

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
ESCOLA DE ENGENHARIA ELÉTRICA, MECÂNICA E DE COMPUTAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA E DE  
COMPUTAÇÃO

LUCAS FRANCO DE ASSIS

**CÁLCULO DO *COGGING TORQUE* EM CARGA NAS MÁQUINAS SÍNCRONAS  
DE ÍMÃS PERMANENTES NO ROTOR**

GOIÂNIA

2018

---

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR  
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES  
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

---

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:**      ☒ Dissertação      ☐ Tese

**2. Identificação da Tese ou Dissertação:**

Nome completo do autor: Lucas Franco de Assis

Título do trabalho: Cálculo do *Cogging Torque* em Carga nas Máquinas Síncronas de Ímãs Permanentes no Rotor

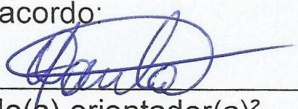
**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM      ☐ NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Lucas Franco de Assis  
Assinatura do(a) autor(a)<sup>2</sup>

Ciente e de acordo:

  
Assinatura do(a) orientador(a)<sup>2</sup>

Data: 02 / 01 / 19

---

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

<sup>2</sup> A assinatura deve ser escaneada.

**LUCAS FRANCO DE ASSIS**

**CÁLCULO DO *COGGING TORQUE* EM CARGA NAS MÁQUINAS SÍNCRONAS  
DE ÍMÃS PERMANENTES NO ROTOR**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação da Universidade Federal de Goiás para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação.

Área de concentração: Máquinas Elétricas.

Orientador: Prof. Dr. Geyverson Teixeira de Paula.

Co-Orientador: Prof. Dr. Bernardo Pinheiro de Alvarenga.

GOIÂNIA

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do  
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Assis, Lucas Franco de  
Cálculo do Cogging Torque em Carga nas Máquinas Síncronas  
de Ímãs Permanentes no Rotor [manuscrito] / Lucas Franco de Assis.  
2018.  
104 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Geyverson Teixeira de Paula; co-orientador  
Dr. Bernardo Pinheiro de Alvarenga.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Escola  
de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação (EMC), Programa  
de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação, Goiânia,  
2018.  
Bibliografia. Apêndice.  
Inclui lista de figuras, lista de tabelas.

1. Máquina Síncrona de Ímãs Permanentes no Rotor. 2. Cogging  
Torque. 3. Método dos Elementos Finitos. 4. Método da  
Permeabilidade Fixa. I. Paula, Geyverson Teixeira de, orient. II. Título.

CDU 621.3

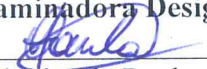


### Ata de Dissertação de Mestrado

Ata da sessão de julgamento da Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica e de Computação, área de concentração Engenharia Elétrica, do candidato **Lucas Franco de Assis**, realizada em 07 de dezembro de 2018.

Aos sete dias do mês de dezembro de dois mil e dezoito, às 09:00 horas, na sala Caryocar brasiliensis, bloco "A" da Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação (EMC), Universidade Federal de Goiás (UFG), reuniram-se os seguintes membros da Comissão Examinadora designada pela Coordenadoria do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica e de Computação: Os Doutores Geyverson Teixeira de Paula – Orientador (EMC/UFG), Bernardo Pinheiro de Alvarenga – (EMC/UFG) e Thales Eugênio Portes de Almeida (UTFPR), para julgar a Dissertação de Mestrado de **Lucas Franco de Assis**, intitulada "**Cálculo do Cogging Torque em Carga nas Máquinas Síncronas de Imãs Permanentes no Rotor**", apresentada pelo Candidato como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre, em conformidade com a regulamentação em vigor. O Professor Doutor Geyverson Teixeira de Paula, Presidente da Comissão, abriu a sessão e apresentou o candidato que discorreu sobre seu trabalho, após o que, foi arguido pelos membros da Comissão na seguinte ordem: Bernardo Pinheiro de Alvarenga e Thales Eugênio Portes de Almeida. A parte pública da sessão foi então encerrada e a Comissão Examinadora reuniu-se em sessão reservada para deliberar. A Comissão julgou então que o candidato, tendo demonstrado conhecimento suficiente, capacidade de sistematização e argumentação sobre o tema de sua Dissertação, foi considerado **aprovado** e deve satisfazer as exigências listadas na Folha de Modificação de Dissertação de Mestrado, em anexo a esta Ata, no prazo máximo de 30 dias, ficando o professor orientador responsável por atestar o cumprimento dessas exigências. Os membros da Comissão Examinadora descreveram as justificativas para tal avaliação em suas respectivas Folhas de Avaliação, anexas a esta Ata. Nada mais havendo a tratar, o presidente da Comissão declarou encerrada a sessão. Nos termos do Regulamento Geral dos Cursos de Pós-graduação desta Universidade, a presente Ata foi lavrada, lida e, julgada conforme, segue assinada pelos membros da Comissão supracitados e pelo candidato. Goiânia, 07 de dezembro de 2018.

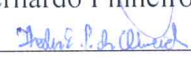
#### Comissão Examinadora Designada:

  
\_\_\_\_\_  
Geyverson Teixeira de Paula – Orientador (EMC/UFG)

(Avaliação: Aprovado)

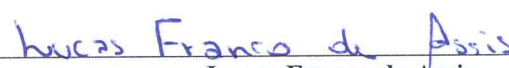
  
\_\_\_\_\_  
Bernardo Pinheiro de Alvarenga – (EMC/UFG)

(Avaliação: Aprovado)

  
\_\_\_\_\_  
Thales Eugênio Portes de Almeida – (UTFPR)

(Avaliação: Aprovado)

Candidato:

  
\_\_\_\_\_  
Lucas Franco de Assis

À Deus, aos meus pais, familiares e amigos,  
pela confiança, incentivo, apoio e o imenso carinho.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. Dr. Geyverson Teixeira de Paula e ao Prof. Dr. Bernardo Pinheiro de Alvarenga pela oportunidade, sabedoria, comprometimento, infinita paciência, carisma, orientação ao longo deste trabalho e esclarecimento de inúmeras dúvidas.

Ao Prof. Dr. Marcelo Semensato que me apresentou o incrível universo das máquinas elétricas.

Ao Prof. Dr. André Luiz Silva Pereira e ao Prof. Dr. Fernando Silva Pereira pelo apoio e incentivo.

Aos meus amigos e colegas de laboratório, Beatriz, Thaíssa, Ciliana, Lázaro, Morgan, Phillipe, Renato, Anderson, Arthur, Jéssica e Henrique pela companhia nos momentos de estudos e nas inúmeras empreitadas durante o mestrado.

*Eu escalei a montanha da vida  
Removendo pedras  
E plantando flores.  
(Cora Coralina)*

## RESUMO

O presente trabalho investiga o cálculo do *cogging torque* em carga nas máquinas síncronas de ímãs permanentes no rotor. Muitos métodos existentes para calcular o *cogging torque*, sejam eles analíticos ou numéricos, negligenciam a influência da carga, isto é, atribuem a oscilação do torque única e exclusivamente ao *cogging torque* ou fazem a atribuição incorreta dos efeitos da carga sobre o mesmo. Para conduzir esta investigação, três métodos com relevância no meio científico são analisados quando associados ao Método dos Elementos Finitos (MEF) e ao Método da Permeabilidade Fixa (MPF), são eles: o Método dos Tensores de Maxwell, o Método do Trabalho Virtual e o método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu. Dessa forma, as simulações são conduzidas implementando-se o MEF e o MPF com o auxílio do *software* FEMM (*Finite Element Method Magnetics*) e em seguida aplicando-se os métodos em análise a fim de verificar a validade de cada um deles em diferentes topologias de rotor e formas de acionamento, o que ainda não é encontrado na literatura especializada, e averiguar qual é o mais apropriado para o cálculo do *cogging torque* em carga. Embora os três métodos em estudo sejam bem difundidos, o Método do Trabalho Virtual e o método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu são incoerentes com o princípio da conservação de energia quando implementados com o MEF e o MPF, enquanto que o Método dos Tensores de Maxwell mostra-se mais adequado para o cálculo do *cogging torque* em carga nas máquinas síncronas de ímãs permanentes no rotor.

**Palavras-chave:** Máquina Síncrona de Ímãs Permanentes no Rotor. *Cogging Torque*. Método dos Elementos Finitos. Método da Permeabilidade Fixa.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                                                                                                        |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1.1 – Topologia de máquinas síncronas de ímãs permanentes no rotor.....                                                                                                                         | 3  |
| Figura 2.1 – Curva característica de magnetização e principais pontos de interesse para o MPF.7                                                                                                        |    |
| Figura 2.2 – Componente normal da densidade de fluxo magnético no entreferro da máquina síncrona de ímãs permanentes no rotor quando $I_a = 4$ A, $\beta = 0^\circ$ , e $\theta_m = 0^\circ$ . ....    | 8  |
| Figura 2.3 – Componente tangencial da densidade de fluxo magnético no entreferro da máquina síncrona de ímãs permanentes no rotor quando $I_a = 4$ A, $\beta = 0^\circ$ , e $\theta_m = 0^\circ$ ..... | 9  |
| Figura 2.4 – Aplicação do Método da Permeabilidade Fixa. ....                                                                                                                                          | 10 |
| Figura 2.5 – Área equivalente a energia magnética no Método da Permeabilidade Fixa convencional.....                                                                                                   | 11 |
| Figura 2.6 – Área equivalente a energia magnética no Método da Permeabilidade Fixa melhorado.....                                                                                                      | 12 |
| Figura 2.7 – Aplicação do Método da Permeabilidade Fixa melhorado. ....                                                                                                                                | 12 |
| Figura 3.1 – Densidades de energia e coenergia em diversos materiais.....                                                                                                                              | 20 |
| Figura 4.1 – Estudos de casos da máquina síncrona de ímãs permanentes no rotor.....                                                                                                                    | 28 |
| Figura 4.2 – Forma de onda e amplitude das correntes senoidais (4 A).....                                                                                                                              | 30 |
| Figura 4.3 – Forma de onda e amplitude das correntes quadradas (3,6363 A). ....                                                                                                                        | 31 |
| Figura 4.4 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina com $\theta_m = 0^\circ$ (operação em vazio). ....                                                                                  | 32 |
| Figura 4.5 – <i>Cogging torque</i> (operação em vazio).....                                                                                                                                            | 33 |
| Figura 4.6 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina com $\theta_m = 0^\circ$ (carregamento com correntes senoidais). ....                                                               | 34 |
| Figura 4.7 – Torque eletromagnético (carregamento com correntes senoidais).....                                                                                                                        | 34 |
| Figura 4.8 – <i>Cogging torque</i> em carga (carregamento com correntes senoidais). ....                                                                                                               | 35 |
| Figura 4.9 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina com $\theta_m = 0^\circ$ (carregamento com correntes quadradas). ....                                                               | 37 |
| Figura 4.10 – Torque eletromagnético (carregamento com correntes quadradas). ....                                                                                                                      | 37 |
| Figura 4.11 – <i>Cogging torque</i> em carga (carregamento com correntes quadradas).....                                                                                                               | 38 |
| Figura 4.12 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina com $\theta_m = 0^\circ$ (operação em vazio). ....                                                                                 | 40 |
| Figura 4.13 – <i>Cogging torque</i> (operação em vazio).....                                                                                                                                           | 41 |

|                                                                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 4.14 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina com $\theta_m = 0^\circ$ (carreamento com correntes senoidais). .... | 42 |
| Figura 4.15 – Torque eletromagnético (carreamento com correntes senoidais).....                                                          | 42 |
| Figura 4.16 – <i>Cogging torque</i> em carga (carreamento com correntes senoidais). ....                                                 | 43 |
| Figura 4.17 – <i>Cogging torque</i> em carga com maior detalhamento (carreamento com correntes senoidais). ....                          | 44 |
| Figura 4.18 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina com $\theta_m = 0^\circ$ (carreamento com correntes quadradas). .... | 45 |
| Figura 4.19 – Torque eletromagnético (carreamento com correntes quadradas). ....                                                         | 46 |
| Figura 4.20 – <i>Cogging torque</i> em carga (carreamento com correntes quadradas). ....                                                 | 47 |
| Figura 4.21 – <i>Cogging torque</i> em carga com maior detalhamento (carreamento com correntes quadradas). ....                          | 47 |
| Figura 4.22 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina com $\theta_m = 0^\circ$ (operação em vazio). ....                   | 49 |
| Figura 4.23 – <i>Cogging torque</i> (operação em vazio). ....                                                                            | 50 |
| Figura 4.24 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina com $\theta_m = 0^\circ$ (carreamento com correntes senoidais). .... | 51 |
| Figura 4.25 – Torque eletromagnético (carreamento com correntes senoidais). ....                                                         | 52 |
| Figura 4.26 – <i>Cogging torque</i> em carga (carreamento com correntes senoidais). ....                                                 | 52 |
| Figura 4.27 – <i>Cogging torque</i> em carga (carreamento com correntes senoidais). ....                                                 | 54 |
| Figura 4.28 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina com $\theta_m = 0^\circ$ (carreamento com correntes quadradas). .... | 55 |
| Figura 4.29 – Torque eletromagnético (carreamento com correntes quadradas). ....                                                         | 55 |
| Figura 4.30 – <i>Cogging torque</i> em carga (carreamento com correntes quadradas). ....                                                 | 56 |
| Figura 4.31 – <i>Cogging torque</i> em carga (carreamento com correntes quadradas). ....                                                 | 58 |
| Figura 4.32 – Formas de onda de torque para a máquina síncrona de ímãs permanentes do caso 1. ....                                       | 59 |
| Figura 4.33 – Máquina do estudo de caso 1 com $I_a = 4$ A e $\beta = -30^\circ$ . ....                                                   | 60 |
| Figura 4.34 – Máquina do estudo de caso 2 com $I_a = 4$ A e $\beta = -30^\circ$ . ....                                                   | 60 |
| Figura 4.35 – Máquina do estudo de caso 3 com $I_a = 4$ A e $\beta = -30^\circ$ . ....                                                   | 61 |
| Figura 4.36 – Variação da energia magnética armazenada para a máquina do estudo de caso 1. ....                                          | 62 |

|                                                                                                                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 4.37 – Variação da energia magnética armazenada para a máquina do estudo de caso 2.                                                                              | 62 |
| Figura 4.38 – Variação da energia magnética armazenada para a máquina do estudo de caso 3.                                                                              | 63 |
| Figura 4.39 – Comparação entre $dW_{in,ZHU}/d\theta_m$ e a variação da energia de entrada $dW_{in,MEF}/d\theta_m$ obtida em elementos finitos para a máquina do caso 1. | 65 |
| Figura 4.40 – Comparação entre $dW_{in,ZHU}/d\theta_m$ e a variação da energia de entrada $dW_{in,MEF}/d\theta_m$ obtida em elementos finitos para a máquina do caso 2. | 65 |
| Figura 4.41 – Comparação entre $dW_{in,ZHU}/d\theta_m$ e a variação da energia de entrada $dW_{in,MEF}/d\theta_m$ obtida em elementos finitos para a máquina do caso 3. | 66 |
| Figura 4.42 – Formas de onda do <i>cogging torque</i> em carga na máquina síncrona de ímãs permanentes do caso 1.                                                       | 67 |
| Figura 4.43 – Torque eletromagnético no estudo de caso 1 (carregamento com correntes senoidais).                                                                        | 69 |
| Figura 4.44 – Conteúdo harmônico do torque eletromagnético no estudo de caso 1 (carregamento com correntes senoidais).                                                  | 69 |
| Figura 4.45 – Torque eletromagnético no estudo de caso 2 (carregamento com correntes senoidais).                                                                        | 70 |
| Figura 4.46 – Conteúdo harmônico do torque eletromagnético no estudo de caso 2 (carregamento com correntes senoidais).                                                  | 70 |
| Figura 4.47 – Torque eletromagnético no estudo de caso 3 (carregamento com correntes senoidais).                                                                        | 70 |
| Figura 4.48 – Conteúdo harmônico do torque eletromagnético no estudo de caso 3 (carregamento com correntes senoidais).                                                  | 71 |
| Figura 4.49 – <i>Cogging torque</i> em carga no estudo de caso 1 (carregamento com correntes senoidais).                                                                | 72 |
| Figura 4.50 – <i>Cogging torque</i> em carga no estudo de caso 2 (carregamento com correntes senoidais).                                                                | 72 |
| Figura 4.51 – <i>Cogging torque</i> em carga no estudo de caso 3 (carregamento com correntes senoidais).                                                                | 73 |
| Figura 4.52 – <i>Cogging torque</i> em carga no estudo de caso 1 (carregamento com correntes quadradas).                                                                | 73 |

|                                                                                                                                                |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 4.53 – <i>Cogging torque</i> em carga no estudo de caso 2 (carregamento com correntes quadradas).....                                   | 74 |
| Figura 4.54 – <i>Cogging torque</i> em carga no estudo de caso 3 (carregamento com correntes quadradas).....                                   | 74 |
| Figura 4.55 – Forma de onda e amplitude das correntes constantes. ....                                                                         | 75 |
| Figura 4.56 – Torque eletromagnético na máquina do estudo de caso 1 (carregamento com correntes constantes).....                               | 75 |
| Figura 4.57 – Torque eletromagnético na máquina do estudo de caso 2 (carregamento com correntes constantes).....                               | 76 |
| Figura 4.58 – Torque eletromagnético na máquina do estudo de caso 3 (carregamento com correntes constantes).....                               | 76 |
| Figura 4.59 – <i>Cogging torque</i> em carga no estudo de caso 1 (carregamento com correntes constantes). ....                                 | 77 |
| Figura 4.60 – <i>Cogging torque</i> em carga no estudo de caso 2 (carregamento com correntes constante).....                                   | 77 |
| Figura 4.61 – <i>Cogging torque</i> em carga no estudo de caso 3 (carregamento com correntes constantes). ....                                 | 78 |
| Figura 4.62 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina do caso 1 com o MPF convencional.....                                      | 78 |
| Figura 4.63 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina do caso 2 com o MPF convencional.....                                      | 79 |
| Figura 4.64 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina do caso 3 com o MPF convencional.....                                      | 79 |
| Figura 4.65 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina do caso 1 com o MPF melhorado. ....                                        | 79 |
| Figura 4.66 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina do caso 2 com o MPF melhorado. ....                                        | 80 |
| Figura 4.67 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina do caso 3 com o MPF melhorado .....                                        | 80 |
| Figura 4.68 – Análise de um circuito elétrico fazendo analogia ao circuito magnético simplificado da máquina síncrona de ímãs permanentes..... | 81 |
| Figura 4.69 – Curva <i>B-H</i> de um material ferromagnético hipotético após a aplicação do MPF. ....                                          | 84 |

## LISTA DE TABELAS

|                                                                                                          |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 4.1 – Dimensões das máquinas síncronas de ímãs permanentes no rotor. ....                         | 29 |
| Tabela 4.2 – Valores do <i>cogging torque</i> (operação em vazio).....                                   | 33 |
| Tabela 4.3 – Valores do torque eletromagnético (carregamento com correntes senoidais). ....              | 35 |
| Tabela 4.4 – Valores do <i>cogging torque</i> em carga (carregamento com correntes senoidais). .         | 36 |
| Tabela 4.5 – Valores do torque eletromagnético (carregamento com correntes quadradas)....                | 38 |
| Tabela 4.6 – Valores do <i>cogging torque</i> em carga (carregamento com correntes quadradas). 39        |    |
| Tabela 4.7 – Valores do <i>cogging torque</i> (operação em vazio).....                                   | 41 |
| Tabela 4.8 – Valores do torque eletromagnético (carregamento com correntes senoidais). ....              | 43 |
| Tabela 4.9 – Valores do <i>cogging torque</i> em carga (carregamento com correntes senoidais). .         | 44 |
| Tabela 4.10 – Valores do torque eletromagnético (carregamento com correntes quadradas)..                 | 46 |
| Tabela 4.11 – Valores do <i>cogging torque</i> em carga (carregamento com correntes quadradas).<br>..... | 48 |
| Tabela 4.12 – Valores do <i>cogging torque</i> (operação em vazio).....                                  | 50 |
| Tabela 4.13 – Valores do torque eletromagnético (carregamento com correntes senoidais)..                 | 52 |
| Tabela 4.14 – Valores do <i>cogging torque</i> em carga (carregamento com correntes senoidais).          | 53 |
| Tabela 4.15 – Valores do torque eletromagnético (carregamento com correntes quadradas)..                 | 56 |
| Tabela 4.16 – Valores do <i>cogging torque</i> em carga (carregamento com correntes quadradas).<br>..... | 57 |

## SUMÁRIO

|                                                                  |           |
|------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>CAPÍTULO 1.....</b>                                           | <b>1</b>  |
| <b>INTRODUÇÃO .....</b>                                          | <b>1</b>  |
| 1.1 Considerações Iniciais .....                                 | 1         |
| 1.2 Objetivos.....                                               | 5         |
| 1.3 Organização da Dissertação .....                             | 5         |
| <b>CAPÍTULO 2.....</b>                                           | <b>7</b>  |
| <b>MÉTODO DA PERMEABILIDADE FIXA .....</b>                       | <b>7</b>  |
| 2.1 Método da Permeabilidade Fixa.....                           | 7         |
| 2.2 Método da Permeabilidade Fixa Melhorado .....                | 11        |
| <b>CAPÍTULO 3.....</b>                                           | <b>13</b> |
| <b>TORQUE ELETROMAGNÉTICO E O CÁLCULO DO COGGING TORQUE.....</b> | <b>13</b> |
| 3.1 Definição e Formulação do Torque Eletromagnético .....       | 13        |
| 3.1.1 Torque Mútuo .....                                         | 14        |
| 3.1.2 Torque de Relutância.....                                  | 15        |
| 3.1.3 Cogging Torque .....                                       | 15        |
| 3.2 Método dos Tensores de Maxwell.....                          | 16        |
| 3.3 Método do Trabalho Virtual.....                              | 19        |
| 3.4 Método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu .....                        | 24        |
| <b>CAPÍTULO 4.....</b>                                           | <b>28</b> |
| <b>ESTUDOS DE CASOS.....</b>                                     | <b>28</b> |
| 4.1 Introdução.....                                              | 28        |
| 4.2 Análise do Caso 1 .....                                      | 31        |
| 4.2.1 Condição em Vazio (0 A).....                               | 31        |
| 4.2.2 Condição em Carregamento (Correntes Senoidais).....        | 33        |
| 4.2.3 Condição em Carregamento (Correntes Quadradas).....        | 36        |
| 4.3 Análise do Caso 2 .....                                      | 39        |
| 4.3.1 Condição em Vazio (0 A).....                               | 39        |
| 4.3.2 Condição em Carregamento (Correntes Senoidais).....        | 41        |
| 4.3.3 Condição em Carregamento (Correntes Quadradas).....        | 45        |

|                                                    |                                                     |           |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|-----------|
| 4.4                                                | Análise do Caso 3.....                              | 48        |
| 4.4.1                                              | Condição em Vazio (0 A).....                        | 49        |
| 4.4.2                                              | Condição em Carregamento (Correntes Senoidais)..... | 50        |
| 4.4.3                                              | Condição em Carregamento (Correntes Quadradas)..... | 54        |
| 4.5                                                | Discussão dos Resultados.....                       | 58        |
| <b>CAPÍTULO 5.....</b>                             |                                                     | <b>86</b> |
| <b>CONCLUSÕES.....</b>                             |                                                     | <b>86</b> |
| 5.1                                                | Considerações Finais.....                           | 86        |
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>            |                                                     | <b>88</b> |
| <b>APÊNDICE A – ALGORITMOS DAS SIMULAÇÕES.....</b> |                                                     | <b>93</b> |
| A.1                                                | Simulação em Vazio.....                             | 93        |
| A.2                                                | Simulação em Carga – Correntes Senoidais.....       | 95        |
| A.3                                                | Simulação em Carga – Correntes Quadradas.....       | 100       |

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 Considerações Iniciais

As máquinas elétricas são conversores eletromecânicos de energia, ou seja, são dispositivos capazes de promover transformações de energia mecânica em energia elétrica e vice-versa (FITZGERALD, 2006). Atualmente, constituem parte da vida do homem, sendo presentes em diversas aplicações, sejam elas residenciais, comerciais ou industriais (PAULA, 2016). Pode-se destacar seu uso em veículos de transporte, em aparelhos eletrodomésticos e eletrônicos, na indústria, e ainda na geração de energia elétrica (CHAPMAN, 2013; KOSOW, 1982).

Com o avanço tecnológico dos materiais magnéticos, mais especificamente dos ímãs de ferrite e de terras raras, e o desenvolvimento dos circuitos eletrônicos responsáveis por seu acionamento, os motores síncronos de ímãs permanentes no rotor vêm ganhando destaque dentre os motores elétricos e são referidos frequentemente por motores sem escovas (*brushless*) de ímãs permanentes ou apenas por motores síncronos de ímãs permanentes (HANSELMAN, 1994; TEIXEIRA, 2006). Em linhas gerais, estas máquinas possuem a capacidade de produzir torque através da interação entre o campo magnético produzido pelas correntes que circulam nas bobinas do estator e o campo magnético produzido pelos ímãs do rotor (FITZGERALD, 2006; PERRINE, 2000).

Os motores síncronos de ímãs permanentes podem ser classificados com relação à forma de onda da força contra eletromotriz (*back-EMF*) em duas categorias: motores *brushless* AC (do inglês *alternating current* que significa corrente alternada) que apresentam *back-EMF* com forma de onda senoidal e motores *brushless* DC (do inglês *direct current* que significa corrente contínua) que apresentam *back-EMF* com forma de onda não-senoidal, também conhecidos por motores BLAC e BLDC, respectivamente. De um modo geral, a forma de onda não-senoidal mais comumente encontrada se assemelha a um trapézio (HENDERSHOT; MILLER, 1994; PRADO, 2016). Ambos os tipos de motores, BLAC e BLDC, não podem ser conectados diretamente à rede elétrica de alimentação e necessitam de um conversor para seu acionamento, este que pode ser realizado por correntes de fase defasadas entre si em 120° elétricos, para os motores trifásicos, ou 180° elétricos, para os motores bifásicos (MILLER, 1989; SCHMITZ, 2017).

Os motores síncronos comparados a outros tipos de máquinas elétricas, apresentam duas grandes vantagens:

- Alta eficiência: dada principalmente em razão deste tipo de máquina não apresentar perdas ôhmicas no circuito do rotor e também pela ausência de escovas, anéis coletores ou comutadores mecânicos, características estas que podem tornar sua fabricação e manutenção mais simples (KRAUSE, 2013; PAULA, 2016).
- Alta densidade de energia: decorrente de ímãs de terras raras ou de topologias de rotor que permitem a maior densidade de fluxo magnético no entreferro utilizando ímãs de ferrite, o que garante altos valores de torque/corrente e torque/volume (KRAUSE, 2013; PAULA, 2016).

Por mais que os motores síncronos de ímãs permanentes apresentem as vantagens citadas, seu projeto ainda requer um cuidado especial. De acordo com Paula (2016), estas máquinas possuem algumas características intrínsecas que atuam diretamente na robustez, confiabilidade, eficiência e eficácia de sua operação. Tais características estão associadas à forma de onda do fluxo concatenado por fase e consequentemente à forma de onda da força contra eletromotriz; à forma de onda da indutância e sua respectiva variação o que resulta no torque de relutância; e à forma de onda e amplitude do torque de borda (*cogging torque*).

Uma vez que o núcleo dessas máquinas é composto por material ferromagnético e apresenta um comportamento não linear, seus parâmetros podem ser influenciados por um fenômeno físico denominado saturação magnética, caracterizado pelo aumento da intensidade de campo magnético com pequenos incrementos na densidade de fluxo magnético do motor (PAULA, 2013). A investigação dos efeitos da saturação e do acionamento sobre as máquinas síncronas de ímãs permanentes tem sido destaque em diversos estudos, entre eles pode-se destacar os trabalhos desenvolvidos por Sung e Park (2011), Azar e Zhu (2012), Zarate e Escalada (2017), Paula e Almeida (2018).

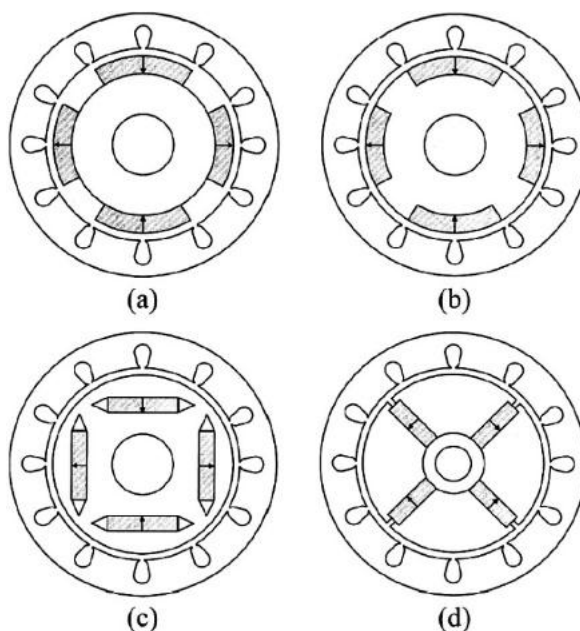
O torque eletromagnético é a grandeza de maior relevância para qualquer motor. Com base no potencial que esta máquina tem para produzi-lo, define-se a aplicabilidade e a capacidade de carga mecânica da mesma (HENDERSHOT; MILLER, 1994). Tanto as características intrínsecas do motor síncrono de ímãs permanentes como a qualidade do sistema de acionamento elétrico empregado influenciam no torque produzido, ou seja, no quão suave e sem oscilações pode ser a sua forma de onda (CONCER, 2008).

De modo geral, a composição do torque eletromagnético nas máquinas síncronas de ímãs permanentes é dada pela contribuição de três parcelas bem definidas: o torque mútuo e os torques de relutância associados às bobinas e aos ímãs permanentes, sendo estes dois últimos

conhecidos respectivamente por torque de relutância e *cogging torque*. O primeiro termo é responsável por produzir a maior parte do torque desejado no eixo do motor e com isso deve ser maximizado no projeto, enquanto que os dois últimos são muitas vezes considerados torques parasitas e devem ser minimizados (RUWER, 2015). Independente da topologia adotada para o projeto da máquina o *cogging torque* se faz presente e é indesejado por gerar vibração, ruído acústico e oscilações no torque eletromagnético (MIYAMASU; AKATSU, 2011).

Durante o projeto dos motores síncronos de ímãs permanentes a importância dada a uma ou mais de suas características intrínsecas depende da topologia adotada e da aplicação desejada para estas máquinas. Dentre as topologias possíveis, destacam-se: as de ímãs montados na superfície do rotor, as de ímãs semi-enterrados no rotor, as de ímãs enterrados transversalmente e as de ímãs enterrados longitudinalmente, ilustradas na Figura 1.1 (CHAU; CHAN, 2008).

Figura 1.1 – Topologia de máquinas síncronas de ímãs permanentes no rotor.



(a) Ímãs montados na superfície do rotor. (b) Ímãs semi-enterrados no rotor. (c) Ímãs enterrados transversalmente. (d) Ímãs enterrados longitudinalmente.

Fonte: (CHAU; CHAN, 2008).

Uma das principais metas de projeto de uma máquina síncrona de ímãs permanentes no rotor é que a mesma seja capaz de produzir um torque com valores mínimos de oscilações, a fim de minimizar perdas eletromagnéticas e desgastes mecânicos. Neste sentido, inúmeros trabalhos tem sido desenvolvidos, ora para aperfeiçoar o projeto, ora para encontrar e entender as origens das oscilações no torque para melhorias no projeto e controle da máquina, entre eles pode-se destacar: Li e Slemon (1988), Hanselman (1997), Zhu e Howe (2000), Bianchi e

Bolognani (2002), Koh e Seol (2003), Zhu e Howe (2003), Islam e Sebastian (2004), Lukaniszyn e Jagiela (2004), Lateb e Takorabet (2006), Aydin e Zhu (2007), Dosiek e Pillay (2007), Zhu e Chen (2008), Zhu e Jiang (2009), Pang e Zhu (2011), Jang e Park (2011), Dorrel e Popescu (2011). A maioria deles estão interessados na máquina em vazio, onde a única parcela de torque existente é o *cogging torque* e a influência da saturação magnética devido à carga é negligenciada. O *cogging torque* em vazio pode ser calculado por vários métodos, como o Método dos Tensores de Maxwell e o Método do Trabalho Virtual, o que permite o desenvolvimento de diversas técnicas com o intuito de reduzi-lo. No entanto, as oscilações no torque eletromagnético com a máquina em carga são muito mais complexas comparadas às oscilações no torque com a máquina em vazio (CHU; ZHU, 2013a).

Neste contexto, para os processos de controle e projeto desses motores, é de grande valia a separação do torque eletromagnético e a análise de cada uma de suas parcelas, dada uma condição de operação, para verificar como cada uma delas está se comportando e assim possibilitar a alteração de parâmetros do projeto e/ou do controlador da máquina para se conseguir diminuir os efeitos negativos que cada parcela pode estar introduzindo e consequentemente reduzir as oscilações no torque total. O método mais eficiente e difundido para a separação do torque eletromagnético com a máquina em carga foi publicado em 1998 (BIANCHI; BOLOGNANI, 1998), sendo conhecido por Método da Permeabilidade Fixa (*Frozen Permeability Method*). Avaliações do método e sugestões de melhorias são desenvolvidas a fim de torná-lo mais robusto, como proposto em Chu e Zhu (2013a).

Associados ao Método dos Elementos Finitos (MEF) e ao Método da Permeabilidade Fixa (MPF) destacam-se no meio científico alguns métodos para o cálculo do *cogging torque* em carga nas máquinas síncronas de ímãs permanentes no rotor, como o Método dos Tensores de Maxwell e o Método do Trabalho Virtual. Um outro método que vem ganhando destaque nos últimos anos é apresentado em Chu e Zhu (2013a) e tem sido bastante referenciado, como por exemplo em Abbaszadeh e Alam (2011), Fei e Luk (2014), Chai e Liang (2015), Li e Zhu (2016), Kumar e Ravagan (2017). Embora os métodos citados sejam bem difundidos, os mesmos apresentam indícios de serem inadequados na obtenção do *cogging torque* em carga para qualquer caso de acionamento ou topologia de máquina. Portanto, o presente trabalho tem como objetivo analisar estes métodos, verificar a validade de cada um deles para diferentes topologias de rotor e formas de acionamento, o que ainda não é encontrado na literatura especializada, e averiguar qual é o mais apropriado para o cálculo do *cogging torque* em carga nas máquinas síncronas de ímãs permanentes no rotor. As investigações são conduzidas tomando por base três máquinas de topologias diferentes (ímãs semi-enterrados no rotor, ímãs

enterrados longitudinalmente no rotor e ímãs montados na superfície do rotor), ambas alimentadas por correntes senoidais e quadradas defasadas entre si em  $120^\circ$  elétricos, amplitude de 4 e 3,6363 ampères, respectivamente, o que sugere níveis de carregamento eletromagnético próximos, já que apresentam o mesmo valor para o primeiro harmônico da corrente, e ângulo de avanço da corrente de fase de  $-30^\circ$ . Todas as simulações são realizadas com o auxílio do FEMM (*Finite Element Method Magnetics*), *software* aplicado na implementação do MEF e do MPF.

## 1.2 Objetivos

Com base no exposto, o objetivo principal do presente trabalho é verificar dentre os métodos citados (Método dos Tensores de Maxwell, Método do Trabalho Virtual e método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu), qual deles é o mais apropriado, combinado ao Método dos Elementos Finitos e ao Método da Permeabilidade Fixa, para calcular o *cogging torque* em carga nas máquinas síncronas de ímãs permanentes no rotor.

Como objetivos secundários, tem-se:

- Obter o *cogging torque* em carga através do Método dos Tensores de Maxwell.
- Obter o *cogging torque* em carga através do Método do Trabalho Virtual.
- Obter o *cogging torque* em carga através do método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu.
- Comparar os resultados obtidos em cada método implementado para topologias e acionamentos distintos da máquina síncrona de ímãs permanentes no rotor.

## 1.3 Organização da Dissertação

O presente trabalho encontra-se estruturado em 05 capítulos, descritos a seguir:

**Capítulo 1** – Apresenta a introdução de conceitos vistos neste trabalho e aponta as principais motivações e objetivos para seu desenvolvimento.

**Capítulo 2** – Apresenta a fundamentação teórica sobre o Método da Permeabilidade Fixa convencional e o Método da Permeabilidade Fixa melhorado proposto em Chu e Zhu (2013a), bem como são realizadas suas implementações e simulações em elementos finitos.

**Capítulo 3** – Apresenta a definição e a formulação do torque eletromagnético nas máquinas síncronas de ímãs permanentes no rotor, bem como de suas parcelas, e a fundamentação teórica sobre o Método dos Tensores de Maxwell, o Método do Trabalho Virtual e o método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu para o cálculo do *cogging torque*.

**Capítulo 4** – Apresenta três estudos de casos para a análise do Método dos Tensores de Maxwell, do Método do Trabalho Virtual e do método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu, combinados ao Método dos Elementos Finitos (MEF) e ao Método da Permeabilidade Fixa (MPF), no cálculo do *cogging torque* em carga nas máquinas síncronas de ímãs permanentes no rotor.

**Capítulo 5** – Apresenta as considerações finais referentes aos resultados obtidos neste trabalho e as sugestões para projetos futuros.

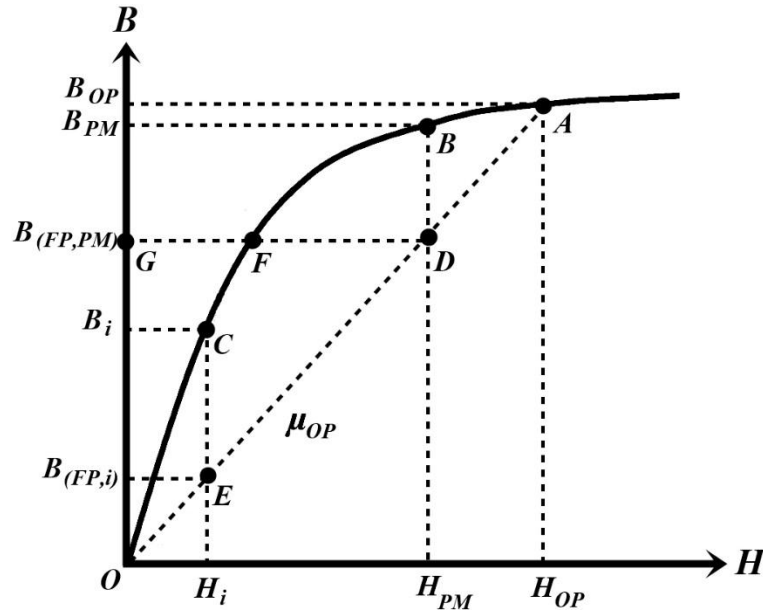
## CAPÍTULO 2

### MÉTODO DA PERMEABILIDADE FIXA

#### 2.1 Método da Permeabilidade Fixa

Em linhas gerais, o Método da Permeabilidade Fixa (MPF) propõe a linearização da curva de magnetização de materiais ferromagnéticos não lineares com base na fixação da permeabilidade calculada no ponto de operação dos mesmos quando submetidos a uma carga eletromagnética. Com isso, o MPF permite a aplicação do teorema da sobreposição de fontes para analisar a contribuição de cada uma das fontes de fluxo magnético sobre o material (PAULA, 2016). A Figura 2.1 exemplifica a linearização proposta pelo MPF aplicada à curva de magnetização de um material ferromagnético hipotético.

Figura 2.1 – Curva característica de magnetização e principais pontos de interesse para o MPF.



Fonte: Adaptado de Chu e Zhu (2013a).

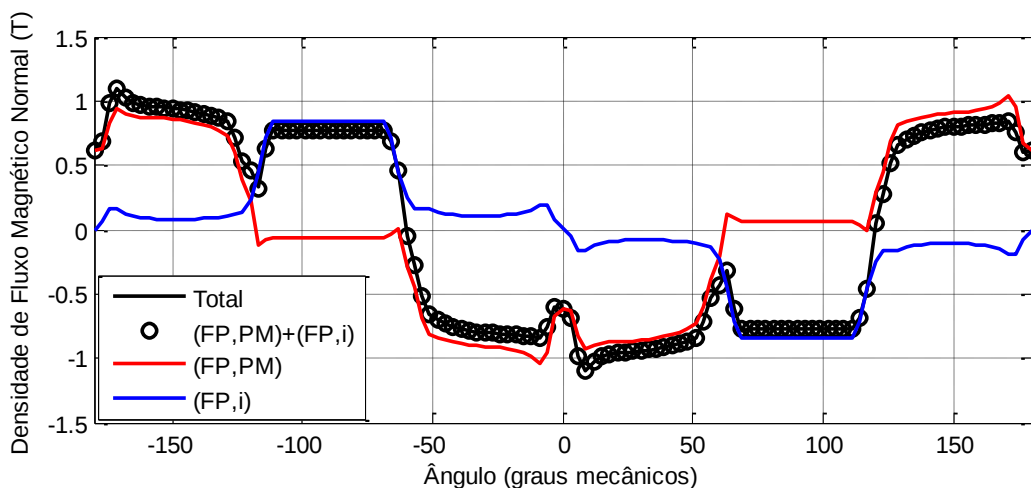
Sem a linearização proposta pelo MPF, pode-se observar na Figura 2.1 que somente com a excitação dos ímãs (ponto  $B$ ), a densidade de fluxo magnético resultante é  $B_{PM}$  e a intensidade de campo magnético resultante é  $H_{PM}$ . Somente com a excitação das correntes (ponto  $C$ ), a densidade de fluxo magnético resultante é  $B_i$  e a intensidade de campo magnético resultante é  $H_i$ . Quando está em carga (ponto  $A$ ), o material encontra-se excitado pelas duas

fontes de fluxo magnético, ímãs e correntes, e com isso  $H_{OP} = H_{PM} + H_i$ , porém  $B_{OP} \neq B_{PM} + B_i$ . Neste caso  $H_{OP}$  é a intensidade de campo magnético de excitação resultante e  $B_{OP}$  é a densidade de fluxo magnético resultante, ambos do ponto de operação do material em carga (CHU; ZHU, 2013a).

Com o material da Figura 2.1 na condição de carregamento (ponto A) e a linearização proposta pelo MPF, a permeabilidade relativa em carga  $\mu_{OP}$  é primeiramente obtida por meio do MEF, fixada e salva. Em seguida, duas análises lineares são realizadas baseadas na permeabilidade fixa  $\mu_{OP}$ , uma delas com a excitação dos ímãs (ponto D) para se obter a densidade de fluxo magnético  $B_{(FP,PM)}$  e a outra com a excitação das correntes (ponto E) para se obter a densidade de fluxo magnético  $B_{(FP,i)}$ . Uma vez que o problema não linear foi convertido em um problema linear, fixada a permeabilidade  $\mu_{OP}$ , tem-se que  $H_{OP} = H_{PM} + H_i$  e  $B_{OP} = B_{(FP,PM)} + B_{(FP,i)}$  (CHU; ZHU, 2013a).

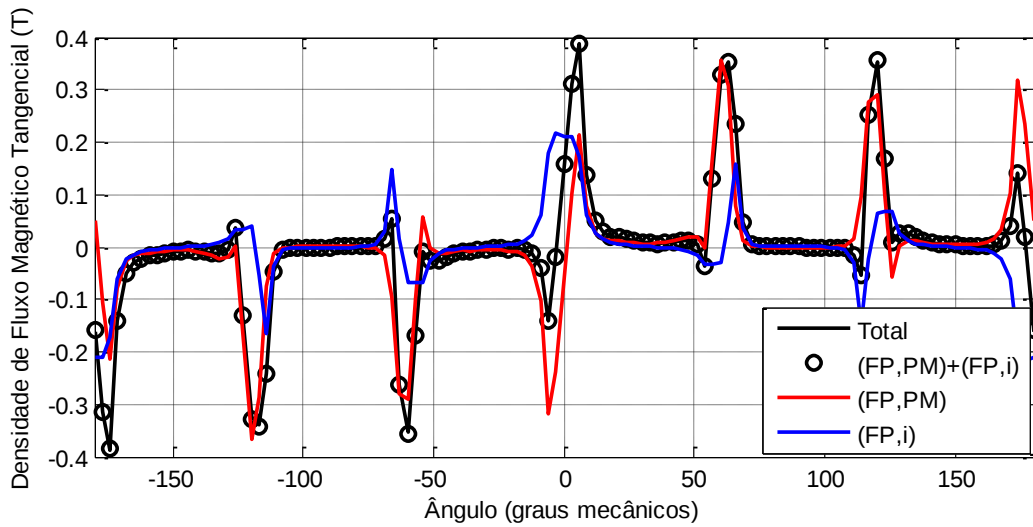
Para demonstrar que a linearização proposta pelo Método da Permeabilidade Fixa funciona e permite a aplicação do teorema da sobreposição de fontes, a Figura 2.2 e a Figura 2.3, ambas adquiridas a partir da simulação da máquina presente em Chu e Zhu (2013b), apresentam respectivamente as componentes normal e tangencial da densidade de fluxo magnético no entreferro de um motor síncrono de ímãs permanentes no rotor na condição de carregamento em que a amplitude da corrente de fase  $I_a$  é de 4 A, o ângulo de avanço da corrente de fase  $\beta$  é  $0^\circ$ , e a posição angular mecânica do rotor  $\theta_m$  é  $0^\circ$  mecânico.

Figura 2.2 – Componente normal da densidade de fluxo magnético no entreferro da máquina síncrona de ímãs permanentes no rotor quando  $I_a = 4$  A,  $\beta = 0^\circ$ , e  $\theta_m = 0^\circ$ .



Fonte: Adaptado de Chu e Zhu (2013b).

Figura 2.3 – Componente tangencial da densidade de fluxo magnético no entreferro da máquina síncrona de ímãs permanentes no rotor quando  $I_a = 4$  A,  $\beta = 0^\circ$ , e  $\theta_m = 0^\circ$ .



Fonte: Adaptado de Chu e Zhu (2013b).

Pode-se observar na Figura 2.2 que, para cada ponto, as componentes normal da densidade de fluxo magnético no modelo em carga não linear (*Total*) são iguais ao somatório matemático das componentes normal do modelo em carga linearizado com ímãs (*FP,PM*) e o modelo em carga linearizado com correntes (*FP,i*). Tal análise é válida para qualquer outra posição do rotor e condição de carga da máquina (CHU; ZHU, 2013b).

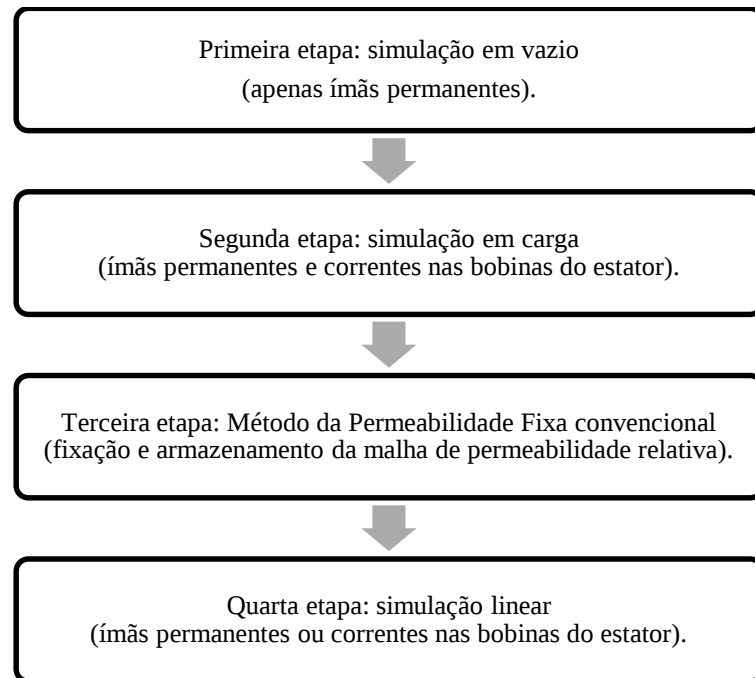
De maneira análoga, pode-se observar na Figura 2.3 que para cada ponto, as componentes tangencial da densidade de fluxo magnético no modelo não linear (*Total*) são iguais ao somatório matemático das componentes tangencial do modelo linearizado com ímãs (*FP,PM*) com o modelo linearizado com correntes (*FP,i*). Esta análise também é válida para qualquer outra posição do rotor e condição de carga da máquina (CHU; ZHU, 2013b).

No meio científico o Método da Permeabilidade Fixa (MPF), associado ao Método dos Elementos Finitos (MEF), é reconhecido por muitos como a maneira mais eficiente de separar apropriadamente os componentes do torque eletromagnético e avaliar a influência da saturação magnética sobre os parâmetros da máquina (PAULA, 2016). O fluxograma da Figura 2.4, adaptado de Paula (2016), resume o procedimento de aplicação e simulação do MPF em uma máquina síncrona de ímãs permanentes para cada posição do rotor.

Na primeira etapa tem-se a simulação da máquina em vazio, apresentando apenas os ímãs como fonte de fluxo magnético. O objetivo desta fase é obter os valores e formas de onda do fluxo concatenado, da força contra eletromotriz e do *cogging torque* em vazio. Tais

parâmetros são analisados posteriormente com a máquina em carga a fim de se investigar suas distorções e variações conforme o aumento do carregamento eletromagnético.

Figura 2.4 – Aplicação do Método da Permeabilidade Fixa.



Fonte: Adaptado de Paula (2016).

Na segunda etapa tem-se a simulação da máquina em carga aplicando os ímãs e as correntes nas bobinas como fontes de fluxo magnético. O objetivo desta fase é obter os valores e formas de onda do fluxo concatenado e do torque eletromagnético, bem como sua amplitude e frequência de oscilações.

Na terceira etapa aplica-se o Método da Permeabilidade Fixa associado ao Método dos Elementos Finitos para obtenção, fixação e armazenamento da malha de permeabilidade na simulação da máquina em carga. Com isso, o modelo linearizado em elementos finitos pode ser gerado para análise das contribuições de cada uma das fontes de fluxo magnético.

Na quarta etapa tem-se a simulação linear da máquina em carga a partir de seu modelo linearizado, na qual se analisa ora a contribuição dos ímãs como fonte de fluxo magnético, ora a contribuição das correntes nas bobinas do estator como fonte de fluxo magnético (PAULA, 2016). O objetivo da análise em que tem apenas os ímãs como fonte de fluxo magnético é obter os valores e formas de onda do fluxo concatenado pelas bobinas, da força contra eletromotriz e do *cogging torque* em carga; enquanto o objetivo da análise em que tem apenas as correntes

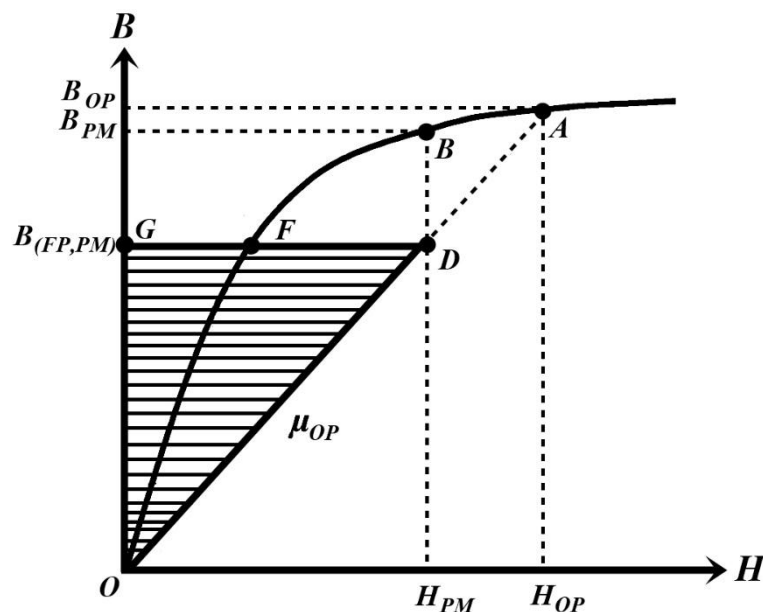
como fonte de fluxo magnético é obter os valores e formas de onda do fluxo produzido pelas bobinas, da indutância e do torque de relutância.

Em todas as etapas, a extração das componentes normal e tangencial da densidade de fluxo magnético ao longo do entreferro, da energia magnética armazenada e da coenergia magnética são importantes para a aplicação do Método dos Tensores de Maxwell, do Método do Trabalho Virtual e do método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu, respectivamente.

## 2.2 Método da Permeabilidade Fixa Melhorado

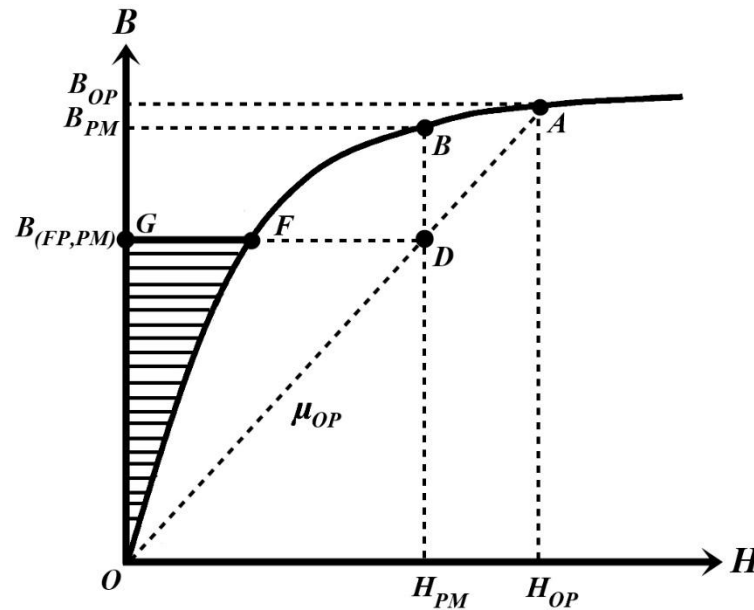
Embora o Método da Permeabilidade Fixa seja bem aceito no meio científico e seja amplamente aplicado, algumas críticas persistem sobre sua implementação. A maior delas está associada ao cálculo da energia magnética armazenada nos materiais ferromagnéticos após a linearização do problema. Chu e Zhu (2013a) aponta que a forma com que a linearização é conduzida provoca erros significativos no cálculo das contribuições de energia, tanto na análise que tem como fonte de fluxo magnético os ímãs permanentes no rotor da máquina, como também na análise que tem como fonte de fluxo magnético as correntes nas bobinas do estator. Sendo assim, a proposta de melhoria do MPF ocorre na quarta etapa do método, em que ao invés de se calcular a energia com base no triângulo  $ODG$  da Figura 2.5, no caso da análise com ímãs, utiliza-se a área hachurada da Figura 2.6. Para isto, busca-se o ponto  $F$  na curva de magnetização do material ferromagnético.

Figura 2.5 – Área equivalente a energia magnética no Método da Permeabilidade Fixa convencional.



Fonte: Adaptado de Chu e Zhu (2013a).

Figura 2.6 – Área equivalente a energia magnética no Método da Permeabilidade Fixa melhorado.

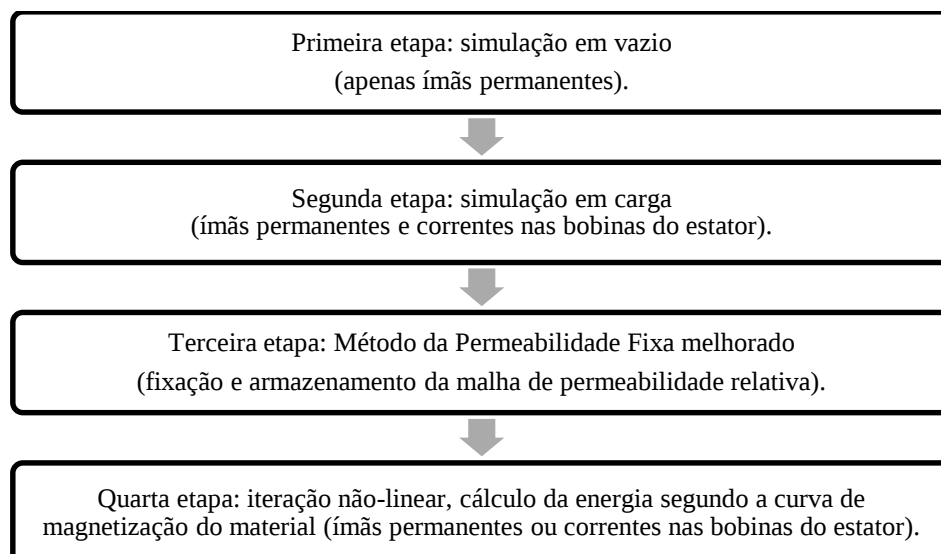


Fonte: Adaptado de Chu e Zhu (2013a).

Desta forma, tanto no MPF melhorado como no MPF convencional, as distribuições de fluxo magnético no modelo da máquina em carga são obtidas da mesma maneira, porém com a divergência no cálculo da energia nos materiais ferromagnéticos, como proposto em Chu e Zhu (2013a).

O fluxograma da Figura 2.7, adaptado de Chu e Zhu (2013a), resume o procedimento de aplicação e simulação do Método da Permeabilidade Fixa melhorado em uma máquina síncrona de ímãs permanentes para cada posição do rotor.

Figura 2.7 – Aplicação do Método da Permeabilidade Fixa melhorado.



Fonte: Adaptado de Chu e Zhu (2013a).

## CAPÍTULO 3

### TORQUE ELETROMAGNÉTICO E O CÁLCULO DO COGGING TORQUE

#### 3.1 Definição e Formulação do Torque Eletromagnético

A partir do torque eletromagnético determina-se a aplicabilidade e a capacidade de carga mecânica de uma máquina elétrica rotativa, o que faz dessa grandeza a de maior importância para qualquer motor (HENDERSHOT; MILLER, 1994). Sua formulação pode ser determinada pela variação da energia magnética armazenada  $W$  em termos de fluxo magnético ou pela variação da coenergia magnética  $W'$  em termos de corrente elétrica, como mostram as Equações (3.1) e (3.2), respectivamente (HANSELMAN, 1994).

$$T_{EL} = - \left. \frac{dW(\lambda, \theta_m)}{d\theta_m} \right|_{\lambda=\text{constante}} \quad (3.1)$$

$$T_{EL} = \left. \frac{dW'(i, \theta_m)}{d\theta_m} \right|_{i=\text{constante}} \quad (3.2)$$

Note que  $T_{EL}$  é o torque eletromagnético ( $N.m$ ),  $W$  é a energia magnética armazenada ( $J$ ),  $W'$  é a coenergia ( $J$ ),  $\theta_m$  é a posição angular mecânica do rotor ( $rad$ ),  $\lambda$  é o fluxo concatenado pelas bobinas ( $Wb.e$ ) e  $i$  é a corrente elétrica ( $A$ ).

De acordo com Hanselman (1994), a determinação do torque eletromagnético por meio da variação da coenergia se mostra mais favorável que sua determinação por meio da variação da energia, isto porque tanto na prática como em simulação é menos trabalhoso estimar e manipular corrente elétrica do que fluxo magnético.

Para as máquinas síncronas de ímãs permanentes no rotor, com os enrolamentos do estator conectados em estrela, a coenergia do sistema é definida pela Equação (3.3) (HANSELMAN, 1994).

$$W' = Ni_{linha}\phi_{im\tilde{s}} + \frac{1}{2}i_{linha}^2 L_{linha} - \frac{1}{2}\Re\phi_{im\tilde{s}}^2 \quad (3.3)$$

Note que  $N$  é o número de espiras nas bobinas,  $\phi_{\text{ímãs}}$  é o fluxo magnético proveniente dos ímãs (Wb),  $L_{\text{linha}}$  é a indutância de linha da máquina (H) e  $\mathfrak{R}$  é a relutância vista pelo circuito magnético que tem como fonte de fluxo os ímãs permanentes (A.e/Wb).

Substituindo-se (3.3) em (3.2), obtém-se a Equação (3.4) que descreve a formulação do torque eletromagnético (HANSELMAN, 1994).

$$T_{EL} = Ni_{\text{linha}} \frac{d\phi_{\text{ímãs}}}{d\theta_m} + \frac{1}{2} i_{\text{linha}}^2 \frac{dL_{\text{linha}}}{d\theta_m} - \frac{1}{2} \frac{d\mathfrak{R} \phi_{\text{ímãs}}^2}{d\theta_m} \quad (3.4)$$

Embora seja mais conveniente formular o torque eletromagnético a partir da variação da coenergia em termos da corrente de acionamento da máquina, existe a dificuldade de determinar o fluxo magnético proveniente dos ímãs e a relutância vista pelo circuito magnético que tem como fonte de fluxo os ímãs permanentes. Para solucionar este problema, recorre-se aos meios computacionais e ao Método dos Elementos Finitos (PAULA, 2016).

Relacionando as Equações (3.4) e (3.5), pode-se observar a existência de três parcelas distintas que compõem o torque eletromagnético de uma máquina síncrona de ímãs permanentes no rotor, definidas por torque mútuo, torque de relutância e *cogging torque* (PAULA, 2016).

$$T_{EL} = T_{\text{mútuo}} + T_{\text{relutância}} + T_{\text{cogging}} \quad (3.5)$$

### 3.1.1 Torque Mútuo

A primeira parcela de (3.4), denominada por torque mútuo, refere-se ao torque produzido pelo acoplamento entre as duas fontes de fluxo magnético na máquina, os ímãs permanentes no rotor e as correntes de acionamento nas bobinas do estator, sendo responsável por produzir a maior parte do torque desejado no eixo do motor (HANSELMAN, 1994).

A Equação (3.6) descreve o torque mútuo em função das correntes de acionamento, das forças contra eletromotrizes e da velocidade angular mecânica da máquina (PAULA, 2016).

$$T_{\text{mútuo}} = Ni_{\text{linha}} \frac{d\phi_{\text{ímãs}}}{d\theta_m} = \frac{i_A(\theta_m)e_A(\theta_m) + i_B(\theta_m)e_B(\theta_m) + i_C(\theta_m)e_C(\theta_m)}{\omega_m} \quad (3.6)$$

Note que as correntes  $i_A$ ,  $i_B$  e  $i_C$  (A) e as forças contra eletromotrizes  $e_A$ ,  $e_B$  e  $e_C$  (V) pertencem as fases A, B e C da máquina, respectivamente; e  $\omega_m$  é a velocidade angular mecânica do rotor ( $rad/s$ ).

### 3.1.2 Torque de Relutância

A segunda parcela de (3.4), denominada por torque de relutância, é produzida pela variação da indutância de linha da máquina que tem como fonte de fluxo as correntes de acionamento nas bobinas do estator (HANSELMAN, 1994).

Uma vez que a máquina está com seus enrolamentos do estator conectados em estrela, a Equação (3.7) descreve o torque de relutância em função da corrente de alimentação e da variação da indutância de linha (PAULA, 2016).

$$T_{relutância} = \frac{1}{2} i_{linha}^2 \frac{dL_{linha}}{d\theta_m} \quad (3.7)$$

Em alguns casos, o torque de relutância pode contribuir com o torque eletromagnético da máquina, mas usualmente é considerado um torque parasita (RUWER, 2015).

### 3.1.3 Cogging Torque

A terceira parcela de (3.4), denominada por *cogging torque*, é produzida pela variação da relutância vista pelo circuito magnético que tem como fonte de fluxo os ímãs permanentes no rotor (HANSELMAN, 1994). Em outras palavras, essa parcela é atribuída à interação entre os ímãs permanentes no rotor e as ranhuras presentes no estator da máquina (PAULA, 2016).

A Equação (3.8) descreve o *cogging torque* em função da variação da relutância vista pelo circuito magnético e do fluxo proveniente dos ímãs no rotor da máquina (PAULA, 2016).

$$T_{cogging} = -\frac{1}{2} \frac{d\Re \phi_{ímãs}^2}{d\theta_m} \quad (3.8)$$

Quando a máquina síncrona de ímãs permanentes está em vazio o *cogging torque* tem seu comportamento oscilatório determinado de modo satisfatório, onde a frequência de oscilação, apresentada na Equação (3.9), pode ser descrita com relação ao harmônico

fundamental de uma revolução elétrica do motor (CHABCHOUB; SALAH, 2012). Ainda na condição sem carga, o valor médio dessa componente de torque é igual à zero quando observado o seu ciclo completo e se justifica pela distribuição de permeabilidade no interior da máquina que está apenas sob influência do campo magnético produzido pelos ímãs, resultando em um sistema conservativo de energia (CHU; ZHU, 2013b; PAULA, 2016).

$$f_{cogging}(i) = \frac{MMC[2p, N_R]}{2} i \quad (3.9)$$

Note que  $f_{cogging}(i)$  é a frequência do *cogging torque* para o  $i$ -ésimo harmônico,  $MMC$  é a operação de mínimo múltiplo comum,  $2p$  é o números de polos da máquina,  $N_R$  é o número de ranhuras do estator e  $i$  é a ordem do harmônico.

Quanto maior a razão entre o número de ranhuras do estator e o número de polos da máquina, maior é a amplitude do *cogging torque* (GIERAS; WING, 2002).

Apesar de indesejada, essa parcela de torque é uma característica intrínseca nas máquinas síncronas de ímãs permanentes capaz de gerar vibração, ruído acústico e oscilações no torque eletromagnético (CHU; ZHU, 2013a). Desde o surgimento dos primeiros motores de ímãs, o principal objetivo dos estudos realizados e das técnicas desenvolvidas para a mitigação dessa componente tem sido de tornar o torque total mais suave (HENDERSHOT; MILLER, 1994; PAULA, 2013).

Trabalhos como Azar e Zhu (2012) e Paula (2013) mostram que o *cogging torque* apresenta variações tanto na sua frequência como na sua amplitude por estar sob os efeitos da saturação magnética no motor, o que acarreta em valores distintos comparados àqueles previstos na avaliação em vazio. Porém, seu cálculo tornou-se possível ao associar o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método da Permeabilidade Fixa (MPF) a outros métodos, como o Método dos Tensores de Maxwell, o Método do Trabalho Virtual e o método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu, apresentados na seções seguintes.

### 3.2 Método dos Tensores de Maxwell

Com base no Método dos Tensores de Maxwell, o torque eletromagnético de uma máquina é calculado a partir da integral das componentes normal e tangencial da densidade de

fluxo magnético ao longo do entreferro, como mostra a Equação (3.10) (DURRER, 2007; PAULA, 2016).

$$T_{EL,Maxwell} = \frac{L_{ef}}{\mu_0} \int_0^{2\pi} r^2 B_{n(OP)} B_{t(OP)} d\theta \quad (3.10)$$

Note que  $T_{EL,Maxwell}$  é o torque eletromagnético ( $N.m$ ),  $L_{ef}$  é o comprimento ativo do pacote de lâminas do estator ( $m$ ),  $\mu_0$  é a permeabilidade absoluta do vácuo ( $H/m$ ),  $r$  é raio do centro do entreferro ( $m$ ),  $B_{n(OP)}$  é a componente normal da densidade de fluxo magnético no ponto de operação da máquina ( $T$ ),  $B_{t(OP)}$  é a componente tangencial da densidade de fluxo magnético no ponto de operação da máquina ( $T$ ) e  $\theta$  é a posição angular do ponto de leitura, no centro do entreferro, de  $B_{n(OP)}$  e  $B_{t(OP)}$  ( $rad$ ).

Com a aplicação do Método da Permeabilidade Fixa convencional na simulação da máquina síncrona de ímãs permanentes na condição de carregamento, é válido afirmar que:

$$B_{OP} = B_{FP,PM} + B_{FP,i} \quad (3.11)$$

Note que  $B_{OP}$  é a densidade de fluxo magnético no ponto de operação da máquina,  $B_{FP,PM}$  é a contribuição apenas dos ímãs na distribuição de fluxo magnético total e  $B_{FP,i}$  é a contribuição apenas das correntes na distribuição de fluxo magnético total.

Como consequência de (3.11), no que diz respeito às componentes normal e tangencial da densidade de fluxo magnético no ponto de operação da máquina, pode-se concluir que:

$$B_{n(OP)} = B_{n(FP,PM)} + B_{n(FP,i)} \quad (3.12)$$

$$B_{t(OP)} = B_{t(FP,PM)} + B_{t(FP,i)} \quad (3.13)$$

Note que  $B_{n(FP,PM)}$  e  $B_{t(FP,PM)}$  são as componentes normal e tangencial da densidade de fluxo magnético da contribuição dos ímãs, enquanto que  $B_{n(FP,i)}$  e  $B_{t(FP,i)}$  são as componentes normal e tangencial da densidade de fluxo magnético da contribuição das correntes.

Substituindo-se (3.12) e (3.13) em (3.10), é possível verificar que:

$$T_{EL,Maxwell} = \frac{L_{ef}}{\mu_0} \int_0^{2\pi} r^2 \left[ B_{n(FP,PM)} + B_{n(FP,i)} \right] \left[ B_{t(FP,PM)} + B_{t(FP,i)} \right] d\theta \quad (3.14)$$

Expandindo-se a Equação (3.14), tem-se ainda que:

$$\begin{aligned} T_{EL,Maxwell} = & \left\{ \frac{L_{ef}}{\mu_0} \int_0^{2\pi} r^2 \left[ B_{n(FP,PM)} B_{t(FP,i)} \right] d\theta + \frac{L_{ef}}{\mu_0} \int_0^{2\pi} r^2 \left[ B_{n(FP,i)} B_{t(FP,PM)} \right] d\theta \right\} \\ & + \left\{ \frac{L_{ef}}{\mu_0} \int_0^{2\pi} r^2 \left[ B_{n(FP,i)} B_{t(FP,i)} \right] d\theta \right\} + \left\{ \frac{L_{ef}}{\mu_0} \int_0^{2\pi} r^2 \left[ B_{n(FP,PM)} B_{t(FP,PM)} \right] d\theta \right\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

A partir de (3.15) pode-se observar quatro parcelas distintas que compõem o torque eletromagnético da máquina: as duas primeiras são utilizadas para o cálculo do torque mútuo, uma vez que estas lidam com a interação entre as distribuições das densidades de fluxo magnético provenientes dos ímãs no rotor e das correntes nas bobinas do estator, assim como expresso em (3.4) e (3.6); a terceira é utilizada para o cálculo do torque de relutância, cujo resultado é obtido na quarta etapa de simulação do MPF em que se tem apenas as correntes como fonte de fluxo magnético; e a última é utilizada para o cálculo do *cogging torque*, cujo resultado também é obtido na quarta etapa de simulação do MPF, porém, havendo apenas os ímãs como fonte de fluxo magnético. Sendo assim, definem-se:

$$T_{mútuo,Maxwell} = \frac{L_{ef}}{\mu_0} \int_0^{2\pi} r^2 \left[ B_{n(FP,PM)} B_{t(FP,i)} \right] d\theta + \frac{L_{ef}}{\mu_0} \int_0^{2\pi} r^2 \left[ B_{n(FP,i)} B_{t(FP,PM)} \right] d\theta \quad (3.16)$$

$$T_{relutância,Maxwell} = \frac{L_{ef}}{\mu_0} \int_0^{2\pi} r^2 \left[ B_{n(FP,i)} B_{t(FP,i)} \right] d\theta \quad (3.17)$$

$$T_{cogging,Maxwell} = \frac{L_{ef}}{\mu_0} \int_0^{2\pi} r^2 \left[ B_{n(FP,PM)} B_{t(FP,PM)} \right] d\theta \quad (3.18)$$

A precisão do Método dos Tensores de Maxwell é fortemente dependente da discretização do modelo em simulação. Com isso, a malha de elementos finitos no entreferro deve estar bem refinada para a obtenção de resultados mais satisfatórios e condizentes com o funcionamento da máquina (POPESCU; DORREL, 2006).

### 3.3 Método do Trabalho Virtual

Baseado no Método do Trabalho Virtual, o torque eletromagnético de uma máquina pode ser calculado a partir da variação da energia  $W$  em termos de fluxo magnético ou da coenergia  $W'$  em termos de corrente elétrica, como mostram as Equações (3.1) e (3.2), respectivamente (HANSELMAN, 1994).

O cálculo da energia em (3.1) e da coenergia em (3.2) para cada posição angular mecânica do rotor  $\theta_m$  são apresentados (POPESCU; DORREL, 2006):

$$W = \int_V [w] dV \quad (3.19)$$

$$W' = \int_V [w'] dV \quad (3.20)$$

Note que  $w$  e  $w'$  são respectivamente as densidades de energia e coenergia em todo o volume  $V$  da máquina.

Na máquina síncrona de ímãs permanentes, as densidades de energia e coenergia são compostas por contribuições provenientes dos materiais lineares (entreferro e bobinas); dos materiais magnéticos moles (estator e rotor); e dos materiais magnéticos duros (ímãs); como se seguem (POPESCU; DORREL, 2006):

$$w = w_{\text{materiais\_lineares}} + w_{\text{materiais\_magnéticos\_moles}} + w_{\text{materiais\_magnéticos\_duros}} \quad (3.21)$$

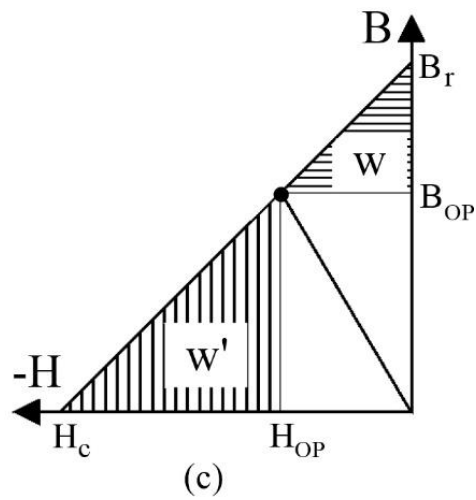
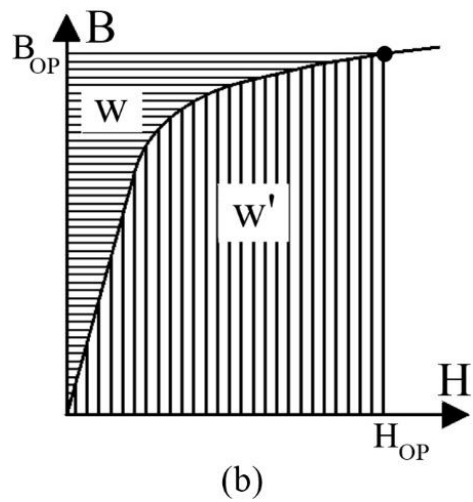
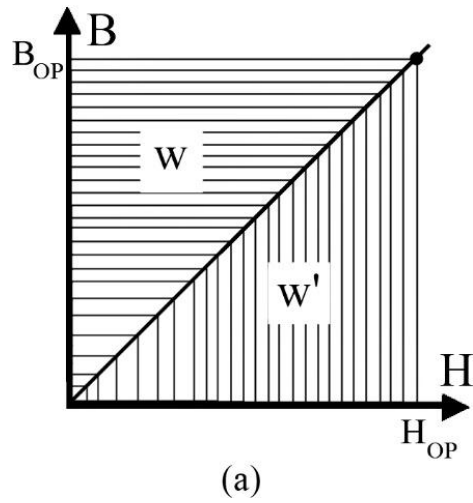
$$w' = w'_{\text{materiais\_lineares}} + w'_{\text{materiais\_magnéticos\_moles}} + w'_{\text{materiais\_magnéticos\_duros}} \quad (3.22)$$

As densidades de energia e coenergia nos materiais lineares, calculadas a partir da curva  $B$ - $H$  da Figura 3.1 (a), são dadas por (POPESCU; DORREL, 2006):

$$w_{\text{entreferro}} = w'_{\text{entreferro}} = \frac{1}{2} B_{OP} H_{OP} \quad (3.23)$$

Note que  $B_{OP}$  é a densidade de fluxo magnético no ponto de operação do material ( $T$ ) e  $H_{OP}$  é a intensidade de campo magnético no ponto de operação do material ( $A.e/m$ ).

Figura 3.1 – Densidades de energia e coenergia em diversos materiais.



(a) Materiais lineares. (b) Materiais magnéticos moles. (c) Materiais magnéticos duros.

Fonte: Adaptado de Popescu e Dorrel (2006).

As densidades de energia e coenergia nos materiais magnéticos moles, calculadas a partir da curva  $B$ - $H$  da Figura 3.1 (b) , são dadas por (POPESCU; DORREL, 2006):

$$w_{\text{materiais\_magnéticos\_moles}} = \int_0^{B_{OP}} H dB \quad (3.24)$$

$$w'_{\text{materiais\_magnéticos\_moles}} = \int_0^{H_{OP}} B dH \quad (3.25)$$

E por fim, as densidades de energia e coenergia nos materiais magnéticos duros, calculadas a partir da Figura 3.1 (c), onde  $H_c < 0$  e  $H_{OP} < 0$ , são dadas por (POPESCU; DORREL, 2006):

$$w_{\text{materiais\_magnéticos\_duros}} = \frac{-H_{OP}(B_r - B_{OP})}{2} \quad (3.26)$$

$$w'_{\text{materiais\_magnéticos\_duros}} = \frac{B_{OP}(H_{OP} - H_c)}{2} \quad (3.27)$$

Note que  $B_r$  é a densidade remanescente de fluxo magnético (T) e  $H_c$  é a coercitividade do material magnético duro (A.e/m).

De acordo com Chang e Eastham (1989) e Popescu e Dorrel (2006), as Equações (3.1) e (3.2) podem ser reescritas como:

$$T_{EL,Virtual} = - \left. \frac{\Delta W}{\Delta \theta_m} \right|_{\lambda=\text{constante}} = - \left. \frac{W_2 - W_1}{\theta_{m2} - \theta_{m1}} \right|_{\lambda=\text{constante}} \quad (3.28)$$

$$T_{EL,Virtual} = \left. \frac{\Delta W'}{\Delta \theta_m} \right|_{i=\text{constante}} = \left. \frac{W'_2 - W'_1}{\theta_{m2} - \theta_{m1}} \right|_{i=\text{constante}} \quad (3.29)$$

Note que os subscritos 1 e 2 referem-se as duas soluções consecutivas da máquina, onde  $W_1$ ,  $W'_1$  e  $\theta_{m1}$  são a energia, a coenergia e a posição angular mecânica do rotor referentes ao passo atual;  $W_2$ ,  $W'_2$  e  $\theta_{m2}$  são a energia, a coenergia e a posição angular mecânica do rotor referentes ao passo posterior; e  $\Delta \theta_m$  é o incremento na posição angular mecânica do rotor.

Dessa forma, para o cálculo do torque segundo a energia,  $W_1$  e  $W_2$  são obtidos mantendo-se o fluxo constante, isto é, o fluxo permanece igual para  $\theta_{m1}$  e  $\theta_{m2}$ . Já para o cálculo do torque segundo a coenergia,  $W'_1$  e  $W'_2$  são obtidos mantendo-se a corrente constante, isto é, a corrente permanece igual para  $\theta_{m1}$  e  $\theta_{m2}$ .

Uma desvantagem apresentada pelo Método do Trabalho Virtual está associada à necessidade de um procedimento de tentativa e erro para selecionar um valor adequado de incremento na posição angular mecânica do rotor,  $\Delta\theta_m$ . Se  $\Delta\theta_m$  for muito pequeno, a variação de energia, ou coenergia, será insuficiente para o cálculo do torque; e se  $\Delta\theta_m$  for muito grande, o valor do torque calculado não será preciso para a posição especificada (POPESCU; DORREL, 2006).

Sabendo-se que  $W_{in}$  é a energia de entrada da máquina e desprezando-se as perdas no sistema, a Equação (3.30) e (3.31) fundamentam-se no princípio da conservação de energia (STRAHAN, 1998).

$$W_{in} = W + W' \quad (3.30)$$

$$W' = W_{in} - W \quad (3.31)$$

Então, aplicando-se o Método do Trabalho Virtual em (3.31), pode-se afirmar que (STRAHAN, 1998):

$$T_{EL,Virtual} = \left. \frac{dW'}{d\theta_m} \right|_{i=constante} = \left. \frac{dW_{in}}{d\theta_m} \right|_{i=constante} - \left. \frac{dW}{d\theta_m} \right|_{i=constante} \quad (3.32)$$

Segundo Strahan (1998), Chu e Zhu (2013b) e Zarate e Escalada (2017), para um deslocamento rotacional  $d\theta_m$  na máquina síncrona de ímãs permanentes em vazio, onde  $i = 0$  e conseqüentemente  $W_{in} = 0$ , o *cogging torque* pode ser calculado a partir de (3.32) e é mostrado na Equação (3.33).

$$T_{cogging(vazio),Virtual} = \left. \frac{dW'_{(vazio)}}{d\theta_m} \right|_{i=constante} = - \left. \frac{dW_{(vazio)}}{d\theta_m} \right|_{i=constante} \quad (3.33)$$

Já na simulação da máquina em condição de carregamento, aplicando-se o Método da Permeabilidade Fixa, tem-se a análise em que os ímãs são a única fonte de fluxo magnético ( $FP, PM$ ), onde  $i = 0$  e, teoricamente,  $W_{in} = 0$ . No entanto, o estudo do balanço de energia em um sistema empregando-se o MPF, convencional ou melhorado, ainda não foi demonstrado ou verificado na literatura. Portanto, faz-se necessário examinar a Equação (3.34).

$$\left. \frac{dW'_{(FP,PM)}}{d\theta_m} \right|_{i=\text{constante}} = \left. \frac{dW_{in(FP,PM)}}{d\theta_m} \right|_{i=\text{constante}} - \left. \frac{dW_{(FP,PM)}}{d\theta_m} \right|_{i=\text{constante}} \quad (3.34)$$

Após a aplicação do MPF convencional, de acordo com Strahan (1998), Popescu e Miller (2005), Chu e Zhu (2013b) e Zarate e Escalada (2017), implementando-se a simulação linear em que se tem apenas os ímãs como fonte de fluxo magnético e com base no Método do Trabalho Virtual, o *cogging torque* em carga da máquina síncrona de ímãs permanentes pode ser calculado a partir da variação da energia magnética armazenada ou segundo a variação da coenergia magnética, como pode ser visto na Equação (3.35) e (3.36), respectivamente.

$$T_{cogging,Virtual} = - \left. \frac{dW_{(FP,PM)}}{d\theta_m} \right|_{i=\text{constante}} \quad (3.35)$$

$$T_{cogging,Virtual} = \left. \frac{dW'_{(FP,PM)}}{d\theta_m} \right|_{i=\text{constante}} \quad (3.36)$$

Assim como no caso da máquina em vazio, espera-se que o resultado da Equação (3.35) seja igual ao resultado obtido por meio da Equação (3.36), respeitando o princípio da conservação de energia.

Portanto, aplicando-se o MPF convencional, é fundamental analisar e comparar as duas formas de cálculo do *cogging torque* em carga apresentadas em (3.35) e (3.36), estas que relacionadas às Equações (3.28) e (3.29) podem ser reescritas como:

$$T_{cogging,Virtual} = - \left. \frac{\Delta W_{(FP,PM)}}{\Delta \theta_m} \right|_{i=\text{constante}} = - \left. \frac{W_{2(FP,PM)} - W_{1(FP,PM)}}{\theta_{m2} - \theta_{m1}} \right|_{i=\text{constante}} \quad (3.37)$$

$$T_{cogging,Virtual} = \left. \frac{\Delta W'_{(FP,PM)}}{\Delta \theta_m} \right|_{i=\text{constante}} = \left. \frac{W'_{2(FP,PM)} - W'_{1(FP,PM)}}{\theta_{m2} - \theta_{m1}} \right|_{i=\text{constante}} \quad (3.38)$$

Note que o subscrito  $(FP, PM)$  se refere a análise realizada com a aplicação do MPF onde se tem apenas os ímãs como fonte de fluxo magnético na máquina em carga;  $W_{1(FP, PM)}$  e  $W'_{1(FP, PM)}$  são a energia e a coenergia referentes ao passo atual da simulação; e  $W_2$  e  $W'_2$  são a energia e coenergia referentes ao passo posterior da simulação.

A implementação do Método do Trabalho Virtual para a determinação do torque requer o cálculo mais preciso possível da energia ou da coenergia no sistema. Portanto, faz-se necessário refinar a malha de toda a área analisada da máquina, especialmente nas áreas onde há grandes variações na densidade de fluxo magnético (POPESCU; DORREL, 2006).

### 3.4 Método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu

O método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu para o cálculo do *cogging torque* na máquina síncrona de ímãs permanentes em carga é baseado no Método do Trabalho Virtual e no Método da Permeabilidade Fixa. Para fundamentar seus estudos, Chu e Zhu (2013b) parte da análise da Equação (3.32), a respeito do princípio da conservação de energia, e da Equação (3.39) que, segundo os autores, caracteriza a variação da energia de entrada no sistema.

$$\frac{dW_{in, ZHU}}{d\theta_m} = \frac{3}{2} p \left( I_d \frac{d\psi_d}{d\theta_e} + I_q \frac{d\psi_q}{d\theta_e} + \psi_d I_q - \psi_q I_d \right) \quad (3.39)$$

Note que  $p$  é o número de pares de polos;  $I_d$  e  $I_q$  são as correntes nos eixos  $d$  e  $q$  (A);  $\psi_d$  e  $\psi_q$  são os fluxos concatenados nos eixos  $d$  e  $q$  (Wb.e); e  $\theta_e$  é a posição angular elétrica do rotor (rad).

Na avaliação da máquina síncrona de ímãs permanentes, Chu e Zhu (2013b) substitui (3.39) em (3.32) e afirma que  $\frac{\psi_d}{\theta_e}$ ,  $\frac{\psi_q}{\theta_e}$  e  $\frac{dW}{d\theta_m}$  não contribuem para o cálculo do valor médio do torque eletromagnético, como descreve a Equação (3.40) baseada no modelo clássico  $dq0$ .

$$T_{dq0, ZHU} = \frac{3}{2} p (\psi_d I_q - \psi_q I_d) \quad (3.40)$$

De acordo com Chu e Zhu (2013b), os fluxos concatenados dos eixos  $d$  e  $q$  são descritos na Equação (3.41) e (3.42), respectivamente. Lembrando que os resultados de  $\psi_d$  e  $\psi_q$  são obtidos a partir das simulações utilizando-se o MEF e o MPF.

$$\psi_d = \psi_{d(PM)} + \psi_{d(i)} \quad (3.41)$$

$$\psi_q = \psi_{q(PM)} + \psi_{q(i)} \quad (3.42)$$

Note que  $\psi_{d(PM)}$  e  $\psi_{q(PM)}$  são os fluxos concatenados dos eixos  $d$  e  $q$  que têm os ímãs como fonte de fluxo magnético, enquanto que  $\psi_{d(i)}$  e  $\psi_{q(i)}$  são os fluxos concatenados dos eixos  $d$  e  $q$  que têm as correntes nas bobinas como fonte de fluxo magnético.

Substituindo-se (3.41) e (3.42) em (3.40), tem-se que (CHU; ZHU, 2013b):

$$T_{dq0,ZHU} = \frac{3}{2} p \left\{ \left[ \psi_{d(PM)} I_q - \psi_{q(PM)} I_d \right] + \left[ \psi_{d(i)} I_q - \psi_{q(i)} I_d \right] \right\} \quad (3.43)$$

A partir de (3.43), Chu e Zhu (2013b) conclui quanto aos valores médios de cada parcela do torque eletromagnético da máquina síncrona de ímãs permanentes:

$$T_{\text{mútuos(médio),Zhu}} = \frac{3}{2} p \left\{ \left[ \psi_{d(PM)} I_q - \psi_{q(PM)} I_d \right] \right\} \quad (3.44)$$

$$T_{\text{relutância(médio),Zhu}} = \frac{3}{2} p \left\{ \left[ \psi_{d(i)} I_q - \psi_{q(i)} I_d \right] \right\} \quad (3.45)$$

$$T_{\text{cogging(médio),Zhu}} = 0 \quad (3.46)$$

No entanto, deve notar-se que (3.44), (3.45) e (3.46) são diferentes do torque mútuo, do torque de relutância e do *cogging torque* da máquina em carga, respectivamente, uma vez que suas ondulações são imprecisas. Portanto, são apenas adequadas para a avaliação do torque médio, mas não para a sua forma de onda ou para as suas ondulações (CHU; ZHU, 2013b).

Após a aplicação do Método da Permeabilidade Fixa na máquina síncronas de ímãs permanentes em carga para o cálculo do *cogging torque*, Chu e Zhu (2013b) conclui que a simulação da máquina em que se tem apenas os ímãs como fonte de fluxo magnético se

assemelha a simulação em que a máquina está em vazio, por não haver corrente elétrica circulando nas bobinas do estator, tampouco energia de entrada no sistema; e afirma ainda que o *cogging torque* nesta condição deve apresentar valor médio igual a zero.

Dado que o Método da Permeabilidade Fixa prioriza a distribuição dos fluxos magnéticos no interior do motor e o Método do Trabalho Virtual requer o cálculo mais preciso possível da energia ou da coenergia no sistema, Chu e Zhu (2013a) propõe o MPF melhorado para o cálculo do *cogging torque* em carga na máquina síncrona de ímãs permanentes segundo a variação da energia magnética armazenada, como é apresentado na Equação (3.47).

$$T_{cogging,Zhu} = - \left. \frac{dW_{(FP,PM)}}{d\theta_m} \right|_{i=constante} \quad (3.47)$$

Durante a aplicação do MPF melhorado em que se tem apenas a contribuição dos ímãs como fonte de fluxo magnético presume-se que o torque existente na máquina é o *cogging torque* em carga. Sendo assim, seu cálculo segundo a variação da coenergia é apresentado na Equação (3.48).

$$T_{cogging,Zhu} = \left. \frac{dW'_{(FP,PM)}}{d\theta_m} \right|_{i=constante} \quad (3.48)$$

Assim como no caso da máquina em vazio, espera-se que o resultado da Equação (3.47) seja igual ao resultado obtido por meio da Equação (3.48), respeitando o princípio da conservação de energia, sendo que a veracidade desta condição ainda não foi verificada na literatura.

Portanto, aplicando-se o MPF melhorado, faz-se necessário avaliar e comparar as duas formas de cálculo do *cogging torque* em carga descritas em (3.47) e (3.48), estas que relacionadas às Equações (3.28) e (3.29) podem ser reescritas como:

$$T_{cogging,Zhu} = - \left. \frac{\Delta W_{(FP,PM)}}{\Delta \theta_m} \right|_{i=constante} = - \left. \frac{W_{2(FP,PM)} - W_{1(FP,PM)}}{\theta_{m2} - \theta_{m1}} \right|_{i=constante} \quad (3.49)$$

$$T_{cogging,Zhu} = \left. \frac{\Delta W'_{(FP,PM)}}{\Delta \theta_m} \right|_{i=constante} = \left. \frac{W'_{2(FP,PM)} - W'_{1(FP,PM)}}{\theta_{m2} - \theta_{m1}} \right|_{i=constante} \quad (3.50)$$

Ainda de acordo com Chu e Zhu (2013a), as discussões e conclusões de seu estudo são igualmente aplicáveis para qualquer outro tipo de máquina elétrica. No entanto, a avaliação foi realizada com apenas um tipo de máquina síncrona de ímãs permanentes com forma de onda da força contra eletromotriz senoidal, onde o acionamento é efetuado com correntes puramente senoidais e a topologia adotada é a de ímãs semi-enterrados no rotor.

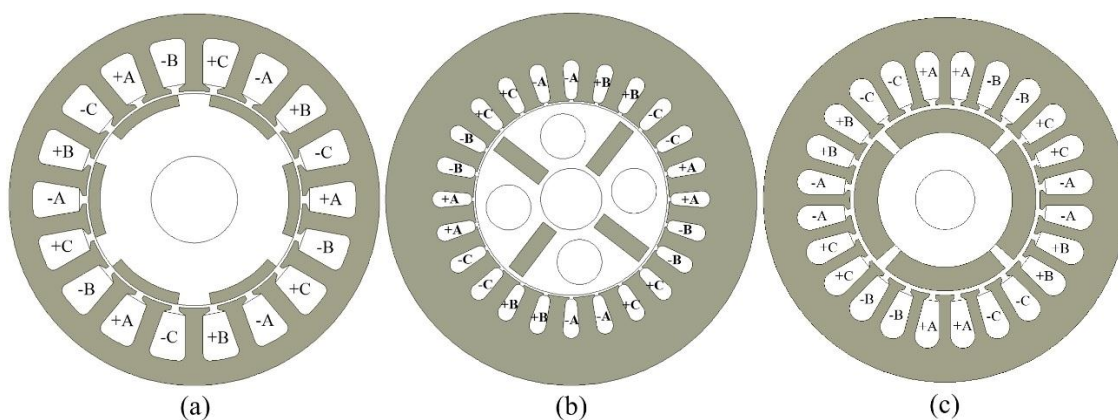
## CAPÍTULO 4

### ESTUDOS DE CASOS

#### 4.1 Introdução

O presente capítulo apresenta a avaliação de três estudos de casos, ilustrados na Figura 4.1, para a análise do Método dos Tensores de Maxwell, do Método do Trabalho Virtual e do método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu, combinados ao Método dos Elementos Finitos (MEF) e ao Método da Permeabilidade Fixa (MPF), no cálculo do *cogging torque* em carga nas máquinas síncronas de ímãs permanentes no rotor. Todas as simulações conduzidas neste trabalho são realizadas com o auxílio do FEMM (*Finite Element Method Magnetics*), *software* aplicado na implementação do MEF e do MPF.

Figura 4.1 – Estudos de casos da máquina síncrona de ímãs permanentes no rotor.



(a) Caso 1 – Máquina síncrona com ímãs semi-enterrados no rotor. (b) Caso 2 – Máquina síncrona com ímãs enterrados longitudinalmente. (c) Caso 3 – Máquina síncrona com ímãs montados na superfície do rotor.

Fonte: Autor.

Os três estudos de casos referentes às diferentes topologias da máquina síncrona de ímãs permanentes são descritos a seguir:

- Caso 1: A primeira máquina em estudo, também analisada em Chu e Zhu (2013a) e Chu e Zhu (2013b), é uma topologia de máquina síncrona com ímãs semi-enterrados no rotor.
- Caso 2: A segunda máquina em estudo é um modelo disponível no Laboratório de Máquinas Elétricas da Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação

(EMC) da Universidade Federal de Goiás (UFG), sendo uma topologia de máquina síncrona com ímãs enterrados longitudinalmente.

- Caso 3: A terceira máquina em estudo é um modelo disponível no Laboratório de Controle e Eletrônica de Potência (LACEP) do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade de São Paulo (USP), sendo uma topologia de máquina síncrona com ímãs montados na superfície do rotor.

As principais dimensões das máquinas apresentadas em cada um dos estudos de casos são descritas na Tabela 4.1. Deve-se levar em consideração que os casos analisados não apresentam inclinação no pacote de lâminas do estator (*skewing slot*), contribuindo, portanto, para a presença do *cogging torque* nas máquinas em estudo.

Tabela 4.1 – Dimensões das máquinas síncronas de ímãs permanentes no rotor.

| Parâmetros                            | Dimensões |         |          |
|---------------------------------------|-----------|---------|----------|
|                                       | Caso 1    | Caso 2  | Caso 3   |
| Número de ranhuras                    | 18        | 24      | 24       |
| Número de polos                       | 6         | 4       | 4        |
| Profundidade                          | 30 mm     | 102 mm  | 47 mm    |
| Diâmetro externo do estator           | 106 mm    | 182 mm  | 116,6 mm |
| Diâmetro interno do estator           | 62 mm     | 96 mm   | 61 mm    |
| Espessura da carcaça do estator       | 6,8 mm    | 22,9 mm | 14,35 mm |
| Comprimento do entreferro             | 0,75 mm   | 1 mm    | 1,35 mm  |
| Diâmetro externo do rotor             | 60,5 mm   | 94 mm   | 58,3 mm  |
| Largura do dente                      | 5 mm      | 8,16 mm | 3,52 mm  |
| Abertura da ranhura                   | 2,3 mm    | 2,2 mm  | 2,15 mm  |
| Diâmetro do eixo                      | 24,7 mm   | 30 mm   | 19 mm    |
| Espessura da ponta da sapata do dente | 1 mm      | 1 mm    | 1 mm     |
| Espessura do ímã                      | 3,25 mm   | 8,3 mm  | 7,6 mm   |
| Tipo do ímã                           | NdFeB     | NdFeB   | NdFeB    |

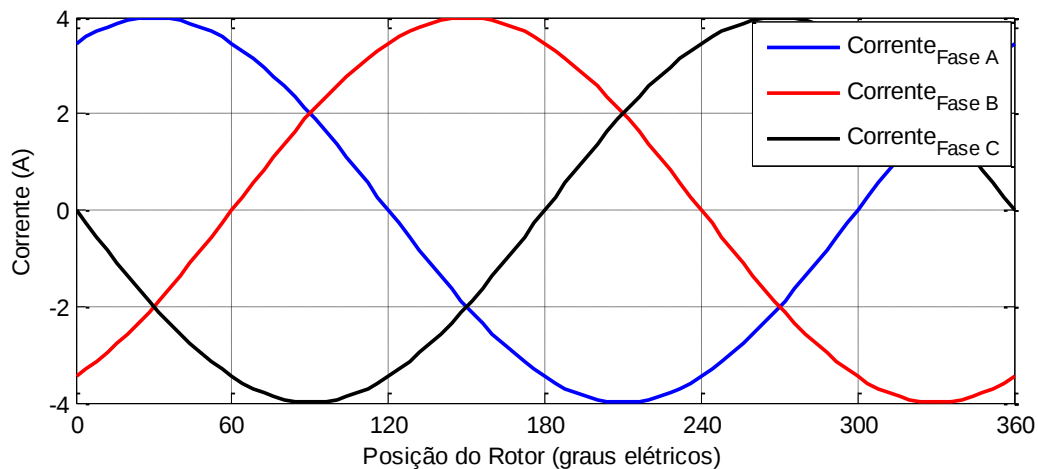
As simulações no presente trabalho são realizadas com o auxílio do FEMM (*Finite Element Method Magnetics*), *software* aplicado na implementação do MEF, do MPF convencional e do MPF melhorado. Sua escolha baseou-se no fato de ser um *software* livre, distribuído gratuitamente, e que permite a automatização de seus processos de simulação por meio de *scripts* fundamentados na linguagem LUA. Além disso, ele permite a inclusão e edição dos materiais utilizados nas simulações e o refinamento das malhas de elementos finitos de forma independente em cada material.

Para todos os casos, as máquinas são alimentadas por correntes senoidais e quadradas defasadas entre si em 120° elétricos, amplitude de 4 e 3,6363 ampères, respectivamente, o que

sugere níveis de carregamento eletromagnético próximos, já que apresentam o mesmo valor para o primeiro harmônico da corrente, e ângulo de avanço da corrente de fase de  $-30^\circ$ , ver Figura 4.2 e Figura 4.3. O cálculo do *cogging torque* em carga é conduzido como segue:

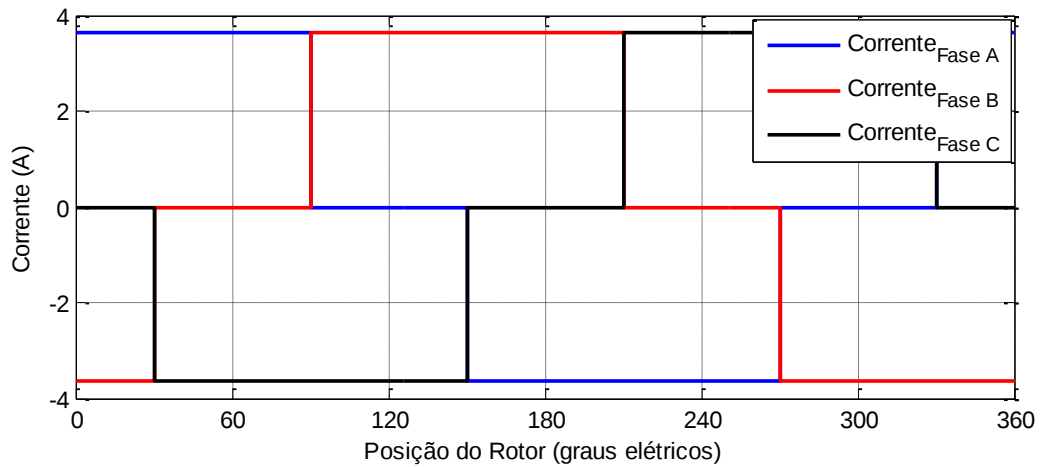
- Simulação da máquina na condição de carga no FEMM para implementação do MEF e do MPF convencional.
- Extração das componentes normal e tangencial da densidade de fluxo magnético ao longo do entreferro a partir da simulação linear em que se tem apenas os ímãs como fonte de fluxo magnético para aplicação do Método dos Tensores de Maxwell, como é visto em (3.18).
- Extração dos valores de energia e coenergia magnética na máquina para cada posição do rotor a partir da simulação linear em que se tem apenas os ímãs como fonte de fluxo magnético para aplicação do Método do Trabalho Virtual, como é visto em (3.35) e (3.36), respectivamente.
- Simulação da máquina na condição de carga no FEMM para implementação do MEF e do MPF melhorado.
- Extração dos valores de energia e coenergia magnética na máquina para cada posição do rotor a partir da simulação linear em que se tem apenas os ímãs como fonte de fluxo magnético para aplicação do método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu, como é visto em (3.47) e (3.48), respectivamente.

Figura 4.2 – Forma de onda e amplitude das correntes senoidais (4 A).



Fonte: Autor.

Figura 4.3 – Forma de onda e amplitude das correntes quadradas (3,6363 A).



Fonte: Autor.

Para todos os estudos de casos são apresentados os seguintes dados nas subseções a seguir:

- Condição em vazio (0 A): a distribuição de permeabilidade na máquina; e o *cogging torque* calculado a partir do Método dos Tensores de Maxwell e do Método do Trabalho Virtual, combinados ao Método dos Elementos Finitos.
- Condição em carregamento (correntes senoidais e quadradas): a distribuição de permeabilidade na máquina; o torque eletromagnético; e o *cogging torque* calculado a partir do Método dos Tensores de Maxwell, do Método do Trabalho Virtual e do método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu, combinados ao Método dos Elementos Finitos e ao Método da Permeabilidade Fixa.

## 4.2 Análise do Caso 1

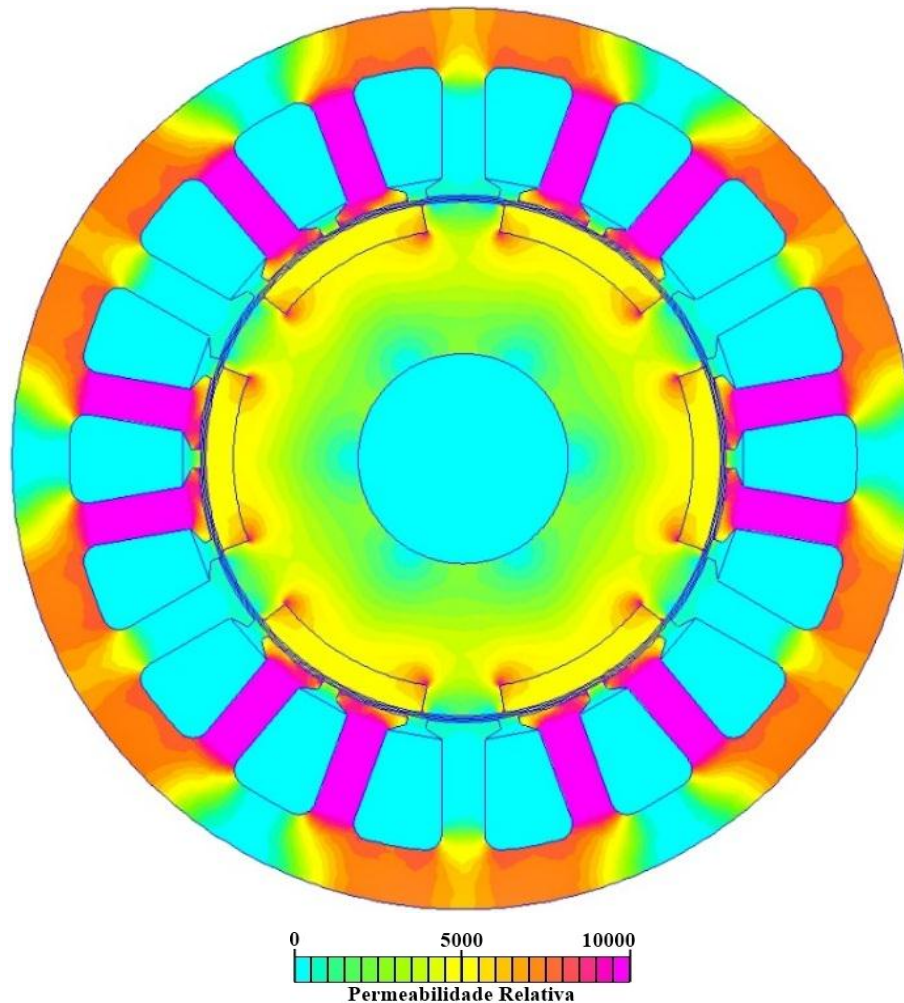
Análise do estudo de caso 1 referente à máquina síncrona de ímãs permanentes semi-enterrados no rotor.

### 4.2.1 Condição em Vazio (0 A)

Na condição de operação em vazio a Figura 4.4 apresenta a distribuição de permeabilidade no interior da máquina obtida na posição angular mecânica do rotor  $\theta_m = 0^\circ$ . Nota-se que a distribuição é simétrica e está apenas sob influência do campo magnético produzido pelos ímãs, resultando em um sistema conservativo de energia tanto do ponto de

vista macroscópico, previsto pela Equação (3.30), quanto do ponto de vista microscópico, decorrente do campo imposto sobre o rotor ser constante em qualquer uma de suas posições. Como consequência, o valor médio do torque produzido no eixo da máquina é zero quando observado o seu ciclo completo.

Figura 4.4 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina com  $\theta_m = 0^\circ$  (operação em vazio).



Fonte: Autor.

Na Figura 4.5 o *cogging torque* em vazio é obtido a partir do Método dos Tensores de Maxwell e do Método do Trabalho Virtual, associados ao Método dos Elementos Finitos. Nota-se que as formas de onda apresentadas pelos dois métodos são idênticas, evidenciando que a malha do entreferro da simulação está bem refinada. Por meio da Equação (3.9) é esperado como frequência fundamental o valor de 6 vezes a frequência fundamental de uma revolução elétrica. Os valores mínimo, médio e máximo do *cogging torque* em vazio são apresentados na Tabela 4.2.

Figura 4.5 – Cogging torque (operação em vazio).

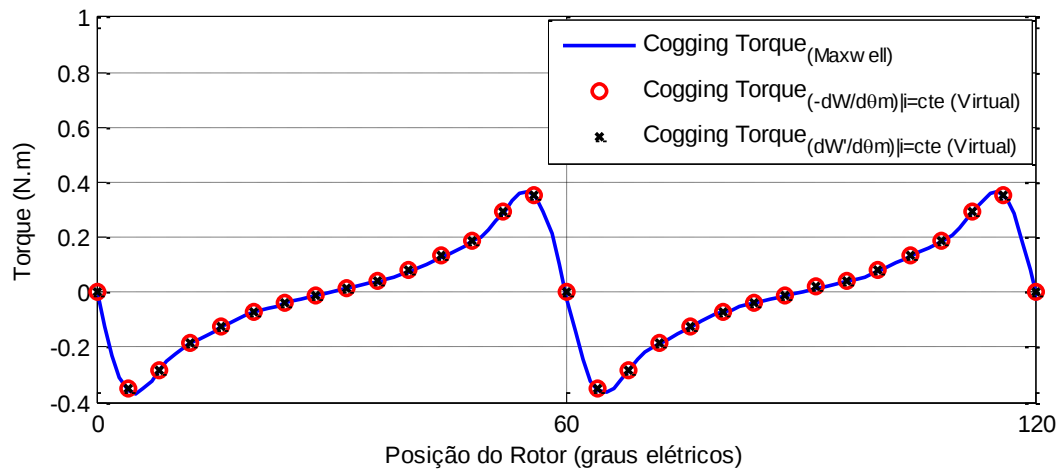


Tabela 4.2 – Valores do cogging torque (operação em vazio).

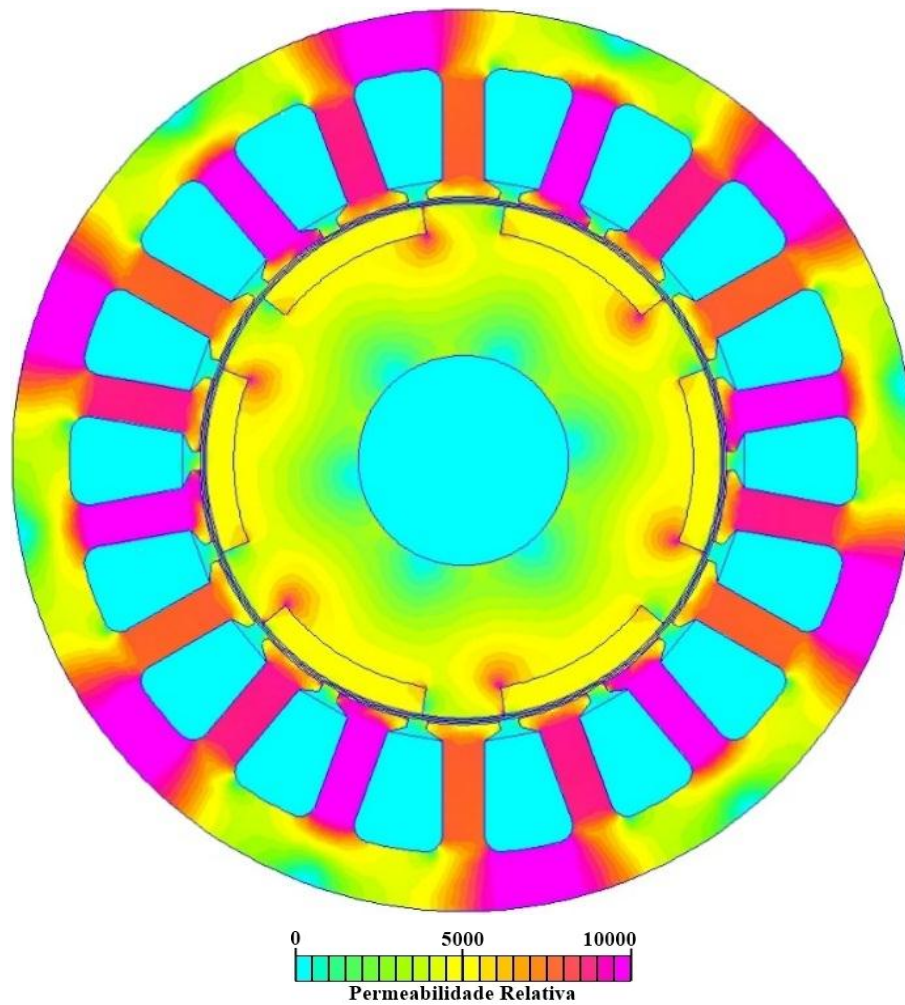
|                                | Mínimo (N.m) | Médio (N.m) | Máximo (N.m) |
|--------------------------------|--------------|-------------|--------------|
| Método dos Tensores de Maxwell | -0,36        | 0           | 0,36         |
| Método do Trabalho Virtual     | -0,36        | 0           | 0,36         |

#### 4.2.2 Condição em Carregamento (Correntes Senoidais)

Na condição de operação em carga com correntes senoidais a Figura 4.6 apresenta a distribuição de permeabilidade no interior da máquina obtida na posição angular mecânica do rotor  $\theta_m = 0^\circ$ . Nota-se que diferentemente da condição em vazio, a distribuição é assimétrica e está sob influência do campo magnético produzido pelos ímãs e do campo magnético produzido pelas correntes, resultando em um sistema conservativo de energia do ponto de vista macroscópico, previsto pela Equação (3.30), porém não conservativo do ponto de vista microscópico, decorrente do campo imposto sobre o rotor não ser constante em qualquer uma de suas posições. Como consequência, o valor médio do torque produzido no eixo da máquina é diferente de zero quando observado o seu ciclo completo.

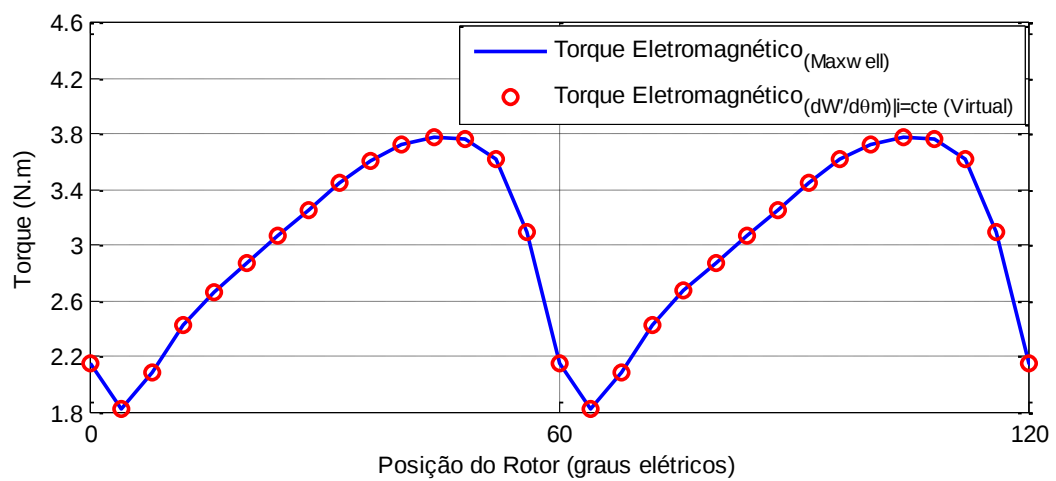
Na Figura 4.7 o torque eletromagnético para a máquina em carga é obtido a partir do Método dos Tensores de Maxwell e do Método do Trabalho Virtual associados ao Método dos Elementos Finitos. Nota-se que as formas de onda apresentadas pelos dois métodos são idênticas, evidenciando que a malha do entreferro da simulação está bem refinada. Os valores mínimo, médio e máximo do torque total são apresentados na Tabela 4.3.

Figura 4.6 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina com  $\theta_m = 0^\circ$  (carregamento com correntes senoidais).



Fonte: Autor.

Figura 4.7 – Torque eletromagnético (carregamento com correntes senoidais).



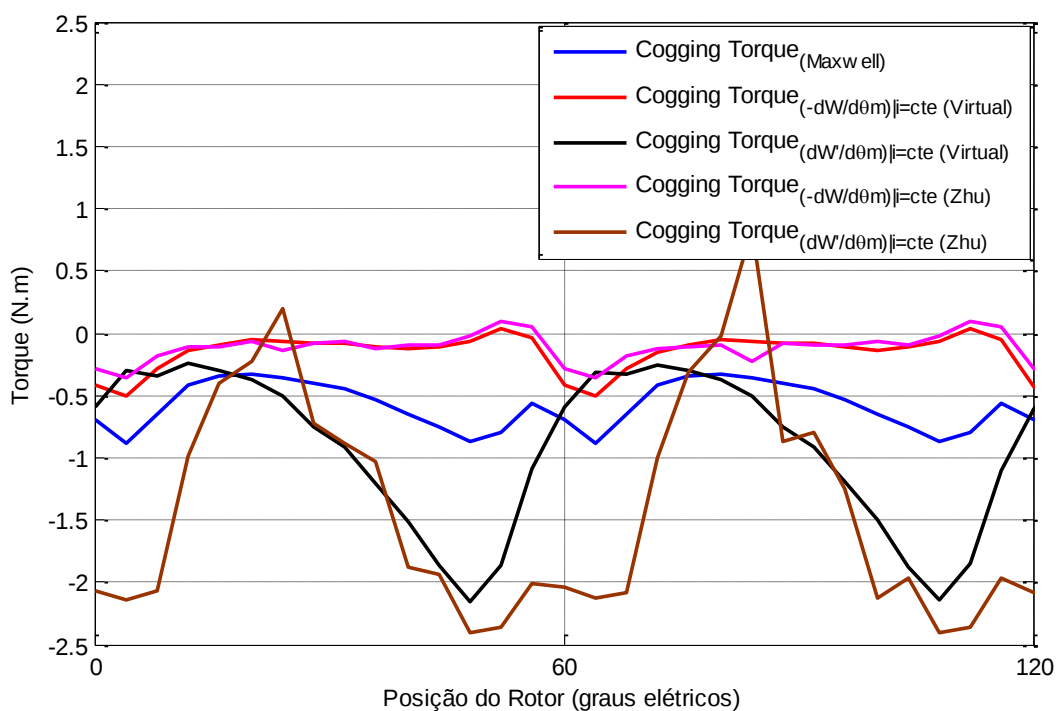
Fonte: Autor.

Tabela 4.3 – Valores do torque eletromagnético (carregamento com correntes senoidais).

|                                | Mínimo (N.m) | Médio (N.m) | Máximo (N.m) |
|--------------------------------|--------------|-------------|--------------|
| Método dos Tensores de Maxwell | 1,81         | 3,02        | 3,78         |
| Método do Trabalho Virtual     | 1,81         | 3,02        | 3,78         |

Na Figura 4.8 o *cogging torque* em carga é obtido a partir do Método dos Tensores de Maxwell, do Método do Trabalho Virtual e do método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu, associados ao Método dos Elementos Finitos e ao Método da Permeabilidade Fixa. Os valores mínimo, médio e máximo do *cogging torque* em carga são apresentados na Tabela 4.4.

Figura 4.8 – Cogging torque em carga (carregamento com correntes senoidais).



Fonte: Autor.

No estudo de caso 1 nota-se com a Figura 4.8 e a Tabela 4.4 que há uma considerável discrepância entre os resultados obtidos a partir dos métodos aplicados para o cálculo do *cogging torque*, tanto na forma de onda quanto na amplitude e no valor médio, com exceção para as curvas encontradas com a variação da energia magnética armazenada, onde o Método do Trabalho Virtual baseia-se no MPF convencional e o método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu baseia-se no MPF melhorado.

Tabela 4.4 – Valores do *cogging torque* em carga (carregamento com correntes senoidais).

|                                                               | Mínimo (N.m) | Médio (N.m) | Máximo (N.m) |
|---------------------------------------------------------------|--------------|-------------|--------------|
| Método dos Tensores de Maxwell                                | -0,88        | -0,58       | -0,33        |
| Método do Trabalho Virtual (com a variação da energia)        | -0,51        | -0,15       | 0,04         |
| Método do Trabalho Virtual (com a variação da coenergia)      | -2,16        | -0,93       | -0,25        |
| Método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu (com a variação da energia)   | -0,36        | -0,11       | 0,10         |
| Método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu (com a variação da coenergia) | -2,41        | -1,38       | 0,85         |

É interessante observar que nesta etapa do Método da Permeabilidade Fixa, na qual se tem apenas os ímãs como fonte de fluxo magnético ( $FP, PM$ ), mesmo não havendo correntes circulando nas bobinas das máquinas, obteve-se  $dW'_{(FP, PM)}/d\theta_m \neq -dW_{(FP, PM)}/d\theta_m$ , ou seja,  $dW_{in(FP, PM)}/d\theta_m \neq 0$ , contrariando o princípio da conservação de energia. Pode-se notar ainda que os valores médios calculados em todos os métodos são diferentes de zero, o que leva a questionar o que é afirmado em Chu e Zhu (2013b) sobre o valor médio do *cogging torque* na máquina síncrona de ímãs permanentes na condição de carga.

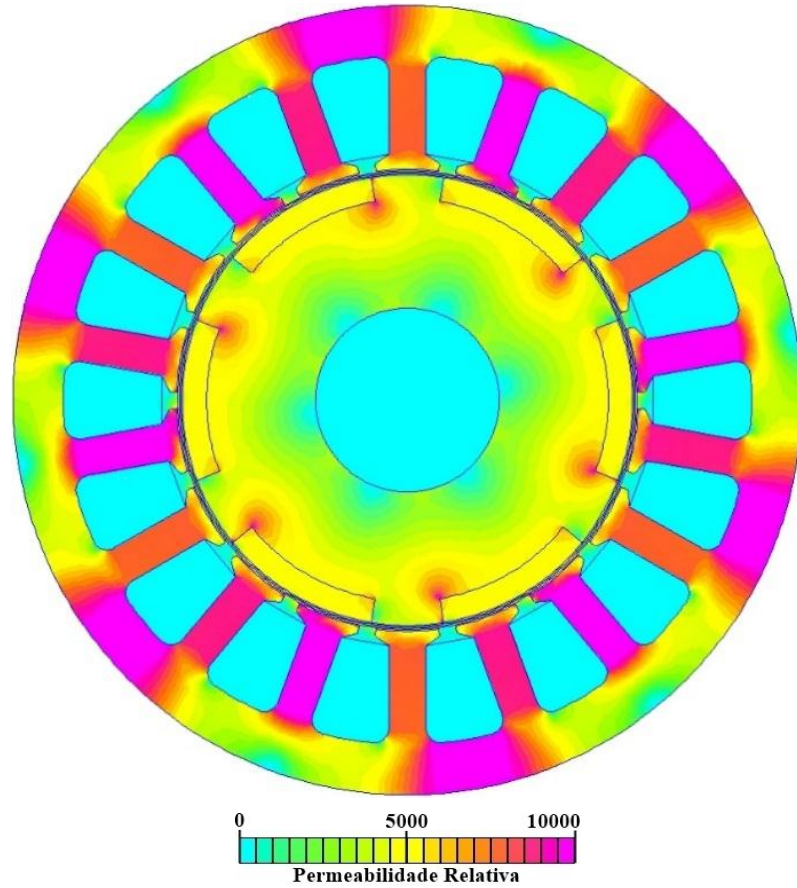
#### 4.2.3 Condição em Carregamento (Correntes Quadradas)

Na condição de operação em carga com correntes quadradas a Figura 4.9 apresenta a distribuição de permeabilidade no interior da máquina obtida na posição angular mecânica do rotor  $\theta_m = 0^\circ$ . Nota-se que a distribuição é assimétrica e bastante semelhante àquela vista na Figura 4.6 devido aos níveis de carregamento eletromagnético próximos entre as correntes senoidais e quadradas por apresentarem o mesmo valor para o primeiro harmônico da corrente.

Na Figura 4.10 o torque eletromagnético para a máquina em carga é obtido a partir do Método dos Tensores de Maxwell e do Método do Trabalho Virtual associados ao Método dos Elementos Finitos. Nota-se que as formas de onda apresentadas pelos dois métodos são idênticas, evidenciando que a malha do entreferro da simulação está bem refinada. Os valores mínimo, médio e máximo do torque total são apresentados na Tabela 4.5. Pode-se observar que o valor médio do torque eletromagnético no carregamento com correntes quadradas aproxima-

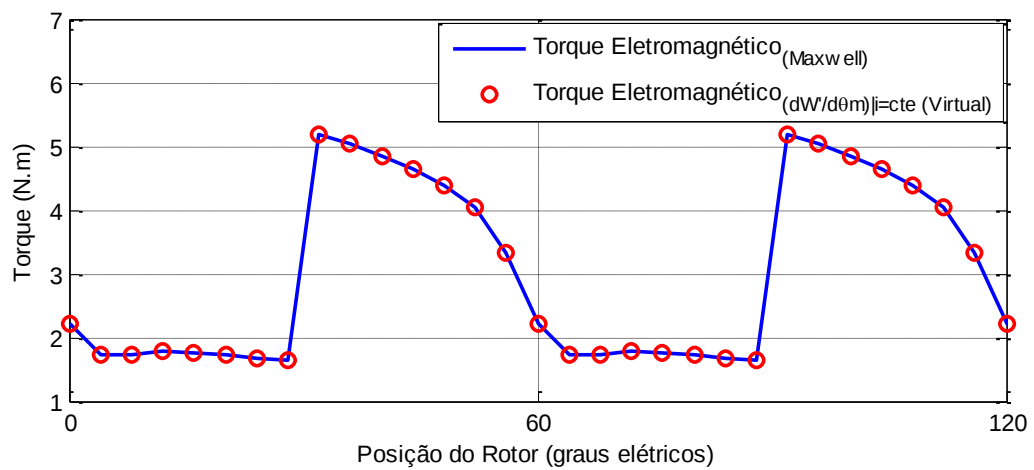
se ao valor médio do torque eletromagnético no carregamento com correntes senoidais devido aos níveis de carregamento eletromagnético próximos.

Figura 4.9 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina com  $\theta_m = 0^\circ$  (carregamento com correntes quadradas).



Fonte: Autor.

Figura 4.10 – Torque eletromagnético (carregamento com correntes quadradas).



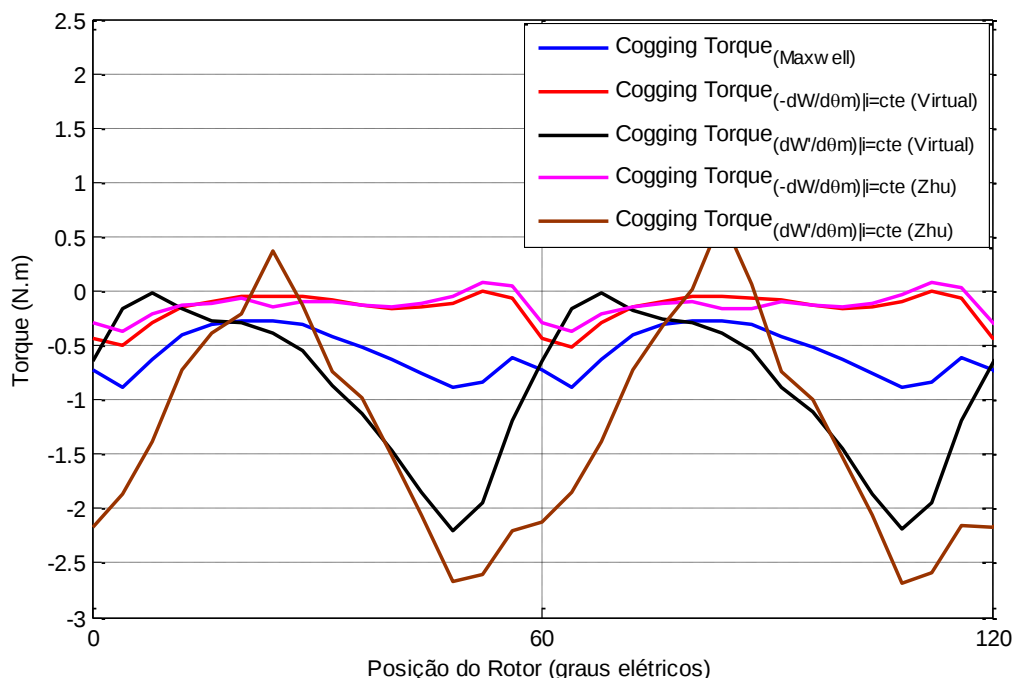
Fonte: Autor.

Tabela 4.5 – Valores do torque eletromagnético (carregamento com correntes quadradas).

|                                | Mínimo (N.m) | Médio (N.m) | Máximo (N.m) |
|--------------------------------|--------------|-------------|--------------|
| Método dos Tensores de Maxwell | 1,63         | 3,03        | 5,17         |
| Método do Trabalho Virtual     | 1,63         | 3,03        | 5,17         |

Na Figura 4.11 o *cogging torque* em carga é obtido a partir do Método dos Tensores de Maxwell, do Método do Trabalho Virtual e do método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu, associados ao Método dos Elementos Finitos e ao Método da Permeabilidade Fixa. Os valores mínimo, médio e máximo do *cogging torque* em carga são apresentados na Tabela 4.6. Assim como no caso do torque eletromagnético, pode-se observar que os valores médios do *cogging torque* em carga no carregamento com correntes quadradas aproximam-se aos valores médios do *cogging torque* em carga no carregamento com correntes senoidais devido aos níveis de carregamento eletromagnético próximos.

Figura 4.11 – Cogging torque em carga (carregamento com correntes quadradas).



Fonte: Autor.

No estudo de caso 1 nota-se com a Figura 4.11 e a Tabela 4.6 que há uma considerável discrepância nas formas de onda entre os resultados obtidos a partir dos diferentes métodos aplicados para o cálculo do *cogging torque* em carga.

Tabela 4.6 – Valores do *cogging torque* em carga (carregamento com correntes quadradas).

|                                                               | Mínimo (N.m) | Médio (N.m) | Máximo (N.m) |
|---------------------------------------------------------------|--------------|-------------|--------------|
| Método dos Tensores de Maxwell                                | -0,88        | -0,56       | -0,26        |
| Método do Trabalho Virtual (com a variação da energia)        | -0,51        | -0,15       | 0,01         |
| Método do Trabalho Virtual (com a variação da coenergia)      | -2,21        | -0,87       | -0,01        |
| Método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu (com a variação da energia)   | -0,37        | -0,12       | 0,09         |
| Método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu (com a variação da coenergia) | -2,68        | -1,26       | 0,72         |

É interessante observar, assim como no carregamento com correntes senoidais, que nesta etapa do Método da Permeabilidade Fixa, na qual se tem apenas os ímãs como fonte de fluxo magnético ( $FP, PM$ ), mesmo não havendo correntes circulando nas bobinas das máquinas, obteve-se  $dW'_{(FP,PM)}/d\theta_m \neq -dW_{(FP,PM)}/d\theta_m$ , ou seja,  $dW_{in(FP,PM)}/d\theta_m \neq 0$ , novamente, contrariando o princípio da conservação de energia. Pode-se notar também que os valores médios calculados em todos os métodos são diferentes de zero, o que reforça o questionamento quanto ao que é afirmado em Chu e Zhu (2013b) sobre o valor médio do *cogging torque* na máquina síncrona de ímãs permanentes na condição de carga.

### 4.3 Análise do Caso 2

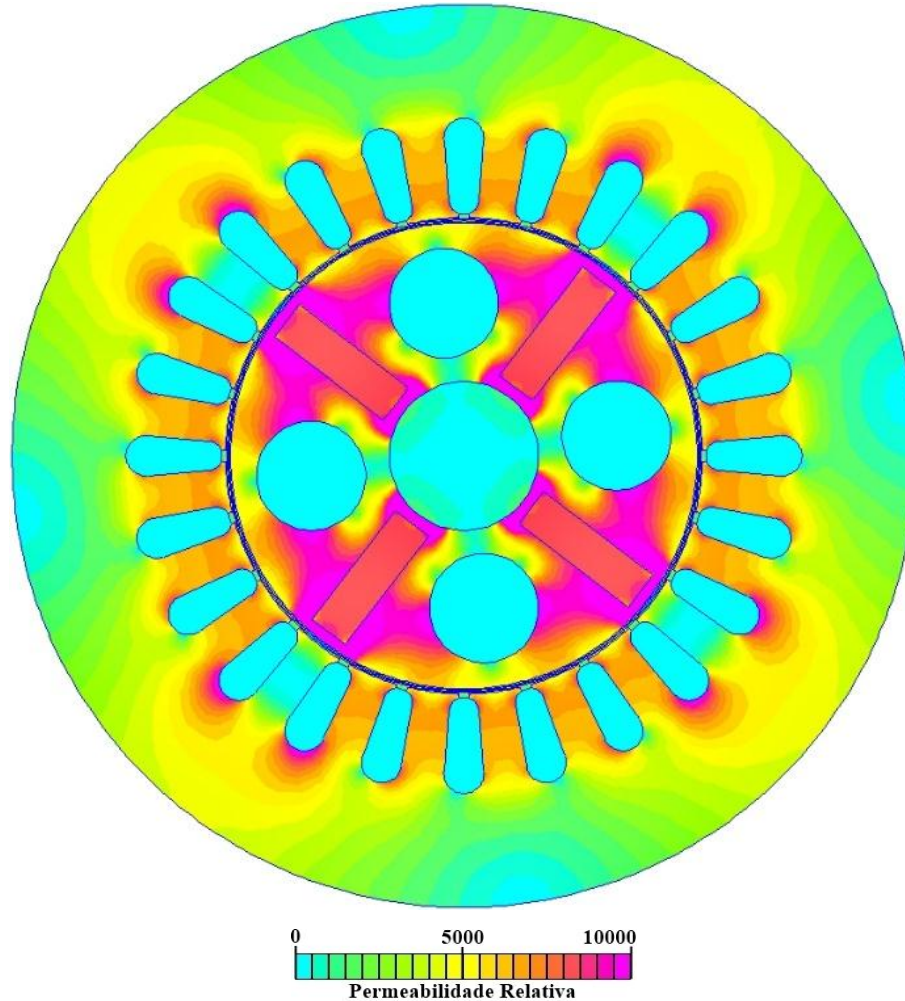
Análise do estudo de caso 2 referente à máquina síncrona com ímãs enterrados longitudinalmente no rotor.

#### 4.3.1 Condição em Vazio (0 A)

Na condição de operação em vazio a Figura 4.12 apresenta a distribuição de permeabilidade no interior da máquina obtida na posição angular mecânica do rotor  $\theta_m = 0^\circ$ . Nota-se que a distribuição é simétrica e está apenas sob influência do campo magnético produzido pelos ímãs, resultando em um sistema conservativo de energia tanto do ponto de vista macroscópico, previsto pela Equação (3.30), quanto do ponto de vista microscópico,

decorrente do campo imposto sobre o rotor ser constante em qualquer uma de suas posições. Como consequência, o valor médio do torque produzido no eixo da máquina é zero quando observado o seu ciclo completo.

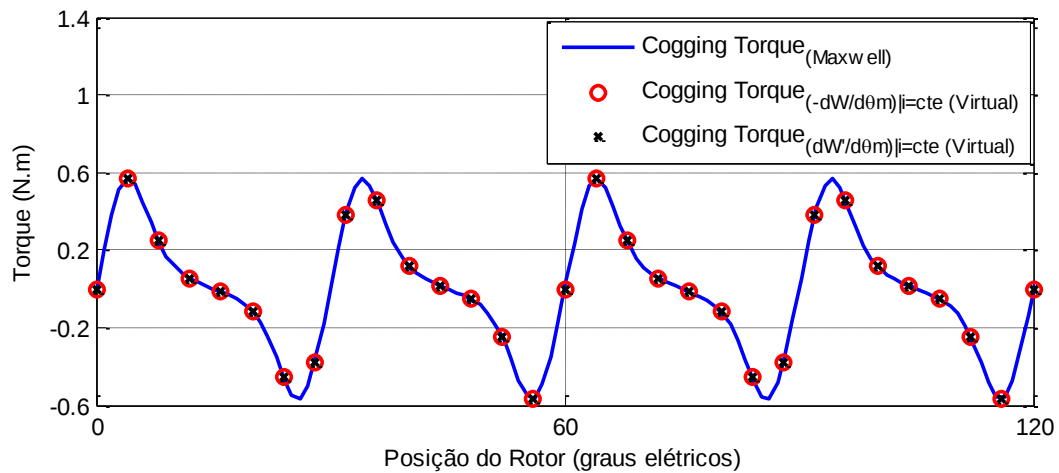
Figura 4.12 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina com  $\theta_m = 0^\circ$  (operação em vazio).



Fonte: Autor.

Na Figura 4.13 o *cogging torque* em vazio é obtido a partir do Método dos Tensores de Maxwell e do Método do Trabalho Virtual, associados ao Método dos Elementos Finitos. Nota-se que as formas de onda apresentadas pelos dois métodos são idênticas, evidenciando que a malha do entreferro da simulação está bem refinada. Por meio da Equação (3.9) é esperado como frequência fundamental o valor de 12 vezes a frequência fundamental de uma revolução elétrica. Os valores mínimo, médio e máximo do *cogging torque* em vazio são apresentados na Tabela 4.7.

Figura 4.13 – Cogging torque (operação em vazio).



Fonte: Autor.

Tabela 4.7 – Valores do cogging torque (operação em vazio).

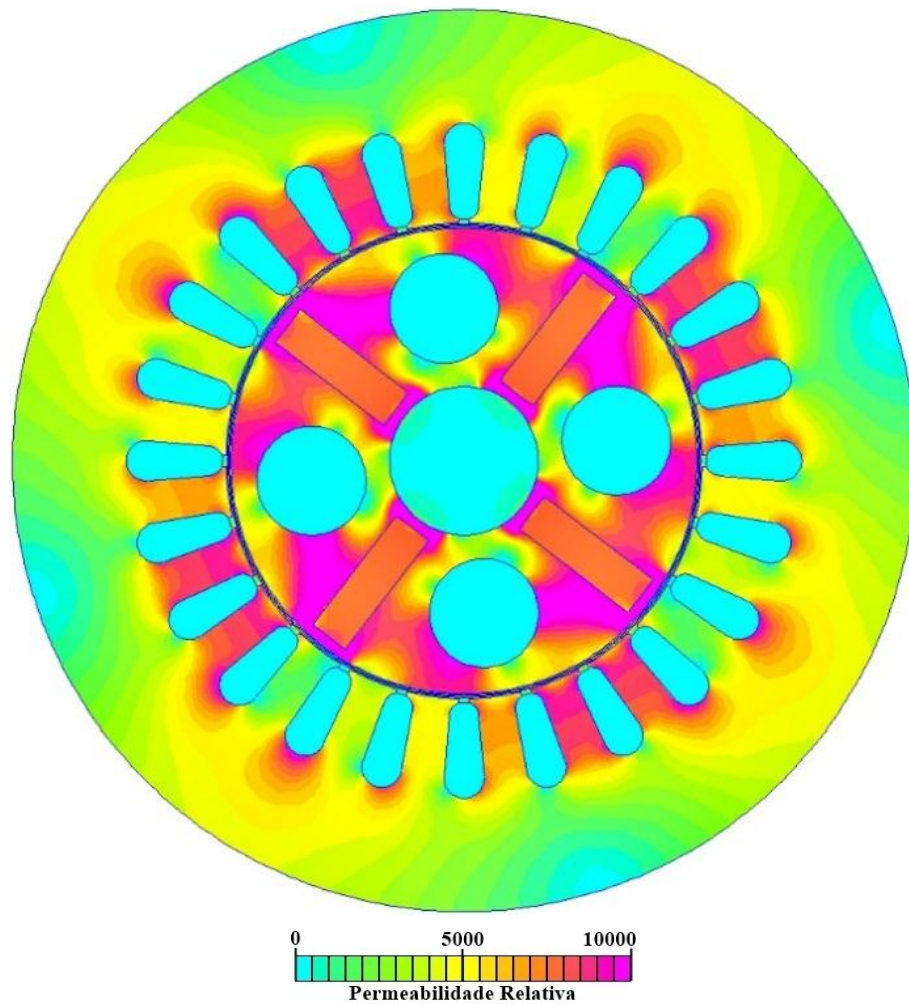
|                                | Mínimo (N.m) | Médio (N.m) | Máximo (N.m) |
|--------------------------------|--------------|-------------|--------------|
| Método dos Tensores de Maxwell | -0,57        | 0           | 0,57         |
| Método do Trabalho Virtual     | -0,57        | 0           | 0,57         |

### 4.3.2 Condição em Carregamento (Correntes Senoidais)

Na condição de operação em carga com correntes senoidais a Figura 4.14 apresenta a distribuição de permeabilidade no interior da máquina obtida na posição angular mecânica do rotor  $\theta_m = 0^\circ$ . Nota-se que diferentemente da condição em vazio, a distribuição é assimétrica e está sob influência do campo magnético produzido pelos ímãs e do campo magnético produzido pelas correntes, resultando em um sistema conservativo de energia do ponto de vista macroscópico, previsto pela Equação (3.30), porém não conservativo do ponto de vista microscópico, decorrente do campo imposto sobre o rotor não ser constante em qualquer uma de suas posições. Como consequência, o valor médio do torque produzido no eixo da máquina é diferente de zero quando observado o seu ciclo completo.

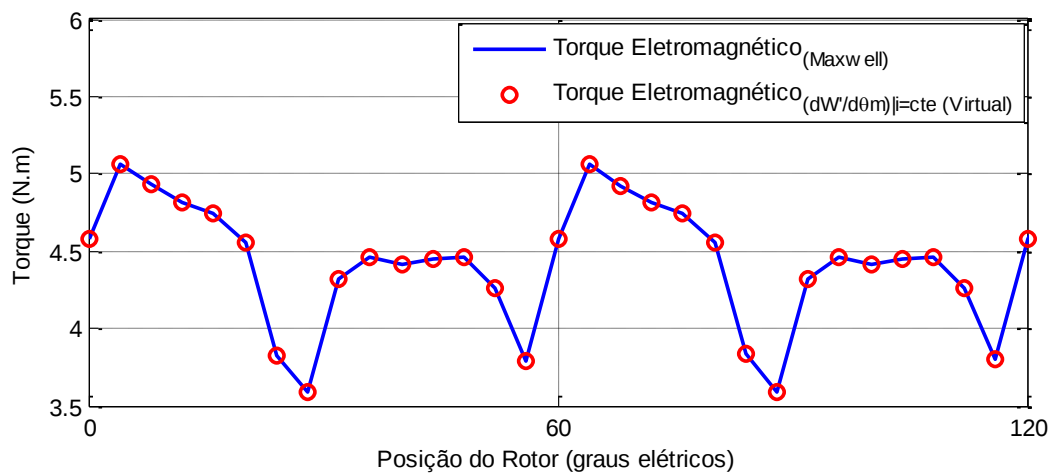
Na Figura 4.15 o torque eletromagnético para a máquina em carga é obtido a partir do Método dos Tensores de Maxwell e do Método do Trabalho Virtual associados ao Método dos Elementos Finitos. Nota-se que as formas de onda apresentadas pelos dois métodos são idênticas, evidenciando que a malha do entreferro da simulação está bem refinada. Os valores mínimo, médio e máximo do torque total são apresentados na Tabela 4.8.

Figura 4.14 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina com  $\theta_m = 0^\circ$  (carregamento com correntes senoidais).



Fonte: Autor.

Figura 4.15 – Torque eletromagnético (carregamento com correntes senoidais).

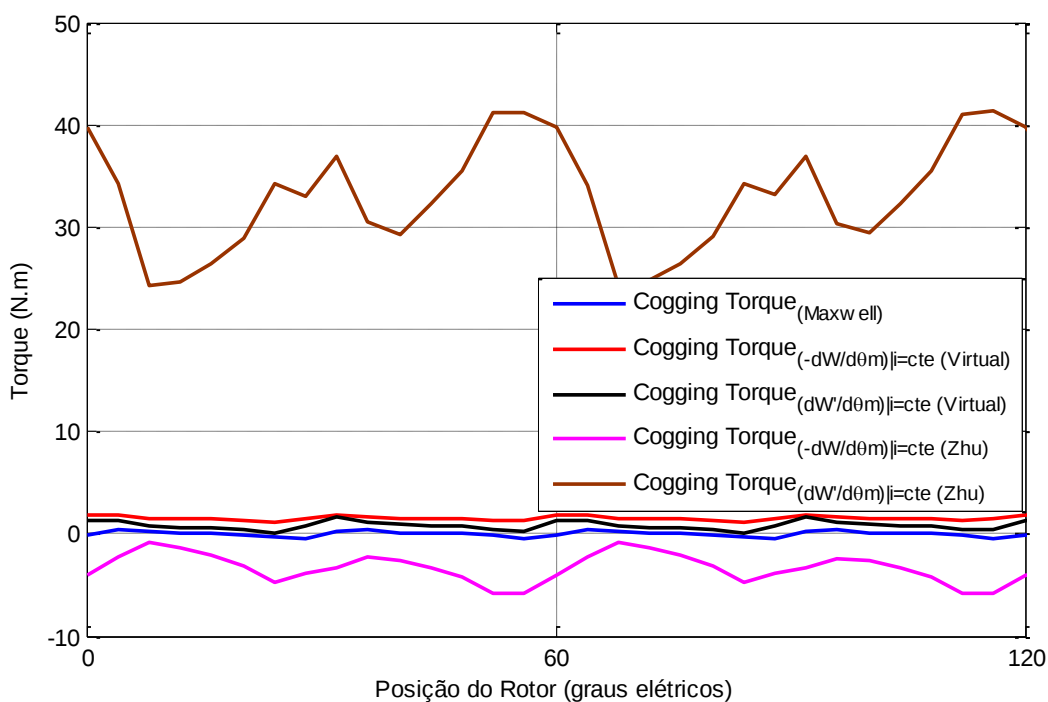


Fonte: Autor.

Tabela 4.8 – Valores do torque eletromagnético (carregamento com correntes senoidais).

|                                | Mínimo (N.m) | Médio (N.m) | Máximo (N.m) |
|--------------------------------|--------------|-------------|--------------|
| Método dos Tensores de Maxwell | 3,58         | 4,42        | 5,07         |
| Método do Trabalho Virtual     | 3,58         | 4,42        | 5,07         |

Na Figura 4.16 o *cogging torque* em carga é obtido a partir do Método dos Tensores de Maxwell, do Método do Trabalho Virtual e do método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu, associados ao Método dos Elementos Finitos e ao Método da Permeabilidade Fixa. Dada a discrepância entre os resultados obtidos a Figura 4.17 apresenta as curvas com maior detalhamento das formas de onda e das oscilações. Os valores mínimo, médio e máximo do *cogging torque* em carga são apresentados na Tabela 4.9.

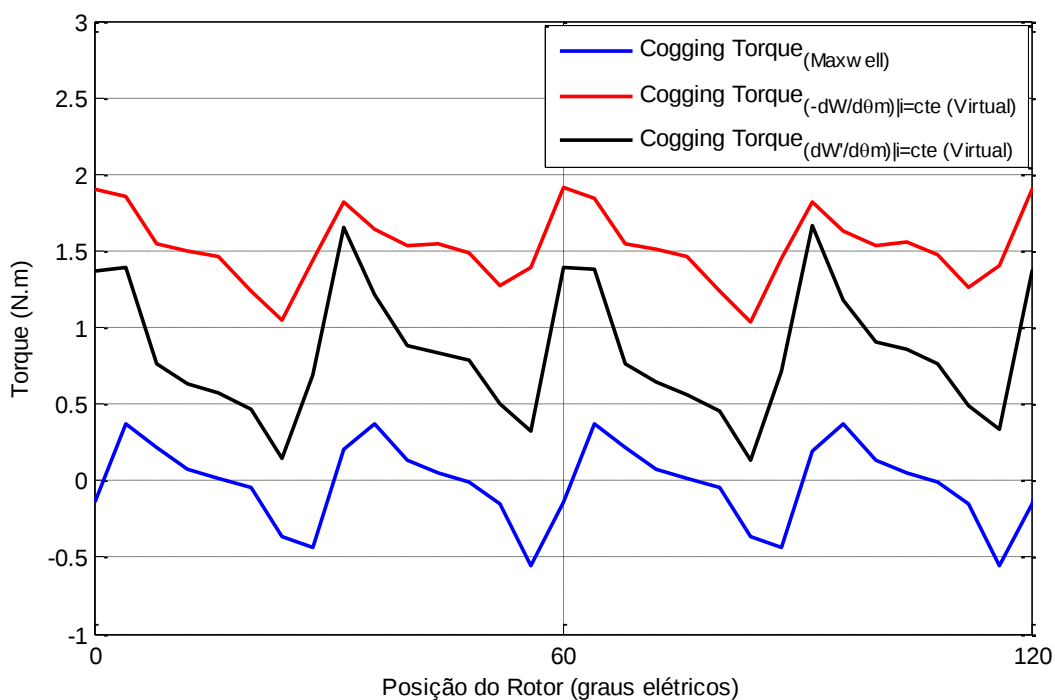
Figura 4.16 – *Cogging torque* em carga (carregamento com correntes senoidais).

Fonte: Autor.

No estudo de caso 2 nota-se com a Figura 4.16, a Figura 4.17 e a Tabela 4.9 que há uma considerável discrepância entre os resultados obtidos a partir dos métodos aplicados para o cálculo do *cogging torque*, tanto na forma de onda quanto na amplitude e no valor médio, com destaque para as curvas associadas ao MPF melhorado que apresentam valores médios absurdos

de *cogging torque* comparados ao torque total da máquina, -3,35 N.m com a variação da energia magnética armazenada e 32,91 N.m com a variação da coenergia magnética.

Figura 4.17 – *Cogging torque* em carga com maior detalhamento (carregamento com correntes senoidais).



Fonte: Autor.

Tabela 4.9 – Valores do *cogging torque* em carga (carregamento com correntes senoidais).

|                                                               | Mínimo (N.m) | Médio (N.m) | Máximo (N.m) |
|---------------------------------------------------------------|--------------|-------------|--------------|
| Método dos Tensores de Maxwell                                | -0,56        | -0,02       | 0,37         |
| Método do Trabalho Virtual (com a variação da energia)        | 1,04         | 1,52        | 1,91         |
| Método do Trabalho Virtual (com a variação da coenergia)      | 0,13         | 0,82        | 1,68         |
| Método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu (com a variação da energia)   | -5,90        | -3,35       | -0,83        |
| Método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu (com a variação da coenergia) | 24,17        | 32,91       | 41,49        |

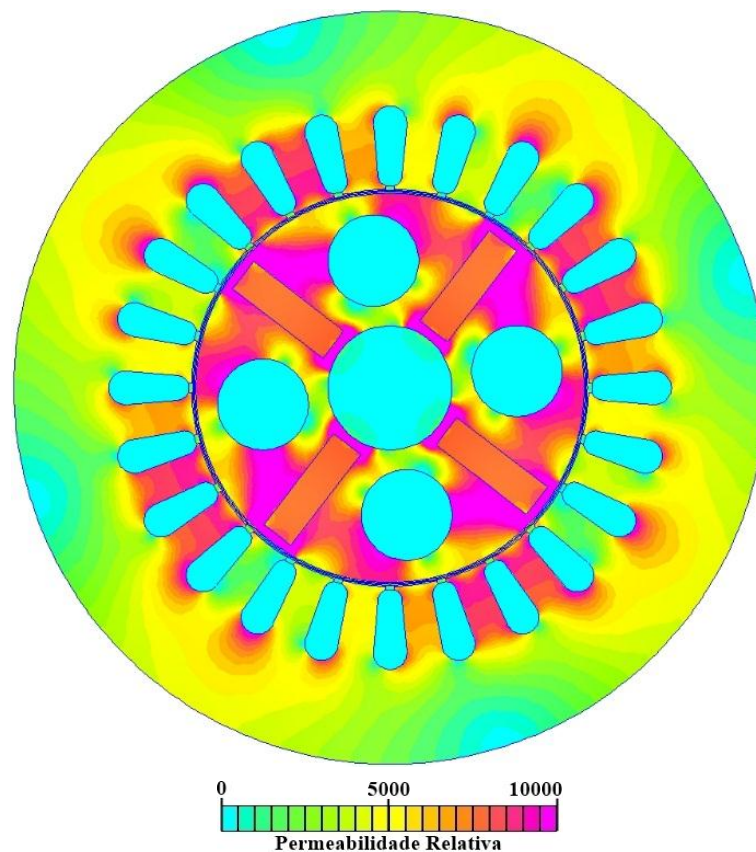
É interessante observar, assim como no estudo de caso 1, que nesta etapa do Método da Permeabilidade Fixa, na qual se tem apenas os ímãs como fonte de fluxo magnético (*FP, PM*),

mesmo não havendo correntes circulando nas bobinas das máquinas, obteve-se  $dW'_{(FP,PM)}/d\theta_m \neq -dW_{(FP,PM)}/d\theta_m$ , ou seja,  $dW_{in(FP,PM)}/d\theta_m \neq 0$ , contrariando o princípio da conservação de energia. Pode-se notar também que os valores médios calculados em todos os métodos são diferentes de zero, o que reforça o questionamento quanto ao que é afirmado em Chu e Zhu (2013b) sobre o valor médio do *cogging torque* na máquina síncrona de ímãs permanentes na condição de carga.

### 4.3.3 Condição em Carregamento (Correntes Quadradas)

Na condição de operação em carga com correntes quadradas a Figura 4.18 apresenta a distribuição de permeabilidade no interior da máquina obtida na posição angular mecânica do rotor  $\theta_m = 0^\circ$ . Nota-se que a distribuição é assimétrica e bastante semelhante àquela vista na Figura 4.14 devido aos níveis de carregamento eletromagnético próximos entre as correntes senoidais e quadradas por apresentarem o mesmo valor para o primeiro harmônico da corrente.

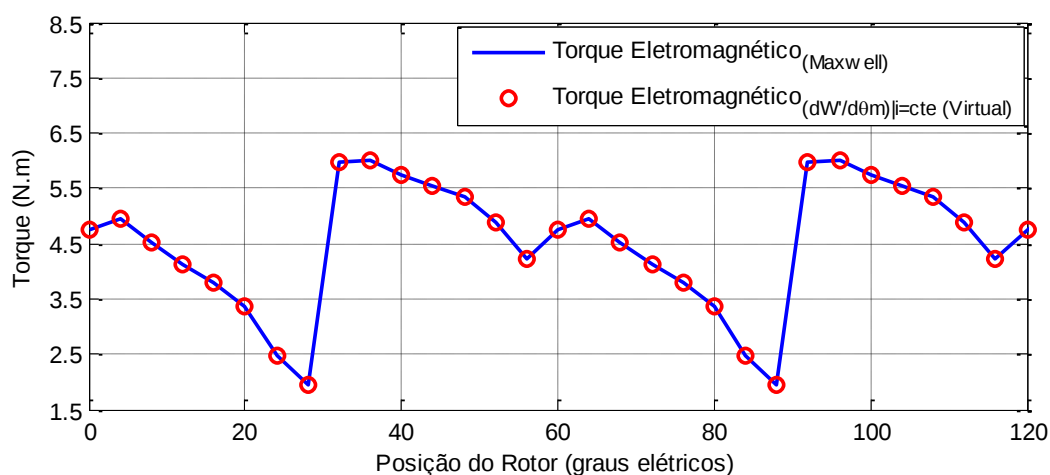
Figura 4.18 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina com  $\theta_m = 0^\circ$  (carregamento com correntes quadradas).



Fonte: Autor.

Na Figura 4.19 o torque eletromagnético para a máquina em carga é obtido a partir do Método dos Tensores de Maxwell e do Método do Trabalho Virtual associados ao Método dos Elementos Finitos. Nota-se que as formas de onda apresentadas pelos dois métodos são idênticas, evidenciando que a malha do entreferro da simulação está bem refinada. Os valores mínimo, médio e máximo do torque total são apresentados na Tabela 4.10. Pode-se observar que o valor médio do torque eletromagnético no carregamento com correntes quadradas aproxima-se ao valor médio do torque eletromagnético no carregamento com correntes senoidais devido aos níveis de carregamento eletromagnético próximos.

Figura 4.19 – Torque eletromagnético (carregamento com correntes quadradas).



Fonte: Autor.

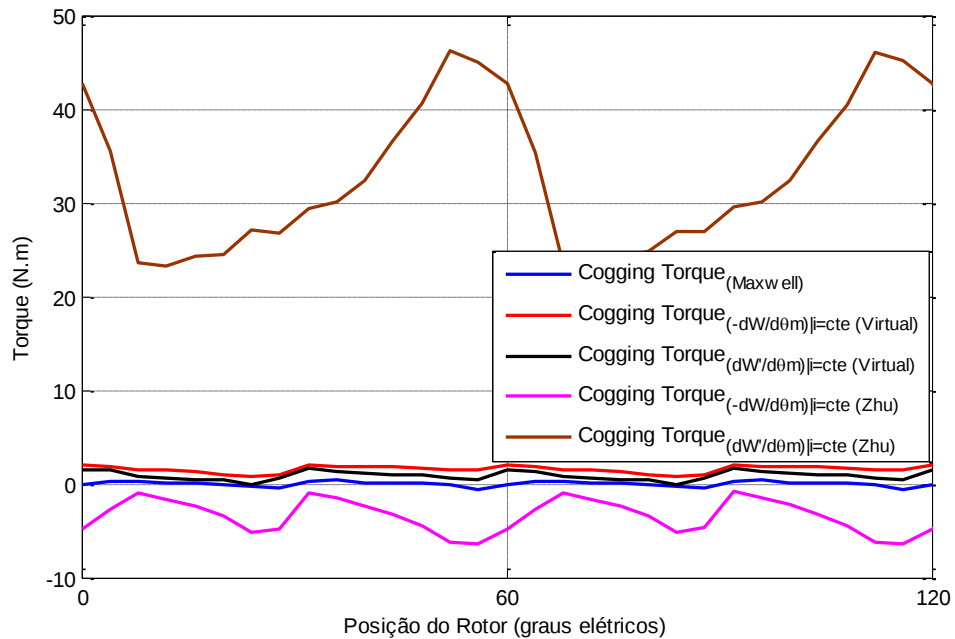
Tabela 4.10 – Valores do torque eletromagnético (carregamento com correntes quadradas).

|                                | Mínimo (N.m) | Médio (N.m) | Máximo (N.m) |
|--------------------------------|--------------|-------------|--------------|
| Método dos Tensores de Maxwell | 1,95         | 4,51        | 5,99         |
| Método do Trabalho Virtual     | 1,95         | 4,51        | 5,99         |

Na Figura 4.20 o *cogging torque* em carga é obtido a partir do Método dos Tensores de Maxwell, do Método do Trabalho Virtual e do método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu, associados ao Método dos Elementos Finitos e ao Método da Permeabilidade Fixa. Dada a discrepância entre os resultados obtidos a Figura 4.21 apresenta as curvas com maior detalhamento das formas de onda e das oscilações. Os valores mínimo, médio e máximo do *cogging torque* em carga são apresentados na Tabela 4.11. Assim como no caso do torque eletromagnético, pode-se observar que os valores médios do *cogging torque* em carga no carregamento com correntes

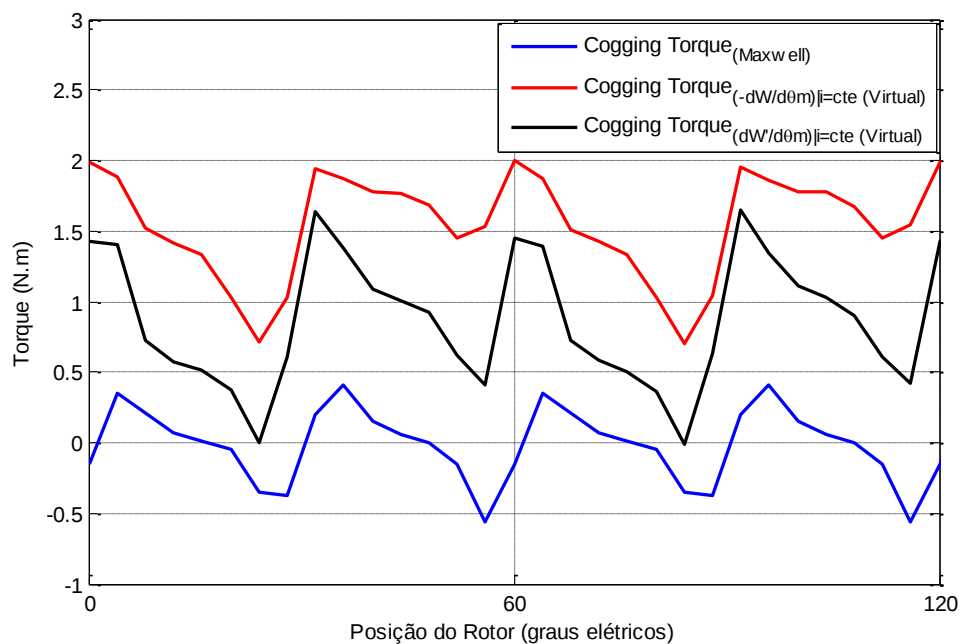
quadradas aproximam-se aos valores médios do *cogging torque* em carga no carregamento com correntes senoidais devido aos níveis de carregamento eletromagnético próximos.

Figura 4.20 – *Cogging torque* em carga (carregamento com correntes quadradas).



Fonte: Autor.

Figura 4.21 – *Cogging torque* em carga com maior detalhamento (carregamento com correntes quadradas).



Fonte: Autor.

Tabela 4.11 – Valores do *cogging torque* em carga (carregamento com correntes quadradas).

|                                                               | Mínimo (N.m) | Médio (N.m) | Máximo (N.m) |
|---------------------------------------------------------------|--------------|-------------|--------------|
| Método dos Tensores de Maxwell                                | -0,56        | -0,01       | 0,41         |
| Método do Trabalho Virtual (com a variação da energia)        | 0,70         | 1,53        | 2,00         |
| Método do Trabalho Virtual (com a variação da coenergia)      | -0,01        | 0,85        | 1,66         |
| Método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu (com a variação da energia)   | -6,41        | -3,40       | -0,85        |
| Método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu (com a variação da coenergia) | 23,05        | 32,63       | 46,21        |

No estudo de caso 2 nota-se com a Figura 4.20, a Figura 4.21 e a Tabela 4.11 que há uma considerável discrepância nas formas de onda entre os resultados obtidos a partir dos diferentes métodos aplicados para o cálculo do *cogging torque* em carga, com destaque para as curvas associadas ao MPF melhorado que apresentam valores médios absurdos de *cogging torque* comparados ao torque total da máquina, -3,40 N.m com a variação da energia magnética armazenada e 32,63 N.m com a variação da coenergia magnética.

É interessante observar, assim como no carregamento com correntes senoidais, que nesta etapa do Método da Permeabilidade Fixa, na qual se tem apenas os ímãs como fonte de fluxo magnético ( $FP, PM$ ), mesmo não havendo correntes circulando nas bobinas das máquinas, obteve-se  $dW'_{(FP,PM)}/d\theta_m \neq -dW_{(FP,PM)}/d\theta_m$ , ou seja,  $dW_{in(FP,PM)}/d\theta_m \neq 0$ , novamente, contrariando o princípio da conservação de energia. Pode-se notar também que os valores médios calculados em todos os métodos são diferentes de zero, o que reforça o questionamento quanto ao que é afirmado em Chu e Zhu (2013b) sobre o valor médio do *cogging torque* na máquina síncrona de ímãs permanentes na condição de carga.

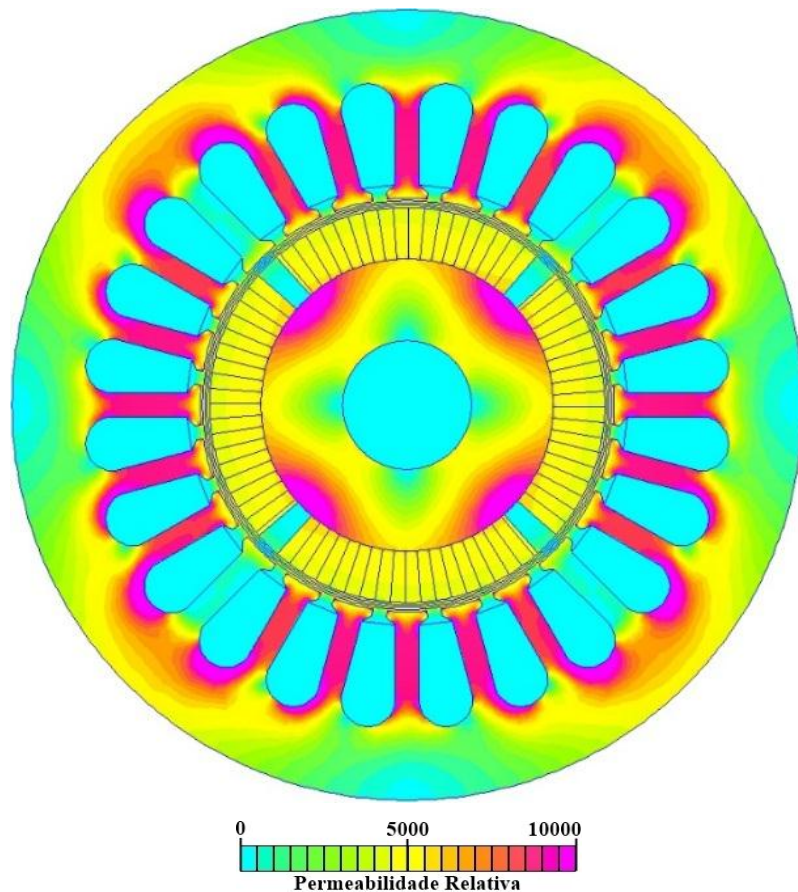
#### 4.4 Análise do Caso 3

Análise do estudo de caso 3 referente à máquina síncrona com ímãs montados na superfície do rotor.

#### 4.4.1 Condição em Vazio (0 A)

Na condição de operação em vazio a Figura 4.22 apresenta a distribuição de permeabilidade no interior da máquina obtida na posição angular mecânica do rotor  $\theta_m = 0^\circ$ . Nota-se que a distribuição é simétrica e está apenas sob influência do campo magnético produzido pelos ímãs, resultando em um sistema conservativo de energia tanto do ponto de vista macroscópico, previsto pela Equação (3.30), quanto do ponto de vista microscópico, decorrente do campo imposto sobre o rotor ser constante em qualquer uma de suas posições. Como consequência, o valor médio do torque produzido no eixo da máquina é zero quando observado o seu ciclo completo.

Figura 4.22 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina com  $\theta_m = 0^\circ$  (operação em vazio).

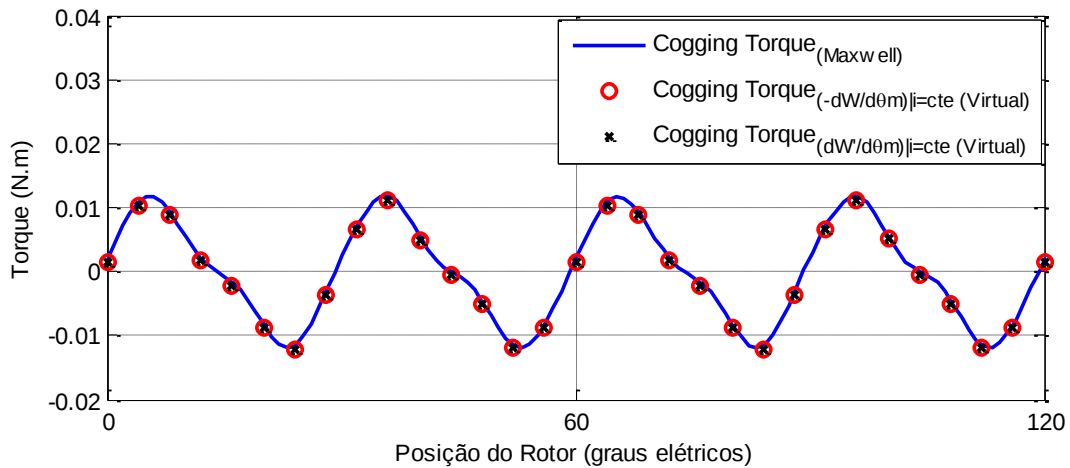


Fonte: Autor.

Na Figura 4.23 o *cogging torque* em vazio é obtido a partir do Método dos Tensores de Maxwell e do Método do Trabalho Virtual, associados ao Método dos Elementos Finitos. Nota-se que as formas de onda apresentadas pelos dois métodos são idênticas, evidenciando que a

malha do entreferro da simulação está bem refinada. Por meio da Equação (3.9) é esperado como frequência fundamental o valor de 12 vezes a frequência fundamental de uma revolução elétrica. Os valores mínimo, médio e máximo do *cogging torque* em vazio são apresentados na Tabela 4.12.

Figura 4.23 – *Cogging torque* (operação em vazio).



Fonte: Autor.

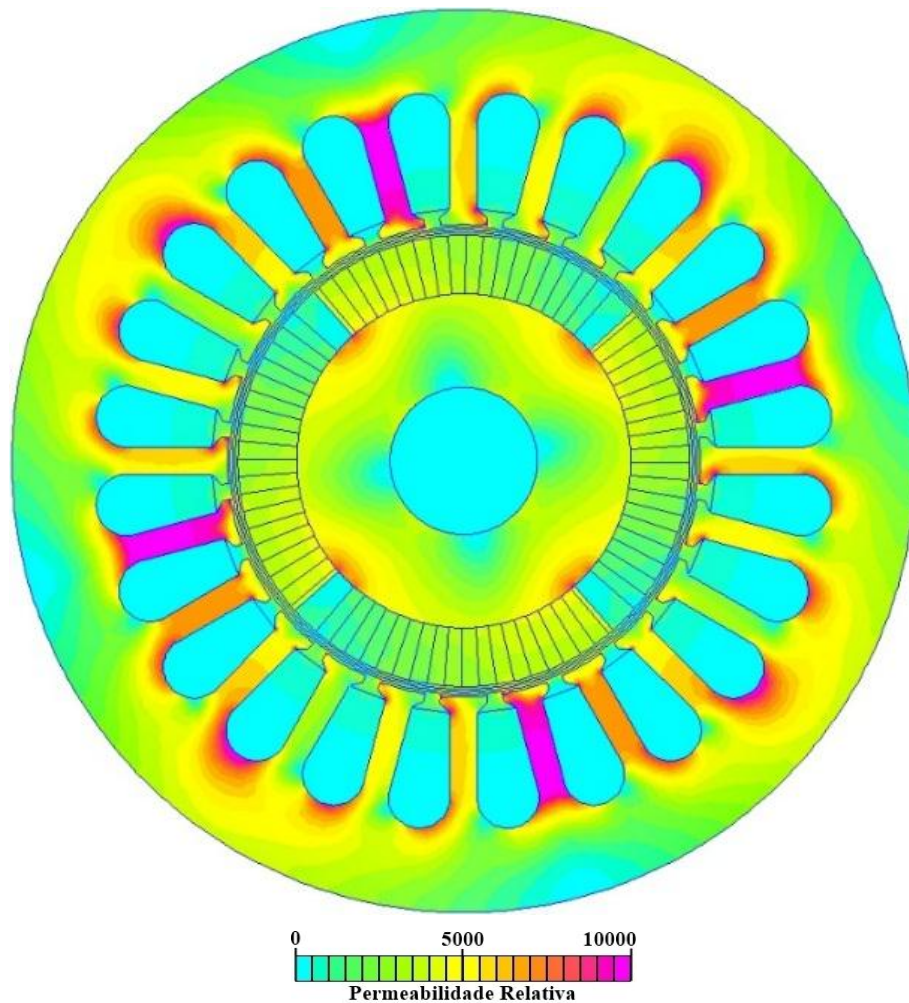
Tabela 4.12 – Valores do *cogging torque* (operação em vazio).

|                                | Mínimo (mN.m) | Médio (mN.m) | Máximo (mN.m) |
|--------------------------------|---------------|--------------|---------------|
| Método dos Tensores de Maxwell | -12,30        | 0            | 12,30         |
| Método do Trabalho Virtual     | -12,30        | 0            | 12,30         |

#### 4.4.2 Condição em Carregamento (Correntes Senoidais)

Na condição de operação em carga com correntes senoidais a Figura 4.24 apresenta a distribuição de permeabilidade no interior da máquina obtida na posição angular mecânica do rotor  $\theta_m = 0^\circ$ . Nota-se que diferentemente da condição em vazio, a distribuição é assimétrica e está sob influência do campo magnético produzido pelos ímãs e do campo magnético produzido pelas correntes, resultando em um sistema conservativo de energia do ponto de vista macroscópico, previsto pela Equação (3.30), porém não conservativo do ponto de vista microscópico, decorrente do campo imposto sobre o rotor não ser constante em qualquer uma de suas posições. Como consequência, o valor médio do torque produzido no eixo da máquina é diferente de zero quando observado o seu ciclo completo.

Figura 4.24 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina com  $\theta_m = 0^\circ$  (carregamento com correntes senoidais).



Fonte: Autor.

Na Figura 4.25 o torque eletromagnético para a máquina em carga é obtido a partir do Método dos Tensores de Maxwell e do Método do Trabalho Virtual associados ao Método dos Elementos Finitos. Nota-se que as formas de onda apresentadas pelos dois métodos são idênticas, evidenciando que a malha do entreferro da simulação está bem refinada. Os valores mínimo, médio e máximo do torque total são apresentados na Tabela 4.13.

Na Figura 4.26 o *cogging torque* em carga é obtido a partir do Método dos Tensores de Maxwell, do Método do Trabalho Virtual e do método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu, associados ao Método dos Elementos Finitos e ao Método da Permeabilidade Fixa. Os valores mínimo, médio e máximo do *cogging torque* em carga são mostrados na Tabela 4.14.

Figura 4.25 – Torque eletromagnético (carregamento com correntes senoidais).

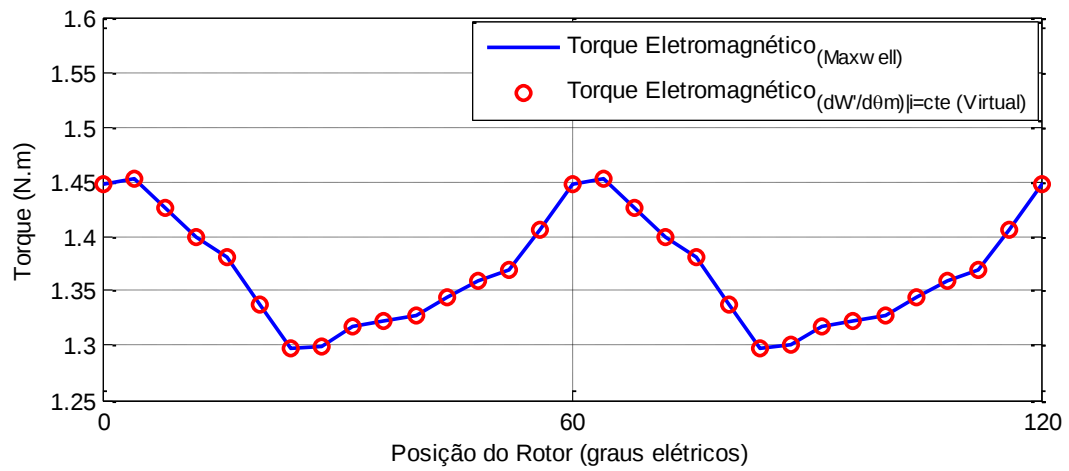


Tabela 4.13 – Valores do torque eletromagnético (carregamento com correntes senoidais).

|                                | Mínimo (N.m) | Médio (N.m) | Máximo (N.m) |
|--------------------------------|--------------|-------------|--------------|
| Método dos Tensores de Maxwell | 1,29         | 1,37        | 1,45         |
| Método do Trabalho Virtual     | 1,29         | 1,37        | 1,45         |

Figura 4.26 – Cogging torque em carga (carregamento com correntes senoidais).

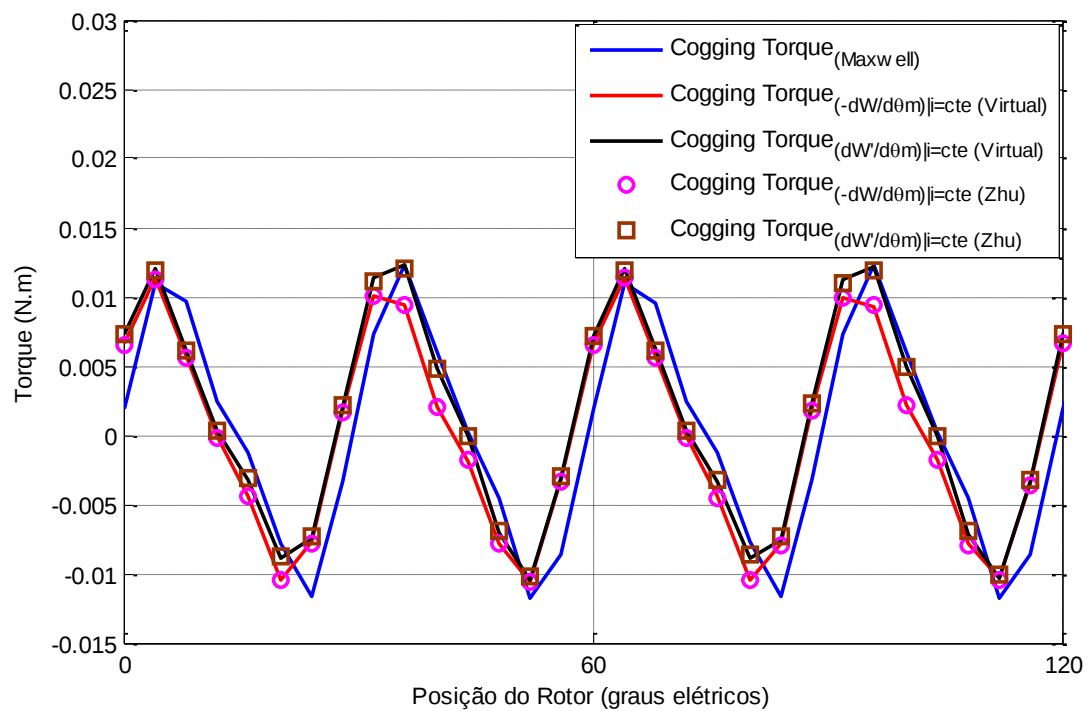


Tabela 4.14 – Valores do *cogging torque* em carga (carregamento com correntes senoidais).

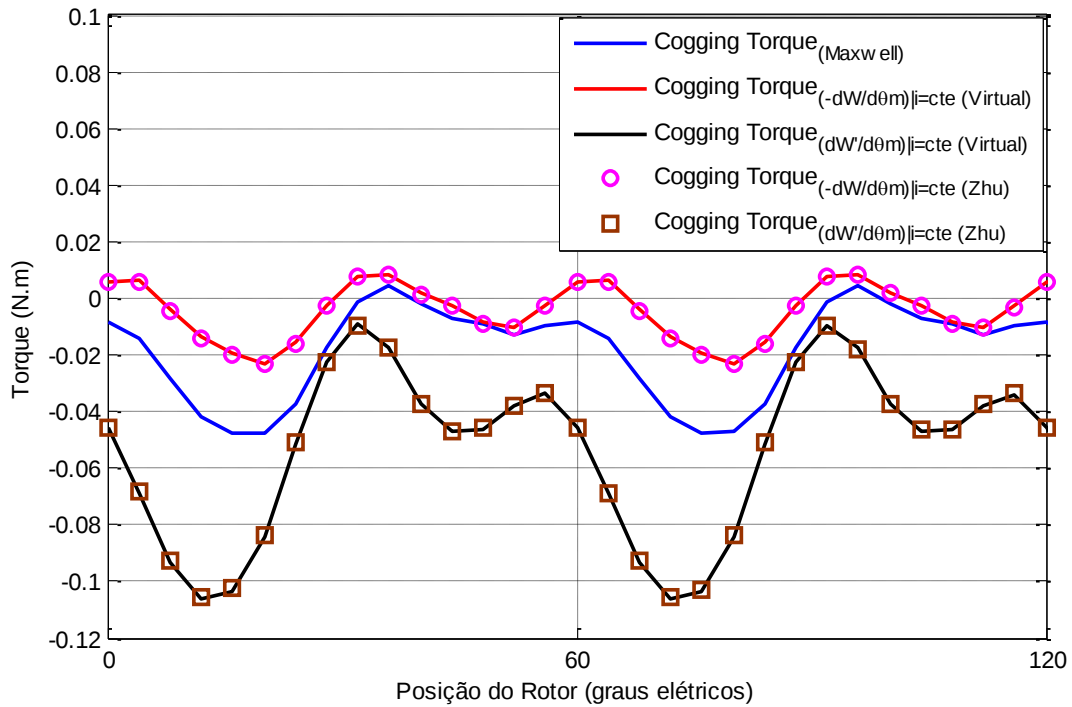
|                                                               | Mínimo (mN.m) | Médio (mN.m) | Máximo (mN.m) |
|---------------------------------------------------------------|---------------|--------------|---------------|
| Método dos Tensores de Maxwell                                | -11,80        | 0,18         | 12,50         |
| Método do Trabalho Virtual (com a variação da energia)        | -10,60        | 0,13         | 11,40         |
| Método do Trabalho Virtual (com a variação da coenergia)      | -10,50        | 1,10         | 12,20         |
| Método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu (com a variação da energia)   | -10,60        | 0,08         | 11,30         |
| Método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu (com a variação da coenergia) | -10,20        | 1,20         | 12,10         |

Diferentemente dos casos 1 e 2, no estudo de caso 3 nota-se com a Figura 4.26 e a Tabela 4.14 que a discrepância entre os resultados obtidos a partir dos métodos aplicados para o cálculo do *cogging torque* é menos acentuada, tanto na forma de onda quanto na amplitude e no valor médio, o que poderia indicar um erro numérico. A proximidade numérica entre as curvas é devido ao grande entreferro equivalente e ao baixo carregamento eletromagnético (4 A). Neste caso, um carregamento eletromagnético maior (e.g. 16 A) pode evidenciar a discrepância entre os métodos, como é visto na Figura 4.27. Para esta máquina os valores de torque produzidos pelo MPF convencional e pelo MPF melhorado são muito próximos, não trazendo benefícios claros ao optar-se por um deles.

É interessante observar, assim como nos outros casos, que nesta etapa do Método da Permeabilidade Fixa, na qual se tem apenas os ímãs como fonte de fluxo magnético ( $FP, PM$ ), mesmo não havendo correntes circulando nas bobinas das máquinas, obteve-se  $dW'_{(FP,PM)}/d\theta_m \neq -dW_{(FP,PM)}/d\theta_m$ , ou seja,  $dW_{in(FP,PM)}/d\theta_m \neq 0$ , da mesma forma que os casos anteriores, evidenciando que o sistema é não conservativo. Pode-se notar também que os valores médios calculados em todos os métodos são diferentes de zero, o que reforça o questionamento quanto ao que é afirmado em Chu e Zhu (2013b) sobre o valor médio do *cogging torque* na máquina síncrona de ímãs permanentes na condição de carga.

Assim como nos casos 1 e 2, no estudo de caso 3 em que o nível de carregamento eletromagnético é maior, ver Figura 4.27, nota-se que há uma considerável discrepância nas formas de onda entre os resultados obtidos a partir dos diferentes métodos aplicados para o cálculo do *cogging torque* em carga.

Figura 4.27 – Cogging torque em carga (carregamento com correntes senoidais).



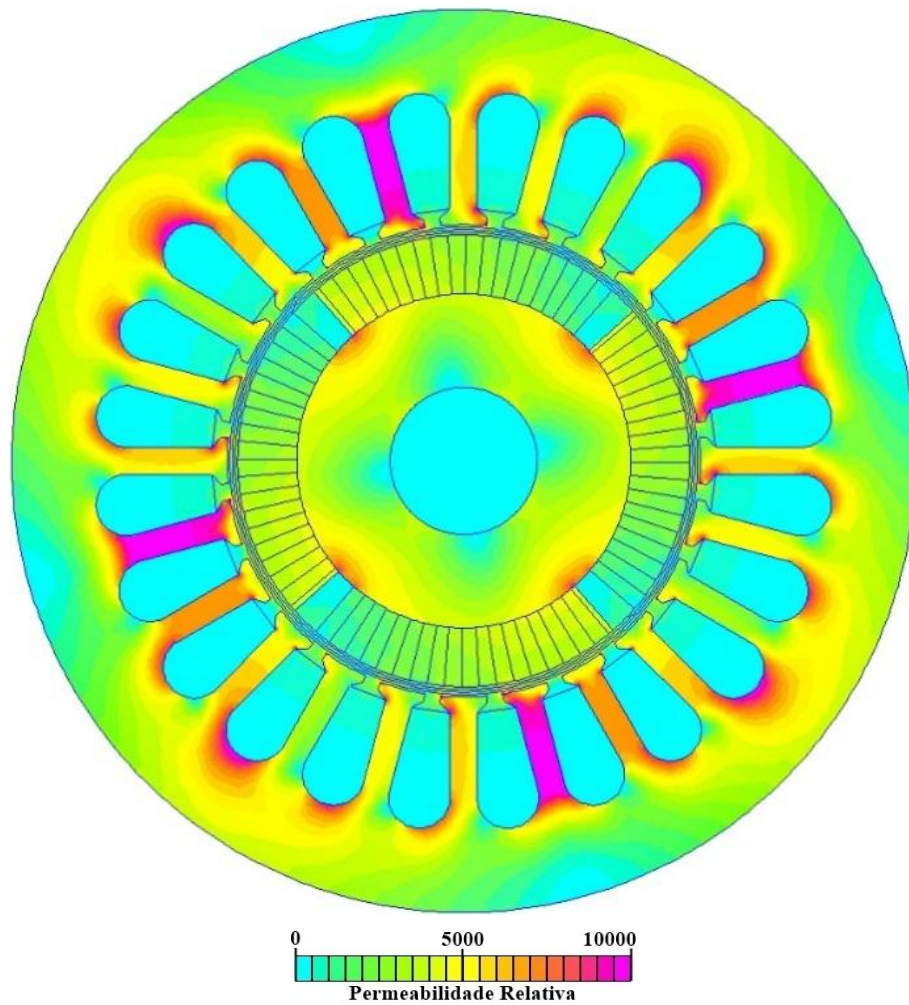
Fonte: Autor.

#### 4.4.3 Condição em Carregamento (Correntes Quadradas)

Na condição de operação em carga com correntes quadradas a Figura 4.28 apresenta a distribuição de permeabilidade no interior da máquina é obtida na posição angular mecânica do rotor  $\theta_m = 0^\circ$ . Nota-se que a distribuição é assimétrica e bastante semelhante àquela vista na Figura 4.24 devido aos níveis de carregamento eletromagnético próximos entre as correntes senoidais e quadradas por apresentarem o mesmo valor para o primeiro harmônico da corrente.

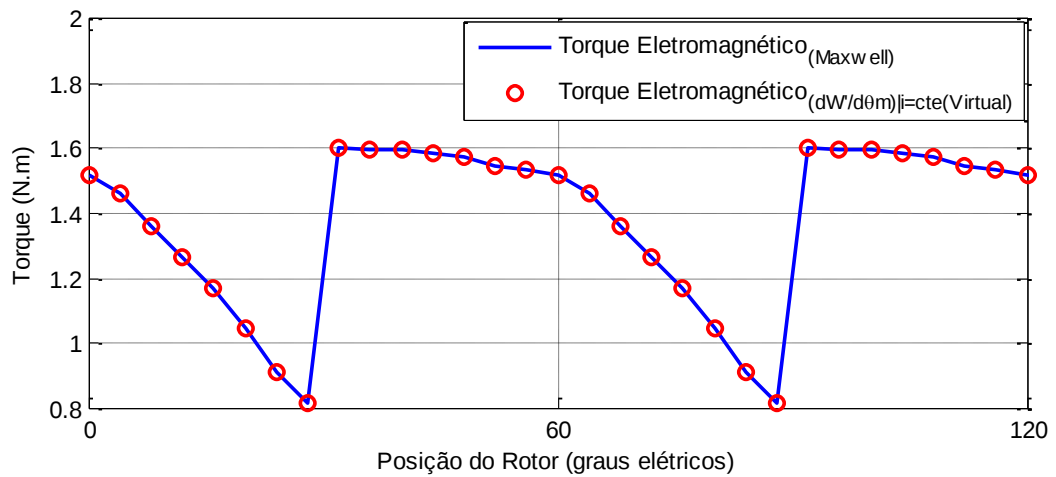
Na Figura 4.29 o torque eletromagnético para a máquina em carga é obtido a partir do Método dos Tensores de Maxwell e do Método do Trabalho Virtual associados ao Método dos Elementos Finitos. Nota-se que as formas de onda apresentadas pelos dois métodos são idênticas, evidenciando que a malha do entreferro da simulação está bem refinada. Os valores mínimo, médio e máximo do torque total são apresentados na Tabela 4.15. Pode-se observar que o valor médio do torque eletromagnético no carregamento com correntes quadradas aproxima-se ao valor médio do torque eletromagnético no carregamento com correntes senoidais devido aos níveis de carregamento eletromagnético próximos.

Figura 4.28 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina com  $\theta_m = 0^\circ$  (carregamento com correntes quadradas).



Fonte: Autor.

Figura 4.29 – Torque eletromagnético (carregamento com correntes quadradas).



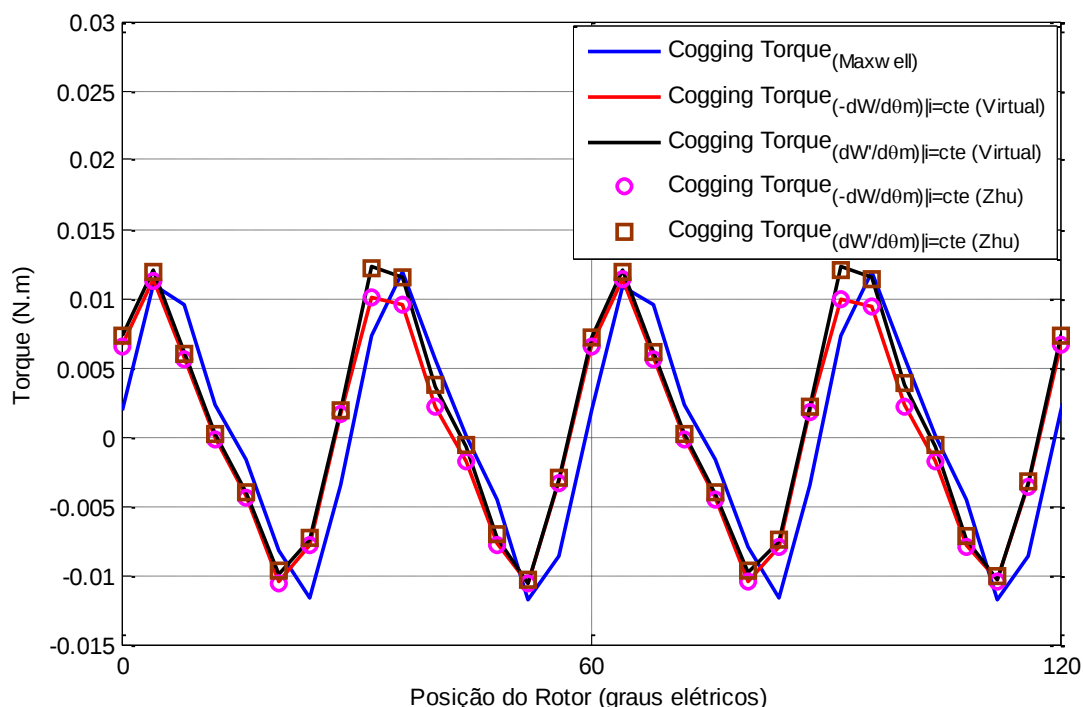
Fonte: Autor.

Tabela 4.15 – Valores do torque eletromagnético (carregamento com correntes quadradas).

|                                | Mínimo (N.m) | Médio (N.m) | Máximo (N.m) |
|--------------------------------|--------------|-------------|--------------|
| Método dos Tensores de Maxwell | 0,82         | 1,37        | 1,60         |
| Método do Trabalho Virtual     | 0,82         | 1,37        | 1,60         |

Na Figura 4.30 o *cogging torque* em carga é obtido a partir do Método dos Tensores de Maxwell, do Método do Trabalho Virtual e do método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu, associados ao Método dos Elementos Finitos e ao Método da Permeabilidade Fixa. Os valores mínimo, médio e máximo do *cogging torque* em carga são apresentados na Tabela 4.16. Assim como no caso do torque eletromagnético, pode-se observar que os valores médios do *cogging torque* em carga no carregamento com correntes quadradas aproximam-se aos valores médios do *cogging torque* em carga no carregamento com correntes senoidais devido aos níveis de carregamento eletromagnético próximos.

Figura 4.30 – Cogging torque em carga (carregamento com correntes quadradas).



Fonte: Autor.

Diferentemente dos casos 1 e 2, no estudo de caso 3 nota-se com a Figura 4.30 e a Tabela 4.16 que a discrepância entre os resultados obtidos a partir dos métodos aplicados para o cálculo

do *cogging torque* é menos acentuada, tanto na forma de onda quanto na amplitude e no valor médio, o que poderia indicar um erro numérico. A proximidade numérica entre as curvas é devido ao grande entreferro equivalente e ao baixo carregamento eletromagnético (3,6363 A). Neste caso, um carregamento eletromagnético maior (e.g. 14,5454 A) pode evidenciar a discrepância entre os métodos, como é visto na Figura 4.31. Para esta máquina os valores de torque produzidos pelo MPF convencional e pelo MPF melhorado são muito próximos, não trazendo benefícios claros ao optar-se por um deles.

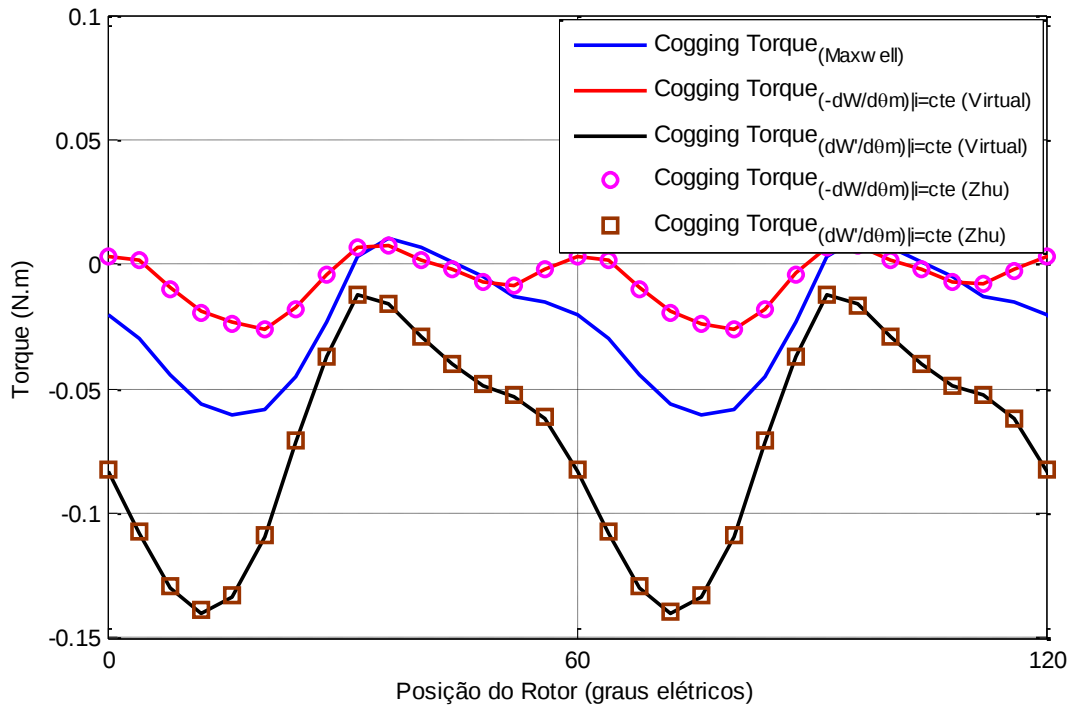
Tabela 4.16 – Valores do *cogging torque* em carga (carregamento com correntes quadradas).

|                                                               | Mínimo (mN.m) | Médio (mN.m) | Máximo (mN.m) |
|---------------------------------------------------------------|---------------|--------------|---------------|
| Método dos Tensores de Maxwell                                | -11,80        | 0,16         | 12,20         |
| Método do Trabalho Virtual (com a variação da energia)        | -10,50        | 0,14         | 11,40         |
| Método do Trabalho Virtual (com a variação da coenergia)      | -10,50        | 0,86         | 12,50         |
| Método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu (com a variação da energia)   | -10,60        | 0,09         | 11,30         |
| Método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu (com a variação da coenergia) | -10,30        | 0,91         | 12,30         |

É interessante observar, assim como no carregamento com correntes senoidais, que nesta etapa do Método da Permeabilidade Fixa, na qual se tem apenas os ímãs como fonte de fluxo magnético ( $FP, PM$ ), mesmo não havendo correntes circulando nas bobinas das máquinas, obteve-se  $dW'_{(FP, PM)} / d\theta_m \neq -dW_{(FP, PM)} / d\theta_m$ , ou seja,  $dW_{in(FP, PM)} / d\theta_m \neq 0$ , o mesmo fato que os anteriores. Pode-se notar também que os valores médios calculados em todos os métodos são diferentes de zero, o que reforça o questionamento quanto ao que é afirmado em Chu e Zhu (2013b) sobre o valor médio do *cogging torque* na máquina síncrona de ímãs permanentes na condição de carga.

Assim como nos casos 1 e 2, no estudo de caso 3 em que o nível de carregamento eletromagnético é maior, ver Figura 4.31, nota-se que há uma considerável discrepância nas formas de onda entre os resultados obtidos a partir dos diferentes métodos aplicados para o cálculo do *cogging torque* em carga.

Figura 4.31 – Cogging torque em carga (carregamento com correntes quadradas).



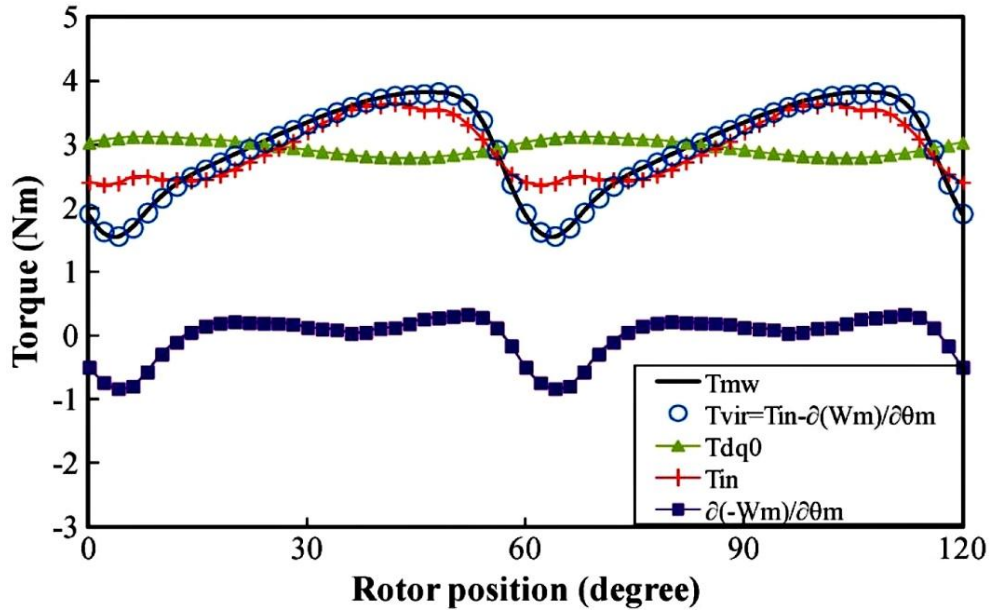
Fonte: Autor.

#### 4.5 Discussão dos Resultados

Com a discrepância encontrada nos resultados dos três estudos de casos analisados, faz-se necessário verificar dentre os métodos aplicados (Método dos Tensores de Maxwell, Método do Trabalho Virtual e método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu), qual deles é o mais apropriado, combinado ao Método dos Elementos Finitos e ao Método da Permeabilidade Fixa, para o cálculo do *cogging torque* em carga nas máquinas síncronas de ímãs permanentes no rotor.

Durante a quarta etapa do MPF em que se tem apenas os ímãs como fonte de fluxo magnético ( $FP, PM$ ), mesmo não havendo correntes circulando nas bobinas das máquinas é interessante observar que em todos os casos obteve-se  $dW'_{(FP, PM)}/d\theta_m \neq -dW_{(FP, PM)}/d\theta_m$ , ou seja,  $dW_{in(FP, PM)}/d\theta_m \neq 0$ . Pode-se notar ainda que os valores médios obtidos em todos os métodos são diferentes de zero, o que leva a questionar o que é afirmado em Chu e Zhu (2013b) sobre o valor médio do *cogging torque* na máquina síncrona de ímãs permanentes na condição de carga. Com o objetivo de avaliar tal afirmação, as Equações (3.32) e (3.39) são analisadas juntamente a Figura 4.32, extraída de Chu e Zhu (2013b).

Figura 4.32 – Formas de onda de torque para a máquina síncrona de ímãs permanentes do caso 1.



Fonte: (CHU; ZHU, 2013b).

Na Figura 4.32 são apresentadas as seguintes formas de onda:

- $T_{mw}$  que refere-se ao termo  $T_{EL,Maxwell}$  da Equação (3.10);
- $T_{vir}$  que refere-se ao termo  $dW'/d\theta_m$  da Equação (3.32);
- $T_{dq0}$  que refere-se ao termo  $T_{dq0,ZHU}$  da Equação (3.40);
- $T_{in}$  que refere-se ao termo  $dW_{in,ZHU}/d\theta_m$  da Equação (3.39);
- $d(-W_m)/d\theta_m$  que refere-se ao termo  $-dW/d\theta_m$  da Equação (3.32).

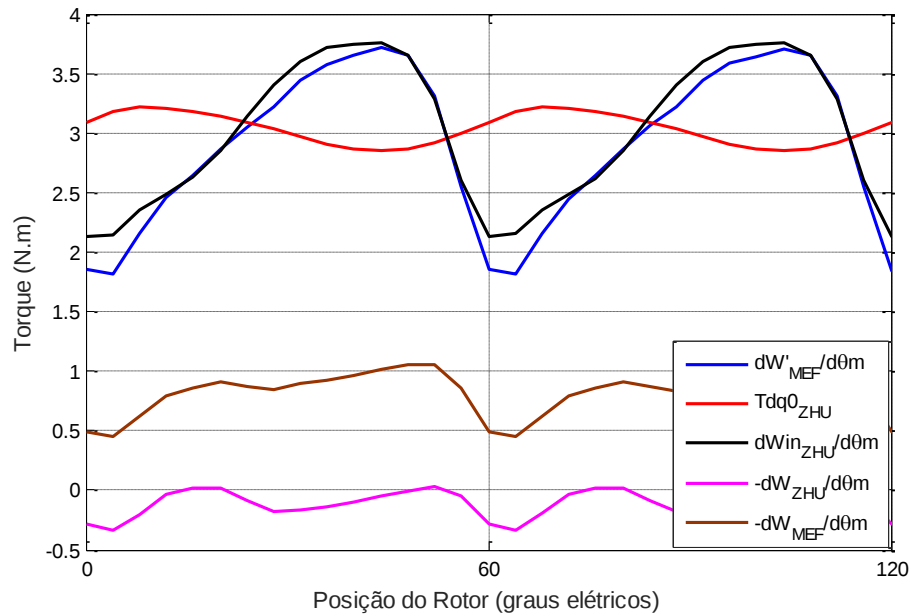
O resultado apresentado na Figura 4.32 referente à variação da energia magnética armazenada mostra-se de alguma forma controverso, pois foi avaliado como mostra a Equação (4.1), ao invés de ser avaliado com o auxílio de um *software* que implemente o Método dos Elementos Finitos utilizando a formulação sugerida entre (3.19) e (3.27). No entanto, para o cálculo da variação da coenergia Chu e Zhu (2013b) faz uso do MEF.

$$-\left. \frac{dW_{ZHU}}{d\theta_m} \right|_{i=\text{constante}} = \left. \frac{dW'_{MEF}}{d\theta_m} \right|_{i=\text{constante}} - \left. \frac{dW_{in,ZHU}}{d\theta_m} \right|_{i=\text{constante}} \quad (4.1)$$

Para apontar um possível erro na avaliação da variação da energia magnética armazenada feita pelos autores em Chu e Zhu (2013b), as máquinas propostas nos estudos de

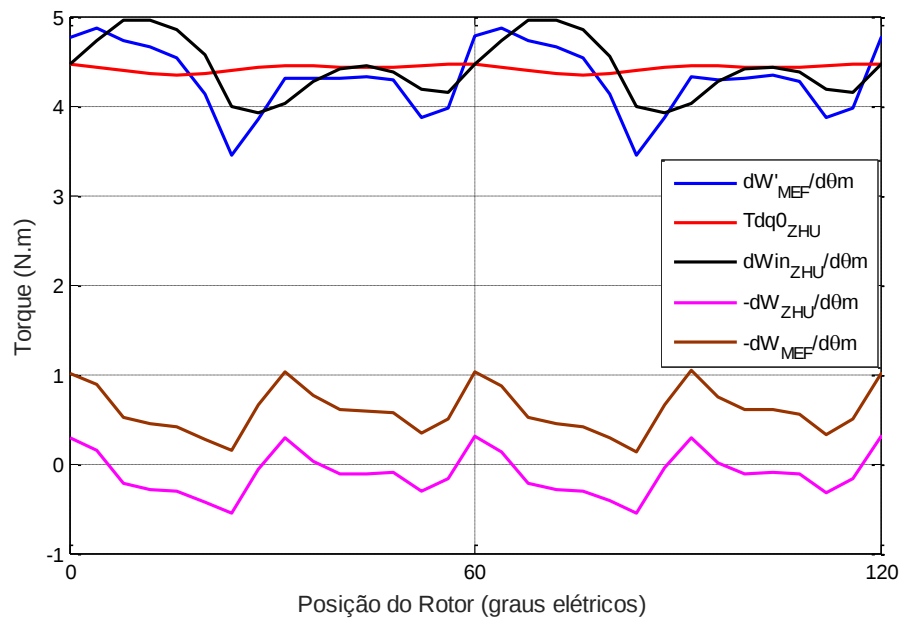
casos 1, 2 e 3 são novamente analisadas entre a Figura 4.33 e a Figura 4.35. É possível observar que nos três casos os resultados de  $-dW_{MEF}/d\theta_m$ , baseados na formulação sugerida entre (3.19) e (3.27), são diferentes dos resultados de  $-dW_{ZHU}/d\theta_m$ , baseados na Equação (4.1).

Figura 4.33 – Máquina do estudo de caso 1 com  $I_a = 4$  A e  $\beta = -30^\circ$ .



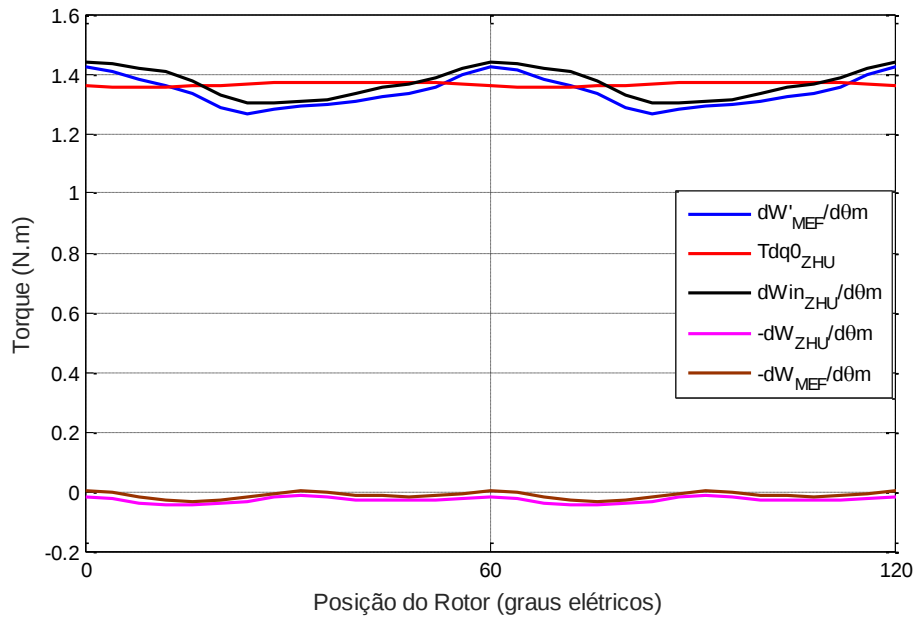
Fonte: Autor.

Figura 4.34 – Máquina do estudo de caso 2 com  $I_a = 4$  A e  $\beta = -30^\circ$ .



Fonte: Autor.

Figura 4.35 – Máquina do estudo de caso 3 com  $I_a = 4$  A e  $\beta = -30^\circ$ .



Fonte: Autor.

Note que  $dW_{in,ZHU}/d\theta_m$  refere-se à variação da energia de entrada calculada em (3.39). Os resultados de  $-dW_{ZHU}/d\theta_m$  mostram-se com valores médios maiores em módulo comparados aos resultados de  $-dW_{MEF}/d\theta_m$ . O único caso onde  $-dW_{ZHU}/d\theta_m$  é aproximadamente igual à  $-dW_{MEF}/d\theta_m$  é no estudo de caso 3 da máquina síncrona com ímãs montados na superfície do rotor.

É importante mencionar que a maior parte da variação da energia magnética armazenada nos casos analisados deve-se aos ímãs permanentes e ao entreferro das máquinas, como é mostrado da Figura 4.36 a Figura 4.38, onde os resultados são obtidos a partir do MEF. Assim, mesmo para diferentes materiais ferromagnéticos, estes representam uma menor parte de  $-dW_{MEF}/d\theta_m$  devido à sua alta permeabilidade relativa que pode não influenciar consideravelmente no resultado.

Portanto, existem três conclusões que podem ser feitas com base nos resultados apresentados entre a Figura 4.33 e a Figura 4.38:

- $dW_{in,ZHU}/d\theta_m$ : Na verdade este termo é mais parecido como uma estimativa do torque eletromagnético, não uma solução exata, do que a real variação da energia de entrada da máquina, como é mostrado da Figura 4.33 a Figura 4.35. Claro, é bom o suficiente para uma estimativa computacional rápida do valor do torque total, mas

como não considera a interação entre as ranhuras do estator e os ímãs, como será mostrado mais adiante, resulta em uma atribuição imprópria da energia magnética armazenada na máquina síncrona de ímãs permanentes se for usada como a variação da energia de entrada e consequentemente não pode ser utilizada para a separação das parcelas de torque.

Figura 4.36 – Variação da energia magnética armazenada para a máquina do estudo de caso 1.

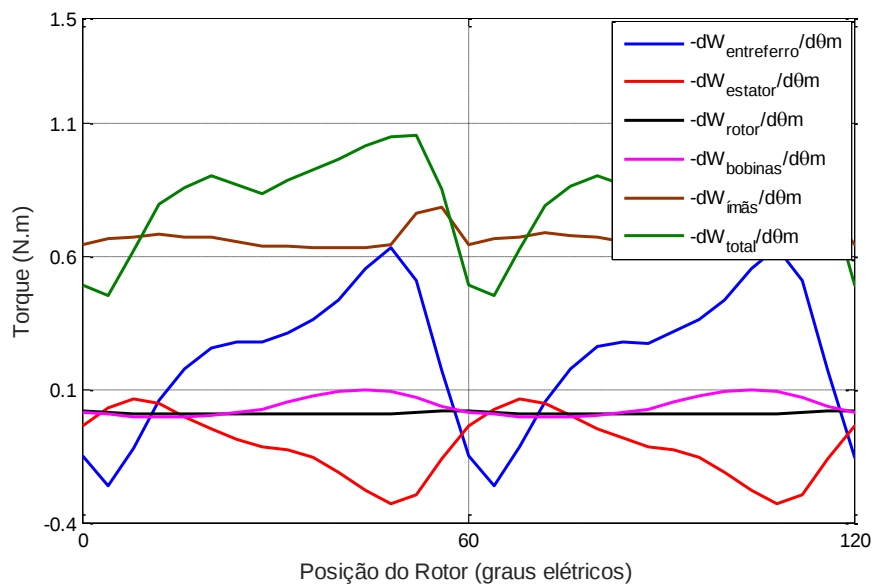


Figura 4.37 – Variação da energia magnética armazenada para a máquina do estudo de caso 2.

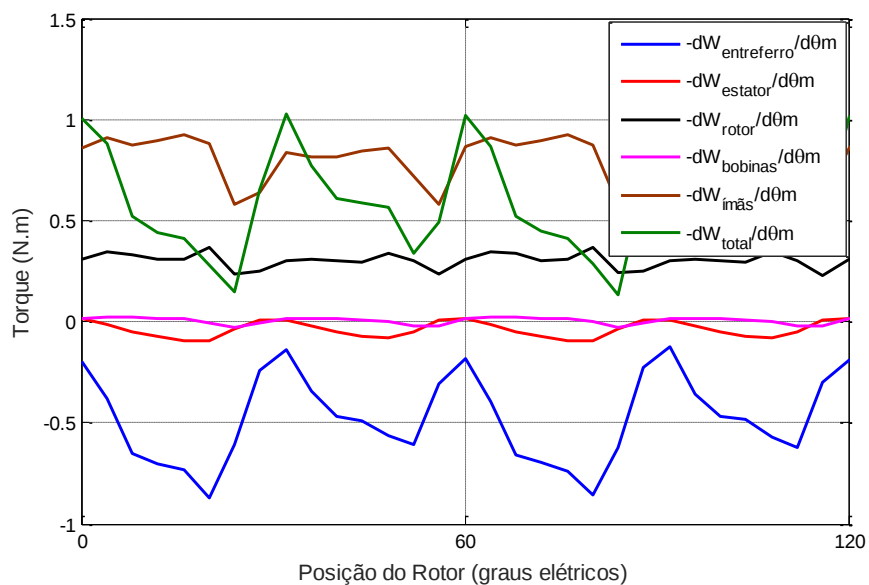
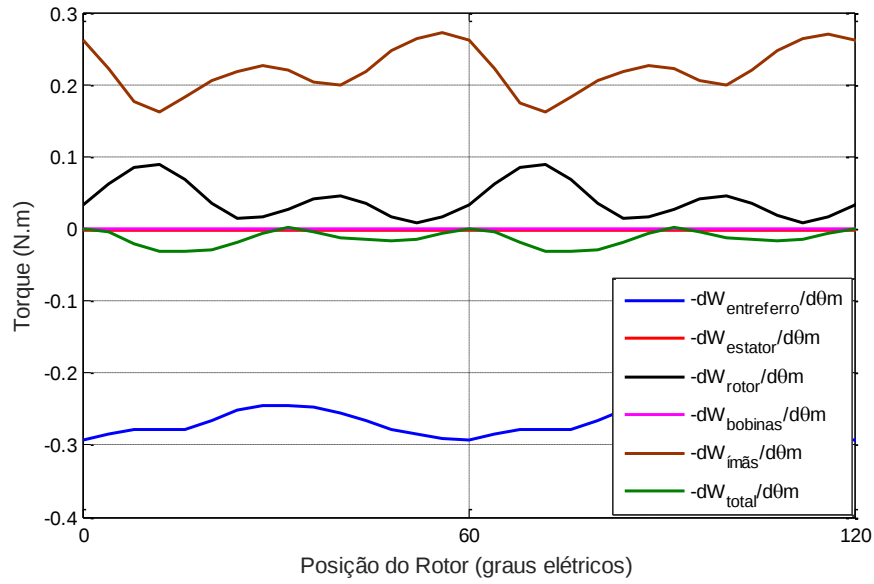


Figura 4.38 – Variação da energia magnética armazenada para a máquina do estudo de caso 3.



Fonte: Autor.

- $-dW_{ZHU}/d\theta_m$  : Tem um valor médio próximo de zero graças à suposição errônea de que a variação da energia de entrada na máquina síncrona de ímãs permanentes tem de ser calculada a partir de (3.39), o que levou Chu e Zhu (2013b) a concluir que a energia magnética armazenada em carga contribui, principalmente, na ondulação do torque eletromagnético e o *cogging torque* em carga não pode apresentar um valor médio diferente de zero.
- $-dW_{MEF}/d\theta_m$  : conforme ilustrado, os resultados da simulação em elementos finitos mostram que a energia magnética armazenada contribui para a ondulação do torque eletromagnético, bem como para o seu valor médio e tem um valor médio considerável.

Para explicar essas conclusões, considere a seguinte hipótese: se a variação da coenergia magnética  $dW'/d\theta_m$  é formulada em (3.32), e considerando que  $W'$  é a coenergia magnética total na máquina,  $W$  é a energia magnética armazenada da máquina e  $W_{in}$  é a energia de entrada total na máquina, é verdade afirmar que:

$$W' = W'_{entreferro} + W'_{estator} + W'_{rotor} + W'_{bobinas} + W'_{ímãs} \quad (4.2)$$

$$W = W_{entreferro} + W_{estator} + W_{rotor} + W_{bobinas} + W_{ímãs} \quad (4.3)$$

$$W_{in} = W' + W \quad (4.4)$$

E suas derivadas são:

$$\frac{dW'}{d\theta_m} = \frac{dW'_{entferro}}{d\theta_m} + \frac{dW'_{estator}}{d\theta_m} + \frac{dW'_{rotor}}{d\theta_m} + \frac{dW'_{bobinas}}{d\theta_m} + \frac{dW'_{ímãs}}{d\theta_m} \quad (4.5)$$

$$\frac{dW}{d\theta_m} = \frac{dW_{entferro}}{d\theta_m} + \frac{dW_{estator}}{d\theta_m} + \frac{dW_{rotor}}{d\theta_m} + \frac{dW_{bobinas}}{d\theta_m} + \frac{dW_{ímãs}}{d\theta_m} \quad (4.6)$$

$$\frac{dW_{in}}{d\theta_m} = \frac{dW'}{d\theta_m} + \frac{dW}{d\theta_m} \quad (4.7)$$

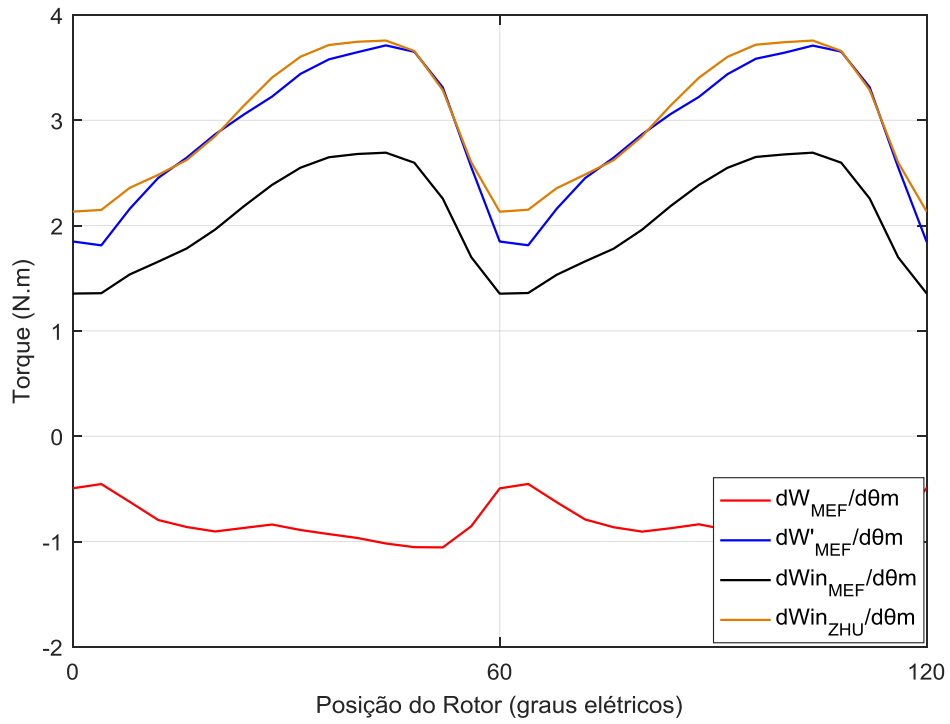
Assim sendo, se  $dW_{in,ZHU}/d\theta_m = dW_{in}/d\theta_m$ , proposto por Chu e Zhu (2013b), seria verdade:

$$\frac{dW_{in,ZHU}}{d\theta_m} = \frac{dW_{in,MEF}}{d\theta_m} = \frac{dW'_{MEF}}{d\theta_m} + \frac{dW_{MEF}}{d\theta_m} \quad (4.8)$$

Os resultados baseados em (4.8) para as máquinas propostas nos três estudos de casos são ilustrados da Figura 4.39 a Figura 4.41 e comparados com os resultados de  $dW_{in,ZHU}/d\theta_m$ , formulado por Chu e Zhu (2013b).

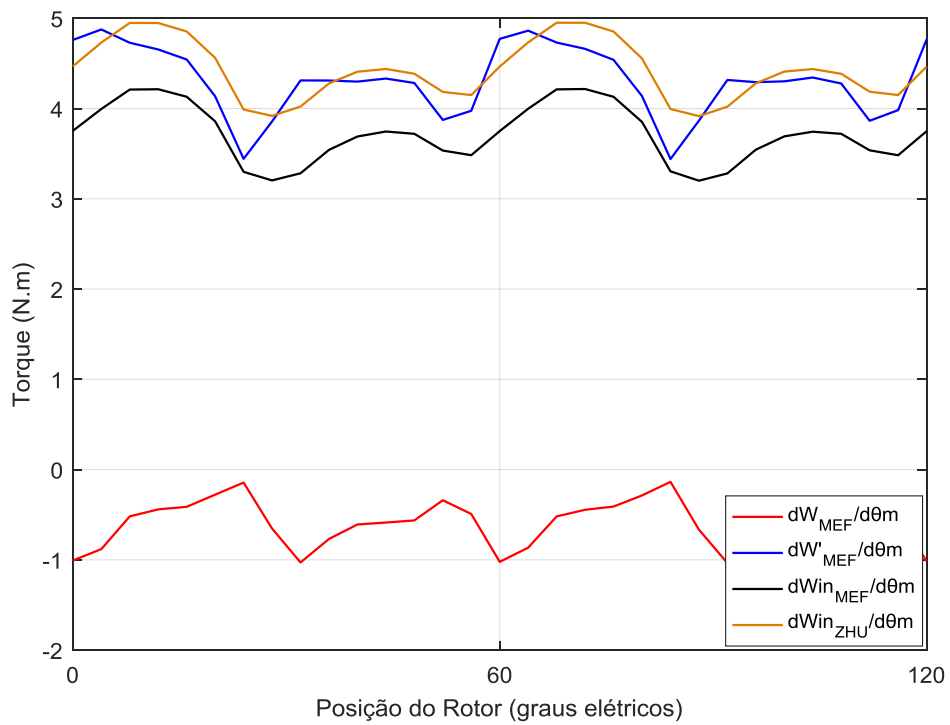
Conforme é ilustrado, fica claro que a suposição feita em Chu e Zhu (2013b) que  $dW_{in,ZHU}/d\theta_m$  descreve a variação da energia de entrada na máquina síncrona de ímãs permanentes é errônea. Contudo,  $dW_{in,ZHU}/d\theta_m$  é uma boa estimativa para o torque eletromagnético, ou seja, é uma boa aproximação de  $dW'/d\theta_m$ . O único caso em que  $dW_{in,ZHU}/d\theta_m$  é similar à  $dW_{in}/d\theta_m$  é na máquina síncrona com ímãs montados na superfície do rotor devido ao grande entreferro equivalente observado pelo estator, uma vez que a permeabilidade magnética relativa dos ímãs é aproximadamente um e não há saliência no rotor, isto é, os ímãs estão voltados diretamente para o entreferro.

Figura 4.39 – Comparação entre  $dW_{in,ZHU}/d\theta_m$  e a variação da energia de entrada  $dW_{in,MEF}/d\theta_m$  obtida em elementos finitos para a máquina do caso 1.



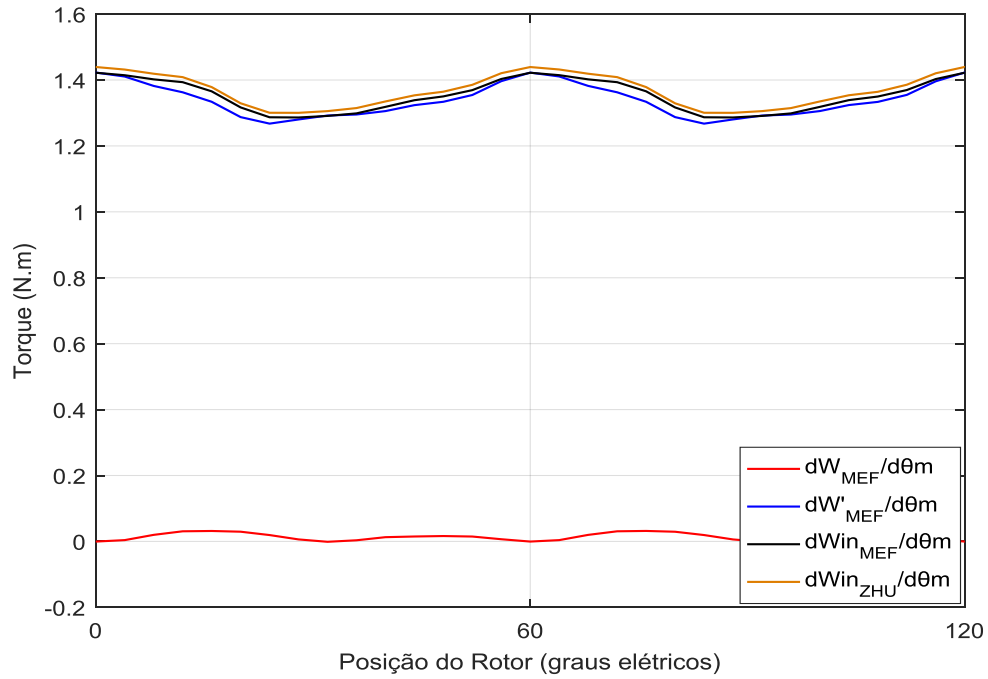
Fonte: Autor.

Figura 4.40 – Comparação entre  $dW_{in,ZHU}/d\theta_m$  e a variação da energia de entrada  $dW_{in,MEF}/d\theta_m$  obtida em elementos finitos para a máquina do caso 2.



Fonte: Autor.

Figura 4.41 – Comparação entre  $dW_{in,ZHU}/d\theta_m$  e a variação da energia de entrada  $dW_{in,MEF}/d\theta_m$  obtida em elementos finitos para a máquina do caso 3.



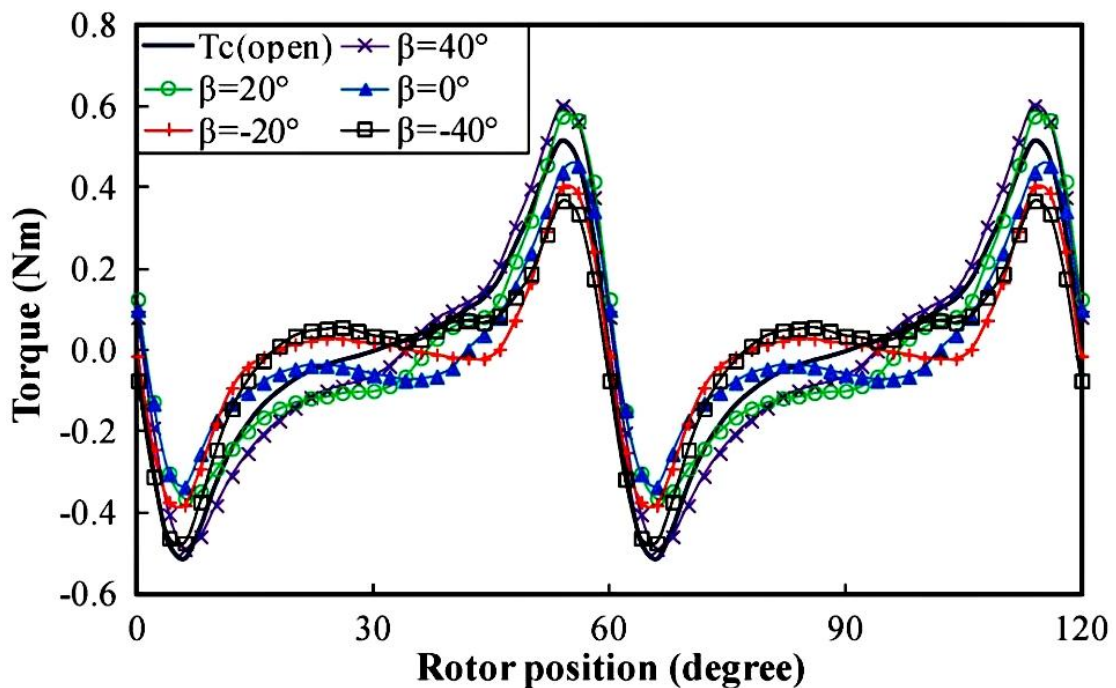
Por outro lado, onde os ímãs não estão voltados diretamente para o entreferro ou o rotor apresenta saliência, a diferença entre o valor médio de  $dW_{in,ZHU}/d\theta_m$  e o valor médio de  $dW_{in}/d\theta_m$  é maior devido a diferença entre o valor absoluto da variação da energia magnética armazenada dos ímãs  $dW_{ímãs}/d\theta_m$  e a variação da energia magnética armazenada do entreferro  $dW_{entreferro}/d\theta_m$ , comportamento este que não está devidamente descrito na formulação de  $dW_{in,ZHU}/d\theta_m$ . Em outras palavras, a interação entre as ranhuras do estator e os ímãs não encontra-se descrita em  $dW_{in,ZHU}/d\theta_m$ .

Outro fato que deve ser destacado nesses resultados, reside nos casos em que  $dW_{in}/d\theta_m$  é menor que a variação da coenergia  $dW'/d\theta_m$ . Esses casos podem ser explicados principalmente pela forma como os ímãs interagem com o sistema, uma vez que contribuem como fonte de energia na máquina síncrona de ímãs permanentes e de acordo com o que é mostrado da Figura 4.36 a Figura 4.38 a variação da energia magnética armazenada nos ímãs contribui para  $dW/d\theta_m < 0$ . Todos estes resultados estão de acordo com (4.4) e (4.7) e respeitam o princípio da conservação de energia.

Diferentemente da formulação para  $dW_{in,ZHU}/d\theta_m$ , descrita em (3.39), que mostra a interação entre ímãs e correntes que resulta no torque mútuo e a interação entre correntes e suas indutâncias próprias que resulta no torque de relutância, uma formulação analítica para  $dW_{in}/d\theta_m$  deveria ilustrar a interação entre as ranhuras do estator e os ímãs com base na topologia do rotor, especialmente no arranjo dos ímãs. Além disso, uma vez que  $dW_{in,ZHU}/d\theta_m$  não descreve este fato de forma adequada, o valor médio do *cogging torque* em carga com base em  $dW_{in,ZHU}/d\theta_m$  claramente não está correto.

Com os indícios apresentados de que o *cogging torque* em carga apresenta valor médio diferente de zero, a Figura 4.42, extraída de Chu e Zhu (2013a), causa estranheza e levanta dúvidas quanto à forma utilizada pelos autores para determinar o valor médio igual a zero do *cogging torque* em carga na máquina síncrona de ímãs permanentes do caso 1.

Figura 4.42 – Formas de onda do *cogging torque* em carga na máquina síncrona de ímãs permanentes do caso 1.



Fonte: (CHU; ZHU, 2013a).

Os resultados apresentados na Figura 4.42 referentes ao *cogging torque* em carga da máquina síncrona de ímãs permanentes do caso 1 mostram-se de alguma forma controversos, pois foram avaliados como mostra a Equação (4.9), ao invés de ser avaliado como em (3.49), não mantendo-se a corrente constante para  $\theta_{m1}$  e  $\theta_{m2}$ .

$$T_{cogging,Zhu} = -\frac{\Delta W_{(FP,PM)}}{\Delta \theta_m} = -\frac{W_{2(FP,PM)} - W_{1(FP,PM)}}{\theta_{m2} - \theta_{m1}} \quad (4.9)$$

Com o objetivo de avaliar tal fato, observe a seguinte análise:

$$T_{EL} = T_{Avg} + T_{Ripple} \quad (4.10)$$

$$T_{EL} = \left. \frac{dW'}{d\theta_m} \right|_{i=constante} \quad (4.11)$$

$$\left. \frac{dW'}{d\theta_m} \right|_{i=constante} = \left. \frac{dW_{in}}{d\theta_m} \right|_{i=constante} - \left. \frac{dW}{d\theta_m} \right|_{i=constante} \quad (4.12)$$

$$\left. \frac{dW'}{d\theta_m} \right|_{i=constante} = Avg \left( \left. \frac{dW'}{d\theta_m} \right|_{i=constante} \right) + Ripple \left( \left. \frac{dW'}{d\theta_m} \right|_{i=constante} \right) \quad (4.13)$$

$$\left. \frac{dW_{in}}{d\theta_m} \right|_{i=constante} = Avg \left( \left. \frac{dW_{in}}{d\theta_m} \right|_{i=constante} \right) + Ripple \left( \left. \frac{dW_{in}}{d\theta_m} \right|_{i=constante} \right) \quad (4.14)$$

$$\left. \frac{dW}{d\theta_m} \right|_{i=constante} = Avg \left( \left. \frac{dW}{d\theta_m} \right|_{i=constante} \right) + Ripple \left( \left. \frac{dW}{d\theta_m} \right|_{i=constante} \right) \quad (4.15)$$

Note que os subscritos *Avg* e *Ripple* referem-se ao valor médio e a ondulação do torque, respectivamente. Substituindo (4.13), (4.14) e (4.15) em (4.12), pode-se concluir que:

$$T_{Avg} = Avg \left( \left. \frac{dW'}{d\theta_m} \right|_{i=constante} \right) = Avg \left( \left. \frac{dW_{in}}{d\theta_m} \right|_{i=constante} \right) - Avg \left( \left. \frac{dW}{d\theta_m} \right|_{i=constante} \right) \quad (4.16)$$

$$T_{Ripple} = Ripple \left( \left. \frac{dW'}{d\theta_m} \right|_{i=constante} \right) = Ripple \left( \left. \frac{dW_{in}}{d\theta_m} \right|_{i=constante} \right) - Ripple \left( \left. \frac{dW}{d\theta_m} \right|_{i=constante} \right) \quad (4.17)$$

Se o *cogging torque* é definido como a interação entre as ranhuras do estator e os ímãs, então pela Equação (4.17) nota-se que a ondulação do torque total contém o *ripple* de todas as fontes de energia (ímãs e bobinas). Associada a essa análise, considere a Equação (4.18) em

que  $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(n\theta_m)$  refere-se a Série de Fourier,  $a_0$  é o valor médio do torque,

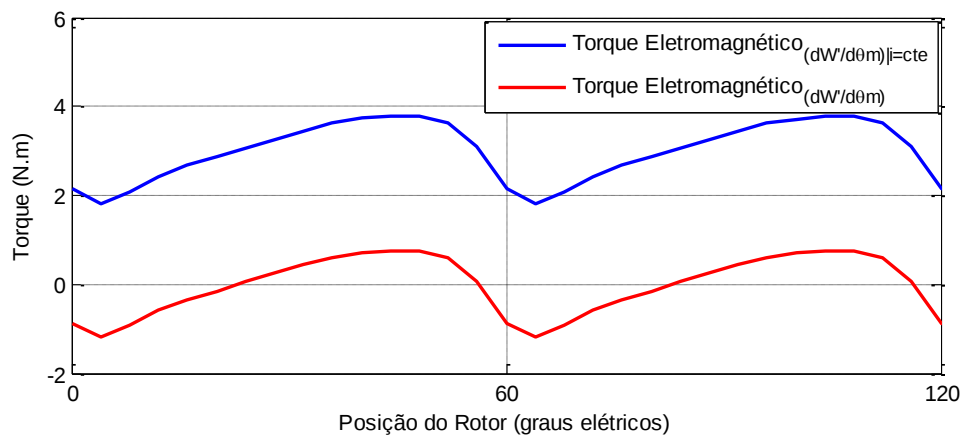
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(n\theta_m)$  é o *ripple* do torque e  $n$  é o harmônico.

$$\left. \frac{dW'}{d\theta_m} \right|_{i=\text{constante}} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(n\theta_m) \quad (4.18)$$

Avaliando-se as máquinas dos estudos de caso 1, 2 e 3, ambas em carga com correntes senoidais (4 A), e utilizando-se o *software* Matlab para aplicar a FFT (*Fast Fourier Transform*)

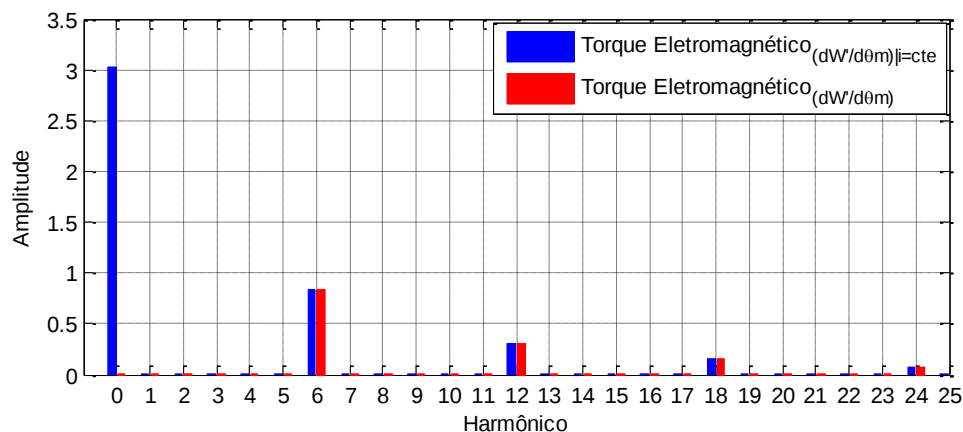
em  $\left. \frac{dW'}{d\theta_m} \right|_{i=\text{constante}}$  e  $\frac{dW'}{d\theta_m}$ , pode-se observar os resultados entre a Figura 4.43 e a Figura 4.48.

Figura 4.43 – Torque eletromagnético no estudo de caso 1 (carregamento com correntes senoidais).



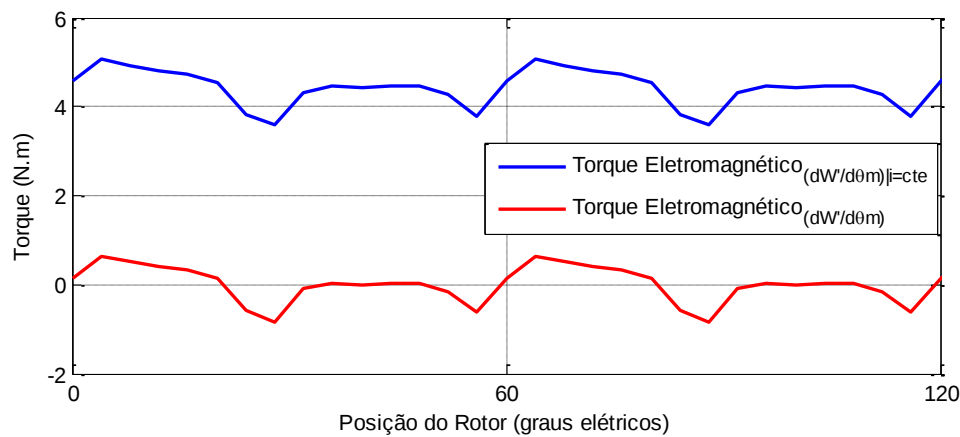
Fonte: Autor.

Figura 4.44 – Conteúdo harmônico do torque eletromagnético no estudo de caso 1 (carregamento com correntes senoidais).



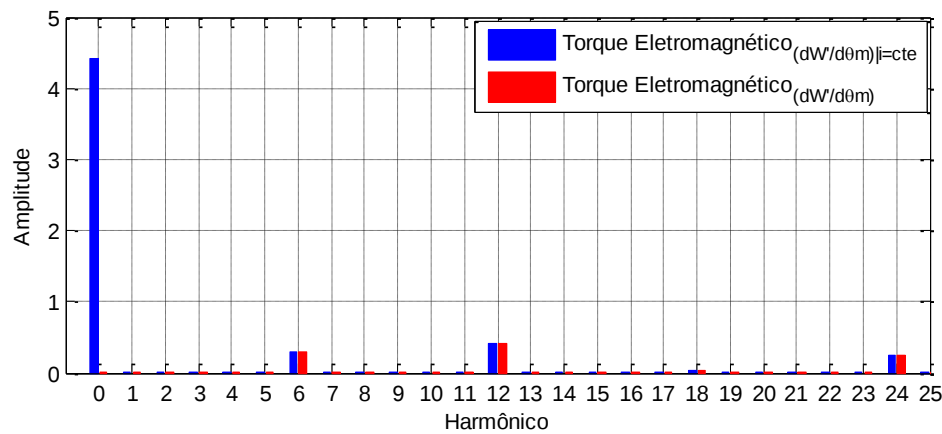
Fonte: Autor.

Figura 4.45 – Torque eletromagnético no estudo de caso 2 (carregamento com correntes senoidais).



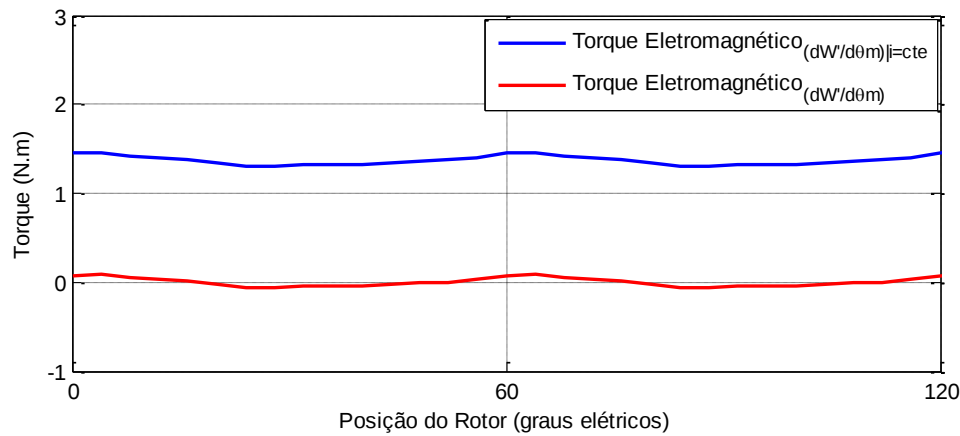
Fonte: Autor.

Figura 4.46 – Conteúdo harmônico do torque eletromagnético no estudo de caso 2 (carregamento com correntes senoidais).



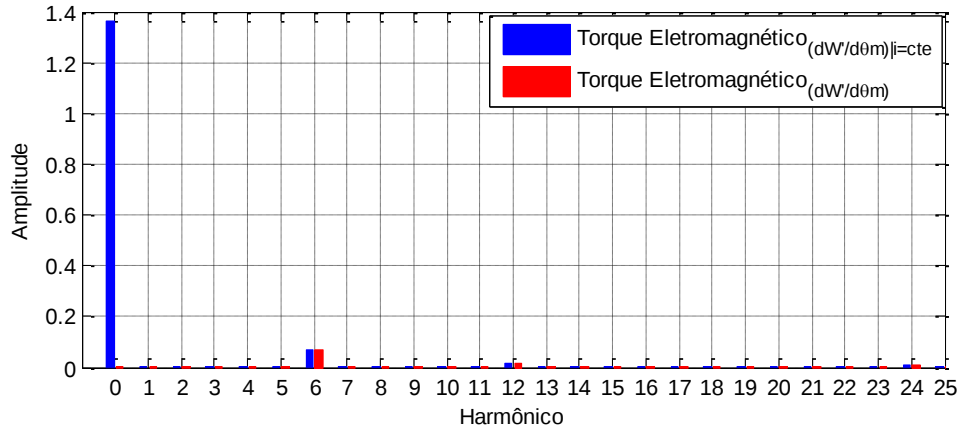
Fonte: Autor.

Figura 4.47 – Torque eletromagnético no estudo de caso 3 (carregamento com correntes senoidais).



Fonte: Autor.

Figura 4.48 – Conteúdo harmônico do torque eletromagnético no estudo de caso 3 (carregamento com correntes senoidais).



Fonte: Autor.

Com base nos resultados apresentados entre a Figura 4.43 e a Figura 4.48 nota-se que os harmônicos de ordem maior ou igual a um ( $n \geq 1$ ) são iguais para ambas as transformações,

tanto na FFT de  $\left. \frac{dW'}{d\theta_m} \right|_{i=\text{constante}}$  quanto na FFT de  $\frac{dW'}{d\theta_m}$ . Portanto, pode-se concluir que:

$$\frac{dW'}{d\theta_m} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\theta) \quad (4.19)$$

$$\left. \frac{dW'}{d\theta_m} \right|_{i=\text{constante}} = a_0 + \frac{dW'}{d\theta_m} \quad (4.20)$$

Em outras palavras, pode-se dizer que para determinar o valor médio e o *ripple* do torque eletromagnético a partir da variação da coenergia magnética é necessário manter a corrente constante; do contrário, o cálculo desconsidera o valor médio do torque e apresenta apenas sua ondulação. De modo análogo, esta avaliação é válida para o cálculo do *cogging torque* em carga, como é mostrado entre a Figura 4.49 e a Figura 4.51.

Pode-se observar que na aplicação do Método do Trabalho Virtual e no método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu para o cálculo do *cogging torque* em carga, caso a corrente não seja mantida constante para  $\theta_{m1}$  e  $\theta_{m2}$ , como é mostrado em (4.9), então o valor médio é forçado a ser zero por levar em consideração apenas o *ripple* do torque, desrespeitando, portanto, a condição primordial para o cálculo de torque a partir da variação da energia e coenergia.

Figura 4.49 – Cogging torque em carga no estudo de caso 1 (carregamento com correntes senoidais).

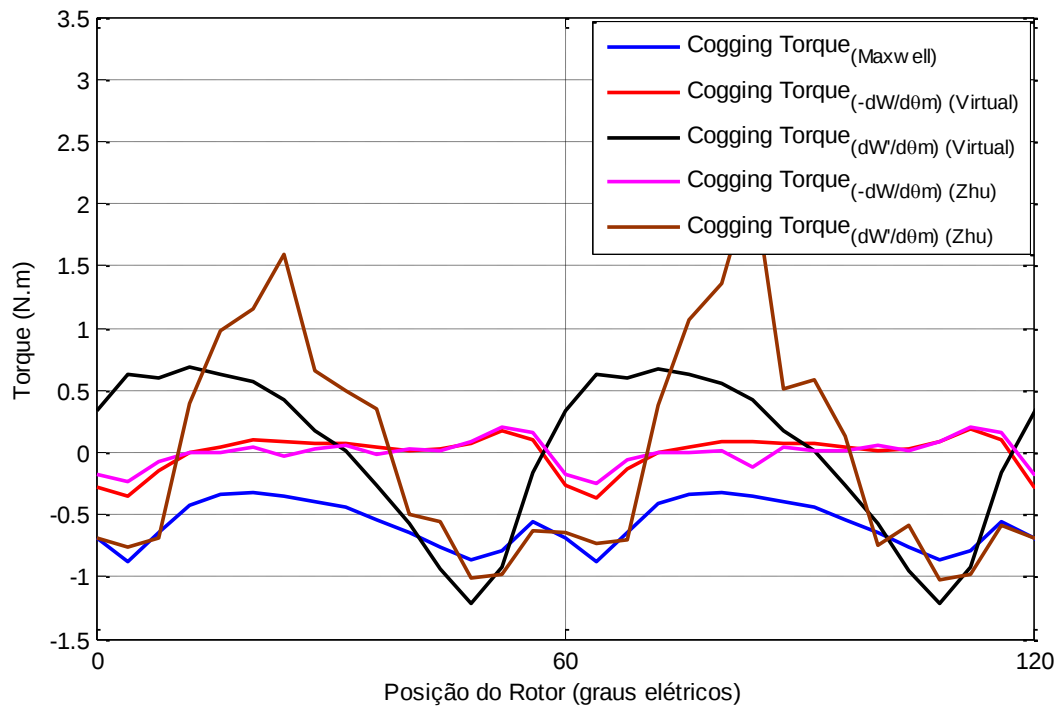


Figura 4.50 – Cogging torque em carga no estudo de caso 2 (carregamento com correntes senoidais).

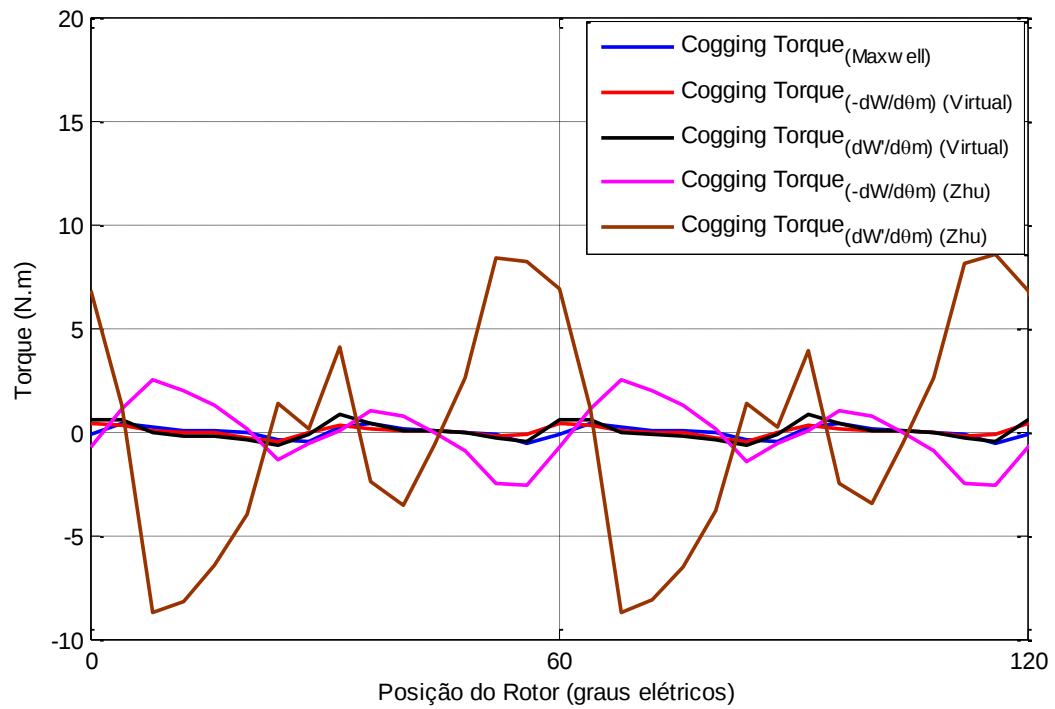
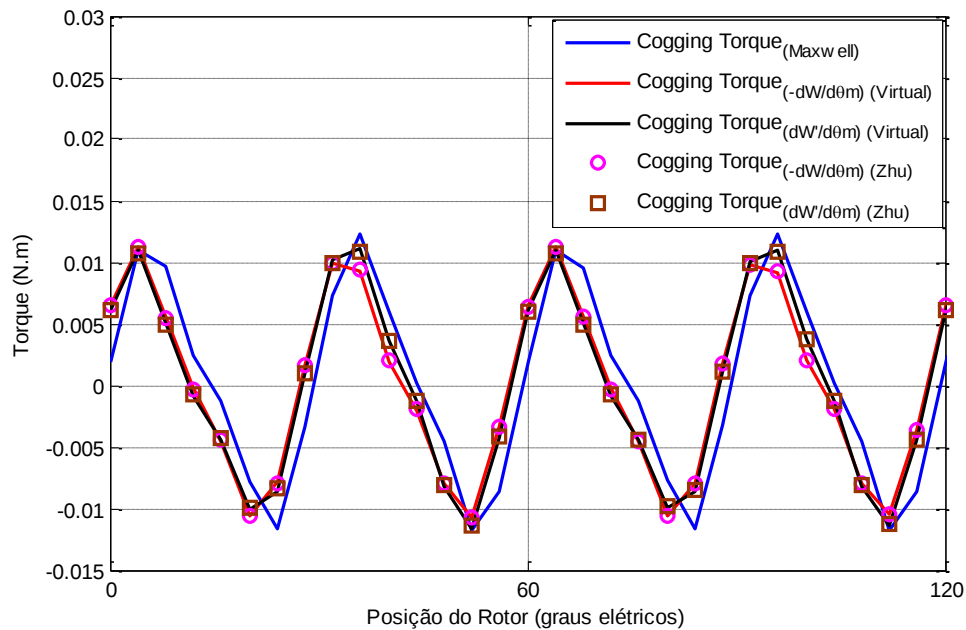


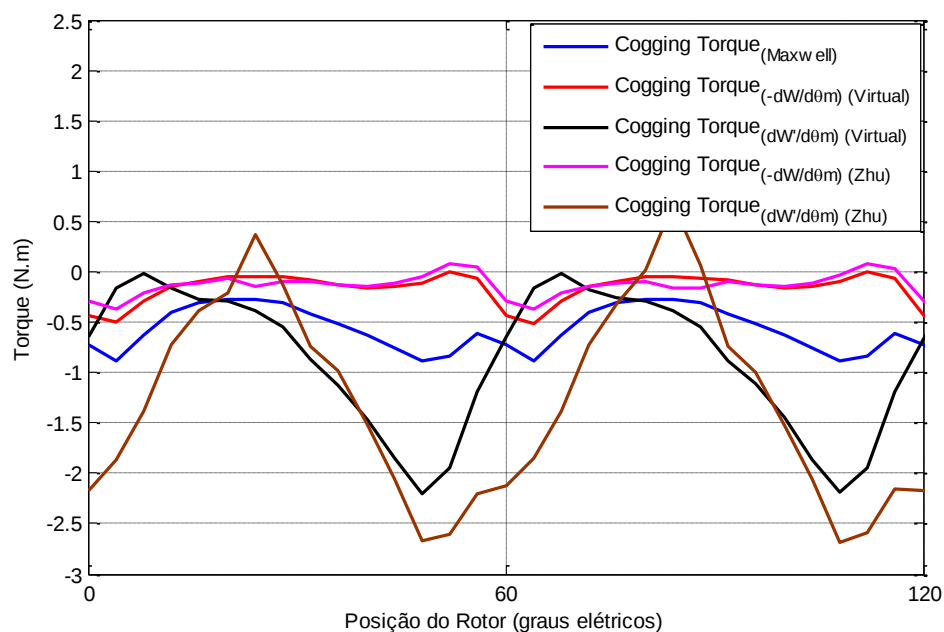
Figura 4.51 – *Cogging torque* em carga no estudo de caso 3 (carregamento com correntes senoidais).



Fonte: Autor.

Diferentemente do acionamento senoidal, analisando-se as máquinas dos estudos de casos 1, 2 e 3, ambas alimentadas por correntes quadradas (3,6363 A), pode-se notar entre a Figura 4.52 e a Figura 4.54 que independente de como o *cogging torque* em carga é avaliado, por (3.49) ou (4.9), seu valor médio é diferente de zero.

Figura 4.52 – *Cogging torque* em carga no estudo de caso 1 (carregamento com correntes quadradas).



Fonte: Autor.

Figura 4.53 – *Cogging torque* em carga no estudo de caso 2 (carregamento com correntes quadradas).

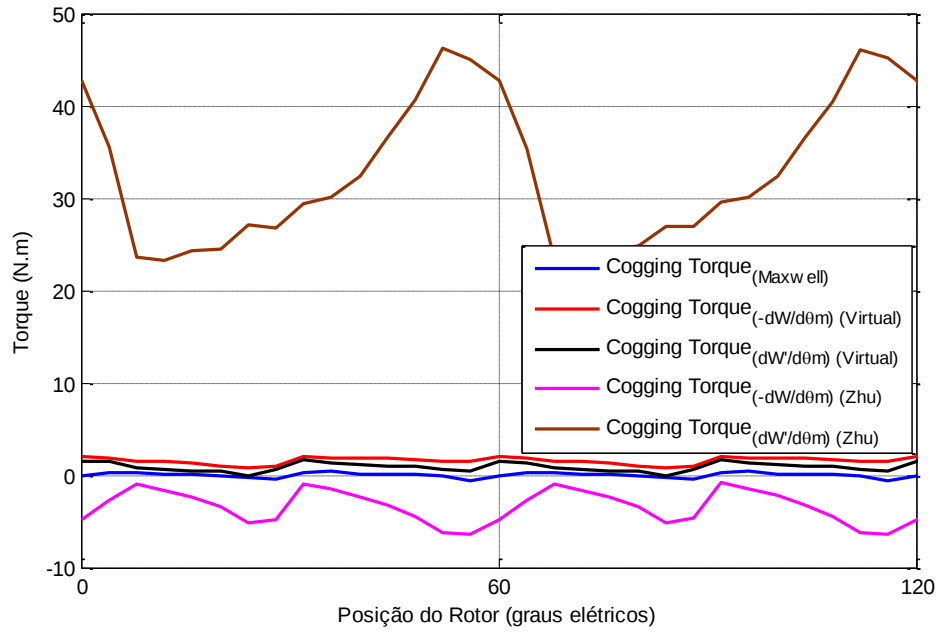
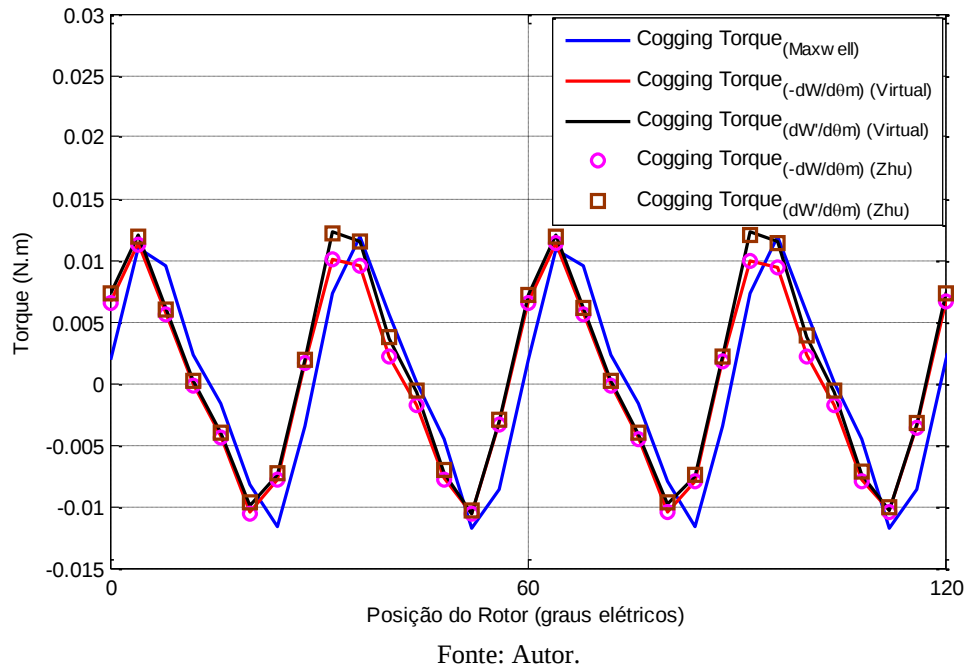


Figura 4.54 – *Cogging torque* em carga no estudo de caso 3 (carregamento com correntes quadradas).

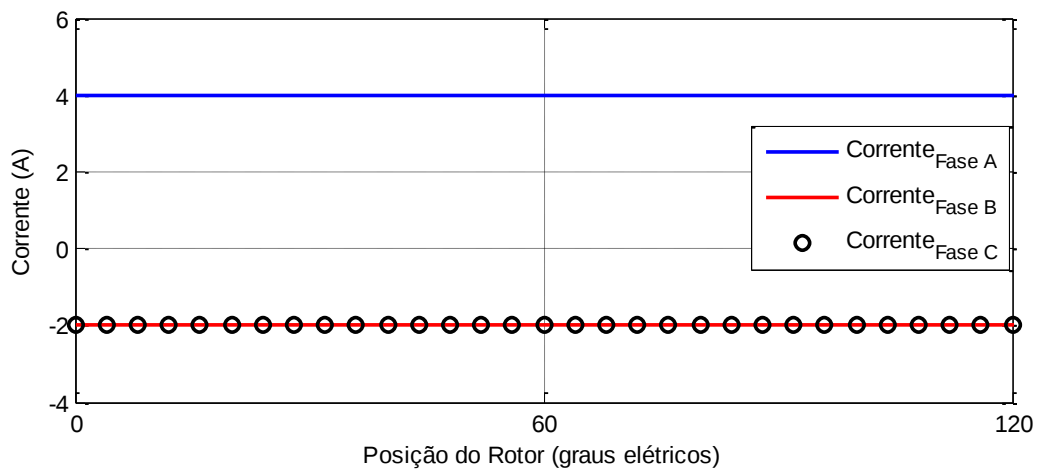


Para reforçar a ideia de que o *cogging torque* em carga tem valor médio diferente de zero, considere a seguinte hipótese:

$$\left. \frac{dW'}{d\theta_m} \right|_{i=\text{constante}} = \frac{dW'}{d\theta_m} \quad (4.21)$$

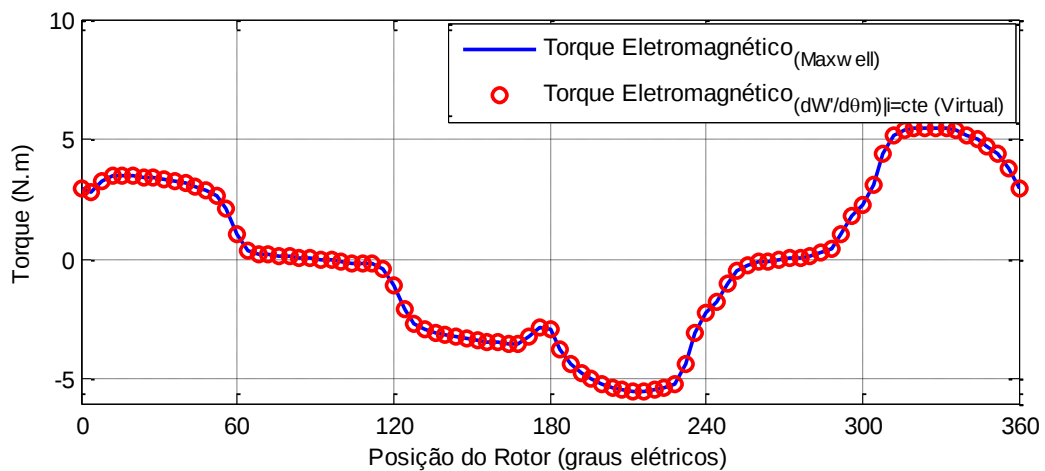
Tem-se que (4.20) é equivalente a (4.21) na seguinte condição: matematicamente, quando  $a_0 = 0$ ; fisicamente,  $a_0 = 0$  quando trata-se de um sistema conservativo de energia, tanto do ponto de vista macroscópico, previsto pela Equação (3.30), quanto do ponto de vista microscópico, decorrente do campo imposto sobre o rotor ser constante em qualquer uma de suas posições (e.g. máquina em vazio). Com a aplicação do Método da Permeabilidade Fixa essa condição é respeitada quando  $i(\theta_m) = i = \text{constante}$ , ou seja, as correntes não variam nas fases, independentemente da posição angular mecânica do rotor. Para provar isto, as máquinas dos estudos de casos 1, 2 e 3 são alimentadas por correntes constantes, como mostra a Figura 4.55; posteriormente são calculados o torque eletromagnético e o *cogging torque* em carga, apresentados entre a Figura 4.56 e a Figura 4.61.

Figura 4.55 – Forma de onda e amplitude das correntes constantes.



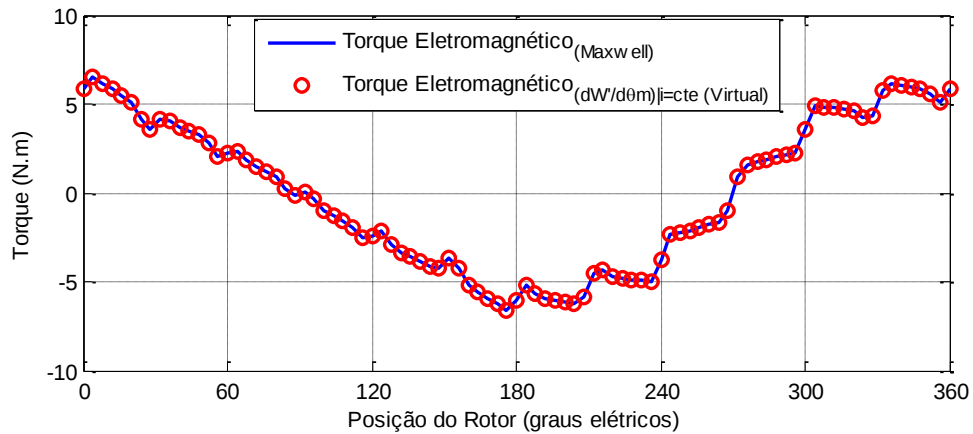
Fonte: Autor.

Figura 4.56 – Torque eletromagnético na máquina do estudo de caso 1 (carregamento com correntes constantes).



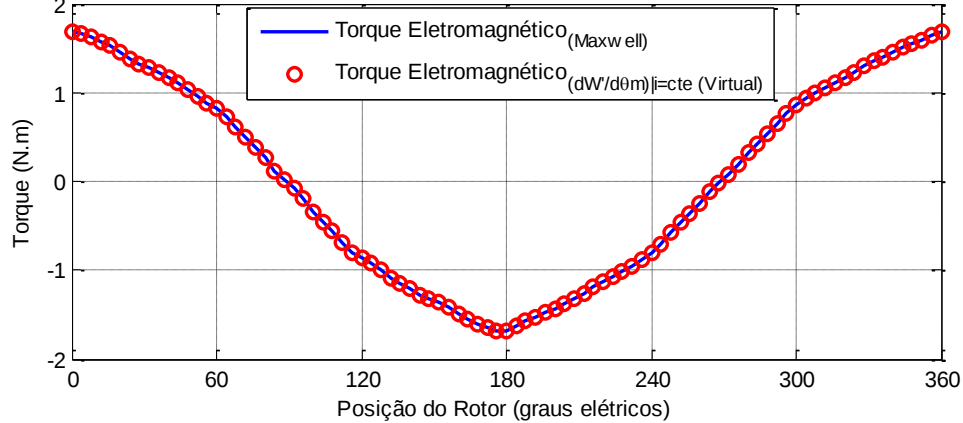
Fonte: Autor.

Figura 4.57 – Torque eletromagnético na máquina do estudo de caso 2 (carregamento com correntes constantes).



Fonte: Autor.

Figura 4.58 – Torque eletromagnético na máquina do estudo de caso 3 (carregamento com correntes constantes).



Fonte: Autor.

Pode-se observar com os resultados obtidos entre a Figura 4.56 e a Figura 4.58 que mesmo as máquinas nos três estudos de casos estando na condição de carga, elas apresentam o torque eletromagnético com valor médio igual a zero quando observado o seu ciclo completo, isto por tratar-se de um sistema conservativo de energia, tanto do ponto de vista macroscópico, previsto pela Equação (3.30), quanto do ponto de vista microscópico, decorrente do campo imposto sobre o rotor ser constante em qualquer uma de suas posições como consequência de  $i(\theta_m) = i = \text{constante}$ .

Assim como no caso do torque eletromagnético, pode-se observar com os resultados obtidos entre a Figura 4.59 e a Figura 4.61 que o *cogging torque* em carga apresenta valor médio igual a zero quando observado o seu ciclo completo, independentemente do método adotado para o seu cálculo. Nota-se também que durante a quarta etapa do MPF em que se tem apenas os ímãs como fonte de fluxo magnético ( $FP, PM$ ), mesmo não havendo correntes circulando nas

bobinas das máquinas obteve-se  $dW'_{(FP,PM)}/d\theta_m \neq -dW_{(FP,PM)}/d\theta_m$ , ou seja,  $dW_{in(FP,PM)}/d\theta_m \neq 0$ . Portanto, o valor médio do *cogging torque* só é igual a zero quando trata-se de um sistema conservativo de energia, tanto do ponto de vista macroscópico, quanto do ponto de vista microscópico, diferentemente de quando a máquina é acionada por correntes que variam nas fases dependendo da posição do rotor e impõem sobre o mesmo um campo não constante.

Figura 4.59 – *Cogging torque* em carga no estudo de caso 1 (carregamento com correntes constantes).

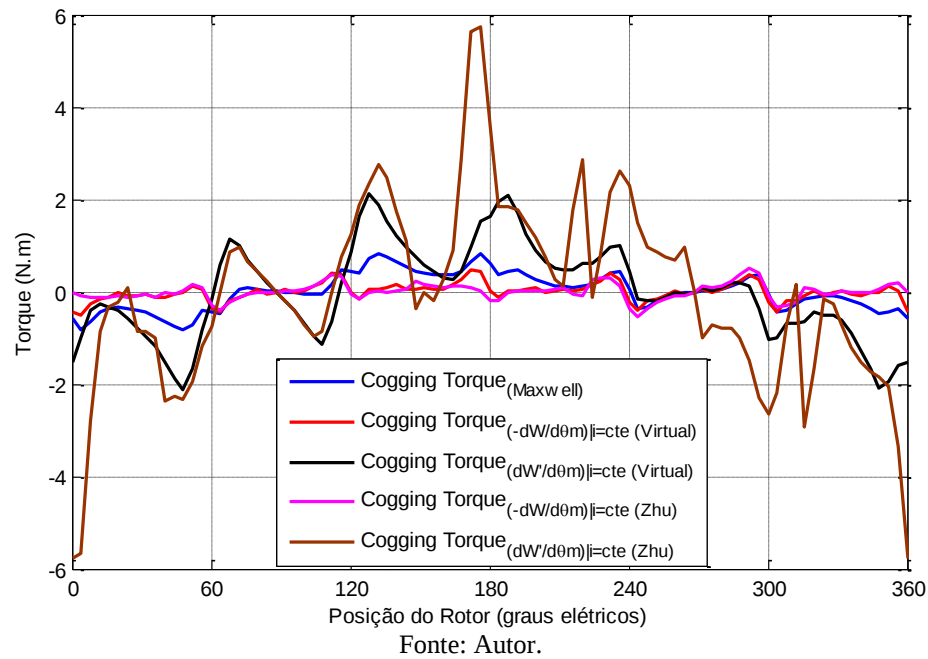


Figura 4.60 – *Cogging torque* em carga no estudo de caso 2 (carregamento com corrente constante).

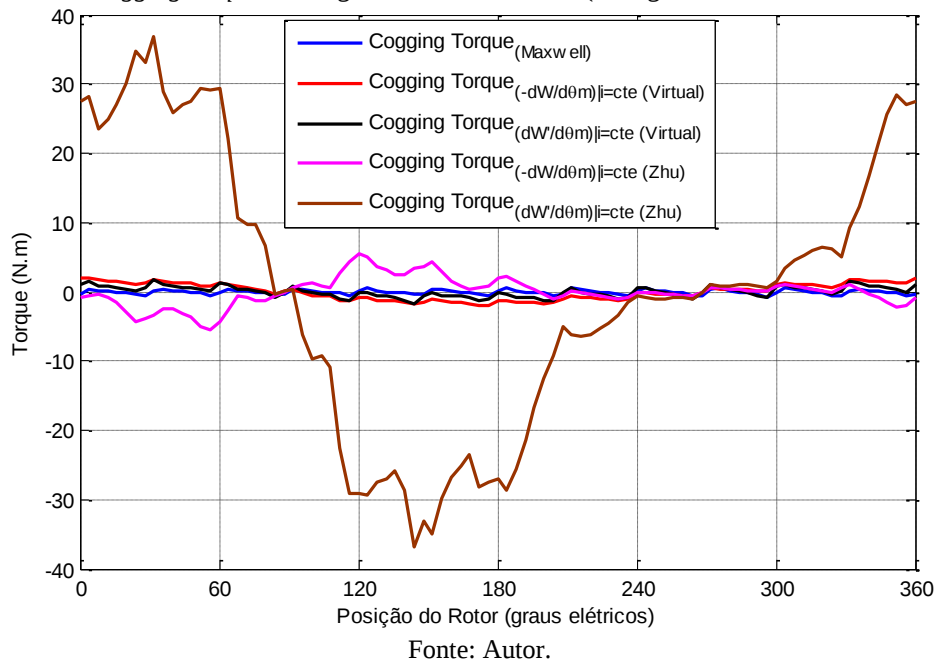
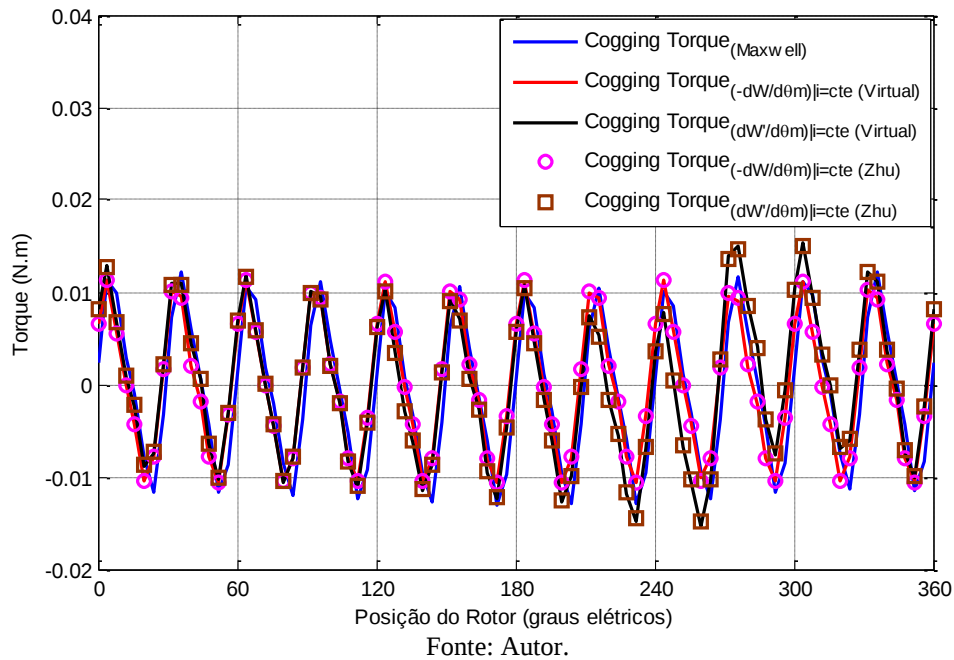


Figura 4.61 – *Cogging torque* em carga no estudo de caso 3 (carregamento com correntes constantes).



Sendo assim, o valor médio do *cogging torque* em carga, como é proposto por Chu e Zhu (2013b), não só está incorreto como também não está de acordo com a saliência magnética equivalente no estator explicada pelos próprios autores. Essa é a mesma razão pela qual o Método dos Tensores de Maxwell resulta em um valor médio diferente de zero quando empregado para avaliar o *cogging torque* em carga usando o Método de Permeabilidade Fixa. A justificativa para o valor médio ser diferente de zero reside no fato de que a interação entre o campo magnético devido às correntes e o campo magnético proveniente dos ímãs produz um campo girante que afeta a malha de permeabilidade magnética nos dentes do estator. Como resposta, surgem alguns pontos de saturação nas sapatas dos dentes criando a “saliência magnética equivalente”, mostrada entre a Figura 4.62 e a Figura 4.64 para a aplicação do MPF convencional e entre a Figura 4.65 e a Figura 4.67 para a aplicação do MPF melhorado.

Figura 4.62 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina do caso 1 com o MPF convencional.

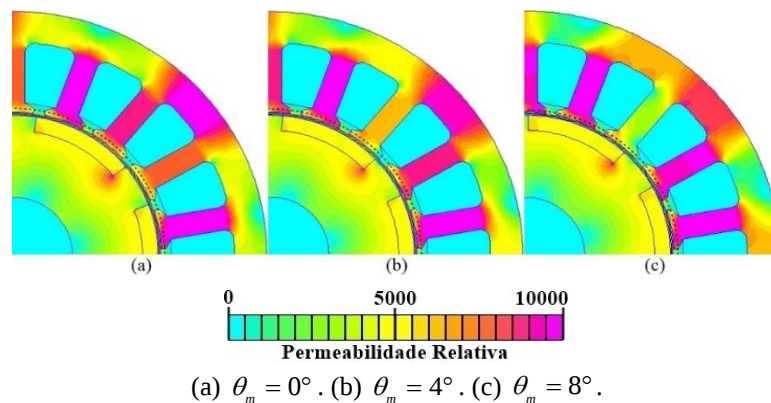
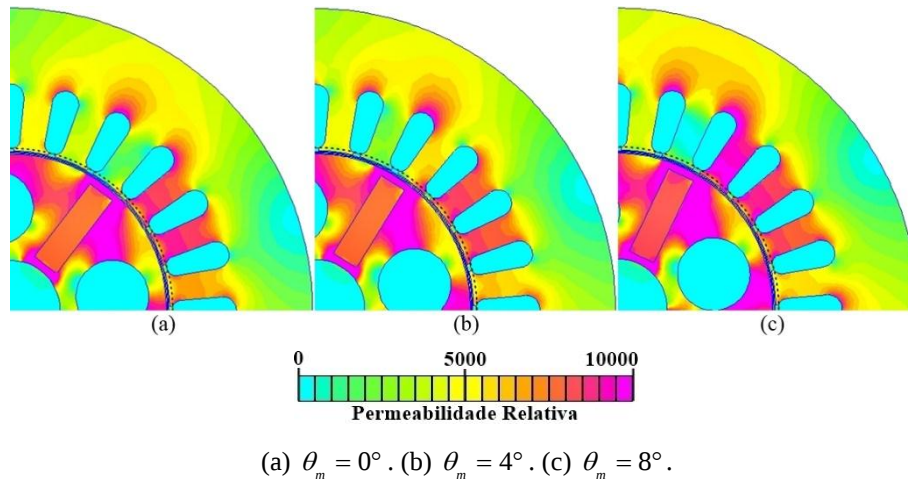
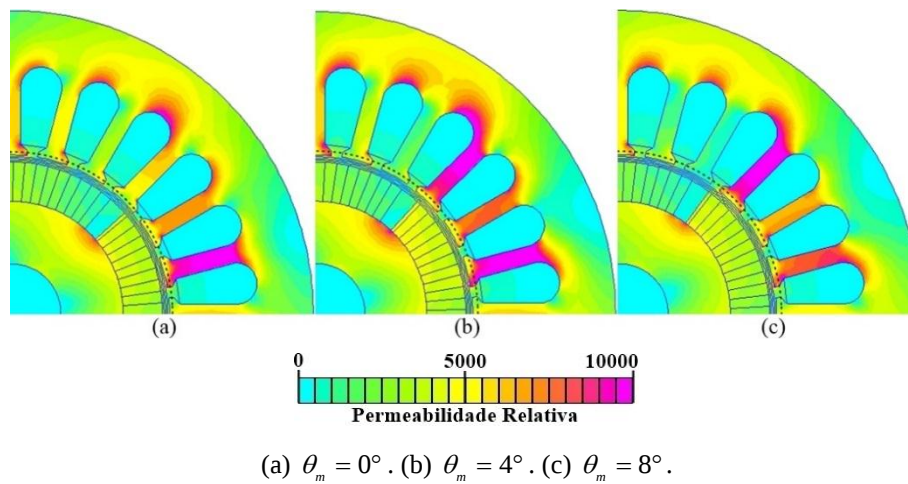


Figura 4.63 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina do caso 2 com o MPF convencional.



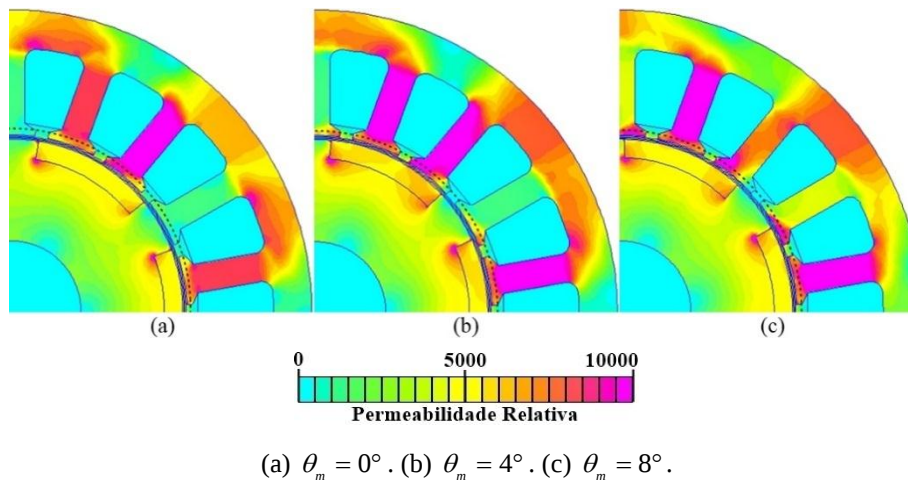
Fonte: Autor

Figura 4.64 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina do caso 3 com o MPF convencional.



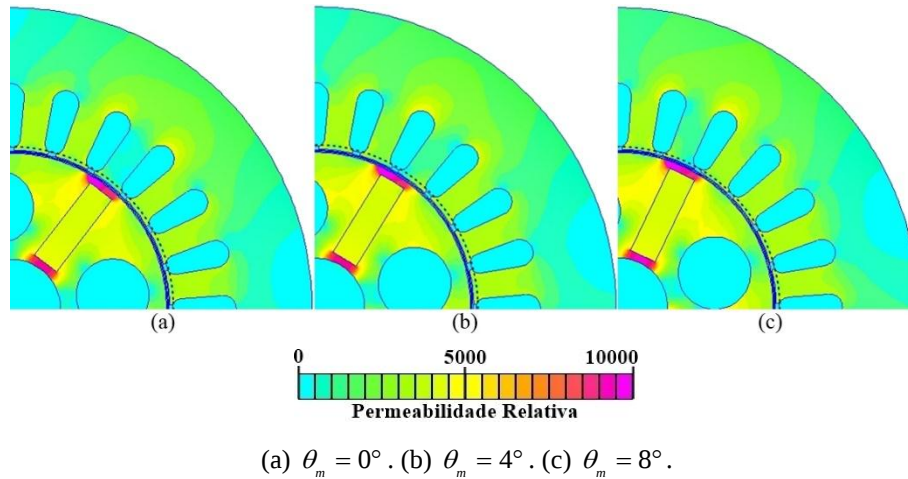
Fonte: Autor

Figura 4.65 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina do caso 1 com o MPF melhorado.



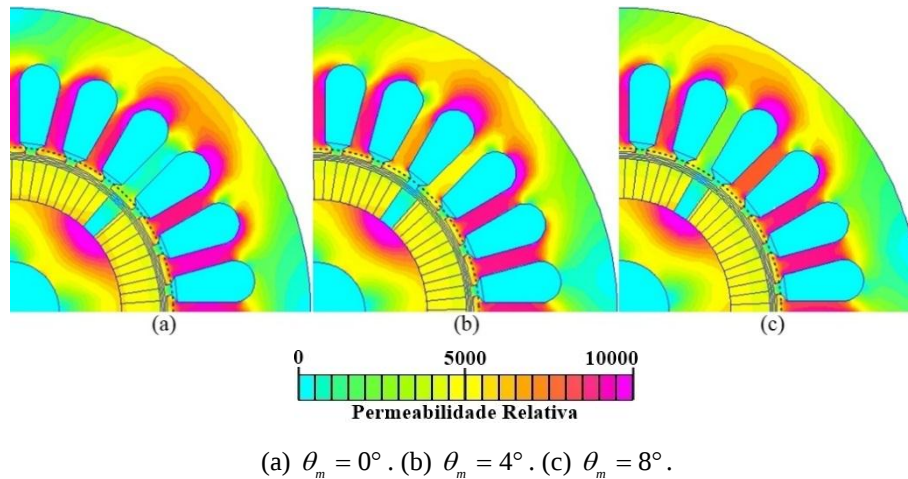
Fonte: Autor.

Figura 4.66 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina do caso 2 com o MPF melhorado.



Fonte: Autor.

Figura 4.67 – Distribuição da permeabilidade no interior da máquina do caso 3 com o MPF melhorado



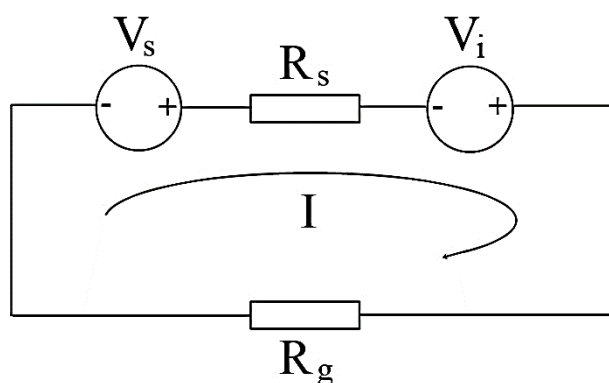
Fonte: Autor.

O que parece ser controverso em Chu e Zhu (2013b) é que, embora os autores tenham ilustrado que a distribuição da densidade de fluxo magnético da máquina apresentada está devidamente separada para as contribuições dos ímãs e das correntes com o auxílio do Método de Permeabilidade Fixa, eles rejeitam os resultados do Método dos Tensores de Maxwell baseado na distribuição da densidade de fluxo que mostraram estar correta. Os autores justificam a sua rejeição baseando-se no fato de que a simulação  $(FP, PM)$ , em que se tem apenas os ímãs como fonte de fluxo magnético, ou seja, que não tem atuação das correntes, deve se comportar exatamente como a simulação sem carga, ou seja, a simulação em vazio. A fonte da confusão de Chu e Zhu (2013b) é que tanto na simulação em vazio quanto na simulação  $(FP, PM)$  são realizadas com correntes iguais a zero, mas para o sistema em vazio, não existe

outro campo magnético, a não ser o dos ímãs, que atue na máquina para mudar a permeabilidade dos materiais em cada passo, tornando a permeabilidade livre para mudar à medida que o fluxo e a energia dos ímãs mudam. Claro, isso também torna o sistema conservativo, respeitando a lei de conservação de energia. Mesmo que na simulação (*FP,PM*) as correntes sejam iguais a zero, o campo magnético imposto na simulação é proveniente dos ímãs e das correntes e não torna a permeabilidade dos materiais livre para mudar à medida que o fluxo e a energia dos ímãs mudam. Na verdade, a saliência magnética equivalente no estator, proposta por Chu e Zhu (2013b), prova o valor médio não-zero do *cogging torque* em carga e o valor médio não-zero da energia magnética armazenada na simulação (*FP,PM*). Por outro lado, se não houver a saliência magnética equivalente, a energia não pode ser transferida do estator para o rotor e assim não haverá a produção de torque eletromagnético na máquina.

Os erros demonstrados em Chu e Zhu (2013a) e Chu e Zhu (2013b) levantam indícios de que aplicando-se o Método da Permeabilidade Fixa, convencional ou melhorado, não deve-se utilizar a variação da energia magnética armazenada ou da coenergia magnética do sistema para o cálculo do *cogging torque* em carga. Com isso, um estudo minucioso acerca da distribuição de energia e coenergia nas máquinas síncronas de ímãs permanentes com a aplicação do MPF é realizado. Observa-se a seguir a análise de um circuito elétrico simples e suas respectivas distribuições de corrente e potência fazendo analogia ao circuito magnético simplificado de um motor e suas respectivas distribuições de fluxo e energia, como mostra a Figura 4.68.

Figura 4.68 – Análise de um circuito elétrico fazendo analogia ao circuito magnético simplificado da máquina síncrona de ímãs permanentes.



Fonte: Autor.

Note que  $V_s$  é a fonte análoga aos ímãs,  $V_i$  é a fonte análoga às correntes,  $R_s$  é a resistência análoga a relutância dos ímãs na máquina,  $R_g$  é a resistência análoga a relutância

do entreferro e  $I$  é a corrente total no circuito análoga ao fluxo magnético total na máquina em carga. Neste caso, desprezou-se a relutância dos materiais ferromagnéticos, isto é, considerou-se a sua permeabilidade magnética infinita.

Observando-se o circuito apresentado na Figura 4.68 é possível verificar que:

$$V = IR \quad (4.22)$$

$$I = \frac{V}{R} \quad (4.23)$$

$$I = \frac{(V_i + V_s)}{(R_g + R_s)} \quad (4.24)$$

$$I = \frac{V_i}{(R_g + R_s)} + \frac{V_s}{(R_g + R_s)} \quad (4.25)$$

$$I = I_i + I_s \quad (4.26)$$

Note que  $I_i$  é a corrente análoga ao fluxo magnético que tem como fonte apenas as correntes que circulam nas bobinas da máquina e  $I_s$  é a corrente análoga ao fluxo magnético que tem como fonte apenas os ímãs no rotor da máquina. A partir da analogia proposta, pode-se concluir que a linearização do problema magnético tem como prioridade a distribuição de fluxos no sistema, onde a soma dos fluxos de cada análise independente é igual ao fluxo total do circuito.

Calculando-se a potência total no circuito elétrico análoga à energia total do circuito magnético, tem-se que:

$$P = VI \quad (4.27)$$

$$P = (V_i + V_s) \cdot (I_i + I_s) \quad (4.28)$$

$$P = V_i I_i + V_i I_s + V_s I_i + V_s I_s \quad (4.29)$$

$$P = I_i^2 (R_g + R_s) + 2I_i I_s (R_g + R_s) + I_s^2 (R_g + R_s) \quad (4.30)$$

Aplicando-se o teorema da sobreposição de fontes no circuito, ao “desligar”  $V_s$ ,  
consequentemente  $I_s = 0$  e então:

$$P_i = (V_i + V_s^0) \cdot (I_i + I_s^0) \quad (4.31)$$

$$P_i = V_i I_i \quad (4.32)$$

$$P_i = [I_i (R_g + R_s)] I_i \quad (4.33)$$

$$P_i = I_i^2 (R_g + R_s) \quad (4.34)$$

Ao “desligar”  $V_i$ , consequentemente  $I_i = 0$  e então:

$$P_s = (V_i^0 + V_s) \cdot (I_i^0 + I_s) \quad (4.35)$$

$$P_s = V_s I_s \quad (4.36)$$

$$P_s = [I_s (R_g + R_s)] I_s \quad (4.37)$$

$$P_s = I_s^2 (R_g + R_s) \quad (4.38)$$

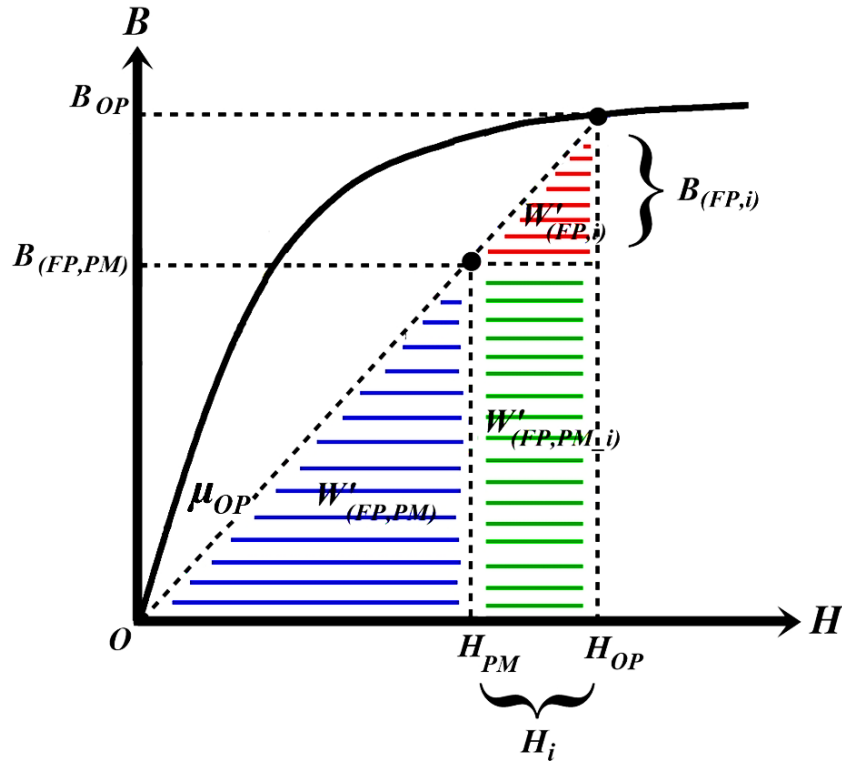
Analisando-se (4.30), (4.34) e (4.38), tem-se que:

$$P \neq P_i + P_s \quad (4.39)$$

$$I_i^2 (R_g + R_s) + 2I_i I_s (R_g + R_s) + I_s^2 (R_g + R_s) \neq I_i^2 (R_g + R_s)_i + I_s^2 (R_g + R_s) \quad (4.40)$$

Portanto, linearizado o problema e empregando-se o teorema da sobreposição de fontes, tem-se que a potência total no circuito é diferente da soma das potências de cada análise independente. Em analogia com o circuito magnético, pode-se concluir que a linearização do problema não permite uma distribuição correta e adequada das quantidades de energia na máquina. De modo semelhante, analisa-se a curva  $B$ - $H$  de um material ferromagnético hipotético após a aplicação do MPF, como mostra a Figura 4.69.

Figura 4.69 – Curva  $B$ - $H$  de um material ferromagnético hipotético após a aplicação do MPF.



Fonte: Autor.

Nota-se com a Figura 4.69 que a aplicação do MPF prioriza a distribuição de densidades de fluxo magnético no material, ver (4.41) e (4.42). Porém, não prioriza a distribuição de energia magnética armazenada e coenergia magnética, ver (4.43) e (4.44).

$$H_{OP} = H_{PM} + H_i \quad (4.41)$$

$$B_{OP} = B_{(FP,PM)} + B_{(FP,i)} \quad (4.42)$$

$$W'_{OP} \neq W'_{(FP,PM)} + W'_{(FP,i)} \quad (4.43)$$

$$W'_{OP} = W'_{(FP,PM)} + W'_{(FP,i)} + W'_{(FP,PM\_i)} \quad (4.44)$$

Note que  $W'_{OP}$  é a coenergia magnética total quando o material encontra-se excitado pelas duas fontes de fluxo magnético, ímãs e correntes;  $W'_{(FP,PM)}$  é a coenergia magnética quando o material encontra-se excitado apenas pelos ímãs como fonte de fluxo magnético;  $W'_{(FP,i)}$  é a coenergia magnética quando o material encontra-se excitado apenas pelas correntes nas bobinas como fonte de fluxo magnético; e  $W'_{(FP,PM\_i)}$  é a parcela de coenergia que falta na coenergia magnética total quando soma-se as coenergias provenientes de cada análise independente após a linearização do material e a aplicação do teorema da sobreposição de fontes. De modo análogo, ocorre com a energia magnética armazenada do material.

Portanto, os erros demonstrados em Chu e Zhu (2013a) e Chu e Zhu (2013b) e os resultados obtidos no presente trabalho dão indícios de que o Método do Trabalho Virtual e o método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu apresentam falhas no cálculo do *cogging torque* em carga quando associados ao Método da Permeabilidade Fixa, este que promove a distribuição de fluxo magnético na máquina de forma apropriada no processo de linearização, ao passo que a energia não é devidamente distribuída mesmo no método melhorado. Sendo assim, o Método dos Tensores de Maxwell mostra-se mais adequado quando associado ao MPF, ainda que apresentando valor médio diferente de zero, justamente por trabalhar com a distribuição de fluxo magnético em contraposição aos demais métodos apresentados que calculam o torque e suas parcelas a partir da energia magnética armazenada e da coenergia do sistema.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÕES

#### 5.1 Considerações Finais

A principal contribuição deste trabalho está na verificação de qual método, dentre aqueles de maior relevância no meio científico quando combinado ao Método dos Elementos Finitos (MEF) e ao Método da Permeabilidade Fixa (MPF), é o mais apropriado para calcular o *cogging torque* em carga nas máquinas síncronas de ímãs permanentes no rotor. Dentre os métodos analisados estão o Método dos Tensores de Maxwell, o Método do Trabalho Virtual e o método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu. Todas as simulações foram conduzidas implementando-se o MEF e o MPF com o auxílio do *software* FEMM (*Finite Element Method Magnetics*) e em seguida aplicando-se os métodos em análise com o objetivo de verificar a validade de cada um deles em diferentes topologias de rotor e formas de acionamento, o que ainda não havia sido feito na literatura especializada.

Com base nos resultados obtidos a partir da análise de três estudos de casos, referentes as diferentes topologias da máquina síncrona de ímãs permanentes (ímãs semi-enterrados, ímãs enterrados longitudinalmente e ímãs montados na superfície do rotor) e alimentadas por diferentes formas de acionamento (correntes senoidais e quadradas), notou-se que durante a quarta etapa do MPF em que se tem apenas os ímãs como fonte de fluxo magnético ( $FP, PM$ ), mesmo não havendo correntes circulando nas bobinas das máquinas, em todos os casos ocorreu que  $dW'_{(FP, PM)} / d\theta_m \neq -dW_{(FP, PM)} / d\theta_m$ , ou seja,  $dW_{in(FP, PM)} / d\theta_m \neq 0$ . Embora os três métodos em estudo sejam bem difundidos, o Método do Trabalho Virtual e o método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu apresentaram resultados bastante discrepantes entre si e incoerentes com o princípio da conservação de energia, quando implementados com o MEF e o MPF

Independentemente do tipo de acionamento, desde que tivessem níveis de carregamento eletromagnético próximos, os resultados para o *cogging torque* em carga obtidos apresentaram comportamentos semelhantes, tanto em forma de onda como em valor médio. Observou-se ainda que os valores médios obtidos em todos os métodos foram diferentes de zero, o que levou a questionar o que é afirmado em Chu e Zhu (2013b) sobre o valor médio do *cogging torque* na máquina síncrona de ímãs permanentes na condição de carga. O único caso em que a discrepância dos resultados mostrou-se menos acentuada foi na máquina síncrona com ímãs

montados na superfície do rotor devido ao grande entreferro equivalente observado pelo estator e ao baixo carregamento eletromagnético.

A partir de um estudo minucioso acerca do método proposto em Chu e Zhu (2013a), verificou-se que considerações errôneas sobre a variação da energia de entrada, a variação da energia magnética armazenada e o valor médio do *cogging torque* foram feitas em Chu e Zhu (2013b), o que gerou suspeitas quanto a credibilidade do método. Em contrariedade ao que foi afirmado pelos autores, a saliência magnética equivalente no estator, proposta por eles mesmos, prova o valor médio não-zero do *cogging torque* em carga e o valor médio não-zero da energia magnética armazenada na simulação (*FP, PM*). No entanto, se não existir a saliência magnética equivalente, a energia não pode ser transferida do estator para o rotor e consequentemente não haverá a produção de torque eletromagnético na máquina.

Por meio da análise de um circuito elétrico simples fazendo analogia com o circuito magnético simplificado da máquina síncrona de ímãs permanentes e da análise da curva *B-H* de um material ferromagnético hipotético, verificou-se que o Método da Permeabilidade Fixa não permite a distribuição correta e adequada das quantidades de energia no sistema mesmo no método melhorado. Como o MPF privilegia a distribuição de fluxo magnético na máquina, o mesmo mostrou-se mais adequado quando associado ao Método dos Tensores de Maxwell, em contraposição ao Método do Trabalho Virtual e ao método de W. Q. Chu e Z. Q. Zhu que calculam o torque e suas parcelas a partir da energia magnética armazenada e da coenergia do sistema.

No que diz respeito às sugestões propostas para continuidade da pesquisa, pode-se listar:

- A formulação analítica de  $dW_{in}/d\theta_m$  para ilustrar a interação entre as ranhuras do estator e os ímãs com base na topologia do rotor, especialmente no arranjo dos ímãs.
- A investigação do mecanismo de produção da chamada “saliência magnética equivalente” no estator da máquina.
- O desenvolvimento de um possível método que seja compatível ao MPF e avalie o circuito da máquina pelo ponto de vista das energias e coenergias magnéticas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBASZADEH, K.; ALAM, F. R. **On-Load Field Component Separation in Surface-Mounted Permanent-Magnet Motors Using an Improved Conformal Mapping Method.** *Magnetics IEEE Transactions on*, vol. 52, pp. 1-12, 2011.

AYDIN, M.; ZHU, Z. Q. **Minimization of Cogging Torque in Axial-Flux Permanent-Magnet Machines: Design Concepts.** *IEEE Trans. Magn.*, vol. 43, no. 9, pp. 3614–2622, Sep. 2007.

AZAR, Z.; ZHU, Z. Q. Influence of Electric Loading and Magnetic Saturation on Cogging Torque, Back-EMF and Torque Ripple of PM Machines. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 48, n. 10, p. 2650–2658, 2012.

BIANCHI, N.; BOLOGNANI, S. **Magnetic Models of Saturated Interior Permanent Magnet Motors Based on Finite Element Analysis.** Conference Record of 1998 IEEE Industry Applications Conference. Thirty-Third IAS Annual Meeting (Cat. No.98CH36242). *Anais...*1998

BIANCHI, N.; BOLOGNANI, S. **Design Techniques for Reducing The Cogging Torque in Surface-Mounted PM Motors.** *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 38, no. 5, pp. 1259–1265, Sep./Oct. 2002.

CHABCHOUB, M.; SALAH, I. BEN. **PMSM Cogging Torque Reduction: Comparison Between Different Shapes of Magnet.** 2012 First International Conference on Renewable Energies and Vehicular Technology. *Anais...*2012

CHAI, F.; LIANG, P. **Analytical Method for Iron Losses Reduction in Interior Permanent Magnet Synchronous Motor.** *Magnetics IEEE Transactions on*, vol. 51, pp. 1-4, 2015.

CHANG, L.; EASTHAM, A. R. **Permanent Magnet Synchronous Motor: Finite Element Torque Calculations.** Conference Record of the IEEE Industry Applications Society Annual Meeting,. *Anais...*1989

CHAPMAN, S. J. **Fundamentos de Máquinas Elétricas.** 5° ed. [s.l.] McGraw-Hill, 2013.

CHAU, K. T.; CHAN, C. C. Overview of Permanent-Magnet Brushless Drives for Electric and

Hybrid Electric Vehicles. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 55, n. 6, p. 2246–2257, 2008.

CHU, W. Q.; ZHU, Z. Q. On-Load Cogging Torque Calculation in Permanent Magnet Machines. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 49, n. 6, p. 2982–2989, 2013a.

CHU, W. Q.; ZHU, Z. Q. Average Torque Separation in Permanent Magnet Synchronous Machines Using Frozen Permeability. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 49, n. 3, p. 1202–1210, 2013b.

CONCER, G. E. **Projeto de Motor de Ímã Permanente Utilizando Ferrite na Configuração de Ímãs Enterrados**. [s.l.] Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.

DORREL, D. G.; POPESCU, M. **Odd Stator Slot Numbers in Brushless DC Machines—An Aid to Cogging Torque Reduction**. *IEEE Trans. Magn.*, vol. 47, no. 10, pp. 3012–3015, Oct. 2011.

DOSIEK, L.; PILLAY, P. **Cogging Torque Reduction in Permanent Magnet Machines**. *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 43, no. 6, pp. 1565–1571, Nov.-Dec. 2007.

DURRER, A. J. P. **Análise do Campo Magnético de um Motor de Ímã Permanente no Rotor Utilizando o Método dos Elementos Finitos**. [s.l.] Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, 2007.

FEI, W.; LUK, P. C. K. **Investigation of Torque Characteristics in a Novel Permanent Magnet Flux Switching Machine With an Outer-Rotor Configuration**. *Magnetics IEEE Transactions on*, vol. 50, pp. 1-10, 2014.

FITZGERALD, A. E. **Máquinas Elétricas**. 6º ed. [s.l.] McGraw-Hill, 2006.

GIERAS, J.; WING, M. **Permanent Magnet Motor Technology**. [s.l.] Dekker, Marcel, 2002.

HANSELMAN, D. C. **Brushless Permanent-Magnet Motor Design**. [s.l.] McGraw-Hill, 1994.

HANSELMAN, D. C. **Effect of Skew, Pole Count and Slot Count On Brushless Motor**

**Radial Force, Cogging Torque and Back EMF.** Inst. Electr. Eng. Proc.—Electr. Power Appl., vol. 144, no. 5, pp. 325–330, 1997.

HENDERSHOT, J. R.; MILLER, T. J. E. **Design of Brushless Permanent-Magnet Motors.** [s.l.] Press, Oxford, 1994.

ISLAN, M. S.; SEBASTIAN, T. **Issues in Reducing The Cogging Torque of Mass-Produced Permanent-Magnet Brushless DC Motor.** IEEE Trans. Ind. Appl., vol. 40, no. 3, pp. 813–820, May-Jun. 2004.

JANG, S. M.; PARK, H. I. **Magnet Pole Shape Design of Permanent Magnet Machine for Minimization of Torque Ripple Based on Electromagnetic Field Theory.** IEEE Trans. Magn., vol. 47, no. 10, pp. 3586–3589, Oct. 2011.

KOH, C. S.; SEOL, J. S. **New Cogging-Torque Reduction Method for Brushless Permanent-Magnet Motors.** IEEE Trans. Magn., vol. 39, no. 6, pp. 3503–3506, Nov. 2003.

KOSOW, I. L. **Máquinas Eléctricas e Transformadores.** 4° ed. [s.l.] Prentice-Hall, 1982.

KRAUSE, P. C. **Analysis of Electric Machinery and Drive Systems.** 3° ed. [s.l.] IEEE Press, 2013.

KUMAR, N. E.; RAGAVAN, K. **Separation of torque components using Frozen Permeability and Maxwell Stress Tensor.** Transportation Electrification Conference and Expo (ITEC) 2017 IEEE, pp. 720-723, 2017.

LATEB, R.; TAKORABET, N. **Effect of Magnet Segmentation on The Cogging Torque in Surface-Mounted Permanent-Magnet Motors.** IEEE Trans. Magn., vol. 42, no. 3, pp. 442–445, Mar. 2006.

LI, T.; SLEMON, G. **Reduction of Cogging Torque in Permanent Magnet Motors.** IEEE Trans. Magn., vol. MAG-24, no. 6, pp. 2901–2903, Nov. 1988.

LI, G. J.; ZHU, Z. Q. **Demagnetization of Modular Surface Mounted Permanent Magnet Machines.** Electrical Machines (ICEM) 2016 XXII International Conference on, pp. 702-708, 2016.

LUKANISZUN, M.; JAGIELA, M. **Optimization of Permanent Magnet Shape for Minimum Cogging Torque Using a Genetic Algorithm**. IEEE Trans. Magn., vol. 40, no. 2, pt. 2, pp. 1228–1231, Mar. 2004.

MILLER, T. J. E. **Brushless Permanent-Magnet and Reluctance Motor Drives**. [s.l.] Press, Oxford University, 1989.

MIYAMASU, M.; AKATSU, K. **Efficiency Comparison Between Brushless DC Motor and Brushless AC Motor Considering Driving Method and Machine Design**. IECON 2011 - 37th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society. **Anais...**2011

PANG, Y.; ZHU, Z. Q. **Cogging Torque in Cost-Effective Surface-Mounted Permanent-Magnet Machines**. IEEE Trans. Magn., vol. 47, no. 9, pp. 2269–2276, Sep. 2011.

PAULA, G. T. **Influência da Saturação no Torque da Máquina Síncrona de Ímã Permanente no Rotor**. [s.l.] Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, 2013.

PAULA, G. T. **Cálculo da Força Contra Eletromotriz em Máquinas Síncronas com Ímãs na Superfície do Rotor**. [s.l.] Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, 2016.

PAULA, G. T.; ALMEIDA, T. E. P. **On-Load Back EMF of PMSM Using Maxwell Stress Tensor**. IEEE Trans. Magn., vol. 54, no. 7, pp. 1–15, Jul. 2018.

PERRINE, R. C. **Design Handbook for PM Motors and Tachometers: Electrical and Magnetic Design**. [s.l.] Magna Physics Publishing, 2000.

POPESCU, M.; DORREL, D. **Instantaneous Electromagnetic Torque/Force Estimation in Electrical Motors Using The Finite Element Method - A Review**. [s.l.: s.n.].

POPESCU, M.; MILLER, T. J. E. Improved Finite Element Computations of Torque in Brushless Permanent Magnet Motors. **IEE Proceedings - Electric Power Applications**, v. 152, n. 2, p. 271–276, 2005.

PRADO, R. D. E. A. **Desenvolvimento de um Sistema de Ensaio de Máquinas Brushless DC**. [s.l.] Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Escola de Engenharia

Elétrica, Mecânica e de Computação, 2016.

**RUWER, S. G. Projeto Eletromagnético de um Motor Síncrono com Ímãs Permanentes para Aplicação Espacial em Rodas de Reação de Satélites.** [s.l.] Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2015.

**SCHMITZ, C. Projeto e Otimização de Motores BLDC de Ímãs Permanentes Superficiais.** [s.l.] Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, 2017.

**STRAHAN, R. J. Energy Conversion by Nonlinear Permanent Magnet Machines. IEEE Proceedings - Electric Power Applications**, v. 145, n. 3, p. 193–198, 1998.

**SUNG, S. J.; PARK, S. J. Cogging Torque of Brushless DC Motors Due to the Interaction Between the Uneven Magnetization of a Permanent Magnet and Teeth Curvature. IEEE Transactions on Magnetics**, v. 47, n. 7, p. 1923–1928, 2011.

**TEIXEIRA, F. H. P. Metodologia para Projeto, Construção e Ensaios em Máquina Síncrona de Ímã Permanente - MSIP.** [s.l.] Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, 2006.

**ZARATE, S.; ESCALADA, A. J. Extended DQ Model of a Permanent Magnet Synchronous Machine by Including Magnetic Saturation and Torque Ripple Effects.** 2017 IEEE International Workshop of Electronics, Control, Measurement, Signals and their Application to Mechatronics (ECMSM). **Anais...**2017

**ZHU, Z. Q.; JIANG, S. Z. Analytical Methods for Minimizing Cogging Torque in Permanent-Magnet Machines.** IEEE Trans. Magn., vol. 45, no. 4, pp. 2023–2031, Apr. 2009.

**ZHU, Z. Q; CHEN, J. T. Influence of Stator Asymmetry on Cogging Torque of Permanent Magnet Brushless Machines.** IEEE Trans. Magn., vol. 44, no. 11, pp. 3851–3854, Nov. 2008.

**ZHU, Z. Q.; HOWE, D. Influence of Design Parameters On Cogging Torque in Permanent Magnet Machines.** IEEE Trans. Energy Convers, vol. 15, no. 4, pp. 407–412, Dec. 2000.

**ZHU, Z. Q; HOWE, D. Reduction of Cogging Torque in Interior-Magnet Brushless Machines.** IEEE Trans. Magn., vol. 39, no. 5, pp. 3238–3240, Sep. 2003.

## APÊNDICE A – ALGORITMOS DAS SIMULAÇÕES

Como relatado ao longo do texto, o FEMM é utilizado no presente trabalho para a implementação do MEF e do MPF na análise dos três estudos de casos da máquina síncrona de ímãs permanentes no rotor, *software* que permite a automatização de seus processos de simulação por meio de *scripts* fundamentados na linguagem LUA. Nas seções a seguir são apresentados os códigos de programação das simulações em vazio, em carga com correntes senoidais e em carga com correntes quadradas da máquina do estudo de caso 1, de modo análogo foram realizadas as simulações das máquinas dos estudos de casos 2 e 3.

### A.1 Simulação em Vazio

Segue o *script* fundamentado na linguagem LUA para a simulação da máquina síncrona de ímãs permanentes no rotor em vazio do estudo de caso 1:

```
-- carrega a geometria a ser estudada
mydir="./"
open(mydir .. "zhu.fem")

-- salva um arquivo temporário para não alterar o arquivo original
mi_saveas(mydir .. "temp.fem")

-- variáveis
entreferro = 0;
estator = 1;
rotor = 2;
bobinas = 3;
imas = 4;

numero_polos = 6;
par_polos = numero_polos/2;
raio_entreferro = 30.625;
raio_dente = 31.5;

-- faz as correntes em cada circuito ser zero, pois interessa apenas o fluxo concatenado pelos ímãs
mi_modifycircprop("A",1,0);
mi_modifycircprop("B",1,0);
mi_modifycircprop("C",1,0);
```

```
-- mostra o Lua console e assim podemos ver o programa em progresso
showconsole()
```

```
-- move o rotor através de um número fixado de passos
-- incrementa e salva o fluxo concatenado de cada passo relacionado a uma posição do rotor
```

```
data = {};
steps = 90;
```

```
for k = 1,(steps+1) do
```

```
    mi_saveas(mydir .. "temp.fem")
```

```
    print((k-1) .. "/" .. steps);
```

```
    data[k]={};
```

```
    data[k][1] = (k-1)*360/par_polos/steps;
```

```
    mi_saveas(mydir .. "temp_" .. (k-1) .. ".fem")
```

```
    mi_analyze(1);
```

```
    mi_loadsolution();
```

```
-- coleta o fluxo concatenado em cada fase
```

```
v1,v2,data[k][2] = mo_getcircuitproperties("A");
```

```
v1,v2,data[k][3] = mo_getcircuitproperties("B");
```

```
v1,v2,data[k][4] = mo_getcircuitproperties("C");
```

```
-- calcula o cogging torque
```

```
mo_groupselectblock(rotor);
```

```
mo_groupselectblock(imas);
```

```
data[k][5] = mo_blockintegral(22);
```

```
mo_clearblock();
```

```
-- calcula a energia e co-energia de cada região
```

```
mo_groupselectblock(entreferro);
```

```
data[k][6] = mo_blockintegral(2);
```

```
data[k][7] = mo_blockintegral(17);
```

```
mo_clearblock();
```

```
mo_groupselectblock(estator);
```

```
data[k][8] = mo_blockintegral(2);
```

```
data[k][9] = mo_blockintegral(17);
```

```
mo_clearblock();
```

```
mo_groupselectblock(rotor);
```

```
data[k][10] = mo_blockintegral(2);
```

```
data[k][11] = mo_blockintegral(17);
```

```
mo_clearblock();
```

```
mo_groupselectblock(bobinas);
```

```
data[k][12] = mo_blockintegral(2);
```

```
data[k][13] = mo_blockintegral(17);
```

```
mo_clearblock();
```

```

mo_groupselectblock(imas);
data[k][14] = mo_blockintegral(2);
data[k][15] = mo_blockintegral(17);
mo_clearblock();

-- arquivo que escreve a densidade de fluxo normal e tangencial para cada posição do
rotor
fp=openfile(mydir .. "BnBt-sem-carga_" .. data[k][1] .. ".txt","w")
for j = 0,360 do
x = raio_entreferro*cos(j*pi/180);
y = raio_entreferro*sin(j*pi/180);
A,Bx,By = mo_getpointvalues(x,y);
Bn = Bx*cos(j*pi/180) + By*sin(j*pi/180);
Bt = -(-Bx*sin(j*pi/180) + By*cos(j*pi/180));
write(fp,j," ",Bx," ",By," ",Bn," ",Bt,"\n")
end
closefile(fp);

mo_close();
mi_close();

-- incrementa a posição do rotor e dos ímãs
open(mydir .. "temp.fem")
mi_selectgroup(rotor);
mi_selectgroup(imas);
mi_moverotate(0, 0, 360/par_polos/steps, 4);
mi_clearselected();

end

-- arquivo que escreve os resultados para análise (ângulo mecânico, fluxos concatenados em
cada fase, cogging torque, energia e coenergia em cada região da máquina)
fp=openfile(mydir .. "flux-results-sem-carga.txt","w")
for k = 1,(steps+1) do
write(fp,data[k][1]," ",data[k][2]," ",data[k][3]," ",data[k][4]," ",data[k][5],"
",data[k][6]," ",data[k][7]," ",data[k][8]," ",data[k][9]," ",data[k][10],"
",data[k][11],"",data[k][12],"",data[k][13],"",data[k][14],"",data[k][15],"")
end
closefile(fp);
messagebox("FIM DA SIMULAÇÃO");

```

## A.2 Simulação em Carga – Correntes Senoidais

Segue o *script* fundamentado na linguagem LUA para a simulação da máquina síncrona de ímãs permanentes no rotor em carga com correntes senoidais do estudo de caso 1:

```

-- carrega a geometria a ser estudada
mydir="./"
open(mydir .. "zhu.fem")

-- salva um arquivo temporário para não alterar o arquivo original
mi_saveas(mydir .. "temp.fem")

-- variáveis
entreferro = 0;
estator = 1;
rotor = 2;
bobinas = 3;
imas = 4;

numero_polos = 6;
par_polos = numero_polos/2;
raio_entreferro = 30.625;
raio_dente = 31.5;

corrente = 4;
beta = -30;

-- garante que as correntes em cada circuito sejam zero
mi_modifycircprop("A",1,0);
mi_modifycircprop("B",1,0);
mi_modifycircprop("C",1,0);

-- mostra o Lua console e assim podemos ver o programa em progresso
showconsole()

-- move o rotor através de um número fixado de passos
-- incrementa e salva o fluxo concatenado de cada passo relacionado a uma posição do rotor
data = {};
steps = 90;
for k = 1,(steps+1) do

    mi_saveas(mydir .. "temp.fem")

    print((k-1) .. "/" .. steps);
    data[k]={};
    data[k][1] = (k-1)*360/par_polos/steps;

    -- acionando as fases corretamente
    mi_modifycircprop("A",1,corrente*cos((data[k][1]*par_polos*pi/180)+(beta*pi/180))
    );
    mi_modifycircprop("B",1,corrente*cos((data[k][1]*par_polos*pi/180)+(beta*pi/180)-
    (120*pi/180)));

```

```

mi_modifcircuitprop("C",1,corrente*cos((data[k][1]*par_polos*pi/180)+(beta*pi/180)
+(120*pi/180)));

mi_saveas(mydir .. "temp_" .. (k-1) .. ".fem")
mi_analyze(1);
mi_loadsolution();

-- coleta o fluxo concatenado em cada fase
v1,v2,data[k][2] = mo_getcircuitproperties("A");
v1,v2,data[k][3] = mo_getcircuitproperties("B");
v1,v2,data[k][4] = mo_getcircuitproperties("C");

-- calcula o torque total
mo_groupselectblock(rotor);
mo_groupselectblock(imas);
data[k][5] = mo_blockintegral(22);
mo_clearblock();

-- calcula a energia e co-energia de cada região
mo_groupselectblock(entreferro);
data[k][6] = mo_blockintegral(2);
data[k][7] = mo_blockintegral(17);
mo_clearblock();
mo_groupselectblock(estator);
data[k][8] = mo_blockintegral(2);
data[k][9] = mo_blockintegral(17);
mo_clearblock();
mo_groupselectblock(rotor);
data[k][10] = mo_blockintegral(2);
data[k][11] = mo_blockintegral(17);
mo_clearblock();
mo_groupselectblock(bobinas);
data[k][12] = mo_blockintegral(2);
data[k][13] = mo_blockintegral(17);
mo_clearblock();
mo_groupselectblock(imas);
data[k][14] = mo_blockintegral(2);
data[k][15] = mo_blockintegral(17);
mo_clearblock();

-- arquivo que escreve a densidade de fluxo normal e tangencial para cada posição do
rotor
fp=openfile(mydir .. "BnBt-com-carga_" .. data[k][1] .. ".txt","w")
for j = 0,360 do
x = raio_entreferro*cos(j*pi/180);
y = raio_entreferro*sin(j*pi/180);
A,Bx,By = mo_getpointvalues(x,y);

```

```

Bn = Bx*cos(j*pi/180) + By*sin(j*pi/180);
Bt = -(-Bx*sin(j*pi/180) + By*cos(j*pi/180));
write(fp,j," ",Bx," ",By," ",Bn," ",Bt,"\n")
end
closefile(fp);

mo_close();
mi_close();

----- Frozen PM
open(mydir .. "temp_" .. (k-1) .. ".fem")
mi_saveas(mydir .. "temp_PM_" .. (k-1) .. ".fem")

-- garante que as correntes em cada circuito sejam zero, avaliar apenas a contribuição
dos ímas permanentes
mi_modifycircprop("A",1,0);
mi_modifycircprop("B",1,0);
mi_modifycircprop("C",1,0);

mi_setprevious("temp_" .. (k-1) .. ".ans",2);
mi_analyze(1);
mi_loadsolution();

-- coleta o fluxo concatenado em cada fase
v1,v2,data[k][16] = mo_getcircuitproperties("A");
v1,v2,data[k][17] = mo_getcircuitproperties("B");
v1,v2,data[k][18] = mo_getcircuitproperties("C");

-- calcula o cogging torque
mo_groupselectblock(rotor);
mo_groupselectblock(imas);
data[k][19] = mo_blockintegral(22);
mo_clearblock();

-- calcula a energia e co-energia de cada região
mo_groupselectblock(entreferro);
data[k][20] = mo_blockintegral(2);
data[k][21] = mo_blockintegral(17);
mo_clearblock();
mo_groupselectblock(estator);
data[k][22] = mo_blockintegral(2);
data[k][23] = mo_blockintegral(17);
mo_clearblock();
mo_groupselectblock(rotor);
data[k][24] = mo_blockintegral(2);
data[k][25] = mo_blockintegral(17);
mo_clearblock();

```

```

mo_groupselectblock(bobinas);
data[k][26] = mo_blockintegral(2);
data[k][27] = mo_blockintegral(17);
mo_clearblock();
mo_groupselectblock(imas);
data[k][28] = mo_blockintegral(2);
data[k][29] = mo_blockintegral(17);
mo_clearblock();

-- arquivo que escreve a densidade de fluxo normal e tangencial para cada posição do
rotor
fp=openfile(mydir .. "BnBt-com-carga-PM_" .. data[k][1] .. ".txt","w")
for j = 0,360 do
x = raio_entreferro*cos(j*pi/180);
y = raio_entreferro*sin(j*pi/180);
A,Bx,By = mo_getpointvalues(x,y);
Bn = Bx*cos(j*pi/180) + By*sin(j*pi/180);
Bt = -(-Bx*sin(j*pi/180) + By*cos(j*pi/180));
write(fp,j," ",Bx," ",By," ",Bn," ",Bt,"\n")
end
closefile(fp);

mo_close();
mi_close();

-- incrementa a posição do rotor e dos ímãs
open(mydir .. "temp.fem")
mi_selectgroup(rotor);
mi_selectgroup(imas);
mi_moverotate(0, 0, 360/par_polos/steps, 4);
mi_clearselected();

end

-- arquivo que escreve os resultados para análise (ângulo mecânico, fluxos concatenados em
cada fase, torque total, energia e co-energia de cada região)
fp=openfile(mydir .. "flux-results-com-carga_" .. beta .. ".txt","w")
for k = 1,(steps+1) do
write(fp,data[k][1]," ",data[k][2]," ",data[k][3]," ",data[k][4]," ",data[k][5],"
",data[k][6]," ",data[k][7]," ",data[k][8]," ",data[k][9]," ",data[k][10],"
",data[k][11],"",data[k][12],"",data[k][13],"",data[k][14],"",data[k][15],"")
end

fp=openfile(mydir .. "flux-results-com-carga_PM_" .. beta .. ".txt","w")
for k = 1,(steps+1) do

```

```

        write(fp,data[k][1]," ",data[k][16],"",data[k][17],"",data[k][18],"",data[k][19],"
        ",data[k][20],"",data[k][21],"",data[k][22],"",data[k][23],"",data[k][24],"
        ",data[k][25],"",data[k][26],"",data[k][27],"",data[k][28],"",data[k][29],"\\n")
    end
    closefile(fp);
    messagebox("FIM DA SIMULAÇÃO");

```

### A.3 Simulação em Carga – Correntes Quadradas

Segue o *script* fundamentado na linguagem LUA para a simulação da máquina síncrona de ímãs permanentes no rotor em carga com correntes quadradas do estudo de caso 1:

```

-- carrega a geometria a ser estudada
mydir="./"
open(mydir .. "zhu.fem")

-- salva um arquivo temporário para não alterar o arquivo original
mi_saveas(mydir .. "temp.fem")

-- variáveis
entreferro = 0;
estator = 1;
rotor = 2;
bobinas = 3;
imas = 4;

numero_polos = 6;
par_polos = numero_polos/2;
raio_entreferro = 30.625;
raio_dente = 31.5;

corrente = 4;
beta = -30;

-- garante que as correntes em cada circuito sejam zero
mi_modifycircprop("A",1,0);
mi_modifycircprop("B",1,0);
mi_modifycircprop("C",1,0);

-- mostra o Lua console e assim podemos ver o programa em progresso
showconsole()

-- move o rotor através de um número fixado de passos
-- incrementa e salva o fluxo concatenado de cada passo relacionado a uma posição do rotor

```

```

data = {};
steps = 90;
for k = 1,(steps+1) do

    mi_saveas(mydir .. "temp.fem")

    print((k-1) .. "/" .. steps);
    data[k]={};
    data[k][1] = (k-1)*360/par_polos/steps;

    -- acionando as fases corretamente
    if ( k < 9 ) then
        mi_modifycircprop("A",1,corrente);
        mi_modifycircprop("B",1,-corrente);
        mi_modifycircprop("C",1,0);
    end
    if ( k > 8 ) and ( k < 24 ) then
        mi_modifycircprop("A",1,corrente);
        mi_modifycircprop("B",1,0);
        mi_modifycircprop("C",1,-corrente);
    end
    if ( k > 23 ) and ( k < 39 ) then
        mi_modifycircprop("A",1,0);
        mi_modifycircprop("B",1,corrente);
        mi_modifycircprop("C",1,-corrente);
    end
    if ( k > 38 ) and ( k < 54 ) then
        mi_modifycircprop("A",1,-corrente);
        mi_modifycircprop("B",1,corrente);
        mi_modifycircprop("C",1,0);
    end
    if ( k > 53 ) and ( k < 69 ) then
        mi_modifycircprop("A",1,-corrente);
        mi_modifycircprop("B",1,0);
        mi_modifycircprop("C",1,corrente);
    end
    if ( k > 68 ) and ( k < 84 ) then
        mi_modifycircprop("A",1,0);
        mi_modifycircprop("B",1,-corrente);
        mi_modifycircprop("C",1,corrente);
    end
    if ( k > 83 ) then
        mi_modifycircprop("A",1,corrente);
        mi_modifycircprop("B",1,-corrente);
        mi_modifycircprop("C",1,0);
    end
end

```

```

mi_saveas(mydir .. "temp_" .. (k-1) .. ".fem")
mi_analyze(1);
mi_loadsolution();

-- coleta o fluxo concatenado em cada fase
v1,v2,data[k][2] = mo_getcircuitproperties("A");
v1,v2,data[k][3] = mo_getcircuitproperties("B");
v1,v2,data[k][4] = mo_getcircuitproperties("C");

-- calcula o torque total
mo_groupselectblock(rotor);
mo_groupselectblock(imas);
data[k][5] = mo_blockintegral(22);
mo_clearblock();

-- calcula a energia e co-energia de cada região
mo_groupselectblock(entreferro);
data[k][6] = mo_blockintegral(2);
data[k][7] = mo_blockintegral(17);
mo_clearblock();
mo_groupselectblock(estator);
data[k][8] = mo_blockintegral(2);
data[k][9] = mo_blockintegral(17);
mo_clearblock();
mo_groupselectblock(rotor);
data[k][10] = mo_blockintegral(2);
data[k][11] = mo_blockintegral(17);
mo_clearblock();
mo_groupselectblock(bobinas);
data[k][12] = mo_blockintegral(2);
data[k][13] = mo_blockintegral(17);
mo_clearblock();
mo_groupselectblock(imas);
data[k][14] = mo_blockintegral(2);
data[k][15] = mo_blockintegral(17);
mo_clearblock();

-- arquivo que escreve a densidade de fluxo normal e tangencial para cada posição do
rotor
fp=openfile(mydir .. "BnBt-com-carga_" .. data[k][1] .. ".txt","w")
for j = 0,360 do
x = raio_entreferro*cos(j*pi/180);
y = raio_entreferro*sin(j*pi/180);
A,Bx,By = mo_getpointvalues(x,y);
Bn = Bx*cos(j*pi/180) + By*sin(j*pi/180);
Bt = -(-Bx*sin(j*pi/180) + By*cos(j*pi/180));
write(fp,j," ",Bx," ",By," ",Bn," ",Bt,"\n")

```

```

end
closefile(fp);

mo_close();
mi_close();

----- Frozen PM
open(mydir .. "temp_" .. (k-1) .. ".fem")
mi_saveas(mydir .. "temp_PM_" .. (k-1) .. ".fem")

-- garante que as correntes em cada circuito sejam zero, avaliar apenas a contribuição
dos ímas permanentes
mi_modifycircprop("A",1,0);
mi_modifycircprop("B",1,0);
mi_modifycircprop("C",1,0);

mi_setprevious("temp_" .. (k-1) .. ".ans",2);
mi_analyze(1);
mi_loadsolution();

-- coleta o fluxo concatenado em cada fase
v1,v2,data[k][16] = mo_getcircuitproperties("A");
v1,v2,data[k][17] = mo_getcircuitproperties("B");
v1,v2,data[k][18] = mo_getcircuitproperties("C");

-- calcula o cogging torque
mo_groupselectblock(rotor);
mo_groupselectblock(imas);
data[k][19] = mo_blockintegral(22);
mo_clearblock();

-- calcula a energia e co-energia de cada região
mo_groupselectblock(entreferro);
data[k][20] = mo_blockintegral(2);
data[k][21] = mo_blockintegral(17);
mo_clearblock();
mo_groupselectblock(estator);
data[k][22] = mo_blockintegral(2);
data[k][23] = mo_blockintegral(17);
mo_clearblock();
mo_groupselectblock(rotor);
data[k][24] = mo_blockintegral(2);
data[k][25] = mo_blockintegral(17);
mo_clearblock();
mo_groupselectblock(bobinas);
data[k][26] = mo_blockintegral(2);
data[k][27] = mo_blockintegral(17);

```

```

mo_clearblock();
mo_groupselectblock(imas);
data[k][28] = mo_blockintegral(2);
data[k][29] = mo_blockintegral(17);
mo_clearblock();

-- arquivo que escreve a densidade de fluxo normal e tangencial para cada posição do
rotor
fp=fopen(mydir .. "BnBt-com-carga-PM_" .. data[k][1] .. ".txt","w")
for j = 0,360 do
x = raio_entreferro*cos(j*pi/180);
y = raio_entreferro*sin(j*pi/180);
A,Bx,By = mo_getpointvalues(x,y);
Bn = Bx*cos(j*pi/180) + By*sin(j*pi/180);
Bt = -(-Bx*sin(j*pi/180) + By*cos(j*pi/180));
write(fp,j," ",Bx," ",By," ",Bn," ",Bt,"\n")
end
closefile(fp);
mo_close();
mi_close();

-- incrementa a posição do rotor e dos ímãs
open(mydir .. "temp.fem")
mi_selectgroup(rotor);
mi_selectgroup(imas);
mi_moverotate(0, 0, 360/par_polos/steps, 4);
mi_clearselected();

end

-- arquivo que escreve os resultados para análise (ângulo mecânico, fluxos concatenados em
cada fase, torque total, energia e co-energia de cada região)
fp=fopen(mydir .. "flux-results-com-carga_" .. beta .. ".txt","w")
for k = 1,(steps+1) do
write(fp,data[k][1]," ",data[k][2]," ",data[k][3]," ",data[k][4]," ",data[k][5],"
",data[k][6]," ",data[k][7]," ",data[k][8]," ",data[k][9]," ",data[k][10],"
",data[k][11],"",data[k][12],"",data[k][13],"",data[k][14],"",data[k][15],"")
end

fp=fopen(mydir .. "flux-results-com-carga_PM_" .. beta .. ".txt","w")
for k = 1,(steps+1) do
write(fp,data[k][1]," ",data[k][16],"",data[k][17],"",data[k][18],"",data[k][19],"
",data[k][20],"",data[k][21],"",data[k][22],"",data[k][23],"",data[k][24],"
",data[k][25],"",data[k][26],"",data[k][27],"",data[k][28],"",data[k][29],"")
end
closefile(fp);
messagebox("FIM DA SIMULAÇÃO");

```