UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
FACULDADE DE FILOSOFIA – FAFIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA (PPGFIL)

DIOGO CONCEIÇÃO DA SILVA

A IRRACIONALIDADE NUMÉRICA NA FILOSOFIA DA MATEMÁTICA DE WITTGENSTEIN

GOIÂNIA/GO
FEVEREIRO/2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
FACULDADE DE FILOSOFIA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[x] Dissertação   [ ] Tese   [ ] Outro*:_____________

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

DIOGO CONCEIÇÃO DA SILVA

3. Título do trabalho

A IRRACIONALIDADE NUMÉRICA NA FILOSOFIA DA MATEMÁTICA DE WITTGENSTEIN ”

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM   [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **Diogo Conceicao Da Silva**, **Discente**, em 05/09/2024, às 11:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Andre Da Silva Porto**, **Professor do Magistério Superior**, em 06/09/2024, às 08:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4748631** e o código CRC **558F7CD6**.

Referência: Processo nº 23070.024932/2024-03 SEI nº 4748631

DIOGO CONCEIÇÃO DA SILVA

A IRRACIONALIDADE NUMÉRICA NA FILOSOFIA DA MATEMÁTICA DE WITTGENSTEIN

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Filosofia, da Faculdade de Filosofia, da Universidade Federal de Goiás (UFG), como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Área de concentração: Filosofia.

Linha de pesquisa: Lógica e Filosofia da Linguagem

Orientador: Prof. Dr. André da Silva Porto.

GOIÂNIA/GO

FEVEREIRO/2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Silva, Diogo Conceição da
A IRRACIONALIDADE NUMÉRICA NA FILOSOFIA DA MATEMÁTICA DE WITTGENSTEIN [manuscrito] / Diogo Conceição da Silva. - 2024.
XLVIII, 48 f.

Orientador: Prof. Dr. André da Silva Porto.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Faculdade de Filosofia (Fafil), Programa de Pós-Graduação em Filosofia, Goiânia, 2024.

Inclui siglas.

1. Wittgenstein. 2. filosofia da matemática. 3. irracionalidade numérica. 4. regras matemáticas. I. Porto, André da Silva, orient. II. Título.

CDU 1

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

FACULDADE DE FILOSOFIA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

.

Ata nº 09 da sessão de Defesa de Dissertação de DIOGO CONCEIÇÃO DA SILVA, que confere o título de Mestre do Programa de Pós Graduação em Filosofia, na área de concentração em Filosofia.

Aos dezessete dias do mês de maio do ano de dois mil e vinte e quatro, a partir das 9 horas, por vídeoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **" A IRRACIONALIDADE NUMÉRICA NA FILOSOFIA DA MATEMÁTICA DE WITTGENSTEIN "** **.** Os trabalhos foram instalados pelo Orientador Professor Doutor André da Silva Porto (FAFIL) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Tiago Tranjan (UNIFESP), membro titular externo; **cuja participação ocorreu através de videoconferência,** Professora Doutora Araceli Rosich Soares Velloso (FAFIL), membro titular interno. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho . A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor André da Silva Porto (FAFIL), Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos dezessete dias do mês de maio do ano de dois mil e vinte e quatro.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Andre Da Silva Porto**, **Professor do Magistério Superior**, em 17/05/2024, às 14:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Araceli Rosich Soares Velloso**, **Professor do Magistério Superior**, em 20/05/2024, às 11:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Fabio Ferreira De Almeida**, **Coordenador de Pós-Graduação**, em 15/08/2024, às 13:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4566601** e o código CRC **A2C93DE4**.

Referência: Processo nº 23070.024932/2024-03 SEI nº 4566601

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Professor Dr. André Porto, pela disponibilidade e prontidão em me orientar e apoiar frente aos vários questionamentos e incertezas que me ocorreram durante a composição deste trabalho.

Agradeço à professora Dra. Araceli Velloso pela atenção, críticas e comentários acerca do meu trabalho ao longo desses anos no programa de pós-graduação.

Agradeço ao Departamento da Faculdade de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal de Goiás, pela oportunidade de cursar este Mestrado em Filosofia.

Finalmente, agradeço à Capes pela bolsa que me foi concedida para o desenvolvimento dessa pesquisa.

Dedico esta dissertação aos meus familiares e amigos.
Dedico ao meu Professor e Orientador Dr. André Porto.

É justo que muito custe o que muito vale.
Tereza d’Ávila

RESUMO

O objetivo deste trabalho é entender a "irracionalidade numérica" a partir da ótica da filosofia da matemática de Wittgenstein. Na concepção wittgensteiniana não se pode compreender um número irracional apenas como um tipo de número a mais no conjunto dos Números Reais. Para Wittgenstein, até podemos utilizar a "irracionalidade numérica" para o cálculo, o equívoco está em dar o mesmo tratamento lógico semelhante àquele dado a um número inteiro para um "número" que seja "irracional". Para apresentar essa questão, fez-se necessário entender o modo como Wittgenstein compreende as regras matemáticas, separando-as em regras matemáticas geométricas e regras matemáticas aritméticas, no esforço de apontarmos os principais temas envoltos nessa abordagem. Ressaltamos o modo grego de entender a questão, pois é justamente a compreensão grega que mais se aproxima da forma como Wittgenstein entende a "irracionalidade numérica". O exemplo que expõe toda a problemática de nosso trabalho é a relação entre "o lado do quadrado" e a "diagonal do quadrado", que a partir da aplicação do algoritmo de Euclides, essa relação não nos apresenta um estalão comum, pois o algoritmo entra em *looping*. Esse *looping* do algoritmo de Euclides é, ao mesmo tempo, demonstração da "irracionalidade numérica", bem como um método de aproximação de $\sqrt{2}$, a qual não produz em seu resultado um número inteiro, mas uma sequência infinita de pares de cotas, superiores e inferiores àquela magnitude geométrica.

Palavras-chave: Wittgenstein; filosofia da matemática; irracionalidade numérica; regras matemáticas.

ABSTRACT

The objective of this work is to understand “numerical irrationality” from the perspective of Wittgenstein's philosophy of mathematics. In the Wittgensteinian conception, an irrational number cannot be understood as just one other type of number within the set of Real Numbers. For Wittgenstein, we can even use “numerical irrationality” for calculation, the mistake is in giving the same treatment similar to that of an integer to a “number” which would be “irrational”. To introduce theses questions, it was necessary to understand how Wittgenstein construes mathematical rules, separating them into geometric mathematical rules and arithmetic mathematical rules, in order to point out the main themes involved in this approach. We emphasize the Greek way of understanding the issue, as it is precisely the Greek understanding which comes closest to the way Wittgenstein understands “numerical irrationality”. The example which shows the entire problem of our work is the relationship between “the side of the square” and the “diagonal of the square”, which, after applying the Euclid algorithm, does not yield a common standard, as the algorithm enters into a loop. This looping of Euclid's algorithm is both a demonstration of “numerical irrationality” and provides a method of approximation of $\sqrt{2}$, which does not produce an integer in its result but pairs of upper and lower bounds to the geometrical magnitude.

Keywords: Wittgenstein; philosophy of mathematics; numerical irrationality; mathematical rules.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ano de 1918 marca um momento singular na vida de Wittgenstein, pois ele abandona Cambridge e, consequentemente, a pesquisa filosófica, e só regressaria no início do ano de 1929. Houve, portanto, um intervalo de 11 longos anos, nos quais o filósofo se absteve de lecionar cursos na universidade e também abandonou a pesquisa filosófica. Com o seu regresso, Wittgenstein, em meados de fevereiro de 1929, após breves anotações sobre o modo como se sentia, escreve sua primeira questão filosófica. Registra em seu caderno, o que mais tarde os estudiosos wittgensteinianos denominariam como sendo o *Manuscrito 105*, uma questão que permearia sua mente por longos anos: a irracionalidade numérica.

Para o autor, a questão da irracionalidade numérica se mostrava obscura, pois o tratamento que ela recebia da matemática tradicional, por contemporâneos seus em Cambridge, não lhe dava soluções convincentes para a questão, mas sim tornavam-na cada vez mais complexa. De modo preciso, a primeira frase que mencionamos do *Manuscrito 105* é a seguinte:

> É concebível um espaço que contenha apenas todos os pontos racionais, mas não os irracionais? E isso significa apenas: os números irracionais já não estão preconcebidos nos racionais? (Wittgenstein, MS-105, 2.2.29)

Essas questões apresentadas por Wittgenstein dirigem-se ao modo tradicional da matemática de compreender os números racionais. Para o filósofo, não fazia sentido concebê-los numa espécie de reta numérica, intercalados por números que seriam chamados de “irracionais”. Seu pensamento contrapõe-se à ideia das lacunas que se formavam na sequência de um número racional para o outro. Essa lacuna seria preenchida por um número dito “irracional”, como se no próprio ordenamento dos números racionais já estivessem prejulgados os “números irracionais”.

Para compreendermos a questão formulada por Wittgenstein sobre os irracionais, talvez seja útil a apresentação do pensamento de Godfrey Hardy, um contemporâneo de Wittgenstein em Cambridge, o qual assim apresenta a irracionalidade numérica:

> Somos assim levados a crer na existência de um ponto P, não um dos pontos racionais já construídos, e tal que $A_0P = x$, $x^2 = 2$; e (como o leitor se lembrará da álgebra elementar) escrevemos $x = \sqrt{2}$. E se Q é o ponto tal que $QA_0 = A_0P$, escrevemos $A_0Q = \sqrt{2}$. (Hardy, 1908, p. 6)

Hardy faz essa afirmação após uma exposição da compreensão matemática sobre os pontos na linha, ou reta, não serem todos racionais, uma vez que essa é a compreensão mais tradicional sobre a irracionalidade numérica, como veremos adiante em nosso trabalho. O ponto “$A_0Q = \sqrt{2}$” mostraria, para Hardy (1908, p. 6), haver pontos na reta real que não seriam pontos racionais:

> Qualquer ponto P na linha L que não é um ponto racional é chamado de ponto irracional. O comprimento A_0P é chamado de número irracional. (Hardy, 1908, p. 6)

Com essa afirmação, fica claro o modo como Hardy compreende a questão da irracionalidade numérica, sendo apenas uma parte do composto denominado “números reais”, que pode ser facilmente demonstrado pela reta real. Aqui está a questão a que Wittgenstein irá se opor, pois ele não compreende a irracionalidade numérica como um grupo numérico prefigurado na composição dos números reais.

Sem embargo, o modo como Wittgenstein está tentando abordar a questão da irracionalidade numérica não é algo bem recebido por seus contemporâneos e dentre eles destacamos o renomado matemático Bertrand Russell, o qual foi orientador de Wittgenstein, que questiona precisamente o papel da filosofia nessa reflexão. Para Russel, a matemática já teria respondido tais problemas que pairavam sobre a irracionalidade numérica e não haveria espaço para novas problematizações, pois o problema já havia sido posto e resolvido matematicamente. Conforme Russell, em sua abertura da palestra sobre a teoria do contínuo:

> A teoria do contínuo, com a qual nos ocuparemos nesta palestra, é, na maioria de seus refinamentos e desenvolvimentos, um assunto puramente matemático – muito bonito, muito importante e muito agradável, mas não estritamente falando, uma parte de filosofia. (Russell, 2009, p. 104).

Como vemos, o modo como Russell (2009, p. 104) quer apresentar a questão do contínuo exclui a filosofia da reflexão e, um pouco mais adiante em sua fala, ele dirá que “a base lógica da teoria é a única que pertence a filosofia”. Esse pensamento russelliano quer tirar do campo filosófico a questão, parece que os questionamentos da filosofia sobre a irracionalidade numérica, conforme esse autor, estão um tanto quanto obsoletos, sem contribuições expressivas. Tais proferimentos baseiam-se na arimetização da análise, ocorrida na segunda metade do século XIX, realizada inicialmente por Cauchy e Weierstrass. Logo, para Russell, não haveria nada mais para se fazer, pois a matemática já teria resolvido todas as inconsistências lógicas da irracionalidade numérica e seria uma perda de tempo voltar a essas questões.

Tradicionalmente, porém, esse é um tema que aparece na filosofia desde Zenão de Eleia, ou seja, excluir a filosofia dessa reflexão parece um pouco exagerado, principalmente porque temos o próprio Aristóteles dedicando-se à compreensão do contínuo. Numa visão claramente oposta à de Hardy, no trecho que mencionamos, na *Física* de Aristóteles o filósofo grego fala sobre a estrutura do contínuo, ou seja, não deixa a reflexão desse tema como algo particular dos matemáticos, pois toma para si a questão.

> […] nada que seja contínuo pode ser composto de 'indivisíveis': por exemplo, uma linha não pode ser composta de pontos, sendo a linha contínua e o ponto indivisível. Pois as extremidades de dois pontos não podem ser nem um (visto que de um indivisível não pode haver extremidade distinta de outra parte) nem juntos (visto que aquilo que não tem partes não pode ter extremidade, a extremidade e a coisa de que é a extremidade sendo distinta). (Aristóteles, 2017, p. 212).

Assim como Aristóteles, muitos foram os filósofos que se dedicaram ao estudo da teoria do contínuo, por isso parece estranho a proposta de Russell em colocar a filosofia em um lugar à parte nessa reflexão. Como o próprio Russell apresentou, por ser um argumento que possui sua base na lógica filosófica, acreditamos, neste trabalho, que aquilo que se edificou nessas bases é puramente filosófico, ou seja, toda a questão da irracionalidade numérica, desde a sua “descoberta”, é um tema de grande relevância para os filósofos, e não algo exclusivo para os matemáticos, ou seja, Wittgenstein dedicou-se a um tema central na compreensão do “contínuo” – a “irracionalidade numérica” – e por isso julgamos ser um tema relevante para a compreensão do pensamento do autor.

Nossa referência a Aristóteles não é um acaso, já que, como veremos adiante, é justamente a proposta grega que mais se aproxima do modo como Wittgenstein compreende a questão da “irracionalidade numérica”, uma vez que os gregos distinguiam aquilo que pertencia ao campo da linguagem geométrica daquilo que era do campo da linguagem aritmética. Para eles, havia uma divisão bem definida entre magnitudes e números, ou seja, para realizar medições utilizavam as magnitudes e, para contar, os números.

> Os gregos rigorosamente distinguiam números e magnitudes geométricas com base no fato de que na aritmética a unidade numérica não pode ser dividida, mas qualquer magnitude geométrica incluindo a unidade correspondente, pode ser dividida indefinidamente. (Tiles, 2004, p. 60).

Assim, percebemos a estrita divisão entre magnitudes e números, porque, após a falha na estrutura grega de comensurar o mundo a partir da matemática, ocorreu a "descoberta" da incomensurabilidade entre geometria e aritmética, ou seja, da chamada "irracionalidade numérica", compreendendo que esse esforço não gerou nada além de demonstrar a falha da razão. O próprio Aristóteles demonstra esse posicionamento em sua obra *Analíticos posteriores*, ao afirmar que:

> "[...] não podemos passar de um gênero ao outro. Não podemos demonstrar uma proposição geométrica por razão aritmética." (Aristóteles, 1987, p. 34).

Nesse texto de Aristóteles, fica evidente a distinção existente entre geometria e aritmética para o pensamento grego, que exclui qualquer possibilidade de se utilizar uma linguagem para provar a outra, ou seja, não há correlação. Wittgenstein compartilha dessa visão grega acerca da irracionalidade numérica, porém, a sua proposta se distingue pelo fato de considerar haver algo nessa correlação, o que, conforme apresentamos neste trabalho, só não será um número.

Com essa breve apresentação do problema da irracionalidade numérica, abrimos o nosso trabalho, na próxima seção, tratando da compreensão de Wittgenstein acerca das regras matemáticas. Para esse autor, uma regra matemática é uma asserção com valor atemporal, o que implica diretamente na sua aplicabilidade. Primeiramente, trataremos das regras matemáticas no contexto da aritmética e, em seguida, no contexto da geometria, pois esse será o pano de fundo de todo o nosso trabalho: a relação entre a geometria e a aritmética.

Na terceira seção, trazemos os gregos para a problemática, por ser a visão grega a que mais se aproxima do modo de Wittgenstein entender a questão da irracionalidade numérica. Ainda nesta seção, demonstramos como Wittgenstein compreende a relação entre geometria e aritmética, a qual será entendida como uma relação entre duas linguagens: entre a linguagem geométrica e a linguagem aritmética. Para estabelecer essa relação entre as duas linguagens, utilizamos o *Algoritmo de Euclides*, uma excelente ferramenta para se encontrar um estalão comum entre os referidos valores. Denominamos como encaixes perfeitos essa possibilidade de tradução exata entre as duas linguagens quando nos depararmos com um estalão comum.

Na última seção, tratamos dos problemas nos quais a aplicação do *Algoritmo de Euclides* não produz um estalão comum. Denominamos esses encaixes de encaixes "não-perfeitos", pois o algoritmo entra em um *looping* e não se encontra um estalão. Para os gregos, a falta de um estalão comum será entendida como a impossibilidade da relação. Já em Wittgenstein, vemos que esse *looping* indica que temos aí algo a ser compreendido, só não será um número, conforme seria esperado. Assim, adentramos na parte final do nosso estudo, pois buscamos apreender os problemas em volta da $\sqrt{2}$, que será o principal exemplo utilizado para a compreensão do modo como Wittgenstein entende a irracionalidade numérica.

2 A NOÇÃO DE REGRA MATEMÁTICA PARA WITTGENSTEIN

Nesta seção apresentamos como Wittgenstein compreende a regra matemática, uma vez que esse entendimento do autor contribui diretamente para as questões sobre a irracionalidade numérica propostas por ele. Para isso, primeiramente, trazemos a noção de regra matemática de um modo mais geral e, depois, apresentamos as regras matemáticas no contexto aritmético para, em seguida, analisarmos o contexto geométrico, sendo este último o que julgamos mais relevante para o presente trabalho.

2.1 A noção de regra matemática para Wittgenstein

No modo como apresentamos as questões acerca da irracionalidade numérica, é central a ideia de regra matemática, pois Wittgenstein considera que, na matemática, há um critério normativo, não há espaço para novos resultados na aplicação de uma regra matemática, já que tudo já estaria pré-determinado. O próprio filósofo nos diz que:

> Suponha que vejamos as proposições matemáticas como prescrições, e até mesmo as pronunciemos como tais? "Seja 25^2 = 625". (WITTGENSTEIN, 1983, p. 271)

Nesse trecho, podemos perceber a concepção que o filósofo possui sobre o caráter normativo das regras matemáticas, pois ele apresenta a questão chamando a nossa atenção para o modo como as regras funcionam, numa espécie de "mandamentos", uma vez que são prescrições que determinam como devemos proceder. Uma simples equação como "$25 \times 25 = 625$", para Wittgenstein, é na verdade uma norma, pois a obtenção do resultado é critério para se ter executado corretamente as regras de multiplicação. Em outras palavras, todas as vezes que uma pessoa calcular 25×25 deverá obter o resultado 625, caso contrário, terá calculado errado. Nossa tese sobre o caráter normativo da regra em Wittgenstein baseia-se principalmente em Porto (2023).

> [...] poderíamos dizer que no caso de suas "regras" (em oposição a proposições empíricas contingentes) seria totalmente enganoso chamá-las de asserções "meramente verdadeiras". "$200 + 200 = 400$" e "$25 \times 25 = 625$" não apenas por acaso provam "até agora" serem asserções corretas. São leis necessárias. Assim, segundo ele, a regra "$200 + 200 = 400$" estabelece um critério necessário para alguém sequer afirmar que alguma situação empírica envolveu "a reunião de 200 e 200 coisas" (digamos, maçãs): que aquela situação não poderia falhar em envolver 400 coisas no total.

No modo como Porto apresenta a concepção de Wittgenstein sobre as regras fica evidente o critério necessário que as regras possuem. Esse critério chancela aquela prescrição como sendo uma regra. Aqui, o fato de que alguém realiza a adição de "$200 + 200 =$" não é suficiente para o estabelecimento de uma regra, pois poderíamos nos deparar com alguém que calculasse errado. A questão central é que todas as vezes que alguém realizar a adição $200 + 200$ terá de alcançar como resultado o valor 400, pois o critério normativo não abre espaço para novos resultados.

Segundo Porto (2023), nos escritos de Wittgenstein podemos fazer uma distinção no modo como o filósofo se refere à ocorrência da regra matemática: regras matemáticas operacionais e regras matemáticas de aplicação. Essa distinção entre regras matemáticas operacionais e regras matemáticas de aplicação não é algo que Wittgenstein deixa claro, porém, em nosso trabalho, seguimos a tese de Porto para uma melhor compreensão do filósofo. Assim, são essas regras que normatizam os processos de cálculo, a obtenção do resultado em questão e a aplicação no mundo físico desses processos. Nas palavras do filósofo, podemos observar o modo operacional da regra matemática quando ele diz:

> Agora, é imaginável alguém seguir a regra corretamente e, no entanto, obter resultados diferentes em momentos diferentes na multiplicação de 15 × 13? Tudo depende de quais critérios se permite contar para o cumprimento correto da regra. Em matemática, o próprio resultado também é um critério para o cálculo correto. Aqui, então, é impensável que alguém siga a regra corretamente e produza diferentes padrões de multiplicação. (Wittgenstein, 1983, p. 393).

Não faz sentido na operação de uma multiplicação a obtenção de um resultado que não corresponda aos critérios já estabelecidos pela regra matemática daquela multiplicação. Tanto o resultado da operação "15×13" quanto o resultado de "25×25" são como que "predeterminados", sendo, respectivamente, 195 e 625, ou seja, qualquer obtenção de resultado diferente apenas indicará que o cálculo não foi realizado corretamente, não interferindo em nada na regra. Sendo mais específico, caso o resultado da multiplicação "15×13" não seja "195", o que aconteceu foi um erro no processo de cálculo, nada mais que isso, pois o próprio resultado é um critério para a operação correta do cálculo em questão.

O outro modo de ocorrência das regras matemáticas são as que possuem o caráter de aplicação, as quais normatizam a realização de cálculos, contagens e mensurações no mundo físico. Wittgenstein apresenta a multiplicação a partir de uma correlação empírica, na qual percebemos a clara aplicabilidade que a regra matemática em questão possui, a saber:

> A multiplicação poderia ser definida por um critério empírico. Se você tiver 16 fileiras de soldados, 19 em cada fileira, o resultado da multiplicação será o mesmo da soma. — Alguém se sente inclinado a dizer que se ele alcança um resultado diferente de tal e tal, então ele não pode querer dizer o mesmo com os sinais que normalmente queremos dizer com eles. "Se '$\times$' significa o mesmo, então 16×19 deve ter este resultado. (Wittgenstein, 1939, p. 80).

A aplicabilidade da regra matemática da multiplicação, no exemplo colocado por Wittgenstein, está em possibilitar a obtenção de um resultado a partir da observação de critérios empíricos, fornecendo, àquele que realiza o cálculo, um resultado preciso sem a necessidade da contagem unitária de cada indivíduo. A obtenção do resultado da multiplicação "$16 \times 19 = 304$" será o mesmo da somatória de todos os 304 indivíduos. No entanto, pensemos que, na contagem de certo batalhão, escolheu-se um cadete para contar a partir da correlação "$Linhas \times Colunas$" e outro cadete foi o responsável por contar cada soldado um por um. Passados alguns minutos, o cadete que fez a correlação das "$Linhas \times Colunas$" apresenta o resultado "304 soldados", já o que fez a contagem de um por um apresenta o resultado "302 soldados". Nesse exemplo, percebemos que na aplicação das regras matemáticas ocorrem, muitas vezes, falhas no processo de cálculo. O cadete que contou via processo de adição pode ter pulado dois soldados e não os colocou na sua contagem. Com isso, queremos enfatizar que não são os erros do processo de cálculo que julgam a regra matemática, em outras palavras, a ocorrência de um resultado inesperado não interfere em nada nos critérios de aplicação da regra, apenas demonstram que algo aconteceu de errado no processo.

2.2 Uma união entre dois conceitos

A partir dessa característica normativa apresentada pelo autor sobre a regra matemática, adentremos na relação apresentada por ele, a saber:

> Uma equação liga dois conceitos; para que agora eu possa passar de um para o outro (Wittgenstein, 1983, p. 297).

Voltemos à multiplicação já trabalhada aqui nesta seção, a equação "$25 \times 25 = 625$". No modo como o filósofo nos traz temos, de um lado, um conceito, "ser a reunião de 25 x 25 coisas", e, do outro, o conceito "ser 625 coisas". Logo, temos de ter, em ambos os lados, a descrição da mesma situação. Caso, por exemplo, alguém realize a reunião de "25 x 25 coisas", essa pessoa irá se deparar com "625 coisas". Assim, tanto a reunião de "25 x 25 coisas" quanto a reunião de "625 coisas", tem de se referir à mesma ocorrência, com diferenças apenas no nível da apresentação daquilo que está sendo descrito. Assim, Wittgenstein nos mostra que, em ambos os lados da equação, temos dois conceitos que tratam da mesma situação:

> […] a técnica da multiplicação estabelece conexões entre os conceitos. […] Com certeza é um movimento. Parece ser um movimento entre dois pontos estacionários; esses são os conceitos. [...] Gostaria de dizer: quando empregamos ora um, ora o outro lado da equação, estamos empregando dois lados do mesmo conceito. (Wittgenstein, 1983, p. 296).

Nesse trecho do filósofo, percebemos que, em uma operação, o que está de um lado, enquanto a operação em si, "25 x 25", e o que está do outro lado, costumadamente denominado de resultado, "625" descrevem a mesma ocorrência. Qualquer um pode se movimentar entre ambas as formas de apresentação e continuar lidando com a mesma situação, pois, se eu posso descrever uma ocorrência de "25 x 25 coisas", eu também posso descrever essa situação como "a reunião de 625 coisas". Nessa perspectiva está o modo como Wittgenstein compreende a equação, entendendo-a como a conexão de dois conceitos que podem ser usados na apresentação de uma mesma situação empírica.

> Pode-se dizer que a equação de 25^2 e 625 me deu um novo conceito. E a prova mostra qual é a posição em relação a essa igualdade. – "Dar um novo conceito" só pode significar introduzir um novo emprego de um conceito, uma nova prática. (WITTGENSTEIN, 1983, 432)

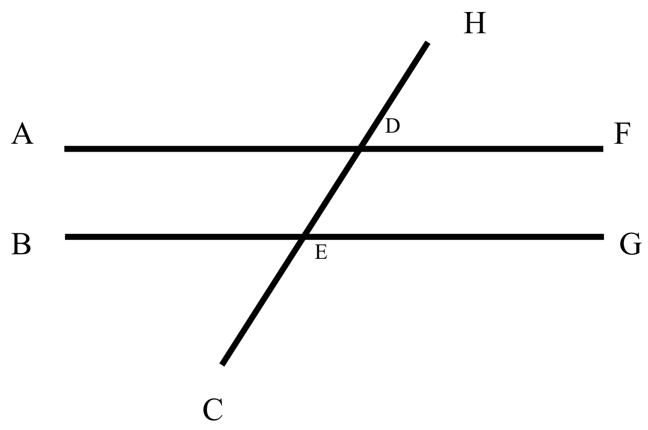
Assim, Wittgenstein apresenta que "25^2" e "625" são dois conceitos que se diferenciam, porém, ambos se conectam pela regra matemática da multiplicação. Uma vez que "25 x 25 = 625" e, conforme já nos foi demonstrado, o que se tem no exemplo que o autor nos expõe é uma diferença apenas no modo apresentação, diferem-se na perspectiva conceitual, mas, em relação à situação empírica, mantém-se o mesmo, pois ambos estão ligados pela asserção matemática de que "25 x 25" sempre terá como resultado "625".

2.3 Regras matemáticas no contexto da geometria

No pensamento de Wittgenstein acerca das regras matemáticas, deve-se destacar os exemplos geométricos empregados pelo filósofo, uma vez que são essas algumas das primeiras elucidações utilizadas na exposição de sua compreensão acerca das regras matemáticas. Buscamos, por meio desses exemplos colocados pelo próprio autor, uma melhor compreensão do modo como o filósofo desenvolve o significado de regras, o que já demostramos anteriormente como sendo a “conexão entre dois conceitos”. Observemos a reflexão de Wittgenstein acerca do teorema dos ângulos opostos.

> A proposição “ângulos correspondentes são iguais” significa que, se eles não forem iguais quando forem medidos, declararei a medição incorreta. (WITTGENSTEIN, 2005, p. 391)

Para melhor compreender o raciocínio que Wittgenstein nos apresenta, a questão da regra matemática acerca dos ângulos correspondentes, apresentamos um pouco mais o que vem a ser esses ângulos correspondentes. Sabe-se que todas as vezes que obtivermos duas retas paralelas e traçarmos uma terceira reta na diagonal, a qual possua intersecção com as duas anteriores, veremos o surgimento de oito ângulos correspondentes. Observemos a figura:



Sendo mais precisos, podemos elencar que os seguintes ângulos são correspondentes:

CEG = EDF

CEB = EDA

BED = ADH

GED = FDH

Com essa construção, percebemos como a regra funciona, porém, já não podemos afirmar se o exemplo desenhado possui mesmo ângulos correspondentes. Neste trabalho, não se utilizou um transferidor para medir os ângulos desenhados, quisemos apenas demonstrar a aplicação da regra. Assim, na maneira como Wittgenstein concebe essas identidades-regras, elas asseririam que, caso haja alguma aferição nos ângulos correspondentes e essa aferição distinguir algum ângulo do seu correspondente, ou seja, não encontrar o mesmo valor para que ambos se correspondam, o problema não estará ligado à regra, e sim à medição: ou as duas retas não são paralelas, ou as linhas não são retas, etc. Algum problema deve ter ocorrido no processo da averiguação ou na construção do exemplo.

Segundo essa concepção, não estamos afirmando que os ângulos concretamente sejam iguais; estamos afirmando que, se eles não forem iguais, então nossa figura não pode ser uma representação de dois ângulos correspondentes, pois a igualdade é uma condição necessária para termos desenhado a figura certa. Ou seja, a regra estabelece condições que precisam ser satisfeitas por medições empíricas. Podemos pensar, aqui, numa regra como estabelecendo uma conexão lógica entre os conceitos envolvidos, algo que poderíamos representar como:

"Ângulos correspondentes (a, b)" → a = b

Por outro lado, Wittgenstein normalmente pensa na regra em sua "versão contrapositiva":

$$\mathbf{a \neq b}$$
$$\neg\ (\mathbf{a} = \mathbf{b}) \rightarrow \neg\textbf{PODEM SER Ângulos correspondentes}\ (\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

Observando essas proposições, percebemos que a regra matemática deve ser pensada como uma lei necessária, ou seja, é algo que já está determinado no próprio conteúdo conceitual envolvido, pois é impensável a possibilidade da aplicação de novos casos. Com isso, vemos que, se uma figura for uma figura de ângulos correspondentes, então eles terão de ser iguais; se não forem iguais, eles não podem ser ângulos correspondentes. Vejamos, conforme o próprio autor nos coloca:

> Se considero a construção como meu critério, não posso de forma alguma verificar a divisão dos ângulos por medida. O caso é muito mais este: se a medição produz uma diferença, direi, a bússola está com defeito, não era uma linha reta etc. Pois a construção é agora meu padrão de acordo com o qual julgo a qualidade de uma medição. (Waismann, 1979, p. 205).

Nesse trecho de Wittgenstein, vemos a sua rejeição à ideia errônea de muitos, ao colocarem a medição empírica como critério para a demonstração da regra, uma vez que, caso haja diferença nos resultados obtidos na medição empírica dos ângulos, deve-se atribuir essa diferença ao processo de medição e não à regra. Caso a regra matemática necessitasse de validação por meio de demonstrações, ela não se sustentaria por si só, porque estaria sempre subjugada à qualidade da medição e demonstração utilizada, o que se torna algo totalmente absurdo frente à compreensão de regra demonstrada pelo autor.

3 A LINGUAGEM GEOMÉTRICA E A LINGUAGEM ARITMÉTICA CONFORME WITTGENSTEIN

No capítulo anterior, apresentamos como Wittgenstein trata a questão das regras matemáticas, as quais são de grande relevância na pesquisa que estamos elaborando nesta dissertação. O filósofo propõe que as regras matemáticas possuem um caráter normativo, ou seja, são asserções que funcionam como "mandamentos" que determinam o uso e os processos referentes àquela regra em questão. Além do caráter normativo das regras, também demonstramos como Wittgenstein compreende a relação estabelecida pela regra, sendo ela a união entre dois conceitos, pois, quando lidamos com a operação "$25 \times 25 = 625$", estamos lidando com duas formas de apresentação de um mesmo conceito: de um lado, temos o conceito "ser a reunião de 25×25 coisas" e, do outro lado da igualdade, o conceito "625 coisas". Acerca dos exemplos geométricos utilizados na última seção, não foram um acaso para o trabalho, haja vista que, na apresentação da questão sobre a irracionalidade numérica, é nos exemplos geométricos que a problematização de que estamos nos ocupando tornar-se-á clara.

Na presente seção, abordamos o modo como Wittgenstein trata a ideia da relação entre a geometria e a aritmética, pois, como apresentamos a seguir, Wittgenstein compreende essa relação com uma relação entre duas linguagens, ou seja, uma relação entre a linguagem geométrica e a linguagem aritmética. Para apresentarmos essa relação entre as duas linguagens, utilizamos regras que conectam a linguagem geométrica com a linguagem aritmética. Nos exemplos anteriores, usamos exemplos de regras ora puramente aritméticas ora puramente geométricas, agora, enfatizamos as regras mistas que misturam essas duas linguagens, as quais são as responsáveis por estabelecer a relação.

Um ponto que julgamos relevante para a compreensão do modo como Wittgenstein entende a "irracionalidade numérica" é o uso da palavra "medir". A partir da análise das "analogias enganadoras", um conceito encontrado no período maduro da filosofia de Wittgenstein que explicaremos a seguir, apresentaremos que ora se faz necessário o uso do termo "medir matematicamente" e ora o uso do termo "medir empiricamente", visto haver medições distintas, conforme mostramos nesta seção.

No contexto da relação entre as duas linguagens, distinguimos dois casos que surgem quando se estabelece a relação entre a linguagem geométrica e a linguagem aritmética. O primeiro caso é o encaixe perfeito entre as duas linguagens, nesse caso encontramos, tanto na linguagem geométrica como na aritmética, um correspondente que traduz, em "perfeito encaixe", de uma linguagem para a outra. Já o segundo caso corresponde aos encaixes em que essa tradução da linguagem geométrica para a aritmética não ocorre de maneira "perfeita". Como veremos, é nesse segundo caso que aparece a questão da assim chamada "irracionalidade numérica", no entanto, trataremos desses encaixes "não perfeitos" na próxima seção, reservando a esta a correlação entre a linguagem geométrica e a linguagem aritmética, a partir de exemplos que funcionam de forma "perfeita".

Para a exposição desses encaixes, "perfeitos" e "não perfeitos" na relação entre as duas linguagens, este trabalho apresenta o *Algoritmo de Euclides*, um bom instrumento para entendermos a correlação entre a linguagem geométrica e a aritmética. A partir desse algoritmo, podemos procurar por um "estalão" comum entre as referidas linguagens, ou, como apresentaremos, é na busca de um "encaixe perfeito" que nos deparamos com a "irracionalidade numérica". Para isso, o *Algoritmo de Euclides* é importante na exposição das questões a que estamos nos dedicando.

3.1 A relação entre as duas linguagens e a perspectiva grega

Nesta seção, apresentamos como Wittgenstein compreende a relação entre a geometria e a aritmética, uma relação que, para o nosso filósofo, ocorre no nível da linguagem, pois ele tratava a questão como a possibilidade de tradução de uma linguagem para a outra. O próprio Wittgenstein nos diz que:

> ...não importa como a prescrição [aritmética] [*Vorschriften*] seja formulada, quando eu a traduzo em notação geométrica, tudo é do mesmo tipo. (WITTGENSTEIN, 1975, p. 222)

Nesse trecho das *Philosophical Remarks*, Wittgenstein nos coloca que é possível realizarmos a tradução de uma prescrição aritmética para uma notação geométrica, ou, como enfocamos em nossa pesquisa, é possível realizarmos a tradução de uma asserção da linguagem aritmética para uma asserção no campo da linguagem geométrica. Em nosso trabalho, trazemos uma conexão que nos parece importante, estabelecida entre a forma que Wittgenstein compreende a relação entre geometria e aritmética – uma relação entre duas linguagens – e a forma como os gregos consideram – como dois domínios separados. Existem semelhanças entre a compreensão grega e a compreensão de Wittgenstein sobre a questão da relação entre a geometria e a aritmética, por isso julgamos importante expormos as ideias gregas nesta seção.

Para compreendermos essa relação entre a geometria e aritmética a partir da visão grega, a qual se assemelha à compreensão de Wittgenstein, precisamos, primeiramente, entender a definição de seus componentes, os quais são os responsáveis por estabelecer a relação que estamos enfatizando. Com isso, vejamos a definição que Euclides faz sobre magnitudes e números:

(i) sobre as magnitudes:

> Uma magnitude é uma parte de uma magnitude, a menor da maior, quando meça exatamente a maior.
> E a maior é um múltiplo da menor, quando seja medida exatamente pela menor.
> [...] E as magnitudes, tendo a mesma razão, sejam ditas em proporção. (Euclides, 2009, p. 205).

(ii) sobre os números:

> Unidade é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dita uma.
> E número é a quantidade composta de unidades.
> [...] Números estão em proporção, quando sejam o primeiro do segundo e o terceiro do quarto o mesmo múltiplo ou a mesma parte ou as mesmas partes.
> Números planos e sólidos semelhantes são os que têm os lados em proporção.
> Um número perfeito é o que é igual às suas próprias partes. (Euclides, 2009, p. 269-270).

Na definição sobre as magnitudes apresentada por Euclides, percebemos haver uma ligação direta das magnitudes com o ato de medir. Acerca dos números, o matemático grego enfatiza a questão da unidade, ou seja, correlaciona os números com o ato de contar unidades. Vale ressaltar que uma magnitude está sempre ligada a outra pela necessidade de haver entre elas uma razão, a qual se estabelece pelas vias da proporção. Em ambas as definições, notamos a proporção como um critério para o estabelecimento de relação, mas o fato interessante é que essa relação, para os gregos, aconteceria apenas dentro dos próprios domínios. Na geometria, então, uma magnitude deve medir proporcionalmente parte de outra magnitude e, na aritmética, os números estão em proporção quando ordenados pelo critério de possuírem o mesmo múltiplo ou a mesma parte.

Uma exemplificação pode nos ajudar a compreender as considerações de Euclides: pensemos no exemplo geométrico do quadrado, no qual as grandezas **lado** e **perímetro** devem possuir uma relação entre si, pois o **lado do quadrado** precisa corresponder a ¼ do **perímetro do quadrado**. Conforme o pensamento de Euclides, a relação existente entre as grandezas **lado do quadrado** e **perímetro do quadrado** se estabelece pelas vias da proporção, na qual a magnitude menor – **lado do quadrado** – é capaz de medir a maior – **perímetro do quadrado**, ou seja, temos aqui o **lado do quadrado** sendo esse estalão que, somado quatro vezes, resultará no valor do **perímetro do quadrado**.

Continuando nossa exemplificação, agora no campo aritmético, tomemos os números 1 e 6. Agora, recordemos que a definição de números corresponde ao ato de contar unidades; logo, o número 1, na perspectiva grega, corresponde à contagem de uma única unidade e o número 6, à contagem das seis unidades que o compõem. Com isso, fica evidente que o número 1 proporcionalmente corresponde a uma das quatro partes que compõem o número 6.

A partir da apresentação dos domínios da geometria e da aritmética, na compreensão grega, precisamos enfatizar algo muito específico desse modo de compreender dos gregos, já que eles não partiam do pressuposto de que havia conexão entre os referidos domínios. Isso porque tanto a geometria quanto a aritmética eram compreendidas de forma distinta e separadas, sendo a conexão entre elas algo impensável. O próprio Aristóteles exprime esse posicionamento em sua obra *Analíticos posteriores*, quando afirma que

> ... não podemos passar de um gênero ao outro. Não podemos demonstrar uma proposição geométrica por razão aritmética. (ARISTÓTELES, 1987, 34)

Nesse texto de Aristóteles, fica evidente a distinção entre geometria e aritmética para o pensamento grego, porque não há uma passagem automática de uma prova geométrica para uma aritmética. Com isso, voltemos aos elementos dos referidos domínios gregos: na aritmética, a unidade não poderia ser dividida, a parte mínima era o número 1, o que era totalmente diferente no campo da geometria, no qual as magnitudes devem sempre encontrar uma razão menor em relação a uma magnitude maior, e assim indefinidamente,

> Os gregos rigorosamente distinguiam números e magnitudes geométricas com base no fato de que na aritmética a unidade numérica não pode ser dividida, mas qualquer magnitude geométrica incluindo a unidade correspondente pode ser dividida indefinidamente. (Tiles, 2004, p. 60).

Tiles enfatiza essa rigorosa distinção entre números e magnitudes para os gregos, uma vez que eles compreendiam a geometria e a aritmética como domínios totalmente independentes e regidos por leis próprias, mas sabemos que nem sempre foi assim. Os gregos tentaram fazer com que houvesse um intercâmbio entre geometria e aritmética, a partir do projeto pitagórico de matematização do mundo, o que não ocorreu de forma satisfatória, pelo surgimento da "irracionalidade numérica", porém, reservamos esse assunto para a próxima seção.

Vale mencionar que, na matemática moderna, a partir de Descartes, a proposta grega acerca da acentuada distinção dos dois domínios – geometria e aritmética – parece ser algo ultrapassado, pois a matemática moderna estabelece relações estre os referidos domínios como algo "natural", colocando a visão grega como algo obsoleto. Tiles nos explica que:

> Descartes assume que todas as magnitudes contínuas e todas as razões entre elas (sejam elas comensuráveis ou não) podem ser representadas por comprimentos. Desta forma, a teoria das razões e proporções entre magnitudes contínuas foi rapidamente transformada em uma "aritmética" na qual as razões são tratadas como números de um novo tipo. Essas razões incluiriam não apenas aquelas entre magnitudes comensuráveis, mas também aquelas entre magnitudes incomensuráveis, ou seja, razões conhecidas por não serem expressas como razões entre números inteiros, como $\sqrt{2}$ e π. (Tiles, 2004, p. 75).

A partir de Descartes, a magnitude começa a ser representada como um comprimento e, ainda, ser denominada como um número, pois funcionava como um. Esse tratamento aritmético, que as magnitudes contínuas receberam na matemática desde Descartes, está em oposição à compreensão dos gregos e, também, contrária ao entendimento de Wittgenstein. Em uma possível aproximação entre gregos, Descartes e Wittgenstein, o filósofo austríaco se aproxima mais dos gregos do que de Descartes, visto que Wittgenstein recusa a ideia de dar a termos distintos o mesmo tratamento. Isso, conforme veremos na próxima subseção, o próprio Wittgenstein denominará de "analogias enganadoras".

A compreensão de que Wittgenstein compartilha da visão grega sobre a irracionalidade numérica ocorre por se considerar a geometria e a aritmética como linguagens distintas, porém, a sua proposta se distingue da proposta grega pelo fato de Wittgenstein constatar haver algo nessa relação. Para os gregos, a questão da irracionalidade numérica funcionava como uma prova de impossibilidade da relação entre a geometria e a aritmética, o que em Wittgenstein é diferente, como veremos na Seção 4 deste trabalho, já que a irracionalidade numérica não pode ser compreendida como uma prova de impossibilidade, mas sim como um uma prova de possibilidade, a gerar um método de aproximação infinita.

3.2 Dois sentidos para a palavra "medir"

Na subseção anterior, apresentamos a relação entre a linguagem geométrica e a linguagem aritmética, a partir de uma correlação entre Wittgenstein e o modo grego de compreendê-las. Agora, o nosso trabalho quer se voltar a um ponto importante para a questão da irracionalidade numérica, que é o caso dos dois sentidos da palavra "medir". Julgamos necessário essa distinção pelo fato de Wittgenstein se opor ao uso de um mesmo termo para se referir a significados diferentes. Denominando esse uso incorreto dos termos de "analogias enganadoras", Wittgenstein escreve, metaforicamente, como pode ser deturpador esse uso:

> O efeito de uma analogia enganadora aceita na linguagem: significa uma luta constante e inquietação (uma constante irritação, por assim dizer). É como se algo parecesse ser um ser humano de longe, porque nessa distância não percebemos certas coisas, mas de perto vemos que é um toco de árvore. No momento em que nos afastamos um pouco e perdemos de vista as explicações, uma figura nos aparece; se depois olharmos mais de perto, veremos uma figura diferente; agora nos afastamos de novo, etc., etc.
> Filosofar é: rejeitar falsos argumentos.
> O filósofo se esforça para encontrar a palavra libertadora, e essa é a palavra que finalmente nos permite apreender o que até então pesava constante e intangivelmente em nossa consciência. (Wittgenstein, 2005, p. 302).

O trecho citado faz parte de uma sessão inteira do Big Typescript, dedicada às "analogias enganadoras". Fica evidente que Wittgenstein se opõe a esse modo de denominar situações distintas a partir de um mesmo termo. O modo metafórico com que Wittgenstein faz alusão a algo que de longe parece um homem, mas de perto parece apenas como uma árvore, é, praticamente, o mesmo efeito, ou mesmo erro, quando utilizamos um mesmo termo para nos referirmos a significados distintos. A busca do filósofo deve ser sempre em vista da palavra libertadora, a qual trará clareza para a interlocução dos conceitos que estão sendo utilizados, como nos afirma o filósofo. Por isso, dedicamos essa subseção para distinguirmos os significados que envolvem a palavra "medir" a partir de sua correlação com a "irracionalidade numérica".

A compreensão dessa distinção apresentada baseia-se principalmente no artigo "Wittgenstein e a medida da circunferência", do professor Porto (2007), no qual ele traça um paralelo entre a medição realizada por Arquimedes e a que alguém pode fazer de um círculo. Porto (2007, p. 66) nos mostra que

> Wittgenstein não nega que haja uma relação entre o que fez Arquimedes e o que faz alguém que lança mão de um barbante para medir um círculo. O problema está exatamente em determinar exatamente qual é essa relação. Antes, nos pareceu natural descrevê-la como duas instâncias de "medições de círculos". Porém os dois usos da palavra "medição" não parecem ser realmente equivalentes. E aqui o filósofo não se cansa de nos advertir contra a ideia de tentarmos salvar a analogia entre essas duas "medições", apoiados apenas em uma distinção do objetos a serem medidos em cada uma delas ("objetos reais", "objetos ideais"). Ou seja, a estratégia de insistirmos na identidade de sentidos para as duas "mensurações" e resolver nossos problemas postulando um "novo tipo de círculo", um "círculo ideal".

Conforme Porto (2007), há uma disposição natural em querer resolver a distinção dos dois sentidos da palavra "medir" apenas fazendo alusão aos objetos que estão sendo medidos. A resposta mais fácil seria dizer que Arquimedes teve acesso a um círculo ideal e o que qualquer pessoa pode ter acesso para realizar sua medição é somente um círculo real. No entanto, é precisamente a essa resolução do problema que, segundo Porto (2007), Wittgenstein se opõe, pois, conforme apresentamos nesta subseção, na compreensão wittgensteiniana temos o sentido "medir matematicamente" e o de "medir empiricamente", estritamente ligados à compreensão da relação entre a linguagem geométrica e a aritmética. Voltemos, novamente, ao exemplo do quadrado para a apresentação deste assunto e nos utilizaremos da correlação entre personagens fictícios apenas para uma melhor abrangência do problema em questão, algo semelhante ao que Porto (2007) fez no referido artigo "Wittgenstein e a medida da circunferência".

Imaginemos que certo matemático, na Antiguidade, aqui denominado por Cícero, encontrou a relação existente entre os conceitos **lado do quadrado** e o **perímetro do quadrado**, na linguagem geométrica, com os conceitos da linguagem aritmética **o "número 1"** está para o **"número 4"**, ou seja:

$$Lq : Pq \therefore 1 : 4$$

Nessa relação, já conhecida, percebemos que o nosso matemático, Cícero, estabeleceu a "medida do quadrado", ou seja, quando alguém se depara com uma figura quadrilátera de lados iguais terá se deparado com um quadrado. Não pode ter encontrado outra coisa que não seja um quadrado. O feito de Cícero está para além do seu tempo, pois estabeleceu a relação entre o lado e o perímetro, prescrevendo a existência da grandeza geométrica que é o quadrado.

Tentando problematizar a questão, pensemos em um jovem aluno, aqui chamado de Pedro, ao qual, em suas primeiras aulas de geometria, a professora entrega um recorte de madeira para que fosse medido e, assim, verificado se era ou não um quadrado. Pedro se propõe a medir o lado da figura com sua régua e descobre que a extensão do lado é 10 cm. O jovem então repete a medição nos outros lados e, para sua surpresa, constata que todos os lados possuem 10 cm. Com isso, o jovem aluno nomeia de quadrado aquele recorte de madeira, pois possuía os lados de 10 cm e o perímetro de 40 cm.

O que podemos dizer acerca da medição de Cícero e da medição que Pedro realizou na escola com a sua régua? Recordemos que tanto Cícero quanto Pedro são figuras fictícias que estamos utilizando para compreendermos a questão sobre os dois sentidos da palavra medir. Desse modo, o que enfocamos no feito de Cícero é que ele não mediu um quadrado, com valores específicos de extensão no mundo físico, pois o matemático “mediu-matematicamente” o quadrado, ou seja, o matemático da Antiguidade, estabeleceu a regra da medida do quadrado, a qual se faz necessária para estabelecer se a figura em questão é ou não um quadrado, tendo a mesma a necessidade de obedecer à prescrição de que o lado do quadrado está para o perímetro do quadrado, assim como 1 está para 4. Já o feito do jovem Pedro não está errado. De fato, ele mediu um quadrado, mas foi “um quadrado”, isto é, Pedro “mediu-empiricamente” um quadrado dentre todos os que podem vir a existir e virem a ser medidos, pois ele realizou apenas uma medição física. O ato do jovem Pedro não é uma prescrição, é apenas uma atitude de se medir uma figura no mundo físico, o que também poderíamos dizer ter sido uma verificação. Utilizando-nos daquilo que já estava prescrito, verificou se de fato a figura que estava analisando era ou não um quadrado.

Problematizando ainda mais a questão, tem-se outro aluno na sala de aula, o qual denomina-se Paulo, que recebeu, como Pedro, um recorte de madeira e foi também instruído pela professora a fazer a medição, já que era uma atividade comum a todos os alunos. Ele também se comprometeu a fazer bem-feito o trabalho proposto pela sua professora. Tomou sua régua e mediu cuidadosamente os lados daquele recorte. Encontrou, porém, os seguintes valores: um lado mediu 10 cm e os demais lados mediram 10,5 cm. Ele repetiu a medição e encontrou os mesmos valores. Na hora de apresentar à classe o valor do perímetro encontrado, ele profere que o perímetro do quadrado que ele recebera mede 41,5 cm. A classe toda surpreende-se, uma vez que todos os recortes possuíam o mesmo tamanho; então se aventuram a ver como ele alcançou tal resultado, que, em um primeiro momento, julgaram estar errado.

O aluno Paulo, ao proferir que o perímetro do seu quadrado – com lados diferentes –, totalizava 41,5 cm, apresenta, em sua própria fala, antes mesmo da verificação do cálculo, o erro que cometera. Isso porque a prescrição estabelecida por Cícero na Antiguidade estabelece que uma figura só poderá ser chamada de quadrado se possuir a relação do lado para o perímetro, assim como 1 está para 4. Se um lado não mede o mesmo que os demais, a afirmação “[o] quadrado de lado 10 e demais lados 10,5...” torna-se um absurdo, porque vai contra o que a regra matemática que correlaciona as linguagens geométricas e aritméticas prescreve como um quadrado. Há duas possibilidades de erro no caso exposto pelo jovem aluno Paulo, que podem ter ocorrido: ele pode ter se atrapalhado com a medição, ao tentar ser cuidadoso ao extremo, como também pode ter recebido um recorte disforme. O que deveria ter acontecido era Paulo pronunciar-se como não tendo encontrado um quadrado, mas uma figura geométrica quadrilátera composta de lados diferentes.

3.2.1 Medição como prescrição e medição empírica.

Passemos, agora, à análise do termo que tanto o jovem aluno Pedro quanto o matemático da Antiguidade, Cícero, utilizaram ao determinar o feito que possibilitou o encontro “do quadrado” e o de “um quadrado”, que é o ato de medir. Aqui propriamente deparamo-nos com um estabelecimento de significados diferentes para um mesmo termo. Uma vez que Paulo “mediu” “um quadrado” e Cícero “mediu” “o quadrado”, nesse modo de apresentar o ato de medição já observamos haver uma diferença nos objetos que tanto Paulo quanto Cícero utilizaram para seus feitos, pois um mediu “um quadrado” e o outro medira “o quadrado”.

Com isso, qual seria, de fato, a diferença entre a medição de Cícero e a de Paulo? Teria o matemático acesso a um quadrado especial (ideal) em contraposição ao jovem aluno, que recebera apenas um quadrado de madeira, (empírico)? Uma possível resposta para esse questionamento está em reconhecer o ato da medição realizada por Cícero, como uma medição do “quadrado ideal”, diferentemente daquela feita por Paulo, em sua aula de geometria, uma medição de um “quadrado empírico”. Eis, nessa afirmação, um modo de compreensão cheio de possíveis erros, que nos levam a crer que de fato Cícero usara algo de especial ao seu alcance, ao qual o jovem Paulo não teve acesso. Não assumimos isso como sendo verdadeiro neste trabalho, mas, de certa forma, há uma real diferença entre as duas apresentações do conceito de medição.

Resolvendo o problema conforme o pensamento de Wittgenstein, temos o próprio autor indicando que

> a geometria do espaço visual é a sintaxe das proposições, que tratam dos objetos no espaço visual (WITTGENSTEIN, TS 209, p. 95).

Com isso, podemos iluminar a referida problematização entre “medição ideal” e “medição empírica” que estamos a refletir, demonstrando que o ato do matemático Cícero, na realização de medir um “quadrado ideal”, está no nível das formulações da geometria, as quais, segundo Wittgenstein, não são sobre objetos ideais, mas sim prescrições necessárias para que algo, no campo visual, no mundo físico, possa ser chamado de quadrado. Isso determina que qualquer figura quadrilátera, ao ser verificada pela regra geométrica, onde o lado do quadrado está para o perímetro do quadrado, assim como 1 está para 4, pode ser denominada um quadrado. Já no caso de uma figura quadrilátera que não satisfaça a regra, a partir da verificação, e ainda assim houver a insistência de chamá-la de quadrado, temos então um absurdo, já que ela pode ser qualquer coisa, menos um quadrado, o qual possui propriedades já estabelecidas.

Com essa posição, ainda não se satisfaz, claramente, a ideia da diferença entre "medição empírica" e "medição ideal" que o trabalho está demonstrando. Para tentar elucidar essa questão, observemos o texto de Wittgenstein,

> 178f. A situação é completamente distinta no caso daquilo que se pode chamar de geometria do espaço visual. Quase se poderia falar de uma geometria externa e de uma interna. Aquilo que está ordenado no espaço visual está nesse **tipo** de ordem *a priori*, i.é, segundo sua natureza lógica, e a geometria, neste caso, é simplesmente gramática. (Wittgenstein, TS 209, p. 95).

No trecho apresentado, o autor demonstra haver uma ideia de dois usos da palavra medir: uma que corresponde ao plano físico, a qual mensura tudo aquilo que existe de forma prática, e outra numa realidade *a priori*, a qual se estabelece antes mesmo da verificação da sua concretização no espaço físico. Wittgenstein denomina essa geometria que é a priori de interna, pois ela seria como uma gramática, onde estariam contidas todas as regras, ou seja, a normatização do espaço legislado pela geometria.

Em Wittgenstein, percebemos essa compreensão da geometria como um conjunto de regras a normatizarem a ocorrência das figuras geométricas. Todas as figuras quadriláteras, triangulares, retangulares etc. já estão prescritas pela geometria, pois só podem vir a ocorrer se possuírem os critérios já estabelecidos naquilo que podemos compreender como regras geométricas. Como vimos em Wittgenstein, a ocorrência de uma forma geométrica não pode ser julgada por uma medição física, como notamos.

Assim, percebemos que as regras geométricas estabelecem critérios para a viabilidade de medições empíricas, ou seja, dar esse crédito ao ato de medir é abrir-se à possibilidade de várias possíveis falhas e erros que podem vir a ocorrer no processo da medição. Assim, compreendemos que, para Wittgenstein, uma regra não atribui propriedades nem a objetos abstratos, nem a objetos concretos. A regra **"se trata de um 'quadrado' então o 'perímetro do quadrado' terá de ser quatro vezes o 'lado do quadrado'"** prescreve condições para que aquela figura possa ser chamada de quadrado ou não.

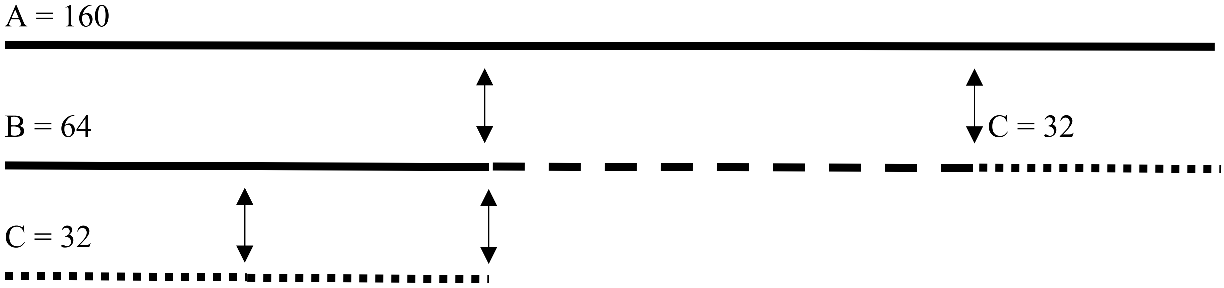
3.3 O algoritmo de Euclides: linguagem geométrica

Antes de tratarmos, propriamente, dos encaixes "perfeitos", nos dedicaremos à compreensão do **algoritmo de Euclides**, uma ferramenta pela qual pode se estabelecer uma relação entre a linguagem geométrica e a aritmética. Esse algoritmo visa o encontro de um estalão comum entre dois valores. Com valores tomados tanto no mundo da linguagem geométrica quanto da aritmética, podemos encontrar um mesmo estalão, que meça tanto os números quanto os segmentos. Nos exemplos numéricos, sempre encontraremos um estalão comum que será o próprio número 1, o qual buscamos demonstrar ser um estalão comum diferente de 1 e que meça ambos os valores.

Para compreendermos melhor o referido algoritmo, tomemos o modo como o próprio Euclides o apresenta na proposição 2 do livro X da sua obra *Elementos*, intitulada "Caso sendo subtraída, de duas magnitudes [expostas] desiguais, sempre por sua vez a menor da maior, a que é deixada nunca meça exatamente a antes de si mesma, as magnitudes serão incomensuráveis":

> Pois, sendo as duas magnitudes desiguais AB, CD e AB a menor, sendo subtraída sempre, por sua vez, a menor da maior, a restante nunca meça exatamente a antes de si mesma; digo que as magnitudes AB, CD são incomensuráveis. (EUCLIDES, 2009, p. 272)

Não por acaso escolhemos uma citação apontada pelo próprio Euclides para a incomensurabilidade da relação entre magnitudes. Para entendermos, porém, a aplicação do algoritmo de Euclides, que busca encontrar a maior medida entre os segmentos – sendo essa medida diferente de 1 e capaz de medir todos os segmentos em questão –, utilizamos, nesse primeiro momento, um exemplo comensurável. Tenhamos os seguintes segmentos na geometria: o segmento A = 160 e o segmento B = 64. A operação feita no algoritmo em questão baseia-se em subtrair o segmento menor em relação ao maior, quantas vezes o mesmo puder ser subtraído de forma inteira e, caso haja um resto, deve ser colocado em relação ao segmento menor, no caso o B, com a mesma operação inicial, subtraindo o resto, aqui chamado de C em relação a B, até o alcance do estalão, o qual produzirá resto zero e medirá ambos os segmentos. De forma mais explícita, observamos:



No exemplo anterior, visualiza-se uma operação, aos moldes do pensamento grego. Subtraiu-se o segmento B em relação ao A por duas vezes, até encontrar o resto C, o qual foi correlacionado com o segmento anterior, o B, subtraindo-o por duas vezes, o que levou ao alcance do resto zero. Podemos exemplificar essa mesma situação na linguagem aritmética, sabendo-se que, no campo numérico, o estalão comum já está assegurado pela unidade mínima (o número 1), mas buscamos o maior valor estabelecido na relação dos números em questão. Assim, temos as seguintes operações:

$$A = 160,\ B = 64$$
$$\text{i) } 160 - 64 = 96$$
$$\text{ii) } 96 - 64 = 32$$
$$\text{iii) } 64 - 32 = 32$$
$$\text{iv) } 32 - 32 = 0$$

Conforme observamos, o estalão comum – aqui denominado por "**e**" – entre os segmentos, longe de ser a unidade $e = 1$,[1] foi $e = 32$, pois o estalão tem de medir tanto o segmento B quanto o A. Pode-se ainda expressar, no exemplo proposto, que

$5 \times e = 160$ $\qquad$ $2 \times e = 64$

Assim, o estalão multiplicado por 5 mede o segmento A = 160 e o mesmo estalão, multiplicado por 2, mede o segmento B = 64, levando em consideração que o estalão deve medir tanto a si mesmo, enquanto resto, como também os seguimentos em questão: A e B.

3.4 O algoritmo de Euclides: linguagem aritmética

Até aqui, utilizamos o algoritmo de Euclides por meio de uma linguagem hibrida para formularmos as questões. Agora, passaremos a fazer uso de exemplos puramente do campo da linguagem aritmética, pois é na aritmética clássica que a "irracionalidade numérica" recebeu um tratamento diferente do modo como os gregos lidavam com a questão.

---

[1] Conforme os textos de Euclides, na aplicação do algoritmo estamos buscando a relação entre os números primos, a "maior medida comum deles" [MDC], pois a menor medida sempre será a própria unidade mínima, ou seja, o número 1.

Para exemplificar a aplicação do algoritmo de Euclides, em linguagem puramente aritmética, tomemos os seguintes valores: 10 e 6 para buscarmos o máximo divisor comum entre esses números. Com isso, expressaremos a mesma operação em dois modos de cálculo: i) a descrição do algoritmo em linguagem ordinária; ii) a descrição do algoritmo por frações contínuas, que é um modo de representação numérica, para demonstrar a mesma aplicabilidade.

i)

$10 \div 6 = 1, resto\ 4$

$6 \div 4 = 1, resto\ 2$

$4 \div 2 = 2, resto\ 0$

ii)

A) $\frac{10}{6} = 1 + \frac{4}{6} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{6}{4}\right)}$

B) $\frac{6}{4} = 1 + \frac{2}{4} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{4}{2}\right)}$

C) $\frac{4}{2} = 2 + \frac{0}{2} = 2 + \frac{1}{\left(\frac{0}{2}\right)}$

Obs.: As letras que seguem na descrição ii) indicam passos de uma mesma operação.

Para entendermos melhor os passos dados na descrição ii), tomemos, isoladamente, cada um dos passos. No passo "A" temos:

$$\frac{10}{6} = \boxed{1 + \frac{4}{6}} = \boxed{1 + \frac{1}{\left(\frac{6}{4}\right)}}$$

Na fração $\frac{10}{6}$ observamos os números que estamos correlacionando para encontrar o estalão comum: 10 é o maior número, por isso será o valor a ser medido, 6 é o número menor, por isso será o medidor da operação. No primeiro resultado obtido, no quadrado pontilhado, lemos que "6 mediu uma vez o número 10 e sobrou um resto $\frac{4}{6}$ ". O último resultado, no quadrado azul, como 6 não pode medir o número 4, invertemos a fração, que passa agora a ser $\frac{1}{\left(\frac{6}{4}\right)}$ e continuamos o cálculo no passo "B".

No passo B, temos a resolução do resto $\frac{6}{4}$, como se segue:

$$\frac{6}{4} = \boxed{1 + \frac{2}{4}} = \boxed{1 + \frac{1}{\left(\frac{4}{2}\right)}}$$

O número 6, que antes fora o medidor, passa agora a ser medido pelo número 4, uma vez que o 4 toma o lugar do menor valor. Na correlação dos valores lemos o seguinte resultado no quadrado verde pontilhado: "4 mede uma vez o número 6 e sobra um resto $\frac{2}{4}$ ". O último resultado no quadrado azul novamente apresenta a necessidade da inversão da fração, o que nos levará ao último passo.

No passo C, temos a resolução da fração $\frac{4}{2}$.

$$\frac{4}{2} = \boxed{2 + \frac{0}{2}} = 2 + \frac{1}{\left(\frac{0}{2}\right)}$$

No presente passo, percebemos a resolução da fração $\frac{4}{2}$. No quadrado verde pontilhado lemos que “o número 2 mede duas vezes o número 4 e não sobra resto”. Chegamos à conclusão de que não sobra resto para continuar a medição, pois na fração $\frac{0}{2}$ nem que realizemos a inversão do medidor para passar a ser medido alcançaremos outro resultado que não seja 0. Na linguagem aritmética podemos ser ainda mais suscintos ao usarmos as frações contínuas na referida empreitada de encontrar a maior medida entre os números 10 e 6, pois podemos reduzir todo o processo descrito em uma única operação aritmética:

$$\frac{10}{6} = 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\left(2 + \frac{0}{2}\right)}\right)}$$

3.5 Os encaixes “perfeitos” da relação entre as duas linguagens

Após apresentarmos o modo grego de compreender a questão da relação entre os domínios da geometria e aritmética e a referência aos dois sentidos da palavra “medir”, queremos agora enfatizar a compreensão de Wittgenstein acerca da relação entre esses dois domínios, uma vez que, como já demonstramos, o próprio autor lida com essa relação como uma relação entre duas linguagens. Para isso, utilizamos, mais uma vez, o exemplo do quadrado, que pode ser considerado um simples exemplo, mas consegue satisfazer a demonstração das propriedades necessárias para estabelecer um encaixe “perfeito” entre a linguagem geométrica e a aritmética.

Conforme a abordagem de Wittgenstein sobre a noção de regra, a qual estabelece a relação entre dois conceitos, podemos encontrar uma correspondência desses conceitos em cada linguagem e compreender a relação apontada pelo autor. No exemplo do quadrado, temos, do lado da linguagem aritmética, os conceitos aritméticos de “número 1” e “número 4”, e, do outro, a geométrica, com os conceitos de “lado do quadrado” e “perímetro do quadrado”. Com isso, podemos construir a seguinte tabela para visualizarmos os conceitos em suas respectivas linguagens:

Linguagem Geométrica	Linguagem Aritmética
Lq : Pq	1 : 4

O exemplo do quadrado demonstra o “perfeito” encaixe da relação entre a linguagem geométrica e a aritmética, pois, como observamos na tabela, cada conceito encontra um correspondente na outra linguagem quando traduzidos. Assim, a partir da compreensão de Wittgenstein, estamos agora diante de uma regra semântica, a qual pode ser lida da seguinte forma:

Se trata de um “quadrado” então o “perímetro do quadrado”
terá de ser quatro vezes o “lado do quadrado”

Nessa regra, os conceitos aritméticos e geométricos estão entrelaçados, ou ainda poderíamos dizer, a regra institui uma relação direta entre os conceitos geométricos e os aritméticos, relação essa que tem de ser satisfeita para se tratar de um “quadrado”. Desse modo, sabendo que a regra estabelece critérios necessários, toda vez que alguém proferir que “aquela figura” é um “quadrado”, terá de corresponder com os critérios estabelecidos pela regra. Caso isso não ocorra, e a pessoa insista que sua figura geométrica, a qual possui três lados medindo 11 cm e um quarto lado medindo 14 cm, seja um quadrado, o que ocorreu foi um erro de compreensão/execução e ela estará diante de qualquer outra figura geométrica, menos de um quadrado.

Não faz sentido falar de um quadrado e não corresponder com a regra em questão, visto os critérios geométricos e aritméticos se relacionarem em um encaixe perfeito. É assim que Wittgenstein compreenderia a noção de “proporção grega”, como uma regra mista que estabelece a relação entre os conceitos da linguagem geométrica e os da linguagem aritmética. A questão, para Wittgenstein, não é como nos gregos era vista a construção de um quadrado, e sim sobre o que nós podemos chamar de “quadrado”, porque há critérios a serem observados. Vejamos como o próprio autor nos fala sobre aquilo que podemos chamar de contagem:

> “Isto quer dizer que é igualmente correto qualquer que seja a forma como uma pessoa conta, e que qualquer um pode contar como quiser?” – Presumivelmente, não deveríamos chamá-lo de “contagem” se todos dissessem os números um após o outro de qualquer maneira. (Wittgenstein, 1983, p. 37).

O exemplo de Wittgenstein trata sobre o simples ato de se contar os números. Para o autor, se alguém inicia uma contagem à sua própria maneira, não considerando aquilo já estabelecido, essa pessoa poderia estar realizando qualquer ato, menos o de se fazer uma contagem. Uma vez que uma pessoa queira iniciar o processo de contagem, deve estar de acordo com as regras que envolvem “o que quer que eu chame de contagem”. Assim, vemos que “o que quer que eu chame de...”, acrescido a algum conceito, faz-nos recordar as normativas implícitas que correspondem diretamente à validade do uso daquele conceito. Em nosso caso, “o que quer que eu chame de ‘quadrado’” deve satisfazer os critérios de que a regra “se trata de um “quadrado”, então o “perímetro do quadrado” terá de ser quatro vezes o “lado do quadrado” estabelecido.

Sabemos haver outros exemplos que demonstram a incompatibilidade da relação entre a geometria e a aritmética, como o *standard* da relação entre o **lado do quadrado** e a **diagonal do quadrado**, relação que demonstra a “irracionalidade numérica” e ainda chancela, para os gregos, a necessidade de distinguir os domínios para separá-los. Já em Wittgenstein, como percebemos desde a presente seção, a necessidade da distinção dos conceitos nas duas linguagens acontece para se estabelecer a relação entre as duas linguagens, contudo, não como os gregos, que buscavam um encaixe “perfeito”, e sim com a intenção, de Wittgenstein, de estabelecer uma relação, a partir de um encaixe de outro tipo, como veremos na seção seguinte.

4 A IRRACIONALIDADE NUMÉRICA EM WITTGENSTEIN

Na exposição das ideias acerca da irracionalidade numérica, até o presente momento, apresentamos a relação entre a linguagem aritmética e a geométrica, conforme a compreensão wittgensteiniana. Usamos exemplos que trazem um "encaixe perfeito", sem adentrarmos nos exemplos dos "encaixes não perfeitos", para demonstrar a relação dessas duas linguagens. Para os gregos, o que estava em vista era a correlação de dois domínios, entre o domínio geométrico e o aritmético. Isso é diferente em Wittgenstein, pois, na compreensão do autor, temos uma correlação de duas linguagens.

A partir do uso do algoritmo de Euclides, conforme a **Seção 3.3**, expusemos como a aplicação desse método geral possibilita a correlação de medidas com vistas a estabelecer o chamado "estalão comum", isto é, a proporção exata das medidas correlacionadas. Já na **Seção 3.4** tratamos dos encaixes "perfeitos" na correlação das medidas do lado do quadrado com o perímetro do quadrado, onde se obtém o próprio lado do quadrado como o estalão comum, pois ele mede exatamente $1/_4$ do perímetro do quadrado.

Como podemos notar, tratamos até aqui de encaixes "perfeitos", de exemplos em que o algoritmo de Euclides funciona. Agora, passemos à parte em que o algoritmo de Euclides não nos apresenta um valor exato. Em vez disso, entra numa espécie de *looping*, o que revela a impossibilidade de encaixe entre as duas linguagens ou, como já antecipamos, a falha desse algoritmo em encontrar a correlação entre duas medidas nos leva à questão dos "encaixes não perfeitos".

Na presente seção, trabalhamos com esses encaixes "não perfeitos", os quais produzem o que se denomina de "irracionalidade numérica". O nosso foco volta-se quase exclusivamente para o problema que está em volta da $\sqrt{2}$, pois nessa raiz temos um excelente caso de *looping* que o algoritmo de Euclides produz quando não consegue estabelecer um valor exato. Também, há dois outros motivos pelos quais julgamos importante o exemplo da $\sqrt{2}$. Primeiramente, é a partir da descoberta da $\sqrt{2}$ como um valor incomensurável que a grande empreitada grega da matematização do mundo sofre um colapso. O segundo motivo que nos faz dar ênfase a esse caso é por ser um exemplo utilizado pelo próprio Wittgenstein quando trata do assunto da irracionalidade numérica.

Para a explanação das questões referentes à $\sqrt{2}$ usamos frações contínuas, que é um modo de representação numérica pelo qual podemos demonstrar o *looping* no cálculo quando se busca a resolução da referida raiz quadrada, a qual, já adiantamos, é resolvida forçadamente, para se obter dessa raiz o mesmo uso de um número natural. Este é, propriamente, o uso que Wittgenstein rejeita em sua filosofia da matemática, como veremos nesta última seção.

4.1 Exemplo de que o algoritmo de Euclides não para

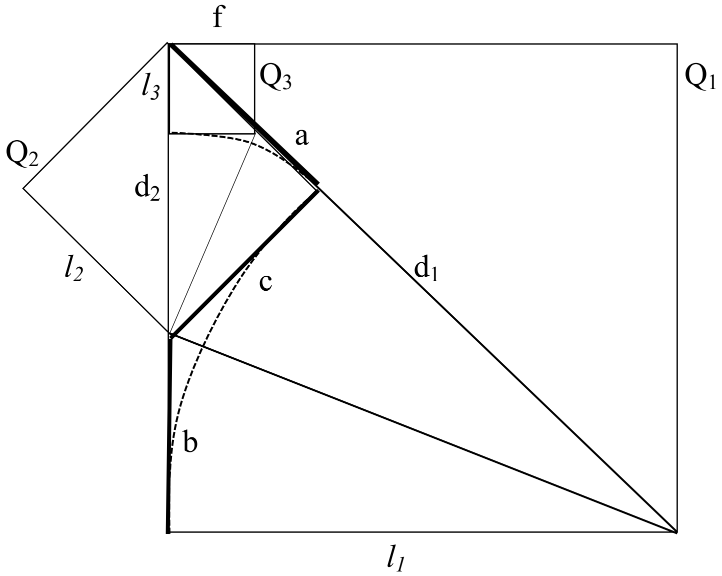
Nesta subseção passaremos ao problema central da nossa pesquisa, que é o caso da então chamada “irracionalidade”. Como já apresentamos no início deste trabalho, a partir da aplicação do algoritmo de Euclides há uma relação de “encaixe perfeito” entre as grandezas “lado do quadrado” e o “perímetro do quadrado”. Esse exemplo expõe, de maneira satisfatória, a relação entre a geometria e a aritmética pelas vias da proporcionalidade. Agora, apresentamos quando ocorre uma repetição, um *looping*, na aplicação do algoritmo de Euclides, ou seja, quando a correlação entre as duas linguagens não ocorre. Antes disso, ressaltamos que essa ideia de *looping* no algoritmo já era algo evidente para o próprio Euclides, pois ele mesmo afirmara as condições necessárias para que duas grandezas fossem consideradas incomensuráveis, na sua proposição segunda do Livro X de sua obra *Os elementos*, conforme podemos ler:

> Caso sendo subtraída, de duas magnitudes [expostas] desiguais, sempre por sua vez a menor da maior, a que é deixada nunca meça exatamente a antes de si mesma, as magnitudes serão incomensuráveis. (Euclides, 2005, p. 355).

A partir desse trecho da obra *Os elementos* temos que, ao aplicarmos o algoritmo de Euclides e não nos depararmos com a comensurabilidade das grandezas, este será o sinal de que essas grandezas são incomensuráveis. Para exemplificar satisfatoriamente, voltemos a colocar a questão a partir da correlação que estamos estabelecendo em todo o nosso trabalho: a correlação entre a linguagem aritmética e a geométrica. De acordo com a exposição do exemplo do quadrado, na Seção 3, continuemos fazendo uso dos mesmos artefatos para nos ajudar na visualização do problema em questão:

Geometria	Aritmética
Lq : Pq	1 : 4
Lq : Dq	?

Examinando a primeira linha do quadro acima, temos a relação já conhecida, onde o lado do quadrado está para o perímetro do quadrado, na geometria, da mesma forma que o número 1 está para o número 4 na aritmética. Na linha acrescida em nosso quadro, vemos uma nova relação estabelecida, a qual podemos ler como “o lado do quadrado está para a diagonal do quadrado, assim como ‘ausência de correspondente numérico’”. Eis a questão sobre a qual nos debruçaremos agora: como compreender uma relação geométrica que não possui um correspondente numérico? Utilizamos a figura abaixo para a visualização do problema, o qual demonstraremos tanto com o uso do algoritmo de Euclides quanto pelo uso das frações contínuas. Assim, temos que:



Observando o exemplo, conforme a aplicação do algoritmo de Euclides, se estabelecem as seguintes relações: no início do processo, temos o quadrado Q_1 e temos que lado l_1[2] desse quadrado é posto em relação à diagonal d_1[3] daquele mesmo quadrado.

O resultado obtido é que o primeiro lado l_1 cabe apenas 1 vez, sobrando um resto, o qual denominamos de *a.* Agora, vamos construir um novo quadrado Q_2 sobre aquele resto a, ou seja, o lado l_2 do novo quadrado Q_2 é o resto a = l_2. Correlacionamos agora esse novo lado l_2 em relação a l_1 (que, como sempre acontece no algoritmo de Euclides, passou de segmento medidor para segmento a ser medido). Obtemos que l_2 cabe 2 vezes dentro do segmento l_1, que são respectivamente *b* e *c.* Agora, sobra resto f, sobre o qual construiremos um novo quadrado Q_3 com lado l_3 = resto f. A partir daí, entramos claramente em um *looping.*

Na tentativa de enfatizar a problemática acerca do *looping* ocorrida em nosso exemplo, voltemos novamente ao resto *a* para apresentarmos de outra forma a questão. A partir do resto

2 Lado referente ao Quadrado 1.
3 Diagonal referente ao Quadrado 1.

a, construímos um novo quadrado, o qual denomina-se Q_2, no qual se tem um l_2 e uma nova d_2. Colocando l_2 em relação a d_2, ter-se-á um novo resto. Vejamos:

L_1	D_1	$R_1 = L_2$
L_2	D_2	$R_2 = L_3$

Com a sucessiva tentativa de findar tal feito, percebemos haver uma contínua recorrência de um resto quando se relaciona o lado do quadrado para com a diagonal do quadrado, o qual sempre possibilitará a construção de um novo quadrado, como se observa:

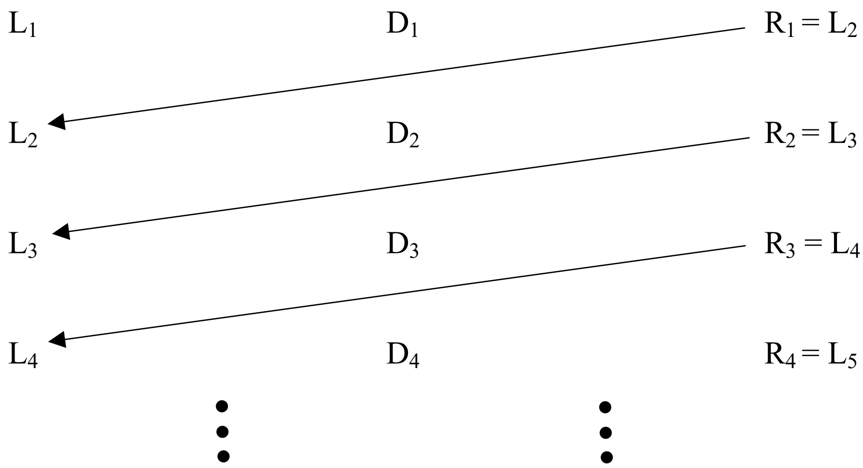
L_1	D_1	$R_1 = L_2$
L_2	D_2	$R_2 = L_3$
L_3	D_3	$R_3 = L_4$
$\vdots$	$\vdots$	

Vemos, assim, que quando aplicado o algoritmo de Euclides nos dois segmentos, o resto produzido torna-se o lado de um novo quadrado, o qual possuirá uma nova diagonal e então, operando novamente com o algoritmo, ter-se-á outro resto, e, assim, percebe-se uma atitude da qual não se obterá sucesso, pois adentrou-se num constante ciclo, o qual nunca terá fim.

Formulemos, a partir de notação lógica, como deveria funcionar essa correlação entre lado e diagonal, assim como funcionou a relação lado e perímetro. Observemos:

$$(e \mid Lq \ \wedge \ e \mid Dq) \rightarrow e \ (Dq - Lq)$$

Na formulação proposta, lemos que se o estalão medir a diagonal do quadrado, o mesmo estalão deve medir o lado do quadrado, como também deve o estalão medir o resto da diferença entre diagonal e lado. Nesse momento, surge o problema de que não há um estalão capaz de mensurar lado e diagonal, ou seja, não se encontra uma medida comum entre essas duas instâncias.



É de comum acordo que não há possibilidade de encontrar um estalão comum entre o lado e a diagonal do quadrado, como nos explica Heath ao começar seus apontamentos sobre a segunda proposição do Livro X de Euclides da obra *Os elementos*:

> Esta proposição estabelece o teste para grandezas incomensuráveis, baseado na operação usual para encontrar a maior medida comum. O sinal da incomensurabilidade de duas grandezas é que esta operação nunca chega ao fim, enquanto os restos sucessivos tornam-se cada vez menores até serem menores do que qualquer grandeza atribuída. (Heath, 1908, p. 18)

Assim, conforme os apontamentos de Heath, percebemos que, ao correlacionar, no segundo quadrado, as grandezas lado e diagonal, obter-se-á um terceiro resto, do qual pode-se construir um terceiro quadrado, que levará à correlação novamente entre lado e diagonal, surgindo novamente um resto; desse modo, torna-se uma ação infinita, pois ocorre um *looping* na aplicação do algoritmo de Euclides e não se encontra um estalão capaz de satisfazer a correlação lado e diagonal, ou seja, as grandezas em questão são incomensuráveis. Caso houvesse um estalão comum entre o lado e a diagonal do primeiro quadrado, esse estalão deveria medir todos da lista infinita de segmentos cada vez menores.

4.2 Casos "não perfeitos" em linguagem aritmética

Como a abordagem nesta seção serviu-se, até aqui, de uma demonstração geométrica por meio da correlação de segmentos, faremos agora uma demonstração com a linguagem aritmética das frações contínuas. Continuamos a expor os problemas que envolvem essa relação entre o lado do quadrado e a diagonal do quadrado, pois julgamos esse exemplo satisfatório para a explanação das questões que estamos apresentando. Assim, temos que:

i) Na fração que se segue, observamos a relação no primeiro quadrado entre o lado e a diagonal, com a ocorrência de um resto (r1):

$$\frac{D1}{L1} = \frac{\mathrm{L1} + \mathrm{r1}}{\mathrm{L1}} = 1 + \frac{\mathrm{r1}}{L1}$$

ii) A partir da operação anterior, da ocorrência do r1, podemos então renomear esse resto como sendo o L2, ou seja, o lado do segundo quadrado r1 = L2, e, com isso, teremos a seguinte operação:

$$\frac{D1}{L1} = \frac{\mathrm{L1} + \mathrm{L2}}{\mathrm{L1}} = 1 + \frac{L2}{L1}$$

Nos dois pontos apresentados não se está tentando buscar uma via de resolução para um problema já exposto, apenas está se reafirmando, por meio das frações, que na aplicação do algoritmo de Euclides a relação entre o lado e a diagonal do quadrado nunca será uma relação perfeita, sempre haverá a ocorrência de um resto (r1 = L2), o qual viabilizará o surgimento de um novo quadrado, e essa busca não chegará a um ponto definido. Com isso, voltamos ao que estamos afirmando em todo o trabalho: a prova de impossibilidade grega de se encontrar um estalão comum. Caso continuemos o cálculo, nos depararemos com a seguinte fração contínua:

$$\frac{D1}{L1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

Essa fração contínua apresenta-nos, aos moldes da modernidade, o resultado obtido da relação entre o lado e a diagonal do quadrado, pois, na aplicação do algoritmo de Euclides, o par diagonal e lado produz um ciclo, o qual gera intervalos cada vez menores e impossíveis de chegarem a um valor final. Essa resolução, porém, da relação entre o lado e a diagonal do quadrado é o mesmo caso que nos leva à questão da irracionalidade da $\sqrt{2}$, sendo essa a questão que abordamos na próxima subseção.

4.3 A questão da $\sqrt{2}$

Em nosso trabalho, a partir do pensamento de Wittgenstein, estamos correlacionando a linguagem geométrica com a linguagem aritmética, no intuito de demonstrar as inconsistências de se catalogar como um "tipo de número" a "irracionalidade". Para entender o pensamento wittgensteiniano, precisamos ir até o modo grego de compreender a chamada "irracionalidade numérica", pois os gregos a compreendiam como uma prova de impossibilidade, ou seja, não há possibilidade de tradução de uma linguagem para outra, pois não se encontra um estalão comum que meça os valores em questão.

O projeto dos gregos buscavam explicar tudo a partir de uma correlação com os números inteiros. Essa matematização do mundo não demorou muito para chegar a um colapso, conforme nos explica Eves (2004, p. 107):

> A descoberta da irracionalidade da $\sqrt{2}$ provocou alguma consternação nos meios pitagóricos. Pois não só ela parecia perturbar a suposição básica da escola, de que tudo dependia dos números inteiros, como também porque a definição pitagórica de proporção, assumindo como comensuráveis duas grandezas quaisquer similares, fazia com que todas as proposições da teoria pitagórica das proporções se limitassem a grandezas comensuráveis, invalidando sua teoria geral das figuras semelhantes. Tão grande foi o "escândalo lógico" que por algum tempo se fizeram esforços para manter a questão em sigilo. Conta uma lenda que o pitagórico Hipaso (ou talvez outro) foi lançado ao mar pela ação ímpia de revelar o segredo a estranhos ou (de acordo com outra versão) que ele foi banido da comunidade pitagórica, sendo-lhe ainda erigido um túmulo, como se estivesse morto. (EVES, 2004, p. 107).

Esse fato de não se encontrar a comensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado nos leva direto ao caso da $\sqrt{2}$, assumido pelos gregos como uma prova de impossibilidade. O termo impossibilidade, aqui, deve ser compreendido como impossibilidade de mensuração, de tradução da linguagem geométrica para a aritmética, ou ainda como a impossibilidade do cálculo de chegar a um par de números inteiros que demonstre a racionalidade da raiz.

Para compreendermos a questão da irracionalidade da $\sqrt{2}$ faz-se necessário o seu cálculo para apresentarmos toda a complexidade existente por trás da notação $\sqrt{2}$, assumido pela matemática clássica como um número irracional, porque se parece e pode funcionar como um número, o que para Wittgenstein será diferente. Com isso, observemos, por meio das frações contínuas, os processos que se seguem na tentativa dessa resolução, processos esses escondidos de forma simplista pela denominação de "número irracional". Tomemos os seguintes pontos:

i. Na resolução da $\sqrt{2}$ percebemos a recorrência de um ciclo, o qual se mostra infinito, que impossibilita o alcance de um número exato. Vejamos:

$$\sqrt{2} < 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

ii. Para que seja possível a produção de um resultado nesse cálculo, faz-se necessária uma aproximação do resto que se segue, o qual não é encontrado de forma natural no processo. Colocaremos um resto 0, para que seja produzido uma cota superior, onde ocorre resto, e, repetindo a fração, colocaremos o resto 1 para alcançarmos uma cota inferior, que possua resto. Com isso, demonstramos o processo de produção de intervalos que a simples notação $\sqrt{2}$ esconde. Observemos:

$$\sqrt{2} < 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{0}}}}}$$

iii) Nesse momento, tomando apenas duas linhas da fração contínua acima, teremos a seguinte resolução:

a) Cota inferior $<$ $\sqrt{2}$ $<$ b) Cota superior

$i)\ 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}$	$i)\ 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{0}}$
$ii)\ 1 + \frac{1}{3}$	$ii)\ 1 + \frac{1}{2}$
$iii)\ \frac{4}{3} = 1{,}333\ldots$	$iii)\ \frac{3}{2} = 1{,}5$

Com isso, notamos que o valor de $\sqrt{2}$ está entre a cota inferior que produziu 1,333... e a cota superior que produziu 1,5. Nesse momento, o interlocutor poderia nos questionar que, com o uso de uma simples calculadora, apresentar-nos-ia um resultado que para ele seria mais preciso, pois, da mesma forma que resolveu a $\sqrt{9}$, também conseguiria resolver a $\sqrt{2}$, dispensando toda essa demonstração aritmética realizada anteriormente. A questão é que a calculadora apenas elenca mais níveis na fração contínua para o cálculo, os quais parecem ser mais precisos, no entanto, somente demonstram que a insistência em se encontrar um resultado leva-nos, cada vez mais, à produção de um processo de intervalos recorrentes. Tomemos apenas a cota superior, para demonstrar o que estamos afirmando:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{0}}}}}$$

i) Com isso, teremos os cálculos que se seguem:

a)

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}$$

b)

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{4+1}{2}}}}$$

c)

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{5}}}$$

d)

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{12}{5}}}$$

e)

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{5}{12}}$$

f)

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{29}{12}}$$

g) $\sqrt{2} = 1 + \frac{12}{29} = \mathbf{\frac{41}{29}} = \mathbf{1{,}41379310}$

...

Observando todos os cálculos demonstrados, percebemos que, quando começamos a denominar a $\sqrt{2}$ como um número, iniciam-se os equívocos. A $\sqrt{2}$ funciona até certo ponto como um número, uma vez que com ela se podem realizar variadas operações. Deve ser considerado, contudo, que aquilo que eu chamo de $\sqrt{2}$ não é um único número, mas um par de números, ou ainda melhor, um método infinitário para encontrarmos pares de números cada vez mais convergentes e precisos. Essa é a questão: não tratar um método gerador de pares numéricos da mesma forma que se trata um número definido; mesmo que haja semelhança pelas possibilidades no uso do cálculo, a $\sqrt{2}$ não pode ser compreendida como um número determinado.

4.4 A irracionalidade para Wittgenstein

A exposição feita em todo o nosso trabalho se deu para apresentarmos o modo como Wittgenstein compreende a irracionalidade numérica. Para entendermos o seu pensamento, demonstramos o tratamento que a $\sqrt{2}$ recebe para ser chamada de número. Expusemos a complexidade que se tem e é deixada de lado nas abordagens usuais na Matemática para tratar essa raiz como se fosse um número, uso esse refutado incisivamente por Wittgenstein, que comenta sobre a confusão no tratamento de construções totalmente diferentes sendo tratadas como se fossem a mesma coisa:

> A confusão na concepção de "infinito real" surge do conceito pouco claro de "número irracional", isto é, do fato de que construções que são logicamente bastante diferentes são chamadas de "números irracionais" sem que quaisquer limites claros sejam dados ao conceito. A ilusão de que temos um conceito firme baseia-se na nossa crença de que em sinais da forma "0,abc...ad infinitum" temos um padrão ao qual eles (os números irracionais) têm de se conformar, aconteça o que acontecer. (Wittgenstein, 2005, p. 496).

O entendimento de Wittgenstein é parecido com o modo grego de tratar a questão da irracionalidade. Ele refuta o tratamento que os chamados "números irracionais" recebem, pois a matemática clássica trata a questão da irracionalidade numérica como sendo apenas um tipo de número a mais no conjunto dos número reais. Isso, para Wittgenstein, é uma ilusão, pois os chamados "números irracionais" possuem uma construção totalmente diferente dos "números naturais", por exemplo. Com isso, já visualizamos os pontos comuns existentes entre Wittgenstein e a compreensão grega sobre a "irracionalidade numérica". A comunhão entre esse autor e os gregos se dá em ambos perceberem que não estamos diante de um tipo de número quando lidamos com a irracionalidade numérica. Porém, há singularidades relevantes na forma como ele pensa a questão, distanciando-se dos gregos, as quais trataremos nesta subseção.

Segundo Heath, o primeiro número irracional descoberto, possivelmente, foi a $\sqrt{2}$. Esse feito realizado pelos pitagóricos colocou em xeque todo o seu projeto de matematização do mundo, como vimos. Os gregos compreenderam essa raiz como uma prova de impossibilidade, pois não se chegava a um valor final, visto que o cálculo realizado entrava em um *looping* (HEATH, 1908, p. 19). O que antes, porém, fora assumido como prova de impossibilidade, tornou-se, para a matemática clássica, de um tipo numérico a mais no conjunto dos números reais. Aqui está, precisamente, aquilo a que Wittgenstein está se opondo. Para compreendermos como o nosso filósofo pensa a questão da irracionalidade numérica, voltemos ao exemplo do quadrado, já utilizado anteriormente. No quadro que se segue, temos o modo como a matemática clássica facilmente resolve a linha da correlação entre o lado do quadrado e a diagonal do quadrado:

Geometria	Aritmética
Lq : Pq	1 : 4
Lq : Dq	1 : $\sqrt{2}$

O leitor que se depara com nosso quadro, caso venha a possuir uma formação de matemática clássica, o que é comum, não acharia errado a forma como ela está construída. Na primeira linha lemos que “na geometria o lado do quadrado está para o perímetro do quadrado assim como na aritmética o número 1 está para o número 4”. Na segunda linha, que “na geometria o lado do quadrado está para a diagonal do quadrado assim como na aritmética o número 1 está para a $\sqrt{2}$”. Aqui está, para Wittgenstein, o erro moderno de compreender uma raiz, que é um processo, como simplesmente um número, uma vez que ela esconde um processo demasiadamente complexo. Observemos o que Wittgenstein nos fala acerca da complexidade por traz da notação $\sqrt{2}$:

> A ideia por trás da $\sqrt{2}$ é a seguinte: procuramos um número racional que, multiplicado por ele mesmo, produza 2. Não existe. Mas há aqueles que assim se aproximam de 2 e sempre há alguns que se aproximam ainda mais de 2. Existe um procedimento que me permite aproximar indefinidamente de 2. Este procedimento é em si algo. E eu chamo isso de número real. Ele encontra expressão no fato de que produz casas de uma fração decimal cada vez mais à direita. (Wittgenstein, 1975, p. 227)

Vemos o autor nos falando o que encontraremos quando buscarmos resolver a $\sqrt{2}$, na tentativa de se encontrar um número inteiro, pois não se alcança um resultado com um número definido, ou seja, exato, como se gostaria. O que se encontra na tentativa de realizar o cálculo da $\sqrt{2}$ é um processo que entra num *looping* que nunca terá fim, mas que, no entanto, nos possibilita chegar a pares de números racionais cada vez mais perto da medida geométrica pretendida, com números que demonstram essa proximidade cada vez maior, contudo, do lado direito da vírgula.

Essa ideia de Wittgenstein ataca diretamente a compreensão de "número irracional" da modernidade, pois o que se encontra na tentativa de resolver essa raiz é algo, de fato, como insiste Wittgenstein, só não é um número. Aqui jaz o problema da confusão feita ao denominar coisas muito diferentes, como o 1 e $\sqrt{2}$, como na tabela já apresentada, denominando-os de "números reais". O problema está claro, a raiz em questão é chamada de número porque, em certo sentido, ela funciona como um número, pode-se realizar várias operações com ela, no entanto, se houver a tentativa de resolver essa raiz, o espectador se deparará com um problema ao qual ele não encontra quando realiza operações com os "números inteiros". Então, qual é a necessidade de tratar coisas diferentes como sendo as mesmas coisas, só porque funcionam, em partes, de forma parecida? O caminho, que Wittgenstein está nos indicando, se dá porque ele comunga das ideias de Brouwer, o qual chama a nossa atenção para o processo que a notação esconde, e não apenas olhar a notação ou esperar que ela nos leve a um número definido. Vejamos:

> Consideramos uma sequência indefinidamente extensível de intervalos λ aninhados $\lambda_{v1}, \lambda_{v2}, \lambda_{v3}$, ... que possuem a propriedade de que todo λ_{vi+1} esteja estritamente dentro de seu predecessor λ_{v1}, ($i = 1,2, \ldots$)... **Chamamos tal sequência indefinidamente extensível de intervalos λ aninhados de um ponto P ou de um número real P.** Devemos enfatizar que, para nós, o ponto *P* é a sequência... em si, não algo como "o ponto limite para o qual, de acordo com a concepção clássica, convergem os intervalos λ, e que, ainda de acordo com essa concepção, poderiam ser definidos como o ponto de acumulação único dos pontos intermediários de todos esses intervalos. (Brouwer, 1992, p. 69).

Com isso, percebemos a forte crítica que Brouwer direciona ao movimento moderno de denominar sequências de ciclos recorrentes como sendo apenas números. Conforme o autor, essa concepção de chamar uma sequência numérica de "número irracional" passa a ideia de que lá na frente se tenha um ponto ou um número, infinitamente distante, mas, como ele nos apresenta, não existe ponto ou número nenhum: temos, sim, um método de aproximação de intervalos, e não um número infinito, e é isso que está por trás da $\sqrt{2}$.

Tanto Brouwer quanto Wittgenstein compactuam da ideia de que os então denominados “números irracionais”, pela modernidade, não são números de fato, ou seja, em parte os gregos tinham razão. O problema da formulação grega é o não reconhecimento do processo encontrado, como se houvesse a necessidade de chegar até algum número inteiro para validação do processo, pois, para eles, se o processo não produz um número exato, não se encontrou nada. Segundo o pensamento de Wittgenstein e Brouwer, tanto os gregos quanto os modernos têm razão em partes: i) aquilo que os gregos encontraram é algo, o qual não pode ser desconsiderado, já que produz um processo de intervalos cada vez menores; ii) já o erro dos modernos está no ato de chamar esse processo de número irracional, criando uma falsa analogia na relação do processo encontrado com o conceito de número. Para Wittgenstein, isso que foi encontrado pode funcionar para o cálculo, sem embargo, não se pode diluir algo de tamanha complexidade apenas dando ao conceito de número um adjetivo que beira o absurdo: “número irracional”.

Facilmente um interlocutor, ao se deparar com este trabalho, questionaria o nosso autor, demonstrando que a linguagem numérica utilizada para o valor do número 3 não difere ao se utilizar para a mesma situação o valor de $\sqrt{9}$, o mesmo então ele faria para com a $\sqrt{2}$, alegando que não se faz necessário resolver essa raiz, uma vez que ela possui toda a problemática já apresentada. O interlocutor sugere então a Wittgenstein que, deixar na notação de raiz e tratar a $\sqrt{2}$ tal e qual a $\sqrt{9}$, não geraria problemas para os seus cálculos, e em parte ele estaria certo. No entanto, as semelhanças no nível do cálculo matemático não apagam as diferenças na aplicação desse cálculo no contexto da medição. A $\sqrt{2}$ não é uma raiz que produza um número inteiro, logo, ela não pode ser comparada em pé de igualdade a uma raiz que produza um número inteiro, ou seja, escolher uma notação que aparentemente simplifique a questão não resolverá o problema, apenas o deixará para depois, ou tentará escondê-lo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação se propôs a estudar a posição do filósofo Wittgenstein acerca da chamada "irracionalidade numérica". A pesquisa teve como um dos trechos motivadores o momento em que Wittgenstein escreve:

> No que diz respeito aos números irracionais, a minha investigação diz apenas que é incorreto (ou enganoso) falar de números irracionais contrastando-os como um tipo de número com números cardinais e números racionais; porque os chamados "números irracionais" são, na verdade, diferentes tipos de números – tão diferentes uns dos outros quanto os números racionais são diferentes de cada um desses tipos. (Wittgenstein, 2005, p. 502)

Wittgenstein tem uma visão completamente diferente da concepção clássica da matemática, pois pensar a irracionalidade numérica por outra via, que não seja na sua catalogação como um tipo de número, parece, em nossos dias, algo absurdo. No entanto, o posicionamento wittgensteiniano não é algo isolado, pois muito antes dele os gregos já possuíam uma compreensão que se assemelhava ao modo do filósofo austríaco de compreender a questão. Embora não sendo a mesma ideia, é o pensamento grego sobre o referido tema que mais se aproxima do modo como Wittgenstein entende a irracionalidade numérica.

Na ação de apresentarmos a irracionalidade numérica na filosofia da matemática de Wittgenstein, partimos da sua concepção acerca das regras matemáticas, porque é na sua concepção de regra que temos um dos seus mais incisivos posicionamentos. Segundo ele, não há espaço para as regras matemáticas possuírem alternância de resultados. Caso uma regra seja aplicada e produza um resultado diferente do esperado, houve um erro no processo de aplicação, e não um novo resultado computado para aquela regra, uma vez que as regras matemáticas têm um caráter necessário, capaz de estabelecer toda e qualquer aplicação que venha a ocorrer.

Na segunda seção trouxemos a concepção rigorosa de Wittgenstein sobre as regras matemáticas e fizemos uma abordagem separando as "regras matemáticas aritméticas" das "regras matemáticas geométricas", o que não foi por acaso, já que muitas das confusões estabelecidas estão precisamente nos usos indevidos de coisas distintas como se fossem a mesmas coisas. Aqui está o equívoco da matemática clássica para Wittgenstein: regras geométricas com impossibilidade de mensuração sendo assumidas como regras aritméticas porque funcionam para o cálculo, como se ambas fossem do mesmo tipo. É claro que em muitos casos isso funciona, mas em casos como o da $\sqrt{2}$ a distinção dos elementos utilizados deve ser considerada.

Na terceira seção, enfatizamos o modo com que Wittgenstein compreende toda a questão em volta dos referidos temas trabalhados, precisamente a relação entre a aritmética e a geometria. A conexão feita pelo autor entre o domínio geométrico e o aritmético, conforme os gregos compreendiam, é, justamente, uma relação entre duas linguagens: entre a linguagem aritmética e a geométrica. Para os gregos esses domínios seriam distintos e separados, já em Wittgenstein são linguagens distintas, mas com possiblidades de tradução.

A ferramenta que trouxemos em nossa dissertação para apresentarmos como funciona a relação das duas linguagens foi o algoritmo de Euclides, porque em sua aplicação encontramos um estalão comum que mede proporcionalmente os valores em questão e viabiliza a tradução entre as linguagens. É o caso do exemplo do lado e do perímetro do quadrado em relação ao número 1 e ao número 4, o que nos levou a concluir que o estalão comum é o próprio lado do quadrado. A isso denominamos de exemplo de encaixe perfeito entre a linguagem geométrica e a linguagem aritmética, pois o lado do quadrado e o perímetro do quadrado na geometria está da mesma forma na aritmética que o número 1 está para o número 4.

Na última seção de nossa dissertação focamos em expor a construção do problema da irracionalidade numérica. Iniciamos a exposição com o problema dos encaixes "não perfeitos" entre a linguagem aritmética e a geométrica a partir da aplicação do algoritmo de Euclides. Denominamos de encaixes "não perfeitos" quando as aplicações do referido algoritmo produz um *looping* e não um estalão comum capaz de mensurar os valores em questão. Com isso, chegamos ao exemplo da $\sqrt{2}$, que é o principal exemplo de irracionalidade numérica do nosso trabalho.

O caso da $\sqrt{2}$ está intrinsecamente ligado à questão de tradução da linguagem geométrica para a aritmética, pois é na correlação entre o lado do quadrado com a diagonal do quadrado que nos deparamos com esse valor incomensurável. Diante desse valor encontrado, expusemos dois posicionamentos distintos, o dos gregos e o de Wittgenstein. Para os gregos, a incomensurabilidade da $\sqrt{2}$ demonstra a impossibilidade da relação entre o domínio geométrico e o domínio aritmético. Já em Wittgenstein essa incomensurabilidade apresenta-nos pares de números racionais cada vez mais próximos da medida geométrica pretendida, com números que até evidenciam essa proximidade, porém, esses números estão do lado direito da vírgula. Essa característica da $\sqrt{2}$ é, para o autor, a principal evidência de que não podemos catalogar esse processo de geração de pares de números como um tipo de número a mais no conjunto dos números reais.

Comparando o pensamento grego e o de Wittgenstein, percebemos que possuem semelhanças, por ambos reconhecerem a necessidade da distinção da geometria e da aritmética, mas o que torna o pensamento do autor independente do grego é a sua constatação de que em certo sentido temos algo no *looping* produzido ao se tentar resolver a $\sqrt{2}$, só não é um número, mas há relação entre a linguagem geométrica e a aritmética. Em outras palavras, para os gregos estamos diante de uma prova de impossibilidade, já em Wittgenstein há relação e só não encontramos um número natural, mas um processo que gera pares de números cada vez mais próximos, que nunca chegará ao seu fim.

Com isso, concluímos que, para Wittgenstein, a irracionalidade numérica não é um tipo de número dentro do conjunto dos números reais, pois chamar de número a $\sqrt{2}$ – uma notação que esconde um processo que gera pares de números infinitários – é algo totalmente fora de questão. Toda essa problemática é deixada de lado em vista do uso dessa raiz, que, em certo sentido, funciona para o cálculo, e esse filósofo não se opõe a isso. A questão de Wittgenstein é igualar a $\sqrt{2}$, por exemplo, a $\sqrt{9}$, por se assemelharem no nível da notação, mas sabemos que ambas produzem resultados totalmente diferentes. Assim, Wittgenstein refuta a posição da matemática clássica de catalogar esses processos produzidos pela irracionalidade numérica como um tipo de número, os “números irracionais”.

5. BIBLIOGRAFIA

ARISTÓTELES. Organon: IV Analíticos Posteriores. Lisboa: Guimarães Editores, 1987

_____. *Physics: Book VI.* Mineola: Dover Publications, 2017.

De Morgan. in *The Penny Cyclopedia of the Society for Diffusion of Useful Knowledge*. vol 19, 1841. Cf Heath. *The Elements*, vol 2, p.116.

EUCLIDES. *Os Elementos.* São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, Howard. *Introdução a história da matemática*. Trad.: Hygino Domingues. Campinas: Editora da Unicamp.

HARDY, G. H. *A Course of Pure Mathematics*. Cambridge: University Press, 1908.

HEATH, Thomas. *A history of Greek mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1921.

HEATH, Thomas. *The thirteen books of Euclid's Elements*. Vol III. Cambridge: University Press, 1908.

JAHNKE, Hans Niels. *A History of Analysis.* Providence: American Mathematical Society, 2003.

KRIPKE, Saul. *Wittgenstein on Rules and Private Language*. Cambridge: Harvard University Press, 1995.

MONK, Rey. *Ludwig Wittgenstein: the Duty of Genius*. Londres: Random House.

PORTO, A. Wittgenstein e a medida da circunferência. Philósophos - Revista de Filosofia, Goiânia, v. 12, n. 2, 2016. DOI: 10.5216/phi.v12i2.6300. Disponível em: https://revistas.ufg.br/philosophos/article/view/6300.

_____. Mathematics and Time: a Reconstruction of Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. 2023. (Manuscrito)

RODICH, Victor. *Wittgenstein on Irrationals and Algorithmic Decidability*. Synthese, v. 118, p. 279–304. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1999.

_____. *Wittgenstein on Mathematical Meaningfulness, Decidability, and Application*. Notre Dame Journal of Formal Logic, v. 38, Number 2, p. 195-225, 1997.

_____. *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*. Stanford Encyclopedia of Philosophy, Summer Edition, 2011.

RUSSELL, Bertrand. *Our Knowledge of the External World*. New York: Routledge, 2009.

TILES, Mary. *The Philosophy of set theory: An historical introduction to Cantor's Paradise.* Mineola: Dover Publications, 2004.

WAISMANN, F. Wittgenstein and the Viena Circle. Oxford: Basil Blackwell, 1979.

WITTGENSTEIN, Ludwig. *Big Typescript*. Oxford: Basil Blackwell, 2005.

_____.Wiener Ausgabe Band 1: *Philosophische Bemerkungen* (1994) [MSS 105–106]

_____. *Philosophical Remarks.* Oxford: Basil Blackwell, 1975.

_____. *Lectures*: Cambridge, 1932-35. Amherst: Prometheus Book, 2001.

_____. *Remarks on the Foundations of Mathematics*. Cambridge: MIT, 1983.

_____. TS 209, Tradução: Anderson Nakano e Bento Prado. (Manuscrito)

_____. *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics* (1939). (C. Diamond, Ed.) Hassocks: The Harvester, 1976.

WRIGHT, Crispin. *Wittgenstein on The Foundations of Mathematics*. Ipswich: Ipswich Book, 1994.