada capítulo as hipóteses requeridas bem como os enunciados dos principais resultados obtidos na presente Tese.

Equações de Schrödinger Quasilinear

Interagindo com Autovalores com Alta Energia

Neste capítulo, estudamos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = g(x, u), & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (1-1)$$

onde $N \geq 3$ e o potencial V pertence a $C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. O termo não linear $g \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma não linearidade subcrítica podendo ser assintoticamente linear ou superlinear no infinito. Posteriormente, apresentaremos as hipóteses sobre o potencial V e o termo não linear g .

Nosso principal objetivo neste capítulo é provar a existência e multiplicidade de soluções não triviais para a equação (1-1). A principal característica aqui é considerar uma estrutura de Linking, a fim de provar existência de soluções fracas para as equações elípticas quasilineares em que o termo não-linear g tem uma interação com o problema linear de autovalores. Trataremos a equação (1-1) com a não linearidades g podendo ser assintoticamente linear na origem e no infinito ou superlinear no infinito.

Consideraremos aqui, como mencionado na introdução deste trabalho, as seguintes condições sobre o potencial V .

$$(V_1) \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) \geq V_0 > 0;$$

$$(V_2) \quad |\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\}| < +\infty, \text{ para qualquer } M > 0, \text{ onde } | \cdot | \text{ denota a medida de Lebesgue de um conjunto.}$$

$$(V_3) \quad \text{Existe } 2 < p < 2^* \text{ tal que}$$

$$S_p = \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx}{(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p dx)^{2/p}} > 0$$

Ao longo deste capítulo o espaço onde buscamos soluções para a equação (1-1) é definido

por

$$X := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < \infty \right\} \quad (1-2)$$

munido com a norma

$$\|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx \right)^{1/2}$$

e o produto interno

$$\langle u, v \rangle := \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(x)uv) dx, \text{ para quaisquer } u, v \in X. \quad (1-3)$$

O espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert munido com a norma usual $\|\cdot\|_{\#}$ dada por

$$\|u\|_{\#} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2) dx \right)^{1/2}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Com essa norma, $H^1(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente nos espaços de Lebesgue $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq s \leq 2^*$. Para funções $u \in X$, temos que $\|u\|_{\#} \leq C\|u\|$, onde $C = \left(\max\{1, V_0^{-1}\} \right)^{1/2}$. Desta forma X está imerso continuamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e herda as imersões contínuas nos espaços de Lebesgue $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq s \leq 2^*$. Essas imersões nem sempre são compactas. Porém as condições impostas sobre o potencial V permitem mostrar algumas propriedades para o espaço X . Esse resultado é apresentado no seguinte lema e a sua demonstração pode ser encontrada em [2].

Lema 1.0.1 *Suponha que as condições (V_1) e (V_2) sejam satisfeitas. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *O espaço X é um subespaço fechado de $H^1(\mathbb{R}^N)$.*
- (ii) *X está imerso compactamente em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq s < 2^*$.*

Portanto, dado qualquer função $K \in \mathcal{F}$, onde

$$\mathcal{F} := \{w : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : w > 0, w \in L^\alpha(\mathbb{R}^N) \text{ para algum } \alpha > N/2\}$$

podemos mostrar que o problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \lambda K(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in X. \end{cases} \quad (1-4)$$

admite um primeiro autovalor $\lambda_1(K) > 0$. Mais especificamente, obtemos uma sequência de autovalores $(\lambda_j(K))_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda_j(K) \rightarrow \infty$ com $j \rightarrow \infty$. Da mesma forma obtemos

o problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu K(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (1-5)$$

O espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é definido como segue

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N), i = 1, 2, \dots, N \right\}$$

com $N \geq 3$. Note que $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert munido com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx, u, v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

A norma é dada por

$$\|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}, u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Como uma consequência o problema de autovalores (1-5) admite o primeiro autovalor positivo denotado por $\mu_1(K) > 0$.

O espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Definimos a melhor constante dessa imersão por

$$S = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*} dx \right)^{2^*/2}}.$$

O espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Deste modo, temos que a imersão de X em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é contínua.

Em nosso primeiro resultado neste capítulo, estamos interessados no caso em que $g(x, \cdot)$ se comporta como s na origem e como s^3 no infinito. Para este tipo de problema mencionamos que (1-1) torna-se assintoticamente linear no infinito. Seja $G : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $G(x, s) := \int_0^s g(x, t) dt, x \in \mathbb{R}^N, s \in \mathbb{R}$.

Neste capítulo, pediremos que a função G satisfaz as seguintes condições assintóticas na origem e no infinito,

(G_0) Existe $K_0 \in \mathcal{F}$ tal que

$$\liminf_{s \rightarrow 0} \frac{2G(x, s)}{s^2} = K_0(x), \text{ uniformemente para q. t. p. } x \in \mathbb{R}^N.$$

(G_∞) Existe $K_\infty \in \mathcal{F}$ com $K_\infty \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{4G(x, s)}{s^4} = K_\infty(x), \text{ uniformemente para q. t. p. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Assumindo que a não linearidade g é assintoticamente linear no infinito consideraremos a seguinte condição de crescimento para g .

(g_1) Existem $a \in L^{2N/(N+2)}(\mathbb{R}^N) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^N)$, $b \in L^{2 \cdot 2^*/(2 \cdot 2^* - r)}(\mathbb{R}^N) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^N)$, $r \in (2, 4)$, $\alpha > N/2$ tais que

$$|g_\infty(x, s)| \leq a(x)|s| + b(x)|s|^{r-1}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N, s \in \mathbb{R},$$

onde $g_\infty(x, s) = g(x, s) - K_\infty(x)s^3$, $(x, s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Portanto, a não linearidade g possui crescimento subcrítico. Para esse tipo de problema, mencionamos que o problema (1-1) torna-se assintoticamente linear no infinito. Usando que $\max\{a(x), b(x)\} \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ temos que (g_1) implica na seguinte condição de crescimento.

$$|g(x, s)| \leq a_1(x)|s| + b_1(x)|s|^3 \text{ e } |G(x, s)| \leq \frac{a_1(x)}{2}|s|^2 + \frac{b_1(x)}{4}|s|^4 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N, s \in \mathbb{R} \quad (1-6)$$

para algumas funções $a_1 \in L^{2N/(N+2)}(\mathbb{R}^N) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ e $b_1 \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$. Para nossos resultados devemos salientar a importância da não linearidade g interagir com autovalores dos problemas (1-4) e (1-5). Mais precisamente, para o caso assintoticamente linear no infinito, consideraremos os seguintes cruzamentos $\lambda_j(K_0) < 1 < \lambda_{j+1}(K_0)$ para algum $j \in \mathbb{N}$ e $\mu_1(K_\infty) > 1$.

Com essas hipóteses obtemos o nosso primeiro resultado.

Teorema 1.0.2 (Caso Assintoticamente Linear) *Suponha que V satisfaz $(V_1) - (V_3)$ e g satisfaz (g_1) , (G_0) e (G_∞) . Então o problema (1-1) admite duas soluções fracas não triviais desde que $\lambda_j(K_0) < 1 < \lambda_{j+1}(K_0)$ para algum $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 1$ e $\mu_1(K_\infty) > 1$.*

Em nosso segundo resultado, estamos interessados no caso em que g é superlinear no infinito. Mais especificamente, consideraremos a seguinte hipótese:

(g_∞)

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{g(x, s)}{s^3} = +\infty, \text{ uniformemente } x \in \mathbb{R}^N.$$

Para as não linearidades g que cumprem a condição (g_∞) , mencionamos que a condição (g_1) não é verificada. Assim, estamos interessados em funções que cumprem a seguinte condição de crescimento:

(g_2) Existem $\tilde{a}, \tilde{b} \in L^\alpha(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\alpha > N/2$ tal que

$$|g(x, s)| \leq \tilde{a}(x)|s| + \tilde{b}(x)|s|^{p-1}$$

para quaisquer $x \in \mathbb{R}^N$, $s \in \mathbb{R}$ e $4 < p < 2 \cdot 2^*$.

Neste cenário pedimos que a não linearidade g satisfaça a celebre condição de Ambrosetti-Rabinowitz, ou seja, existe $\theta > 4$ tal que

$$0 < \theta G(x, t) = \theta \int_0^t g(x, \tau) d\tau \leq t g(x, t), \quad \text{para qualquer } t \in \mathbb{R}. \quad (\text{AR})$$

A condição (AR) é uma ferramenta fundamental para mostrar que as sequências de Palais - Smale são limitadas, provando assim algum resultado de compacidade. O nosso segundo resultado é apresentado a seguir:

Teorema 1.0.3 (Caso Superlinear) *Suponha que V satisfaz $(V_1) - (V_3)$ e g satisfaz (g_2) , (G_0) , (g_∞) e (AR). Então o problema (1-1) admite ao menos uma solução fraca não trivial desde que $\lambda_j(K_0) < 1 < \lambda_{j+1}(K_0)$ para algum $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 1$.*

Observação 1 *Como exemplo, tomamos $g_1(x, t) = K_\infty(x)t^3 + K_0(x)\frac{t}{1+t^2}$ e $g_2(x, t) = K_\infty(x)t^3 + K_0(x)\frac{t \ln(e+|t|)}{1+|t|}$ onde $K_\infty \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ e $K_0 \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha > N/2$. Assumimos que $\lambda_j(K_0) < 1 < \lambda_{j+1}(K_0)$ e $\mu_1(K_\infty) > 1$ são satisfeitas. Então as funções g_1 e g_2 dadas acima satisfazem as hipóteses (g_1) , (G_0) e (G_∞) . De acordo ao Teorema 1.0.2 o problema (1-1) tem ao menos duas soluções fracas não triviais mudando a função g por g_1 ou g_2 .*

Observação 2 *Um exemplo típico de não linearidade satisfazendo as hipóteses do Teorema 1.0.3 é dada por $g_3(x, t) = K_0(x)t + \frac{t^6}{1+t^2}$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$ onde $\lambda_j(K_0) < 1 < \lambda_{j+1}(K_0)$ para algum $j \geq 1$. De modo mais geral, podemos considerar as funções $g_4(x, t) = K_0(x)t + \frac{t^p}{1+t^q}$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$ onde $p - q > 3$ com $p, q > 1$ e $\lambda_j(K_0) < 1 < \lambda_{j+1}(K_0)$ para algum $j \geq 1$. Além disso, essas funções verificam a condição de (AR). É importante enfatizar que a condição de Ambrosetti-Rabinowitz (AR) implica que $G(t) \geq c_1|t|^\theta - c_2|t|^2, t \in \mathbb{R}$ para algumas constantes $c_1, c_2 > 0$. Em particular, aplicando o Teorema 1.0.3 o problema (1-1) admite ao menos uma solução fraca não trivial tomando a não linearidade g igual a g_3 ou g_4 .*

Relembremos aqui, que estamos assumindo que o potencial V satisfaz a hipótese de T. Bartsch e Z. Q Wang [2] juntamente com a condição (V_3) . Observemos primeiramente que se V é um potencial satisfazendo as condições (V_1) -(V_2) e a condição

(V_4) Existe uma função radial $\tilde{V}$ tal que $V(x) \leq \tilde{V}(|x|)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$,

então a condição (V_3) é verificada. De fato, seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ uma sequência minimizante para S_p , isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2) dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_n|^p dx\right)^{2/p}} = S_p. \quad (1-7)$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $u_n \geq 0$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_n|^p dx = 1 \quad (1-8)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2) dx = S_p.$$

A sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em X , portanto, a menos de uma subsequência

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u & \text{fracamente em } X, \\ u_n \rightarrow u & \text{fortemente em } L^q(\mathbb{R}^N), \\ u_n(x) \rightarrow u(x), & \text{q. t. p. em } \mathbb{R}^N, \\ |u_n(x)| \leq h_q(x), & h_q \in L^q(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

isso para $2 \leq q < 2^*$ e $n \rightarrow \infty$. Usando, neste momento, a condição (V_4) escrevemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_n - u|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{V}(|x|)|u_n - u|^p dx. \quad (1-9)$$

Seja $w_n = u_n^*$, onde u_n^* é a simetrizada da função u_n obtida pela simetrização de Schwarz, [19, 27]. Então, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em X . Portanto, a menos de subsequência, $w_n \rightharpoonup w$ em X quando $n \rightarrow \infty$, onde $w = u^*$. Aplicando o Teorema de Pólya-Szegő, [19, 27], temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{V}(|x|)|u_n - u|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{V}(|x|)|w_n - w|^p dx. \quad (1-10)$$

Usando um resultado de imersão compacta de $H_r^1(\mathbb{R}^N, \tilde{V})$ nos espaços $L^p(\mathbb{R}^N, \tilde{V})$ (ver Teorema 1, [58]), temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{V}(|x|)|w_n - w|^p dx = 0.$$

A última convergência em (1-10) e (1-9), permitem obter que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_n - u|^p dx = 0.$$

Aplicando o Lema de Brezis-Lieb (Lema 1.3.2 [60]), obtemos de (1-8) que

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_n|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p dx.$$

Em particular, pela condição (V_1) , temos que $u \not\equiv 0$. Desta forma, usando que a norma $\|\cdot\|$

é fracamente semicontínua inferiormente, temos que

$$S_p \leq \|u\|^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 = S_p.$$

Portanto, $S_p = \|u\|^p > 0$. Assim, a condição (V_3) é verificada.

Um exemplo padrão de potencial V que satisfaz as hipóteses (V_1) e (V_2) é $V(x) = 1 + |x|^2$. Neste caso, V é um potencial coercivo, isto é, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$. Note que os potenciais coercivos e limitados inferiormente por constantes positivas satisfazem as condições (V_1) e (V_2) . Portanto, essas condições generalizam a condição com potencial coercivo. Em [39], J. M. do Ò e U. Severo, consideram potenciais V que satisfazem a condição (V_1) juntamente com outra condição de inverso integrável, isto é, $[V(x)]^{-1} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Note que admitindo esta condição, então (V_2) é verificada. De fato, dado $M > 0$, escrevemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} |\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\}| &= \int_{\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\}} \frac{1}{M} dx \\ &\leq \int_{\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\}} \frac{1}{V(x)} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{V(x)} dx < \infty. \end{aligned}$$

Este fato mostra que (V_2) generaliza a condição $[V(x)]^{-1} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Contudo essas duas classes de potenciais, coercivos e inversos integráveis, não definem a mesma classe de potenciais. De fato, consideremos por exemplo $V(x) = 1 + |x|$. Claramente V é coercivo. Porém, $[V(x)]^{-1}$ não é integrável. Agora consideramos

$$V(x) = 1 + x_1^{2\beta} [(\text{sen} x_1)^{2\gamma} + x_2^2 + \dots + x_N^2]^\ell$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Nós temos claramente que V não é coercivo, mas $[V(x)]^{-1}$ é integrável desde que $\max\{\beta(N-1), 1/\gamma\} < \ell < \beta/\gamma$, $\beta > 1$ e $0 < \gamma < 1/(N-1)$, $N \geq 3$. De fato, para mostrar isso observamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x_1^{2\beta} (\text{sen} x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 = C(\beta, \gamma, \ell) < \infty. \quad (1-11)$$

Note que podemos escrever (1-11) da forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x_1^{2\beta} (\text{sen} x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x_1^{2\beta} (\text{sen} x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1. \quad (1-12)$$

Usando o limite

$$\lim_{x_1 \rightarrow k\pi} \left(\frac{\text{sen} x_1}{x_1 - k\pi} \right)^2 = 1,$$

onde $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq 1$, temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$(1 - \varepsilon)(x_1 - k\pi)^{2\ell\gamma} \leq (\text{sen} x_1)^{2\ell\gamma} \leq (1 + \varepsilon)(x_1 - k\pi)^{2\ell\gamma} \quad (1-13)$$

sempre que $k\pi - \delta \leq x_1 \leq k\pi + \delta$. Defina os seguintes intervalos $I_k = [k\pi - \delta, k\pi + \delta]$ e $L_k = (k\pi + \delta, 2k\pi - \delta)$ para $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq 1$. Assim podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{1 + x_1^{2\beta} (\text{sen} x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 &= \int_0^{\pi-\delta} \frac{1}{1 + x_1^{2\beta} (\text{sen} x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 \\ &+ \sum_{k=1}^\infty \left(\int_{I_k} \frac{1}{1 + x_1^{2\beta} (\text{sen} x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 \right) \\ &+ \sum_{k=1}^\infty \left(\int_{L_k} \frac{1}{1 + x_1^{2\beta} (\text{sen} x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 \right). \end{aligned} \quad (1-14)$$

Vamos mostrar que cada uma das séries de integrais acima são finitas. Para cada $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq 1$, temos por (1-13) que

$$\int_{I_k} \frac{1}{1 + x_1^{2\beta} (\text{sen} x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 \leq \int_{I_k} \frac{1}{1 + (k\pi - \delta)^{2\beta} (1 - \varepsilon)(x_1 - k\pi)^{2\ell\gamma}} dx_1. \quad (1-15)$$

Fazendo a mudança de variável $y = x_1 - k\pi$ em (1-15) obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{I_k} \frac{1}{1 + (k\pi - \delta)^{2\beta} (1 - \varepsilon)(x_1 - k\pi)^{2\ell\gamma}} dx_1 &= \int_{-\delta}^\delta \frac{1}{1 + (k\pi - \delta)^{2\beta} (1 - \varepsilon)(y)^{2\ell\gamma}} dy, \\ &\leq \int_{-\delta}^\delta \frac{1}{1 - \varepsilon + (k\pi - \delta)^{2\beta} (1 - \varepsilon)(y)^{2\ell\gamma}} dy. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade acima em (1-15) temos a seguinte estimativa

$$\int_{I_k} \frac{1}{1 + x_1^{2\beta} (\text{sen} x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 \leq C(\varepsilon) \int_{-\delta}^\delta \frac{1}{1 + ((k\pi - \delta)^{\beta/\ell\gamma} y)^{2\ell\gamma}} dy. \quad (1-16)$$

Fazendo a mudança de variável $z = (k\pi - \delta)^{\beta/\ell\gamma} y$ em (1-16) obtemos que

$$\int_{-\delta}^\delta \frac{1}{1 + ((k\pi - \delta)^{\beta/\ell\gamma} y)^{2\ell\gamma}} dy = \frac{1}{(k\pi - \delta)^{\beta/\ell\gamma}} \int_{-\delta(k\pi - \delta)^{\beta/\ell\gamma}}^{\delta(k\pi - \delta)^{\beta/\ell\gamma}} \frac{1}{1 + (z)^{2\ell\gamma}} dz. \quad (1-17)$$

Observe que podemos escrever

$$\int_{-\delta(k\pi-\delta)^{\beta/\ell\gamma}}^{\delta(k\pi-\delta)^{\beta/\ell\gamma}} \frac{1}{1+(z)^{2\ell\gamma}} dz = 2 \int_0^{\delta(k\pi-\delta)^{\beta/\ell\gamma}} \frac{1}{1+(z)^{2\ell\gamma}} dz. \quad (1-18)$$

Usando que $\max\{\beta(N-1), 1/\gamma\} < \ell < \beta/\gamma$, temos que $\ell\gamma > 1$. Assim, obtemos a seguinte estimativa

$$\int_0^{\delta(k\pi-\delta)^{\beta/\ell\gamma}} \frac{1}{1+(z)^{2\ell\gamma}} dz \leq \int_0^1 \frac{1}{1+(z)^{2\ell\gamma}} dz + \int_1^\infty \frac{1}{1+z^2} dz \leq C \quad (1-19)$$

para alguma constante $C > 0$. Usando (1-19) em (1-18), temos que

$$\int_{-\delta(k\pi-\delta)^{\beta/\ell\gamma}}^{\delta(k\pi-\delta)^{\beta/\ell\gamma}} \frac{1}{1+(z)^{2\ell\gamma}} dz \leq C_1$$

Aplicando esta última estimativa em (1-17) obtemos de (1-16) que

$$\int_{I_k} \frac{1}{1+x_1^{2\beta}(\text{sen}x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 \leq \frac{C_1(\epsilon)}{(k\pi-\delta)^{\beta/\ell\gamma}}.$$

Usando esta última desigualdade e o fato de $\ell\gamma < \beta$, temos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{I_k} \frac{1}{1+x_1^{2\beta}(\text{sen}x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_1(\epsilon)}{(k\pi-\delta)^{\beta/\ell\gamma}} < \infty. \quad (1-20)$$

Para as integrais sobre os intervalos L_k , observemos primeiramente que existe uma constante α dependendo de δ tal que $(\sin x_1)^{2\ell\gamma} \geq \alpha$ para todo $x_1 \in L_k$. Desta forma

$$\int_{L_k} \frac{1}{1+x_1^{2\beta}(\text{sen}x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 \leq \int_{k\pi+\delta}^{2k\pi-\delta} \frac{1}{1+\alpha x_1^{2\beta}} dx_1.$$

Assim, usando que $\beta > 1$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{L_k} \frac{1}{1+x_1^{2\beta}(\text{sen}x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 \right) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{L_k} \frac{1}{1+\alpha x_1^{2\beta}} dx_1 \right) \\ &= \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} L_k} \frac{1}{1+\alpha x_1^{2\beta}} dx_1 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\alpha x_1^{2\beta}} dx_1 \\ &= \frac{1}{\alpha^{1/2\beta}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^{2\beta}} dy < \infty, \end{aligned} \quad (1-21)$$

onde aqui foi feita a mudança de variável $y = \alpha^{1/2\beta} x_1$. Usando as estimativas (1-20) e (1-21) temos que (1-11) é verificada.

Agora, para verificarmos que $[V(x)]^{-1}$ é integrável, dado $A > 0$, escrevemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{V(x)} dx = \int_{[|\tilde{x}| \leq A]} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{V(x)} dx_1 \right) d\tilde{x} + \int_{[|\tilde{x}| > A]} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{V(x)} dx_1 \right) d\tilde{x}, \quad (1-22)$$

onde $\tilde{x} = (x_2, \dots, x_N)$. Mostremos primeiramente que

$$\int_{[|\tilde{x}| \leq A]} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{V(x)} dx_1 \right) d\tilde{x} < \infty.$$

De fato, usando (1-11) temos

$$\begin{aligned} \int_{[|\tilde{x}| \leq A]} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{V(x)} dx_1 \right) d\tilde{x} &\leq \int_{[|\tilde{x}| \leq A]} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + x_1^{2\beta} (\sin x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 \right) d\tilde{x} \\ &\leq \int_{[|\tilde{x}| \leq A]} C(\beta, \gamma, \ell) d\tilde{x} < \infty. \end{aligned} \quad (1-23)$$

Para verificarmos que

$$\int_{[|\tilde{x}| > A]} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{V(x)} dx_1 \right) d\tilde{x} < \infty$$

usamos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} \int_{[|\tilde{x}| > A]} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{V(x)} dx_1 \right) d\tilde{x} &\leq \int_{[|\tilde{x}| > A]} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + x_1^{2\beta} [x_2^2 + \dots + x_N^2]^\ell} dx_1 \right) d\tilde{x} \\ &= \int_{[|\tilde{x}| > A]} \frac{1}{(x_2^2 + \dots + x_N^2)^{\ell/2\beta}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + y^{2\beta}} dy \right) d\tilde{x}, \end{aligned} \quad (1-24)$$

onde aqui foi feita a mudança de variável $y = x_1 (x_2^2 + \dots + x_N^2)^{\ell/2\beta}$. Usando que $\beta > 1$, temos que existe uma constante positiva C_1 tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + y^{2\beta}} dy < C_1.$$

Usando essa informação em (1-24), temos da fórmula da coarea que

$$\begin{aligned} \int_{[|\tilde{x}|>A]} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{V(x)} dx_1 \right) d\tilde{x} &\leq C_1 \int_{[|\tilde{x}|>A]} \frac{1}{(x_2^2 + \dots + x_N^2)^{\ell/2\beta}} d\tilde{x} \\ &\leq C_2 \int_A^{+\infty} \frac{1}{(r^2)^{\ell/2\beta}} r^{N-2} dr = C_2 \int_A^{+\infty} r^{N-2-\ell/\beta} dr < \infty, \end{aligned} \quad (1-25)$$

onde aqui foi usado que $\ell > \beta(N-1)$. Por fim, juntando (1-23) e (1-25) em (1-22), temos que $[V(x)]^{-1}$ é integrável.

As estimativas anteriores mostram que as classes de potenciais coercivos e potenciais com inverso integrável não definem a mesma classe de potenciais. Nenhuma dessas classes de potenciais que apresentamos, definem a classe considerada por T. Bartsch e Z. Q Wang [2]. De fato, consideremos

$$V(x) = \begin{cases} 1 + |x_1||\tilde{x}|^\ell, & |\tilde{x}| \geq 1 \\ 1 + |x_1||\tilde{x}|^\gamma, & |\tilde{x}| \leq 1 \end{cases} \quad (1-26)$$

onde $\ell > N-1$ e $0 < \gamma < N-1$, $N \geq 3$. É fácil ver que $V(x)$ não é coercivo. Além disso, temos que $[V(x)]^{-1}$ não é integrável. De fato,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{V(x)} dx &\geq \int_{\mathbb{R}^N \cap [|\tilde{x}| \leq 1]} \frac{1}{V(x)} dx \\ &= \int_{[|\tilde{x}| \leq 1]} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + |x_1||\tilde{x}|^\gamma} dx_1 \right) d\tilde{x} \\ &\geq \int_{[|\tilde{x}| \leq 1]} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + |x_1|} dx_1 \right) d\tilde{x} = +\infty \end{aligned}$$

uma vez que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + |x_1|} dx_1 = 2 \int_0^\infty \frac{1}{1 + |x_1|} dx_1 \geq 2 \lim_{r \rightarrow \infty} \ln(1 + |r|) = +\infty.$$

Aqui $\tilde{x}$ denota $(x_2, \dots, x_N)$. Mostremos que para cada $M > 0$ o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\}$ possui medida de Lebesgue finita. Portanto, necessitamos mostrar que cada uma das integrais abaixo sejam finitas

$$\int_{[|\tilde{x}| \geq 1]} \frac{M-1}{|\tilde{x}|^r} dx < \infty \quad \text{e} \quad \int_{[|\tilde{x}| \leq 1]} \frac{M-1}{|\tilde{x}|^s} dx < \infty,$$

uma vez que, a medida do conjunto de pontos onde $V(x)$ está abaixo de uma constante $M > 0$ fixada é a medida da área abaixo das curvas $d_1(\tilde{x}) = (M-1)/|\tilde{x}|^\ell$ para $|\tilde{x}| \geq 1$ e

$d_2(\tilde{x}) = (M-1)/|\tilde{x}|^\gamma$ para $|\tilde{x}| \leq 1$.

Aplicando a fórmula da coarea temos

$$\begin{aligned}
 \int_{[|\tilde{x}| \geq 1]} \frac{M-1}{|\tilde{x}|^\ell} dx &= \int_1^\infty \left(\int_{\partial B_r(0)} \frac{M-1}{|\tilde{x}|^\ell} dS \right) dr \\
 &= \int_1^\infty \frac{M-1}{r^\ell} \left(\int_{\partial B_r(0)} dS \right) dr \\
 &= \omega \int_1^\infty \frac{M-1}{r^\ell} r^{N-2} dr = \omega(M-1) \int_1^\infty r^{N-2-\ell} dr < \infty
 \end{aligned} \tag{1-27}$$

onde ω é a medida da bola unitária em $\mathbb{R}^{N-1}$. Aqui foi usado que $\ell > N-1$. Para a segunda integral, note que usando novamente a fórmula da coarea, obtemos que

$$\begin{aligned}
 \int_{[|\tilde{x}| \leq 1]} \frac{M-1}{|\tilde{x}|^\gamma} dx &= \int_0^1 \left(\int_{\partial B_r(0)} \frac{M-1}{|\tilde{x}|^\gamma} dS \right) dr \\
 &= \int_0^1 \frac{M-1}{r^\gamma} \left(\int_{\partial B_r(0)} dS \right) dr \\
 &= \omega \int_0^1 \frac{M-1}{r^\gamma} r^{N-2} dr = \omega(M-1) \int_0^1 r^{N-2-\gamma} dr < \infty
 \end{aligned} \tag{1-28}$$

uma vez que $\gamma < N-1$. Por (1-27) e (1-28), temos que $\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\}$ possui medida de Lebesgue finita. Portanto, o potencial dado em (1-26) satisfaz a condição dada por T. Bartsch e Z. Q Wang [2], mas não satisfaz a condição de potenciais coercivos e nem a classe de potenciais com inverso integrável. Desta forma, podemos montar o seguinte Diagrama de Venn

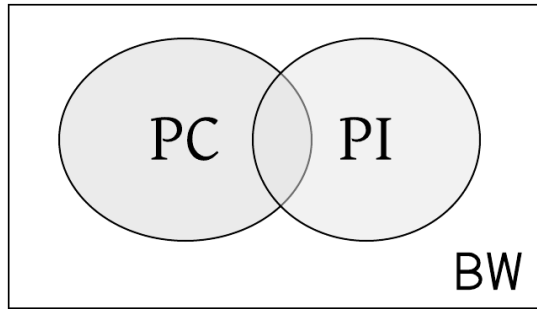


Figura 1.1: Diagrama das Classes de Potenciais

Aqui **PC** denota a classe de potenciais coercivos, **PI** a classe de potenciais com inverso integrável e **BW** a classe de potenciais que satisfazem as condições de T. Bartsch e Z. Q Wang.

1.1 Preliminares e Formulação Variacional

Nesta seção, consideramos alguns resultados básicos e a estrutura variacional do problema elíptico (1-1) afim de mostrar que o funcional energia associado tem uma estrutura de Linking. Inicialmente, relembremos que uma solução fraca para o problema (1-1) é uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$ que satisfaz a seguinte identidade

$$\int_{\mathbb{R}^N} [(1 + 2u^2)\nabla u \nabla \phi dx + 2u|\nabla u|^2 \phi + V(x)u\phi] dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u)\phi dx \quad (1-29)$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Associada a equação (1-29) podemos deduzir o seguinte funcional energia

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2u^2)|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx. \quad (1-30)$$

Contudo o funcional I não está bem definido no espaço de Banach $H^1(\mathbb{R}^N)$. Com efeito, existem funções $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx = +\infty.$$

Por exemplo, $u(x) = |x|^{(2-N)/4} \phi(x)$ para $x \neq 0$, com $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0, 1])$, $\phi \equiv 1$ em $B_1(0)$, $\phi = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)$, veja [59]. Sendo assim, não conseguimos aplicar diretamente as técnicas variacionais para o funcional I . Para contornar essa dificuldade, usamos a mudança de variável $v = f^{-1}(u)$, dada em [9], onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada na seguinte E. D. O.

$$\begin{cases} f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2f^2(t)}}, & t \geq 0 \\ f(t) = -f(t), & t \leq 0. \end{cases} \quad (1-31)$$

A seguir apresentamos algumas propriedades importantes sobre a função f .

Lema 1.1.1 *A função f satisfaz as seguintes propriedades:*

- (f₁) f é unicamente determinada, C^∞ e invertível;
- (f₂) $0 < f'(t) \leq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (f₃) $|f(t)| \leq |t|$, para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (f₄) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 1$;
- (f₅) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} = 2^{1/4}$;
- (f₆) $\frac{f(t)}{2} \leq t f'(t) \leq f(t)$, para todo $t > 0$;
- (f₇) $|f(t)| \leq 2^{1/4} \sqrt{|t|}$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

(f₈) Existe $k > 0$ tal que

$$|f(t)| \geq \begin{cases} k|t|, & |t| \leq 1 \\ k|t|^{1/2}, & |t| \geq 1 \end{cases}$$

(f₉) $|f(t)f'(t)| \leq 2^{-1/2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(f₁₀) Para qualquer $a \in [1, \infty)$ tem-se que

$$af^2(t) \leq f^2(at) \leq a^2 f^2(t), t \in \mathbb{R}.$$

(f₁₁) Para qualquer $a \in [0, 1]$ tem-se que

$$a^2 f^2(t) \leq f^2(at) \leq af^2(t), t \in \mathbb{R}.$$

Omitiremos neste texto a demonstração do Lema 1.1.1 ao qual pode ser obtida em [9, 17, 16]. Usando a mudança de variável $u = f(v)$ no funcional dado em (1-30) obtemos o funcional

$$J(v) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)f^2(v)) dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v)) dx, \quad v \in X. \quad (1-32)$$

Portanto, para qualquer $v \in X$, usando a condição de crescimento (g_1) (ou (g_2)) e as propriedades da mudança de variável f , temos que o funcional J pertence a $C^1(X, \mathbb{R})$. Note que pontos críticos desse funcional são soluções fracas para o problema auxiliar

$$-\Delta v + V(x)f(v)f'(v) = g(x, f(v))f'(v), \quad v \in X. \quad (1-33)$$

Além disso, se $v \in X \cap C^2(\mathbb{R}^N)$ é um ponto crítico do funcional J então a função $u = f(v)$ é uma solução clássica do problema (1-1), veja [9].

É importante enfatizar que uma solução fraca para o problema auxiliar (1-33) é uma função $v \in X \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla \phi + V(x)f(v)f'(v)\phi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v))f'(v)\phi dx, \quad (1-34)$$

para toda função teste $\phi \in X$. A proposição a seguir garante que a igualdade (1-34) é válida para toda função teste $\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Proposição 1.1.2 Se $v \in X$ satisfaz (1-34), então

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla \phi + V(x)f(v)f'(v)\phi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v))f'(v)\phi dx,$$

para toda $\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Fixe $\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e suponha que $\phi \geq 0$. Seja $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$\begin{cases} 0 \leq \eta_n(x) \leq 1 & \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N, \\ \eta_n(x) = 1 & \text{se } |x| \leq n, \\ \eta_n(x) = 0 & \text{se } |x| \geq n+1, \\ |\nabla \eta_n(x)| \leq C & \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Assim, temos que $\eta_n(x)\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\eta_n(x)\phi(x) \rightarrow \phi(x)$ q. t. p. $x \in \mathbb{R}^N$ com $n \rightarrow \infty$. É fácil ver que $\eta_n(x)\phi \rightarrow \phi$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ com $n \rightarrow \infty$. Desta forma, $\eta_n(x)\phi \rightarrow \phi$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq s \leq 2^*$. Como V é localmente limitada e $\eta_n(x)\phi$ tem suporte compacto para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos que $\eta_n(x)\phi \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla (\eta_n(x)\phi) + V(x)f(v)f'(v)\eta_n(x)\phi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v))f'(v)\eta_n(x)\phi dx. \quad (1-35)$$

Da convergência forte em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e usando que g é uma não linearidade subcrítica, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla (\eta_n(x)\phi) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \phi dx \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v))f'(v)\eta_n(x)\phi dx &= \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v))f'(v)\phi dx \end{aligned} \quad (1-36)$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq V(x)f(v)f'(v)\eta_n(x)\phi(x) \leq V(x)f(v)f'(v)\eta_{n+1}(x)\phi(x) \quad \text{q. t. p. } x \in [v \leq 0] \\ 0 &\leq V(x)f(v)f'(v)\eta_n(x)\phi(x) \leq V(x)f(v)f'(v)\eta_{n+1}(x)\phi(x) \quad \text{q. t. p. } x \in [v \geq 0] \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando a última afirmação e o Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f(v)f'(v)\eta_n(x)\phi dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f(v)f'(v)\phi dx. \quad (1-37)$$

Passando o limite em (1-35) com $n \rightarrow \infty$ e usando as convergências (1-36) e (1-37), obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla \phi + V(x)f(v)f'(v)\phi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v))f'(v)\phi dx,$$

para toda $\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\phi \geq 0$. De maneira análoga provamos para o caso em que $\phi \leq 0$.

Uma vez que toda função $\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ pode ser escrita da forma $\phi = \phi^+ - \phi^-$, temos o resultado desejado. Assim encerramos a demonstração da proposição. $\square$

Nosso objetivo é obter soluções fracas para o problema (1-1). Nesse contexto, buscaremos soluções fracas para o problema auxiliar (1-33). Assim, o nosso próximo resultado é dado por:

Proposição 1.1.3 *Se $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca do problema (1-33), então $u = f(v)$ é uma solução fraca do problema (1-1).*

Demonstração. Note que do Lema 1-89 (f_2) e (f_3), temos que $|u|^2 = |f(v)|^2 \leq |v|^2$ e $|\nabla u|^2 = |\nabla(f(v))|^2 = f'(v)^2 |\nabla v|^2 \leq |\nabla v|^2$. Assim, $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Como $(f^{-1})'(t) = 1/f'(f^{-1}(t))$, obtemos que $(f^{-1})'(t) = (1 + 2t^2)^{1/2}$. Assim,

$$\nabla v = \nabla(f^{-1}(u)) = (f^{-1})'(u) \nabla u = (1 + 2u^2)^{1/2} \nabla u. \quad (1-38)$$

Para toda $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos

$$f'(v)^{-1} \xi = (1 + 2f^2(v))^{1/2} \xi = (1 + 2u^2)^{1/2} \xi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \nabla(f'(v)^{-1} \xi) &= \xi \nabla(f'(v)^{-1}) + f'(v)^{-1} \nabla \xi \\ &= \xi (f'(v)^{-1})' \nabla v + f'(v)^{-1} \nabla \xi \\ &= 2\xi f'(v)^2 f(v) \nabla v + f'(v)^{-1} \nabla \xi \\ &= 2u \xi (1 + 2u^2)^{-1/2} \nabla u + (1 + 2u^2)^{1/2} \nabla \xi. \end{aligned} \quad (1-39)$$

Aplicando (1-38) e (1-39), temos que

$$\nabla v \nabla(f'(v)^{-1} \phi) = 2u \phi |\nabla u|^2 + (1 + 2u^2) \nabla u \nabla \phi. \quad (1-40)$$

Fazendo $\phi = f'(v)^{-1} \xi$ na equação (1-34), temos por (1-40) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [(1 + 2u^2) \nabla u \nabla \phi + 2u \phi |\nabla u|^2 V(x) u \phi] dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u) \phi dx,$$

ou seja, u é uma solução fraca do problema (1-1). Assim concluímos a demonstração. $\square$

Usando a Proposição (1.1.3), é suficiente buscar soluções fracas para o problema (1-33).

Observação 3 *É importante enfatizar que se $u \in X$ é uma solução do problema auxiliar (1-33) então $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha \in (0,1)$. De fato, temos*

$$-\Delta u = z, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde

$$z = g(x, f(u))f'(u) - V(x)f(u)f'(u).$$

Observe que, sobre as nossas condições requeridas para a não linearidade g e as propriedades da função f , ver Lema 1.1.1, temos que

$$|z| \leq C \left[|u| + |u|^{\frac{p-1}{2}} \right] \quad q.t.p \ x \in B_R(0).$$

Desta forma, $z \in L^r(B_R(0))$ para qualquer $1 < r < \frac{22^*}{p-1}$. Portanto, usando argumentos padrão sobre regularidade elíptica e um argumento bootstrap, obtemos que u é uma função limitada e pertence a $W^{2,r}(B_R(0))$ para qualquer $R > 0$. Portanto, $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha \in (0,1)$. Além disso, assumido que V e g são localmente Hölder contínuas, usando Teoria de Schauder obtemos que $u \in C_{loc}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha \in (0,1)$.

1.1.1 Formulação Variacional para a Estrutura de Linking

Usualmente para obter algum tipo de estrutura de linking para o funcional J devemos decompor o espaço X como soma direta de dois subespaços fechados X_1 e X_2 . Como estamos interessados em considerar o caso onde existe $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$, tal que $\lambda_j(K_0) < 1 < \lambda_{j+1}(K_0)$, trabalharemos com a seguinte decomposição

$$X_1 := \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_j\} \quad \text{e} \quad X_2 := X_1^\perp. \quad (1-41)$$

Aqui ϕ_k são autofunções para o problema linear (1-4) com $K = K_0$. É importante mencionar que os subespaços X_1 e X_2 são ortogonais com respeito ao produto interno (1-3) e $X = X_1 \oplus X_2$. Caracterizamos o primeiro autovalor associado ao problema linear (1-4) por

$$\lambda_1(K_0) := \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx : \int_{\mathbb{R}^N} K_0(x)u^2 dx = 1 \right\}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ com $k > 1$ obtemos os autovalores caracterizados da seguinte forma:

$$\lambda_k(K_0) := \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx : \int_{\mathbb{R}^N} K_0(x)u^2 dx = 1 \text{ e } \langle u, \phi_i \rangle = 0, \forall i \in I_{k-1} \right\},$$

onde $I_{k-1} = \{1, 2, \dots, k-1\}$. Como uma consequência, podemos mostrar as seguintes desigualdades variacionais

Lema 1.1.4 *Para qualquer $K \in \mathcal{F}$ obtemos as seguintes desigualdades variacionais*

(i) *Para todo $u \in X$ têm-se que*

$$\lambda_1(K) \int_{\mathbb{R}^N} K(x) u^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x) u^2) dx. \quad (1-42)$$

(ii) *Para todo $u \in X_1$ têm-se que*

$$\lambda_j(K) \int_{\mathbb{R}^N} K(x) u^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x) u^2) dx. \quad (1-43)$$

(iii) *Para todo $u \in X_2$ têm-se que*

$$\lambda_{j+1}(K) \int_{\mathbb{R}^N} K(x) u^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x) u^2) dx. \quad (1-44)$$

No caso em que a não linearidade g é assintoticamente linear no infinito, precisamos estudar o comportamento das sequências de Palais Smale com nível $c \in \mathbb{R}$. Uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X é dito uma sequência de Palais Smale com nível $c \in \mathbb{R}$, sempre que $J(u_n) \rightarrow c$ e $\|J'(u_n)\|_{X^*} \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$, onde $\|\cdot\|_{X^*}$ denota a norma no espaço dual X^* de X . Nesse ambiente, pedimos que $\mu_1(K_\infty) > 1$ garantindo que o funcional J é coercivo em X . Sendo assim é importante considerar o problema de autovalores (1-5). O primeiro autovalor é positivo e caracterizado por

$$\mu_1(K_\infty) := \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx : \int_{\mathbb{R}^N} K_\infty(x) u^2 dx = 1 \right\}. \quad (1-45)$$

Em particular, consideremos a seguinte desigualdade variacional

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \geq \mu_1(K_\infty) \int_{\mathbb{R}^N} K_\infty(x) u^2 dx, \quad u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \quad (1-46)$$

Temos que $\mu_1(K_\infty)$ é atingido para toda função não negativa K_∞ que pertence a $L^\alpha(\mathbb{R}^N) \cap L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha > N/2$, (veja [15]). Neste momento, consideremos o espaço de Lebesgue com peso

$$L^2(\mathbb{R}^N, K_\infty) = \left\{ u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^N} K_\infty(x) |u|^2 dx < \infty \right\}.$$

O espaço $L^2(\mathbb{R}^N, K_\infty)$ é um espaço de Banach munido com a norma natural

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N, K_\infty)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} K_\infty(x) |u|^2 dx \right)^{1/2}, \quad u \in L^2(\mathbb{R}^N, K_\infty).$$

Portanto, podemos considerar o seguinte resultado:

Lema 1.1.5 *Seja $K_\infty \in L^\alpha(\mathbb{R}^N) \cap L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$ uma função não negativa tal que $K_\infty \neq 0$ e $\alpha > N/2$. Então obtemos que*

- (i) *A imersão de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^2(\mathbb{R}^N, K_\infty)$ é compacta.*
- (ii) *O número $\mu_1(K_\infty)$ é atingido por alguma função positiva $\psi_1 \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Note que a desigualdade de Hölder implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_\infty(x) u^2 dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |K_\infty(x)|^\beta dx \right)^{1/\beta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx \right)^{2/2^*}$$

para $\beta = N/2$. Portanto, usando o fato que $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos que $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^2(\mathbb{R}^N, K_\infty)$. Note que, para mostrar que essa imersão é compacta é suficiente considerar que qualquer sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup 0$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ implica que $u_n \rightarrow 0$ em $L^2(\mathbb{R}^N, K_\infty)$. Como $\alpha > N/2$ observemos que $2\alpha' < 2^*$, onde $\alpha' = \alpha/(\alpha - 1)$. Como uma consequência, obtemos

$$u_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2_{loc}(\mathbb{R}^N, K_\infty) \text{ e } u_n(x) \rightarrow 0 \text{ q. t. p. em } \mathbb{R}^N.$$

Seja $B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq R\}$ a bola fechada com raio $R > 0$ centrada na origem. Agora, como $K_\infty \in L^\alpha(\mathbb{R}^N) \cap L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha > N/2$, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $R_\varepsilon > 0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |K_\infty(x)|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} < \varepsilon, \quad \text{para qualquer } R > R_\varepsilon. \quad (1-47)$$

Portanto, escolhendo $R > R_\varepsilon$, sabemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} K_\infty(x) u_n^2 dx &= \int_{B_R(0)} K_\infty(x) u_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} K_\infty(x) u_n^2 dx \\ &= o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} K_\infty(x) u_n^2 dx. \end{aligned}$$

Usando mais uma vez a desigualdade de Hölder segue de (1-47) que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} K_\infty(x) u_n^2 dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |K_\infty(x)|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |u_n|^{2\alpha'} dx \right)^{1/\alpha'} < C\varepsilon.$$

é verificada para qualquer $\varepsilon > 0$ e $C = C(N, K_\infty) > 0$. Aqui enfatizamos que ε não depende de $n \in \mathbb{N}$. Como uma consequência temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} K_\infty(x) u_n^2 dx \leq C\varepsilon.$$

Como ε é arbitrário e C não depende de ε obtemos que $u_n \rightarrow 0$ em $L^2(\mathbb{R}^N, K_\infty)$. Assim, a prova do item (i) está finalizada.

Agora iremos provar o item (ii). Consideremos aqui uma sequência minimizante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ para $\mu_1(K_\infty)$, isto é, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \rightarrow \mu_1(K_\infty) \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} K_\infty(x) u_n^2 dx = 1.$$

Como uma consequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é agora uma sequência limitada $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, existe uma função $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de uma subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Usando o item (i) obtemos que $\int_{\mathbb{R}^N} K_\infty(x) u^2 dx = 1$. Em particular, $u \neq 0$. Usando o fato que a norma é fracamente semicontínua inferiormente, inferimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx = \mu_1(K_\infty).$$

Consequentemente $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \mu_1(K_\infty)$ devido ao fato que $\int_{\mathbb{R}^N} K_\infty(x) u^2 dx = 1$. Ao mesmo tempo, usando as estimativas anteriores, deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx = \mu_1(K_\infty).$$

Segue do Teorema de Multiplicador de Lagrange que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \phi dx = \theta \int_{\mathbb{R}^N} K_\infty(x) u \phi dx, \phi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Escolhendo $\phi = u$ deduzimos que $\theta = \mu_1(K_\infty)$ e u é uma autofunção associada ao autovalor $\mu_1(K_\infty)$. Em particular, $\mu_1(K_\infty)$ é o primeiro autovalor positivo para o problema linear (1-5). Se necessário podemos considerar $|u|$ ao invés de u provando que existe uma autofunção não negativa $\psi_1 \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ associada ao primeiro autovalor positivo $\mu_1(K_\infty)$. Consequentemente, aplicando argumentos padrão de regularidade, temos que $\psi_1 \in C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha \in (0, 1)$. Usando o Princípio do Máximo Forte e o fato que K_∞ é uma função positiva, obtemos que $\psi_1 > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Assim encerramos a demonstração desta proposição. $\square$

Para finalizar as preliminares desta tese consideremos um resultado auxiliar que caracteriza o comportamento de $Q : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$Q(v) = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x) f^2(v)) dx, v \in X. \quad (1-48)$$

Claramente, o funcional Q não é uma forma quadrática, isto é, a parte principal do funcional J não é quadrática. Este fato apresenta algumas dificuldades para mostrar que

o funcional J admite alguma estrutura de linking. Portanto é necessário controlar Q na origem e no infinito. Primeiramente, consideremos o seguinte resultado:

Proposição 1.1.6 *Suponha que V satisfaz as hipóteses $(V_1) - (V_2)$. Então existem $\rho_1 > 0$ e $c > 0$ tais que $Q(v) \geq c\|v\|^2$ para qualquer $v \in X$ com $\|v\| \leq \rho_1 < 1$.*

Demonstração. A demonstração pode ser feita argumentando por contradição. Suponha que existe uma sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$Q(v_n) \leq \frac{1}{n} \|v_n\|^2, n \in \mathbb{N}. \quad (1-49)$$

Defina a sequência normalizada $w_n = v_n / \|v_n\|$. Portanto $\|w_n\| = 1$ ao qual permite a existência de $w \in X$ tal que

$$\begin{cases} w_n \rightharpoonup w & \text{fracamente em } X, \\ w_n \rightarrow w & \text{fortemente em } L^q(\mathbb{R}^N), \\ w_n(x) \rightarrow w(x), & \text{q. t. p. em } \mathbb{R}^N, \\ |w_n(x)| \leq h_q(x), & h_q \in L^q(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (1-50)$$

para qualquer $2 \leq q < 2^*$. Como uma consequência, a estimativa (1-49) implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + V(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 \right) dx \leq \frac{1}{n}.$$

Em particular, observe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 dx = 0 \quad (1-51)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx = 0. \quad (1-52)$$

Além disso, como a norma $\|\cdot\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}$ é fracamente semicontínua inferiormente em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, obtemos que

$$\|w\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 dx = 0.$$

Logo devemos ter que $w \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N$. Portanto $w_n \rightharpoonup 0$ em X e $w_n(x) \rightarrow 0$ q. t. p. em $\mathbb{R}^N$. Note que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência normalizada, obtemos de (1-51) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) w_n^2 dx = 1. \quad (1-53)$$

Afirmamos, neste momento, que $(w_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência uniformemente integrável (veja Definição 4.1.1) com respeito a medida $\mu = V(x)dx$. De fato, defina $H(t) = t^p$, com $2 < p < 2^*$. então H é crescente sobre $[0, +\infty)$ e satisfaz a condição

$$\frac{H(t)}{t^2} \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty.$$

Além disso, usando a condição (V_3) e o fato da sequência $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ser normalizada em X , temos que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} H(|w_n|) V(x) dx = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^p V(x) dx \leq \frac{1}{S_p^{p/2}} < \infty.$$

Aplicando o Teorema 4.1.4, obtemos que $(w_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência uniformemente integrável com respeito a medida μ . Além disso, usando o Teorema 4.1.3, obtemos que $(w_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz a condição absolutamente continuamente uniformemente da integral com respeito a medida μ .

Afirmamos que $(w_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência tight sobre $\mathbb{R}^N$ com respeito a medida μ . De fato, pela Definição 4.1.5, mostremos que dado $\varepsilon > 0$ existe um $R_\varepsilon > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} V(x) w_n^2 dx < \varepsilon \quad (1-54)$$

para todo $R > R_\varepsilon$. Sejam $R > 0$, que será escolhido posteriormente, e $M > 0$ uma constante fixada. É fácil ver que podemos escrever $\mathbb{R}^N \setminus B_R(0) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ onde $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0); V(x) \leq M\}$ e $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0); V(x) > M\}$. Usando que V é limitado superiormente em $\mathcal{A}$, temos que

$$\int_{\mathcal{A}} V(x) w_n^2 dx \leq M \int_{\mathcal{A}} 1 \cdot w_n^2 dx \leq M \left(\int_{\mathcal{A}} 1^r dx \right)^{1/r} \left(\int_{\mathcal{A}} (|w_n|^2)^{2^*/2} dx \right)^{2/2^*} \leq M |\mathcal{A}|^{1/r} \|w_n\|_{2^*}^2,$$

onde $1/r + 2^*/2 = 1$. Usando a imersão contínua de X no espaço de Lebesgue $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ obtemos que

$$\int_{\mathcal{A}} V(x) w_n^2 dx \leq C |\mathcal{A}|^{1/r}. \quad (1-55)$$

É fácil ver que $|\mathcal{A}| \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe R_ε tal que $|\mathcal{A}|^{1/r} \leq \varepsilon/3C$ para todo $R > R_\varepsilon$. Escolhendo $R > R_\varepsilon$, obtemos de (1-55) que

$$\int_{\mathcal{A}} V(x) w_n^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1-56)$$

No que segue consideraremos a integral sobre o conjunto $\mathcal{B}$. Neste caso, escrevemos $\mathcal{B} = \mathcal{C}_n \cup \mathcal{D}_n$ onde $\mathcal{C}_n = \{x \in \mathcal{B}; |w_n(x)| \leq k\}$, $\mathcal{D}_n = \{x \in \mathcal{B}; |w_n(x)| > k\}$ com $k > 0$.

Aplicando o Lema 1.1.1, (f_8) e (f_{10}) , obtemos que

$$\int_{C_n} V(x) w_n^2 dx \leq C \int_{[|w_n| \leq k]} V(x) f^2(w_n) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(w_n) dx \quad (1-57)$$

para alguma constante positiva C . Usando o Lema 1.1.1 (f_{10}) e (1-52) obtemos que

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(w_n) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x) f^2(v_n)}{\|v_n\|^2} dx = 0.$$

Aplicando essa última convergência em (1-57), temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} V(x) w_n^2 dx = 0.$$

Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0$

$$\int_{C_n} V(x) w_n^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1-58)$$

Neste momento, note que $\mathcal{D}_n$ possui medida de Lebesgue finita. De fato, como a sequência $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência normalizada em X , usando (1-53), obtemos que

$$|\mathcal{D}_n| \leq 1/(k^2 M) \int_{\mathcal{B}_2} V(x) w_n^2 dx \leq 2/(k^2 M) < \infty$$

é satisfeita para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Usando os mesmos argumentos para a medida $\mu = V(x) dx$ obtemos que $\mathcal{D}_n$ possui medida finita com respeito a medida μ . De fato, temos que

$$\mu(\mathcal{D}_n) \leq 1/k^2 \int_{\mathcal{B}_2} V(x) w_n^2 dx \leq 2/k^2 < \infty \quad (1-59)$$

é satisfeita para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Usando que $(w_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz a condição absolutamente continuamente uniformemente integrável com respeito a medida μ , temos que existe δ_ε tal que

$$\int_{\mathcal{D}} V(x) w_n^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo conjunto μ - mensurável $\mathcal{D}$ tal que $\mu(\mathcal{D}) \leq \delta_\varepsilon$. Escolhendo $k > 0$ suficientemente grande, porém fixo, em (1-59), temos que $\mu(\mathcal{D}_n) \leq \delta_\varepsilon$ e

$$\int_{\mathcal{D}_n} V(x) w_n^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (1-60)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Aplicando as estimativas (1-55), (1-58) e (1-60) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} V(x) w_n^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

para todo $R > R_\varepsilon$. Assim, $(w_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência tight sobre $\mathbb{R}^N$ com respeito a medida μ . Aplicando o Teorema Geral de Convergência de Vitali, Teorema 4.1.6, obtemos que

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) w_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n \rightarrow \infty} V(x) w_n^2 dx = 0.$$

Esta é uma contradição com (1-53) provando o resultado desejado. Assim encerramos a demonstração. $\square$

No que segue, controlamos o funcional Q no infinito.

Proposição 1.1.7 *Suponha que V satisfaz as hipóteses $(V_1) - (V_2)$. Então existem $\rho_2 > 0$ e $c > 0$ tais que $Q(v) \geq c\|v\|$ para qualquer $v \in X$ com $\|v\| \geq \rho_2 > 1$.*

Demonstração. A demonstração segue mais uma vez usando argumento por contradição. Suponha que exista uma sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$Q(v_n) \leq (1/n)\|v_n\| \text{ onde } v_n \in X, \|v_n\| \geq n.$$

Como uma consequência, observemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x) f^2(v_n)}{\|v_n\|} dx = 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla v_n|^2}{\|v_n\|^2} dx = 0$$

Defina a sequência normalizada $w_n = v_n / \|v_n\|$. Portanto, as últimas considerações dizem que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 dx = 0. \quad (1-61)$$

Além disso, usando o Lema 1.1.1 (f_{11}), obtemos

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(w_n) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x) f^2(v_n)}{\|v_n\|} dx = o_n(1).$$

Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(w_n) dx = 0. \quad (1-62)$$

Seja $\eta \in (0, 1)$ suficientemente pequeno. De acordo com a Proposição 1.1.6 deduzimos que $Q(\eta w_n) \geq c\|\eta w_n\|^2 = c\eta^2$. Contudo, usando (1-61) e (1-62), inferimos que $c\eta^2 \leq Q(\eta w_n) \leq \eta Q(w_n) \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$. Aqui foi usado o fato que f^2 é uma função convexa. Assim obtemos uma contradição finalizando a demonstração dessa proposição. $\square$

1.2 O Linking Local na Origem

Nessa seção mostraremos que o funcional J dado em (1-32) possui uma estrutura de Linking Local na origem com respeito a decomposição $X = X_1 \oplus X_2$.

Dizemos que J possui um Linking local na origem com respeito aos subespaços X_1 e X_2 , se para algum $r > 0$ ocorrer que

$$\begin{aligned} J(u) &\leq 0 \quad \forall u \in X_1 \text{ e } \|u\| \leq r, \\ J(u) &\geq 0 \quad \forall u \in X_2 \text{ e } \|u\| \leq r. \end{aligned}$$

Consequentemente, usaremos o Teorema de Linking Local dado por Willem e Li [25]. Este resultado pode ser reescrito da seguinte forma:

Teorema 1.2.1 (Teorema 1. [25]) *Seja X um espaço de Banach onde $X = X_1 \oplus X_2$. Suponha que $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz as seguintes condições:*

- (A₁) *J tem um Linking local na origem.*
- (A₂) *J satisfaz a condição de Palais - Smale.*
- (A₃) *J aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados.*
- (A₄) *J é limitado por baixo e $\inf_X J < 0$.*

Então o funcional J admite ao menos dois pontos críticos não triviais.

Agora mostraremos que J dado em (1-32) tem um Linking Local na origem. A principal dificuldade aqui é garantir que a geometria de Linking Local na origem é satisfeita em relação a condição de cruzamento de autovalores $\lambda_j(K_0) < 1 < \lambda_{j+1}(K_0)$ para algum $j \geq 1$. Uma dificuldade adicional é controlar o termo $\int_{\mathbb{R}^N} V(x) v_n^2 dx$ para uma sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ devido ao fato de V não ser limitado por cima. Essas dificuldades são contornadas usando um argumento de contradição juntamente com uma análise precisa do cruzamento de autovalores. Portanto, podemos provar o seguinte resultado, para X_1 e X_2 dados em (1-41).

Proposição 1.2.2 *Suponha que V satisfaz $(V_1) - (V_2)$. Assuma que g satisfaz (g_1) e (G_0) . Suponha que $\lambda_j(K_0) < 1 < \lambda_{j+1}(K_0)$ para algum $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 1$. Então J admite um Linking Local na origem com respeito a X_1 e X_2 .*

Demonstração. Vamos mostrar primeiro que existe $r_1 > 0$ de tal forma que $J(v) \leq 0$ para qualquer $v \in X_1$ com $\|v\| \leq r_1$. A demonstração desse caso segue um argumento de contradição.

Suponha que existe uma sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X_1 tal que

$$J(v_n) > 0 \quad \text{e} \quad \|v_n\| \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1-63)$$

Defina $w_n = v_n / \|v_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\|w_n\| = 1$, usando que $\dim(X_1) < \infty$, a menos de uma subsequência, obtemos que

$$\begin{cases} w_n \rightarrow w & \text{fortemente em } X_1, \\ w_n \rightarrow w & \text{fortemente em } L^q(\mathbb{R}^N), \\ w_n(x) \rightarrow w(x), & \text{q. t. p. em } \mathbb{R}^N, \\ |w_n(x)| \leq h_q(x), & h_q \in L^q(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (1-64)$$

para qualquer $2 \leq q \leq 2^*$. Aqui usamos o fato de X_1 ser de dimensão finita.

Por outro lado, usando o funcional J e dividindo por $\|v_n\|^2$, deduzimos que

$$\frac{J(v_n)}{\|v_n\|^2} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + V(x) \frac{f^2(v_n)}{\|v_n\|^2} \right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{G(x, f(v_n))}{f^2(v_n)} \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx.$$

De acordo com (1-63) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{2G(x, f(v_n))}{f^2(v_n)} \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx < \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + V(x) \frac{f^2(v_n)}{\|v_n\|^2} \right) dx.$$

Segue do Lema 1.1.1 (f_3) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{2G(x, f(v_n))}{f^2(v_n)} \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx < \|w_n\|^2 = 1.$$

Agora, afirmamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{2G(x, f(v_n))}{f^2(v_n)} \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} K_0(x) w^2 dx. \quad (1-65)$$

De fato, usando $(G-1)$, (1-6), Lema 1.1.1 (f_3) e (f_7), obtemos

$$|G(x, f(v_n))| \leq \frac{1}{2} (a_1(x) + b_1(x)) v_n^2. \quad (1-66)$$

Portanto, usando as estimativas (1-64) e (1-66), deduzimos que

$$\frac{|G(x, f(v_n))|}{\|v_n\|^2} \leq \frac{1}{2} (a_1(x) + b_1(x)) h_q^2. \quad (1-67)$$

Neste momento, lembremos que $a_1(x), b_1(x) \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ é assegurada para algum $\alpha > N/2$. Usando $q = 2\alpha'$, onde α' satisfaz $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$, temos que, aplicando a desigualdade de Hölder, $(a_1(x) + b_1(x)) h_q^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Não é difícil ver que $|v_n(x)| \rightarrow 0$ sobre $[w \neq 0] := \{x \in \mathbb{R}^N | w(x) \neq 0\}$. Como uma consequência, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Lema 1.1.1 (f_4) e (G_0), a prova da afirmação está

concluída.

Neste momento, usando (1-65), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_0(x) w^2 dx \leq \|w\|^2 = 1. \quad (1-68)$$

Além disso, usando o fato que $w \in X_1$, segue de (1-43) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_0(x) w^2 dx \geq \frac{1}{\lambda_j(K_0)} \|w\|^2.$$

A última desigualdade e (1-68) implicam que $\lambda_j(K_0) \geq 1$. Assim obtemos uma contradição sobre a hipótese de $\lambda_j(K_0)$. Portanto, existe $r_1 > 0$ de tal forma que $J(v) \leq 0$ para qualquer $v \in X_1$ satisfazendo $\|v\| \leq r_1$.

Provaremos agora que existe $r_2 > 0$ de tal forma que

$$J(v) \geq 0 \text{ para qualquer } v \in X_2, \|v\| \leq r_2.$$

A demonstração segue mais uma vez argumentando por contradição.

Suponha que exista uma sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X_2 tal que

$$J(v_n) < 0 \text{ e } \|v_n\| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1-69)$$

Defina a sequência normalizada $w_n = v_n / \|v_n\|$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\|w_n\| = 1$ e a menos de uma subsequência

$$\begin{cases} w_n \rightharpoonup w & \text{fracamente em } X_2, \\ w_n \rightarrow w & \text{fortemente em } L^q(\mathbb{R}^N), \\ w_n(x) \rightarrow w(x), & \text{q. t. p. em } \mathbb{R}^N, \\ |w_n(x)| \leq h_q(x), & h_q \in L^q(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (1-70)$$

para qualquer $2 \leq q < 2^*$. Usando o funcional J e dividindo por $\|v_n\|^2$ graças a (1-69) obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{G(x, f(v_n))}{f^2(v_n)} \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx > \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + V(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 \right) dx. \quad (1-71)$$

Além disso, usando a que $\|\cdot\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}$ é fracamente semicontínua inferiormente, Lema 1.1.1 (f4) e o Lema de Fatou, inferimos que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + V(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 \right) dx \geq \|w\|^2 \quad (1-72)$$

Aplicando (1-72) e usando uma estimativa similar a desigualdade feita em (1-67), deduzimos de (1-71) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_0(x) w^2 dx \geq \|w\|^2 \quad (1-73)$$

Observe que o fato de $w \in X_2$ e a desigualdade variacional (1-44) implicam que

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_0(x) w^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_{j+1}(K_0)} \|w\|^2. \quad (1-74)$$

Além disso, usando (1-73) e (1-74), deduzimos que

$$\frac{1}{\lambda_{j+1}(K_0)} \|w\|^2 \geq \|w\|^2.$$

Agora, afirmamos que $w \neq 0$. Se esta afirmação é verificada, obtemos que $\lambda_{j+1}(K_0) \leq 1$. Assim temos uma contradição mostrando o nosso resultado desejado. Além disso, escolhendo $r = \min\{r_1, r_2\}$, concluímos que J tem um Linking Local na origem com respeito a X_1 e X_2 .

Neste momento, mostraremos a afirmação $w \neq 0$. A demonstração segue usando argumentando por contradição. Suponha que $w = 0$. Usando (1-71) mencionamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + V(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 \right) dx = 0.$$

Portanto, a última afirmação implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx = 0. \quad (1-75)$$

Usando o fato que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência normalizada segue de (1-75) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) w_n^2 dx = 1. \quad (1-76)$$

Além disso, usando o Lema 1.1.1 (f_{10}) e (1-75), mencionamos que

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(w_n) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x) f^2(v_n)}{\|v_n\|^2} dx = 0. \quad (1-77)$$

Contudo, existe uma constante $C > 0$ de tal modo que $Q(\eta w_n) \geq C \|\eta w_n\|^2 = C \eta^2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande e $\eta > 0$ pequeno, veja Proposição 1.1.6. Tomando o limite na última desigualdade e usando (1-75) e (1-77) vemos que

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} Q(\eta w_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} C \|\eta w_n\|^2 = C \eta^2 > 0.$$

Assim obtemos uma contradição provando que $w \neq 0$ é verificada. A demonstração desta proposição agora está completa. $\square$

Observação 4 Para o caso superlinear mudamos a condição de crescimento (g_1) por (g_2) . Em relação a essa condição, seguindo as mesmas ideias discutidas na demonstração da Proposição 1.2.2, temos que o funcional J tem um Linking Local na origem com respeito a X_1 e X_2 .

Neste momento consideramos a geometria de Linking local na origem assumindo que o termo não linear g é superlinear no infinito. Seja $(X, |||)$ um espaço de Banach munido com a norma $|||$. Consequentemente consideremos o seguinte resultado abstrato dado em M. Willem e S. Li em [25] com a seguinte forma:

Teorema 1.2.3 (Teorema 2. [25]) *Seja X um espaço de Banach onde $X = X_1 \oplus X_2$. Suponha que $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional de classe C^1 . Suponha que J satisfaz as seguintes condições:*

- (B_1) J tem um Linking local na origem.
- (B_2) J satisfaz a condição de Palais - Smale.
- (B_3) J aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados.
- (B_4) Para todo $m \in \mathbb{N}$, $J(v) \rightarrow -\infty$ com $\|v\| \rightarrow \infty$, $v \in X_1 \oplus X_m^2$, onde $X_m^2 = \text{span}\{\phi_{j+1}, \dots, \phi_{j+m}\}$.

Então J possui ao menos um ponto crítico não trivial.

Agora provaremos que J dado em (1-32) satisfaz as condições requeridas no Teorema 1.2.3 com $X = X_1 \oplus X_2$ onde X_1 e X_2 são dados em (1-41). Consequentemente provamos o seguinte resultado

Proposição 1.2.4 *Suponha que V satisfaz $(V_1) - (V_2)$ e g satisfaz (g_2) , (G_0) e (g_∞) . Suponha que $\lambda_j(K_0) < 1 < \lambda_{j+1}(K_0)$ para algum $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 1$. Então o funcional J é anti-coercivo para qualquer subespaço de dimensão finita de X , isto é,*

$$J(v) \rightarrow -\infty \quad \text{quando} \quad \|v\| \rightarrow \infty, \quad v \in Y$$

onde Y denota qualquer subespaço de X satisfazendo $\dim(Y) < \infty$.

Demonstração. A demonstração segue argumentando por contradição. Suponha que existe um subespaço Y de X ao qual é de dimensão finita e satisfazendo

$$J(v) \geq -C \tag{1-78}$$

para qualquer $v \in Y$ e para alguma constante $C > 0$. Seja $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência fixada em Y satisfazendo $\|v_n\| \rightarrow \infty$. Defina a sequência normalizada $w_n = v_n / \|v_n\|$. Claramente, temos que $\|w_n\| = 1$ e ao longo de uma subsequência deduzimos que

$$\begin{cases} w_n \rightarrow w & \text{fortemente em } Y, \\ w_n \rightarrow w & \text{fortemente em } L^q(\mathbb{R}^N), \\ w_n(x) \rightarrow w(x), & \text{q. t. p. em } \mathbb{R}^N, \\ |w_n(x)| \leq h_q(x), & h_q \in L^q(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (1-79)$$

para qualquer $2 \leq q \leq 2^*$. Aqui usamos o fato de Y ser de dimensão finita. Este fato nos permite concluir que convergência fraca em Y implica convergência forte em Y . Relembremos que (1-78) implica que

$$-C \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^2 + V(x)f^2(v_n)) dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v_n)) dx.$$

Levando em conta o Lema 1.1.1 (f_3) e dividindo a última desigualdade por $\|v_n\|^2$ inferimos que

$$-\frac{2C}{\|v_n\|^2} \leq 1 - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{4G(x, f(v_n))}{f^4(v_n)} \frac{f^4(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx. \quad (1-80)$$

Além disso, usando a convergência forte dada em (1-79), deduzimos que $\|w\| = 1$. Este fato implica que $[w \neq 0]$ tem medida de Lebesgue positiva. Segue da última afirmação que $|v_n(x)| \rightarrow +\infty$ q. t. p. $x \in [w \neq 0]$ com $n \rightarrow \infty$. Assim, usando o Lema 1.1.1, condição de crescimento (g_2) e (g_∞), o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue permite concluir que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{[w \neq 0]} \frac{4G(x, f(v_n))}{f^4(v_n)} \frac{f^4(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx = +\infty. \quad (1-81)$$

Consequentemente, reescrevemos (1-80) da seguinte forma

$$-\frac{2C}{\|v_n\|^2} \leq 1 - \frac{1}{2} \int_{[w \neq 0]} \frac{4G(x, f(v_n))}{f^4(v_n)} \frac{f^4(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx. \quad (1-82)$$

Neste caso, usando (1-81) e (1-82), obtemos

$$0 \leq 1 - \frac{1}{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{[w \neq 0]} \frac{4G(x, f(v_n))}{f^4(v_n)} \frac{f^4(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx = -\infty,$$

o que é uma contradição, logo temos o nosso resultado desejado, isto é, o funcional energia J restrito a Y é anti-coercivo para qualquer subespaço de dimensão finita $Y \subset X$. Assim encerramos a demonstração. $\square$

1.3 A Condição de Palais Smale

Nesta seção provamos algum resultado de compacidade requerida em métodos variacionais. Primeiramente, definimos algumas sequências que são fundamentais na teoria de pontos críticos. Essas sequências são definidas da seguinte forma:

Definição 1.3.1 *Seja X um espaço de Banach e $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ a um funcional de classe C^1 . Uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X é dito uma sequência de Palais-Smale de nível $c \in \mathbb{R}$, $(PS)_c$, sempre que $J(u_n) \rightarrow c$ e $\|J'(u_n)\|_{X^*} \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$, onde $\|\cdot\|_{X^*}$ denota a norma no espaço dual X^* .*

Definição 1.3.2 *Seja X um espaço de Banach e $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ a um funcional de classe C^1 . Dizemos que J satisfaz a condição de Palais Smale, em resumo condição $(PS)_c$, se qualquer sequência $(PS)_c$ admite uma subsequência convergente. Se J verifica a condição $(PS)_c$ para qualquer nível $c \in \mathbb{R}$, então dizemos simplesmente que J satisfaz a condição (PS) .*

Para o nosso problema (1-1) o termo não linear g pode ser assintoticamente linear ou superlinear no infinito. A principal dificuldade aqui é garantir que qualquer sequência de Palais-Smale é limitada. Para o caso assintoticamente linear não é possível usar a famosa condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Esta é uma ferramenta fundamental para provar que qualquer sequência (PS) é limitada no caso superlinear.

Agora, assumiremos que g é assintoticamente linear no infinito. Para este caso usaremos algumas estimativas e desigualdades variacionais com a finalidade de provar que qualquer sequência (PS) associada o funcional J é limitada. Para este propósito, para obter uma solução não trivial para o problema (1-1), consideramos as hipóteses (G_0) e (G_∞) . Consequentemente, o próximo resultado pode ser escrito na seguinte forma:

Proposição 1.3.3 *Suponha que V satisfaz $(V_1) - (V_2)$ e que g satisfaz (g_1) , (G_0) e (G_∞) . Suponha que $\mu_1(K_\infty) > 1$. Então o funcional J é coercivo e $\inf_X J < 0$ desde que $\lambda_j(K_0) < 1 < \lambda_{j+1}(K_0)$ para algum $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 1$.*

Demonstração. A demonstração do fato que J é coercivo segue um argumento padrão. Seja $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X tal que $\|v_n\| \rightarrow \infty$ com $n \rightarrow \infty$. Usando a Proposição 1.1.7 mencionamos que $Q(v_n) \geq c\|v_n\| \rightarrow \infty$ com $n \rightarrow \infty$.

Por outro lado, usando a condição de crescimento (g_1) , mencionamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(x, f(v_n)) dx \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |f(v_n)|^2 + \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^N} b(x) |f(v_n)|^r$$

Como uma consequência, usando a desigualdade de Hölder temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(x, f(v_n)) dx \leq \frac{1}{2} \|a\|_{2N/(2N+2)} \|f(v_n)\|_{2.2^*}^2 + \frac{1}{r} \|b\|_{2.2^*/(2.2^*-r)} \|f(v_n)\|_{2.2^*}^r.$$

Observe que

$$\|f(v_n)\|_{2.2^*} = \left[\int_{\mathbb{R}^N} [f^2(v_n)]^{2^*} dx \right]^{1/(2.2^*)} \leq C \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx \right]^{1/4} \leq C Q(v_n)^{1/4}.$$

Em vista da última estimativa obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(x, f(v_n)) dx \leq c \|a\|_{2N/(2N+2)} Q(v_n)^{1/2} + c \|b\|_{2.2^*/(2.2^*-r)} Q(v_n)^{r/4}.$$

onde c é uma constante positiva. Usando a desigualdade variacional (1-46) e o Lema 1.1.1 (f_9) mencionamos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} K_\infty(x) f(v_n)^4 dx &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} K_\infty(x) [f^2(v_n)]^2 dx \\ &\leq \frac{1}{\mu_1(K_\infty)} \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)^2 f'(v_n)^2 |\nabla v_n|^2 dx \leq \frac{1}{2\mu_1(K_\infty)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx \end{aligned}$$

Relembre que $G(x, s) = (1/4)K_\infty(x)s^4 + G_\infty(x, s)$ onde

$$G_\infty(x, s) = \int_0^s g_\infty(x, \xi) d\xi, \quad (x, s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Consequentemente, obtemos

$$J(v_n) \geq (1/2) \left(1 - \frac{1}{\mu_1(K_\infty)} \right) Q(v_n) - c \|a\|_{2N/(2N+2)} Q(v_n)^{1/2} - c \|b\|_{2.2^*/(2.2^*-r)} Q(v_n)^{r/4}.$$

Usando o fato que $2 < r < 4$ e $\mu_1(K_\infty) > 1$, temos que $J(v_n) \rightarrow \infty$ com $n \rightarrow \infty$. Assim provamos que J é coercivo. Como uma consequência, usando que $|J(B_R(0))| \leq C$, temos que o funcional J é limitado inferiormente.

Neste momento, resta provar agora somente que $\inf_X J < 0$. Considere ϕ_1 a primeira autofunção associada ao primeiro autovalor $\lambda_1(K_0)$. Aqui relembremos que $\lambda_j(K_0) < 1$ para algum $j \in \mathbb{N}$ ao qual implica que $\lambda_1(K_0) < 1$. Seja $v = t\phi_1$ uma função fixada com $t > 0$. Não é difícil ver que Lema 1.1.1 (f_3) implica que

$$\frac{2J(t\phi_1)}{t^2} \leq \|\phi_1\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{2G(x, f(t\phi_1))}{f^2(t\phi_1)} \frac{f^2(t\phi_1)}{t^2\phi_1^2} \phi^2 dx.$$

Usando a condição de crescimento (g_1), Lema 1.1.1 e (G_0) vemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{2G(x, f(t\phi_1))}{f^2(t\phi_1)} \frac{f^2(t\phi_1)}{t^2\phi_1^2} \phi^2 = \int_{\mathbb{R}^N} K_0(x) \phi_1^2 dx = \frac{1}{\lambda_1(K_0)} \|\phi_1\|^2.$$

Como uma consequência, obtemos que

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{2J(t\phi_1)}{t^2} &\leq \limsup_{t \rightarrow 0} \left(\|\phi_1\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{2G(x, f(t\phi_1))}{f^2(t\phi_1)} \frac{f^2(t\phi_1)}{t^2 \phi_1^2} \phi^2 dx \right) \\ &= \left(\frac{\lambda_1(K_0) - 1}{\lambda_1(K_0)} \right) \|\phi_1\|^2 < 0 \end{aligned}$$

Portanto, escolhendo t_0 pequeno suficiente, finalizamos a demonstração obtendo o resultado desejado fazendo $v = t_0\phi_1$ ao qual implica que $J(v) < 0$. $\square$

No próximo resultado, supondo ainda que g é assintoticamente linear no infinito, mostramos que o funcional J satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.3.4 *Suponha que $(V_1) - (V_2)$ são satisfeitas e que g satisfaz (g_1) , (G_0) e (G_∞) . Suponha que $\lambda_j(K_0) < 1 < \lambda_{j+1}(K_0)$ para algum $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 1$ e $\mu_1(K_\infty) > 1$. Então J satisfaz $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência $(PS)_c$ para o funcional energia J . De acordo com a Proposição 1.3.3 inferimos que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada. Então existe uma função $v \in X$ tal que, a menos de uma subsequência, temos

$$\begin{cases} v_n \rightharpoonup v & \text{fracamente em } X, \\ v_n \rightarrow v & \text{fortemente em } L^q(\mathbb{R}^N), \\ v_n(x) \rightarrow v(x), & \text{q. t. p. em } \mathbb{R}^N, \\ |v_n(x)| \leq h_q(x), & h_q \in L^q(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (1-83)$$

para qualquer $2 \leq q < 2^*$. Usando a convergência fraca e o fato que $J'(v)$ é um funcional linear contínuo, temos que

$$\langle J'(v_n) - J'(v), v_n - v \rangle = o_n(1). \quad (1-84)$$

Por outro lado, inferimos que

$$\begin{aligned} \langle J'(v_n) - J'(v), v_n - v \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(v_n - v)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) (\Psi(v_n) - \Psi(v)) (v_n - v) dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} [g(x, f(v_n)) f'(v_n) - g(x, f(v)) f'(v)] (v_n - v) dx. \end{aligned}$$

onde tomamos $\Psi(t) = f(t)f'(t)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Agora afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [g(x, f(v_n)) f'(v_n) - g(x, f(v)) f'(v)] (v_n - v) dx = o_n(1) \quad (1-85)$$

De fato, usando (1-83), mencionamos que

$$\left[g(x, f(v_n(x)))f'(v_n(x)) - g(x, f(v(x)))f'(v(x)) \right] (v_n(x) - v(x)) \rightarrow 0 \quad \text{q. t. p. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Usando a condição de crescimento (g_1) e (1-6) vemos que

$$|g(x, f(v_n))f'(v_n)| \leq (a_1(x)|f(v_n)| + b_1(x)|f(v_n)|^3) |f'(v_n)|$$

Além disso, levando em conta o Lema 1.1.1 (f_2) , (f_3) , (f_7) e (f_9) , obtemos

$$|g(x, f(v_n))f'(v_n)| \leq (a_1(x) + b_1(x)) |v_n|.$$

Como uma consequência, vemos que

$$\begin{aligned} |g(x, f(v_n))f'(v_n)(v_n - v)| &\leq (a_1(x) + b_1(x)) |v_n| |v_n - v| \\ &\leq (a_1(x) + b_1(x)) |v_n|^2 + (a_1(x) + b_1(x)) |v_n| |v|. \end{aligned}$$

Agora aplicando (1-83) deduzimos que

$$|g(x, f(v_n))f'(v_n)(v_n - v)| \leq (a_1(x) + b_1(x)) |h_q|^2 + (a_1(x) + b_1(x)) |h_q| |v| \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Aqui tomamos $q = 2\alpha'$ provando que a desigualdade de Hölder permite que $g(x, f(v_n))f'(v_n)(v_n - v)$ é dominada por uma função em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Assim, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que a afirmação (1-85) está verificada. Aplicando (1-84) e (1-85) segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(v_n - v)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) (\Psi(v_n) - \Psi(v)) (v_n - v) dx = o_n(1). \quad (1-86)$$

onde tomamos $\Psi(t) = f(t)f'(t)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Aqui relembramos que $\Psi'(t) = f'(t)^2 + f(t)f''(t)$, $t \in \mathbb{R}$. É fácil ver que $f''(t) = -2f(t)f'(t)^4$ e $\Psi'(t) = f'(t)^2 (1 - 2f(t)^2 f'(t)^2)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. De acordo com o Lema 1.1.1 (f_9) mencionamos que $\Psi'(t) > 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Assim, usando o Teorema do Valor Médio existem funções $\theta_n, \eta_n : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ de tal forma que

$$\Psi(v_n) - \Psi(v) = \Psi'(\theta_n)(v_n - v) \quad \text{no conjunto } [v_n > v], \quad (1-87)$$

e

$$\Psi(v_n) - \Psi(v) = \Psi'(\eta_n)(v_n - v) \quad \text{no conjunto } [v_n < v]. \quad (1-88)$$

Agora, levando em conta (1-87) e (1-88), inferimos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) (\Psi(v_n) - \Psi(v)) (v_n - v) dx &= \int_{A_n} \Psi'(\theta_n) V(x) (v_n - v)^2 dx \\ &+ \int_{B_n} \Psi'(\eta_n) V(x) (v_n - v)^2 dx \end{aligned} \quad (1-89)$$

onde $A_n := \mathbb{R}^N \cap [v_n > v]$ e $B_n := \mathbb{R}^N \cap [v_n < v]$. Note que $\Psi'(\theta_n)$ e $\Psi'(\eta_n)$ são ambos positivos, provando que

$$o_n(1) \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(v_n - v)|^2 dx.$$

Esta estimativa implica que $v_n \rightarrow v$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Neste momento resta provar que $v_n \rightarrow v$ em X com $n \rightarrow \infty$. Argumentado mais uma vez por contradição como foi feito na demonstração da Proposição 1.1.6 deduzimos que existe uma constante $C > 0$ de tal modo que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(v_n - v)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) (\Psi(v_n) - \Psi(v)) (v_n - v) dx \geq C \|v_n - v\|^2 \quad (1-90)$$

Aqui seguimos as mesmas ideias discutidas em [14] onde o mesmo argumento foi usado para provar (1-90) num ambiente de potenciais V limitados. Argumentando por contradição obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(v_n - v)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) (\Psi(v_n) - \Psi(v)) (v_n - v) dx \leq (1/n) \|v_n - v\|^2.$$

Defina a sequência normalizada $w_n = (v_n - v) / \|v_n - v\|$. Assim existe $w \in X$ tal que

$$\begin{cases} w_n \rightharpoonup w & \text{fracamente in } X, \\ w_n \rightarrow w & \text{fortemente em } L^q(\mathbb{R}^N), \\ w_n(x) \rightarrow w(x), & \text{q. t. p. em } \mathbb{R}^N, \\ |w_n(x)| \leq h_q(x), & h_q \in L^q(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

para qualquer $2 \leq q < 2^*$. Além disso, observemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \left(\frac{\Psi(v_n) - \Psi(v)}{\|v_n - v\|} \right) w_n dx \leq (1/n).$$

Em particular, deduzimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 dx = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \left(\frac{\Psi(v_n) - \Psi(v)}{\|v_n - v\|} \right) w_n dx = 0. \quad (1-91)$$

Portanto $\|w\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 dx = 0$ provando que $w \equiv 0$. Como $\|w_n\|^2 = 1$,

temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) w_n^2 dx = 1. \quad (1-92)$$

Segue de (1-91) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \left(\frac{\Psi(v_n) - \Psi(v)}{|v_n - v|} \right) w_n^2 dx = 0.$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} V(x) \Psi'(\theta_n) w_n^2 dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} V(x) \Psi'(\eta_n) w_n^2 dx = 0.$$

Neste momento, argumentamos da mesma forma que na Proposição 1.1.6. Novamente, usando a condição (V_3) , Teorema 4.1.4 e o Teorema 4.1.3, temos que $(w_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz a condição absolutamente uniformemente contínua da integral com respeito a medida $\mu = V(x)dx$. Agora, afirmamos que $(w_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções tight sobre $\mathbb{R}^N$ com respeito a medida μ . De fato, sejam $R > 0$, que será escolhido posteriormente, e $M > 0$ uma constante fixada. Novamente, enfatizamos que $\mathbb{R}^N \setminus B_R(0) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ onde $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0); V(x) \leq M\}$ e $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0); V(x) > M\}$. Seguindo as mesmas ideias usadas na demonstração da Proposição 1.1.6, temos que existe $R_\varepsilon > 0$ tal que escolhendo $R > R_\varepsilon$

$$\int_{\mathcal{A}} V(x) w_n^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{6}. \quad (1-93)$$

Note que podemos escrever $\mathcal{B} = (\mathcal{C}_n \cup \mathcal{D}_n) \cup (\mathcal{E}_n \cup \mathcal{F}_n)$ onde $\mathcal{C}_n = \{x \in \mathcal{B}; |\theta_n(x)| \leq k\} \cap A_n$, $\mathcal{D}_n = \{x \in \mathcal{B}; |\theta_n(x)| > k\} \cap A_n$, $\mathcal{E}_n = \{x \in \mathcal{B}; |\eta_n(x)| \leq k\} \cap B_n$ e $\mathcal{F}_n = \{x \in \mathcal{B}; |\eta_n(x)| \geq k\} \cap B_n$ com $k > 0$ escolhido posteriormente. A principal ideia aqui é estimar as integrais acima nos conjuntos $\mathcal{C}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_n, \mathcal{F}_n$. Não é difícil ver que existe $C(k) > 0$ tal que $\Psi'(\theta_n) \geq C(k)$ em $\mathcal{C}_n$. Como um subsequência, a última afirmação permite concluir que

$$\int_{\mathcal{C}_n} V(x) w_n^2 dx \leq (1/C(k)) \int_{A_n} V(x) \Psi'(\theta_n) w_n^2 dx = o_n(1).$$

A última afirmação implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq n_0$

$$\int_{\mathcal{C}_n} V(x) w_n^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{6}. \quad (1-94)$$

Agora consideraremos a integral no conjunto $\mathcal{D}_n$. Primeiramente, observamos que $\mathcal{D}_n$ tem medida de Lebesgue finita. De fato, usando que $|\theta_n(x)| \leq \max\{|v_n(x)|, |v(x)|\}$ q.t. p. $x \in A_n$, obtemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}_n| &\leq \frac{1}{Mk^2} \int_{\mathcal{D}_n} V(x) \theta_n^2 dx \leq \frac{1}{Mk^2} \int_{\mathcal{D}_n} V(x) \max\{|v_n|^2, |v|^2\} dx \\ &\leq \frac{2}{Mk^2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) (|v_n|^2 + |v|^2) dx \leq \frac{C}{Mk^2}. \end{aligned}$$

Aqui foi usado que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em X . Analogamente, usando a medida $\mu = V(x)dx$ obtemos que

$$\mu(\mathcal{D}_n) \leq \frac{C}{k^2} \quad (1-95)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando que $(w_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz a condição uniformemente absolutamente contínua da integral com respeito a medida μ , temos que dado $\varepsilon > 0$ existe δ_ε tal que

$$\int_{\mathcal{D}} V(x) w_n^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{6}$$

para todo conjunto μ - mensurável $\mathcal{D}$ tal que $\mu(\mathcal{D}) \leq \delta_\varepsilon$. Desta forma, escolhemos k de modo que $\mu(\mathcal{D}_n) \leq \delta_\varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, obtemos que

$$\int_{\mathcal{D}_n} V(x) w_n^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{6} \quad (1-96)$$

Aplicando as estimativas (1-94), (1-93) e (1-96), obtemos

$$\int_{C_n \cup \mathcal{D}_n} V(x) w_n^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad (1-97)$$

para todo $R > R_\varepsilon$ e $n \geq n_0$. Analogamente, mostramos que

$$\int_{E_n \cup \mathcal{F}_n} V(x) w_n^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad (1-98)$$

para todo $R > \widehat{R}_\varepsilon$ e $n \geq n_1$. Escolhendo, $R > \max\{R_\varepsilon, \widehat{R}_\varepsilon\}$ e $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, aplicando as estimativas (1-97) e (1-98), obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} V(x) w_n^2 dx = \int_{C_n \cup \mathcal{D}_n} V(x) w_n^2 dx + \int_{E_n \cup \mathcal{F}_n} V(x) w_n^2 dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Assim, $(w_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência tight sobre $\mathbb{R}^N$ com respeito a medida μ . Aplicando o Teorema Geral de Convergência de Vitali, Teorema 4.1.6, obtemos que

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) w_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n \rightarrow \infty} V(x) w_n^2 dx = 0.$$

Esta é uma contradição. Assim a estimativa dada em (1-90) está provada. Portanto, graças a (1-86) e (1-90) obtemos $\|v_n - v\|^2 \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$. Como uma consequência, qualquer sequência de Palais - Smale para J admite uma subsequência fortemente convergente em X . Assim encerramos a demonstração desta proposição. $\square$

Neste momento, consideramos o caso superlinear, assumindo que g é superlinear no infinito. A principal dificuldade está relacionada em mostrar que qualquer sequência de Palais Smale é limitada. Para contornar essa dificuldade usamos a conhecida condição

(AR) ao qual é uma condição crucial para este fim. Nosso próximo resultado é escrito da seguinte forma:

Proposição 1.3.5 *Suponha que V satisfaz $(V_1) - (V_2)$ e g satisfaz (g_2) , (G_0) , (g_∞) e (AR). Então o funcional J satisfaz a condição $(PS)_c$ para qualquer $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. É importante enfatizar que desde que estamos interessados em não linearidades subcríticas é suficiente mostrar que qualquer sequência $(PS)_c$ para o funcional J é limitada. A demonstração de que o funcional J satisfaz a condição $(PS)_c$ é análoga a feita na Proposição 1.3.4. Neste caso, mostremos que toda sequência de Palais-Smale associada ao funcional J é limitada. De fato, seja $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência $(PS)_c$ para o funcional J , então

$$J(v_n) \rightarrow c, \quad \|J'(v_n)\|_{X^*} \rightarrow 0. \quad (1-99)$$

Afirmamos que $\|f(v_n)/f'(v_n)\| \leq C_1 \|v_n\|$ para alguma constante $C_1 > 0$ e para qualquer $n \in \mathbb{N}$. De fato,

$$\left\| \frac{f(v_n)}{f'(v_n)} \right\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left| \nabla \left(\frac{f(v_n)}{f'(v_n)} \right) \right|^2 + V(x) \left(\frac{f(v_n)}{f'(v_n)} \right)^2 \right] dx. \quad (1-100)$$

Usando o fato que $f''(t) = -2f(t)f'(t)^4$ mencionamos que

$$\left(\frac{f(t)}{f'(t)} \right)' = \frac{f'(t)^2 - f(t)f''(t)}{f'(t)^2} = 1 + 2f(t)^2 f'(t)^2.$$

Como uma consequência, usando Lema 1.1.1 (f_9), obtemos

$$\left(\frac{f(t)}{f'(t)} \right)' \leq 2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

A última estimativa implica que

$$\nabla \left(\frac{f(v_n)}{f'(v_n)} \right) = [1 + 2f(v_n)^2 f'(v_n)^2] \nabla v_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1-101)$$

Usando (1-101) em (1-100) juntamente com o Lema 1.1.1 (f_3) deduzimos que

$$\left\| \frac{f(v_n)}{f'(v_n)} \right\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} [4|\nabla v_n|^2 + 5V(x)f^2(v_n)] dx \leq 5\|v_n\|^2.$$

Portanto a prova da afirmação está encerrada.

Neste momento, usando (1-101), observamos que

$$\left\langle J'(v_n), \frac{f(v_n)}{f'(v_n)} \right\rangle \leq 2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_n) dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v_n))f'(v_n) dx.$$

Neste caso, usando (1-99) e (1-101), obtemos que

$$\begin{aligned} C + o_n(1)\|v_n\| &\geq J(v_n) - \frac{1}{\theta} \left\langle J'(v_n), \frac{f(v_n)}{f'(v_n)} \right\rangle \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\theta} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) dx \\ &\quad + \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^N} [g(x, f(v_n)) f(v_n) - \theta G(x, f(v_n))] dx \end{aligned}$$

é satisfeita para alguma constante $C > 0$. Agora, invocando a condição de (AR) e usando o fato que $\theta > 4$, inferimos que

$$C + o_n(1)\|v_n\| \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\theta} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + V(x) f^2(v_n) dx. \quad (1-102)$$

Suponha que a menos de subsequência $\|v_n\| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Assim, aplicando o Lema 1.1.7, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, reescrevemos (1-102) como

$$C + o_n(1)\|v_n\| \geq C_1 \|v_n\|, \quad (1-103)$$

para alguma constante positiva $C_1 > 0$. Dividindo ambos os lados da desigualdade (1-103) por $\|v_n\|$ e usando o fato que $\|v_n\| \rightarrow \infty$ com $n \rightarrow \infty$, obtemos que $o_n(1) \geq C_1 > 0$. Esta última desigualdade é um absurdo. Portanto, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada. Assim, encerramos a demonstração dessa proposição. $\square$

1.4 A prova dos Principais Resultados

Demonstração. [Demonstração do Teorema 1.0.2] Inicialmente, usando a Proposição 1.2.2 e Proposição 1.3.4, observamos que o funcional J tem um Linking local na origem e J satisfaz a condição $(PS)_c$ para qualquer $c \in \mathbb{R}$. Além disso, usando a Proposição (1.3.3), mencionamos que J é limitado inferiormente e $\inf_X J < 0$. Agora tomando a condição (g_1) e o Lema 1.1.1 observamos que J aplica conjunto limitado em conjunto limitado. De fato, seja A um conjunto limitado em X . Em outras palavras, usando a condição de crescimento (g_1) , (1-6) e o Lema 1.1.1 (f_3) e (f_7) , temos que

$$G(x, f(v)) \leq \frac{1}{2} (a_1(x) + b_1(x)) v^2.$$

Como $a_1(x), b_1(x) \in L^\alpha$ com $\alpha > N/2$, temos da desigualdade de Hölder que existe uma constante $C_1 > 0$ que não depende de v tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v)) dx \leq C_1 \|v\|^2.$$

Usando a última estimativa e o Lema 1.1.1 (f_3), temos que

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x) f^2(v)) dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v)) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|v\|^2 + C_1 \|v\|^2. \end{aligned}$$

Usando que $\|v\| \leq C$ onde a constante C não depende de v , temos que

$$J(v) \leq (1/2 + C_1) C^2.$$

Portanto, existe uma constante $C_2 := (1/2 + C_1) C^2$ que não depende de v tal que $J(v) \leq C_2$ para todo $v \in A$. Assim encerramos a prova da afirmação.

Como uma consequência, levando em conta o Teorema 1.2.1, o funcional J admite ao menos dois pontos críticos não triviais. Consequentemente, usando a Proposição (1.1.3), o problema (1-1) tem ao menos duas soluções fracas não triviais. $\square$

Demonstração. [Demonstração do Teorema 1.0.3] Primeiramente, usando a Proposição 1.2.2, Observação 4 e a Proposição 1.3.5, o funcional energia J tem um Linking local na origem e satisfaz a condição $(PS)_c$ para qualquer $c \in \mathbb{R}$. De acordo com a Proposição 1.2.4 obtemos que $J(v) \rightarrow -\infty$ com $\|v\| \rightarrow +\infty$ para $v \in X_1 \oplus X_m^2$ onde definimos $X_m^2 = \text{span}\{\phi_{j+1}, \dots, \phi_{j+m}\}$, $m \in \mathbb{N}$. Aqui enfatizamos que $\dim(X_1 \oplus X_m^2) < \infty$ é satisfeita. Além disso, usando a condição de crescimento (g_2) , argumentamos como na demonstração do Teorema 1.0.2, mostramos que o funcional energia J aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados. Agora, aplicando o Teorema 1.2.3 obtemos que J possui ao menos um ponto crítico não trivial. Consequentemente aplicando a Proposição (1.1.3), o problema (1-1) admite ao menos uma solução fraca não trivial. $\square$

Equação de Schrödinger Quasilinear com Termo Subcrítico

Neste capítulo consideramos a existência de solução não trivial para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = \lambda q(x)u + \mu K(x)|u|^{p-2}u + h(x), & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (2-1)$$

onde $N \geq 3$ e $4 < p < 2 \cdot 2^*$. As funções V e K são contínuas e 1-periódicas nas variáveis $x_1, \dots, x_N$, $q \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha > N/2$ e $h \in L^{2N/(N+2)}(\mathbb{R}^N)$. Posteriormente apresentamos as hipóteses sobre as funções V , q , K , e h .

Nosso principal objetivo é provar existência de solução para a equação (2-1) para cada $h \in L^{2N/(N+2)}(\mathbb{R}^N)$. Inicialmente mostraremos que um dado funcional energia, que será definido posteriormente, possui uma geometria específica sobre conjuntos que possuem uma certa estrutura de Linking (ver Teorema 2.2.1). Neste caso consideraremos que o parâmetro λ possui uma interação com autovalores do problema linear com peso q dado por

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \lambda q(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (2-2)$$

No que segue, apresentamos algumas condições para o potencial V e a não linearidade $l(x, u) := \lambda q(x)u + \mu K(x)|u|^{p-2}u + h(x)$.

Consideraremos que o potencial V satisfaz a seguinte condição:

(V₁) V é contínuo, 1-periódico em $x_1, \dots, x_N$ e existem constantes positivas V_0, V_∞ , tais que $V_0 \leq V(x) \leq V_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Para a função q assumiremos a seguintes condições:

(q₁) $q \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha > N/2$ com $q(x) > 0$. Assuma que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} q(x - y_n)^\alpha dx = 0, \text{ uniformemente em } n \in \mathbb{N} \quad (2-3)$$

onde $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N$ satisfaz $|y_n| \rightarrow \infty$ com $n \rightarrow \infty$.

Para a função K , consideraremos a seguinte hipótese:

(K_1) K é contínuo e 1-periódico em $x_1, \dots, x_N$ e existe uma constante positiva k_0 tal que $K(x) \geq k_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Para a função h assumiremos que

(h_1) $h \in L^{2N/(N+2)}(\mathbb{R}^N)$.

Como mencionamos anteriormente, estamos interessados em buscar solução para o problema (2-1) usando métodos variacionais. Assim, pedimos que o parâmetro λ possua uma interação com autovalores com alta energia do problema linear (2-2), o qual admite uma sequência não decrescente de autovalores $(\lambda_k(q))_{k \in \mathbb{N}}$, onde o primeiro autovalor $\lambda_1(q)$ é positivo. Assim, assumiremos que existe $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$, tal que $\lambda_j(q) < \lambda < \lambda_{j+1}(q)$. Como neste capítulo não consideraremos um problema linear no infinito, denotaremos os autovalores $\lambda_k(q)$ simplesmente por λ_k , para todo $k \in \mathbb{N}$.

Neste momento, enunciamos o principal resultado deste capítulo:

Teorema 2.0.1 *Suponha que V , q , K e h satisfaz (V_1) , (q_1) , (K_1) e (h_1) , respectivamente. Suponha que exista $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 1$ tal que $\lambda_j < \lambda < \lambda_{j+1}$. Então existem $\mu_1 > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que para $\mu > \mu_1$ e $0 \leq \|h\|_{2N/(N+2)} < \varepsilon$ obtemos:*

- (i) o problema (2-1) possui ao menos uma solução fraca para cada $h \neq 0$,
- (ii) o problema (2-1) possui ao menos uma solução fraca não trivial para $h \equiv 0$.

Observação 5 *Enfatizamos que o Teorema 2.0.1 permite obter ao menos um solução não trivial para o problema (2-1), fazendo o potencial $V \equiv 1$. Mais precisamente obtemos solução para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + u - \Delta(u^2)u = \lambda q(x)u + \mu K(x)|u|^{p-2}u + h(x), & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (2-4)$$

No que segue apresentamos alguns exemplos de funções que cumprem as nossas hipóteses.

Exemplo 2.0.2 *Para o potencial V podemos escolher*

$$V(x) = V_0 + \sin^2(2\pi x_1) \sin^2(2\pi x_2) \dots \sin^2(2\pi x_N)$$

onde $V_0 > 0$. Evidentemente, temos que a função V satisfaz nossa hipótese (V_1) com $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) = V_0$ e $V_\infty = V_0 + 1$. Similarmente, escolhemos

$$K(x) = k_0 + \sin^2(2\pi x_1) \sin^2(2\pi x_2) \dots \sin^2(2\pi x_N)$$

onde $k_0 > 0$. Portanto K é uma função positiva e 1-periódica para cada x_i com $1 \leq i \leq N$. Assim K satisfaz nossa hipótese (K_1) para qualquer $k_0 > 0$. Além disso, escolhemos

$$q(x) = \frac{a_1}{(1 + a_2|x|^2)}$$

onde $a_1 > 0, a_2 > 0$. Portanto q está em $L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ para $\alpha > N/2$. Como uma consequência, usando a fórmula da coarea, temos que a função q satisfaz a hipótese (q_1) . De fato, usando a mudança de variável na integral, observamos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} q(x - y_n)^\alpha dx &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(-y_n)} q^\alpha(z) dz = \int_R^\infty \left[\int_{\partial B_r(-y_n)} q^\alpha(z) dS(z) \right] dr \\ &\leq c \int_R^\infty \frac{1}{(1 + r^2)^\alpha} r^{N-1} dr \leq c \int_R^\infty r^{(N-1-2\alpha)} dr \\ &= -c \frac{R^{(N-2\alpha)}}{(N-2\alpha)} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2-5)$$

com $R \rightarrow \infty$ uniformemente em $n \in \mathbb{N}$ onde $c > 0$ é uma constante.

Exemplo 2.0.3 Agora escolhemos $V(x) = a - \sin^2(2\pi x_1) \sin^2(2\pi x_2) \dots \sin^2(2\pi x_N)$ onde $a > 1$. Não é difícil ver que $V_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) = a - 1$ e $V_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) = a + 1$. De maneira análoga, definimos

$$K(x) = k_0 - \sin^2(2\pi x_1) \sin^2(2\pi x_2) \dots \sin^2(2\pi x_N)$$

onde $k_0 > 1$. Portanto as funções V e K são positivas 1-periódica para cada x_i com $1 \leq i \leq N$. Assim V e K satisfazem nossas hipóteses (V_1) e (K_1) , respectivamente. Aqui consideraremos

$$q(x) = a \exp(-\ell|x|^2), x \in \mathbb{R}^N$$

onde $a > 0$ e $\ell > 0$, é fácil ver que $q \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $\alpha > N/2$. Portanto, usando as mesmas ideias discutidas no exemplo anterior, a função q satisfaz a hipótese (q_1) . De fato, podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} q(x - y_n)^\alpha dx &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(-y_n)} q^\alpha(z) dz = \int_R^\infty \left[\int_{\partial B_r(-y_n)} q^\alpha(z) dS(z) \right] dr \\ &\leq c \int_R^\infty \exp(-\ell r^2) r^{N-1} dr \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2-6)$$

com $R \rightarrow \infty$ uniformemente em $n \in \mathbb{N}$ onde $c > 0$ é uma constante.

2.1 Preliminares e Formulação para o Problema (2-1)

Enfatizamos que estamos buscando solução para o problema (2-1) usando métodos variacionais. Denotaremos por E o espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$. E é um espaço de Hilbert munido com a norma

$$\|u\|_E := \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2) dx \right)^{1/2}$$

para todo $u \in E$. Logo, $(E, \|u\|_E)$ está imerso continuamente nos espaços de Lebesgue $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq s \leq 2^*$. Como $\mathbb{R}^N$ é um domínio não limitado, temos que essas imersões não são compactas. A condição (V_1) permite que a norma

$$\|u\|_V := \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx \right)^{1/2} \quad \text{para qualquer } u \in E$$

induzida pelo produto interno

$$\langle u, v \rangle_V := \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(x)uv) dx, \quad \text{para quaisquer } u, v \in E.$$

seja equivalente a norma usual $\|\cdot\|_E$. No que segue, denotaremos a norma $\|\cdot\|_V$ simplesmente por $\|\cdot\|$. É importante enfatizar que E munido da norma $\|\cdot\|$ é um espaço de Hilbert ao qual possui as imersões contínuas nos espaços de Lebesgue $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq s \leq 2^*$. Contudo, devido a equivalência entre as duas normas as imersões de $(E, \|\cdot\|)$ nos espaços de Lebesgue $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq s \leq 2^*$, tais imersões não são compactas. A hipótese sobre o potencial V não permite que possamos recuperar a compacidade para algum subespaço fechado de E . Porém a condição (q_1) garante que podemos obter imersão compacta do espaço E no espaço de Lebesgue com peso

$$L^2(\mathbb{R}^N, q) = \left\{ u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^N} q(x)|u|^2 dx < \infty \right\} \quad (2-7)$$

onde $q \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha > N/2$. Além disso, $L^2(\mathbb{R}^N, q)$ é um espaço de Banach munido com a norma

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N, q)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} q(x)|u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Mais precisamente, obtemos o seguinte resultado de compacidade.

Lema 2.1.1 *Seja $q \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ com $\alpha > N/2$ e $N \geq 3$. Então a imersão de E em $L^2(\mathbb{R}^N, q)$ é compacta.*

Demonstração. Primeiramente, notemos que a desigualdade de Hölder permite que

$$\int_{\mathbb{R}^N} q(x)u^2 dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |q(x)|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2\alpha'} dx \right)^{1/2\alpha'}.$$

Assim, usando que E está imerso continuamente em $L^{2\alpha'}(\mathbb{R}^N)$, obtemos que E está imerso continuamente em $L^2(\mathbb{R}^N, q)$.

Para mostrar que esta imersão é compacta é suficiente mostrar que se $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em E tal que $u_n \rightharpoonup 0$, então $u_n \rightarrow 0$ em $L^2(\mathbb{R}^N, q)$. Deste modo, podemos assumir que

$$u_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2_{loc}(\mathbb{R}^N, q) \text{ e } u_n(x) \rightarrow 0 \text{ q. t. p. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Seja $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq R\}$ a bola fechada em $\mathbb{R}^N$ com raio R centrada na origem. Como $q \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha > N/2$, dado $\bar{\varepsilon} > 0$ existe $R_{\bar{\varepsilon}} > 0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |q(x)|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} < \bar{\varepsilon}, \quad \text{para todo } R > R_{\bar{\varepsilon}}. \quad (2-8)$$

Desta forma, escolhendo $R > R_{\bar{\varepsilon}}$, escrevemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} q(x)u_n^2 dx = \int_{B_R} q(x)u_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} q(x)u_n^2 dx = o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} q(x)u_n^2 dx.$$

Usando a desigualdade de Hölder e (2-8), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} q(x)u_n^2 dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |q(x)|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |u_n|^{2\alpha'} dx \right)^{1/\alpha'} < \varepsilon.$$

onde ε não depende de n . Portanto

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} q(x)u_n^2 dx \leq \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, concluímos a prova deste lema. □

Relembremos que estamos considerando neste capítulo um problema em que a não linearidade interage com autovalores de alta energia do problema linear com peso (2-2). Neste caso, temos que $u = 0$ não é um mínimo local para o funcional energia associado ao problema 2-1, que será definido posteriormente. Novamente, consideraremos a

seguinte decomposição em soma direta para o espaço E

$$E = E_1 \oplus E_2$$

onde

$$E_1 := \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_j\} \quad \text{e} \quad E_2 := E_1^\perp. \quad (2-9)$$

Aqui as funções ϕ_k são autofunções do problema linear (2-2) associado aos autovalores λ_k . O primeiro autovalor λ_1 é caracterizado por

$$\lambda_1 := \inf_{u \in E \setminus \{0\}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx \mid \int_{\mathbb{R}^N} q(x)u^2 = 1 \right\}.$$

Adicionalmente, para cada $k \in \mathbb{N}$ com $k > 1$, caracterizamos λ_k por

$$\lambda_k := \inf_{u \in E \setminus \{0\}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx \mid \int_{\mathbb{R}^N} q(x)u^2 = 1 \quad \text{e} \quad \langle u, \phi_i \rangle_E = 0 \quad \forall i \in I_{k-1} \right\},$$

onde $I_{k-1} = \{1, 2, \dots, k-1\}$. Consequentemente, obtemos as seguintes desigualdades variacionais, que serão ferramentas fundamentais para mostrarmos que o funcional energia associado ao problema (2-1) satisfaz algumas condições geométricas.

Lema 2.1.2 *Suponha que (V_1) e (q_1) são satisfeitas. Então*

(i) *Para todo $u \in E$ têm-se que*

$$\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} q(x)u^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx. \quad (2-10)$$

(ii) *Para todo $u \in E_1$, têm-se que*

$$\lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} q(x)u^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx. \quad (2-11)$$

(iii) *Para todo $u \in E_2$ têm-se que*

$$\lambda_{j+1} \int_{\mathbb{R}^N} q(x)u^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx. \quad (2-12)$$

Relembremos que uma solução fraca para o problema (2-1) é uma função $u \in E \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$ que satisfaz a seguinte identidade

$$\int_{\mathbb{R}^N} [(1 + 2u^2) \nabla u \nabla \phi + 2u |\nabla u|^2 \phi + V(x)u\phi] dx = \int_{\mathbb{R}^N} l(x, u)\phi dx \quad (2-13)$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, com $l(x, u) = \lambda q(x)u + \mu K(x)|u|^{p-2}u + h(x)$. Motivados na equa-

ção (2-13) obtemos o seguinte funcional energia.

$$\begin{aligned} I_\mu(u) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2u^2) |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) u^2 dx - \frac{\mu}{p} \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u dx. \end{aligned} \quad (2-14)$$

Destacamos que pontos críticos do funcional I_μ são soluções fracas do problema (2-1). Contudo, nos deparamos com a mesma dificuldade destacada para o funcional (1-30) dado no Capítulo 1. Assim, usando a mudança de variável (1-31), obtemos o funcional modificado

$$\begin{aligned} J_\mu(v) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x) f^2(v)) dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) f^2(v) dx \\ &\quad - \frac{\mu}{p} \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |f(v)|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) f(v) dx. \end{aligned} \quad (2-15)$$

Novamente, temos que o funcional J_μ é bem definido no espaço E ao qual é de classe C^1 . No entanto, pontos críticos desse funcional são soluções fracas do problema semilinear

$$\begin{cases} -\Delta v + V(x) f(v) f'(v) = \lambda q(x) f(v) f'(v) + \mu K(x) |f(v)|^{p-2} f(v) f'(v) + h(x) f'(v), & x \in \mathbb{R}^N, \\ v \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (2-16)$$

Portanto, se $v \in E \cap C^2(\mathbb{R}^N)$ é um ponto crítico do funcional J_μ então a função $u = f(v)$ é uma solução clássica do problema (2-1). Argumentando da mesma forma que no Capítulo 1, na demonstração da Proposição 1.1.3, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 2.1.3 *Se $v \in E \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca do problema (2-16), então $u = f(v)$ é uma solução fraca do problema (2-1).*

Usando a Proposição 2.1.3, temos que buscar soluções não triviais para o problema (2-1) passa pelo estudo de existência de soluções não triviais do problema auxiliar (2-16).

A mudança de variável f dada em (1-31) no Capítulo 1, satisfaz as propriedades listadas no Lema 1.1.1. Contudo, neste capítulo precisaremos destacar uma propriedade da função f . Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Lema 2.1.4 *A função f satisfaz a seguinte propriedade*

$$(f_{12}) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|^p}{t^2} \rightarrow \infty \text{ para qualquer } p > 4.$$

Demonstração. Para demonstrar essa propriedade, assumimos sem perda de generalidade, assumir que $t > 1$. Portanto, levando em conta Lema 1.1.1 (f_8) mencionamos que

$$\frac{|f(t)|^p}{t^2} \geq k|t|^{(p-4)/2} \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad t \rightarrow +\infty.$$

Assim encerramos a demonstração. $\square$

2.2 A Geometria do Funcional Energia

Nesta seção, demonstraremos que o funcional J_μ definido na seção anterior satisfaz a geometria de Linking introduzida em [47]. Neste contexto, referimos ao leitor o interessante trabalho [53] ao qual o autor apresenta um Teorema de Linking abstrato, onde o funcional energia apresenta as mesmas condições geométricas do Teorema abstrato usado neste capítulo. Contudo, para aplicarmos o resultado abstrato apresentado em [53], devemos mostrar que o funcional energia satisfaz a condição (PS) , dada na Definição 1.3.2. No entanto, não sabemos se o funcional J_μ satisfaz a condição (PS) . Por este motivo, seguindo as mesmas ideias usadas em [54], necessitamos usar um Teorema Abstrato ao qual a condição (PS) não seja requerida.

Relembremos primeiramente alguns conceitos relacionados a estrutura de Linking que utilizaremos posteriormente. Seja E um espaço de Banach munido com a norma $\|\cdot\|$. Agora apresentamos o conjunto Φ de aplicações $\Gamma \in C([0, 1] \times E, E)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- i) A função $x \rightarrow \Gamma(t, x) := \Gamma(t)$ é um homeomorfismo de E em E para cada $t \in [0, 1]$ e $\Gamma^{-1}(t, x)$ é contínua sobre $E \times [0, 1]$,
- ii) $\Gamma(0, x) = \Gamma(0) = I$, $x \in E$,
- iii) para cada $\Gamma(t) \in \Phi$ existe $x_0 \in E$ tal que $\Gamma(1, x) = x_0$ para todo $x \in E$. Além disso, $\Gamma(t, x) \rightarrow x_0$ com $t \rightarrow 1$ uniformemente sobre conjuntos limitados de E .

Definição 2.2.1 *Existe um Linking entre subconjuntos $A, B \subset E$ se $A \cap B = \emptyset$ e, para cada $\Gamma \in \Phi$, existe um $t \in (0, 1]$ tal que $\Gamma(t, A) \cap B \neq \emptyset$.*

Teorema 2.2.2 (Teorema de Linking Geral 2.1.1 [47]) *Seja $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 . Sejam A, B subconjuntos de E tais que existe um Linking entre A e B . Suponha que*

$$a_0 := \sup_A J < b_0 := \inf_B J.$$

Suponha que

$$c := \inf_{\Gamma \in \Phi} \sup_{s \in [0, 1], u \in A} J(\Gamma(s, u)) \tag{2-17}$$

é finito. Então existe uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ tal que

$$J(u_n) \rightarrow c \text{ e } J'(u_n) \rightarrow 0. \tag{2-18}$$

Como uma aplicação deste Teorema, consideremos o seguinte Teorema de Linking.

Teorema 2.2.3 (Teorema de Linking 2.7.3 [47]) *Seja $E = E_1 \oplus E_2$ um espaço de Banach real com E_1 um subespaço de dimensão finita. Suponha que $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz as seguintes condições geométricas:*

$$(J_1) \quad J(v) \leq \sigma \text{ para todo } v \in E_1.$$

$$(J_2) \quad \text{Existe } \rho > 0 \text{ tal que}$$

$$J(v) \geq \sigma, \quad \forall v \in \partial B_\rho(0) \cap E_2$$

$$(J_3) \quad \text{Existe } e \in \partial B_1(0) \cap E_2 \text{ e } \beta_R \in \mathbb{R} \text{ tal que}$$

$$J(v) \leq \beta_R, \quad \forall v \in (E_1 \oplus \mathbb{R}^+ e) \cap \partial B_R(0), \quad R > R_0 > \rho.$$

Note que $E_1 \oplus \mathbb{R}^+ e = \{u = v + te \in E_1 \oplus \mathbb{R}e \mid v \in E_1, t \geq 0\}$. Se $\beta_R/R^{\gamma+1} \rightarrow 0$ com $R \rightarrow \infty$, para algum $\gamma \geq 0$, então existe uma sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ tal que

$$J(v_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad J'(v_n) \rightarrow 0.$$

Relembremos que o nível minimax $c > 0$ é dado por

$$c := \inf_{\Gamma \in \Phi} \sup_{s \in [0,1], u \in \partial Q_R} J(\Gamma(s, u)) < +\infty$$

onde $Q_R := (E_1 \oplus \mathbb{R}^+ e) \cap B_R(0)$.

No que segue, vamos mostrar que a geometria requerida por um funcional J no Teorema 2.2.3 é satisfeita por nosso funcional J_μ , se colocarmos condições adicionais a $\|h\|_{2N/(N+2)}$ e sobre o parâmetro μ . É importante enfatizar que a mudança de variável f implica em algumas dificuldades quando vamos provar condições geométricas para o funcional J_μ restritos a cada subespaço E_1 e E_2 . De fato, não é conhecido se E_1 e E_2 são invariantes na aplicação da mudança de variável f , isto é, não sabemos se para qualquer $v \in E_1$, tem-se que $f(v) \in E_1$ ou para qualquer $v \in E_2$, tem-se que $f(v) \in E_2$.

Proposição 2.2.4 *Suponha que (V_1) , (q_1) , (K_1) e (h_1) são satisfeitas. Suponha que existe $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 1$ tal que $\lambda_j < \lambda < \lambda_{j+1}$. Então existem ρ , σ e ε_1 , ambos positivos, tais que $J_\mu(v) \geq \sigma > 0$ para todo $v \in \partial B_\rho \cap E_2$ desde que $\|h\|_{2N/(N+2)} < \varepsilon_1$.*

Demonstração. Considere o funcional

$$\widehat{J}_\mu(v) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)f^2(v)) dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x)f^2(v) dx - \frac{\mu}{p} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v)|^p dx. \quad (2-19)$$

Assim, escrevemos

$$J_\mu(v) := \widehat{J}_\mu(v) - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)f(v)dx. \quad (2-20)$$

Agora, afirmamos que existem $\widehat{\rho} > 0$ e $\widehat{\beta} > 0$ de tal forma que

$$\widehat{J}_\mu(v) \geq \widehat{\beta}\|v\|^2 \quad \forall v \in \partial B_{\widehat{\rho}} \cap E_2. \quad (2-21)$$

De fato, argumentando por contradição, temos para cada $n \in \mathbb{N}$ escolhendo $\widehat{\rho} = 1/n$, encontramos uma sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E_2$ com $\|v_n\| \leq 1/n$ e

$$\widehat{J}_\mu(v_n) \leq \frac{1}{n}\|v_n\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2-22)$$

A sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortemente para zero em E com $n \rightarrow \infty$. Como E está imerso continuamente em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $s \in [2, 2^*]$, $v_n \rightarrow 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq s \leq 2^*$ com $n \rightarrow \infty$. De (2-22), temos que

$$\frac{1}{n}\|v_n\|^2 \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^2 + V(x)f^2(v_n)) dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x)f^2(v_n)dx - \frac{\mu}{p} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n)|^p dx. \quad (2-23)$$

Defina $w_n = v_n/\|v_n\|$, devido as imersões locais de E em $L_{loc}^s(\mathbb{R}^N)$, a menos de uma subsequência

$$\begin{cases} w_n \rightharpoonup w & \text{fracamente em } E_2, \\ w_n \rightarrow w & \text{fortemente em } L_{loc}^s(\mathbb{R}^N), \\ w_n(x) \rightarrow w(x), & \text{q. t. p. em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

para qualquer $1 \leq s < 2^*$ com $n \rightarrow \infty$.

Dividindo a desigualdade (2-23) por $\|v_n\|^2$ e usando a condição (K_1) , temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + V(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 \right) dx \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx - \frac{\mu}{p} \|K\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(v_n)|^p}{v_n^2} w_n^2 dx. \end{aligned}$$

Como uma consequência obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx &+ \\ \frac{\mu}{p} \|K\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(v_n)|^p}{v_n^2} w_n^2 dx &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + V(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Agora, afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(v_n)|^l}{v_n^2} w_n^2 dx \rightarrow 0 \quad (2-24)$$

com $n \rightarrow \infty$, para $4 < l \leq 2 \cdot 2^*$. De fato, aplicando o Lema 1.1.1 (f_7) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(v_n)|^l}{v_n^2} w_n^2 dx \leq 2^{l/2} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{(l-4)/2} w_n^2 dx$$

Note que, $|v_n|^{(l-4)/2} \in L^r(\mathbb{R}^N)$ para $r = l/(l-4)$. Segue da desigualdade de Hölder que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{(l-4)/2} w_n^2 dx \leq \|v_n\|_{l/2}^{(l-4)/2} \|w_n\|_{l/2}^2 \rightarrow 0,$$

com $n \rightarrow \infty$, uma vez que $v_n \rightarrow 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $s \in [2, 2^*]$ e $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Assim a prova da afirmação (2-24) está concluída.

Neste momento, usando (2-24) para $l = p$ e usando o Lema 1.1.1 (f_3) temos

$$o_n(1) + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) w_n^2 dx + o_n(1) \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + V(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 \right) dx.$$

Aplicando o Lema 2.1.2 - (2-12), e usando o fato de que a sequência $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é normalizada, temos que

$$\frac{\lambda}{\lambda_{j+1}} + o_n(1) \geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + V(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 \right) dx = 1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \left(\frac{f^2(v_n)}{v_n^2} - 1 \right) w_n^2 dx. \quad (2-25)$$

Afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) \left(\frac{f^2(v_n)}{v_n^2} - 1 \right) w_n^2 dx = o_n(1) \quad (2-26)$$

Assumindo que (2-26) é verdadeira, e fazendo $n \rightarrow \infty$ em (2-25) obtemos $\lambda \geq \lambda_{j+1}$ e isto contraria a hipótese sobre λ . Portanto, a afirmação (2-21) é verdadeira.

Resta agora somente provar a afirmação (2-26). Neste momento, fixe $\delta_1 > 0$, escrevemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) \left(\frac{f^2(v_n)}{v_n^2} - 1 \right) w_n^2 dx = \int_{A_n} V(x) \left(\frac{f^2(v_n)}{v_n^2} - 1 \right) w_n^2 dx + \int_{B_n} V(x) \left(\frac{f^2(v_n)}{v_n^2} - 1 \right) w_n^2 dx \quad (2-27)$$

onde $A_n := \{x \in \mathbb{R}^N \mid |v_n(x)| \leq \delta_1\}$ e $B_n := \{x \in \mathbb{R}^N \mid |v_n(x)| > \delta_1\}$. Portanto, mostraremos que cada uma das integrais acima tendem a zero com $n \rightarrow \infty$. Relembremos primeiramente que o Lema 1.1.1 (f_4) nos diz que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(t)}{t} - 1 \right| \leq \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad |t| \leq \delta.$$

Fazendo $\delta_1 = \delta$, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_n} V(x) \left(\frac{f^2(v_n)}{v_n^2} - 1 \right) w_n^2 dx \right| &\leq V_\infty \int_{A_n} \left| \left(\frac{f^2(v_n)}{v_n^2} - 1 \right) \right| w_n^2 dx \\ &\leq \varepsilon V_\infty \int_{A_n} w_n^2 dx \leq \varepsilon V_\infty \int_{\mathbb{R}^N} w_n^2 dx. \end{aligned}$$

Note que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, temos que existe uma constante positiva C tal que

$$\left| \int_{A_n} V(x) \left(\frac{f^2(v_n)}{v_n^2} - 1 \right) w_n^2 dx \right| \leq C\varepsilon$$

Para estimar a integral sobre B_n , afirmamos que

$$|B_n| = o_n(1). \quad (2-28)$$

De fato, como $v_n \rightarrow 0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$|B_n| = \int_{B_n} 1 dx = \frac{1}{\delta_1^2} \int_{B_n} \delta_1^2 dx \leq \frac{1}{\delta_1^2} \int_{B_n} |v_n|^2 dx \rightarrow 0$$

com $n \rightarrow \infty$. Assim, usando a condição (V_1) e o Lema 1.1.1 (f_3) , podemos estimar a integral sobre B_n como segue

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_n} V(x) \left(\frac{f^2(v_n)}{v_n^2} - 1 \right) w_n^2 dx \right| &\leq \int_{B_n} |V(x) \left(\frac{f^2(v_n)}{v_n^2} - 1 \right) w_n^2| dx \\ &\leq 2V_\infty \int_{B_n} w_n^2 dx \\ &= 2V_\infty \int_{B_n} 1 \cdot w_n^2 dx. \end{aligned}$$

Escolhendo $r = 2^*/2$, temos da desigualdade de Hölder e por (2-28) que

$$\int_{B_n} 1 \cdot w_n^2 dx \leq |B_n|^{1/r'} \left(\int_{B_n} w_n^{2^*} dx \right)^{2/2^*} \rightarrow 0$$

com $n \rightarrow \infty$. Como uma consequência temos

$$\int_{B_n} V(x) \left(\frac{f^2(v_n)}{v_n^2} - 1 \right) w_n^2 dx \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Dessas estimativas sobre A_n e B_n , temos por (2-27) que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \left(\frac{f^2(v_n)}{v_n^2} - 1 \right) w_n^2 dx \leq C\varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, concluímos a prova da afirmação (2-26).

Assim, para todo $v \in E_2$ com $\|v\| \leq \widehat{\rho}$, temos em (2-20) que

$$J_\mu(v) \geq \widehat{\beta}\|v\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)f(v)dx.$$

Usando o Lema 1.1.1 (f_3), (h_1) e a desigualdade de Hölder

$$J_\mu(v) \geq \widehat{\beta}\|v\|^2 - \|h\|_{2N/(N+2)}\|v\|_{2^*}.$$

Usando a melhor constante da imersão de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$J_\mu(v) \geq \widehat{\beta}\|v\|^2 - S^{-1}\|h\|_{2N/(N+2)}\|v\|.$$

Fazendo $\|v\| = \widehat{\rho}$, temos que

$$J_\mu(v) \geq \widehat{\beta}\widehat{\rho}^2 - S^{-1}\|h\|_{2N/(N+2)}\widehat{\rho} = \widehat{\rho} \left(\widehat{\beta}\widehat{\rho} - S^{-1}\|h\|_{2N/(N+2)} \right).$$

Assim, $J_\mu(v) \geq \widehat{\beta}\widehat{\rho}^2/2$ desde que

$$\widehat{\beta}\widehat{\rho} - S^{-1}\|h\|_{2N/(N+2)} \geq \frac{\widehat{\beta}\widehat{\rho}}{2},$$

ou seja, $\|h\|_{2N/(N+2)} \leq S\widehat{\beta}\widehat{\rho}/2$. Neste caso, escolhemos $\rho = \widehat{\rho}$, $\sigma = \widehat{\beta}\widehat{\rho}^2/2$ e $\varepsilon_1 = S\widehat{\beta}\rho/2$.

Assim encerramos a demonstração da Proposição. $\square$

Proposição 2.2.5 *Suponha que (V_1) , (q_1) , (K_1) e (h_1) são satisfeitas. Suponha que existe $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 1$ tal que $\lambda_j < \lambda < \lambda_{j+1}$. Então existem $\mu_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$ tal que $J_\mu(v) \leq \sigma$ para todo $v \in E_1$, desde que $\mu > \mu_1$ e $\|h\|_{2N/(N+2)} < \varepsilon_2$, com σ dado pela Proposição 2.2.4.*

Demonstração. Novamente, considere o funcional $\widehat{J}_\mu(v)$ definido em (2-19). Afirmamos que existe $\theta > 0$ tal que

$$\widehat{J}_\mu(v) \leq -\theta\|v\|^2 \quad \forall v \in E_1 \quad (2-29)$$

Novamente, a prova segue usando um argumento de contradição.

Suponha que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ positivo, existe $v \in E_1$ tal que $\widehat{J}_\mu(v) \geq -\alpha\|v\|^2$. Então, escolhendo $\alpha = 1/n$ com $n \in \mathbb{N}$, obtemos uma sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\widehat{J}_\mu(v_n) \geq -\frac{1}{n}\|v_n\|^2, \quad (2-30)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste momento, consideremos os seguintes casos:

Caso 1: $\|v_n\| \leq 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $v_n \rightarrow 0$ em E_1 com $n \rightarrow \infty$.

Caso 2: A menos de subsequência $\|v_n\| \rightarrow +\infty$ com $n \rightarrow \infty$.

Caso 3: Existe, $\delta > 0$ e $M > 0$ tal que $\delta \leq \|v_n\| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Suponha que o primeiro caso ocorra. Portanto, $v_n \rightarrow 0$ em E . Usando (2-30), temos

$$-\frac{1}{n}\|v_n\|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^2 + V(x)f^2(v_n)) dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x)f^2(v_n) dx - \frac{\mu}{p} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n)|^p dx.$$

Usando a condição (K_1) e dividindo por $\|v_n\|^2$, temos

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + V(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 \right) dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx,$$

em que $w_n = v_n/\|v_n\|$. Como E_1 é de dimensão finita, $w_n \rightarrow w$ em E_1 e $w \neq 0$. Usando Lema 1.1.1 (f_3), obtemos

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx. \quad (2-31)$$

Usando a convergência forte, imersão do espaço E nos espaços de Lebesgue $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $s \in [2, 2^*]$ e o fato que w é não nulo, obtemos do Lema 1.1.1 (f_4) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} q(x) w^2 dx. \quad (2-32)$$

Passando o limite em (2-31) e usando (2-32), obtemos

$$0 \leq \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) w^2 dx.$$

Aplicando o Lema 2.1.2 - (2-11) e usando que $\|w\| = 1$, obtemos que $\lambda \leq \lambda_j$. Contudo, isto contraria a hipótese sobre λ . Portanto, o primeiro caso não pode ocorrer.

Suponhamos agora que o segundo caso ocorre, então a menos de uma subsequência, $\|v_n\| \rightarrow \infty$ com $n \rightarrow \infty$. Defina $w_n = v_n/\|v_n\|$. Então, a menos de subsequência,

$$\begin{cases} w_n \rightarrow w & \text{fortemente em } E_1, w \neq 0, \\ w_n \rightarrow w & \text{fortemente em } L^s(\mathbb{R}^N), \\ w_n(x) \rightarrow w(x), & \text{q. t. p. em } \mathbb{R}^N, \\ |w_n(x)| \leq h_s(x), & h_s \in L^s(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (2-33)$$

para qualquer $2 \leq s \leq 2^*$ e $n \rightarrow \infty$. Usando um argumento análogo ao primeiro caso,

escrevemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n} &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + V(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 \right) dx \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx - \frac{\mu}{p} \int_{\mathbb{R}^N} K(x) \frac{|f(v_n)|^p}{v_n^2} w_n^2 dx. \end{aligned}$$

Aplicando as condições (q_1) , (K_1) e Lema 1.1.1 (f_3) , temos

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} - \frac{\mu}{p} k_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(v_n)|^p}{v_n^2} w_n^2 dx.$$

Portanto temos que

$$\frac{\mu}{p} k_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(v_n)|^p}{v_n^2} w_n^2 dx \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \quad (2-34)$$

Por (2-33), $|[w \neq 0]| > 0$, onde $[w \neq 0] = \{x \in \mathbb{R}^N | w(x) \neq 0\}$. Assim, $|v_n(x)| \rightarrow +\infty$ q. t. p. $x \in [w \neq 0]$ com $n \rightarrow \infty$. Aplicando o Lema de Fatou sobre $[w \neq 0]$ em (2-34) e usando Lema 2.1.4 (f_{12}) , obtemos $\infty \leq 1/2$, ao qual é um absurdo. Portanto, o segundo caso não pode ocorrer.

Neste estágio sabemos que os casos 1 e 2 são impossíveis. Logo, necessariamente temos que o caso 3 deve ocorrer. Assim, existe $v \in E_1$ tal que, a menos de uma subsequência

$$\begin{cases} v_n \rightarrow v & \text{fortemente em } E_1, \delta \leq \|v\| \leq M, \\ v_n \rightarrow v & \text{fortemente em } L^s(\mathbb{R}^N), \\ v_n(x) \rightarrow v(x), & \text{q. t. p. em } \mathbb{R}^N, \\ |v_n(x)| \leq h_s(x), & h_s \in L^s(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (2-35)$$

para qualquer $2 \leq s \leq 2^*$.

Analogamente ao primeiro caso, escrevemos

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + V(x) \frac{f^2(v_n)}{\|v_n\|^2} \right) dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) \frac{f^2(v_n)}{\|v_n\|^2} dx - \frac{\mu}{p} \int_{\mathbb{R}^N} K(x) \frac{|f(v_n)|^p}{\|v_n\|^2} dx.$$

onde, $w_n = v_n / \|v_n\|$. Usando Lema 1.1.1 (f_3) e as condições (q_1) e (K_1) , obtemos

$$\frac{\mu}{p} k_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(v_n)|^p}{\|v_n\|^2} dx \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}. \quad (2-36)$$

Passando o limite em (2-36), usando (2-35) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\frac{\mu}{p} k_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(v)|^p}{\|v\|^2} dx \leq \frac{1}{2}. \quad (2-37)$$

Como $\delta \leq \|v\| \leq M$, podemos reescrever (2-37) como

$$\mu \frac{k_0 \delta^{p-2}}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{|f(v)|}{|v|} \right]^p |w|^p dx \leq \frac{1}{2}, \quad (2-38)$$

onde $w = v/\|v\|$. Como $\dim(E_1) < \infty$, temos que existem constantes positivas C_1, C_2 tais que

$$C_1 \|v\|_\infty \leq \|v\| \leq C_2 \|v\|_\infty$$

para todo $v \in E_1$. Usando o Lema 1.1.1 (f_6), mostramos que $f(t)/t$ monótona não crescente para $t > 0$. Portanto, obtemos

$$\frac{f(|v|)}{|v|} \geq \frac{f(\|v\|_\infty)}{\|v\|_\infty} \geq \frac{f(\widehat{\delta})}{\widehat{\delta}}, \quad \widehat{\delta} := M/C_1 \quad (2-39)$$

Usando a estimativa (2-39) em (2-38), temos

$$\mu \frac{k_0 \delta^{p-2}}{p} \left[\frac{f(\widehat{\delta})}{\widehat{\delta}} \right]^p \|w\|_p^p \leq \frac{1}{2}.$$

Neste estágio, como $\|w\| = 1$ e devido ao fato que as normas $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes em E_1 , uma vez que E_1 é de dimensão finita, podemos reescrever a última estimativa como segue

$$\mu \frac{k_0 c_1 \delta^{p-2}}{p} \left[\frac{f(\widehat{\delta})}{\widehat{\delta}} \right]^p \leq \frac{1}{2}$$

onde $c_1 > 0$. A última afirmação nos diz que

$$\mu \leq \frac{p}{2k_0 c_1 \delta^{p-2}} \left[\frac{f(\widehat{\delta})}{\widehat{\delta}} \right]^{-p}. \quad (2-40)$$

Defina a constante positiva

$$\mu_1 = \frac{p}{2k_0 c_1 \delta^{p-2}} \left[\frac{f(\widehat{\delta})}{\widehat{\delta}} \right]^{-p}.$$

Desta forma, temos uma contradição com (2-40) para cada $\mu > \mu_1$. Como uma consequência a afirmação feita em (2-29) é verdadeira desde que $\mu > \mu_1$. Note que,

$$J_\mu(v) = \widehat{J}_\mu(v) - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)f(v)dx$$

obtendo que para $\mu > \mu_1$ e $v \in E_1$

$$J_\mu(v) \leq -\theta \|v\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)f(v)dx.$$

Usando a desigualdade de Hölder, Lema 1.1.1 (f_3), (h_1) e a imersão de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$J_\mu(v) \leq -\theta \|v\|^2 + S^{-1} \|h\|_{2N/(N+2)} \|v\|$$

Defina $g(t) = -\theta t^2 + S^{-1} \|h\|_{2N/(N+2)} t$. Então $g(t)$ atinge o valor máximo para

$$t_{\max} = \frac{S^{-1} \|h\|_{2N/(N+2)}}{2\theta}.$$

Desta forma, temos que

$$J_\mu(v) \leq \frac{S^{-2} \|h\|_{2N/(N+2)}^2}{4\theta} \leq \sigma$$

desde que $\|h\|_{2N/(N+2)} \leq 2S\sqrt{\sigma\theta}$. Portanto, $J_\mu(v) \leq \sigma$, desde que $\|h\|_{2N/(N+2)} \leq \varepsilon_2$ com $\varepsilon_2 = 2S\sqrt{\sigma\theta}$ e $\mu > \mu_1$. □

Proposição 2.2.6 *Suponha que (V_1) , (q_1) , (K_1) e (h_1) são satisfeitas. Seja Q um subespaço de dimensão finita de E . Então existe $R > 0$, dependendo de $\dim(Q)$, tal que $J_\mu(v) \leq 0$ para todo $v \in Q$ com $\|v\| \geq R$.*

Demonstração. Suponhamos que o resultado seja falso. Portanto, para cada $v \in Q$ existe $R_v > 0$ tal que $J_\mu(v) > 0$, com $\|v\| > R_v$. Desta forma, existe uma sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\|v_n\| > n$ e $J_\mu(v_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, temos

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^2 + V(x)f^2(v_n)) dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x)f^2(v_n) dx \\ &\quad - \frac{\mu}{p} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n)|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)f(v_n) dx. \end{aligned}$$

Usando Lema 1.1.1 (f_3) e as condições (q_1) e (K_1) , temos

$$0 < \frac{1}{2} \|v_n\|^2 - \frac{\mu}{p} k_0 \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)f(v_n) dx. \quad (2-41)$$

Aplicando a condição (h_1) , Lema 1.1.1 (f_3), desigualdade de Hölder e a imersão de

$D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, temos que existe uma constante C tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)f(v_n)dx \leq C\|v_n\|.$$

Usando essa estimativa em (2-41), temos

$$0 < \frac{1}{2}\|v_n\|^2 - \frac{\mu}{p}k_0 \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^p dx + C\|v_n\|. \quad (2-42)$$

A sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que, $\|v_n\| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Assim, defina $w_n = v_n/\|v_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que, a menos de uma subsequência, as seguintes afirmações

$$\begin{cases} w_n \rightarrow w \neq 0 & \text{fortemente em } Q, \\ w_n \rightarrow w & \text{fortemente em } L^s(\mathbb{R}^N), \\ w_n(x) \rightarrow w(x), & \text{q. t. p. em } \mathbb{R}^N, \\ |w_n(x)| \leq h_s(x), & h_s \in L^s(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (2-43)$$

para qualquer $2 \leq s \leq 2^*$.

Dividindo a desigualdade (2-42) por $\|v_n\|^2$, obtemos a seguinte estimativa

$$0 < \frac{1}{2} - \frac{\mu}{p}k_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(v_n)|^p}{v_n^2} w_n^2 dx + o_n(1).$$

Por (2-43), temos que $||[w \neq 0]| > 0$. Assim, $|v_n(x)| \rightarrow +\infty$, q. t. p. $x \in [w \neq 0]$ com $n \rightarrow \infty$.

Usando isto, Lema 1.1.1 (f_{10}) e o Lema de Fatou, temos que

$$\begin{aligned} 0 &< \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{p}k_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(v_n)|^p}{v_n^2} w_n^2 dx + o_n(1) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu}{p}k_0 \int_{[w \neq 0]} \frac{|f(v_n)|^p}{v_n^2} w_n^2 dx + \lim_{n \rightarrow \infty} o_n(1) \\ &= \frac{1}{2} - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu}{p}k_0 \int_{[w \neq 0]} \frac{|f(v_n)|^p}{v_n^2} w_n^2 dx = -\infty \end{aligned}$$

o qual nos mostra uma contradição. Portanto, a suposição feita inicialmente é falsa. Assim, existe $R > 0$ tal que $J_\mu(v) \leq 0$ para todo $v \in Q$ com $\|v\| \geq R$. $\square$

Como uma consequência da Proposição 2.2.6 obtemos o seguinte resultado.

Corolário 2.2.7 *Suponha que (V_1) , (q_1) , (K_1) e (h_1) são satisfeitas. Seja Q um subespaço de dimensão finita de E . Então existe $R > \rho$, dependendo de $\dim(Q)$, tal que $\sup J_\mu(\partial Q_R) \leq 0$ onde $\rho > 0$ é obtido na Proposição 2.2.4 e $Q_R := \{v \in Q \mid \|v\| \leq R\}$.*

Observação 6 Considerando o subespaço $\tilde{Q} := E_1 \oplus \mathbb{R}e \subset E$, De acordo com a Proposição 2.2.6, existe $R_0 > 0$ tal que $J_\mu(v) \leq 0$ para todo $v \in \tilde{Q}$ com $\|v\| \geq R_0$. Aplicando o Corolário 2.2.7, R_0 pode ser tomado maior do que ρ . Defina $Q := E_1 \oplus \mathbb{R}_+e$ e $Q_R = Q \cap B_R(0)$ com $R > R_0$, temos da Definição 2.2.1 que existe um Linking entre $A = \partial Q_R$ e $B = \partial B_\rho \cap E_2$. De fato, identifiquemos aqui o subespaço E_1 com o espaço euclidiano $\mathbb{R}^j$, assim consideremos $A \subset \mathbb{R}^{j+1}$. Note que $E = E_1 \oplus E_2$, temos que cada $u \in E$ é escrito de maneira única como $u = v + w$, com $v \in E_1$ e $w \in E_2$. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &: E \longrightarrow \mathbb{R}^{j+1} \\ u &\longmapsto \mathcal{F}(u) = v + \|w\|e. \end{aligned} \quad (2-44)$$

Então $\mathcal{F}$ é uma aplicação contínua e $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}|_{Q_R}$ é um homeomorfismo sobre a sua imagem. Além disso $\mathcal{F}_0$ é a aplicação identidade sobre Q_R . Note que $B = \mathcal{F}^{-1}(\rho e)$. Suponha que não existe um Linking entre ∂Q_R e $\mathcal{F}^{-1}(\rho e)$. Então, existe uma $\Gamma \in \Phi$ tal que

$$\Gamma(t)\partial Q_R \cap \mathcal{F}^{-1}(\rho e) = \emptyset, \quad 0 \leq t \leq 1$$

ou de forma equivalente

$$\mathcal{F}(\Gamma(t)\partial Q_R) \cap \{\rho e\} = \emptyset, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2-45)$$

Defina $\eta(t) = \mathcal{F} \circ \Gamma(t) \circ \mathcal{F}_0^{-1}$, então $\eta(t) \in C(\mathcal{F}_0(Q_R), \mathbb{R}^{j+1})$ para cada $t \in [0, 1]$. Note que, $\eta(0) = I$. Se $\Gamma(1)E = \{u_0\}$, então

$$\eta(1)x = \mathcal{F}(u_0) \neq \rho e, \quad x \in \mathcal{F}_0(Q_R), \quad (2-46)$$

uma vez que, para $t = 1$ em (2-45), temos $\mathcal{F}(\Gamma(1)\partial Q_R) \cap \{\rho e\} = \emptyset$. Usando (2-45) e (2-46) temos que o Grau de Brouwer [10], satisfaz

$$d(\eta(t), \mathcal{F}_0(Q_R), \rho e) = d(\eta(0), \mathcal{F}_0(Q_R), \rho e) = 1$$

para todo $t \in [0, 1]$. Contudo, isso é uma contradição com (2-46). Portanto, existe um Linking entre A e B . Novamente usando a Proposição 2.2.6, $J_\mu(v) \leq \beta$ para todo $v \in Q$ com $\|v\| = R$, Enfatizamos que aqui, β pode ser qualquer número positivo. Assim, $\beta/R^{\gamma+1} \rightarrow 0$ com $R \rightarrow \infty$ para qualquer $\gamma \geq 0$.

Consideremos μ_1 obtido na Proposição 2.2.5 com $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ onde ε_1 e ε_2 obtido na Proposição, 2.2.4 e 2.2.5, respectivamente. Escolhendo $\mu > \mu_1$ obtemos o nosso próximo resultado.

Proposição 2.2.8 *Suponha que (V_1) , (q_1) , (K_1) e (h_1) são satisfeitas. Suponha que exista $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 1$ tal que $\lambda_j < \lambda < \lambda_{j+1}$. Então o funcional J_μ possui uma sequência $(PS)_{c_\mu}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em E , com c_μ dado por*

$$c_\mu := \inf_{\Gamma \in \Phi} \sup_{s \in [0,1], u \in \partial Q_R} J_\mu(\Gamma(s, u)), \quad (2-47)$$

com $\Gamma \in C([0, 1] \times E, E)$, desde que $\mu > \mu_1$ e $\|h\|_{2N/(N+2)} \leq \varepsilon$.

Relembremos que, da Definição 1.3.1, uma sequência $(PS)_{c_\mu}$ para J_μ é uma sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em E tal que

$$J_\mu(v_n) \rightarrow c_\mu \quad \text{e} \quad J'_\mu(v_n) \rightarrow 0 \quad (2-48)$$

Devido a falta de compacidade nas imersões do espaço E nos espaços de Lebesgue $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $s \in [2, 2^*]$ temos uma dificuldade para mostrar que o nosso funcional J_μ satisfaz a condição de $(PS)_{c_\mu}$, isto é, toda sequência $(PS)_{c_\mu}$ associada ao funcional J_μ possui uma subsequência fortemente convergente. Esta é uma grande ferramenta para garantir que os pontos críticos encontrados para o nosso funcional não são triviais. Para contornar essa dificuldade, mostraremos que, usando argumento de concentração de compacidade [29], o não anulamento deve ocorrer, caso as sequências $(PS)_{c_\mu}$ convirjam fracamente para zero. Primeiramente, mostraremos que essas sequências são limitadas.

Proposição 2.2.9 *Suponha que (V_1) , (q_1) , (K_1) e (h_1) são satisfeitas. Suponha que exista $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 1$ tal que $\lambda_j < \lambda < \lambda_{j+1}$. Então toda sequência $(PS)_{c_\mu}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, associada com funcional J_μ no nível c_μ é limitada.*

Demonstração. Seja $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência $(PS)_{c_\mu}$ para o funcional J_μ . Então temos que as convergências dadas em (2-48) são satisfeitas. Dado qualquer $\phi \in E$, temos

$$\begin{aligned} \langle J'_\mu(v_n), \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_n \nabla \phi + V(x) f(v_n) f'(v_n) \phi) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} q(x) f(v_n) f'(v_n) \phi dx \\ &\quad - \mu \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |f(v_n)|^{p-2} f(v_n) f'(v_n) \phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) f'(v_n) \phi dx. \end{aligned}$$

Usando as propriedades da função f dadas no Lema 1.1.1, temos que $f(v_n)/f'(v_n) \in E$. Portanto, fazendo $\phi = f(v_n)/f'(v_n)$, obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle J'_\mu(v_n), \frac{f(v_n)}{f'(v_n)} \right\rangle &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^2 + V(x) f^2(v_n)) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} q(x) f^2(v_n) dx \\ &\quad - \mu \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |f(v_n)|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) f(v_n) dx. \end{aligned}$$

Novamente, usando o Lema 1.1.1, temos que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\left\| \frac{f(v_n)}{f'(v_n)} \right\| \leq C_1 \|v_n\|.$$

Portanto, por (2-48), inferimos que

$$\begin{aligned} C_2 + o_n(1) \|v_n\| &\geq J_\mu(v_n) - \frac{1}{p} \left\langle J'_\mu(v_n), \frac{f(v_n)}{f'(v_n)} \right\rangle \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^2 + V(x) f^2(v_n)) dx \\ &\quad - \lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} q(x) f^2(v_n) dx - \left(1 - \frac{1}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} h(x) f(v_n) dx, \end{aligned}$$

para alguma constante positiva C_2 . Usando o Lema 1.1.1 (f_3) , (h_1) e a imersão de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x) f(v_n) dx \leq C_3 \|v_n\|,$$

onde C_3 é uma constante positiva dependendo de $\|h\|_{2N/(N+2)}$ e da melhor constante para a imersão de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Consequentemente, obtemos

$$\theta_p \int_{\mathbb{R}^N} q(x) f^2(v_n) dx + C_2 + (C_3 + o_n(1)) \|v_n\| \geq \kappa_p \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^2 + V(x) f^2(v_n)) dx, \quad (2-49)$$

onde $\theta_p = \lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) > 0$ e $\kappa_p = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{p} \right) > 0$.

Suponhamos neste momento que a menos de uma subsequência, $\|v_n\| \rightarrow \infty$ com $n \rightarrow \infty$. Defina, $w_n = v_n / \|v_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\|w_n\| = 1$ e a menos de uma subsequência temos que

$$\begin{cases} w_n \rightharpoonup w & \text{fracamente em } E, \\ w_n \rightarrow w & \text{fortemente em } L^s_{loc}(\mathbb{R}^N), \\ w_n(x) \rightarrow w(x), & \text{q. t. p. em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

para qualquer $1 \leq s < 2^*$. Dividindo (2-49) por $\|v_n\|^2$, temos que

$$\theta_p \int_{\mathbb{R}^N} q(x) \frac{f^2(v_n)}{|v_n|^2} w_n^2 dx + o_n(1) \geq \kappa_p \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + \frac{V(x) f^2(v_n)}{\|v_n\|^2} \right) dx. \quad (2-50)$$

Afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} q(x) \frac{f^2(v_n)}{|v_n|^2} w_n^2 dx = o_n(1). \quad (2-51)$$

Assumindo, por enquanto, essa afirmação, obtemos usando (2-50), que

$$o_n(1) \geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + \frac{V(x)f^2(v_n)}{\|v_n\|^2} \right) dx \geq 0.$$

Assim, obtemos as seguintes identidades

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 dx = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x)f^2(v_n)}{\|v_n\|^2} dx = 0. \quad (2-52)$$

Como, $\|w_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|^2 = 1$. Consequentemente, por (2-52)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)w_n^2 dx = 1. \quad (2-53)$$

Por outro lado, definimos os conjuntos

$$A_n := \{x \in \mathbb{R}^N \mid |v_n| > 1\} \quad \text{e} \quad B_n := \{x \in \mathbb{R}^N \mid |v_n| \leq 1\}.$$

Logo, escrevemos a seguinte identidade

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)w_n^2 dx = \int_{A_n} V(x)w_n^2 dx + \int_{B_n} V(x)w_n^2 dx. \quad (2-54)$$

Vamos mostrar que cada uma das integrais do lado direito da igualdade acima convergem a zero com $n \rightarrow \infty$. Para a integral sobre A_n , note que usando a Definição 1.3.1, podemos escrever

$$J_\mu(v_n) = c_\mu + o_n(1)$$

dividindo por $\|v_n\|^2$ e usando (2-52), obtemos

$$\frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx - \frac{\mu}{p} \int_{\mathbb{R}^N} K(x) \frac{|f(v_n)|^p}{\|v_n\|^2} dx - \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_{\mathbb{R}^N} h(x)f(v_n) dx = o_n(1). \quad (2-55)$$

Usando que E está imerso continuamente em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e que $\|\cdot\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}$ é semicontínua inferiormente fraco, temos por (2-52) que

$$\|w\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 dx = 0.$$

Desta forma, $w_n \rightharpoonup 0$ em E . Usando o Lema 1.1.1 (f_3), (h_1), e a imersão de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\frac{1}{\|v_n\|^2} \int_{\mathbb{R}^N} h(x)f(v_n) dx = o_n(1), \quad (2-56)$$

uma vez que $\|v_n\| \rightarrow \infty$. Neste momento, usando (2-51), (2-56) em (2-55), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x) \frac{|f(v_n)|^p}{\|v_n\|^2} dx = o_n(1). \quad (2-57)$$

Por (V_1) e da definição do conjunto A_n , escrevemos

$$0 \leq \int_{A_n} V(x) w_n^2 dx \leq C \int_{A_n} \frac{v_n^2}{\|v_n\|^2} dx \leq C \int_{A_n} \frac{|v_n|^{\frac{p}{2}}}{\|v_n\|^2} dx,$$

para alguma constante positiva C . De acordo com o Lema 1.1.1 (f_8), existe uma constante positiva $\kappa > 0$ tal que

$$|v_n|^{\frac{p}{2}} \leq \kappa |f(v_n)|^p \quad \text{q. t. p. em } A_n.$$

Assim, usando isto, (K_1) e (2-57), obtemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{A_n} V(x) w_n^2 dx &\leq \frac{C\kappa}{k_0} \int_{A_n} k_0 \frac{|f(v_n)|^p}{\|v_n\|^2} dx \\ &\leq \frac{C\kappa}{k_0} \int_{\mathbb{R}^N} K(x) \frac{|f(v_n)|^p}{\|v_n\|^2} dx = o_n(1). \end{aligned} \quad (2-58)$$

Assim provamos a convergência desejada sobre A_n . Para a integral sobre B_n , usando Lema 1.1.1 (f_8) e (2-52) temos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{B_n} V(x) w_n^2 dx &= \int_{B_n} \frac{V(x) v_n^2}{\|v_n\|^2} dx \leq \kappa \int_{B_n} \frac{V(x) f^2(v_n)}{\|v_n\|^2} dx \\ &\leq \kappa \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x) f^2(v_n)}{\|v_n\|^2} dx = o_n(1). \end{aligned} \quad (2-59)$$

Dessa forma, a convergência requerida sobre B_n . Usando (2-58) e (2-59), mostramos (2-54). Consequentemente, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) w_n^2 dx = o_n(1).$$

Essa afirmação contradiz o limite dado em (2-53). Consequentemente, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada.

Para completar a demonstração desta proposição, precisamos mostrar a afirmação feita em (2-51). Neste caso, dividimos a prova em dois casos:

caso 1: $w = 0$

Então, usando o Lema 1.1.1 (f_3) temos que

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} q(x) \frac{f^2(v_n)}{|v_n|^2} w_n^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} q(x) w_n^2 dx = o_n(1).$$

Uma vez que a imersão de E em $L^2(\mathbb{R}^N, q)$ é compacta.

caso 2: $w \neq 0$

Então, $|[w \neq 0]| > 0$. Assim, $|v_n(x)| = |w_n(x)| \|v_n\| \rightarrow \infty$ sobre $[w \neq 0]$. Portanto, usando o Lema 1.1.1 (f_7) temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} = 0, \quad \text{q. t. p. em } [w \neq 0].$$

Novamente usando que a imersão de E em $L^2(\mathbb{R}^N, q)$ é compacta, temos que $w_n \rightarrow w$ em $L^2(\mathbb{R}^N, q)$. Portanto, $w_n(x) \rightarrow w(x)$ q. t. p. $x \in \mathbb{R}^N$. Além disso, existe $\phi \in L^2(\mathbb{R}^N, q)$, tal que $q(x)w_n^2 \leq q(x)\phi^2$ q. t. p. $x \in \mathbb{R}^N$. Usando Lema 1.1.1 (f_3), segue que

$$q(x) \frac{f^2(v_n)}{|v_n|^2} w_n^2 \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \text{ e } q(x) \frac{f^2(v_n)}{|v_n|^2} w_n^2 \leq q(x)\phi^2 \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} q(x) \frac{f^2(v_n)}{|v_n|^2} w_n^2 dx = o_n(1)$$

Usando os casos 1 e 2, a afirmação está provada. $\square$

A proposição anterior garante que qualquer sequência de Palais Smale no nível c_μ é limitada. Neste caso, nosso trabalho agora é mostrar que sequências $(PS)_{c_\mu}$ que convergem fracamente para zero satisfazem uma propriedade fundamental para garantir a existência de pontos críticos não triviais. Essa propriedade é garantida no próximo Lema.

Lema 2.2.10 *Suponha que (V_1) , (q_1) , (K_1) e (h_1) são satisfeitas. Suponha que existe $j \in \mathbb{N}$ com $J \geq 1$ tal que $\lambda_j < \lambda < \lambda_{j+1}$. Seja $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência $(PS)_{c_\mu}$ com c_μ dado por (2-47) e $v_n \rightharpoonup 0$ fracamente em E . Então, existem uma sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ e $r, \eta > 0$ tais que $|y_n| \rightarrow \infty$ e*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(y_n)} |v_n|^2 dx \geq \eta > 0.$$

Demonstração. Suponha que o lema é falso, isto é, para todo $r > 0$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ com $|y_n| \rightarrow +\infty$ ocorra que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(y_n)} |v_n|^2 dx = 0.$$

Consequentemente, temos que $v_n \rightarrow 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 < s < 2^*$ com $n \rightarrow \infty$, ver [29, 60]. Assim, o Lema 1.1.1 (f_7) permite que

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x) |f(v_n)|^p dx = o_n(1). \quad (2-60)$$

Usando Lema 2.1.1, Lema 1.1.1 (f_3) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} q(x) f^2(v_n) dx = o_n(1). \quad (2-61)$$

Aplicando a condição (h_1), e Lema 1.1.1 (f_3) temos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} h(x) f(v_n) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |h(x)| |v_n| dx \rightarrow 0 \quad (2-62)$$

quando $n \rightarrow \infty$, pois $v_n \rightharpoonup 0$ em E .

Afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^2 + V(x) f^2(v_n)) dx = o_n(1). \quad (2-63)$$

De fato, por $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ser uma sequência $(PS)_c$ para o funcional J_μ , temos que $\langle J'_\mu(v_n), v_n \rangle = o_n(1)$. Usando o Lema 2.1.1, (f_2) e (f_3) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} q(x) f(v_n) f'(v_n) v_n dx = o_n(1). \quad (2-64)$$

Como $v_n \rightarrow 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 < s < 2^*$, usando o Lema 1.1.1 (f_6) e (f_7) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x) |f(v_n)|^{p-2} f(v_n) f'(v_n) v_n dx = o_n(1). \quad (2-65)$$

Finalmente, usando Lema 1.1.1 (f_2) e a condição (h_1) temos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} h(x) f'(v_n) v_n dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |h(x)| |v_n| dx \rightarrow 0, \quad (2-66)$$

quando $n \rightarrow \infty$, pois $v_n \rightharpoonup 0$ em E . Segue que usando (2-64), (2-65), (2-66) e $\langle J'_\mu(v_n), v_n \rangle = o_n(1)$, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^2 + V(x) f(v_n) f'(v_n) v_n) dx = o_n(1).$$

Enfim, usando Lema 1.1.1 (f_6) na última igualdade a afirmação (2-63) fica provada. Agora, usando a convergência (2-60), (2-61), (2-62) e (2-63) obtemos que

$$c_\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} J_\mu(v_n) = 0,$$

ao qual contradiz o fato que $c_\mu > 0$. Portanto, o lema está provado. $\square$

Observação 7 Dado uma sequência de Palais Smale $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ que satisfaz as condi-

ções do Lema 2.2.10 dizemos que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz a condição de **não-anulamento**.

2.3 A Prova do Teorema Principal

Nesta seção provaremos o Teorema 2.0.1. Primeiramente, invocamos a Proposição 2.2.8 para encontrar uma sequência de Palais Smale com nível c_μ , ou seja, existe $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ tal que

$$J_\mu(v_n) \rightarrow c_\mu \quad \text{e} \quad J'_\mu(v_n) \rightarrow 0$$

com c_μ dado na Proposição 2.2.8. Aplicando a Proposição 2.2.9, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Portanto, existe $v \in E$, tal que a menos de uma subsequência

$$\begin{cases} v_n \rightharpoonup v & \text{fracamente em } E, \\ v_n \rightarrow v & \text{fortemente em } L^s_{loc}(\mathbb{R}^N), \\ v_n(x) \rightarrow v(x), & \text{q. t. p. em } \mathbb{R}^N, \\ |v_n(x)| \leq h_s(x), & h_s \in L^s_{loc}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (2-67)$$

para qualquer $1 \leq s < 2^*$.

O próximo resultado garante que o limite fraco da sequência de Palais Smale $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um ponto crítico para o funcional J_μ .

Lema 2.3.1 *Se $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ é uma sequência $(PS)_{c_\mu}$ para o funcional J_μ com $c_\mu > 0$, então a menos de subsequência $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em E e $J'_\mu(v) = 0$*

Demonstração. Usando que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em E , é suficiente mostrar que $\langle J'_\mu(v), \phi \rangle = 0$ para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, onde aqui $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a dualidade em E^* . Assim, seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e denote $B := \text{supp } \phi$. Neste caso, temos as seguintes identidades

$$\begin{aligned} \langle J'_\mu(v_n) - J'_\mu(v), \phi \rangle &= \langle J'_\mu(v_n), \phi \rangle - \langle J'_\mu(v), \phi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(v_n - v) \nabla \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) [f'(v_n)f(v_n) - f'(v)f(v)] \phi dx \\ &\quad - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} q(x) [f'(v_n)f(v_n) - f'(v)f(v)] \phi dx \\ &\quad - \mu \int_{\mathbb{R}^N} K(x) [|f(v_n)|^{p-2} f'(v_n)f(v_n) - |f(v)|^{p-2} f'(v)f(v)] \phi dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) [f'(v_n) - f'(v)] \phi dx. \end{aligned} \quad (2-68)$$

Usando (2-67), temos que $v_n \rightarrow v$ em $L^s(B)$ para $1 \leq s < 2^*$ e $v_n(x) \rightarrow v(x)$ q. t. p. em B . Consequentemente, temos

$$f'(v_n)f(v_n) \rightarrow f'(v)f(v) \quad \text{q. t. p. sobre } B, \quad \text{com } n \rightarrow \infty,$$

$$|f(v_n)|^{p-2} f'(v_n) f(v_n) \rightarrow |f(v)|^{p-2} f'(v) f(v) \quad \text{q. t. p. sobre } B, \text{ com } n \rightarrow \infty,$$

$$f'(v_n) \rightarrow f'(v) \quad \text{q. t. p. sobre } B, \text{ com } n \rightarrow \infty.$$

Além disso, usando a condição (V_1) e o Lema 1.1.1 (f_9) , temos que existe uma constante positiva C_1 não dependendo de n , tal que

$$|V(x) f(v_n) f'(v_n) \phi| \leq C_1 |\phi|.$$

Assim, $V(x) f(v_n) f'(v_n) \phi$ é dominada por uma função em $L^1(B)$. Novamente, usando Lema 1.1.1 (f_9) temos

$$|q(x) f(v_n) f'(v_n) \phi| \leq 2^{-1/2} |q(x) \phi|.$$

Usando (q_1) e desigualdade de Hölder temos que $q(x) \phi \in L^1(B)$. Portanto, $q(x) f(v_n) f'(v_n) \phi$ é dominada por uma função em $L^1(B)$.

Usando (K_1) , Lema 1.1.1 (f_7) , (f_9) e as estimativas dadas em (2-67) obtemos

$$|K(x) |f(v_n)|^{p-2} f(v_n) f'(v_n) \phi| \leq C_2 | |v_n|^{(p-2)/2} \phi | \leq C_2 | |h_s|^{(p-2)/2} \phi |,$$

para alguma constante positiva C_2 . Escolhendo $s = p/(p-2)$, usando mais uma vez a desigualdade de Hölder temos $|h_s|^{(p-2)/2} \phi \in L^1(B)$. Assim, $K(x) |f(v_n)|^{p-2} f(v_n) f'(v_n) \phi$ é dominada por uma função em $L^1(B)$.

Aplicando o Lema 1.1.1 (f_2) e a estimativa feita em (2-67), temos que

$$|h(x) f'(v_n) \phi| \leq |h(x) \phi|.$$

Usando a condição (h_1) e mais uma vez a desigualdade de Hölder temos que $h(x) \phi \in L^1(B)$. Assim, $h(x) f'(v_n) \phi$ é dominada por uma função em $L^1(B)$.

Usando todas essas estimativas em (2-68), Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e a convergência fraca $v_n \rightharpoonup v$ em E , temos

$$\langle J'_\mu(v_n), \phi \rangle - \langle J'_\mu(v), \phi \rangle = o_n(1)$$

Novamente, usando que $\langle J'_\mu(v_n), \phi \rangle = o_n(1)$, concluímos que $\langle J'_\mu(v), \phi \rangle = 0$. Devido a arbitrariedade de $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e a densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ em E , temos que $J'_\mu(v) = 0$. Assim completamos a demonstração. $\square$

É importante enfatizar que o Lema 2.3.1 permite que o problema (2-1) abordado neste capítulo admita ao menos uma solução para qualquer $h \in L^{2N/(N+2)}(\mathbb{R}^N)$. Se $h \neq 0$ a demonstração do item (i) do Teorema 2.0.1 está concluída, pois neste caso zero não será

solução do problema (2-1). Contudo, para demonstrar o caso (ii) do Teorema 2.0.1, onde $h \equiv 0$, precisamos garantir que o problema (2-1) possui uma solução fraca não trivial. Sendo assim, trataremos o caso onde a condição $h \equiv 0$ é satisfeita. Note que, se $v \neq 0$, a prova do item (ii) do Teorema 2.0.1 segue usando o argumento padrão de densidade como foi feito no Lema 2.3.1. Sendo assim, resta considerarmos o caso onde $v \equiv 0$ e $h \equiv 0$. Neste caso, precisamos garantir que ainda é possível obter uma solução fraca não trivial para o problema (2-1). Neste caso, relembremos que para $h \equiv 0$ o funcional energia toma forma

$$J_\mu(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + V(x) f^2(v) dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) f^2(v) dx - \frac{\mu}{p} \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |f(v)|^p dx. \quad (2-69)$$

Assim, procuremos pontos críticos não triviais para o funcional (2-69). É importante enfatizar que o funcional dado em (2-69) satisfaz os mesmos resultados obtidos para o funcional (2-15). Como uma consequência, existe uma sequência $(PS)_{c_\mu}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, para o funcional J_μ de tal modo que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Portanto, temos que, a menos de uma subsequência, que $v_n \rightharpoonup v$ em E , para algum $v \in E$.

Agora consideramos o caso em que $v = 0$. De acordo com o Lema 2.2.10, existem uma sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $r, \eta > 0$ tal que $|y_n| \rightarrow \infty$ e

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(y_n)} |v_n|^2 dx \geq \eta > 0. \quad (2-70)$$

Defina a sequência transladada $u_n(x) = v_n(x + y_n)$, $x \in \mathbb{R}^N$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^N$. De fato, argumentado de maneira análoga ao que foi feito em [59], temos que para cada $y_n = (y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^N) \in \mathbb{R}^N$ existe $z_n = (z_n^1, z_n^2, \dots, z_n^N) \in \mathbb{Z}^N$ tal que para $1 \leq i \leq N$ tem-se que $|y_n^i - z_n^i| \leq 1/2$. Assim, usando a norma euclidiana em $\mathbb{R}^N$, temos que

$$|y_n - z_n| = \sqrt{\sum_{i=1}^N |y_n^i - z_n^i|^2} \leq \sqrt{N}/2.$$

Assim, $B_r(y_n) \subset B_{r+\sqrt{N}/2}(z_n)$, uma vez que se $x \in B_r(y_n)$, então

$$|z_n - x| = |z_n - y_n + y_n - x| \leq |z_n - y_n| + |y_n - x| \leq \sqrt{N}/2 + r.$$

Sendo assim,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{r+\sqrt{N}/2}(z_n)} |v_n|^2 dx \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(y_n)} |v_n|^2 dx \geq \eta > 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, da condição (V_1) temos que $\|v_n\| = \|u_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Portanto, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em E .

Logo, usando (2-70), temos que $u \neq 0$.

No que segue, provaremos que o limite fraco da sequência transladada é um ponto crítico para o funcional J_μ , isto é, $\langle J'_\mu(u), \phi \rangle = 0$ para qualquer $\phi \in E$. Com essa finalidade, fixemos $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, obtemos que

$$\begin{aligned} \langle J'_\mu(u_n), \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla \phi_n + V(x - y_n) f(v_n) f'(v_n) \phi_n dx \\ &\quad - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} q(x - y_n) f(v_n) f'(v_n) \phi_n dx \\ &\quad - \mu \int_{\mathbb{R}^N} K(x - y_n) |f(v_n)|^{p-2} f(v_n) f'(v_n) \phi_n dx, \end{aligned} \quad (2-71)$$

onde $\phi_n(x) = \phi(x - y_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando que as funções V e K são, ambas, 1-periódicas em $x_1, \dots, x_N$, temos que

$$\begin{aligned} \langle J'_\mu(u_n), \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla \phi_n + V(x) f(v_n) f'(v_n) \phi_n dx \\ &\quad - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} q(x - y_n) f(v_n) f'(v_n) \phi_n dx \\ &\quad - \mu \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |f(v_n)|^{p-2} f(v_n) f'(v_n) \phi_n dx, \end{aligned} \quad (2-72)$$

Note que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência $(PS)_{c_\mu}$ para J_μ . Logo temos que $\langle J'_\mu(v_n), \phi_n \rangle \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$. Usando esta convergência e (2-72) temos que

$$\langle J'_\mu(v_n), \phi_n \rangle - \langle J'_\mu(u_n), \phi \rangle = -\lambda \int_{\mathbb{R}^N} (q(x) - q(x - y_n)) f(v_n) f'(v_n) \phi_n dx \quad (2-73)$$

Afirmamos que,

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} (q(x) - q(x - y_n)) f(v_n) f'(v_n) \phi_n dx \rightarrow 0 \quad (2-74)$$

com $n \rightarrow \infty$. De fato, para qualquer $R > 0$ observamos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} [q(x) - q(x - y_n)] f(v_n) f'(v_n) \phi_n dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |[q(x) - q(x - y_n)] f(v_n) f'(v_n) \phi_n| dx \\ &\quad + \int_{B_R} |[q(x) - q(x - y_n)] f(v_n) f'(v_n) \phi_n| dx \end{aligned} \quad (2-75)$$

A ideia é garantir que as integrais do lado direito em (2-75) convergem para zero com

$n \rightarrow \infty$. Usando o Lema 1.1.1 (f_2) e (f_3) e a desigualdade de Hölder temos que

$$\begin{aligned}
 \int_{B_R} |[q(x) - q(x - y_n)] f(v_n) f'(v_n) \phi_n| dx &\leq \left(\int_{B_R} |q(x) - q(x - y_n)|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} \\
 &\times \left(\int_{B_R} |f(v_n) f'(v_n)|^r dx \right)^{1/r} \left(\int_{B_R} |\phi_n|^r dx \right)^{1/r} \\
 &\leq 2 \|q\|_\alpha \left(\int_{B_R} |v_n|^r dx \right)^{1/r} \|\phi\|_r \\
 &\leq C \|q\|_\alpha \left(\int_{B_R} |v_n|^r dx \right)^{1/r} \|\phi\|
 \end{aligned} \tag{2-76}$$

onde $1/\alpha + 2/r = 1$. Como $\alpha > N/2$ temos que $r \in (2, 2^*)$. Portanto, a última estimativa juntamente com a imersão compacta de Sobolev permite dizer que

$$\int_{B_R} |[q(x) - q(x - y_n)] f(v_n) f'(v_n) \phi_n| dx \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \tag{2-77}$$

Por outro lado, usando mais uma vez a desigualdade de Hölder, deduzimos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |[q(x) - q(x - y_n)] f(v_n) f'(v_n) \phi_n| dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |q(x) - q(x - y_n)|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} \\
 &\times \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |f(v_n) f'(v_n)|^r dx \right)^{1/r} \\
 &\times \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |\phi_n|^r dx \right)^{1/r} \\
 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |q(x) - q(x - y_n)|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} \\
 &\times \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^r dx \right)^{1/r} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^r dx \right)^{1/r} \\
 &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |q(x) - q(x - y_n)|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} \\
 &\times \|v_n\| \|\phi\|
 \end{aligned} \tag{2-78}$$

onde $C > 0$. Além disso, mencionamos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |q(x) - q(x - y_n)|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |q(x)|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} + \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |q(x - y_n)|^\alpha dx \right)^{1/\alpha}. \tag{2-79}$$

Como $q \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ existe $R_\varepsilon > 0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |q(x)|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} \leq \varepsilon \quad (2-80)$$

para qualquer $R \geq R_\varepsilon$ e para qualquer $\varepsilon > 0$. Neste momento, para todo $n \in \mathbb{N}$ usando (q_1) , mencionamos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |q(x - y_n)|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} \leq \varepsilon \quad (2-81)$$

para qualquer $R \geq R_\varepsilon$ e para cada $\varepsilon > 0$. Em relação a essas condições, como $\varepsilon > 0$ é escolhido arbitrariamente, a afirmação dada em (2-74) está verificada. Assim, aplicando (2-73) e (2-74), obtemos que

$$\langle J'_\mu(v_n), \phi_n \rangle - \langle J'_\mu(u_n), \phi \rangle \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Usando que $\langle J'_\mu(v_n), \phi_n \rangle \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$, temos que $\langle J'_\mu(u_n), \phi \rangle \rightarrow 0$ para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Portanto, argumentando similarmente como foi feito no Lema 2.3.1, obtemos que u é um ponto crítico não trivial para o funcional J_μ . Assim, o item (ii) do Teorema 2.0.1 está provado.

Equação de Schrödinger Quasilinear com Termo Crítico

Neste capítulo estudaremos um problema quasilinear semelhante ao problema estudado no Capítulo 2. Neste capítulo trataremos do caso em que não linearidade da equação de Schrödinger apresenta um termo com expoente crítico. Mais precisamente, consideremos o problema quasilinear dado por

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = \lambda q(x)u + \mu K(x)|u|^{p-2}u + |u|^{2 \cdot 2^* - 2}u + h(x), & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (3-1)$$

onde $N \geq 3$ e $4 < p < 2 \cdot 2^*$. O potencial V pertence a $C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e é limitado superiormente e inferiormente por constantes positivas, $q \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha > N/2$, $K \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e $h \in L^{2N/(N+2)}(\mathbb{R}^N)$. Os parâmetros, λ e μ , são ambos positivos. Posteriormente enfatizaremos as hipóteses sobre as funções V , q , K , e h .

Problemas do tipo (3-1) são chamados na literatura de problemas críticos. Este fato devido a presença do termo $|u|^{2 \cdot 2^* - 2}u$ na não linearidade da equação (3-1). Neste caso, temos perda das imersões compactas dos espaços de Sobolev sobre os espaços de Lebesgue $L^s(\mathbb{R}^N)$ com $s = 2 \cdot 2^*$. Como mencionamos na Introdução deste trabalho, em [49] os autores mostram uma identidade de Pohozaev associada ao problema (0-15), ao qual justifica que $2 \cdot 2^* = 4N/(N-2)$ é o expoente crítico para essa classe de problemas. A presença do termo crítico na equação apresenta algumas dificuldades. Uma vez que, mesmo em um domínio compacto Ω , a imersão do espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$ no espaço $L^{2^*}(\Omega)$ é somente contínua.

Neste capítulo, estamos interessados em obter solução não trivial para o problema (3-1) usando métodos variacionais. Neste ponto, o principal objetivo é provar a existência de solução não trivial para a equação (3-1). Neste caso, de forma semelhante ao Capítulo 2, pediremos que o parâmetro λ possua uma interação com autovalores de

alta energia do problema linear com peso q , dado por

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \lambda q(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (3-2)$$

No que segue vamos apresentar algumas condições para o potencial V e a não linearidade $l(x, u) := \lambda q(x)u + \mu K(x)|u|^{p-2}u + |u|^{2 \cdot 2^* - 2}u + h(x)$. Assumiremos neste capítulo, as mesmas hipóteses sobre o potencial e a não linearidade que foram assumidas no Capítulo 2.

Assim, recordemos que o potencial V satisfaz

(V₁) V é contínuo e 1-periódico em $x_1, \dots, x_N$ e existem constantes positivas V_0, V_∞ , tais que $V_0 \leq V(x) \leq V_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

A função q satisfaz as seguintes condições:

(q₁) $q \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha > N/2$ com $q(x) > 0$. Assuma que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} q(x - y_n)^\alpha dx = 0, \text{ uniformemente em } n \in \mathbb{N} \quad (3-3)$$

onde $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N$ satisfaz $|y_n| \rightarrow \infty$ com $n \rightarrow \infty$.

O potencial K , satisfaz a seguinte hipótese:

(K₁) K é contínuo e 1-periódico em $x_1, \dots, x_N$ e que existe uma constante positiva k_0 tal que $K(x) \geq k_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

A função não homogênea h satisfaz a condição

(h₁) $h \in L^{2N/(N+2)}(\mathbb{R}^N)$.

Relembremos que no Capítulo 2 apresentamos exemplos de funções V , q e K que satisfazem a condição (V₁), (q₁) e (K₁) respectivamente.

Como mencionamos anteriormente, estamos interessados em buscar solução para o problema (3-1) usando métodos variacionais. Com essa finalidade, pedimos, de maneira semelhante aos Capítulos 1 e 2, que o parâmetro λ possui uma interação com autovalores de alta energia do problema linear (3-2), o qual admite uma sequência não-decrescente de autovalores $(\lambda_k(q))_{k \in \mathbb{N}}$ com o primeiro autovalor $\lambda_1(q)$ positivo. Assim, assumiremos que existe $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$, tal que $\lambda_j(q) < \lambda < \lambda_{j+1}(q)$. Novamente, neste capítulo usaremos apenas o problema linear (3-2). Logo, denotaremos os autovalores $\lambda_k(q)$ simplesmente por λ_k , para todo $k \in \mathbb{N}$.

Neste momento, enunciamos o principal resultado deste capítulo:

Teorema 3.0.1 *Suponha que V , q , K e h satisfaz (V_1) , (q_1) , (K_1) e (h_1) , respectivamente. Suponha que exista $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 1$ tal que $\lambda_j < \lambda < \lambda_{j+1}$. Então existem $\mu_0 > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que para $\mu > \mu_0$ e $0 \leq \|h\|_{2N/(N+2)} < \varepsilon$ obtemos que:*

- (i) *o problema (3-1) possui ao menos uma solução fraca para cada $h \neq 0$,*
- (ii) *o problema (3-1) possui ao menos uma solução fraca não trivial para $h \equiv 0$.*

Observação 8 *Enfatizamos que o Teorema 3.0.1 permite obter ao menos um solução não trivial para o problema (3-1), fazendo o potencial $V \equiv 1$. Mais precisamente obtemos solução para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + u - \Delta(u^2)u = \lambda q(x)u + \mu K(x)|u|^{p-2}u + |u|^{2 \cdot 2^*-2}u + h(x), & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (3-4)$$

3.1 Preliminares e Formulação para o Problema (3-1)

Observemos que, formalmente, o problema (3-1) possui o seguinte funcional energia associado

$$\begin{aligned} I_\mu(u) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2u^2) |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) u^2 dx \\ &\quad - \frac{\mu}{p} \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |u|^p dx - \frac{1}{2 \cdot 2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2 \cdot 2^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u dx. \end{aligned} \quad (3-5)$$

Novamente, semelhante aos Capítulos 1, 2, o funcional (3-5) não está bem definido no espaço usual $H^1(\mathbb{R}^N)$. Assim, invocamos a mudança de variável f dada em (1-31), definida no Capítulo 1. Neste caso, obtemos um funcional energia auxiliar

$$\begin{aligned} J_\mu(v) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x) f^2(v)) dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) f^2(v) dx \\ &\quad - \frac{\mu}{p} \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |f(v)|^p dx - \frac{1}{2 \cdot 2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |f(v)|^{2 \cdot 2^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) f(v) dx. \end{aligned} \quad (3-6)$$

O funcional J_μ é bem definido no espaço E e de classe C^1 . Pontos críticos para o funcional J_μ são precisamente soluções fracas do problema semilinear

$$\begin{cases} -\Delta v + V(x) f(v) f'(v) = W(x, f(v)), & x \in \mathbb{R}^N, \\ v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (3-7)$$

onde $W(x, f(v)) := \lambda q(x) f(v) f'(v) + \mu K(x) |f(v)|^{p-2} f(v) f'(v) + |f(v)|^{2 \cdot 2^*-2} f(v) f'(v) + h(x) f'(v)$.

Neste caso, encontrar soluções fracas para o problema (3-7) é equivalente a encontrar pontos críticos do funcional J_μ . Esses pontos críticos fornecem soluções fracas

para o problema original dado em (3-1). Mais precisamente, consideremos o seguinte resultado:

Proposição 3.1.1 *Se $v \in E \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca do problema (3-7), então $u = f(v)$ é uma solução fraca do problema (3-1).*

Assim, de acordo com a Proposição 3.1.1, buscaremos soluções fracas para o problema auxiliar (3-7).

3.2 A Geometria do Funcional Energia

Nosso propósito nessa seção é mostrar que mesmo com a presença do termo

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(v)|^{2 \cdot 2^*} dx$$

o funcional energia J_μ dado em (3-6) satisfaz as condições geométricas do Teorema 2.2.3. Relembremos que o espaço de Sobolev E possui a mesma decomposição (2-9) dada no Capítulo 2. Inicialmente, mostraremos a seguinte proposição:

Proposição 3.2.1 *Suponha que (V_1) , (q_1) , (K_1) e (h_1) são satisfeitas. Suponha que exista $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 1$ tal que $\lambda_j < \lambda < \lambda_{j+1}$. Então existem ρ , σ e ε_1 , ambos positivos, tais que $J_\mu(v) \geq \sigma$ para todo $v \in \partial B_\rho \cap E_2$ desde que $\|h\|_{2N/(N+2)} < \varepsilon_1$.*

Demonstração. Como na demonstração da Proposição 2.2.4, no Capítulo 2, consideremos o funcional

$$\begin{aligned} \widehat{J}_\mu(v) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)f^2(v)) dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x)f^2(v) dx \\ &\quad - \frac{\mu}{p} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v)|^p dx - \frac{1}{2 \cdot 2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |f(v)|^{2 \cdot 2^*} dx. \end{aligned} \quad (3-8)$$

Desta forma, temos que

$$J_\mu(v) := \widehat{J}_\mu(v) - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)f(v) dx. \quad (3-9)$$

Afirmamos que existem $\widehat{\rho} > 0$ e $\widehat{\beta} > 0$ tais que

$$\widehat{J}_\mu(v) \geq \widehat{\beta} \|v\|^2 \quad \forall v \in \partial B_{\widehat{\rho}} \cap E_2. \quad (3-10)$$

De fato, argumentando por contradição, temos para cada $n \in \mathbb{N}$ escolhendo $\widehat{\rho} = 1/n$, encontramos uma sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E_2$ com $\|v_n\| = 1/n$ e

$$\widehat{J}_\mu(v_n) \leq \frac{1}{n} \|v_n\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3-11)$$

A sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortemente para zero em E com $n \rightarrow \infty$. Como E está imerso continuamente em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $s \in [2, 2^*]$, temos que $v_n \rightarrow 0$ fortemente em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq s \leq 2^*$ com $n \rightarrow \infty$. Usando (3-11), temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \|v_n\|^2 &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^2 + V(x) f^2(v_n)) dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) f^2(v_n) dx \\ &\quad - \frac{\mu}{p} \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |f(v_n)|^p dx - \frac{1}{2 \cdot 2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{2 \cdot 2^*} dx. \end{aligned} \quad (3-12)$$

Defina $w_n = v_n / \|v_n\|$. Então a menos de uma subsequência

$$\begin{cases} w_n \rightharpoonup w & \text{fracamente em } E_2, \\ w_n \rightarrow w & \text{fortemente em } L_{loc}^s(\mathbb{R}^N), \\ w_n(x) \rightarrow w(x), & \text{q. t. p. em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

para qualquer $1 \leq s < 2^*$ com $n \rightarrow \infty$.

Dividindo a desigualdade (3-12) por $\|v_n\|^2$ e usando a condição (K_1) , temos que existe uma constante positiva C tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + V(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 \right) dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx \\ &\quad - \frac{\mu}{p} C \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(v_n)|^p}{v_n^2} w_n^2 dx - \frac{1}{2 \cdot 2^*} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(v_n)|^{2 \cdot 2^*}}{v_n^2} w_n^2 dx. \end{aligned}$$

Usando as mesmas ideias usadas na Proposição 2.2.4, principalmente na afirmação (2-24), podemos reescrever a desigualdade acima como

$$o_n(1) + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 + V(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx.$$

Assim, usando o Lema 1.1.1 (f_3) obtemos

$$\frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) w_n^2 dx + o_n(1) \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + V(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 \right) dx.$$

Aplicando o Lema 2.1.2 - (2-12), e usando que a sequência $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é normalizada e está em E_2 , temos que

$$\frac{\lambda}{\lambda_{j+1}} + o_n(1) \geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + V(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 \right) dx = 1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \left(\frac{f^2(v_n)}{v_n^2} - 1 \right) w_n^2 dx. \quad (3-13)$$

Argumentado de maneira análoga ao que foi feito na demonstração da Proposição 2.2.4,

principalmente na afirmação (2-26), obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) \left(\frac{f^2(v_n)}{v_n^2} - 1 \right) w_n^2 dx = o_n(1) \quad (3-14)$$

Assim, passando o limite em (3-13), obtemos que $\lambda \geq \lambda_{j+1}$. Essa última informação contraria a hipótese sobre λ . Portanto, a afirmação (3-10) é verdadeira.

Assim, para todo $v \in E_2$ com $\|v\| \leq \hat{\rho}$, temos em (3-9) que

$$J_\mu(v) \geq \hat{\beta} \|v\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) f(v) dx.$$

Aplicando o Lema 1.1.1 (f_3), condição (h_1) e a desigualdade de Hölder

$$J_\mu(v) \geq \hat{\beta} \|v\|^2 - \|h\|_{2N/(N+2)} \|v\|_{2^*}.$$

Usando a melhor constante da imersão de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$J_\mu(v) \geq \hat{\beta} \|v\|^2 - S^{-1} \|h\|_{2N/(N+2)} \|v\|.$$

Fazendo $\|v\| = \hat{\rho}$,

$$J_\mu(v) \geq \hat{\beta} \hat{\rho}^2 - S^{-1} \|h\|_{2N/(N+2)} \hat{\rho} = \hat{\rho} \left(\hat{\beta} \hat{\rho} - S^{-1} \|h\|_{2N/(N+2)} \right).$$

Assim, $J_\mu(v) \geq \hat{\beta} \hat{\rho}^2 / 2$ desde que

$$\hat{\beta} \hat{\rho} - S^{-1} \|h\|_{2N/(N+2)} \geq \frac{\hat{\beta} \hat{\rho}}{2},$$

isto é, $\|h\|_{2N/(N+2)} \leq S \hat{\beta} \hat{\rho} / 2$. Neste caso, escolhemos $\rho = \hat{\rho}$ e $\varepsilon_1 = S \hat{\beta} \rho / 2$ e $\sigma = \hat{\beta} \hat{\rho}^2 / 2$. $\square$

Proposição 3.2.2 *Suponha que (V_1) , (q_1) , (K_1) e (h_1) são satisfeitas. Suponha que exista $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 1$ tal que $\lambda_j < \lambda < \lambda_{j+1}$. Então existem $\mu_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$ tais que $J_\mu(v) \leq \sigma$ para todo $v \in E_1$, desde que $\mu > \mu_1$ e $\|h\|_{2N/(N+2)} < \varepsilon_2$, onde σ foi dado na Proposição 1.3.4.*

Demonstração. Novamente, consideremos o funcional $\hat{J}_\mu(v)$ definido em (3-8). Afirmamos que existe $\theta > 0$ tal que

$$\hat{J}_\mu(v) \leq -\theta \|v\|^2 \quad \forall v \in E_1 \quad (3-15)$$

Para provar essa afirmação, procederemos usando um argumento por contradição. Suponha que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ positivo, existe $v \in E_1$ tal que $\widehat{J}_\mu(v) \geq -\alpha\|v\|^2$. Então, escolhendo $\alpha = 1/n$ com $n \in \mathbb{N}$, obtemos uma sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E_1$ tal que

$$\widehat{J}_\mu(v_n) \geq -\frac{1}{n}\|v_n\|^2, \quad (3-16)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste momento, como na demonstração da Proposição 2.2.5, consideremos os seguintes casos:

Caso 1: $\|v_n\| \leq 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $v_n \rightarrow 0$ em E_1 com $n \rightarrow \infty$.

Caso 2: $\|v_n\| \rightarrow +\infty$ com $n \rightarrow \infty$.

Caso 3: Existe, $\delta > 0$ e $M > 0$ tal que $\delta \leq \|v_n\| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Suponha que o primeiro caso ocorra. Portanto, $v_n \rightarrow 0$ em E . Segue de (3-16),

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n}\|v_n\|^2 &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^2 + V(x)f^2(v_n)) dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x)f^2(v_n) dx \\ &\quad - \frac{\mu}{p} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n)|^p dx - \frac{1}{2 \cdot 2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{2 \cdot 2^*} dx. \end{aligned} \quad (3-17)$$

Usando a condição (K_1) e dividindo (3-17) por $\|v_n\|^2$, temos

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + V(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 \right) dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx.$$

Aqui enfatizamos que $w_n = v_n/\|v_n\|$. Como E_1 é de dimensão finita $w_n \rightarrow w$ em E_1 e $w \neq 0$. Usando Lema 1.1.1 (f_3), obtemos

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx. \quad (3-18)$$

Usando a convergência forte, imersão do espaço E nos espaços de Lebesgue $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $s \in [2, 2^*]$, e o fato que w é não nulo, obtemos do Lema 1.1.1 (f_4) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} q(x) w^2 dx. \quad (3-19)$$

Passando o limite em (3-18) e usando a convergência obtida em (3-19), obtemos

$$0 \leq \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) w^2 dx.$$

Aplicando o Lema 2.1.2 - (2-11) e usando que $\|w\| = 1$, obtemos que $\lambda \leq \lambda_j$. Essa última desigualdade contraria a hipótese sobre λ . Portanto, o primeiro caso é impossível.

Suponhamos agora que o segundo caso ocorra. Então a menos de uma subsequência, $\|v_n\| \rightarrow \infty$ com $n \rightarrow \infty$. Defina $w_n = v_n/\|v_n\|$. Portanto, a menos de subsequência, temos que

$$\begin{cases} w_n \rightarrow w & \text{fortemente em } E_1, w \neq 0, \\ w_n \rightarrow w & \text{fortemente em } L^s(\mathbb{R}^N), \\ w_n(x) \rightarrow w(x), & \text{q. t. p. em } \mathbb{R}^N, \\ |w_n(x)| \leq h_s(x), & h_s \in L^s(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (3-20)$$

para qualquer $2 \leq s \leq 2^*$ e $n \rightarrow \infty$. Com um argumento análogo ao primeiro caso, dividimos a desigualdade (3-17) por $\|v_n\|^2$, obtendo a desigualdade a seguir

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n} &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + V(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 \right) dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} w_n^2 dx \\ &\quad - \frac{\mu}{p} \int_{\mathbb{R}^N} K(x) \frac{|f(v_n)|^p}{v_n^2} w_n^2 dx - \frac{1}{2 \cdot 2^*} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(v_n)|^{2 \cdot 2^*}}{v_n^2} w_n^2 dx. \end{aligned}$$

Usando as condições (q_1) , (K_1) e o Lema 1.1.1 (f_3) , temos

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} - \frac{\mu}{p} k_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(v_n)|^p}{v_n^2} w_n^2 dx.$$

Neste caso, segue que

$$\frac{\mu}{p} k_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(v_n)|^p}{v_n^2} w_n^2 dx \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \quad (3-21)$$

Aplicado (3-20), temos que $|[w \neq 0]| > 0$, onde $[w \neq 0] = \{x \in \mathbb{R}^N | w(x) \neq 0\}$. Consequentemente, $|v_n(x)| \rightarrow +\infty$ q. t. p. $x \in [w \neq 0]$ com $n \rightarrow \infty$. Aplicando o Lema de Fatou sobre $[w \neq 0]$ em (3-21) e usando Lema 2.1.4 (f_{10}) , obtemos que $\infty \leq 1/2$, o qual é um absurdo. Portanto, o segundo caso é impossível.

Neste momento, temos necessariamente que o caso 3 deve ocorrer. Assim, existe $v \in E_1$ tal que, a menos de uma subsequência

$$\begin{cases} v_n \rightarrow v & \text{fortemente em } E_1, \delta \leq \|v\| \leq M, \\ v_n \rightarrow v & \text{fortemente em } L^s(\mathbb{R}^N), \\ v_n(x) \rightarrow v(x), & \text{q. t. p. em } \mathbb{R}^N, \\ |v_n(x)| \leq h_s(x), & h_s \in L^s(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (3-22)$$

para qualquer $2 \leq s \leq 2^*$.

Analogamente ao primeiro caso, dividimos (3-17) por $\|v_n\|^2$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n} &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + V(x) \frac{f^2(v_n)}{\|v_n\|^2} \right) dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) \frac{f^2(v_n)}{\|v_n\|^2} dx \\ &\quad - \frac{\mu}{p} \int_{\mathbb{R}^N} K(x) \frac{|f(v_n)|^p}{\|v_n\|^2} dx - \frac{1}{2 \cdot 2^*} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(v_n)|^{2 \cdot 2^*}}{\|v_n\|^2} dx. \end{aligned}$$

onde $w_n = v_n / \|v_n\|$. Usando o Lema 1.1.1 (f_3) e as condições (q_1) e (K_1), obtemos

$$\frac{\mu}{p} k_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(v_n)|^p}{\|v_n\|^2} dx \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}. \quad (3-23)$$

Passando o limite em (3-23), usando (3-22) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\frac{\mu}{p} k_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(v)|^p}{\|v\|^2} dx \leq \frac{1}{2}. \quad (3-24)$$

Como $\delta \leq \|v\| \leq M$, podemos reescrever (3-24) como

$$\mu \frac{k_0 \delta^{p-2}}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{|f(v)|}{|v|} \right]^p |w|^p dx \leq \frac{1}{2}, \quad (3-25)$$

onde $w = v / \|v\|$. Seguindo, neste momento, as mesmas ideias usadas na demonstração da Proposição 2.2.5, temos que usando as equivalências entre as normas $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_p$ existe uma constante $\mu_1 > 0$ tal que escolhendo $\mu > \mu_1$ o terceiro caso não pode ocorrer.

Portanto, todos os casos são impossíveis, desde que $\mu > \mu_1$. Assim, a afirmação feita em (3-15) é verdadeira. Note que,

$$J_\mu(v) = \widehat{J}_\mu(v) - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) f(v) dx$$

temos que para $\mu > \mu_1$ e $v \in E_1$

$$J_\mu(v) \leq -\theta \|v\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) f(v) dx.$$

Usando a desigualdade de Hölder, Lema 1.1.1 (f_3), (h_1) e a imersão de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$J_\mu(v) \leq -\theta \|v\|^2 + S^{-1} \|h\|_{2N/(N+2)} \|v\|$$

Analogamente ao que foi feito na Proposição 2.2.5, Capítulo 2, definimos $g(t) = -\theta t^2 + S^{-1} \|h\|_{2N/(N+2)} t$. Então $g(t)$ atinge o valor máximo para

$$t_{\max} = \frac{S^{-1} \|h\|_{2N/(N+2)}}{2\theta}.$$

Desta forma, temos que

$$J_\mu(v) \leq \frac{S^{-2} \|h\|_{2N/(N+2)}^2}{4\theta} \leq \sigma$$

desde que $\|h\|_{2N/(N+2)} \leq 2S\sqrt{\sigma\theta}$. Portanto, $J_\mu(v) \leq \sigma$, desde que $\|h\|_{2N/(N+2)} \leq \varepsilon_2$ com $\varepsilon_2 = 2S\sqrt{\sigma\theta}$ e $\mu > \mu_1$. $\square$

A próxima proposição fornece que o funcional J_μ restrito a um subespaço de dimensão finita assume um valor máximo.

Proposição 3.2.3 *Suponha que (V_1) , (q_1) , (K_1) e (h_1) são satisfeitas. Seja Q um subespaço de dimensão finita de E . Então existe $R > 0$, com R dependendo da dimensão do subespaço Q , tal que $J_\mu(v) \leq 0$ para todo $v \in Q$ com $\|v\| > R$.*

Demonstração. Suponhamos que o resultado seja falso. Portanto, para cada $v \in Q$ existe $R_v > 0$ tal que $J_\mu(v) > 0$, com $\|v\| > R_v$. Assim, existe uma sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\|v_n\| > n$ e $J_\mu(v_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, devemos ter

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^2 + V(x)f^2(v_n)) dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x)f^2(v_n) dx \\ &- \frac{\mu}{p} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n)|^p dx - \frac{1}{2 \cdot 2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{2 \cdot 2^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)f(v_n) dx. \end{aligned}$$

Usando Lema 1.1.1 (f_3) e as condições (q_1) e (K_1) , temos

$$0 < \frac{1}{2} \|v_n\|^2 - \frac{1}{2 \cdot 2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{2 \cdot 2^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)f(v_n) dx. \quad (3-26)$$

Aplicando (h_1) , Lema 1.1.1 (f_3) , desigualdade de Hölder e a imersão de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, temos que existe uma constante C tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)f(v_n) dx \leq C \|v_n\|.$$

Usando essa estimativa em (3-26), temos

$$0 < \frac{1}{2} \|v_n\|^2 - \frac{1}{2 \cdot 2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{2 \cdot 2^*} dx + C \|v_n\| \quad (3-27)$$

A sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz que, $\|v_n\| \rightarrow \infty$ com $n \rightarrow \infty$. Assim, defina $w_n = v_n / \|v_n\|$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, a menos de uma subsequência, temos as seguintes convergências:

$$\begin{cases} w_n \rightarrow w \neq 0 & \text{fortemente em } Q, \\ w_n \rightarrow w & \text{fortemente em } L^s(\mathbb{R}^N), \\ w_n(x) \rightarrow w(x), & \text{q. t. p. em } \mathbb{R}^N, \\ |w_n(x)| \leq h_s(x), & h_s \in L^s(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (3-28)$$

para qualquer $2 \leq s \leq 2^*$. Dividindo a desigualdade (3-27) por $\|v_n\|^2$, temos que

$$0 < \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^*} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(v_n)|^{2 \cdot 2^*}}{v_n^2} w_n^2 dx + o_n(1).$$

Usando (2-43) temos que $\|w \neq 0\| > 0$. Portanto obtemos que $|v_n(x)| \rightarrow +\infty$ q. t. p. $x \in [w \neq 0]$. Como uma consequência, usando o Lema 2.1.4 (f_{12}) e o Lema de Fatou, temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^*} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(v_n)|^{2 \cdot 2^*}}{v_n^2} w_n^2 dx + o_n(1) \right) \\ 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot 2^*} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(v_n)|^{2 \cdot 2^*}}{v_n^2} w_n^2 dx + \lim_{n \rightarrow \infty} o_n(1) \\ 0 &\leq \frac{1}{2} - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot 2^*} \int_{[w \neq 0]} \frac{|f(v_n)|^{2 \cdot 2^*}}{v_n^2} w_n^2 dx = -\infty \end{aligned}$$

o qual permite uma contradição. Portanto, existe $R > 0$ tal que $J_\mu(v) \leq 0$ para todo $v \in Q$ com $\|v\| \geq R$. $\square$

Aplicando a última proposição temos o seguinte corolário:

Corolário 3.2.4 *Suponha que (V_1) , (q_1) , (K_1) e (h_1) são satisfeitas. Seja Q um subespaço de dimensão finita de E . Então existe $R > \rho$, R dependendo de $\dim(Q)$, tal que $\sup J_\mu(\partial Q_R) \leq 0$ onde $\rho > 0$ é obtido na Proposição 3.2.1 e $Q_R := \{v \in Q \mid \|v\| \leq R\}$.*

Observação 9 *Note que da demonstração da Proposição 3.2.3, usando a continuidade do funcional J_μ em E , temos que existe uma constante $\beta > 0$, β dependendo da dimensão de Q e não dependendo de μ , tal que $\sup J_\mu(Q) \leq \beta$.*

Observação 10 *Usando os mesmos argumentos na Observação 6, Capítulo 2, definindo $Q := E_1 \oplus \mathbb{R}_+ e$, $Q_R = Q \cap B_R(0)$ com $R > R_0$, temos da definição 2.2.1 que existe um Linking entre $A = \partial Q_R$ e $B = \partial B_\rho \cap E_2$.*

Consideremos μ_1 obtido na Proposição 3.2.2 e $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ com ε_1 e ε_2 obtido na Proposição 3.2.1 e Proposição 3.2.2, respectivamente, escolhendo $\mu > \mu_1$ podemos escrever nosso próximo resultado da seguinte forma:

Proposição 3.2.5 *Suponha que (V_1) , (q_1) , (K_1) e (h_1) são satisfeitas. Suponha que exista $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 1$ tal que $\lambda_j < \lambda < \lambda_{j+1}$. Então o funcional J_μ possui uma sequência de Palais - Smale de nível c_μ , $(PS)_{c_\mu}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em E com c_μ dado por*

$$c_\mu := \inf_{\Gamma \in \Phi} \sup_{s \in [0,1], u \in \partial Q_R} J_\mu(\Gamma(s, u)), \quad (3-29)$$

com $\Gamma \in C([0,1] \times E, E)$, desde que $\mu > \mu_1$ e $\|h\|_{2N/(N+2)} \leq \varepsilon$.

Relembremos que, de acordo com a Definição 1.3.1, uma sequência $(PS)_{c_\mu}$ para o funcional energia J_μ é uma sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em E tal que

$$J_\mu(v_n) \rightarrow c_\mu \quad \text{e} \quad J'_\mu(v_n) \rightarrow 0 \quad (3-30)$$

Devido a falta de compacidade nas imersões do espaço E nos espaços de Lebesgue $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $s \in [2, 2^*]$ temos uma dificuldade para mostrar que o nosso funcional energia J_μ satisfaz a condição $(PS)_{c_\mu}$, apresentada na Definição 1.3.2. Nesse contexto devemos mostrar que mesmo com a falta de compacidade é possível encontrar pontos críticos não triviais para o nosso funcional J_μ . No que se segue, mostraremos primeiramente que toda sequência $(PS)_{c_\mu}$ associada ao funcional J_μ são limitadas.

Proposição 3.2.6 *Suponha que (V_1) , (q_1) , (K_1) e (h_1) são satisfeitas. Suponha que exista $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 1$ tal que $\lambda_j < \lambda < \lambda_{j+1}$. Então toda sequência $(PS)_{c_\mu}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$, associada ao funcional J_μ é limitada.*

Demonstração. Seja $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ uma sequência $(PS)_{c_\mu}$ para o funcional J_μ . Então, dado qualquer $\phi \in E$, temos

$$\begin{aligned} \langle J'_\mu(v_n), \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla \phi + V(x) f(v_n) f'(v_n) \phi dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} q(x) f(v_n) f'(v_n) \phi dx \\ &\quad - \mu \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |f(v_n)|^{p-2} f(v_n) f'(v_n) \phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{2 \cdot 2^* - 2} f(v_n) f'(v_n) \phi dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) f'(v_n) \phi dx. \end{aligned}$$

Usando as propriedades da função f dadas no Lema 1.1.1, temos que $f(v_n)/f'(v_n) \in E$.

Portanto, fazendo $\phi = f(v_n)/f'(v_n)$, obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle J'_\mu(v_n), \frac{f(v_n)}{f'(v_n)} \right\rangle &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + V(x) f^2(v_n) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} q(x) f^2(v_n) dx \\ &\quad - \mu \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |f(v_n)|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{2 \cdot 2^*} dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) f(v_n) dx. \end{aligned}$$

Novamente, usando o Lema 1.1.1, temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left\| \frac{f(v_n)}{f'(v_n)} \right\| \leq C \|v_n\|.$$

Portanto, usando (3-30), inferimos que

$$\begin{aligned} C_1 + o_n(1) \|v_n\| &\geq J_\mu(v_n) - \frac{1}{p} \left\langle J'_\mu(v_n), \frac{f(v_n)}{f'(v_n)} \right\rangle \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + V(x) f^2(v_n) dx - \lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} q(x) f^2(v_n) dx \\ &\quad - \left(\frac{1}{2 \cdot 2^*} - \frac{1}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{2 \cdot 2^*} dx - \left(1 - \frac{1}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} h(x) f(v_n) dx, \end{aligned}$$

para alguma constante positiva C_1 . Usando Lema 1.1.1 (f_3), condição (h_1) e a imersão contínua de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\left(1 - \frac{1}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} h(x) f(v_n) dx \leq C_2 \|v_n\|$$

onde C_2 é uma constante positiva dependendo de p , $\|h\|_{2N/(N+2)}$ e da melhor constante da imersão de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Usando essa estimativa obtemos

$$\theta_p \int_{\mathbb{R}^N} q(x) f^2(v_n) dx + C_1 + (C_2 + o_n(1)) \|v_n\| \geq \kappa_p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + V(x) f^2(v_n) dx, \quad (3-31)$$

onde $\theta_p = \lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) > 0$ e $\kappa_p = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{p} \right) > 0$.

Suponhamos por contradição que, a menos de subsequência, $\|v_n\| \rightarrow \infty$ com $n \rightarrow \infty$. Defina, $w_n = v_n/\|v_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\|w_n\| = 1$ e a menos de subsequência temos que

$$\begin{cases} w_n \rightharpoonup w & \text{fracamente em } E, \\ w_n \rightarrow w & \text{fortemente em } L^s_{loc}(\mathbb{R}^N), \\ w_n(x) \rightarrow w(x), & \text{q. t. p. em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

para qualquer $1 \leq s < 2^*$. Dividindo (3-31) por $\|v_n\|^2$, temos que

$$\theta_p \int_{\mathbb{R}^N} q(x) \frac{f^2(v_n)}{|v_n|^2} w_n^2 dx + o_n(1) \geq \kappa_p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 + \frac{V(x) f^2(v_n)}{\|v_n\|^2} dx. \quad (3-32)$$

De modo análogo a Proposição 2.2.9, (2-51), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} q(x) \frac{f^2(v_n)}{|v_n|^2} w_n^2 dx = o_n(1).$$

Usando a última identidade e (3-32) temos que

$$o_n(1) \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 + \frac{V(x) f^2(v_n)}{\|v_n\|^2} dx \geq 0.$$

Assim, temos as seguintes convergências

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 dx = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x) f^2(v_n)}{\|v_n\|^2} dx = 0. \quad (3-33)$$

Como $\|w_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_n|^2 + V(x) w_n^2) dx = 1.$$

Consequentemente, por (3-33)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) w_n^2 dx = 1. \quad (3-34)$$

Por outro lado, definindo os conjuntos

$$A_n := \{x \in \mathbb{R}^N \mid |v_n| > 1\} \quad \text{e} \quad B_n := \{x \in \mathbb{R}^N \mid |v_n| \leq 1\},$$

escrevemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) w_n^2 dx = \int_{A_n} V(x) w_n^2 dx + \int_{B_n} V(x) w_n^2 dx. \quad (3-35)$$

Analogamente como feito na demonstração da Proposição 2.2.9, mostramos que

$$\int_{A_n} V(x) w_n^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \int_{B_n} V(x) w_n^2 dx \rightarrow 0 \quad (3-36)$$

com $n \rightarrow \infty$. Usando (3-36) em (3-35), obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) w_n^2 dx \rightarrow 0$$

com $n \rightarrow \infty$. Assim, obtemos uma contradição com o limite dado em (3-34). Consequen-

temente, concluímos que $(v_n)_{n \in \mathbb{R}^N}$ é uma sequência limitada.

□

Devido a falta de compacidade nas imersões dos espaços de Sobolev, vamos seguir a mesma estratégia utilizada no Capítulo 2 demonstrando o comportamento das sequências de Palais Smale que convergem fracamente para zero. Devido a presença do termo crítico, esta propriedade é verificada para o nível c_μ abaixo de uma constante fixada. Para garantir esse resultado, seguimos as mesmas ideias usadas em [55], consideraremos alguns lemas que apresentam algumas convergências necessárias para o estudo de sequências de Palais-Smale que convergem fracamente para zero.

Lema 3.2.7 *Suponha que a condição (V_1) seja verificada. Se $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E tal que $v_n \rightarrow 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 < s < 2^*$ com $n \rightarrow \infty$, então*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) (f^2(v_n) - v_n^2) dx &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) (v_n^2 - f(v_n)f'(v_n)v_n) dx &= 0 \end{aligned}$$

Demonstração. Para provar a primeira convergência fixe $\delta_1 > 0$ que será escolhido posteriormente. Então podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) (f^2(v_n) - v_n^2) dx = \int_{[|v_n| > \delta_1]} V(x) (f^2(v_n) - v_n^2) dx + \int_{[|v_n| \leq \delta_1]} V(x) (f^2(v_n) - v_n^2) dx. \quad (3-37)$$

Usando a condição (V_1) e o Lema 1.1.1 (f_3) , temos que para $2 < s < 2^*$

$$\begin{aligned} \left| \int_{[|v_n| > \delta_1]} V(x) (f^2(v_n) - v_n^2) dx \right| &\leq \int_{[|v_n| > \delta_1]} V(x) |f^2(v_n) - v_n^2| dx \\ &\leq C \int_{[|v_n| > \delta_1]} |v_n|^2 dx \leq \frac{C}{\delta_1^{s-2}} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^s dx \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3-38)$$

com $n \rightarrow \infty$. Por outro lado, de acordo com o Lema 1.1.1 (f_4) , temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|(f^2(t)/t^2 - 1)| \leq \varepsilon$ sempre que $|t| \leq \delta$. Desta forma, fazendo $\delta_1 = \delta$, temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{[0 < |v_n| \leq \delta_1]} V(x) (f^2(v_n) - v_n^2) dx \right| &= \left| \int_{[0 < |v_n| \leq \delta_1]} V(x) v_n^2 \left(\frac{f^2(v_n)}{v_n^2} - 1 \right) dx \right| \\ &\leq \int_{[0 < |v_n| \leq \delta_1]} V(x) v_n^2 \left| \frac{f^2(v_n)}{v_n^2} - 1 \right| dx \\ &\leq \varepsilon \int_{[0 < |v_n| \leq \delta_1]} V(x) v_n^2 dx \leq C\varepsilon, \end{aligned} \quad (3-39)$$

onde aqui foi usado que a sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Portanto, usando (3-38) e (3-39) em (3-37), obtemos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |V(x) (f^2(v_n) - v_n^2)| dx \leq C\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário e não depende de $n \in \mathbb{N}$, temos que a primeira convergência fica provada.

Para a prova da segunda convergência, observemos primeiramente que o Lema 1.1.1 (f_4) e a expressão implícita da derivada da função f dada em 1-31 permitem que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)f'(t)t}{t^2} = 1. \quad (3-40)$$

Assim, fixando $\delta > 0$ podemos escrever a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) (v_n^2 - f(v_n)f'(v_n)v_n) dx &= \int_{[|v_n| > \delta]} V(x) (v_n^2 - f(v_n)f'(v_n)v_n) dx \\ &+ \int_{[|v_n| \leq \delta]} V(x) (v_n^2 - f(v_n)f'(v_n)v_n) dx. \end{aligned}$$

Uma vez que temos a igualdade acima para cada $\delta > 0$, usamos o limite dado em (3-40) e as mesmas ideias da demonstração da primeira parte para concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) (v_n^2 - f(v_n)f'(v_n)v_n) dx = 0.$$

Desta forma concluímos a demonstração do lema. □

Lema 3.2.8 *Seja $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E tal que $v_n \rightarrow 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 < s < 2^*$, com $n \rightarrow \infty$. Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(2^{\frac{2^*}{2}} |v_n|^{2^*} - |f(v_n)|^{2 \cdot 2^*} \right) dx = 0.$$

Demonstração. Fixemos $R > 0$ que será escolhido posteriormente, desta forma podemos escrever a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left(2^{\frac{2^*}{2}} |v_n|^{2^*} - |f(v_n)|^{2 \cdot 2^*} \right) dx &= \int_{[|v_n| > R]} \left(2^{\frac{2^*}{2}} |v_n|^{2^*} - |f(v_n)|^{2 \cdot 2^*} \right) dx \\ &+ \int_{[|v_n| \leq R]} \left(2^{\frac{2^*}{2}} |v_n|^{2^*} - |f(v_n)|^{2 \cdot 2^*} \right) dx. \end{aligned} \quad (3-41)$$

Usando o Lema 1.1.1 (f_7)

$$\begin{aligned} \left| \int_{[|v_n| \leq R]} \left(2^{\frac{2^*}{2}} |v_n|^{2^*} - |f(v_n)|^{2 \cdot 2^*} \right) dx \right| &\leq 2^{\frac{(2^*+1)}{2}} \int_{[|v_n| \leq R]} |v_n|^{2^*} dx \\ &\leq 2^{\frac{(2^*+1)}{2}} R^{2^*-s} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^s dx \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3-42)$$

para todo $2 < s < 2^*$.

Por outro lado, de acordo com o Lema 1.1.1 (f_5), dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher R suficientemente grande de modo que

$$\left| 1 - \left(\frac{f(t)}{2^{\frac{1}{4}} |t|^{\frac{1}{2}}} \right)^{2 \cdot 2^*} \right| \leq \varepsilon,$$

para $|t| \geq R$. Assim, para R suficientemente grande segue que

$$\begin{aligned} \left| \int_{[|v_n| > R]} \left(2^{\frac{2^*}{2}} |v_n|^{2^*} - |f(v_n)|^{2 \cdot 2^*} \right) dx \right| &\leq \int_{[|v_n| > R]} \left| 2^{\frac{2^*}{2}} |v_n|^{2^*} - |f(v_n)|^{2 \cdot 2^*} \right| dx \\ &= \int_{[|v_n| > R]} 2^{\frac{2^*}{2}} |v_n|^{2^*} \left| 1 - \left(\frac{|f(v_n)|}{2^{\frac{1}{4}} |v_n|^{\frac{1}{2}}} \right)^{2 \cdot 2^*} \right| dx \\ &\leq \varepsilon 2^{\frac{2^*}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx \leq C\varepsilon, \end{aligned} \quad (3-43)$$

para alguma constante $C > 0$. Usando (3-42) e (3-43) em (3-41), obtemos para R suficientemente grande que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left(2^{\frac{2^*}{2}} |v_n|^{2^*} - |f(v_n)|^{2 \cdot 2^*} \right) dx \right| \leq C\varepsilon.$$

Como ε pode ser escolhido arbitrariamente concluímos a demonstração do lema. $\square$

Lema 3.2.9 *Seja $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E tal que $v_n \rightarrow 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 < s < 2^*$, com $n \rightarrow \infty$. Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|f(v_n)|^{2 \cdot 2^* - 2} f(v_n) f'(v_n) v_n - 2^{\frac{2^*-2}{2}} |v_n|^{2^*} \right) dx = 0.$$

Demonstração. De forma semelhante a demonstração do lema anterior, fixe $R > 0$ que

será escolhido posteriormente. Neste momento, escrevemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^N} \left(|f(v_n)|^{2 \cdot 2^* - 2} f(v_n) f'(v_n) v_n - 2^{\frac{2^* - 2}{2}} |v_n|^{2^*} \right) dx \\
 = & \int_{[|v_n| \leq R]} \left(|f(v_n)|^{2 \cdot 2^* - 2} f(v_n) f'(v_n) v_n - 2^{\frac{2^* - 2}{2}} |v_n|^{2^*} \right) dx \\
 + & \int_{[|v_n| > R]} \left(|f(v_n)|^{2 \cdot 2^* - 2} f(v_n) f'(v_n) v_n - 2^{\frac{2^* - 2}{2}} |v_n|^{2^*} \right) dx.
 \end{aligned} \tag{3-44}$$

Usando o Lema 1.1.1 (f_6) e (f_7), temos que

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{[|v_n| \leq R]} \left(|f(v_n)|^{2 \cdot 2^* - 2} f(v_n) f'(v_n) v_n - 2^{\frac{2^* - 2}{2}} |v_n|^{2^*} \right) dx \right| \\
 \leq & \int_{[|v_n| \leq R]} \left| |f(v_n)|^{2 \cdot 2^* - 2} f(v_n) f'(v_n) v_n - 2^{\frac{2^* - 2}{2}} |v_n|^{2^*} \right| dx \\
 \leq & 3 \cdot 2^{\frac{2^* - 2}{2}} \int_{[|v_n| \leq R]} |v_n|^{2^*} dx \leq 3R^{2^* - s} 2^{\frac{2^* - 2}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^s dx \rightarrow 0,
 \end{aligned} \tag{3-45}$$

para todo $2 < s < 2^*$.

Para obter uma estimativa para a integral definida no conjunto $[|v_n| > R]$, note primeiramente que

$$\frac{|f(t)|^{2 \cdot 2^* - 2} f(t) f'(t) t}{2^{\frac{2^* - 2}{2}} |t|^{2^*}} = \frac{1}{\left([2f^2(t)]^{-1} + 1 \right)^{1/2}} \left(\frac{f(|t|)}{2^{1/4} |t|^{1/2}} \right)^{2 \cdot 2^* - 2}, \quad \text{com } t \neq 0.$$

Usando essa igualdade, temos do Lema 1.1.1 (f_5) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|^{2 \cdot 2^* - 2} f(t) f'(t) t}{2^{\frac{2^* - 2}{2}} |t|^{2^*}} = 1.$$

Assim, podemos escolher R suficientemente grande de modo que

$$\left| \frac{|f(t)|^{2 \cdot 2^* - 2} f(t) f'(t) t}{2^{\frac{2^* - 2}{2}} |t|^{2^*}} - 1 \right| \leq \varepsilon$$

desde que $t > R$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{[|v_n|>R]} \left(|f(v_n)|^{2^*-2} f(v_n) f'(v_n) v_n - 2^{\frac{2^*-2}{2}} |v_n|^{2^*} \right) dx \right| \\
 & \leq \int_{[|v_n|>R]} \left| |f(v_n)|^{2^*-2} f(v_n) f'(v_n) v_n - 2^{\frac{2^*-2}{2}} |v_n|^{2^*} \right| dx \\
 & = 2^{\frac{2^*-2}{2}} \int_{[|v_n|>R]} |v_n|^{2^*} \left| \frac{|f(v_n)|^{2^*-2} f(v_n) f'(v_n) v_n}{2^{\frac{2^*-2}{2}} |v_n|^{2^*}} - 1 \right| dx \\
 & \leq \varepsilon 2^{\frac{2^*-2}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx \leq C\varepsilon,
 \end{aligned} \tag{3-46}$$

para alguma constante $C > 0$. Usando (3-45) e (3-46) em (3-44), obtemos para R suficientemente grande que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left(|f(v_n)|^{2^*-2} f(v_n) f'(v_n) v_n - 2^{\frac{2^*-2}{2}} |v_n|^{2^*} \right) dx \right| \leq C\varepsilon.$$

Como ε pode ser escolhido arbitrariamente, concluímos a demonstração do lema. $\square$

Os resultados demonstrados anteriormente ajudam a mostrar que a condição de não-anulamento, como mencionada na Observação 7, Capítulo 2, é verificada quando o nível c_μ está abaixo de $S^{N/2}/2N$ para o caso crítico.

Lema 3.2.10 *Suponha que (V_1) , (q_1) , (K_1) e (h_1) são satisfeitas. Suponha que existe $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 1$ tal que $\lambda_j < \lambda < \lambda_{j+1}$. Seja $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência $(PS)_{c_\mu}$ com $v_n \rightharpoonup 0$ fracamente em E e $c_\mu < S^{N/2}/2N$. Então, existem $r, \eta > 0$ e uma sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ tais que $|y_n| \rightarrow \infty$ e*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(y_n)} |v_n|^2 dx \geq \eta > 0.$$

Demonstração. Suponha que o resultado não seja verdadeiro. Então usando o resultado de Lions (ver [29, 60]), temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^s dx = 0 \tag{3-47}$$

para todo $2 < s < 2^*$. Assim, usando a condição (K_1) , Lema 1.1.1, (f_6) , (f_7) , garantimos as seguintes convergências

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |f(v_n)|^p dx = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |f(v_n)|^{p-2} f(v_n) f'(v_n) v_n dx. \tag{3-48}$$

Note que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ é uma sequência $(PS)_{c_\mu}$ para o funcional energia J_μ . Assim,

podemos escrever a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}
 c_\mu + o_n(1) &= J_\mu(v_n) - \frac{1}{2} \langle J'_\mu(v_n), v_n \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) (f^2(v_n) - f(v_n)f'(v_n)v_n) dx \\
 &\quad - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) (f^2(v_n) - f(v_n)f'(v_n)v_n) dx \\
 &\quad - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |f(v_n)|^{p-2} (f^2(v_n) - f(v_n)f'(v_n)v_n) dx \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} |f(v_n)|^{2 \cdot 2^* - 2} f(v_n)f'(v_n)v_n - \frac{1}{2 \cdot 2^*} |f(v_n)|^{2 \cdot 2^*} \right) dx \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} h(x) (f(v_n) - f'(v_n)v_n) dx.
 \end{aligned} \tag{3-49}$$

Usando (3-48) em (3-49), temos as seguintes identidades

$$\begin{aligned}
 c_\mu + o_n(1) &= J_\mu(v_n) - \frac{1}{2} \langle J'_\mu(v_n), v_n \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) (f^2(v_n) - f(v_n)f'(v_n)v_n) dx \\
 &\quad - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) (f^2(v_n) - f(v_n)f'(v_n)v_n) dx \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} |f(v_n)|^{2 \cdot 2^* - 2} f(v_n)f'(v_n)v_n - \frac{1}{2 \cdot 2^*} |f(v_n)|^{2 \cdot 2^*} \right) dx \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} h(x) (f(v_n) - f'(v_n)v_n) dx.
 \end{aligned} \tag{3-50}$$

Neste momento, afirmamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) (f^2(v_n) - f(v_n)f'(v_n)v_n) dx = 0 \tag{3-51}$$

De fato, escrevendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) (f^2(v_n) - f(v_n)f'(v_n)v_n) dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x) [(f^2(v_n) - v_n^2) - (f(v_n)f'(v_n)v_n - v_n^2)] dx,$$

aplicamos o Lema 3.2.7 e concluímos a afirmação (3-51). Agora, aplicando o Lema 3.2.8 e o Lema 3.2.9 podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} |f(v_n)|^{2 \cdot 2^* - 2} f(v_n)f'(v_n)v_n - \frac{1}{2 \cdot 2^*} |f(v_n)|^{2 \cdot 2^*} \right) dx = o_n(1) + \frac{2^{\frac{2-2^*}{2}}}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx. \tag{3-52}$$

Aplicando Lema 1.1.1 e Lema 2.1.1, (f_3) , (f_6) , temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) (f^2(v_n) - f(v_n)f'(v_n)v_n) dx = 0. \quad (3-53)$$

Usando que $v_n \rightharpoonup 0$ em E e que $h \in L^{2N/(N+2)}(\mathbb{R}^N)$, ao qual é o espaço dual de $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, temos do Lema 1.1.1 (f_2) e (f_3) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(x) f'(v_n) v_n dx = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(x) f(v_n) dx = 0.$$

As convergências acima permitem concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(x) (f(v_n) - f'(v_n)v_n) dx = 0. \quad (3-54)$$

Por (3-51), (3-52), (3-53) e (3-54) podemos reescrever a igualdade (3-50) da seguinte forma

$$c_\mu + o_n(1) = \int_{\mathbb{R}^N} 2^{\frac{2-2^*}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) |v_n|^{2^*} dx = \frac{2^{\frac{2-2^*}{2}}}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx.$$

Usando esta última igualdade garantimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx = \frac{Nc_\mu}{2^{\frac{2-2^*}{2}}} > 0. \quad (3-55)$$

Utilizando (3-55) e Lema 3.2.9, obtemos a seguinte convergência

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{2 \cdot 2^* - 2} f(v_n) f'(v_n) v_n dx = Nc_\mu. \quad (3-56)$$

Neste momento, afirmamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{2 \cdot 2^* - 2} f(v_n) f'(v_n) v_n dx - \|v_n\|^2 \right) = 0. \quad (3-57)$$

Assumindo, por enquanto que esta afirmação é verdadeira, obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|^2 = Nc_\mu. \quad (3-58)$$

Então, usando a imersão de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx \leq \left(\frac{1}{S} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx \right)^{2^*/2} \leq \left(\frac{\|v_n\|^2}{S} \right)^{2^*/2}.$$

Aqui S denota a melhor constante da imersão de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Enfim, fazendo

$n \rightarrow \infty$ na desigualdade acima e usando (3-55) e (3-58), obtemos que

$$\frac{Nc_\mu}{2^{\frac{2^*-2}{2}}} \leq \left(\frac{Nc_\mu}{S} \right)^{2^*/2}.$$

Esta desigualdade implica que $c_\mu \geq \frac{S^{N/2}}{2N}$. Portanto, essa conclusão contraria a hipótese de $c_\mu < \frac{S^{N/2}}{2N}$. Logo, o resultado está concluído, a menos da afirmação feita em (3-57). Para a prova da afirmação em (3-57), note que aplicando Lema 3.2.7

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f(v_n) f'(v_n) v_n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) v_n^2 dx. \quad (3-59)$$

Usando a condição (q_1) , Lema 1.1.1 (f_6) e o Lema 2.1.1, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) f(v_n) f'(v_n) v_n dx = 0. \quad (3-60)$$

Agora, usando a condição (h_1) e Lema 1.1.1 (f_2) garantimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(x) f'(v_n) v_n dx = 0. \quad (3-61)$$

Finalmente, aplicando as estimativas (3-48), (3-59)-(3-61) e o fato de $\langle J'(v_n), v_n \rangle \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$ obtemos que a estimativa feita em (3-57) está provada. Assim terminamos a prova do Lema. $\square$

O próximo resultado mostra que o nível de energia c_μ dado em (3-29) está abaixo da constante $S^{N/2}/2N$ desde que o parâmetro μ seja suficientemente grande.

Lema 3.2.11 *Suponha que (V_1) , (q_1) , (K_1) e (h_1) são satisfeitas. Então existe $\mu_2 > 0$ tal que $c_\mu < S^{N/2}/2N$ para todo $\mu \geq \mu_2$, onde c_μ é dado em (3-29).*

Demonstração. Primeiramente note que existe $w_\mu \in Q$, onde $Q = E_1 \oplus R_+$ e dado na Observação 10, de tal forma que $J_\mu(w_\mu) = \max_{v \in Q} J_\mu(v)$. De fato, aplicando o Corolário 3.2.4 e Observação 9, existe $R > 0$ grande suficiente de tal forma que $J_\mu(v) \leq 0$ para todo $v \in Q \setminus B_R(0)$. Como $J_\mu \in C^1(E, \mathbb{R})$ e $Q_R = Q \cap B_R(0)$ é compacto, uma vez que Q é de dimensão finita, temos que existe $w_\mu \in Q$ tal que $J_\mu(w_\mu) = \max_{v \in Q_R} J_\mu(v)$. Aplicando a Proposição 3.2.1, $J_\mu(w_\mu) > 0$. Assim, temos que

$$J_\mu(w_\mu) = \max_{v \in Q} J_\mu(v).$$

É fácil ver que $\langle J'_\mu(w_\mu), v \rangle = 0$ para todo $v \in Q$. Afirmamos que $\|w_\mu\| \rightarrow 0$ com $\mu \rightarrow \infty$.

De fato, usando que $\langle J'_\mu(w_\mu), w_\mu \rangle = 0$, temos Usando as condições (q_1) e (K_1) que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_\mu|^2 + V(x)f(w_\mu)f'(w_\mu)w_\mu) dx &\geq \mu k_0 \int_{\mathbb{R}^N} |f(w_\mu)|^{p-2} f(w_\mu)f'(w_\mu)w_\mu dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} h(x)f'(w_\mu)w_\mu dx \end{aligned}$$

Usando o Lema 1.1.1, (f_2) , (f_3) e (f_6) e a condição (h_1) , temos

$$C\|w_\mu\| + \|w_\mu\|^2 \geq \frac{\mu k_0}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |f(w_\mu)|^p dx. \quad (3-62)$$

Argumentando por contradição, suponha que $\|w_\mu\| \not\rightarrow 0$ com $\mu \rightarrow \infty$. Neste momento, consideremos dois casos dados da seguinte forma:

Caso 1: A menos de uma subsequência $\|w_\mu\| \rightarrow \infty$ com $\mu \rightarrow \infty$.

Caso 2: Existem constantes positivas δ , M , tais que $\delta \leq \|w_\mu\| \leq M$ para todo $\mu > 0$.

Suponhamos que o primeiro caso ocorra. Defina $u_\mu = w_\mu/\|w_\mu\|$ para todo $\mu > 0$. Então, $\|u_\mu\| = 1$ para todo $\mu > 0$. Portanto, existe $u \in Q$ de tal maneira que, a menos de uma subsequência, $u_\mu \rightarrow u$ fortemente em Q , com $\|u\| = 1$. Desta forma $|w_\mu(x)| \rightarrow \infty$, q. t. p. em $[u \neq 0]$, com $\mu \rightarrow \infty$. Dividindo a desigualdade (3-62) por $\|w_\mu\|^2$, temos que

$$o_\mu(1) + 1 \geq \frac{\mu k_0}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(w_\mu)|^p}{|w_\mu|^2} u_\mu^2 dx,$$

onde $o_\mu(1) \rightarrow 0$ com $\mu \rightarrow \infty$. Usando o Lema de Fatou, Lema 2.1.4 (f_{12}) temos que

$$1 = \liminf_{\mu \rightarrow \infty} (o_\mu(1) + 1) \geq \liminf_{\mu \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mu k_0}{2} \cdot \frac{|f(w_\mu)|^p}{|w_\mu|^2} u_\mu^2 dx = +\infty$$

ao qual é uma contradição. Assim o primeiro caso não pode ocorrer.

Suponha que o segundo caso ocorra. Então, usando a desigualdade (3-62), temos que existe uma constante positiva $\bar{M}$ tal que

$$\frac{\bar{M}}{\mu} \geq \int_{\mathbb{R}^N} |f(w_\mu)|^p dx. \quad (3-63)$$

Neste caso, usando que $(w_\mu)_\mu$ é uma sequência limitada, temos que a menos de subsequência $w_\mu \rightarrow w$ fortemente em Q com $\mu \rightarrow \infty$. Além disso, $w \neq 0$. Usando o Lema de Fatou na desigualdade (3-63), temos

$$0 = \liminf_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\bar{M}}{\mu} \geq \liminf_{\mu \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f(w_\mu)|^p dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |f(w)|^p dx.$$

Portanto, $\|f(w)\|_p = 0$ e isso implica que $f(w) \equiv 0$. Em particular, $w \equiv 0$ fornecendo um absurdo.

Neste momento, temos que necessariamente $\|w_\mu\| \rightarrow 0$ com $\mu \rightarrow \infty$. Dada a definição de c_μ , usando as condições (q_1) , (K_1) e o Lema 1.1.1 (f_3) , temos que

$$\begin{aligned} c_\mu &= \inf_{\Gamma \in \Phi} \sup_{s \in [0,1], u \in \partial Q_R} J_\mu(\Gamma(s, u)) \leq \sup_{s \in [0,1], u \in \partial Q_R} J_\mu(su) \\ &\leq \frac{1}{2} \|w_\mu\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) f(w_\mu) dx \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3-64)$$

com $\mu \rightarrow \infty$. Aqui foi usado que a função $\Gamma(s, u) = su$ pertence a classe de funções apresentadas no Capítulo 2, Seção 2.2. Portanto, (3-64) mostra que $c_\mu \rightarrow 0$ com $\mu \rightarrow \infty$. Desta forma, existe $\mu_2 > 0$ tal que $c_\mu < S^{N/2}/2N$ para todo $\mu > \mu_2$. $\square$

3.3 A Prova do Teorema Principal

Nesta seção provaremos o Teorema 3.0.1. Primeiramente, defina $\mu_0 = \max\{\mu_1, \mu_2\}$, onde μ_1 e μ_2 dados na Proposição 3.2.2 e no Lema 3.2.11, respectivamente. Fixemos a função h com $\|h\|_{2N/(N+2)} \leq \varepsilon$, com $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, sendo ε_1 e ε_2 dados na Proposição 3.2.1 e na Proposição 3.2.2, respectivamente. Desta forma, podemos invocar a Proposição 3.2.5 para encontrar uma sequência de Palais Smale com nível c_μ , isto é, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ tal que

$$J_\mu(v_n) \rightarrow c_\mu \quad \text{e} \quad J'_\mu(v_n) \rightarrow 0$$

com c_μ dado na Proposição 3.2.5. Aplicando a Proposição 3.2.6, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Portanto, existe $v \in E$, tal que a menos de uma subsequência

$$\begin{cases} v_n \rightharpoonup v & \text{fracamente em } E, \\ v_n \rightarrow v & \text{fortemente em } L^s_{loc}(\mathbb{R}^N), \\ v_n(x) \rightarrow v(x), & \text{q. t. p. em } \mathbb{R}^N, \\ |v_n(x)| \leq h_s(x), & h_s \in L^s_{loc}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (3-65)$$

para qualquer $1 \leq s < 2^*$.

Lema 3.3.1 *Seja $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ uma sequência $(PS)_{c_\mu}$ para o funcional J_μ com $c_\mu > 0$, então a menos de subsequência $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em E com $n \rightarrow \infty$ e $J'_\mu(v) = 0$*

Demonstração. Aqui repetiremos as mesmas ideias usadas na demonstração feita no Lema 2.3.1, no Capítulo 2. Novamente é suficiente provar que $J'_\mu(v) = 0$. Usando que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em E , é suficiente mostrar que $\langle J'_\mu(v), \phi \rangle = 0$ para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, onde aqui $\langle \cdot, \cdot \rangle$

novamente denotará a dualidade em E^* . Assim, seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e denote $B := \text{supp } \phi$, o suporte da função ϕ . Neste caso, obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle J'_\mu(v_n) - J'_\mu(v), \phi \rangle &= \langle J'_\mu(v_n), \phi \rangle - \langle J'_\mu(v), \phi \rangle \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(v_n - v) \nabla \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) [f'(v_n)f(v_n) - f'(v)f(v)] \phi dx \\
 &\quad - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} q(x) [f'(v_n)f(v_n) - f'(v)f(v)] \phi dx \\
 &\quad - \mu \int_{\mathbb{R}^N} K(x) [|f(v_n)|^{p-2} f'(v_n)f(v_n) - |f(v)|^{p-2} f'(v)f(v)] \phi dx \\
 &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \left(|f(v_n)|^{2 \cdot 2^* - 2} f'(v_n)f(v_n) - |f(v)|^{2 \cdot 2^* - 2} f'(v)f(v) \right) \phi dx \\
 &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) [f'(v_n) - f'(v)] \phi dx. \tag{3-66}
 \end{aligned}$$

Usando (3-65), temos que $v_n \rightarrow v$ em $L^s(B)$ para $1 \leq s < 2^*$ e $v_n(x) \rightarrow v(x)$ q. t. p. em B , com $n \rightarrow \infty$. Consequentemente

$$f'(v_n)f(v_n) \rightarrow f'(v)f(v) \quad \text{q. t. p. sobre } B, \text{ com } n \rightarrow \infty,$$

$$|f(v_n)|^{p-2} f'(v_n)f(v_n) \rightarrow |f(v)|^{p-2} f'(v)f(v) \quad \text{q. t. p. sobre } B, \text{ com } n \rightarrow \infty,$$

$$|f(v_n)|^{2 \cdot 2^* - 2} f'(v_n)f(v_n) \rightarrow |f(v)|^{2 \cdot 2^* - 2} f'(v)f(v) \quad \text{q. t. p. sobre } B, \text{ com } n \rightarrow \infty,$$

$$f'(v_n) \rightarrow f'(v) \quad \text{q. t. p. sobre } B, \text{ com } n \rightarrow \infty.$$

Além disso, usando a condição (V_1) e o Lema 1.1.1 (f_9) , temos que existe uma constante positiva C_1 não dependendo de n , tal que

$$|V(x)f(v_n)f'(v_n)\phi| \leq C_1|\phi|.$$

Assim, $V(x)f(v_n)f'(v_n)\phi$ é dominada por uma função em $L^1(B)$. Novamente, usando Lema 1.1.1 (f_9) , temos

$$|q(x)f(v_n)f'(v_n)\phi| \leq 2^{-1/2}|q(x)\phi|.$$

Segue que por (q_1) e desigualdade de Hölder que $q(x)\phi \in L^1(B)$. Portanto, $q(x)f(v_n)f'(v_n)\phi$ é dominada por uma função em $L^1(B)$.

Usando (K_1) , Lema 1.1.1 (f_7) , (f_9) e as estimativas dadas em (3-65) obtemos

$$|K(x)|f(v_n)|^{p-2}f(v_n)f'(v_n)\phi| \leq C_2 \left| |v_n|^{(p-2)/2}\phi \right| \leq C_2 \left| |h_s|^{(p-2)/2}\phi \right|,$$

para alguma constante positiva C_2 . Escolhendo $s = p/(p-2)$, usando mais uma vez a desigualdade de Hölder temos $|h_s|^{(p-2)/2}\phi \in L^1(B)$. Assim, $K(x)|f(v_n)|^{p-2}f(v_n)f'(v_n)\phi$

é dominada por uma função em $L^1(B)$.

Argumentado como feito acima, temos da condição (K_1) , Lema 1.1.1, (f_7) e (f_9) , temos que

$$\left| |f(v_n)|^{2 \cdot 2^* - 2} f(v_n) f'(v_n) \phi \right| \leq C_3 \left| |v_n|^{2^* - 1} \phi \right| \leq C_3 \left| |h_s|^{2^* - 1} \phi \right|,$$

para alguma constante positiva C_3 . Escolhendo $s = 2^* - 1$ e usando a desigualdade de Hölder, obtemos que $|h_s|^{2^* - 1} \phi \in L^1(B)$. Desta forma, $|f(v_n)|^{2 \cdot 2^* - 2} f(v_n) f'(v_n) \phi$ é dominada por função em $L^1(B)$.

Aplicando o Lema 1.1.1 (f_2) e a estimativa feita em (3-65), temos que

$$\left| h(x) f'(v_n) \phi \right| \leq |h(x) \phi|.$$

Usando a condição (h_1) e a desigualdade de Hölder temos que $h(x) \phi \in L^1(B)$. Assim, segue que $h(x) f'(v_n) \phi$ é dominada por uma função em $L^1(B)$.

Usando todas essas estimativas em (3-66), Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e a convergência fraca $v_n \rightharpoonup v$ em E , temos

$$\langle J'_\mu(v_n), \phi \rangle - \langle J'_\mu(v), \phi \rangle = o_n(1)$$

Note que $\langle J'_\mu(v_n), \phi \rangle = o_n(1)$, concluindo que $\langle J'_\mu(v), \phi \rangle = 0$. Devido a arbitrariedade de $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e a densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ em E , temos que $J'_\mu(v) = 0$. Isso completa a demonstração. $\square$

Como discutido no Capítulo 2, o Lema 3.3.1 permite que o nosso problema principal (3-1) admite ao menos uma solução para qualquer $h \in L^{2N/(N+2)}(\mathbb{R}^N)$. Novamente, o caso em que $h \neq 0$ a demonstração do Teorema 3.0.1, item (i), está concluída. Neste caso a função nula não será solução do problema (3-1). No entanto, caso $h \equiv 0$, necessitamos garantir que o problema (3-1) possui uma solução fraca não trivial. Desta forma, como no Capítulo 2, vamos estudar o caso onde a condição em que $h \equiv 0$. Note que, se $v \neq 0$, a prova do Teorema 3.0.1, item (ii), segue usando o argumento padrão de densidade como feito no Lema 3.3.1. Sendo assim, consideraremos o caso onde $v \equiv 0$ e $h \equiv 0$. Neste ambiente, precisamos garantir uma solução não trivial para o problema (3-1). Relembremos que quando $h \equiv 0$ o funcional energia se torna

$$\begin{aligned} J_\mu(v) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + V(x) f^2(v) dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} q(x) f^2(v) dx \\ &\quad - \frac{\mu}{p} \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |f(v)|^p dx - \frac{1}{2 \cdot 2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |f(v)|^{2 \cdot 2^*} dx. \end{aligned} \tag{3-67}$$

Portanto, procuremos pontos críticos não triviais para o funcional (3-67). É importante enfatizar que o funcional dado em (3-67) satisfaz os mesmos resultados obtidos para o funcional (3-6). Como uma consequência, existe uma sequência $(PS)_{c_\mu}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ para o funcional energia J_μ de tal modo que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Portanto, a menos de uma subsequência, que $v_n \rightharpoonup v$ em E , para algum $v \in E$.

Agora consideramos o caso em que $v = 0$. De acordo com o Lema 3.2.11, existe $\mu_2 > 0$ tal que para todo $\mu > \mu_2$ temos que $c_\mu < S^{N/2}/2N$. Assim, escolhendo $\mu > \max\{\mu_1, \mu_2\}$, invocamos o Lema 3.2.10, obtendo uma sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $r, \eta > 0$ tal que $|y_n| \rightarrow \infty$ e

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(y_n)} |v_n|^2 dx \geq \eta > 0. \quad (3-68)$$

Defina a sequência transladada $u_n(x) = v_n(x + y_n)$, $x \in \mathbb{R}^N$. Como feito na demonstração do Teorema 2.0.1, no Capítulo 2, sem perda de generalidade, podemos assumir que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^N$. Portanto, aplicando a condição (V_1) temos que $\|v_n\| = \|u_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ é limitada. Portanto, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em E . Além disso, usando (3-68) segue que $u \neq 0$.

Neste momento, provaremos que o limite fraco da sequência transladada é um ponto crítico para o funcional energia J_μ , isto é, $\langle J'_\mu(u), \phi \rangle = 0$ para qualquer $\phi \in E$. Com essa finalidade, fixemos $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, obtemos que

$$\begin{aligned} \langle J'_\mu(u_n), \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla \phi_n + V(x - y_n) f(v_n) f'(v_n) \phi_n dx \\ &- \lambda \int_{\mathbb{R}^N} q(x - y_n) f(v_n) f'(v_n) \phi_n dx \\ &- \mu \int_{\mathbb{R}^N} K(x - y_n) |f(v_n)|^{p-2} f(v_n) f'(v_n) \phi_n dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{2 \cdot 2^* - 2} f(v_n) f'(v_n) \phi_n dx, \end{aligned} \quad (3-69)$$

onde $\phi_n(x) = \phi(x - y_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando que as funções V e K são ambas, 1-periódicas em $x_1, \dots, x_N$, temos que

$$\begin{aligned} \langle J'_\mu(u_n), \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla \phi_n + V(x) f(v_n) f'(v_n) \phi_n dx \\ &- \lambda \int_{\mathbb{R}^N} q(x - y_n) f(v_n) f'(v_n) \phi_n dx \\ &- \mu \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |f(v_n)|^{p-2} f(v_n) f'(v_n) \phi_n dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{2 \cdot 2^* - 2} f(v_n) f'(v_n) \phi_n dx. \end{aligned} \quad (3-70)$$

Note que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência $(PS)_{c_\mu}$ para J_μ , temos que $\langle J'_\mu(v_n), \phi_n \rangle \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$. Usando esta convergência e (3-70) temos que

$$\langle J'_\mu(v_n), \phi_n \rangle - \langle J'_\mu(u_n), \phi \rangle = -\lambda \int_{\mathbb{R}^N} (q(x) - q(x - y_n)) f(v_n) f'(v_n) \phi_n dx \quad (3-71)$$

Argumentando de maneira análoga ao que foi feito no Capítulo 2 para a prova da afirmação (2-74) mostramos que

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} (q(x) - q(x - y_n)) f(v_n) f'(v_n) \phi_n dx \rightarrow 0$$

com $n \rightarrow \infty$. Assim, aplicando essa convergência em (3-71), obtemos que

$$\langle J'_\mu(v_n), \phi_n \rangle - \langle J'_\mu(u_n), \phi \rangle \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Usando que $\langle J'_\mu(v_n), \phi_n \rangle \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$, uma vez que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência $(PS)_{c_\mu}$ para o funcional J_μ e $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, temos que $\langle J'_\mu(u_n), \phi \rangle \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$ para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Portanto, argumentando similarmente como feito na demonstração do Lema 3.3.1, obtemos que u é um ponto crítico não trivial para o funcional J_μ . Assim, concluímos a demonstração do Teorema 3.0.1.

Apêndice

Neste apêndice apresentaremos alguns resultados de integrabilidade uniforme e continuidade absoluta da integral. Além disso, enunciamos um Teorema Geral de Convergência de Vitalli. Para mais detalhes sobre esse assunto, recomendamos a referência [3, 45].

4.1 Integrabilidade Uniforme e Tightness

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço com medida não negativa μ (finita ou com valores em $[0, +\infty]$).

Definição 4.1.1 *Uma sequência de funções $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $L^1(\mu)$ é uniformemente integrável se*

$$\lim_{C \rightarrow +\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{[|w_n| > C]} |w_n| d\mu = 0. \quad (4-1)$$

Definição 4.1.2 *Uma sequência de funções $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $L^1(\mu)$ satisfaz a condição uniformemente absolutamente contínua da integral se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\int_A |w_n| d\mu < \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ se } \mu(A) < \delta. \quad (4-2)$$

Uma função $w \in L^1(\mu)$ se $\int |w| d\mu < \infty$. Neste caso, dizemos que w é μ -integrável.

Proposição 4.1.3 *Seja uma sequência de funções $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μ -integrável que é uniformemente integrável. Então $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz a condição uniformemente absolutamente contínua da integral.*

Demonstração. Suponha que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente integrável. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $C > 0$ tal que

$$\int_{[|w_n| > C]} |w_n| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4-3)$$

Escolha $\delta = \varepsilon(2C)^{-1}$. Seja $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) < \delta$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\int_A |w_n| d\mu = \int_{A \cap [|w_n| \leq C]} |w_n| d\mu + \int_{A \cap [|w_n| > C]} |w_n| d\mu \leq \frac{C\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (4-4)$$

Assim encerramos a prova da afirmação. □

Teorema 4.1.4 *Sejam μ uma medida não negativa e $(w_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções μ -integráveis. Então, $(w_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente integrável se existe uma função H não negativa e crescente em $[0, +\infty)$ tal que*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{H(t)}{t^2} = +\infty \text{ e } \sup_{n \in \mathbb{N}} \int H(|w_n|) d\mu < \infty. \quad (4-5)$$

Demonstração. Seja H uma função não negativa e crescente em $[0, +\infty)$ tal que (4-5) é satisfeita. Seja $M > 0$ tal que

$$\int H(|w_n|) d\mu < M \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $C > 0$ tal que $|w_n^2(x)| \leq \varepsilon H(|w_n(x)|)/M$ sempre que $|w_n^2(x)| > C$. Desta forma

$$\int_{[|w_n|^2 > C]} |w_n|^2 d\mu \leq \frac{\varepsilon}{M} \int_{[|w_n| > C]} H(|w_n|) d\mu \leq \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

Assim, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente integrável. □

Antes de enunciar um Teorema Geral de Convergência de Vitali, precisamos definir o conceito tight para uma sequência $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções μ -integrável.

Definição 4.1.5 *Uma família $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções μ -integrável é chamada tight sobre $\mathcal{A}$ com respeito a medida μ , desde que para cada $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto $\mathcal{A}_0$ de $\mathcal{A}$ com medida μ -finita tal que*

$$\int_{\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0} |w_n| d\mu < \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

A seguir enunciamos o Teorema Geral de Convergência de Vitali para funções μ -integráveis.

Teorema 4.1.6 *Seja $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções uniformemente integrável e tight sobre $\mathcal{A}$ com respeito a medida μ . Se $w_n \rightarrow w$ q. t. p. em $\mathcal{A}$, então w é integrável sobre $\mathcal{A}$ e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{A}} w_n d\mu = \int_{\mathcal{A}} w d\mu.$$

Demonstração. Veja [\[45\]](#).

□

Referências Bibliográficas

- [1] C. O. Alves, Y. Wang, Y. Shen, *Soliton solutions for a class of quasilinear Schrödinger equations with a parameter*, J. Differential Equations **259** (2015) no. 1 318–343.
- [2] T. Bartsch, Z.Q. Wang, *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on $\mathbb{R}^N$* , Comm. Part. Diff. Eq. **20** (1995) 1725–1741.
- [3] V. I. Bogachev, *Measure Theory*. Vol. I, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2007).
- [4] A. de Bouard, N. Hayashi, J. C. Saut, *Global existence of small solutions to a relativistic nonlinear Schrödinger equation*, Comm. Math. Phys. **189** (1997), no. 1, 73–105.
- [5] H. Brézis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical sobolev exponents*. Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437–477.
- [6] L. Brull, H. Lange, *Solitary waves for quasilinear Schrödinger equations*, Expo. Math. **4** (1986) 278–288.
- [7] X. L. Chen, R. N. Sudan, *Necessary and sufficient conditions for self-focusing of short ultraintense laser pulse in underdense plasma*, Phys. Rev. Lett. **70**, (1993), 2082–2085.
- [8] S. Cingolani, M. Lazzo, *Multiple semiclassical standing waves for a class of nonlinear Schrödinger equations*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **10** (1997), 1–13.
- [9] M. Colin, L. Jeanjean, *Solutions for a quasilinear Schrödinger equation: a dual approach*, Nonlinear Anal. **56** (2004), 213–226.
- [10] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*. Springer-Verlag, Berlin 1984.
- [11] M. Del Pino, P. Felmer, *Local Mountain Pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. Partial Differential Equations **4** (1996), 121–137.
- [12] Y. Deng, S. Peng, S. Yan, *Positive soliton solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations with critical growth*. J. Differential Equations **258** (2015), 115–147.

- [13] Y. H. Ding, A. Szulkin, *Bound states for semilinear Schrödinger equations with sign-changing potential*, Calc. Var. Partial Differential Equations **29** (2007) 397–419.
- [14] X. D. Fang, A. Szulkin *Multiple solutions for a quasilinear Schrödinger equation*, J. Differential Equations **254** (2013), 2015–2032
- [15] D. G. de Figueiredo, I. Massabó, *Semilinear elliptic equations with the primitive of thenonlinearity interacting with the first eigenvalue*. J. Math. Anal. Appl. **156** (1991), 381–394.
- [16] M. F. Furtado, E.D. Silva, M.L. Silva, *Quasilinear Schrödinger equations with asymptotically linear nonlinearities*. Adv. Nonlinear Stud. **14** (2014), 671–686.
- [17] M. F. Furtado, E.D. Silva, M.L. Silva, *Quasilinear elliptic problems under asymptotically linear conditions at infinity and at the origin*. Z. Angew. Math. Phys. **66** (2015), 277–291.
- [18] R. W. Hasse, *A general method for the solution of nonlinear soliton and kink Schrodinger equations*, Z. Phys. **37** (1980), 83-87.
- [19] S. Kesavan, *Symmetrization and Applications*. Vol. 3, Series in Analysis, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., (2006).
- [20] A. M. Kosevich, B. Ivanov, A.S. Kovalev, *Magnetic solitons*, Phys. Rep. **194** (1990), 117?-238.
- [21] S. Kurihura, *Large-amplitude quasi-solitons in superfluid films*, J. Phys. Soc. Japan **50** (1981), 3263-3267.
- [22] E. W. Laedke, K.H. Spatschek, L. Stenflo, *Evolution theorem for a class of perturbed envelope soliton solutions*, J. Math. Phys. **24** (1983), 2764–2769.
- [23] L. D. Landau , E.M. Lifschitz, *Quantum Mechanics, Non-relativistic Theory* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.
- [24] M. Lazzo, *Existence and multiplicity results for a class of nonlinear elliptic problems on $\mathbb{R}^N$* , Dicrete Contin. Dyn. Syst., suppl., (2003), 526-535.
- [25] S. Li, M. Willem, *Applications of local linking to critical-point theory*. J. Math. Anal. Appl. **189**, (1995), 6–32.
- [26] Q. Li, X. Wu, *Existence, multiplicity and concentration of solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations with critical growth*, J. Math. Phys. **58**, (2017), 041501, 30 pp.

- [27] E.H. Lieb, M. Loss, *Analysis*, 2nd edn. Graduate Studies in Mathematics, vol. 14, American Mathematical Society, Providence, (2001)
- [28] H. F. Lins, E. A. B. Silva, *Quasilinear asymptotically periodic elliptic equations with critical growth*, *Nonlinear Anal.* **71** (2009), 2890–2905.
- [29] P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case part 1, 2*, *Rev. Mat. Iberoamericana* **1**, (1985) 145–201; 45–121.
- [30] A. G. Litvak, A. M. Sergeev, *One dimensional collapse of plasma waves*, *JETP Lett.* **27** (1978), 517–520.
- [31] J. Q. Liu, Z.Q. Wang, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations I*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2002), 441–448.
- [32] J. Q. Liu, Y.Q. Wang, Z.Q. Wang, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations II*, *J. Differential Equations* **187** (2003), 473–493.
- [33] J. Q. Liu, Y.Q. Wang, Z.Q. Wang, *Solutions for quasilinear Schrödinger equations via the Nehari method*, *Comm. Partial Differential Equations* **29** (2004), 879–901.
- [34] X. Liu, J. Liu, Z.Q. Wang, *Ground states for quasilinear Schrödinger equations with critical growth*, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **46** (2013).
- [35] X. Liu, J. Liu, Z.Q. Wang, *Ground states for quasilinear elliptic equations with critical growth*, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **46** (2013), 641–669.
- [36] S. Liu, J. Zhou, *Standing waves for quasilinear Schrödinger equations with indefinite potentials*, *Journal of Differential Equations* **265** (2018), 3970–3987.
- [37] V. G. Makhankov, V. K. Fedyanin, *Non-linear effects in quasi-one-dimensional models of condensed matter theory*, *Physics Reports*, Volume 104, (1984), 1–86.
- [38] A. Nakamura, *Damping and modification of exciton solitary waves*, *J. Phys. Soc. Jpn.* **42** (1977), 1824–1835.
- [39] J. M. do Ó, U.B. Severo, *Quasilinear Schrödinger equations involving concave and convex nonlinearities*, *Commun. Pure Appl. Anal.* **8** (2009), 621–644.
- [40] J. M. do Ó, O. H. Miyagaki, S. H. Soares, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations with critical growth*, *J. Differential Equations* **248** (2010), 722–744.
- [41] A. Pankov, *Periodic nonlinear Schrödinger equation with application to photonic crystals*, *Milan J. Math.* **73** (2005), 259–287.

- [42] M. Poppenberg, K. Schmitt, Z. Q. Wang, *On the existence of soliton solutions to quasilinear Schrödinger equations*, Calc. Var. Partial Differential Equations **14** (2002), 329–344.
- [43] P. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, Conf. Board of Math. Sci. Reg. Conf. Ser. in Math., No. 65, Amer. Math. Soc., 1986
- [44] P. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, Z. Angew. Math. Phys. **43**, (1992), 270–291.
- [45] H. L. Royden, P. M. Fitzpatrick, *Real analysis*, Pearson Modern Classics for Advanced Mathematics Series, Fourth edition, (2010).
- [46] M. Schechter, K. Tintarev, *Pairs of critical points produced by linking subsets with applications to semilinear elliptic problems*, Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B **44** (1992), 249–261.
- [47] M. Schechter, *Linking methods in critical point theory*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.
- [48] M. Schechter, *A variation of the mountain pass lemma and applications*, J. London Math. Soc. (2) **44** (1991), 491–502.
- [49] U. B. Severo, E. Gloss, E. D. Silva, *On a class of quasilinear Schrödinger equations with superlinear or asymptotically linear terms*. Journal of Differential Equations, v. 01 (2017), 1–23.
- [50] A. Szulkin, T. Weth, *Ground state solutions for some indefinite variational problems*, J. Funct. Anal. **257** (2009), 3802–3822.
- [51] Y. Shen, Y. Wang, *Soliton solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations*, Nonlinear Analysis **80** (2013) 194–201.
- [52] Y. Shen, Y. Wang, *A class of generalized quasilinear Schrödinger equations*, Comm. Pure Applied Analysis **15** (2016), 853–870.
- [53] E. A. B. Silva, *Linking theorems and applications to semilinear elliptic problems at resonance*, Nonlinear Anal. **16** (1991), 455–477
- [54] E. A. B. Silva, G.F. Vieira, *Quasilinear asymptotically periodic Schrödinger equations with subcritical growth*, Nonlinear Analysis **72** (2010), 2935–2949.
- [55] E.A.B. Silva, G.F. Vieira, *Quasilinear asymptotically periodic Schrödinger equations with critical growth*, Calc. Var. Partial Differential Equations **39** (2010), 1–33.

- [56] E. D. Silva, J. S. Silva, *Quasilinear Schrödinger equations with nonlinearities interacting with high eigenvalues*, preprint.
- [57] M. A. S. Souto, S. H. M. Soares, *Ground state solutions for quasilinear stationary Schrödinger equations with critical growth*, Commun. Pure Appl. Anal. **12** no 1 (2013) 99–116.
- [58] J. Su, Z. Q. Wang, M. Willem, *Nonlinear Schrödinger equations with unbounded and decaying radial potentials*, Commun. Contemp. Math, **9**, no 4 (2007) 571?–583.
- [59] G. F. Vieira, *Métodos Variacionais Aplicados a uma Classe de Equações de Schrödinger Quasilineares*, Doctoral dissertation. Unb (2010).
- [60] M. Willem, *Minimax Theorems*. Birkhauser Boston, Basel, Berlin, (1996).