



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Física

Espalhamento de *gaussions* em acopladores ópticos direcionais

Rafael Marques Paes Teixeira

Instituto de Física
Universidade Federal de Goiás

Abril 2017

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Nome completo do autor: Rafael Marques Paes Teixeira

Título do trabalho: Espalhamento de *gaussions* em acopladores ópticos direcionais

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento: **SIM** **NÃO**

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Rafael Marques Paes Teixeira
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 03 / 04 / 2017

RAFAEL MARQUES PAES TEIXEIRA

Espalhamento de *gaussons* em acopladores ópticos direcionais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Área de pesquisa: Física teórica

Orientador: Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso

Goiânia

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Marques Paes Teixeira, Rafael
Espalhamento de gaussons em acopladores ópticos direcionais
[manuscrito] / Rafael Marques Paes Teixeira. - 2017.
xx, 107 f.: il.

Orientador: Prof. Wesley Bueno Cardoso.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Física (IF), Programa de Pós-Graduação em Física, Goiânia, 2017.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Sólitons. 2. Fibras ópticas não-lineares. 3. Espalhamento fractal. 4. Caos. I. Bueno Cardoso, Wesley, orient. II. Título.

CDU 51+53



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Ata Nº 168 de defesa de dissertação de Rafael Marques Paes Teixeira para obtenção do título de Mestre em Física.

Aos 10 dias do mês de abril de 2017, às 14h00min, no Miniauditório do Instituto de Física, reuniu-se a Banca Examinadora indicada pela Coordenadoria do Programa de Pós-Graduação, aprovada pelo Conselho Diretor e designada pela Diretoria do Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás, composta pelo **Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso** (orientador – IF/UFG), **Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos** (DFIS/UFPB) e **Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar** (IF/UFG), para julgar a dissertação de mestrado de **Rafael Marques Paes Teixeira**, intitulada: “**Espalhamento de *gaussons* em acopladores ópticos direcionais**”. O Presidente abriu os trabalhos agradecendo a presença dos membros da Banca Examinadora e concedeu a palavra a Rafael Marques Paes Teixeira, que expôs detalhadamente seu trabalho. Em seguida, os membros da Banca fizeram suas considerações e procederam à arguição do candidato. Concluída essa etapa, a Banca, em sessão fechada, deu prosseguimento ao julgamento do trabalho, atribuindo os seguintes conceitos:

Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso (orientador)

APROVADO

Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos (DFIS/UFPB)

Aprovado

Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar (IF/UFG)

APROVADO

Novamente em sessão aberta, o presidente da Banca anunciou o resultado final do julgamento, declarando o candidato Rafael Marques Paes Teixeira APROVADO pela Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar, a sessão foi encerrada e lavrou-se a presente ata que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora.

Goiânia, 10 de abril de 2017.

Wesley B. Cardoso
Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso (Orientador)

Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos
Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos (DFIS/UFPB)

Ardiley Torres Avelar
Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar (IF/UFG)

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer ao CNPq pela bolsa de estudos e ao Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso pela orientação, atenção e paciência durante os dois anos em que fui estudante de mestrado. Eu quero agradecer à minha família pelo apoio e motivação que sempre recebi e que foram essenciais nessa etapa da minha vida, e também gostaria de agradecer aos amigos pelo incentivo e pelos bons momentos que compartilhamos.

Resumo

Essa dissertação apresenta o trabalho de pesquisa que teve como foco o estudo de sólitons em sistemas não-integráveis governados por modelos efetivos de equações diferenciais parciais (EDPs) de dimensão $(1 + 1)$, isto é, uma dimensão espacial e uma temporal. Na linha de pesquisa principal, foi considerado um modelo de dois campos dado por equações de Schrödinger com não-linearidade logarítmica e acoplamento linear, em que foram investigados os principais aspectos da colisão de dois sólitons gaussianos (*gaussons*), considerando a estabilidade das soluções, seus mecanismos de interação e a regularidade do espalhamento. O estudo de colisões de *gaussons* nesse modelo foi realizado a partir de duas abordagens: semi-analítica (modelo variacional/reduzido) e simulação numérica direta. Para o sistema considerado nesse trabalho, as duas abordagens renderam resultados semelhantes que revelam a existência de uma dinâmica caótica e fractal envolvendo as condições iniciais e as propriedades pós-colisionais dos sólitons, que foi constatada pela análise das correlações entre os parâmetros de entrada e saída. Os padrões fractais são constituídos por janelas de regularidade, cujo posicionamento segue uma regra bem definida que foi obtida via um modelo de linearização que se mostrou muito semelhante nas duas abordagens (i.e., a distribuição de janelas foi bem descrita variacionalmente). Em tais janelas a dinâmica de colisão dos sólitons deixa de ser caótica (colisão regular), tornando-se previsível e bem definida, por isso a largura dessas janelas fornece as condições em que o controle da interação é possível. Além disso, pela análise da dinâmica dos parâmetros variacionais do modelo reduzido e das quantidades físicas mais relevantes na abordagem exata via EDPs (energia total cinética e potencial), verificou-se que essas janelas surgem devido a um mecanismo ressonante de troca de energia entre os modos translacionais e vibracionais dos sólitons. Pelo estudo da estabilidade linear das ondas solitárias, verificou-se que os modos vibracionais decorrem de oscilações de forma induzidas por modos internos e também, possivelmente, por modos de instabilidade excitados durante as colisões. Constatou-se que essas oscilações são bem definidas em todas as colisões regulares. A viabilidade do método variacional no sistema estudado se deve à adequada descrição dos modos vibracionais pelo modelo reduzido e à baixa influência da radiação não-linear emitida sobre os processos de colisão regulares encontrados via simulações diretas.

Abstract

This dissertation presents the research that was focused on the study of solitons in non-integrable systems governed by effective models of partial differential equations (PDEs) of $(1 + 1)$ dimensions, that is, one spatial and one time dimension. In the main research line, we considered a model of two fields given by nonlinear Schrödinger equations with logarithmic nonlinearity and linear coupling, the main aspects of the collision dynamics of two Gaussian solitons (*gaussons*) were investigated, addressing the stability of the solutions, the interaction mechanisms, and the regularity of the scattering. The study of *gaussons* collisions in this model was performed via two approaches: semianalytic (variational/reduced model) and direct numerical simulation. For the system considered in this work, both approaches provided similar results which revealed the existence of a chaotic and fractal dynamics involving the initial conditions and the post-collisional properties of the solitons, which were verified by the analysis of the correlations between the input and output parameters. The fractal patterns are constituted by regularity windows that are positioned accordingly to a well defined rule, which was obtained via a linearization model that was found to be very similar in both approaches (i.e., the windows arrangement was well described by the variational model). In such windows the solitons collision dynamic turns out to be not chaotic (regular collision), it becomes predictable and very well defined, hence the width of these windows provides the conditions in which the control of the interaction is possible. Besides, by analyzing the dynamics of the variational parameters of the reduced model and also the dynamics of the most relevant physical quantities in the exact approach via PDEs (namely the total kinetic and potential energies), we attested that these windows arise due to a resonant mechanism of energy exchange between translational and vibrational soliton modes. By studying the linear stability of the solitary waves, we proved that the vibrational modes originate from shape oscillations induced by internal modes and also, possibly, by instability modes excited during the collisions. We verified that these oscillations are well defined in all regular collisions. The viability of the variational method in the system studied is due to the suitable description of the vibrational modes by the reduced model, and also the low influence of the emitted nonlinear radiation in the regular collision processes found in the direct simulations.

Conteúdo

Lista de Figuras	xiii
1 Introdução	1
2 Ondas solitárias	5
2.1 Ondas na superfície da água e a equação KdV	5
2.2 Ondas solitárias do modelo KdV	10
2.3 Integridade de sistemas de onda não-linear	11
3 Propagação de luz em fibras ópticas	15
3.1 Aspectos gerais das fibra ópticas	15
3.2 Considerações iniciais sobre a propagação de luz	16
3.3 Polarização não-linear	19
3.4 Propagação de pulsos ópticos	21
3.5 Outros tipos de não-linearidade	32
4 Propriedades gerais de soluções de sóliton	35
4.1 Derivação dos perfis de sóliton	35
4.2 Quantidades conservadas	40
4.3 Verificação da não-linearidade $F(I) = \ln(I)$	44
4.4 Estabilidade linear	45
5 Propagação de luz em fibras ópticas acopladas	51
5.1 Acopladores ópticos direcionais	51
5.2 Colisões de sólitons em acopladores direcionais	55
6 Espalhamento de <i>gaussions</i> via acoplamento linear	59
6.1 Introdução	59
6.2 Considerações iniciais e derivação do modelo reduzido	60
6.3 Resultados do modelo reduzido	65
6.4 Análise do mecanismo de colisão do modelo reduzido	73
6.5 Resultados das simulações diretas	86
6.6 Análise do mecanismo de colisão e comparação com o modelo reduzido	92
7 Conclusão	103
Referências	105

Lista de Figuras

2.1	Trem de ondas periódicas com comprimento de onda λ e elevação dada pela função $a = a(x, t)$. A propagação se dá na direção x (geralmente ao longo de um canal) a uma velocidade v , o deslocamento na direção y é uniforme. A superfície da água se encontra em $z = 0$, e a profundidade é constante ($h = \text{cte.}$).	7
2.2	Influência dos efeitos descritos pela equação KdV na evolução temporal de uma onda com elevação solitária (propagação da esquerda para direita). Em (a), o efeito <i>self-steepening</i> é retratado, a reta vertical indica a inclinação crítica que antecede o colapso da onda. Em (b), a dispersão de 3ª ordem quebra a onda em uma sequência de ondas com velocidade de grupo decrescente (resultados de simulações do próprio autor).	8
2.3	Fotografia do fenômeno mascaret no rio Sena, França. Figura retirada do site: http://www.letourne.fr/decouvrir-le-tourne/histoire-et-patrimoine/le-mascaret/ .	9
2.4	Em (a), ilustração da condição inicial, cuja evolução temporal foi calculada numericamente usando os métodos <i>pseudo-espectral</i> [6] e Runge-Kutta de 4ª-ordem [29] com discretizações $dt = 0.001$ e 256 pontos espaciais, os resultados gráficos são mostrados em (b) e (c).	11
2.5	Estruturas de janelas de reflexão no gráfico de espalhamento para: colisões entre sólitons vetoriais governados pelas Eq. (2.12) e (2.13) com $\beta_2 = -2$, $\gamma = 1$ e $\delta = 0.2$ (à esquerda - figura retirada da Ref. [15]); colisões entre sólitons <i>kink</i> e <i>anti-kink</i> no modelo de teoria clássica de campos (não integrável) ϕ^4 unidimensional (à direita - figura retirada da Ref. [50]). Em ambos os gráficos, os pontos no espaço de velocidades são resultados de simulações numéricas diretas, que mostram a correlação entre a velocidade de saída obtida após a colisão (v_∞) e a velocidade de aproximação (v_0) dos sólitons (parâmetro de controle que varia a cada colisão).	14

- 3.1 Ilustração dos componentes de uma fibra óptica e perfil do índice de refração $n(r)$ em função da distância radial r (fora de escala). Aqui, a espessura da capa é desprezada no gráfico, de modo que n_0 é o índice de refração do meio que circunda a fibra. 15
- 3.2 Propagação de uma frente de ondas planas na representação de raios ilustrada para o caso em que $\theta < \theta_c$, a reflexão interna total ocorre na interface núcleo-revestimento (esquema de cores idêntico ao da Fig. 3.1). 16
- 3.3 Comportamento do índice de refração n e de grupo n_g (à esquerda) e do parâmetro GVD β_2 (à direita) para a sílica fundida em função do comprimento de onda do campo eletromagnético aplicado (Figuras retirada da referência [8]). 18
- 3.4 A evolução do perfil de envelope de um pulso (feixe) óptico de *input* na forma de um sóliton temporal (espacial) é ilustrada em três cenários, o perfil de fase de *output* é análogo ao efeito produzido por lentes sobre o perfil plano de *input*: (a) dispersão alarga o perfil (lente divergente); (b) dispersão é perfeitamente balanceada pelo efeito de *self-focusing*; (c) na ausência de dispersão, efeito não-linear de *self-focusing* estreita o perfil (lente convergente). 31
- 4.1 Para a equação NLS cúbica com $n_1 = 1$, os gráficos de $|U(x,t)|$ resultam da propagação numérica de perfis gaussianos $N' \exp(-x^2/2)$: (a) $N' < 1$, o perfil é dispersivo e gradualmente decai emitindo ondas lineares (radiação); (b) $N' = N_{renorm} \gtrsim 1$, o perfil se adapta para a solução mais próxima energeticamente, i.e., a do sóliton fundamental, no processo um pouco de radiação é emitida para o campo distante. A rotina numérica implementada foi desenvolvida usando o método de *Split-Step* [6, 9] juntamente com o método de *Crank-Nicholson* [29], foram empregadas as discretizações $\Delta x = 0.04$ e $\Delta t = 0.001$ 37
- 4.2 Para a equação LNLS com $F(I) = \ln(I)$, os gráficos de $|U(x,t)|$ resultam da propagação numérica das condições iniciais: (a) $\text{sech}(2x)$, em que pouca energia é perdida no processo de adaptação do perfil; e (b) $\text{sech}(x)$, que envolveu perdas maiores mas mesmo assim pequenas. Em (a), a condição inicial é bem próxima do perfil de *gausson* $\exp(-x^2)$, e menos de 0.08% da intensidade total é perdida para o campo distante, já em (b) menos de 0.3%. A mesma rotina numérica do caso cúbico foi empregada. 38

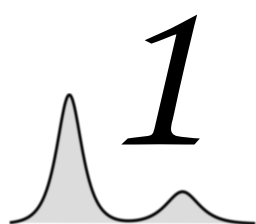
4.3	Os gráficos de $ U(x,t) $ resultam da propagação numérica de <i>gaussions</i> com fase inicial dada por: (a) $\theta(x) = v_0x$, com $v_0 = 0.5$; e (b) $\theta(x) = b_0x^2$, com $b_0 = 0.5$	40
4.4	Resultados de simulações numéricas da evolução de três perfis gaussianos na forma $G_\mu(x,0)$ e um perfil de <i>sech</i> : (a) $\mu = -1$, o perfil é dispersivo e gradualmente decai emitindo ondas lineares; (b) $\mu = 1$, o perfil se adapta para uma solução do tipo sóliton, porém no processo bastante radiação é emitida para o campo distante; (c) $\mu = 3$, diferentemente do caso anterior, muito pouca energia é perdida no processo; (d) para um perfil de mesma amplitude do caso (c), mas com a forma de <i>sech</i> , a energia perdida é da ordem de 10 vezes maior quando comparada ao caso anterior. A rotina numérica implementada é análoga ao da Fig. 4.1 modificada para o sistema em questão.	45
4.5	Espectro de linearização de onda solitária para quatro tipos de não-linearidade (mostradas acima dos gráficos), s é um fator de escala do eixo medindo a parte imaginária de λ . Nos espectros (a)-(c) (retirados da Ref. [6]) a solução fornecida pela Eq. (4.7) com $\mu = 1$ foi usada para definir o perfil $u(x;\mu)$, em (d)-(f) (obtidos pelo autor) a solução usada é dada pela Eq. (4.11) com $\mu = 3$, $\mu = 10$ e $\mu = -1$, respectivamente.	48
5.1	Esquema de acoplador direcional, também chamado na literatura de <i>twin-core optical coupler</i> . A figura ilustra um cenário em que um pulso propaga em direção ao acoplador pelo <i>input</i> da fibra 1 (fibra ativa), a interação entre a região de campo evanescente e o meio inicialmente livre da fibra 2 (fibra passiva), promove a distribuição da luz conforme intensidade do acoplamento, que depende da separação d . O resultado final nas fibras de <i>output</i> depende do comprimento Δz do acoplador (da ordem de alguns centímetros [53]).	52
5.2	Evolução de um sóliton temporal ao passar por um acoplador direcional (AD) com $\Lambda = 0.5$ e comprimento $\Delta Z = 1.62555$, ambos pulsos no <i>output</i> das fibras propagam com velocidade de grupo v_g	53
5.3	Resultado da propagação das condições iniciais para $\Delta Z = 1.62555$, o primeiro gráfico mostra como a energia total em cada fibra varia com Z , os outros mostram a distribuição de intensidade dos campos ópticos em termos de $ U(\tau,Z) $ e $ V(\tau,Z) $	53
5.4	Resultado da propagação das condições iniciais para $\Delta Z = 3.25$	54
5.5	Resultado da propagação das condições iniciais para $\Delta Z = 6.55$	54

- 5.6 Resultado da propagação das condições iniciais $U(\tau, 0) = \exp(2) \exp(-\tau^2)$ e $V(\tau, 0) = 0$ com $F(I) = \ln(I + 1)$, $\Lambda = 0.5$ e $\Delta Z = 0.91$ 55
- 5.7 Colisões simétricas de ondas solitárias do modelo LNLS (Eq. (5.3) e (5.4) com $g = 1$ e $\Gamma = -0.2$). Em $Z = 0$ as soluções iniciais têm a forma de *gaussians*, as figuras são gráficos da função $|\phi(\tau, Z)|$ propagada numericamente, o comportamento da função $|\psi(\tau, Z)|$ é obtido pela reflexão desses gráficos ao longo do eixo $\tau = 0$. Em (a), os pulsos colidem em $Z \approx 30$ e ocorre apenas uma pequena transferência de energia para os modos internos/vibracionais. Em (b), a velocidade de aproximação é bem menor, de forma que a energia cinética remanente após a primeira colisão não é suficiente para separar os pulsos, que permanecem em um estado ligado devido ao efeito atrativo do acoplamento até a segunda colisão. Nesse cenário, o sóliton temporalmente adiantado ($\tau > 0$) recupera sua energia cinética inicial após a segunda colisão, no entanto sua velocidade de fase final tem sinal invertido e esse continua adiantado com relação ao outro pulso (diferentemente de (a), onde o pulso atrasado ($\tau < 0$) se adianta, isso significa que mesmo entrando no acoplador depois do primeiro pulso, esse será o primeiro a ser detectado na saída). 57
- 6.1 Gráfico de v_∞ versus v_0 fornecendo uma visão ampla das regiões de regime regular e irregular de colisões. O ponto crítico $(v_c, 0)$ se encontra quase no centro do gráfico. Pontos tocando as retas limites $v_\infty = \pm v_0$ correspondem a processos de colisão completamente elásticos, que ocorrem na região regular quando $|v_0| \gg |v_c|$ (o gráfico aproxima assintoticamente da reta limite inferior $v_\infty = v_0$). 66
- 6.2 Gráfico de v_∞ versus v_0 para o intervalo $[-0.250, -1.102]$. As janelas de regularidade são nomeadas conforme a notação W_n ($n \in \mathbb{N}^*$), com $n = 1$ para a primeira e maior janela. 67
- 6.3 Gráficos de curvas de nível da função $|\phi(\tau, Z)|^2$ para quatro velocidades de aproximação, determinadas pelo pontos em que as curvas correspondendo às janelas de reflexão W_n (com $n = 1, 2, 3, 4$) tangenciam a reta $v_\infty = -v_0$ 68
- 6.4 Gráfico de v_∞ versus v_0 para o intervalo $[-0.7025, -0.8225]$. Estruturas de janelas semelhantes ao caso anterior surgem nas regiões próxima aos pontos extremos de W_2 , que são pontos críticos onde essas se tornam gradualmente mais compactas. 68

6.5	Resultados do modelo reduzido para sucessivas ampliações de intervalos no eixo v_0 (regiões retangulares marcadas nas figuras) de acordo com o protocolo de seleção adotado: (a) gráfico de espalhamento da Fig. 6.2 repetido aqui para enfatizar o padrão de janelas; (b)-(e) são os resultados gráficos das simulações nos intervalos mencionados, que evidenciam a similaridade envolvendo as estruturas de janelas de reflexão/transmissão.	70
6.6	Plot da quantidade $V(n; s) = [1 - (\vartheta_n^{(s)})^2]^{-1/2}$ como função do índice n da janela de reflexão/transmissão. A estrutura inicial (a) tem pontos bem distinguíveis, já as estruturas de ampliação possuem pontos muito próximos na escala do gráfico. A reta tracejada representa a função linear: $\langle h \rangle n + \langle k \rangle$	71
6.7	Gráficos de curvas de nível da função $ \phi(\tau, Z) ^2$ para oito velocidades de aproximação, determinadas pelo pontos de tangência das janelas $W_n^{(s)}$ com $n = 1, 2, 3, 4$ e $s = b, c$	73
6.8	Gráficos dos parâmetros variacionais nos instantes da primeira (Z_{c1}) e segunda colisão (Z_{c2}) em função da velocidade de aproximação. Os gráficos (g) e (h) correspondem ao comprimento e à amplitude da primeira oscilação posicional, respectivamente. Cada gráfico contém 200 pontos associados a cada processo de colisão do <i>ensemble</i>	76
6.9	Sobreposição do gráfico de $v_\infty \times v_0$ com o gráfico de $b(Z_{c2}) \times v_0$ no intervalo da estrutura fractal de janelas. As regiões em que o parâmetro <i>chirp</i> é positivo (destacadas na cor ■) coincidem com as janelas de reflexão, onde os processos ocorrem em somente duas colisões. Os intervalos entre as janelas consistem de processos que decorrem de pelo menos três colisões, para os quais o parâmetro <i>chirp</i> (no instante da segunda colisão) é predominantemente negativo (regiões destacadas na cor ■).	78
6.10	Em (a), trajetórias do perfil $ \phi(\tau, Z) $ dada pela evolução do parâmetro variacional de posição $p(Z)$ para 50 cenários de colisão com velocidade de aproximação $v_0(m)$ ($m = 1, \dots, 50$) selecionada no intervalo $[-0.762495, -0.814056]$. O primeiro cenário ($m = 1$), com $v_0(1) = -0.762495$, corresponde ao ponto de tangência da janela de reflexão W_2 . O cenário com $v_0(25)$ é último contido no interior de W_2 , a trajetória correspondente passa bem próximo da trajetória limite (linha tracejada) obtida quando v_0 é tomado no ponto extremo direito de W_2 . Em (b), variação direta de (w, b) nas coordenadas $Z_{c1,2}$, a linha tracejada diagonal corresponde à trajetória tracejada com $m = 25$	80

- 6.11 Trajetórias no espaço de parâmetros (w, b) para três processos de colisão na janela $W_2^{(a)}$, em (a) a velocidade de aproximação é $v_2^{(a)}$, em (b) e (c) a velocidade é escolhida cada vez mais próxima do ponto crítico local. As trajetórias resultam dos gráficos mostrados logo abaixo, que fornecem a evolução do parâmetro $q(Z)$ (linha contínua para $q = b$ e tracejada para $q = w - 1$). 81
- 6.12 Comportamento do modo translacional em termos das medidas de amplitude (c) e comprimento da segunda oscilação posicional (d) no intervalo englobando parte das janelas de reflexão $W_1^{(a)}$ e $W_2^{(a)}$. A dinâmica do modo varia bastante ao longo desse intervalo de velocidades, o que se deve ao comportamento da velocidade na segunda colisão $v(Zc_2)$ mostrado em (b), porém nas regiões destacadas em ■ e ■, o modo passa a variar com v_0 de maneira semelhante a constatada para a primeira oscilação posicional, e assim o mesmo mecanismo de ressonância entre esse modo e o vibracional dá origem as janelas de transmissão de $j = 3$ colisões (mostradas em (a)) com distribuição similar a da estrutura inicial de janelas $W_n^{(a)}$ 84
- 6.13 Gráfico de v_∞ versus v_0 fornecendo uma visão ampla das regiões de regime regular e irregular de colisões. O ponto crítico $(v_c, 0)$ se encontra quase no centro do gráfico. Pontos tocando as retas limites $v_\infty = \pm v_0$ correspondem a processos de colisão completamente elásticos, que ocorrem na região regular quando $|v_0| \gg |v_c|$ (o gráfico aproxima assintoticamente da reta limite inferior $v_\infty = v_0$). 87
- 6.14 Resultados das simulações diretas para sucessivas ampliações de intervalos no eixo v_0 (regiões retangulares marcadas nas figuras): (a) gráfico de espalhamento da estrutura à esquerda na Fig. 6.13; (b)-(e) são os resultados gráficos das simulações de ampliação nos intervalos destacados. 89
- 6.15 Plot da quantidade $V(n; s) = [1 - (\vartheta_n^{(s)})^2]^{-1/2}$ como função do índice n da janela de reflexão/transmissão. A estrutura inicial (a) tem pontos bem distinguíveis, já as estruturas de ampliação possuem pontos muito próximos na escala do gráfico. A reta tracejada representa a função linear: $\langle h \rangle n + \langle k \rangle$. 90
- 6.16 Gráficos de curvas de nível da função $|\phi(\tau, Z)|^2$ para oito velocidades de aproximação, determinadas pelo pontos de máximo/mínimo das janelas $W_n^{(s)}$ com $n = 1, 2, 3, 4$ e $s = a, b$ 91
- 6.17 Gráficos de curvas de nível da função $|\phi(\tau, Z)|^2$ para oito velocidades de aproximação, determinadas pelo pontos de máximo/mínimo das janelas $W_n^{(s)}$ com $n = 1, 2, 3, 4$ e $s = c, d$ 91

- 6.18 Dinâmica do espectro de estabilidade linear ilustrada para os processos de colisão mostrados em (a) e (b). Para ambos, o espectro é quase estacionário quando $Z < Z_{c1}$, depois da primeira colisão esse oscila basicamente entre duas configurações definidas pelos estados de mínima e máxima largura média das ondas solitárias (w_{\min} e w_{\max} , respectivamente). Depois da última colisão ($Z > Z_{c2}$), o espectro no caso (a) assume uma configuração com poucas oscilações dos autovalores, no caso (b) esse permanece oscilando entre duas configurações também definidas pela largura média. 96
- 6.19 Gráficos da variação da energia total cinética ($\Delta\mathcal{K}$) em função da distância de propagação Z para quatro processos de colisão: (a) e (b), resultados obtidos via simulações diretas (SD) para processos com v_0 tomado na janela indicada; (c) e (d), resultados obtidos via modelo reduzido (MR) para processos com v_0 tomado na janela indicada. Essa janela do MR fornece cenários de colisão que são análogos aos fornecidos pela outra encontrada nas SD, por isso, os valores de v_0 em (c) e (d) foram convenientemente escolhidos para que o comportamento de $\Delta\mathcal{K}$ fosse similar aos casos em (a) e (b), respectivamente. 99
- 6.20 Amplitude (b) e comprimento (c) da primeira oscilação posicional nas simulações numéricas diretas, o *ensemble* empregado consiste de 200 processos de colisão com v_0 variando no intervalo da estrutura fractal mostrada em (a). 100



Introdução

Na física, os conceitos de campo, onda e partícula são abstrações fundamentais para a descrição teórica da natureza. Embora esses conceitos tratem de fenômenos diferentes *a priori*, uma descrição concisa da realidade microscópica requer a unificação de elementos da dinâmica dos três para representar o que se observa nos experimentos. Essa unificação é fundamental no entendimento da natureza da luz, e foi primeiramente feita por Maxwell em 1862, que inferiu que o caráter ondulatório da luz (verificado por experimentos de interferência e difração) advém do fato da mesma consistir de ondas eletromagnéticas, i.e., campos oscilantes elétricos e magnéticos acoplados propagando na forma de ondas transversais [1, 2]. Posteriormente no início do século XX, constatou-se que a teoria eletromagnética não era capaz de explicar a radiação de um corpo negro, que podia apenas ser descrita em termos da hipótese de quantização da energia sugerida por Planck [3]. Einstein generalizou essa hipótese e retomou o conceito de partícula associado a luz que havia sido proposto por Newton, e com isso explicou de maneira simples vários aspectos do efeito fotoelétrico [3]. Com essa unificação dos conceitos de onda eletromagnética e partícula, a natureza da luz passa a ser entendida como simultaneamente corpuscular e ondulatória. Tal comportamento dual da luz também é verificado em partículas elementares, para as quais o caráter ondulatório foi proposto por de Broglie em 1924, e constatado em 1927 por meio de experimentos de difração com elétrons [3, 4]. Esses aspectos fundamentais do comportamento dual de *onda-partícula* da luz e da matéria estão incorporados nas bases da formulação da mecânica quântica [4]. No entanto, essa dinâmica fascinante não é exclusiva de partículas microscópicas, sendo constatada também em fenômenos de onda conhecidos como *sólitons* em escalas macro e mesoscópicas. Isso pode até parecer um pouco estranho, pois a noção comum de onda considera, frequentemente, apenas efeitos lineares, que estão relacionados ao comportamento dissipativo e deslocalizado que contrasta com a noção de partícula. Contudo, a linearidade das equações de onda é em muitos casos uma primeira aproximação

da descrição da natureza não-linear de um fenômeno de onda. Quando essa aproximação não é suficiente, contribuições não-lineares devem ser incluídas no modelo matemático do sistema físico. A complexidade de um modelo não-linear de propagação de ondas torna tarefas básicas como a obtenção de soluções analíticas e a investigação de propriedades dinâmicas bem mais difíceis, sendo muitas vezes necessário o uso métodos matemáticos mais sofisticados e/ou simulações numéricas das equações de movimento. Modelos não-lineares são amplamente abordados nas Ref. [5, 6], com foco no contexto da óptica não-linear e condensados de Bose-Einstein (BECs) nas Ref. [7–9]. Em [6, 9, 10], também são abordados métodos matemáticos e numéricos com grande aplicação em sistemas de ondas não-lineares.

Em sistemas de ondas não-lineares, soluções do tipo sóliton são ondas solitárias com dinâmica de destaque. Essas surgem devido a processos dinâmicos correlacionados induzidos pelos constituintes do meio de propagação. Assim, em meios dispersivos não-lineares, essas ondas resultam de um balanço preciso entre os efeitos de dispersão e os efeitos não-lineares. No contexto da física, sólitons são soluções de onda especiais que apresentam grande estabilidade e robustez, no sentido da manutenção da forma e das propriedades físicas mesmo sobre o efeito de perturbações pequenas possivelmente induzidas pelo próprio meio de propagação e/ou por outras ondas propagando no mesmo. A característica mais importante que define um sóliton e o diferencia de uma mera onda solitária está no fato desse colidir elasticamente com outros sólitons, se comportando como uma partícula. Assim, o resultado efetivo de qualquer colisão é no máximo uma mudança de fase nas ondas. Embora sólitons sejam essencialmente fenômenos de onda, em muitos casos a semelhança com partículas se torna ainda maior quando esses se manifestam na forma de pulsos localizados no espaço e/ou no tempo, surgindo em escalas macroscópicas (e.g. pulsos de luz em fibras ópticas [7, 8] e ondas hidrodinâmicas em águas rasas [11]) e mesoscópicas (e.g. excitações coletivas de átomos em BECs [9, 12]). É notável que os sólitons sejam de muito interesse tanto na matemática quanto na física em virtude de suas particularidades que mesclam conceitos associados a partículas e ondas, além da complexidade e riqueza de detalhes que esses objetos apresentam na maioria dos sistemas de onda não-linear.

A dinâmica análoga a de partículas é característica de sólitons em sistemas ditos integráveis, i.e., sistemas que podem ser resolvidos analiticamente pelo método do espalhamento inverso [5, 6]. No entanto, assim como a linearidade de muitos modelos é restringida por condições específicas, a integrabilidade da maioria dos sistemas é também. No caso não-integrável, a investigação de um dado sistema frequentemente se limita a métodos aproximados e simulações numéricas. Apesar de muitas vezes não ser possível encontrar soluções analíticas via método do espalhamento inverso, sólitons ainda podem emergir em

regimes restritos do sistema, que podem depender de processos complexos de interação e emissão de radiação, por exemplo. O estudo de ondas solitárias em sistemas não-integráveis é geralmente mais complicado, pois existem vários detalhes importantes que devem ser considerados, como a estabilidade sobre efeito de perturbações, o funcionamento do mecanismo de interação e sua influência na dinâmica durante colisões [6, 7], etc. Isso porque ondas solitárias podem ser instáveis e bastante susceptíveis a mecanismos complexos de troca e emissão de energia envolvendo outras ondas e campos de radiação, que são frequentemente associados com a formação de estados ligados e com o espalhamento caótico. Sólitons nessas circunstâncias dificilmente preservam suas propriedades básicas. Porém o termo é comumente estendido para uma classe maior de ondas solitárias de comportamento análogo ao de partículas interagentes, mesmo quando essas colidem inelasticamente emergindo com alterações que vão muito além de uma simples mudança de fase. Por isso, é comum tratar de temas como instabilidade, estados ligados e espalhamento caótico de sólitons.

No trabalho de pesquisa abordado nessa dissertação, considerou-se um modelo de dois campos dado por equações não-lineares de Schrödinger logarítmicas com acoplamento linear, que descrevem a propagação de pulsos de luz em uma fibra óptica não-linear de dois núcleos (também conhecida como acoplador óptico direcional) [13, 14], cujo efeito não-linear será modelado por um termo do tipo logarítmico quando certas condições englobando o meio de propagação e os pulsos são atendidas. Nesse contexto, cada campo representa o perfil de intensidade longitudinal de um pulso na forma de sóliton temporal gaussiano (*gausson*) que propaga ao longo do eixo de um dos núcleos do acoplador. A interação envolvendo os pulsos contidos em cada núcleo e o meio livre da fibra é modelada com boa aproximação por um termo de acoplamento linear. Com objetivo de introduzir os principais aspectos teóricos e experimentais necessários para o entendimento do sistema físico investigado, o conteúdo que segue após esse capítulo será dividido em seis capítulos. Uma breve revisão histórica seguida de uma introdução geral ao estudo de ondas solitárias é feita no segundo capítulo, onde alguns conceitos fundamentais e resultados importantes são abordados de maneira direta e focada no escopo do trabalho de pesquisa. O terceiro capítulo trata do contexto físico e discute os principais aspectos da propagação de luz em fibras ópticas. Além disso, com o objetivo de evidenciar as condições e os mecanismos físicos que levam ao surgimento de sólitons ópticos no sistema investigado, uma derivação detalhada da equação não-linear de Schrödinger cúbica é feita e também são abordadas as circunstâncias em que outros tipos de não-linearidade se tornam dominantes. No quarto capítulo, algumas propriedades gerais de soluções de sóliton provenientes de equações não-lineares de Schrödinger são discutidas para os casos em que a não-linearidade é do tipo *dual-power* ou logarítmica, e também é feita uma introdução ao formalismo lagrangiano que é empregado

no sexto capítulo. O quinto capítulo retoma o tema do terceiro e trata dos acopladores ópticos direcionais, abordando também as condições em que esses dispositivos podem propiciar colisões simétricas de pulsos de luz na forma *gaussions*. O assunto central dessa dissertação é tratado propriamente no sexto capítulo, onde o estudo semi-analítico do espalhamento de *gaussions* é descrito desde o desenvolvimento do modelo variacional (também chamado de modelo de coordenadas coletivas), constituído por equações diferenciais ordinárias (EDOs) acopladas, até a exposição e análise dos resultados das simulações numéricas dessas EDOs que fornecem uma descrição aproximada e simplificada da dinâmica dos sólitons [6, 15–17]. As EDPs do modelo exato também foram investigadas via simulações numéricas diretas [18–23], os resultados são exibidos e comparados com a descrição fornecida pelo modelo reduzido nas últimas seções do sexto capítulo. A conclusão do trabalho de pesquisa é assunto do sétimo e último capítulo.



Ondas solitárias

2.1 Ondas na superfície da água e a equação KdV

Um dos fenômenos ondulatórios mais comuns e evidentes da natureza é a propagação de ondas na superfície da água. Essas resultam do efeito restaurador da gravidade e/ou tensões superficiais sobre perturbações na superfície livre da água. Quando o primeiro (segundo) efeito é dominante, essas são chamadas de ondas gravitacionais (capilares). Interessantemente, ondas no interior de fluídos (conhecidas como ondas internas) também podem surgir devido à gravidade, ocorrendo na interface de fluídos com densidades diferentes, que, no caso de águas oceânicas, seriam camadas com temperaturas e/ou salinidades diferentes [24]. No caso de ondas de baixa amplitude, como vistas em um lago calmo ou em uma poça d'água, as características mais básicas do fenômeno se manifestam claramente. Já no caso de ondas no mar, a transição de águas profundas para as águas rasas na costa, induz efeitos diferentes que geralmente resultam no colapso das ondas. Ondas sonoras, eletromagnéticas na faixa do visível e na faixa de rádio, também são familiares, essas são bem descritas pela teoria de ondas lineares na maioria das condições de propagação da atmosfera terrestre. Já para as ondas na superfície da água a descrição da dinâmica é mais complicada, pois a linearização das equações de movimento só é possível em cenários específicos, como a propagação de ondas de baixa amplitude relativamente ao comprimento de onda (λ), o que é mais comum em águas profundas. Para ondas de superfície propagando em águas de baixa profundidade (águas rasas) relativamente ao seu comprimento de onda, uma abordagem não-linear é indispensável [25].

Durante o século 19, a teoria de ondas na superfície de fluídos homogêneos teve muito progresso, a descrição linear foi primeiramente elaborada pelo matemático britânico G. Biddell Airy, cujo modelo inclui o efeito de dispersão de frequência (velocidade de propagação depende do comprimento de onda) mas se limita a situações de baixa amplitude comuns

no caso de ondas oceânicas [25]. No início do desenvolvimento da teoria não-linear, foram introduzidas as conhecidas equações de águas rasas, que incluem o efeito de dispersão de amplitude (análogo à dispersão de frequência) porém se restringem a cenários em que a escala de comprimento horizontal é muito maior que a vertical ($\lambda \gg h$, com h sendo a profundidade média). A busca por modelos não-lineares mais gerais se intensificou quando J. Scott Russell, engenheiro e arquiteto naval escocês, relatou em 1844 suas observações sobre um fenômeno de onda peculiar que atualmente é conhecido como *onda solitária*. Em agosto de 1834, Russell conduzia experimentos em canais de água para a *Union Canal Company* com o objetivo de projetar barcos mais eficientes [11]. Em certa ocasião um dos testes produziu uma onda de elevação solitária e simétrica, essa se deslocava ao longo do canal estreito com velocidade constante enquanto mantinha sua forma. Russell replicou o fenômeno em um tanque de água e estudou suas propriedades, porém não havia na época nenhum modelo de águas rasas capaz de descrever o que se tornou o problema da *onda solitária*. Posteriormente, alguns modelos matemáticos foram desenvolvidos por Boussinesq e Rayleigh, que encontraram aproximações para a forma funcional e velocidade da onda solitária. Em 1895, o matemático holandês Diederik Korteweg e seu estudante de doutorado Gustav de Vries, modificaram o método de Rayleigh para obter uma equação de onda (atualmente conhecida como KdV) que admite soluções periódicas, essas tendem para a onda solitária encontrada por Rayleigh no caso limite de longos comprimentos de onda [25].

Vários desses modelos para ondas de superfície em águas rasas (incluindo outros mais atuais, como o modelo de Camassa-Holm que descreve o colapso dessas ondas ou, em inglês, *breaking waves*, e o modelo de Kadomtsev-Petviashvili (KP) que generaliza a KdV para o caso 2D) são fundamentados em algumas aproximações que, embora representem limitações para a aplicação, permitem simplificações necessárias para uso em situações específicas de interesse [11]. Uma primeira aproximação consiste em tomar os efeitos de dissipação como sendo muito pequenos, podendo ser então negligenciados. Outras consideram relações de escala envolvendo comprimentos que caracterizam a onda e o meio, esses são ilustrados na Fig. 2.1 para uma onda de superfície propagando em águas de profundidade uniforme.

A descrição de tais modelos se aplica a ondas longas ($\lambda \gg h$) de baixa amplitude ($a \ll h$) que são efetivamente unidimensionais. No caso da equação KdV, além da profundidade h , outras três quantidades físicas devem ser conhecidas: a aceleração da gravidade g , a densidade do fluido ρ , e a tensão superficial da interface ar-água θ . A função que fornece a elevação da água acima do nível de equilíbrio ($z = 0$) é governada pela equação

$$a_t + \sqrt{gh} \left(1 + \frac{3a}{2h} \right) a_x + \frac{h^2 \sqrt{gh}}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{\theta}{\rho gh^2} \right) a_{xxx} = 0, \quad (2.1)$$

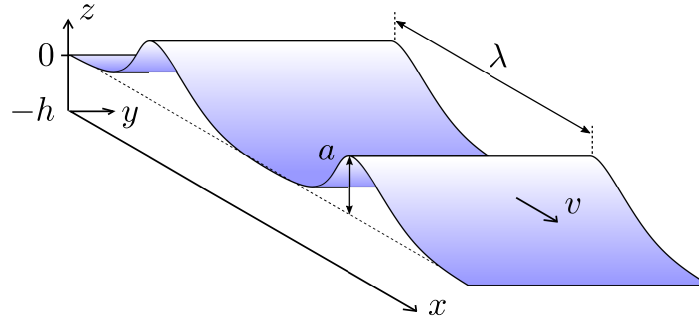


Figura 2.1 Trem de ondas periódicas com comprimento de onda λ e elevação dada pela função $a = a(x, t)$. A propagação se dá na direção x (geralmente ao longo de um canal) a uma velocidade v , o deslocamento na direção y é uniforme. A superfície da água se encontra em $z = 0$, e a profundidade é constante ($h = \text{cte.}$).

em que derivadas parciais como $\partial a / \partial x$ são expressas na forma compacta a_x , assim, a_{xxx} representa a derivada espacial de terceira ordem $\partial^3 a / \partial x^3$. A Eq. (2.1) pode ser expressa em uma forma adimensional se distâncias forem medidas em unidades de $L = h\sqrt{(1 - 3B)/6}$ (em que $B = \theta / (\rho g h^2) < 1/3$ é uma constante adimensional), tempo em unidades de $T = L / \sqrt{g h}$, e a elevação da água em unidades de $A = 2h\alpha/3$ (com α sendo um parâmetro adimensional, usualmente escolhe-se $\alpha = \pm 1$ ou $\alpha = \pm 6$). Assim, na Eq. (2.1) efetua-se a troca $a(x, t) \rightarrow Au(x, t)$, em que as derivadas de a estão relacionadas com as da função adimensional u pelas relações: $a_x \rightarrow AL^{-1}u_x$, $a_{xxx} \rightarrow AL^{-3}u_{xxx}$, e $a_t \rightarrow AT^{-1}u_t$. Além disso, pode-se fazer uma reescala da forma $u \rightarrow u - 1/\alpha$ para eliminar o termo proporcional a u_x da equação resultante, o que fornece

$$u_t + \alpha u u_x + u_{xxx} = 0. \quad (2.2)$$

O termo de derivada temporal remete a evolução de uma dada condição inicial $u(x, 0)$, que ocorre sob a influência dos efeitos não-linear (segundo termo) e de dispersão de terceira ordem (último termo). O termo não-linear, denominado *self-steepening*, descreve a dependência da velocidade de grupo com a elevação (amplitude) da onda, fazendo com que os picos se movam mais rapidamente (veja a Fig. 2.2(a)). Já o termo dispersivo provoca a redução da velocidade de propagação, seu efeito em uma onda de elevação solitária é de "quebrá-la" em um trem de ondas que se dispersa na direção oposta a de propagação (Fig. 2.2(b)) [7, 11].

O balanço apropriado entre *self-steepening* e dispersão resulta no surgimento de uma onda solitária estável que propaga sem mudar sua forma. Uma solução particular desse tipo pode ser obtida para a Eq. (2.2) supondo $u(x, t) = U(\xi)$, com $\xi = kx - \omega t$, em que k é número de onda e ω a frequência angular, de modo que a velocidade de propagação é $c = \omega/k$.

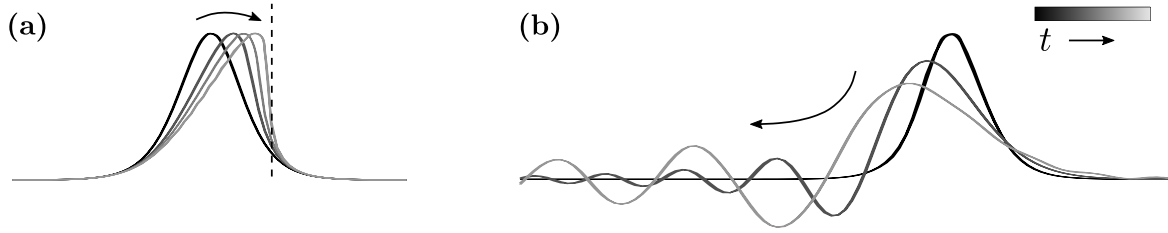


Figura 2.2 Influência dos efeitos descritos pela equação KdV na evolução temporal de uma onda com elevação solitária (propagação da esquerda para direita). Em (a), o efeito *self-steepening* é retratado, a reta vertical indica a inclinação crítica que antecede o colapso da onda. Em (b), a dispersão de 3ª ordem quebra a onda em uma sequência de ondas com velocidade de grupo decrescente (resultados de simulações do próprio autor).

Depois de substituir essa forma funcional na equação, encontra-se

$$k^3 U_{\xi\xi\xi} + \alpha k U U_{\xi} - \omega U_{\xi} = 0 \rightarrow \frac{d}{d\xi} \left(k^3 U_{\xi\xi} + \frac{\alpha k}{2} U^2 - \omega U \right) = 0, \quad (2.3)$$

$$k^3 U_{\xi\xi} + \frac{\alpha k}{2} U^2 - \omega U = c_1 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{d^n U}{d\xi^n}(\xi) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow c_1 = 0, \quad (2.4)$$

em que o limite empregado decorre da consideração de que a função U descreve um perfil de onda localizado, o que permite eliminar a constante de integração c_1 . Na equação resultante, após isolar o termo de derivada segunda e multiplicar ambos os lados da por U_{ξ} , pode-se efetuar uma segunda integração como segue

$$\frac{k^3}{2} \left(U_{\xi}^2 \right)_{\xi} = \left(\omega U - \frac{\alpha k}{2} U^2 \right) U_{\xi} \rightarrow \frac{k^3}{2} U_{\xi}^2 = \int \left(\omega U - \frac{\alpha k}{2} U^2 \right) U_{\xi} d\xi, \quad (2.5)$$

$$\frac{k^3}{2} U_{\xi}^2 = c_0 + \frac{\omega}{2} U^2 - \frac{\alpha k}{6} U^3 \quad (c_0 = 0 \text{ assim como } c_1). \quad (2.6)$$

Onde foi usada a relação $U_{\xi} d\xi = dU$ para efetuar a integração em U . Na última equação, pode-se manipular os termos para obter

$$\int d\xi = \sqrt{\frac{k^3}{\omega}} \int \frac{dU}{U \sqrt{1 - (\alpha k/3\omega)U}} \rightarrow \frac{\xi_0 - \xi}{2} = \sqrt{\frac{k^3}{\omega}} \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{1 - \frac{\alpha k}{3\omega} U} \right), \quad (2.7)$$

$$\Rightarrow U = \frac{3\omega}{\alpha k} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{\omega}{k^3}} \frac{(\xi - \xi_0)}{2} \right] \quad \therefore u(x,t) = \frac{3c}{\alpha} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct + \delta) \right], \quad (2.8)$$

com δ sendo um fase espacial e/ou temporal. A velocidade da onda solitária (que propaga na direção x positivo) determina a amplitude e a largura do pulso com perfil localizado na forma de sech^2 (secante hiperbólica ao quadrado). Com isso, nota-se que cenários de colisão são possíveis, de modo que o caso mais simples consiste de um pulso produzido em um instante

t_0 e centrado em x_0 , interagir com outro mais estreito e de maior amplitude produzido em $t > t_0$ na mesma posição.

Soluções periódicas da Eq. (2.2) foram encontradas por Korteweg e de Vries, e são conhecidas como ondas *cnoidais* (em inglês, *cnoidal waves*), porque são expressas em termos da função $\text{cn}^2(\xi + \delta; m)$, em que $\text{cn}(\phi; m)$ é uma das funções elípticas de Jacobi. No limite $m \rightarrow 1$ essas soluções colapsam para aquela mostrada nas Eq. (2.8), descrevendo uma única elevação solitária [11]. Na natureza, existem fenômenos que provocam o surgimento de trens de ondas solitárias que se assemelham as ondas cnoidais idealizadas pela equação KdV. Tais trens de onda são muitas vezes antecidos por ondas de choque dispersivas, e geralmente se formam em estuários rasos e afunilados, onde os efeitos induzidos por grandes fluxos de água (promovidos por marés, tsunamis, tempestades) podem ser ampliados [26]. Em condições adequadas, fascinantes fenômenos de onda podem ser observados, a *pororoca* no rio Amazonas e o *mascaret* no rio Sena (veja Fig. 2.3), são dois exemplos bem conhecidos. Atualmente, o rio Sena não tem as condições para gerar o fenômeno com a mesma magnitude de décadas atrás, pois sua profundidade foi aumentada para permitir o deslocamento de embarcações maiores.

A equação KdV geralmente modela fenômenos de onda longa fracamente não-lineares, que, além do contexto de águas rasas, surgem como ondas internas gravitacionais em fluidos estratificados (já mencionadas anteriormente), ondas inerciais em atmosferas em rotação, e ondas acústicas iônicas em plasmas [27].



Figura 2.3 Fotografia do fenômeno mascaret no rio Sena, França. Figura retirada do site: <http://www.letourne.fr/decouvrir-le-tourne/histoire-et-patrimoine/le-mascaret/>.

2.2 Ondas solitárias do modelo KdV

Durante bastante tempo, não houve muito progresso envolvendo a equação KdV e o fenômeno da onda solitária fora do contexto da teoria de ondas em águas rasas. Foi somente em 1965 que dois físicos norte americanos, Norman Zabusky e Martin Kruskal, descobriram que a equação KdV descreve o limite contínuo de um modelo de rede anarmônico unidimensional, que anteriormente havia sido empregado por Fermi, Pasta, e Ulam para investigar processos de termalização [11]. Anos antes da década de 60, recursos computacionais já haviam sido empregados em simulações numéricas de modelos meteorológicos e de física nuclear. Assim, Zabusky e Kruskal usaram desses recursos disponíveis para explorar numericamente a interação de ondas solitárias em uma rede cristalina não-linear, e com isso descobriram que essas preservam sua velocidade e forma após colisões. Logo, eles constataram que ondas solitárias da equação KdV colidem elasticamente, e somente uma mudança de fase pode decorrer da colisão [28]. Para exemplificar esse fato, considera-se o caso mais simples de colisão, que é representado pela condição inicial

$$u(x, 0) = \frac{3c_1}{\alpha} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c_1}}{2} (x - x_1) \right] + \frac{3c_2}{\alpha} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c_2}}{2} (x - x_2) \right] \quad (2.9)$$

em que c_n é a velocidade do n -ésimo pulso com pico localizado em $x = x_n$ no instante inicial $t = 0$. É importante mencionar que embora a superposição de soluções não seja válida, devido à não-linearidade da equação de movimento, uma solução de duas ondas localizadas é bem aproximada pela superposição conforme mostrado na Eq. (2.9), desde que a separação seja suficiente para garantir um *overlapping* (sobreposição) muito pequeno. Tomando $\alpha = 6$, $c_1 = 1.2$, $c_2 = 0.5$, $x_1 = -30$ e $x_2 = -15$, pode-se resolver numericamente a equação KdV associada para encontrar a evolução temporal do perfil dado pela Eq. (2.9), o resultado é mostrado na Fig. 2.4. Note que os pulsos preservam sua identidade após a colisão, sofrendo apenas uma mudança de fase que retarda o pulso mais lento (onda 2) e adianta o mais rápido (onda 1), o que pode ser visto claramente na Fig. 2.4(c).

Devido à dinâmica semelhante a de partículas, as ondas solitárias provenientes da equação KdV foram nomeadas *sólitons*, em analogia aos termos elétron, próton, etc. Desde sua descoberta, a grande estabilidade e robustez dos sólitons despertou bastante interesse da comunidade científica por sistemas de onda não-lineares, e com isso vários outros modelos físicos revelaram admitir soluções que compartilham de suas propriedades. Isso levou ao conceito atual de sóliton, que o define como sendo uma onda solitária estável que surge do balanço perfeito entre efeitos dispersivos e não-lineares presentes no sistema, propagando com velocidade e forma constantes, e interagindo com outros sólitons via colisões elásticas que sempre resultam em uma mera mudança de fase. Aqui, uma onda solitária é dita

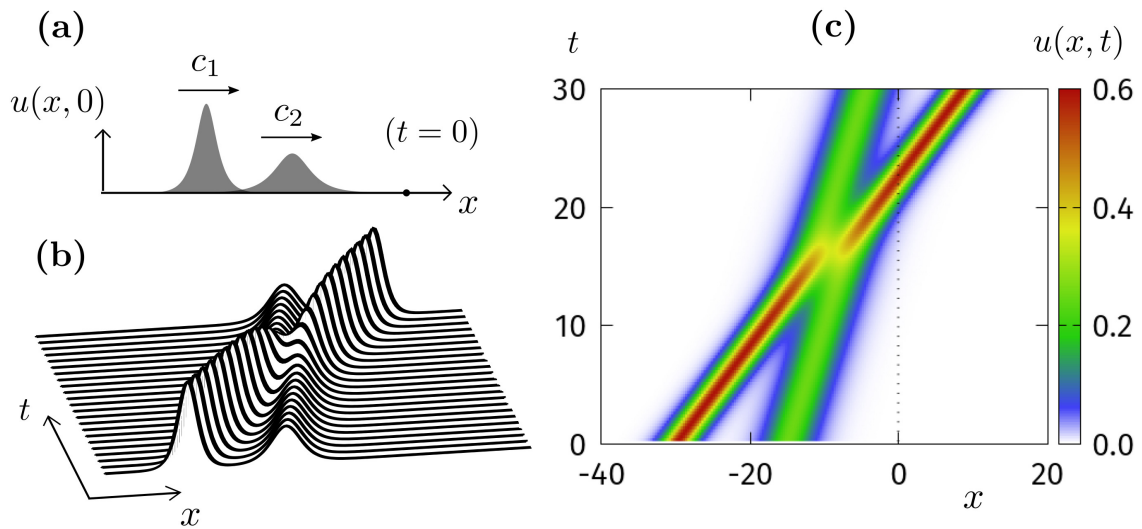


Figura 2.4 Em (a), ilustração da condição inicial, cuja evolução temporal foi calculada numericamente usando os métodos *pseudo-espectral* [6] e Runge-Kutta de 4^a-ordem [29] com discretizações $dt = 0.001$ e 256 pontos espaciais, os resultados gráficos são mostrados em (b) e (c).

estável quando suas propriedades e características são preservadas mesmo na presença de perturbações pequenas. No entanto, em modelos mais realísticos, que podem incluir efeitos de altas ordens e/ou provenientes de perturbações, a estabilidade de ondas solitárias não é garantida, e sua análise é crucial na verificação da viabilidade de observações experimentais.

Soluções solitônicas são encontradas em vários contextos distintos, tais como: BECs [30–34], em ondas de água [35], proteínas [36], DNA [37], fibras ópticas não-lineares [8, 38] na forma de sólitons temporais (pulsos de luz) e espaciais (feixes de luz) (e também como sólitons espaço-temporais), células preenchidas com vapor de sódio [39], dissulfeto de carbono líquido [40], cristais fotorrefrativos [41], guias de onda de semiconductor [42], células planares de cristal líquido em fase nemática [43], etc.

2.3 Integrabilidade de sistemas de onda não-linear

Pouco tempo depois da descoberta do fenômeno sóliton, outra grande motivação para o estudo de sistemas de onda não-linear veio em 1967, quando o matemático estadunidense Clifford Gardner criou o método do espalhamento inverso (IS - *inverse scattering*), que o permitiu resolver a equação KdV analiticamente. Posteriormente, o método IS contribuiu para a obtenção de soluções analíticas em vários outros modelos que suportam ondas solitárias, alguns desses são dados por EDPs bem conhecidas atualmente, como a

equação não-linear de Schrödinger (NLS - *nonlinear Schrödinger*), a equação de Sine-Gordon (SG), e a equação KP [6].

O sucesso do método levou a definição do conceito integrabilidade de EDPs baseado na possibilidade do mesmo de fornecer soluções. Desse modo, um sistema clássico de onda é dito integrável se a transformada IS é aplicável (o que requer a existência de operadores lineares compatíveis, compondo o chamado par de Lax), fornecendo uma sequência infinita de leis de conservação que possibilitam a obtenção de soluções com um número arbitrário de sólitons [5, 6, 27]. Embora seja possível calcular inúmeras leis de conservação associadas a um dado sistema, somente algumas (de ordem mais baixa) têm significado físico, representando quantidades conservadas como massa (ou intensidade eletromagnética no caso de sólitons ópticos), momento e energia.

A equação NLS é bem conhecida por governar a dinâmica não-linear de muitos sistemas em vários contextos físicos, e.g., BECs e fibras ópticas não-lineares [7]. Em alguns casos particulares, sua forma permite que o modelo seja integrável [44], e portanto soluções na forma de sólitons são admissíveis. Entretanto, assim como na maioria dos sistemas de onda não-linear integráveis, a descrição pela equação NLS se limita a condições específicas, que podem advir de aproximações e/ou parâmetros associados ao modelo de EDPs. Assim, uma simples modificação no modelo pode causar a perda de integrabilidade. Como exemplo, a equação NLS 1D na forma

$$iu_z = -(1/2)u_{\tau\tau} + g|u|^2u, \quad (2.10)$$

descreve a propagação de sólitons que originam do balanço entre o efeito de dispersão de segunda ordem e o efeito não-linear cúbico, que surgem em sistemas efetivamente 1D no contexto de BECs e fibras ópticas não-lineares, em que no primeiro tem-se a coordenada espacial x no lugar do tempo retardado τ , e o tempo t no lugar da variável de propagação Z . A Eq. (2.10) é integrável para qualquer $g < 0$ e o par de Lax correspondente foi descoberto por Zakharov e Shabat em 1971 [6, 44]. No contexto de fibras ópticas, sólitons temporais claros são pulsos ópticos localizados, que são descritos com boa aproximação pelo modelo integrável em questão quando a largura temporal do pulso é superior a 4-5 picosegundos. No entanto, para pulsos mais curtos, esse modelo se torna insuficiente, de forma que termos dispersivos e não-lineares de ordem mais alta (desprezados na derivação da Eq. (2.10)) devem ser incluídos. Assim, no caso em que $g = -1$, tem-se (veja [7, p. 89] ou [6, p. 9] para mais detalhes)

$$iu_z = -(1/2)u_{\tau\tau} - |u|^2u + i\delta_3 u_{\tau\tau\tau} - is(|u|^2u)_\tau + \tau_R u(|u|^2)_\tau, \quad (2.11)$$

em que os termos adicionados descrevem, respectivamente, dispersão de terceira ordem, *self-steepening* e espalhamento intrapulso Raman. Outra causa de não integrabilidade

comumente decorre de acoplamentos entre sólitons em sistemas multi componentes. Em alguns casos, a dinâmica das componentes é ditada por EDPs acopladas que também são do tipo NLS. Um modelo interessante para exemplificação é dado pelas equações

$$iA_z - (\beta_2/2)A_{\tau\tau} + \gamma(|A|^2 + \delta|B|^2)A = 0, \quad (2.12)$$

$$iB_z - (\beta_2/2)B_{\tau\tau} + \gamma(|B|^2 + \delta|A|^2)B = 0, \quad (2.13)$$

que descrevem a interação de dois pulsos ópticos com diferentes comprimentos de onda, co-propagando ao longo dos eixos principais de uma fibra monomodo birrefringente [6, 8]. As Eq. (2.12) e (2.13) acima, também regem a evolução de ondas de matéria que emergem em diferentes componentes de um BEC binário, quando nesse predomina somente a interação de dois corpos na ausência de confinamento (potencial externo) na direção de propagação [45, 46]. Mesmo com o termo adicional de acoplamento ($\delta \neq 0$), as Eq. (2.12) e (2.13) podem ser integráveis se $\delta = 1$ (equações de Manakov). Para qualquer outro valor não nulo de δ , o regime é de não integrabilidade. Portanto, uma abordagem puramente analítica é bastante restrita, e isso se estende de forma similar para grande parte dos sistemas encontrados na física.

A não integrabilidade de sistemas não-lineares de onda é responsável por cenários muito mais ricos e complexos, em que sólitons podem se mostrar instáveis durante sua evolução, o que frequentemente leva ao decaimento das soluções por processos como emissão de radiação (ou perda de partículas no caso de ondas de matéria) e/ou *splitting* (sóliton se quebra em múltiplos sólitons mais estáveis) [6]. Em vários modelos, a dinâmica de colisão elástica envolvendo ondas solitárias na forma de sólitons se restringe frequentemente a cenários em que a velocidade de aproximação (taxa de redução da distância de separação entre os perfis localizados das ondas solitárias) é suficientemente alta, de forma que essas se manifestam como sólitons propriamente (i.e., colidem elasticamente). Em cenários de colisão envolvendo múltiplos sólitons, a velocidade de aproximação é comumente tomada como parâmetro inicial de controle, quando essa é suficientemente baixa (regime de baixa energia cinética) o espalhamento de sólitons pode envolver interações não triviais, estados ligados, caos, etc. Dependendo do tipo e da intensidade do acoplamento responsável pela interação entre os sólitons, cenários de colisão ainda mais complexos podem surgir. Essa complexidade está muitas vezes associada a uma dinâmica de interação imprevisível e extremamente sensível às condições iniciais (espalhamento caótico). Em modelos governados por equações NLS não integráveis, podem existir condições definidas pelo parâmetro inicial de controle em que a regularidade dos processos de colisão é verificada em meio ao espalhamento caótico, tais condições podem ser recorrentes e estão associadas a intervalos (janelas) em que a sensibilidade com o parâmetro de controle é inexistente. Essas janelas de regularidade podem

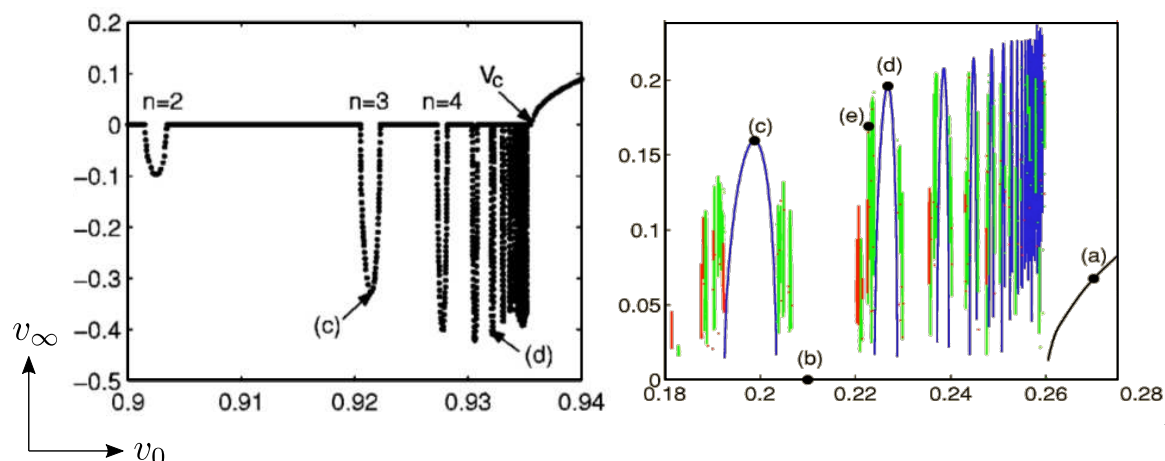
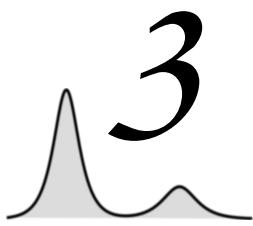


Figura 2.5 Estruturas de janelas de reflexão no gráfico de espalhamento para: colisões entre sólitons vetoriais governados pelas Eq. (2.12) e (2.13) com $\beta_2 = -2$, $\gamma = 1$ e $\delta = 0.2$ (à esquerda - figura retirada da Ref. [15]); colisões entre sólitons *kink* e *anti-kink* no modelo de teoria clássica de campos (não integrável) ϕ^4 unidimensional (à direita - figura retirada da Ref. [50]). Em ambos os gráficos, os pontos no espaço de velocidades são resultados de simulações numéricas diretas, que mostram a correlação entre a velocidade de saída obtida após a colisão (v_∞) e a velocidade de aproximação (v_0) dos sólitons (parâmetro de controle que varia a cada colisão).

compor estruturas complexas e muito interessantes, que podem se manifestar na forma de fractais assim como constatado nas Ref. [15, 16, 19, 47, 48], que também foram observados em outros sistemas como nos modelos de teoria clássica de campos ϕ^4 [17, 49, 50] e SG [18, 22, 51, 52]. Exemplos de estruturas que apresentam padrões fractais são mostradas na Fig. 2.5, onde colisões em modelos diferentes revelam resultados de espalhamento bem semelhantes.

Posteriormente no sexto capítulo serão apresentados os resultados numéricos do estudo do espalhamento de sólitons gaussianos (também chamados de *gaussons*) via acoplamento linear. Esse estudo considera um caso específico em que a não-linearidade e a intensidade do acoplamento permitem o surgimento de estruturas de janelas análogas às da Fig. 2.5. Assim como mencionado anteriormente no primeiro capítulo, pulsos de luz propagando em uma fibra óptica não-linear com não-linearidade logarítmica (abordados no próximo capítulo) podem assumir a forma de *gaussons*, e o espalhamento não trivial desses pulsos pode ocorrer quando duas fibras são reestruturadas na forma de um dispositivo conhecido acoplador óptico direcional, que induz um efeito de acoplamento do tipo linear. O próximo capítulo trata da propagação de luz em fibras ópticas de um núcleo, e visa introduzir o contexto físico que é foco do trabalho de pesquisa.



Propagação de luz em fibras ópticas

3.1 Aspectos gerais das fibra ópticas

Fibras ópticas são geralmente constituídas de vidro de sílica pura, sintetizada a partir da fusão do dióxido de silício (SiO_2), que é um material favorável a propagação de luz por apresentar baixa dissipação (perda de intensidade). A estrutura cilíndrica de uma fibra óptica é composta por três partes: núcleo, revestimento e capa (em inglês, *jacket*). Esses são fabricados com materiais diferentes para que o índice de refração nas camadas externas (revestimento e capa) sejam menores que no interior (núcleo) [8, 13]. A Fig. 3.1 ilustra a estrutura básica de uma fibra com índice de refração em degraus (*step-index fiber*), e mostra como esse varia radialmente. Nesse tipo de fibra, a estrutura age como um guia de onda perfeito para qualquer luz na forma ondas planas que incidir com ângulo $\theta \leq \theta_c$, em que θ_c é o ângulo crítico para que ocorra a reflexão total da luz no interior da fibra (veja Fig. 3.2). O seno desse ângulo fornece a quantidade chamada de *abertura numérica*, que é utilizada na caracterização de fibras ópticas. Se o diâmetro do núcleo não for muito pequeno, de maneira que a representação de raios seja aplicável, encontra-se que $\sin(\theta_c) = n_0^{-1}(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$ [53].

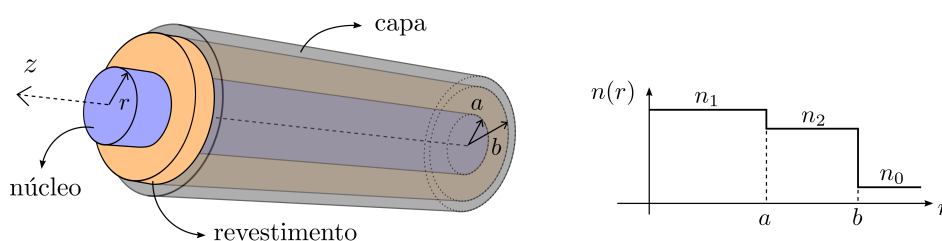


Figura 3.1 Ilustração dos componentes de uma fibra óptica e perfil do índice de refração $n(r)$ em função da distância radial r (fora de escala). Aqui, a espessura da capa é desprezada no gráfico, de modo que n_0 é o índice de refração do meio que circunda a fibra.

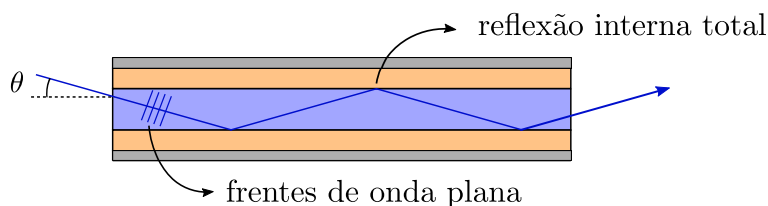


Figura 3.2 Propagação de uma frente de ondas planas na representação de raios ilustrada para o caso em que $\theta < \theta_c$, a reflexão interna total ocorre na interface núcleo-revestimento (esquema de cores idêntico ao da Fig. 3.1).

O valor da abertura numérica se limita ao intervalo $[0, 1)$, quanto mais próximo de 1 (o que é equivalente a $\theta_c = \pi/2$, i.e., toda luz incidente permanece no núcleo), maior é a quantidade de energia eletromagnética que permanece confinada na região do núcleo. Para fibras de único modo (que serão discutidas posteriormente), a expressão anterior não é válida, pois o caráter ondulatório da luz se torna relevante e efeitos não-lineares têm um papel importante. No entanto, a abertura numérica ainda pode ser calculada a partir do estudo detalhado da propagação da luz, variando de 0.05 até 0.4 para fibras de único modo, sendo que valores considerados elevados (e.g. 0.3) são frequentemente encontrados no caso de fibras com suporte de muitos modos (mais informações na Ref. [53]).

No tocante à composição do núcleo e do revestimento da fibra, esses são concebidos a partir da mesma base de sílica pura, que tem suas propriedades ópticas modificadas pela quantidade de dopantes adicionados durante o processo de fabricação. Sílica dopada com GeO_2 e P_2O_5 tem índice de refração mais elevado, e por isso é empregada no núcleo. Já a dopagem com boro e flúor promove a redução do índice de refração da sílica, sendo usada no revestimento da fibra (para mais detalhes veja a Ref. [7, 8]).

3.2 Considerações iniciais sobre a propagação de luz

A propagação de ondas eletromagnéticas em materiais dielétricos induz oscilações nos elétrons ligados das moléculas constituintes, o efeito coletivo de toda a estrutura cristalina do material depende essencialmente da frequência óptica ω , da intensidade do campo elétrico $I \propto |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2$ e de sua polarização. As contribuições magnética dependentes da intensidade são geralmente muito pequenas ($\propto In^2/c^2$, em que c/n é a velocidade de propagação da luz no meio), e podem ser desprezadas. Na ausência de dissipação, a resposta do material se manifesta com mais relevância no índice de refração $n(\omega)$ e no campo de polarização $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ induzido pelos dipolos elétricos, que por sua vez modificam como as ondas eletromagnéticas interagem com o mesmo. Na realidade, esse cenário é alcançado pela minimização dos efeitos

dissipativos do material. Para isso, é necessário considerar as frequências de ressonância ω_i associadas às transições eletrônicas, de modo que ω seja escolhido para garantir que $|\omega - \omega_i|$ seja suficientemente grande. Em fibras de sílica, a dissipação se deve principalmente à absorção e ao espalhamento Rayleigh, cujas contribuições são embutidas em um espectro de perda que auxilia na escolha da janela de frequência óptica [8, p. 6].

Considerando uma onda eletromagnética na forma de um pulso óptico com frequência central ω_0 e largura de banda $\Delta\omega$, os efeitos de dispersão induzidos durante sua propagação em uma fibra óptica monomodo, são investigados através da constante de modo de propagação $\beta(\omega)$ (em inglês, *mode-propagation constant*), que determina como a amplitude e a fase das componentes espectrais do pulso variam ao longo da direção de propagação (comumente denotada por z) [7, 8]. Em termos físicos, $\beta(\omega)$ é análogo ao número de onda $k(\omega)$, e seu uso no lugar do último é comum quando se considera a propagação de luz em guias de onda. Os efeitos dispersivos embutidos na constante de propagação, são levados em conta por meio de uma expansão em série de Taylor centrada em ω_0 , que será empregada posteriormente na derivação de outras equações, essa é expressa na forma

$$\beta(\omega) = \frac{n(\omega)\omega}{c} = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \dots, \quad \beta_m = \left(\frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right)_{\omega_0}, \quad (3.1)$$

em que o coeficiente β_m fornece a magnitude da dispersão de m -ésima ordem. Expandindo $n(\omega)\omega/c$ também em ω_0 , tem-se

$$n(\omega)\omega = n(\omega_0)\omega_0 + (\omega - \omega_0) \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right)_{\omega_0} + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} \left(2 \frac{dn}{d\omega} + \omega \frac{d^2n}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} + \dots, \quad (3.2)$$

e identificando com os termos da Eq. (3.1), encontra-se

$$\beta_1 = \frac{1}{c} \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right)_{\omega_0} = \frac{1}{v_g} = \frac{n_g}{c}, \quad \beta_2 = \frac{1}{c} \left(2 \frac{dn}{d\omega} + \omega \frac{d^2n}{d\omega^2} \right)_{\omega_0}, \quad (3.3)$$

em que β_1 é dado em termos do índice de refração de grupo (n_g) e da velocidade de grupo (v_g). Já o parâmetro β_2 está associado ao fenômeno de dispersão de velocidade de grupo (GVD - *group velocity dispersion*). Se não houver dependência do índice de refração com a frequência ($n(\omega) = n_0 = \text{cte.}$), a velocidade em que o conjunto das componentes espectrais do pulso propaga (v_g) é igual a velocidade da luz no meio c/n_0 . Caso contrário, ou seja, para praticamente todos materiais dielétricos, v_g varia ao longo da faixa de frequência da banda $[\omega_0 - \Delta\omega/2, \omega_0 + \Delta\omega/2]$. Normalmente, as componentes com $\omega < \omega_0$ propagam com maior ou menor velocidade do que aquelas com $\omega > \omega_0$, dependendo do sinal do parâmetro GVD. Isso leva ao alargamento do pulso, fenômeno conhecido como dispersão cromática [8].

Se a largura temporal do pulso não for muito pequena (veja o exemplo discutido anteriormente sobre a Eq. (2.11)), a dispersão é bem descrita até segunda ordem, isto é, apenas conhecendo β_1 e β_2 .

Para fibras de sílica fundida, os comportamentos do índice de refração e do parâmetro GVD em função do comprimento de onda (λ) são mostrados na Fig. 3.3. Nota-se que β_2 é decrescente para pequenos valores de λ , e se torna nulo quando $\lambda = \lambda_D$, em que λ_D é o valor crítico de dispersão de grupo nula ($\approx 1.27 \mu\text{m}$ no caso da sílica). Efeitos não-lineares se manifestam de maneira distinta nos regimes de $\beta_2 > 0$ ($\lambda < \lambda_D$) e $\beta_2 < 0$ ($\lambda > \lambda_D$). No primeiro regime, diz-se que a fibra exibe dispersão normal, caracterizada pela velocidade inferior das componentes de alta frequência quando comparadas com as outras de baixa frequência. O oposto acontece no segundo regime, para qual a fibra exibe dispersão anômala, cujo efeito dispersivo é passível de ser neutralizado pelos efeitos não-lineares durante a evolução do pulso óptico [8].

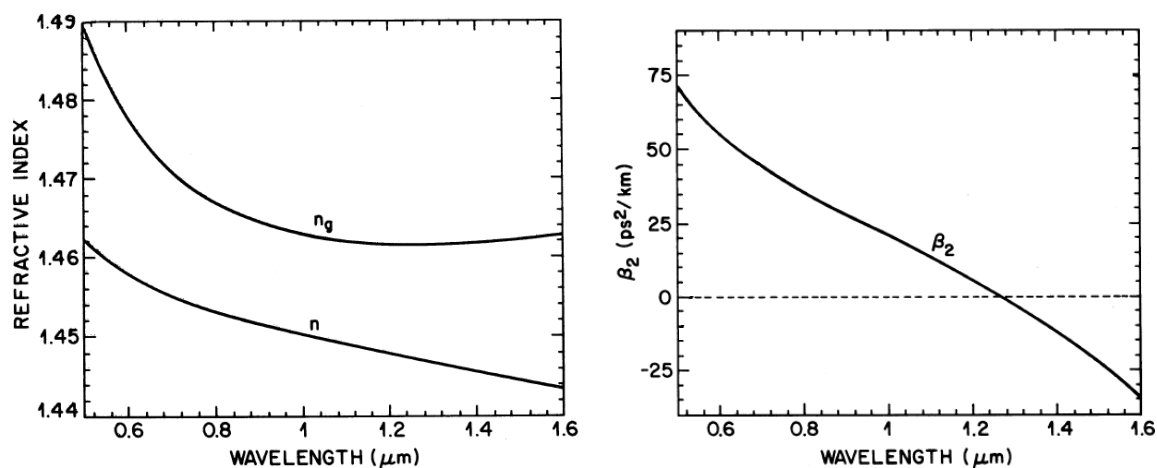


Figura 3.3 Comportamento do índice de refração n e de grupo n_g (à esquerda) e do parâmetro GVD β_2 (à direita) para a sílica fundida em função do comprimento de onda do campo eletromagnético aplicado (Figuras retirada da referência [8]).

3.3 Polarização não-linear

Em fibras ópticas e cristais não-lineares, a resposta não-linear do material dielétrico é induzida em cenários de campos eletromagnéticos intensos, em que esses promovem movimentos anarmônicos dos elétrons ligados. Oscilações dos núcleos e vibrações moleculares também surgem como resposta ao campo óptico, porém suas contribuições são normalmente muito pequenas quando comparadas com a eletrônica [8], e somente em situações excepcionais se tornam relevantes. Nesses cenários, é evidente que a estrutura molecular e cristalina do material tem um papel muito importante na determinação do campo de polarização \mathbf{P} , que não pode ser descrito pela usual aproximação linear em termos do campo elétrico aplicado \mathbf{E} . Além disso, é necessário considerar o caráter não local e não instantâneo da interação do campo com o meio, assim, uma expressão mais geral para a polarização pode ser escrita como uma expansão na forma

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = & \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}_1 dt_1 \chi^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \\
 & + \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 dt_1 dt_2 \chi^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1; \mathbf{r} - \mathbf{r}_2, t - t_2) : \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2) \\
 & + \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 dt_1 dt_2 dt_3 \chi^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1; \mathbf{r} - \mathbf{r}_2, t - t_2; \mathbf{r} - \mathbf{r}_3, t - t_3) \\
 & : \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2) \mathbf{E}(\mathbf{r}_3, t_3) + \dots
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

em que a constante ε_0 denota a permissividade elétrica no vácuo, e $\chi^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) representa o j -ésimo tensor de susceptibilidade elétrica de ordem $(j + 1)$, com 3^{j+1} componentes na forma $\chi_{k_1 k_2 \dots k_{j+1}}^{(j)}$ ($k_n = x, y, z$). Os limites de integração significam que todo o espaço e todos os instantes de tempo são considerados, de forma que a dependência espacial e temporal de $\chi^{(j)}$ determina os limites físicos (dados pelos volume e tempo de resposta do meio). O termo de ordem j da Eq. (3.4) é um vetor, $\mathbf{P}^{(j)}$, resultado da convolução de dois tensores, $\chi^{(j)}$ e \mathbf{E}^j (j produtos externos do campo elétrico) de ordem $(j + 1)$ e j , respectivamente. Definindo as variáveis auxiliares $\mathbf{R}_m = \mathbf{r} - \mathbf{r}_m$ e $\tau_m = t - t_m$, a componente k_1 da contribuição de ordem j pode ser escrita na forma aberta

$$\begin{aligned}
 P_{k_1}^{(j)}(\mathbf{r}, t) = & \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{n=1}^j d\mathbf{r}_n dt_n \sum_{m=2}^{j+1} \sum_{k_m} \chi_{k_1 k_2 \dots k_{j+1}}^{(j)}(\mathbf{R}_1, \tau_1; \dots; \mathbf{R}_j, \tau_j) \\
 & \times E_{k_2}(\mathbf{r}_1, t_1) \cdots E_{k_{j+1}}(\mathbf{r}_j, t_j).
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

O meio dielétrico pode ser interpretado como um conjunto de partículas carregadas, formando sistemas localizados de elétrons e núcleos em estados ligados centrados em cada sítio da rede cristalina. A extensão espacial desses sistemas é representada por a_0 , que

geralmente é da ordem de poucos raios de Bohr. Se o campo óptico tiver comprimento de onda da ordem de λ_0 , tal que $\lambda_0 \gg a_0$, então é legítimo negligenciar as variações do campo na extensão dos sistemas em cada sítio [54]. Na literatura isso é chamado de aproximação de longos comprimentos de onda, sendo mais conhecida como aproximação de dipolo elétrico. Assim, as integrações espaciais na Eq. (3.5) só contribuem efetivamente quando $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m| \sim a_0$ com \mathbf{r}_m centrado em qualquer um dos sítios, o que é equivalente a supor que a resposta do meio é local. Para usar essa suposição e simplificar a Eq. (3.5), considera-se a expansão em ondas planas dos tensores de susceptibilidade

$$\chi^{(j)}(\mathbf{R}_1, \tau_1; \dots; \mathbf{R}_j, \tau_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{n=1}^j d\mathbf{k}_n d\omega_n e^{-i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{R}_n - \omega_n \tau_n)} \tilde{\chi}^{(1)}(\mathbf{k}_1, \omega_1; \dots; \mathbf{k}_j, \omega_j). \quad (3.6)$$

Na aproximação de dipolo elétrico, $\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{R}_m \sim 2\pi a_0 / \lambda_0 \ll 1$, e então vale a expansão das exponenciais: $e^{\pm i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_n} = 1 \pm i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_n + \dots \approx 1$. Logo, os tensores podem ser redefinidos sem a dependência em \mathbf{R}_m , e portanto, as componentes do vetor $\mathbf{P}^{(j)}$ são escritas como

$$P_{k_1}^{(j)}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{n=1}^j dt_n \sum_{m=2}^{j+1} \sum_{k_m} \chi_{k_1 k_2 \dots k_{j+1}}^{(j)}(\tau_1, \dots, \tau_j) E_{k_2}(\mathbf{r}, t_1) \dots E_{k_{j+1}}(\mathbf{r}, t_j). \quad (3.7)$$

Daqui em diante a aproximação de dipolo elétrico será considerada em todos os cálculos, e a expressão acima será útil.

Um fato importante que deve ser levado em conta no cálculo da polarização não-linear, é a relevância do termo de segunda ordem $\mathbf{P}^{(2)}$ em materiais que possuem simetria de inversão a nível molecular. Em tais materiais, o tensor $\chi^{(2)}$ desaparece (todos os elementos são nulos) [8, p. 17], e por isso a não-linearidade surge a partir do termo de terceira ordem. No caso do dióxido de silício, essa simetria de inversão se faz presente, e portanto $\mathbf{P}^{(2)} = 0$ em fibras ópticas ideais de sílica pura. Além disso, para pulsos com duração (largura temporal) maior que 1 ps, a resposta não-linear de terceira ordem é aproximadamente instantânea, de modo que $\chi^{(3)}$ tem dependência temporal dada pelo produto de 3 deltas de Dirac, isto é, $\delta(\tau_1)\delta(\tau_2)\delta(\tau_3)$. Para pulsos de menor duração essa aproximação não é cabível, pois a contribuição de efeitos vibracionais (resposta Raman) se torna relevante, mesmo com esses ocorrendo em um escala de tempo da ordem de 60 – 70 femtossegundo [8, p. 19 e 40-41].

É importante enfatizar que o formalismo adotado aqui fornece uma perspectiva fenomenológica da resposta não-linear. No entanto, a compreensão dos processos físicos que dão origem aos efeitos observados experimentalmente, só é possível com uso da mecânica quântica [8, p. 32], que provê as ferramentas necessárias para construir os tensores de susceptibilidade conforme a interação da estrutura microscópica do meio com o campo óptico aplicado.

3.4 Propagação de pulsos ópticos

As equações que governam a dinâmica macroscópica de campos eletromagnéticos são as equações de Maxwell, que em unidades *mks* são dadas por [2]

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & (a) & \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c, & (c) \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & (b) & \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & (d) \end{aligned} \quad (3.8)$$

em que \mathbf{E} e \mathbf{B} são os vetores de campo elétrico e indução magnética, respectivamente. Esses estão relacionados com os vetores deslocamento elétrico \mathbf{D} e intensidade magnética \mathbf{H} pelas equações constitutivas

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}, \quad (3.9)$$

sendo μ_0 a permeabilidade magnética no vácuo, enquanto que \mathbf{P} e \mathbf{M} são os vetores de polarização induzida elétrica e magnética, respectivamente. Considerando meios de propagação não magnéticos e sem cargas livres, como é o caso de fibras ópticas, tem-se a densidade de carga elétrica ρ_c e de corrente \mathbf{J} nulas, assim como a magnetização \mathbf{M} .

Para obter a equação de onda que descreve a propagação de ondas eletromagnéticas, adota-se o procedimento padrão de manipulação das Eq. (3.8)(a)-(d), ou seja, primeiramente tomando o rotacional da Eq. (3.8)(a)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}), \quad (3.10)$$

então, usando a Eq. (3.8)(b) e a expressão para a velocidade da luz no vácuo $c = \sqrt{1/\mu_0 \varepsilon_0}$, obtém-se da equação anterior que

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}), \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sabendo que $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ nas condições em questão, a seguinte identidade vetorial é de utilidade

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E}. \quad (3.12)$$

Usando o resultado acima e escrevendo $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t)$, com contribuições linear (*L*) e não-linear (*NL*) explicitamente separadas, encontra-se a partir da Eq. (3.11) que

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_L}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.13)$$

Antes de investigar a propagação de pulsos ópticos a partir da Eq. (3.13), algumas aproximações podem ser tomadas para simplificar a derivação da equação de movimento do perfil de envelope. A primeira consiste em supor que o estado de polarização do pulso seja linear ao longo de um dos eixos principais da fibra (x ou y), e que esse não se altera durante a propagação na direção z (eixo da fibra). Em uma segunda aproximação, considera-se que o campo aplicado seja quase-monocromático, isto é, as frequências das componentes espectrais são muito próximas do valor central ω_0 ($\sim 10^{15}$ s), tal que $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$. Nessas circunstâncias, o perfil de envelope do campo elétrico, denotado por $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$, varia lentamente com relação ao período de oscilação médio $2\pi/\omega_0$, o que permite separar o termo de oscilação temporal e escrever que [7, 8]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}\hat{x} [\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_0 t} + c.c.] , \quad (3.14)$$

em que $c.c.$ denota o complexo conjugado do primeiro termo. O mesmo se aplica aos vetores \mathbf{P}_L e \mathbf{P}_{NL} , cujas funções envelope são denotadas usando o símbolo \mathcal{P} .

Considerando a contribuição linear da polarização, tem-se da Eq. (3.7) que a componente x é dada por (recorde que os índices dos somatórios tomam os valores x, y, z)

$$\begin{aligned} \hat{x} \cdot \mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \sum_j \chi_{(x)j}^{(1)}(t-t_1) E_j(\mathbf{r}, t_1) , \\ &= \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \chi_{xx}^{(1)}(t-t_1) E_x(\mathbf{r}, t_1) . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Substituindo $\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = (\hat{x}/2) [\mathcal{P}_L(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + c.c.]$ e identificando os termos com de mesma frequência ($\pm\omega_0$), encontra-se que

$$\mathcal{P}_L(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \chi_{xx}^{(1)}(t-t_1) \mathcal{E}(\mathbf{r}, t_1) e^{i\omega_0(t-t_1)} , \quad (3.16)$$

O teorema da convolução para as transformadas de Fourier permite escrever a equação anterior de outra forma, esse afirma que [55]

Dadas duas funções $f(t)$ e $g(t)$, absolutamente integráveis, cujas transformadas de Fourier são definidas como: $\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t}$, $\tilde{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt g(t) e^{i\omega t}$, se $h(t)$ é a convolução de ambas, isto é, $h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) g(t - \xi)$, então a transformada de Fourier de $h(t)$ é expressa como: $\tilde{h}(\omega) = \tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega)$, o que é equivalente a escrever: $h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega) e^{-i\omega t}$.

Antes de aplicar o resultado do teorema na Eq. (3.16), a seguinte expressão se mostra adequada

$$\tilde{f}(\omega \pm \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i(\omega \pm \omega_0)t}, \quad (3.17)$$

então, da Eq. (3.16) encontra-se um resultado que contém as funções no domínio de Fourier $\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega + \omega_0)$ e $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \omega)$, que após a mudança de variável $\omega \rightarrow \omega - \omega_0$, fica na forma

$$\mathcal{P}_L(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) e^{-i(\omega - \omega_0)t}. \quad (3.18)$$

Com relação a contribuição não-linear da polarização, termos de ordem maior que três produzem efeitos muito pequenos, que na maioria dos cenários de interesse podem ser negligenciados. Lembrando que $\mathbf{P}^{(2)} = 0$ e adotando a aproximação de resposta instantânea mencionada na seção anterior, tem-se que

$$\begin{aligned} \hat{x} \cdot \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 dt_3 \sum_{jkl} \chi_{(x)jkl}^{(3)} \delta(\tau_1) \delta(\tau_2) \delta(\tau_3) E_j(\mathbf{r}, t_1) E_k(\mathbf{r}, t_2) E_l(\mathbf{r}, t_3), \\ &= (\epsilon_0/8) \chi_{xxxx}^{(3)} [E_x(\mathbf{r}, t)]^3 = (\epsilon_0/8) \chi_{xxxx}^{(3)} [\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_0 t} + \mathcal{E}^*(\mathbf{r}, t) e^{i\omega_0 t}]^3, \\ &= (\epsilon_0/8) \chi_{xxxx}^{(3)} \left\{ [\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)]^3 e^{-3i\omega_0 t} + [\mathcal{E}^*(\mathbf{r}, t)]^3 e^{3i\omega_0 t} + 3|\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)|^2 E_x(\mathbf{r}, t) \right\}, \\ &= (\epsilon_0/8) \chi_{xxxx}^{(3)} \left\{ 2\Re \left([\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)]^3 e^{-3i\omega_0 t} \right) + 3|\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)|^2 E_x(\mathbf{r}, t) \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

O resultado mostrado na Eq. (3.19) contém um termo que oscila com frequência $3\omega_0$, esse é geralmente negligenciável em fibras ópticas, devido à sua defasagem com \mathbf{P}_{NL} que tem frequência ω_0 [8]. Portanto, seguindo o mesmo procedimento de identificação dos termos, obtém-se que

$$\mathcal{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) \approx \epsilon_0 \epsilon_{NL} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t), \quad \epsilon_{NL} = (3/4) \chi_{xxxx}^{(3)} |\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)|^2, \quad (3.20)$$

com $\epsilon_0 \epsilon_{NL}$ definido como sendo a constante dielétrica não-linear. No contexto em questão, o efeito não-linear promovido pela contribuição da Eq. (3.20) influencia na evolução do campo óptico através do índice de refração, que passa a depender da intensidade do campo elétrico (o que será mostrado adiante). No entanto, as mudanças promovidas no índice de refração são muito pequenas em situações práticas ($< 10^{-6}$), o que permite tratar \mathbf{P}_{NL} como uma perturbação da polarização [8, p. 41]. Retornando para a Eq. (3.13), é conveniente trabalhar no domínio de Fourier, para isso supõe-se ϵ_{NL} constante, o que é uma boa aproximação visto que $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ varia lentamente e $\chi_{xxxx}^{(3)}$ é pequeno nas condições consideradas. Ao efetuar a transformada de Fourier $\mathcal{F}(\circ)$ de todos os termos, as propriedades $\mathcal{F}(\nabla^2 \mathbf{E}) = \nabla^2 \mathcal{F}(\mathbf{E})$ e $\mathcal{F}(\partial_{tt} \mathbf{E}) = (-i\omega)^2 \mathcal{F}(\mathbf{E})$ são úteis, e com isso duas equações de Helmholtz equivalentes

surtem para a função envelope $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0)$ e seu *c.c.*,

$$\nabla^2 \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) + \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 + \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) + \varepsilon_{NL} \right] \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = 0. \quad (3.21)$$

A constante dielétrica é identificada como sendo

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) + \varepsilon_{NL}, \quad (3.22)$$

e está relacionada com o índice de refração $\bar{n}(\omega)$ e o coeficiente de absorção $\bar{\alpha}(\omega)$ pela definição $\varepsilon = [\bar{n} + i\bar{\alpha}c/(2\omega)]^2$, de onde calcula-se que

$$\begin{aligned} \Re(\varepsilon) &= \bar{n}^2 - \frac{\bar{\alpha}^2 c^2}{4\omega^2}, & \Im(\varepsilon) &= \frac{\bar{n}\bar{\alpha}c}{\omega}, & 4N^2 - 4MN - 1 &= 0, \\ &\Rightarrow \frac{\Re(\varepsilon)}{\Im(\varepsilon)} = \frac{\bar{n}\omega}{\bar{\alpha}c} - \frac{\bar{\alpha}c}{4\bar{n}\omega}, & \Rightarrow N &= \frac{\bar{n}\omega}{\bar{\alpha}c}, M = \frac{\Re(\varepsilon)}{\Im(\varepsilon)}, \end{aligned}$$

resolvendo a equação de segundo grau para N com a condição $N > 0$,

$$\begin{aligned} N &= \frac{M + \sqrt{M^2 + 1}}{2} = \frac{\Re(\varepsilon) + \sqrt{\Re(\varepsilon)^2 + \Im(\varepsilon)^2}}{2\Im(\varepsilon)} = \frac{\Re(\varepsilon) + |\varepsilon|}{2\Im(\varepsilon)}, \\ N &= \frac{\bar{n}^2}{\Im(\varepsilon)} \Rightarrow \bar{n} = \sqrt{\frac{\Re(\varepsilon) + |\varepsilon|}{2}}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\omega\Im(\varepsilon)}{\bar{n}c}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

As Eq. (3.23) fornecem as formas exatas para \bar{n} e $\bar{\alpha}$, no entanto, o coeficiente de absorção é frequentemente pequeno na maioria dos cenários de interesse envolvendo fibras ópticas, de modo que $\Im(\varepsilon)^2 \ll 1$. Assim, pode-se calcular \bar{n} da seguinte forma

$$|\varepsilon|^2 \approx \Re(\varepsilon)^2 \Rightarrow \bar{n} = \sqrt{\frac{\Re(\varepsilon) + |\varepsilon|}{2}} \approx \sqrt{\Re(\varepsilon)} = \sqrt{1 + \Re(\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}) + \Re(\varepsilon_{NL})}, \quad (3.24)$$

e como ε_{NL} é uma contribuição não-linear pequena da constante dielétrica, tem-se

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \Re(\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}) + \Re(\varepsilon_{NL})} &= \sqrt{1 + \Re(\tilde{\chi}_{xx}^{(1)})} + \frac{\Re(\varepsilon_{NL})}{2\sqrt{1 + \Re(\tilde{\chi}_{xx}^{(1)})}} + \mathcal{O} \left[\Re(\varepsilon_{NL})^2 \right], \\ \bar{n}(\omega) &\approx n(\omega) + \frac{1}{2n(\omega)} \left[\frac{3}{4} \Re(\chi_{xxxx}^{(3)}) |\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)|^2 \right], \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \Re(\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega))} \approx 1 + \frac{1}{2} \Re(\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)) \quad \text{caso } \Re(\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)) \ll 1. \quad (3.26)$$

Note que o índice de refração linear $n(\omega)$ carrega a dependência com a frequência do campo óptico, e é geralmente suficiente para descrever os processos de baixa intensidade abordados

na óptica geométrica. Quando o meio de propagação é fracamente refrativo no regime linear, se torna válida a expansão de $n(\omega)$ em termos da parte real de $\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}$, como mostrado até primeira ordem na Eq. (3.26). O resultado da Eq. (3.25) fornece diretamente o coeficiente de absorção não-linear pelo uso da última expressão nas Eq. (3.23), então, introduzindo os coeficientes n_k e α_k , associados ao índice de refração não-linear e à absorção de dois fótons, respectivamente, pode-se escrever \bar{n} e $\bar{\alpha}$ como

$$\bar{n}(\omega) = n(\omega) + n_k |\mathcal{E}|^2, \quad n(\omega) = \sqrt{1 + \Re\left(\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\right)}, \quad n_k = \frac{3}{8n} \Re\left(\chi_{xxxx}^{(3)}\right), \quad (3.27)$$

$$\bar{\alpha}(\omega) = \alpha(\omega) + \alpha_k |\mathcal{E}|^2, \quad \alpha(\omega) = \frac{\omega}{\bar{n}c} \Im\left(\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\right), \quad \alpha_k = \frac{3\omega}{4\bar{n}c} \Im\left(\chi_{xxxx}^{(3)}\right). \quad (3.28)$$

As Eq. (3.27) e (3.28) mostram como a resposta efetiva do meio depende da intensidade do campo elétrico $I \propto |\mathcal{E}|^2$, a magnitude desse efeito não-linear é proporcional aos coeficientes n_k e α_k , sendo o último frequentemente ignorado em fibras de sílica [8]. A dependência do índice de refração com o campo aplicado é conhecida como efeito óptico *Kerr* (por isso o subíndice k).

A contribuição relacionada com o efeito Kerr e o termo de absorção, podem ser tratadas como pequenas perturbações (Δn) do índice de refração linear (n), de modo que a constante dielétrica pode ser aproximada por

$$\varepsilon = [n + \Delta n]^2 \approx n^2 + 2n\Delta n, \quad \text{com } \Delta n = n_k |\mathcal{E}|^2 + \frac{i\bar{\alpha}c}{2\omega}. \quad (3.29)$$

Quando $\Delta n = 0$, a equação geral de evolução (3.13), que se aplica identicamente à intensidade magnética \mathbf{H} , não contém o último de termo, e pode ser transformada para o domínio de Fourier pelo mesmo procedimento usado anteriormente, o que fornece

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{F}} + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{F}} = 0 \quad (\mathbf{F} = \mathbf{E}, \mathbf{H}). \quad (3.30)$$

A equação de Helmholtz (3.30) governa a transformada de Fourier das seis componentes F_ρ , F_θ e F_z do campo eletromagnético, que são apropriadamente expressas em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) devido à simetria axial da fibra óptica. Levando em conta as quatro equações de Maxwell (3.8)(a)-(d), apenas duas componentes são independentes, usualmente escolhidas como sendo E_z e H_z . Adotando o método de separação de variáveis, supõe-se que

$$\tilde{F}_z(\mathbf{r}, \omega) = C(\omega) R(\rho) \Theta(\theta) e^{i\beta(\omega)z}, \quad (3.31)$$

com $\beta(\omega)$ sendo uma constante de propagação a ser determinada e $C(\omega)$ uma constante de normalização, que está associada à contribuição da componente espectral de frequência ω para a intensidade total do pulso. Substituindo a suposta solução na Eq. (3.30),

pode-se eliminar o fator $\exp(i\beta z)$ após desenvolver as derivadas do laplaciano em coordenadas cilíndricas, e com isso, depois de dividir ambos os lados da igualdade por $R\Theta$, obtém-se

$$\frac{1}{R\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\Theta\rho^2} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + (\kappa^2 - \beta^2) = 0 \quad , \quad \kappa^2 = \frac{n^2\omega^2}{c^2} \quad , \quad (3.32)$$

requerendo que as seguintes equações sejam satisfeitas

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(\kappa^2 - \beta^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0 \quad , \quad \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} - m^2 \Theta = 0 \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad . \quad (3.33)$$

Portanto, a função radial $R(\rho)$ é solução de uma equação de Bessel e a angular $\Theta(\theta)$ pode ser expressa como uma combinação linear das funções $\exp(\pm im\theta)$. Com m inteiro, a condição $\exp(\pm im\theta) = \exp[\pm im(\theta + 2\pi)]$ é satisfeita para qualquer $\theta \in [0, 2\pi)$.

As soluções da parte radial dependem da região na fibra, no núcleo (meio 1, $\rho \leq a$) o índice de refração linear é igual a n_1 , e a única exigência sobre $R(\rho)$ é que esse seja finito. No revestimento (meio 2, $a \leq \rho \leq b$), o índice de refração linear vale $n_2 < n_1$, porém $R(\rho)$ deve decair exponencialmente quando $\rho \gg a$, tal que o campo em $\rho = b$ seja aproximadamente zero. Nas Eq. (3.33), tem-se $\kappa \propto n$, sendo constante por partes (em fibras do tipo *step-index*), e para atender as condições sobre $R(\rho)$ em ambas regiões, β^2 deve ser escolhido de forma que $\kappa^2 - \beta^2$ seja positivo no núcleo e negativo no revestimento, o que permite expressar a parte radial em termos das funções de Bessel usuais $J_m(\rho)$ e modificadas $K_m(\rho)$ (que decaem exponencialmente com $\rho \gg 1$) [55] como a seguir

$$R(\rho) = \begin{cases} J_m(\zeta_1 \rho) \quad , \quad \text{para } \rho \leq a \quad , & \zeta_1 = \sqrt{(n_1\omega/c)^2 - \beta^2} \quad , \\ K_m(\zeta_2 \rho) \quad , \quad \text{para } a \leq \rho \leq b \quad , & \zeta_2 = \sqrt{\beta^2 - (n_2\omega/c)^2} \quad . \end{cases} \quad (3.34)$$

A equação de autovalor que fornece o conjunto de possíveis valores de β , denotado por $S(\beta) = \{\beta_{mn} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$, pode ser obtida pela aplicação das condições de contorno sobre campo eletromagnético $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, \omega)$ na interface dos dielétricos (meio 1 e 2), que são dadas por

$$\hat{\rho} \cdot (\tilde{\mathbf{F}}_2 - \tilde{\mathbf{F}}_1)|_{\rho=a} = 0 \quad , \quad \hat{\rho} \times (\tilde{\mathbf{F}}_2 - \tilde{\mathbf{F}}_1)|_{\rho=a} = 0 \quad . \quad (3.35)$$

As componentes necessárias para avaliar as Eq. (3.35) podem ser escritas em termos da componente \tilde{F}_z pelo o uso das equações de Maxwell. Outra possibilidade é trabalhar com os potenciais escalar e vetorial no gauge de Lorentz, que no caso em questão obedecem as mesmas equações de onda do campo eletromagnético. No conjunto $S(\beta)$, n representa as múltiplas soluções possíveis para cada m , que dependem diretamente da frequência ω através do índice de refração.

O fato de que somente duas componentes do campo eletromagnético são independentes, que aqui foram escolhidas como sendo \tilde{E}_z e \tilde{H}_z , combinado com o conjunto de soluções $S(\beta)$ para a constante de propagação, resulta em dois tipos de modos suportados pela fibra óptica, denotados na literatura por HE_{mn} e EH_{mn} . Tais modos envolvem todas as seis componentes do campo quando $m > 0$, apenas no caso em que $m = 0$ pode-se ter a componente axial do campo elétrico ou magnético nula, assim como nos modos de transversal elétrica (TE) e magnética (TM) de guias de onda planares [8].

Quando um campo óptico ideal monocromático (comprimento de onda igual a λ) propaga no interior da fibra, a distribuição modal das componentes eletromagnéticas pode ser estabelecida como uma mistura de vários modos, tornando a descrição da evolução bastante complicada. O cenário mais simples ocorre quando a fibra suporta somente um único modo, denominado modo fundamental, o que depende de parâmetros de construção como o raio do núcleo a e a diferença $\delta n = n_1 - n_2$, além de outros como o comprimento de onda de corte λ_c associado a cada modo. Como exemplo, para uma fibra com $\delta n = 0.005$, $\lambda_c = 1.2 \mu m$ e $a = 4 \mu m$, verifica-se que sua operação com um único modo se dá quando $\lambda > 1.2 \mu m$ [8]. Independentemente das características da fibra, o modo fundamental em questão é sempre o modo HE_{11} , que embora represente uma distribuição de campo com as três componentes não nulas, geralmente tem-se a parte transversal como dominante, sendo essa dada pela combinação das componentes E_x e E_y associadas a estados de polarização ortogonais. A distribuição modal dessas componentes são equivalentes, e correspondem a modos degenerados (mesma constante de propagação) independentes. Por isso, na realidade o modo fundamental resulta de dois modos ortogonais, que em condições ideais mantém a polarização resultante constante. No entanto, irregularidades na fibra óptica podem causar a quebra da degenerescência dos modos e, conseqüentemente, desordenar o estado de polarização do campo. Isso pode ser evitado com uso de fibras ópticas que preservam a polarização da luz incidente, de maneira que o campo transversal se estabeleça como um único modo linearmente polarizado ao longo de um dos eixos principais da fibra (mais detalhes na Ref. [8]). Nesse caso, escolhendo \hat{x} ao longo de um desses eixos, o campo óptico com distribuição modal HE_{11} tem sua componente \tilde{E}_x como dominante, essa pode ser calculada usando \tilde{E}_z (dado pela Eq. (3.31) e pelas soluções da parte radial e angular com $m = 1$), ou seja,

$$\tilde{E}_z(\mathbf{r}, \omega) = \begin{cases} C_{11}(\omega) J_1(\zeta_1 \rho) \cos(\theta) e^{i\beta_{11}(\omega)z} , & \text{para } \rho \leq a , \\ C_{12}(\omega) K_1(\zeta_2 \rho) \cos(\theta) e^{i\beta_{11}(\omega)z} , & \text{para } a \leq \rho \leq b , \end{cases} \quad (3.36)$$

e usando o divergente do campo elétrico da seguinte forma

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta) \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial \rho} = i\beta_{11} \tilde{E}_z , \quad (3.37)$$

em que aplicou-se a regra da cadeia junto ao resultado $\partial\rho/\partial x = \cos(\theta)$. Aqui, C_{11} e C_{12} são constantes determinadas pelas condições de continuidade na interface ($\rho = a$) e de normalização do campo. Supondo $\tilde{E}_x = L(\omega) R_x(\rho) \exp(i\beta_{11}z)$, pode-se incorporar $i\beta_{11}$, C_{11} e C_{12} na contante $L(\omega)$. Usando a propriedade das funções de Bessel, $Q_{m+1}(\rho)/\rho^m = -d/d\rho [Q_m(\rho)/\rho^m]$, com Q sendo as funções usuais e modificadas [55], deduz-se que

$$\tilde{E}_x(\mathbf{r}, \omega) = \begin{cases} L_{11}(\omega) J_0(\zeta_1 \rho) e^{i\beta_{11}(\omega)z} , & \text{para } \rho \leq a , \\ L_{12}(\omega) K_0(\zeta_2 \rho) e^{i\beta_{11}(\omega)z} , & \text{para } a \leq \rho \leq b , \end{cases} \quad (3.38)$$

sendo que os valores das constantes são determinados como antes. Ao invés de lidar com as funções J_0 e K_0 , o perfil radial $R_x(\rho)$ é frequentemente aproximado por uma distribuição gaussiana na forma $\exp(-\rho^2/w^2)$ [8], em que w é encontrado pelo ajuste com o perfil exato.

Na derivação da Eq. (3.21), considerou-se o campo óptico como sendo linearmente polarizado na direção \hat{x} , o que é válido no contexto anterior caso a componente z seja de fato muito pequena. Assim, a Eq. (3.38) fornece uma solução não perturbada pelo termo Δn . Para resolver a Eq. (3.21), o método de separação de variáveis é novamente útil, então considera-se que existem soluções na forma

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = \Phi(x, y) \tilde{\phi}(z, \omega - \omega_0) e^{i\beta_0 z} , \quad (3.39)$$

com $\phi(z, t) \exp[i(\beta_0 z - \omega_0 t)]$ e $\Phi(x, y)$ representando, respectivamente, os perfis longitudinal e transversal da função $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t)$, cuja representação no domínio de Fourier é dada pela Eq. (3.39) acima. Aqui, β_0 é um número de onda a ser determinado. Substituindo a suposta solução na Eq. (3.13), pode-se eliminar o fator $\exp(-i\omega_0 t)$ após desenvolver as derivadas, e com isso, depois de dividir ambos os lados da igualdade por $\Phi \tilde{\phi}$, obtém-se

$$\frac{1}{\Phi} \nabla_T^2 \Phi + \frac{1}{\tilde{\phi}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial z^2} + 2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} - \beta_0^2 \tilde{\phi} \right) + \frac{\varepsilon(\omega) \omega^2}{c^2} = 0 , \quad (3.40)$$

em que $\nabla_T^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ é o operador laplaciano transversal. Se $\tilde{\phi}(z, \omega - \omega_0)$ for uma função que varia lentamente com z , o termo $\partial_{zz} \tilde{\phi}$ passa a ser muito menor que $\partial_z \tilde{\phi}$, podendo ser desprezado na atual abordagem. Para que a Eq. (3.40) seja válida, é necessário afirmar que

$$\nabla_T^2 \Phi + \frac{\varepsilon(\omega) \omega^2}{c^2} \Phi = \bar{\beta}^2 \Phi \quad , \quad 2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} - \beta_0^2 \tilde{\phi} = -\bar{\beta}^2 \tilde{\phi} , \quad (3.41)$$

sendo $\bar{\beta}^2$ uma constante real. A equação de Helmholtz que governa a função $\Phi(\rho, \theta)$ (em coordenadas polares), pode ser resolvida pelo mesmo procedimento anterior, fornecendo equações análogas as Eq. (3.33). Para a parte angular a equação é idêntica, enquanto que para a parte radial a equação de Bessel contém um termo adicional perturbativo,

e pode ser escrita na forma

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(\kappa^2 - \bar{\beta}^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = \eta R, \quad \eta = \frac{-2n\Delta n \omega^2}{c^2}. \quad (3.42)$$

Uma solução aproximada é fornecida pela teoria de perturbação, até primeira ordem em Δn não há correções para $\Phi(x, y)$, já para o autovalor encontra-se que [7, 8]

$$\bar{\beta}(\omega) = \beta(\omega) + \gamma |\phi(z, t)|^2 + \frac{i\alpha(\omega)}{2}, \quad (3.43)$$

$$\gamma \equiv \frac{n_k \omega}{c A_{\text{ef}}}, \quad A_{\text{ef}} = \frac{\int \int_{-\infty}^{\infty} dx dy |\Phi(x, y)|^4}{\left(\int \int_{-\infty}^{\infty} dx dy |\Phi(x, y)|^2 \right)^2}, \quad (3.44)$$

com $\beta(\omega) = \beta_{11}(\omega)$ associado ao modo fundamental do campo, e tomando $\alpha_k = 0$ para escrever $\bar{\alpha} = \alpha$. Substituindo o resultado da Eq. (3.43) na equação do perfil longitudinal, surgem dois termos quadráticos dados por

$$[\bar{\beta}(\omega)]^2 = [\beta(\omega)]^2 + 2\beta(\omega)\gamma|\phi|^2 + i\beta(\omega)\alpha + \left[\gamma|\phi(z, t)|^2 + \frac{i\bar{\alpha}(\omega)}{2} \right]^2, \quad (3.45)$$

$$[\beta(\omega)]^2 = \beta_0^2 + 2\beta_0\beta_1(\omega - \omega_0) + \beta_0\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \beta_1^2(\omega - \omega_0)^2 + \beta_1\beta_2(\omega - \omega_0)^3 + \frac{1}{4}\beta_2^2(\omega - \omega_0)^4 + \dots, \quad (3.46)$$

em que a expansão de $\beta(\omega)$ mostrada na Eq. (3.1) foi empregada. Na atual abordagem, a largura espectral do pulso óptico é muito pequena ($\Delta\omega \ll \omega_0$), e com isso algumas aproximações são possíveis. No caso da Eq. (3.45), $\beta(\omega)$ pode ser aproximado por β_0 no segundo e no terceiro termo, enquanto que o último, sendo da ordem de $(\Delta n)^2$, pode ser desprezado. Já na Eq. (3.46), se a velocidade de grupo for tal que $\beta_1^2 \ll \beta_0\beta_2$, vale a aproximação dada somente pelos três primeiros termos. Com isso, obtém-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} &= \frac{i\tilde{\phi}}{\beta_0} \left[\frac{\beta^2}{2} + \beta_0\gamma|\phi|^2 + \frac{i\beta_0\alpha}{2} - \frac{\beta_0^2}{2} \right], \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} &= i\tilde{\phi} \left[\beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \gamma|\phi|^2 + \frac{i\alpha}{2} \right], \end{aligned} \quad (3.47)$$

O significado físico do resultado acima pode ser claramente avaliado considerando a variação de $\tilde{\phi}$ quando z sofre um incremento Δz pequeno, permitindo que $|\phi|^2$ seja tratado como constante no intervalo $[z, z + \Delta z]$, assim

$$\tilde{\phi}(z + \Delta z, \omega - \omega_0) \approx \tilde{\phi}(z, \omega - \omega_0) e^{-\alpha/2 + i[\beta_1(\omega - \omega_0) + \beta_2(\omega - \omega_0)^2/2 + \gamma|\phi|^2]}. \quad (3.48)$$

A parte real da exponencial mostra que α (positivo) está relacionado com decaimento da intensidade do campo devido ao processo de absorção. Já a parte imaginária mostra que

cada componente espectral do pulso sofre uma mudança de fase ao propagar pela fibra, que depende de sua frequência e da intensidade do campo. Esse efeito é conhecido como *auto modulação de fase* (SPM - *self-phase modulation*), e é responsável pelo alargamento ou estreitamento do perfil de envelope dependendo do sinal de γ (i.e., de n_k).

Tomando a transformada de Fourier inversa da Eq. (3.47) e usando a propriedade

$$[-i(\omega - \omega_0)]^n \tilde{\phi}(z, \omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\partial^n \phi(z, t)}{\partial t^n} e^{i(\omega - \omega_0)t}, \quad (3.49)$$

encontra-se que o perfil longitudinal é governado pela seguinte equação não-linear

$$i \frac{\partial \phi}{\partial z} + i\beta_1 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \gamma |\phi|^2 \phi + \frac{i\alpha}{2} \phi = 0, \quad (3.50)$$

A Eq. (3.50) descreve a evolução temporal de pulsos com duração de picosegundos, que propagam em fibras ópticas de único modo ao longo do eixo mapeado pela coordenada z . O segundo termo está associado à dispersão de primeira ordem que descreve a propagação do envelope com velocidade de grupo $1/\beta_1$, e o terceiro corresponde à dispersão de segunda ordem como consequência da GVD. Os efeitos de SPM e absorção são descritos pelos quarto e quinto termos, respectivamente.

O parâmetro A_{ef} definido em termos da razão entre as integrais no plano transversal mostradas anteriormente, é conhecido como área efetiva do modo (também chamado de área efetiva do núcleo), cujo valor depende da distribuição modal do modo fundamental e das características da fibra [7, 8, 53]. Para o perfil gaussiano com raio w citado anteriormente, a área efetiva vale πw^2 , para outras distribuições encontradas em situações práticas ocorrem pequenos desvios desse valor. Fibras ópticas de único modo destinadas para o uso em comunicações têm $A_{\text{ef}} \sim 100 \mu\text{m}^2$, valor relativamente alto quando comparadas com fibras de cristais fotônicos que possuem $A_{\text{ef}} < 10 \mu\text{m}^2$. Sua relação com a não-linearidade é clara, isto é, quanto menor a área efetiva maior é o valor de γ e, conseqüentemente, mais significativo é o papel do efeito não-linear.

No referencial do pulso, que o acompanha se deslocando com a velocidade de grupo, a equação de movimento (3.50) dispensa o termo de dispersão de primeira ordem e passa a depender de novas coordenadas denotas por (Z, τ) . Considerando uma mudança de variáveis em que $\tau = c_1 t + c_2 z$ e $z = c_3 Z$, com as constantes $c_m \in \mathbb{R}$, pode-se facilmente mostrar que o termo o proporcional a β_1 é eliminado quando

$$\begin{cases} U(Z, \tau) = \sqrt{L_D |\gamma|} \phi(z, t), \\ \tau = (t - |\beta_1| Z) / T_0, \quad z = Z / L_D, \end{cases} \quad (3.51)$$

em que $L_D = T_0^2/|\beta_2|$ e T_0 são constantes de reescala, sendo a primeira chamada de comprimento de dispersão [7]. Note que τ , conhecido como tempo retardado, mede distâncias temporais a partir do pico do pulso, onde esse é zero. Assim, um ponto à frente do pico ($\tau > 0$) está separado do mesmo por uma distância espacial de $T_0\tau/|\beta_1|$. Nesse referencial, a Eq. (3.50), sem perdas por absorção ($\alpha = 0$), é reescrita para $U(Z, \tau)$ na forma adimensional

$$i \frac{\partial U}{\partial Z} - \frac{s}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \pm |U|^2 U = 0, \text{ com } s = \text{sgn}(\beta_2). \quad (3.52)$$

A equação acima é do tipo não-linear de Schrödinger com não-linearidade cúbica, pois seu terceiro termo é da ordem de U^3 . Com relação ao sinal de β_2 , no regime de GVD normal tem-se $s > 1$, enquanto que no regime de GVD anômala $s < 1$. O sinal \pm da não-linearidade reflete o sinal de n_k associado ao efeito óptico Kerr, cujo resultado efetivo da auto modulação de fase sobre pulso é semelhante ao processo induzido por lentes ópticas (veja Fig. 3.4), em que o pulso estreita para $n_k > 0$ (*self-focusing*) e alarga quando $n_k < 0$ (*self-defocusing*).

Em alguns cristais não-lineares, uma equação análoga modela a propagação de feixes de onda contínuo confinados em uma direção transversal (x), em que a coordenada espacial x entra no lugar de τ , e o tempo t substitui Z . Nesse caso o termo dispersivo decorre do fenômeno de difração do campo óptico, que naturalmente alarga o perfil transversal do feixe ao longo da direção de propagação, enquanto que o termo não-linear corresponde ao efeito óptico Kerr, que tende a convergir (divergir) o feixe no regime de *self-(de)focusing*. Em ambos cenários envolvendo pulsos ou feixes de luz, soluções auto-aprisionadas (*self-trapped*) na forma de sólitons podem surgir como resultado da compensação da dispersão pelo efeito não-linear, sendo chamados de sólitons temporais no primeiro cenário e de sólitons espaciais no segundo [7].

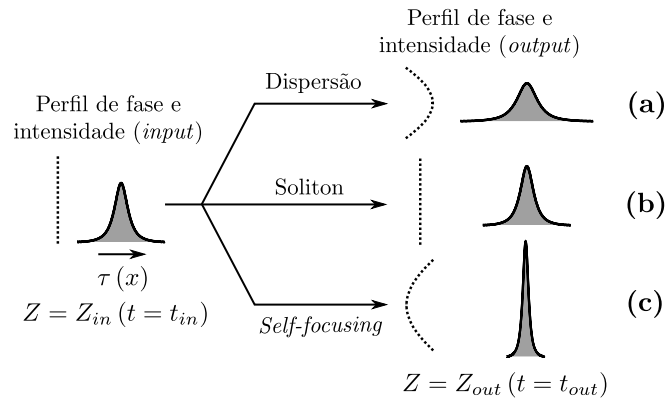


Figura 3.4 A evolução do perfil de envelope de um pulso (feixe) óptico de *input* na forma de um sóliton temporal (espacial) é ilustrada em três cenários, o perfil de fase de *output* é análogo ao efeito produzido por lentes sobre o perfil plano de *input*: (a) dispersão alarga o perfil (lente divergente); (b) dispersão é perfeitamente balanceada pelo efeito de *self-focusing*; (c) na ausência de dispersão, efeito não-linear de *self-focusing* estreita o perfil (lente convergente).

3.5 Outros tipos de não-linearidade

No cenário tratado anteriormente, a maior mudança não-linear do índice de refração se dá na vizinhança do pico do pulso, com coordenada denotada por τ_0 , em que o desvio do valor linear é igual a $n_k I(Z, \tau_0)$, sendo a intensidade do campo óptico $I \propto |U|^2$. No entanto, quando $I(Z, \tau_0)$ excede um limiar característico do material, a contribuição não-linear $n_{nl}(I)$ passa a ter outra forma funcional. No caso de cristais PTS (sigla para *p-toluene sulfonate*), medidas experimentais na região de comprimento de onda $\lambda = 1600 \text{ nm}$, mostram que para intensidades suficientemente altas se torna necessário a inclusão de um termo tal que

$$n_{nl}(I) = n_c I + n_q I^2, \quad (3.53)$$

sendo n_c e n_q constantes de sinais opostos associadas aos efeitos não-lineares cúbico e quártico, respectivamente. O fato de que $n_c n_q < 0$ remete ao caráter competitivo das duas não-linearidades [7].

Em materiais fotorrefrativos, a não-linearidade exibe um comportamento de saturação no regime de campos intensos, em que a mudança no índice de refração tende assintoticamente para um valor limite (n_∞) conforme a intensidade do campo óptico excede um limiar denotado por I_{sat} . Sólitons fotorrefrativos surgem devido a esse tipo de não-linearidade, que pode ser abordada fenomenologicamente pela expressão [7]

$$n_{nl}(I) = n_\infty \left[1 - \frac{1}{(1 + I/I_{sat})^p} \right], \quad (3.54)$$

em que p é uma constante. No limite de intensidades muito inferiores ao valor de saturação ($I \ll I_{sat}$), vale a aproximação $n_{nl}(I) \approx p n_\infty I/I_{sat}$ que corresponde a uma não-linearidade do tipo cúbica.

No contexto de fibras ópticas não-lineares, a não-linearidade logarítmica tem potencial aplicação na descrição de campos ópticos fortemente confinados propagando em nano guias fotônicas de onda [56]. Tais guias de onda são fibras ópticas cujo diâmetro varia de algumas dezenas até poucas centenas de nanômetros, sendo bem inferior ao diâmetro das fibras padrões que é da ordem de dezenas de micrômetros. Nanofibras ópticas também são conhecidas como nanofios fotônicos ou fibras de sub-comprimento de onda (em inglês, *sub-wavelength fibers*), pois têm diâmetros frequentemente menores do que o comprimento de onda da luz incidente [53]. Devido a grande diferença entre os índices de refração do interior da fibra e do ar ($n_1, n_2 \gg n_0$), a abertura numérica das nanofibras é muito alta, e por isso pulsos ópticos propagam com a maior parte da energia confinada no núcleo, com o campo evanescendo significativamente na região imediatamente fora da fibra. Além disso, a área efetiva do modo é muito pequena, sendo responsável pela não-linearidade bastante

intensa induzida pela interação do pulso com o meio dielétrico da nanofibra [53]. Portanto, sugere-se que o efeito de SPM com forma funcional logarítmica possa ser um bom candidato para um modelo nesse contexto, então a mudança não-linear do índice de refração é escrita como

$$n_{nl}(I) = n_e \ln(I^p + 1) , \quad (3.55)$$

em que p denotada uma constante positiva, e n_e é um valor de escala para o índice de refração. Note que a condição $n_{nl}(0) = 0$ é atendida. Para intensidades suficientemente baixas, de modo que $I^p \ll 1$, a Eq. (3.55) para $p = 1$ pode ser aproximada pela não-linearidade cúbica + quártica dada pela Eq. (3.53), em que encontra-se $n_c = n_e$ e $n_q = -n_e/2$. Para $p = 2$, tem-se até primeira ordem somente o termo quártico com $n_q = n_e$. No caso de campos intensos, com $I^p \gg 1$ em uma região localizada ao redor do pico de intensidade, I^p pode ser trocado pela variável auxiliar $1/x$ e a função logarítmica expandida em série de potências, com isso obtém-se

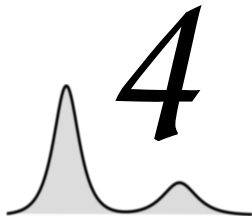
$$n_{nl}(I) = n_e \left[\ln(I^p) + I^{-p} - \frac{1}{2} I^{-2p} + \mathcal{O}(I^{-3p}) \right] . \quad (3.56)$$

Na região de intensidade elevada do campo óptico, o primeiro termo da expansão é dominante, já na região de baixa intensidade todos os termos da expansão são necessários. Logo, se a distribuição de intensidade for suficientemente intensa e localizada, supõe-se que a dinâmica efetiva do pulso possa ser descrita de forma aproximada pela região do campo onde se concentra a maior parte da energia eletromagnética. Assim, desconsiderando as bordas de baixa intensidade, considera-se a aproximação

$$n_{nl}(I) \approx g \ln(I) , \quad (3.57)$$

em que $g = n_e p$. Embora partindo da Eq. (3.55) tal aproximação não seja aplicável para toda a extensão do campo óptico, a forma funcional mostrada na Eq. (3.57) pode ser útil se a suposição empregada for aplicável. Sua utilidade foi mostrada também na descrição de outros sistemas associados a cenários físicos variados, esses são bem modelados por equações NLS com não-linearidade logarítmica (LNLS), como no caso de sistemas dissipativos [57], de física nuclear [58], óptica [59, 60], fluídos capilares [61], e até mesmo no transporte de magma [62]. Esse tipo de equação não-linear foi explorado pela primeira vez em 1975, quando Bialynicki-Birula e Mycielski investigaram desvios de regimes lineares em sistemas quânticos [63]. Sólitons que surgem do balanço da dispersão pelo efeito não-linear do tipo logarítmico têm forma gaussiana, e são comumente chamados de *gaussons*.

No capítulo seguinte, a forma funcional de um *gausson* será derivada a partir da equação LNLS de dimensão $(1 + 1)$, e com isso uma das propriedades interessantes desse tipo de sóliton ficará evidente. Além disso, uma das seções tratará da aproximação dada pela Eq. (3.57), que é verificada por meio de simulações numéricas diretas considerando perfis iniciais na forma de *gaussions* com intensidades variadas. É importante enfatizar que a seção 4.2 será dedicada à introdução de alguns conceitos e resultados decorrentes do formalismo lagrangiano aplicado a um sistema de equações NLS acopladas de dimensão $(1 + 1)$, essa seção será útil para o entendimento do processo de obtenção do modelo reduzido apresentado no sexto capítulo.



4 Propriedades gerais de soluções de s3l3iton

4.1 Deriva33o dos perfis de s3l3iton

Assim como discutido no Cap. 1, o m3todo IS se aplica 3 a equa33o NLS c3bica padr3o 3.52, fornecendo solu33es anal3ticas de N -s3l3itons e todas as quantidades conservadas. Para que a abordagem dessa se33o se estenda para v3rios tipos de n3o-linearidade, considera-se a forma generalizada dessa equa33o adimensional dada por

$$i \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F(|U|^2)U = 0, \quad (4.1)$$

em que (x, t) s3o coordenadas de espa3o-tempo (ou tempo-espa3o) e $F(I)$ representa uma n3o-linearidade qualquer. Sabe-se que a integrabilidade da Eq. (4.1) s3o 3 verificada para casos espec3ficos, mas independentemente disso, uma maneira simples de obter solu33es particulares, consiste em supor que a fun33o de perfil de envelope $U(x, t)$ tenha a forma

$$U(x, t) = u(x) e^{i\mu t}, \quad (4.2)$$

em que $\mu \in \mathbb{R}$ 3 uma constante de propaga33o e $u(x)$ uma fun33o real. Se constatada a exist3ncia de solu33es dadas pela Eq. (4.2), ent3o essas podem corresponder a s3l3itons estacion3rios, que no caso das fibras 3pticas se movem com velocidade de propaga33o constante v_g no referencial (z, t) . Substituindo na Eq. (4.1) encontra-se

$$\begin{aligned} u_{xx} = 2[\mu - F(u^2)]u &\Rightarrow \int dx u_{xx} u_x = 2 \int dx [\mu - F(u^2)] u u_x, \\ \frac{1}{2} (u_x)^2 = 2 \int du [\mu - F(u^2)] u &\Rightarrow u_x = 2 \left\{ \int du [\mu - F(u^2)] u \right\}^{1/2}, \\ \therefore (x - x_0) = \frac{1}{2} \int du \left\{ \int du [\mu - F(u^2)] u \right\}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Nos c3lculos acima, a primeira constante de integra33o deve ser nula para que se tenha $u(x \rightarrow \pm\infty) = u_x(x \rightarrow \pm\infty) = 0$, garantindo que a solu33o seja localizada, j3 a segunda 3

incorporada pela constante x_0 . Se o resultado da integral na Eq. (4.3) puder ser expresso em termos de fun33es anal3ticas conhecidas, ent3o $u(x)$ pode ser encontrado algebricamente a partir da equa33o resultante. No caso da n3o-linearidade do tipo *dual-power* [6, 7]

$$F(I) = n_1 I^{p/2} + n_2 I^p, \quad (4.4)$$

com n_1, n_2 e p sendo constantes reais (sem rela33o com os n 's correspondentes aos 3ndices de refra33o da fibra 3ptica). Assim, a seguinte integral deve ser avaliada

$$(x - x_0) = \frac{1}{2} \int du \left\{ \frac{\mu u^2}{2} - \frac{n_1 u^{q+1}}{q+1} - \frac{n_2 u^{2q}}{2q} \right\}^{-1/2}, \quad (4.5)$$

em que $q = p + 1$. Fazendo a mudan3a de vari3vel $v = u^{-p}$ ($dv = -p du/u^q$), obt3m-se que

$$\begin{aligned} (x - x_0) &= -\frac{1}{2p} \int dv \left\{ \frac{\mu v^2}{2} - \frac{n_1 v}{q+1} - \frac{n_2}{2q} \right\}^{-1/2}, \\ (x - x_0) &= -\frac{1}{\sqrt{2\mu}p} \log \left[\mu v - \frac{n_1}{q+1} + \left(\mu^2 v^2 - \frac{2\mu n_1 v}{q+1} - \frac{\mu n_2}{q} \right)^{1/2} \right], \\ \Rightarrow \exp \left[-\sqrt{2\mu}p(x - x_0) \right] &= \mu v - \frac{n_1}{q+1} + \left(\mu^2 v^2 - \frac{2\mu n_1 v}{q+1} - \frac{\mu n_2}{q} \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

assim, isolando v na equa33o alg3brica (4.6), encontra-se

$$\begin{aligned} u(x) &= \left\{ \frac{A}{B + \cosh[D(x - x_0)]} \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad D = \sqrt{2\mu}p, \\ A &= \frac{(2+p)B\mu}{n_1}, \quad B = \operatorname{sgn}(n_1) \left[1 + \frac{(2+p)^2 n_2 \mu}{(1+p)n_1^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Quando $p = 2$, a n3o-linearidade em quest3o corresponde ao caso c3bico + qu3ntico, em que as solu33es dadas pela Eq. (4.7) descrevem s3l3itons *claros*. Se adicionalmente $n_2 = 0$ e $n_1 > 0$, tem-se o caso da n3o-linearidade c3bica *self-focusing*, ent3o $B = 1$ e usando a rela33o $\cosh^2(x/2) = [\cosh(x) + 1]/2$ obt3m-se

$$u(x) = \sqrt{\frac{2\mu}{n_1}} \operatorname{sech} \left[\sqrt{2\mu}(x - x_0) \right]. \quad (4.8)$$

Como o modelo 3 integr3vel nesse caso, as solu33es exatas mostram que a propaga33o de um perfil inicial dado por $U(x, 0) = N \operatorname{sech}(x)$ depende do valor da amplitude N . Quando $N = 1$, o perfil propaga sem mudan3a e 3 chamado de *s3l3iton fundamental*, o que corresponde a equa33o acima com $\mu = 1/2$ e $n_1 = 1$. No entanto, para valores inteiros tais que $N > 1$, denominados *s3l3itons de altas ordens*, o perfil oscila periodicamente e recupera sua forma inicial a cada $t = m\pi/2$ (com $m \in \mathbb{I}^+$) [7]. O fato dos s3l3itons serem est3veis mesmo

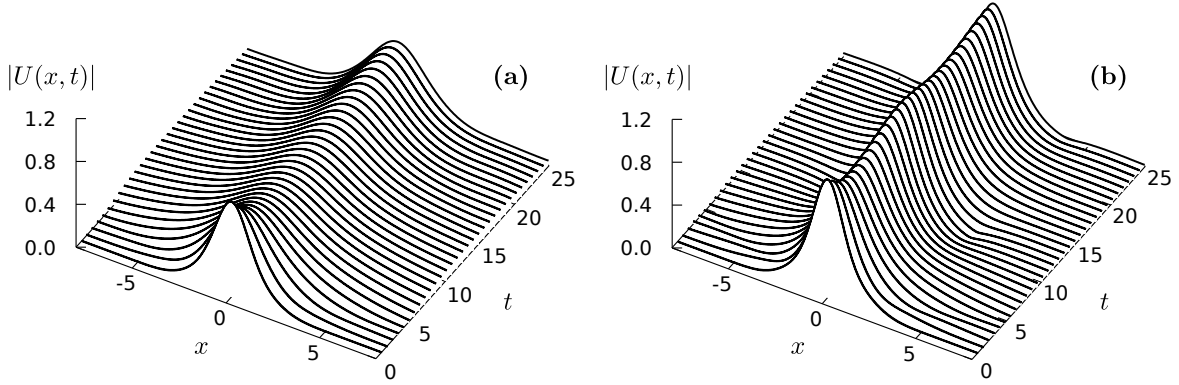


Figura 4.1 Para a equação NLS cúbica com $n_1 = 1$, os gráficos de $|U(x,t)|$ resultam da propagação numérica de perfis gaussianos $N' \exp(-x^2/2)$: (a) $N' < 1$, o perfil é dispersivo e gradualmente decai emitindo ondas lineares (radiação); (b) $N' = N_{renorm} \gtrsim 1$, o perfil se adapta para a solução mais próxima energeticamente, i.e., a do sóliton fundamental, no processo um pouco de radiação é emitida para o campo distante. A rotina numérica implementada foi desenvolvida usando o método de *Split-Step* [6, 9] juntamente com o método de *Crank-Nicholson* [29], foram empregadas as discretizações $\Delta x = 0.04$ e $\Delta t = 0.001$.

sobre o efeito de perturbações, os torna objetos robustos que podem ser produzidos mesmo quando o perfil inicial desvia da forma e intensidade específicas de um sóliton. Isso acontece porque a dispersão normalmente induz o decaimento de qualquer perfil inicial não solitônico, no processo ondas lineares (radiação, no caso óptico) são emitidas para o campo distante ($|x| \gg 1$) e o perfil pode se adaptar para alguma solução de sóliton energeticamente próxima. Por isso, a amplitude do perfil inicial deve ser no mínimo maior ou igual a do sóliton fundamental. A Fig. 4.1 fornece dois exemplos que ilustram exatamente o que foi discutido, onde a constante N_{renorm} foi determinada pela imposição da condição de normalização

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |U(x,0)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\operatorname{sech}(x)|^2 = 1. \quad (4.9)$$

Considerando a não-linearidade logarítmica $F(I) = n_e \ln(I + p)$ (com $p, n_e \in \mathbb{R}^+$), a Eq. (4.3) toma a forma

$$(x - x_0) = \frac{1}{2} \int du \left\{ \frac{(\mu + n_e)u^2}{2} - \frac{n_e(u^2 + p)}{2} \log(u^2 + p) \right\}^{-1/2}, \quad (4.10)$$

porém, para p arbitrário essa integral não é trivial. Se $p = 0$ a não-linearidade toma a forma aproximada obtida na seção anterior, e assim

$$\begin{aligned} (x - x_0) &= -\frac{1}{n_e} \sqrt{\frac{(\mu + n_e)}{2} - n_e \ln(u)} \Rightarrow \ln(u) = \frac{(\mu + n_e)}{2n_e} - n_e (x - x_0)^2, \\ \Rightarrow u(x) &= \exp \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu}{n_e} \right) \right] \exp \left[-n_e (x - x_0)^2 \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

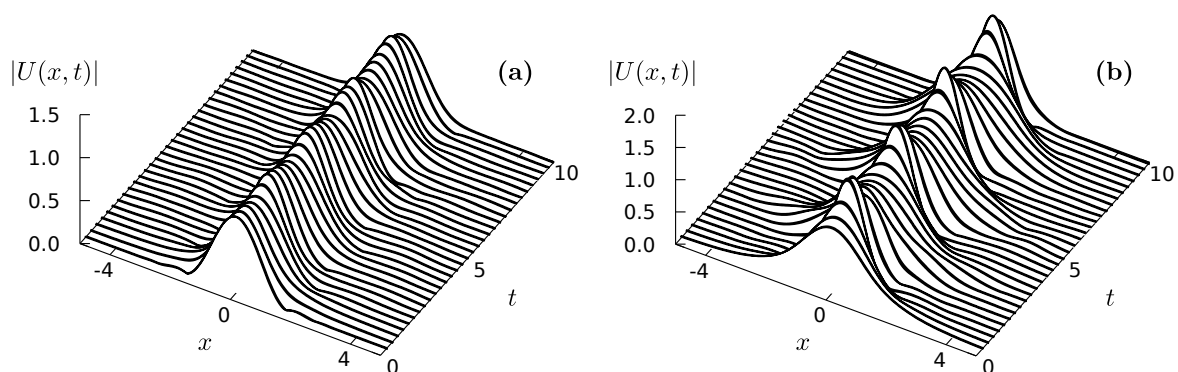


Figura 4.2 Para a equação L-NLS com $F(I) = \ln(I)$, os gráficos de $|U(x,t)|$ resultam da propagação numérica das condições iniciais: (a) $\text{sech}(2x)$, em que pouca energia é perdida no processo de adaptação do perfil; e (b) $\text{sech}(x)$, que envolveu perdas maiores mas mesmo assim pequenas. Em (a), a condição inicial é bem próxima do perfil de *gausson* $\exp(-x^2)$, e menos de 0.08% da intensidade total é perdida para o campo distante, já em (b) menos de 0.3%. A mesma rotina numérica do caso cúbico foi empregada.

O perfil de *gausson* unidimensional mostrado na Eq. (4.11) acima possui uma diferença importante com relação ao perfil dado pela Eq. (4.8), que reside no argumento da exponencial que não contém μ , e por isso existem soluções com amplitude arbitrária (em teoria) de mesma largura (determinada pelo valor de n_e), que aqui serão denotadas por $G_\mu(x,t)$.

Diferentemente do caso anterior, para qualquer condição inicial que não tem o perfil de um *gausson*, o efeito não-linear induz oscilações de forma que promovem uma dinâmica periódica de alargamento e estreitamento do perfil, que é acompanhada pela emissão de pacotes de ondas não-lineares de baixa amplitude. Esses pacotes levam ao decaimento gradual da solução, que pode eventualmente se estabilizar na forma de um sóliton ou dispersar completamente pelo meio, dependendo do quão próximo a condição inicial for de um perfil de *gausson*. Essas particularidades da não-linearidade logarítmica $F(I) = n_e \ln(I)$ resultam do seu caráter ilimitado na região próxima da singularidade de intensidade nula ($I \rightarrow 0^+$), de modo que sua influência sobre qualquer solução é análoga ao de um potencial dinâmico confinante. Isso pode ser visto claramente ao notar que, no caso do *gausson*, o termo não-linear $\ln(G_\mu) \propto -x^2$ é equivalente a um potencial de oscilador harmônico. Na Fig. 4.2, os resultados da evolução de dois perfis de *sech* são mostrados por meio dos gráficos de $|U(x,t)|$, verifica-se que a amplitude das oscilações de forma é pequena se a condição inicial desvia pouco do sóliton de perfil $\exp(-x^2)$ (para $n_e = 1$).

A Eq. (4.1) possui invariância galileana, e por isso admite soluções não estacionárias, que correspondem a perfis localizados se deslocando com velocidade constante no referencial (x,t) . Para demonstrar isso, considera-se a seguinte mudança de variáveis: $t = T$ e $x = X - vT$, em que (X,T) são as coordenadas do referencial inercial movendo da direita

para esquerda com velocidade v (que deve ser muito pequeno com relação a velocidade da luz no meio), no qual a solução estacionária (4.2) é escrita como

$$U'(X, T) = U_m(X, T) e^{i\theta(X, T)}, \quad (4.12)$$

em que $U_m(X, T) = U(X - vT, T)$ (note que $U(x, t) = U(X - vT, T)$). Aqui, $\theta = \theta(X, T)$ é uma fase que garante a invariância galileana da equação de movimento, que é supostamente uma função linear de X e T . Para determinar essa fase, impõe-se que a solução dada pela Eq. (4.12) obedeça a mesma equação NLS nas novas variáveis, calculando as derivadas tem-se

$$\frac{\partial U'}{\partial T} = \left(\frac{\partial U_m}{\partial t} - v \frac{\partial U_m}{\partial x} + i U_m \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) e^{i\theta}, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial X^2} = \left[\frac{\partial^2 U_m}{\partial x^2} + 2i \frac{\partial U_m}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial X} - U_m \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 \right] e^{i\theta}, \quad (4.14)$$

e substituindo na equação de movimento obtém-se

$$i \left(\frac{\partial U_m}{\partial t} - v \frac{\partial U_m}{\partial x} + i U_m \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 U_m}{\partial x^2} + 2i \frac{\partial U_m}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial X} - U_m \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 \right] + F(|U'|^2) U' = 0. \quad (4.15)$$

Note que $F(|U'|^2) U' = F(|U_m|^2) U_m$, e como $U_m(X, T)$ satisfaz a equação de movimento no referencial (x, t) , a seguinte igualdade deve ser válida

$$i v \frac{\partial U_m}{\partial x} + U_m \frac{\partial \theta}{\partial T} = i \frac{\partial \theta}{\partial X} \frac{\partial U_m}{\partial x} - \frac{1}{2} U_m \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2. \quad (4.16)$$

Assim, identificando as partes imaginárias e reais de ambos os lados da Eq. (4.16), encontra-se as seguintes equações

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = v \Rightarrow \theta = vX + f(T), \quad \frac{\partial \theta}{\partial T} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 \Rightarrow \frac{df}{dT} = -\frac{v^2}{2}. \quad (4.17)$$

Portanto, no referencial em movimento o sóliton tem a forma

$$U'(X, T) = u(X - vT) e^{i(vX - v^2T/2 + \mu T)}. \quad (4.18)$$

Para o cenário oposto em que a solução estacionária se manifesta no referencial (X, T) , basta efetuar as trocas $X \rightarrow x$, $T \rightarrow t$ e $v \rightarrow -v$ na Eq. (4.18), fornecendo um sóliton que move na direção $-\hat{x}$ com velocidade v (também conhecida em inglês como *soliton steering velocity* [7], aqui essa será referida pelo termo *velocidade de fase*). Uma condição inicial na forma de sóliton em movimento é obtida tomando $t = 0$, ou seja, $U(x, 0) = u(x) \exp(i v_0 x)$, que pode representar, por exemplo, um sóliton temporal que propaga com velocidade $v_g + v_0$ ao longo de uma fibra óptica. Quando uma fase não-linear $\theta_{nl}(x)$ é embutida, cada ponto da

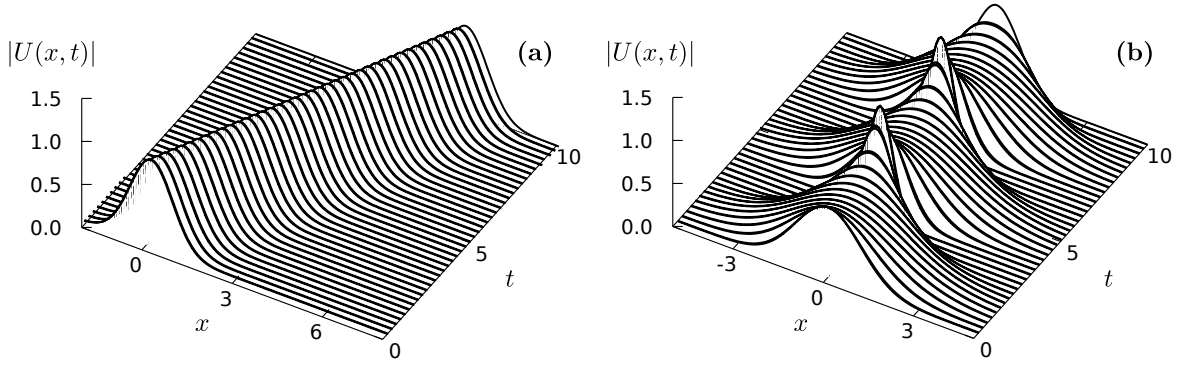


Figura 4.3 Os gr3ficos de $|U(x,t)|$ resultam da propaga33o num3rica de *gaussons* com fase inicial dada por: (a) $\theta(x) = v_0x$, com $v_0 = 0.5$; e (b) $\theta(x) = b_0x^2$, com $b_0 = 0.5$.

solu33o adquire uma velocidade de fase igual a $d\theta_{nl}(x)/dx$. Se essa fase for uma fun33o polinomial par, o resultado efetivo 3 um s3lton com oscila33es de forma. Geralmente, quando se deseja uma condi33o inicial oscilante, escolhe-se $\theta_{nl} = bx^2$, com b sendo uma constante real adequada, de modo que estabilidade da solu33o n3o seja comprometida. A Fig. 4.3 mostra dois cen3rios de propaga33o de *gaussons*, em (a) tem-se velocidade de fase positiva e em (b) oscila33o de forma induzida.

4.2 Quantidades conservadas

Quando um sistema de onda n3o-linear 3 integr3vel, pode-se calcular in3meras quantidades conservadas a partir do procedimento padr3o de aplica33o do m3todo de espalhamento inverso. Se o sistema for n3o-integr3vel, uma abordagem de teoria cl3ssica de campos 3 bem 3til na obten33o de algumas quantidades conservadas importantes das ondas solit3rias. Para isso, considera-se um cen3rio em que duas ondas solit3rias interagentes s3o governadas pelas seguintes equa33es NLS acopladas:

$$i \frac{\partial U}{\partial t} + i\beta_1 \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F(|U|^2)U + G(U, V, c.c.) = 0, \quad (4.19)$$

$$i \frac{\partial V}{\partial t} + i\beta_1 \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(|V|^2)V + G(V, U, c.c.) = 0, \quad (4.20)$$

em que $U(x,t)$ e $V(x,t)$ representam os perfis de envelope das ondas solit3rias acopladas. A fun33o G , que depende dos perfis e seus complexos conjugados (*c.c.*), carrega a forma do acoplamento. Na abordagem adotada nessa se33o, $U(x,t)$ e $V(x,t)$ s3o interpretados como campos cl3ssicos, cujas equa33es de movimento originam de uma densidade lagrangiana \mathcal{L} atrav3s das equa33es de Euler-Lagrange correspondentes. Assim, existe uma fun33o $\mathcal{L} = \mathcal{L}(U, V, U_t, V_t, U_x, V_x, c.c.)$ tal que [64, 65]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W^*} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_t^*} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_x^*} \right) = 0 \quad (4.21)$$

corresponde à equação (4.19) ou (4.20) (na forma conjugada ou não) dependendo de $W(x, t)$, em que W representa $U^{(*)}$ ou $V^{(*)}$. A notação $W^{(*)}$ é uma referência compacta para W ou W^* . Nesse formalismo, as funções W , W_t e W_{xx} são tratadas como variáveis independentes, de modo que as derivadas parciais na equação de Euler-Lagrange acima são calculadas normalmente. Para o caso em questão, a densidade lagrangiana é encontrada como sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{i}{2} (U^* U_t - U U_t^*) + \frac{i}{2} (V^* V_t - V V_t^*) + \frac{i\beta_1}{2} (U^* U_x - U U_x^*) + \frac{i\beta_1}{2} (V^* V_x - V V_x^*) \\ &+ \frac{\beta_2}{2} (|U_x|^2 + |V_x|^2) + \mathcal{F}(|U|^2) + \mathcal{F}(|V|^2) + \mathcal{L}_C, \end{aligned} \quad (4.22)$$

com $\mathcal{F}(I) = \int F(I) dI$,

em que último termo deve ser encontrado conforme a equação

$$\frac{\partial \mathcal{L}_C}{\partial W^*} = G(W, W', c.c.) \text{ com } W' = V(U) \text{ se } W = U(V). \quad (4.23)$$

Para simplificar os cálculos ao longo dessa seção, é interessante notar que a derivada proporcional à β_1 nas Eq. (4.19) e (4.20) pode ser removida por uma mudança de variáveis (como feito anteriormente), ou através da transformação $U(x, t) \rightarrow U(x, t) \exp(ix\beta_1/\beta_2)$ (analogamente para $V(x, t)$), e portanto adota-se $\beta_1 = 0$ durante essa seção.

Os sistema descritos pela densidade lagrangiana (4.22), possuem simetrias que podem ser exploradas pela análise da invariância de \mathcal{L} e das equações de movimento com relação a transformações envolvendo as coordenada e/ou os campos. A mais evidente dessas é a simetria interna devido à invariância de fase global, cuja transformação correspondente é dada por

$$W(x, t) \rightarrow \tilde{W}(x, t) = W(x, t) e^{i\zeta}, \quad (4.24)$$

com ζ sendo um número real que mede o deslocamento global de fase, e $W^{(*)}$ assumindo o papel de $U^{(*)}$ e $V^{(*)}$. As quantidades conservadas que decorrem dessa simetria podem ser calculadas pelo teorema de Noether para campos clássicos, para isso considera-se as componentes do vetor de corrente de Noether, que nesse caso têm a forma [65]

$$\mathcal{J}^\alpha = - \sum_{U, V, c.c.} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha W)} \right] \left[\frac{\partial (\delta W)}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=0}, \quad (4.25)$$

em que a soma se dá em W , com $\partial_\alpha W$ ($\alpha = x$ ou t) denotando as derivadas W_t , W_x . O termo $\delta W = \tilde{W} - W$ é a variação de W em cada ponto do espaço-tempo, na expressão acima a transformação é tomada na forma infinitesimal, com ζ variando de 0 até $\delta\zeta$, e por isso a derivada de δW é avaliada em $\zeta = 0$. As duas componentes (também chamadas de cargas) da corrente de Noether são encontradas calculando

$$\mathcal{J}^\alpha = -i \sum_{U,V} \left(W \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha W)} - W^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha W^*)} \right) : \quad (4.26)$$

$$\mathcal{J}^t = |U|^2 + |V|^2 \quad , \quad \mathcal{J}^x = -\frac{i\beta_2}{2} [(UU_x^* - U^*U_x) + (VV_x^* - V^*V_x)] . \quad (4.27)$$

A primeira carga (\mathcal{J}^t) é uma espécie de densidade de "massa" (em inglês o termo *power* também é usado), e a segunda (\mathcal{J}^x) é identificada como sendo a densidade de momento. As quantidades conservadas associadas a cada uma dessas densidades são obtidas pela integração em todo eixo x (i.e., sobre todo espaço em que os campos estão definidos), então tem-se

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} (|U|^2 + |V|^2) dx , \quad (4.28)$$

$$M = -\frac{i\beta_2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [(UU_x^* - U^*U_x) + (VV_x^* - V^*V_x)] dx , \quad (4.29)$$

com N e M representando, respectivamente, a conservação conjunta da "massa" e do momento das ondas solitárias. Quando o sistema é integrável, o método IS fornece essas quantidades e uma infinidade de outras.

A descrição do sistema em termos da densidade lagrangiana pode ser reformulada, de modo que o papel das derivadas temporais $W_t^{(*)}(x,t)$ seja tomado pelos momentos canonicamente conjugados dos campos, que são calculados pela expressão

$$\Phi^{(*)}(x,t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_t^{(*)}}(x,t) \quad , \quad \Psi^{(*)}(x,t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_t^{(*)}}(x,t) . \quad (4.30)$$

Definindo o momento conjugado $\Lambda = \Phi(\Psi)$ se $W = U(V)$, encontra-se para o caso em questão que $\Lambda = iW^*/2$. A reformulação se dá pela transformação de Legendre da densidade lagrangiana, fornecendo a densidade hamiltoniana [64]

$$\mathcal{H} = \left(\sum_{U,V,c.c.} \Lambda W_t \right) - \mathcal{L} = -\frac{\beta_2}{2} (|U_x|^2 + |V_x|^2) - \mathcal{F}(|U|^2) - \mathcal{F}(|V|^2) - \mathcal{L}_C , \quad (4.31)$$

em que novamente tem-se a soma em W (e automaticamente em Λ). O resultado acima é simplesmente a Eq. (4.22) ($\beta_1 = 0$) sem os primeiros termos contendo as derivadas temporais. Note que \mathcal{H} depende somente dos campos $W^{(*)}$ e suas derivadas espaciais $W_x^{(*)}$, porém uma descrição alternativa é obtida pela substituições $W = 2i\Lambda^*$ e $W^* = -2i\Lambda$, de modo que \mathcal{H} passa a depender somente dos momentos conjugados $\Lambda^{(*)}$ e suas derivadas espaciais $\Lambda_x^{(*)}$. Independentemente das variáveis de campo escolhidas, as equações de movimento (4.19) e (4.20) para $U^{(*)}$ e $V^{(*)}$ são recuperadas por uma das seguintes equações de Hamilton [64]

$$W_t = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Lambda} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Lambda_x} \right) \quad , \quad \Lambda_t = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial W} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial W_x} \right) . \quad (4.32)$$

É interessante calcular a densidade hamiltoniana devido a sua identificação com a energia total do sistema, que aqui procede pois: a dependência temporal está contida totalmente nos campos; a energia cinética (termo com β_2) é função puramente quadrática de $W_x^{(*)}$; a energia potencial (termos não-lineares + acoplamento) não depende das derivadas dos campos. Assim, a Eq. (4.31) pode ser interpretada como sendo a densidade de energia do sistema, cuja integral fornece a energia total (\mathcal{E} = parte cinética (\mathcal{K}) + parte potencial (\mathcal{P}))

$$\mathcal{E} = \frac{(-\beta_2)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (|U_x|^2 + |V_x|^2) dx - \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{F}(|U|^2) + \mathcal{F}(|V|^2) + \mathcal{L}_C] dx, \quad (4.33)$$

que pode ter o termo cinético reescrito na forma

$$\mathcal{K} = \frac{\beta_2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (U^* U_{xx} + V^* V_{xx}) dx. \quad (4.34)$$

Como exemplo, considera-se $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = -1$ e $V = 0$, nessas condições a Eq. (4.19) pode suportar (dependendo de $F(I)$) uma onda solitária no estado de sóliton em movimento:

$$U(x, t) = u(x - vt) e^{i(vx - v^2 t/2 + \mu t)}, \quad (4.35)$$

Substituindo $U(x, t)$ na Eq. (4.29) e escrevendo o integrando como $2i\Im(UU_x^*)$, obtém-se

$$M = - \int_{-\infty}^{\infty} \Im(UU_x^*) dx \quad \Rightarrow \quad M = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |U(x, t)|^2 dx \right) v = Nv, \quad (4.36)$$

e substituindo na Eq. (4.34)

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} U^* U_{xx} dx = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (u^* u_{xx} + 2iv u^* u_x - v^2 |u|^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |U(x, t)|^2 dx \right) v^2 - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^* u_{xx} dx - iv \int_{-\infty}^{\infty} u^* u_x dx \\ &= \frac{1}{2} Nv^2 - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^* u_{xx} dx, \end{aligned} \quad (4.37)$$

em que considerou-se $(u^* u_x)(x)$ como sendo uma função ímpar, já que $u(x)$ é frequentemente uma função par. Note que M e o primeiro termo de \mathcal{K} indicam que N pode ser interpretado como sendo uma espécie de "massa" do sóliton, que também é conhecida como norma e a Eq. (4.28) como integral de normalização. Em fibras ópticas, a norma está associada com a intensidade total da componente x do campo elétrico que constitui o perfil longitudinal do pulso óptico. Já no contexto de BECs, essa é interpretada como sendo a quantidade total de partículas contidas na onda de matéria.

4.3 Verificação da não-linearidade $F(I) = \ln(I)$

Anteriormente, a não-linearidade logarítmica mostrada na Eq. (3.55) foi aproximada para a forma funcional empregada na derivação da Eq. (4.11). Para demonstrar a validade dessa aproximação, considerou-se um sistema governado pela equação LNLS com $p = 1$ e $n_e = 1$. Pela propagação numérica de três condições iniciais distintas na forma $G_\mu(x, 0)$, constatou-se que o primeiro perfil, com $\mu = -1$, é totalmente dominado pelo efeito dispersivo, como pode ser visto na Fig. 4.4(a). Os outros dois perfis de maior amplitude ($\mu = 1$ e $\mu = 3$) rapidamente se adaptam para soluções solitônicas com dinâmica periódica (veja as Fig. 4.4(b) e (c)), no entanto, somente no caso (c) verifica-se que a maior parte da energia inicial se encontra incorporada no sóliton. Como teste final, tomou-se como condição inicial um perfil de *sech* com a mesma amplitude da gaussiana da Fig. 4.4(c), nesse caso o perfil também se adapta para um sóliton, porém, no processo uma quantidade significativa de energia é perdida na forma de ondas lineares, e por isso a gaussiana é realmente mais apropriada. Portanto, embora os *gaussions* não sejam sólitons no modelo em questão, esses desviam pouco de formas aparentemente solitônicas para amplitudes elevadas, e por isso a não-linearidade com $p = 0$ é razoável no regime de altas intensidades.

Soluções estacionárias gaussianas com dinâmica semelhante ao resultado mostrado Fig. 4.4(c), foram também encontradas experimentalmente e numericamente em sistemas com apenas dispersão de quarta ordem e não-linearidade cúbica, resultando do balanço da GVD anômala e do efeito SPM em certas condições que suprimem os efeitos das dispersões de segunda e terceira ordem ($\beta_2 = \beta_3 = 0$). A equação NLS que modela esse sistema e a solução chamada de *pure-quartic soliton*, são dadas por

$$i \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\beta_4}{24} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + g |U|^2 U \quad , \quad U(x, t) = D \exp \left[-Dx^2 \sqrt{\nu |g/\beta_4|} + i \mu g D^2 t \right] \quad , \quad (4.38)$$

com $D > 0$, $g < 0$, $\beta_4 < 0$, e $\mu, \nu > 0$ sendo parâmetros livres [66].

A equação LNLS no regime de campos intensos pode ser reformulada se o perfil de envelope for redefinido pela troca $U(x, t) \rightarrow \eta U(x, t)$, com $\eta \gg 1$ para que a aproximação da não-linearidade logarítmica seja aplicável. Além disso, a mudança de variáveis $x = X/\sqrt{h}$ e $t = T/h$ é útil na reescala da não-linearidade. Assim, nas coordenadas (X, T) tem-se $U(X/\sqrt{h}, T/h) = \psi(X, T)$, e a equação pode ser reescrita como

$$i \frac{\partial \psi}{\partial T} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + g \ln(|\psi|^2) \psi = 0 \quad , \quad g = \frac{2n_e \ln(\eta)}{h} \quad , \quad (4.39)$$

em que g não precisa ser necessariamente $\gg 1$, pois a constante $h > 0$ permite que qualquer valor seja acessível. Nessa reformulação ψ não precisa ter amplitude muita elevada.

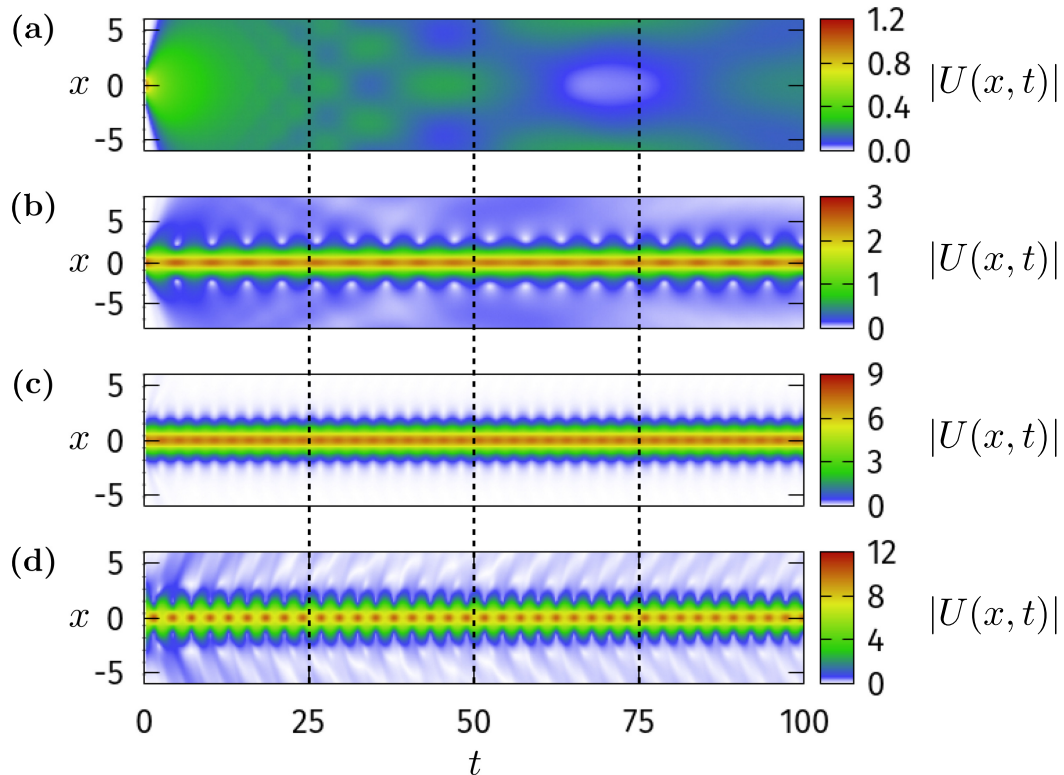


Figura 4.4 Resultados de simulações numéricas da evolução de três perfis gaussianos na forma $G_\mu(x, 0)$ e um perfil de *sech*: (a) $\mu = -1$, o perfil é dispersivo e gradualmente decai emitindo ondas lineares; (b) $\mu = 1$, o perfil se adapta para uma solução do tipo sóliton, porém no processo bastante radiação é emitida para o campo distante; (c) $\mu = 3$, diferentemente do caso anterior, muito pouca energia é perdida no processo; (d) para um perfil de mesma amplitude do caso (c), mas com a forma de *sech*, a energia perdida é da ordem de 10 vezes maior quando comparada ao caso anterior. A rotina numérica implementada é análoga ao da Fig. 4.1 modificada para o sistema em questão.

4.4 Estabilidade linear

Ondas solitárias muitas vezes propagam sobre a influência de perturbações, que podem decorrer de efeitos dispersivos e/ou não-lineares de altas ordens (desprezados na derivação das equações de movimento), desvios do perfil exato de um sóliton (assim como nas condições iniciais abordadas anteriormente), acoplamento com outras ondas solitárias, etc. A Eq. (4.2) oferece soluções de ondas solitárias em estado fundamental, cuja identificação com sólitons deve ser constatada pelo estudo da estabilidade do perfil $u(x; \mu)$ (aqui, a dependência com o parâmetro μ é enfatizada). Isso porque para que seja propriamente um sóliton, a onda

localizada deve permanecer est6vel na presen7a de perturba76es pequenas. O efeito de pequenas perturba76es pode ser investigado pelo c6lculo do espectro de lineariza76o da onda solit6ria, para isso escreve-se o perfil de envelope na forma [6, 7]

$$U(x, t) = [u(x; \mu) + \tilde{U}(x, t)] e^{i\mu t}, \quad (4.40)$$

em que $\tilde{U}(x, t) \ll u(x; \mu)$ representa uma perturba76o do perfil de s6liton $u(x; \mu)$. Substituindo na Eq. (4.1) obt6m-se

$$-\mu u + i\tilde{U}_t - \mu\tilde{U} + \left[\frac{1}{2} \partial_{xx} + F(|u + \tilde{U}|^2) \right] (u + \tilde{U}) = 0. \quad (4.41)$$

O processo de lineariza76o dessa equa76o consiste em desprezar qualquer termo n6o-linear em $\tilde{U}(x, t)$. Primeiramente, o argumento da fun76o F 6 equivalente a $|u|^2 + |\tilde{U}|^2 + (u^* \tilde{U} + u \tilde{U}^*)$, e pode ser linearizado ao desprezar o segundo termo quadr6tico. Essa fun76o pode ser expandida em s6rie de pot6ncias do terceiro termo em par6nteses, at6 primeira ordem tem-se

$$F(|u + \tilde{U}|^2) \approx F(|u|^2) + F'(|u|^2) (u^* \tilde{U} + u \tilde{U}^*), \quad (4.42)$$

$$\text{com } F'(|u|^2) = \left[\frac{dF(I)}{dI} \right]_{I=|u|^2}.$$

Assim, usando o fato de que $u(x; \mu)$ satisfaz a equa76o n6o perturbada, a Eq. (4.41) pode ser reescrita na forma linearizada final

$$i\tilde{U}_t - \mu\tilde{U} + \partial_{xx}\tilde{U}/2 + [F(|u|^2) + |u|^2 F'(|u|^2)] \tilde{U} + u^2 F'(|u|^2) \tilde{U}^* = 0. \quad (4.43)$$

Solu76es dessa equa76o podem ser obtidas na forma de combina76es lineares de solu76es particulares expressas pela equa76o

$$\tilde{U}(x, t; \lambda) = [v(x) + w(x)] e^{\lambda t} + [v^*(x) - w^*(x)] e^{\lambda^* t}, \quad (4.44)$$

que s6o geralmente chamadas automodos (*eigenmodes*) de perturba76o com autovalor λ . Depois de substituir na Eq. (4.43) e organizar os termos que acompanham as exponenciais $\exp(\lambda^{(*)}t)$, encontra-se duas equa76es lineares nas fun76es complexas $v(x)$ e $w(x)$. Essas equa76es podem ser trabalhadas algebricamente, e ent6o colocadas na forma de um problema de autovalor matricial dado por

$$\mathbb{M} \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M} = i \begin{pmatrix} G_0 & \partial_{xx}/2 + G_1 \\ \partial_{xx}/2 + G_2 & -G_0 \end{pmatrix}, \quad (4.45)$$

em que os elementos de matriz G_n (com $n = 0, 1, 2$) estão relacionados com a funções $u(x; \mu)$ e *c.c.* (complexo conjugado) pelas equações

$$G_0 = \frac{1}{2} (u^2 - u^{*2}) F'(|u|^2) , \quad (4.46)$$

$$G_1 = -\mu + F(|u|^2) + \left[|u|^2 - \frac{1}{2} (u^2 + u^{*2}) \right] F'(|u|^2) , \quad (4.47)$$

$$G_2 = -\mu + F(|u|^2) + \left[|u|^2 + \frac{1}{2} (u^2 + u^{*2}) \right] F'(|u|^2) , \quad (4.48)$$

O conjunto dos autovalores λ é chamado de espectro de linearização da onda solitária. Na Eq. (4.44) para o modo da perturbação, é possível trocar λ por $-\lambda$ ou $\pm\lambda^*$ e obter o mesmo par de autofunções, por isso o espectro é composto por pares (quando $\Re(\lambda)$ ou $\Im(\lambda)$ é igual zero) e quadruplas de autovalores.

O comportamento da perturbação na região de campo distante ($|x| \gg 1$) pode ser investigado tomando $u(x; \mu) \approx 0$ na Eq. (4.43), assim

$$i\tilde{U}_t - (\mu - F_0)\tilde{U} + \partial_{xx}\tilde{U}/2\tilde{U} = 0 , \quad (4.49)$$

em que F_0 é uma constante definida como sendo igual ao $\lim_{u \rightarrow 0^+} F(|u|^2)$. Essa equação governa ondas lineares, que correspondem à radiação de baixa intensidade no contexto de fibras ópticas e cristais não-lineares, e tem soluções na forma de combinações lineares envolvendo as funções $\exp(ikx + \lambda t)$ e *c.c.* (com $k \in \mathbb{R}$). Isso implica em um conjunto contínuo de autovalores puramente complexos na forma $\lambda = \pm i(\mu - F_0 + k^2/2)$. Esses formam dois segmentos de linha quando visualizados no espectro de linearização, correspondendo aos intervalos $\pm[\mu - F_0, \infty)$ no eixo imaginário. Ao trocar λ por $\pm i\omega$, fica evidente que a perturbação no campo distante assume a forma de ondas lineares, a relação de dispersão é encontrada como sendo $k(\omega) = \pm\sqrt{2(\omega - \mu + F_0)}$. Se a não-linearidade for inferiormente limitada, F_0 é igual a uma constante finita, que na maioria dos casos é nula. No entanto, isso não vale para a forma logarítmica $F(I) = \ln(I)$, para qual $F_0 \rightarrow -\infty$, e portanto os autovalores contínuos que compõem a parte do espectro associada as ondas lineares não existem nesse caso. Além disso, é possível mostrar que $\lambda = 0$ sempre está presente no espectro de ondas solitárias provenientes de não-linearidades do tipo *dual-power* (para mais detalhes veja [6]).

O espectro é geralmente discreto na região entre os segmentos de linha associados à parte contínua do mesmo, sendo definida pelos intervalos em que $\Re(\lambda) \in [-\infty, \infty]$ e $\Im(\lambda) \in (-\mu + F_0, \mu - F_0)$. Para calcular o espectro discreto pode-se resolver o problema de autovalor numericamente, o método de colocação de Fourier descrito na Ref. [6] é comumente empregado. A Fig. 4.5 mostra o espectro de onda solitária para vários casos.

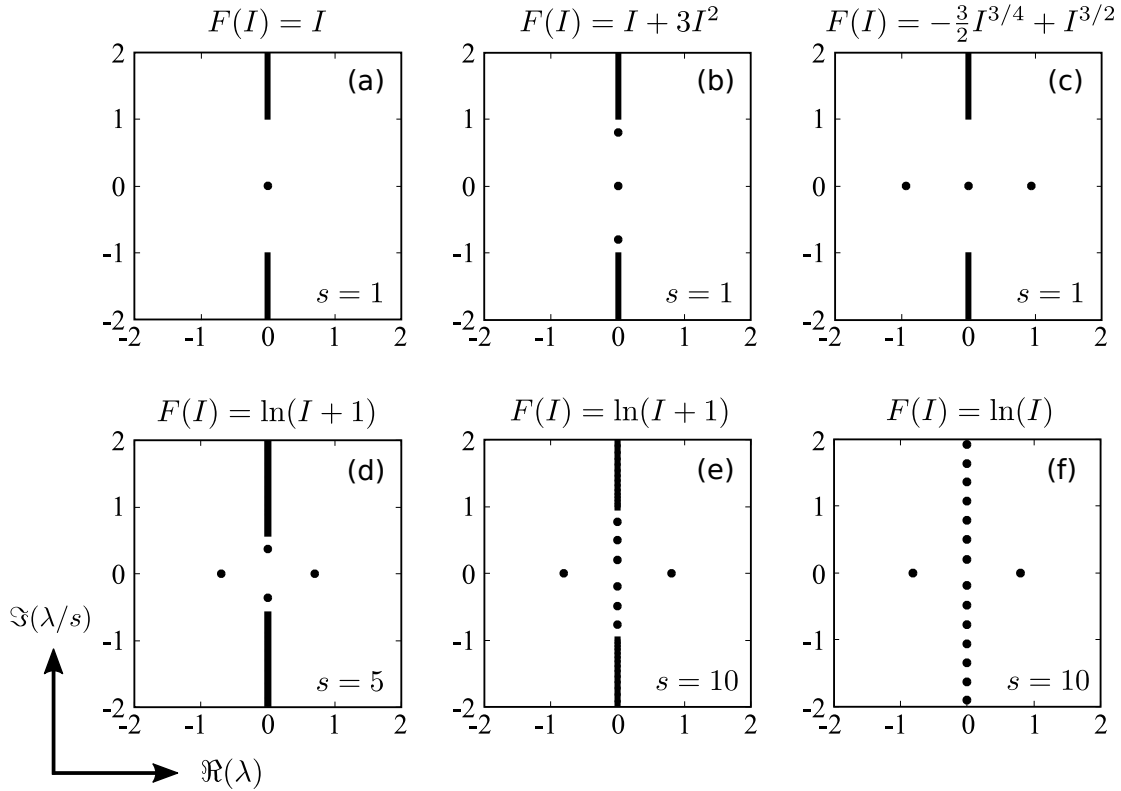


Figura 4.5 Espectro de lineariza33o de onda solit3ria para quatro tipos de n3o-linearidade (mostradas acima dos gr3ficos), s 3 um fator de escala do eixo medindo a parte imagin3ria de λ . Nos espectros (a)-(c) (retirados da Ref. [6]) a solu33o fornecida pela Eq. (4.7) com $\mu = 1$ foi usada para definir o perfil $u(x; \mu)$, em (d)-(f) (obtidos pelo autor) a solu33o usada 3 dada pela Eq. (4.11) com $\mu = 3$, $\mu = 10$ e $\mu = -1$, respectivamente.

Nos tr3s primeiros (a)-(c), a n3o-linearidade 3 do tipo *dual-power* e $u(x; \mu)$ 3 tomado na forma exata de s3lton. Nos casos (d) e (f), a n3o-linearidade 3 do tipo logar3tmica $F(I) = \ln(I + 1)$ (note que $F_0 = 0$), e $u(x; \mu)$ 3 escolhido na forma $G_\mu(x, 0)$ com amplitude elevada. J3 no 3ltimo caso (f), a forma aproximada para o regime de altas intensidades $F(I) = \ln(I)$ foi utilizada.

Em sistemas integr3veis, a parte discreta do espectro de lineariza33o 3 caracterizada por conter somente um autovalor degenerado em $\lambda = 0$ (veja a Fig. 4.5(a) para o caso c3bico), que corresponde ao chamado modo neutro [7]. Logo, a presen3a de autovalores discretos n3o nulos 3 uma assinatura da n3o integrabilidade do sistema [6], e foi conjecturada como uma condi33o suficiente na Ref. [67]. Por outro lado, a aus3ncia desses autovalores serve apenas de indicativo sobre a quase integrabilidade de um sistema. Propriedades importantes da din3mica de ondas solit3rias perturbadas podem ser estudadas pela an3lise do espectro discreto, os automodos correspondentes se dividem em tr3s categorias:

modos internos estáveis com $\Re(\lambda) = 0$ e $\Im(\lambda) \neq 0$, modos de instabilidade com $\Im(\lambda) = 0$ e $\Re(\lambda) \neq 0$, e modos de instabilidade oscilatória com $\Re(\lambda) \neq 0$ e $\Im(\lambda) \neq 0$. Modos internos são perturbações oscilatórias estáveis que dependem do tempo através das funções $\exp(\pm i|\lambda|t)$, induzindo oscilações de forma no perfil da onda solitária. No caso dos modos de instabilidade, a dependência temporal se dá pelas funções $\exp(\pm|\lambda|t)$, e portanto esses automodos de perturbação crescem com o tempo e podem tornar a onda solitária linearmente instável. A terceira categoria consiste basicamente de um modo híbrido, que induz instabilidades e oscilações ao mesmo tempo. A existência desses modos nem sempre permite conclusões diretas sobre a estabilidade das ondas solitárias, também é essencial compreender o comportamento dos autovalores discretos com as mudanças no perfil da onda solitária. Isso porque o espectro de linearização é na maioria dos casos dinâmico durante a evolução, e processos como a ressonância entre dois ou mais modos internos podem dar origem a modos de instabilidade oscilatória. O mesmo pode acontecer também com o modo neutro, em que modos de instabilidade surgem nesse caso. Quando visualizados no espectro, esses processos são vistos como "colisões" entre os autovalores discretos, que se deslocam para o eixo real ao entrar em ressonância (ao se sobreporem no gráfico) [7]. O critério de estabilidade de Vakhitov–Kolokolov e suas generalizações fornecem uma forma de analisar a dinâmica do espectro, se não forem aplicáveis, uma abordagem numérica do problema é indispensável. O primeiro se fundamenta em um teorema que afirma que a solução $u(x; \mu)$ é linearmente instável se, e somente se, $P'(\mu) < 0$, em que

$$P(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} |u(x; \mu)|^2 dx \quad (4.50)$$

define a chamada curva de amplitude (termo adaptado de *power curve*). Quando linearmente instável, uma onda solitária pode decair e gradualmente dispersar pelo meio, ou pode evoluir para um estado oscilatório. O comportamento da largura do perfil localizado (que é geralmente inversamente proporcional à amplitude) captura aspectos importantes da dinâmica, e por isso a instabilidade de Vakhitov–Kolokolov pode ser vista como uma instabilidade de largura [6].

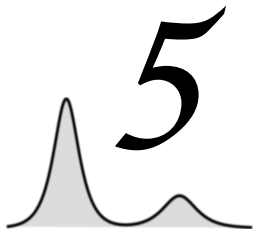
Usando o critério de estabilidade para avaliar a Fig. 4.5, verifica-se que $P'(\mu) > 0$ no caso (b), assim, a presença de um modo de interno mostra que a onda solitária perturbada permanece estável, e o perfil testado é propriamente de um sólito. Já em (c), tem-se $P'(\mu) < 0$ e a presença de um modo de instabilidade confirma que a onda solitária testada é linearmente instável, e portanto não pode ser identificada como sólito. Nos casos de não-linearidade logarítmica, verifica-se que o modo de instabilidade muda muito pouco em cada um dos três cenários (de (e) para (f) a diferença é imperceptível). De (d) para (e), a amplitude da solução testada aumenta em mais 30 vezes ($\Delta\mu = 7$),

nota-se que o aumento da região de autovalores discretos leva ao aparecimento de mais modos internos. Testes com valores de μ cada vez maiores mostram que conforme esse cresce, mais o espectro se aproxima do cenário crítico mostrado em (f). Isso revela que os espectros das duas formas logarítmicas se tornam quase equivalentes quando $\mu \gg 1$ (amplitude/intensidade elevada), favorecendo a abordagem da seção anterior. Calculando $P(\mu)$ para o perfil de *gausson* $G_\mu(x, 0)$, encontra-se que $P'(\mu) > 0$ para qualquer μ , o que é um forte indicativo de que o automodo correspondente ao par de autovalores reais não compromete a estabilidade linear dessas soluções.

Ondas solitárias perturbadas também podem possuir modos de radiação, que estão intrinsecamente relacionados com a emissão de radiação na forma de ondas lineares. A dinâmica da onda solitária mais radiação pode ser investigada via teoria de perturbações. Em sistemas integráveis, a aplicação dessa teoria em sólitons no modelo NLS cúbico, demonstra que tais modos de radiação propagam com velocidade de grupo proporcional ao número de onda (k), de forma que os modos com k grande escapam rapidamente para o campo distante (radiação emitida), enquanto que aqueles com k pequeno permanecem próximos do sóliton, causando oscilações no perfil até dispersarem pelo meio depois algum tempo. Modos de radiação também podem ser excitados durante o decaimento de modos internos ativos, o que ocorre devido a processos não-lineares do meio que elevam as frequências das oscilações, até que essas eventualmente excedam o limiar do espectro contínuo causando a ressonância entre os modos internos e de radiação (para mais detalhes veja a Ref. [6]).

Embora o modelo LNLS com $F(I) = \ln(I)$ não suporte ondas lineares, soluções localizadas podem decair pela emissão de ondas de baixa intensidade altamente não-lineares ($F(I) \gg 1$). No entanto, sabe-se que tal forma para não-linearidade logarítmica provém da expressão exata $F(I) = \ln(I + 1)$, e portanto, na realidade existem soluções na forma de ondas lineares. No contexto de fibras ópticas, essas ondas consistem de radiação propagando com velocidade maior ou menor que a do pulso óptico, drenando parte da energia concentrada na região localizada do campo e contribuindo para o ruído linear no meio. Em simulações numéricas, as condições de contorno aprisionam qualquer ruído produzido durante a evolução, logo, para evitar potenciais perturbações sobre as soluções, qualquer campo nas bordas do intervalo de discretização em x deve ser eliminado.

O próximo capítulo retoma o tema de fibras ópticas não-lineares que foi tratado anteriormente. Serão abordados os acopladores ópticos direcionais de maneira simplificada, e com isso será finalizada a descrição do contexto físico que foi foco do trabalho de pesquisa. No final desse capítulo serão utilizadas algumas propriedades dos sólitons discutidas até aqui para mostrar como colisões de *gaussos* ópticos podem ocorrer em acopladores direcionais.



Propagação de luz em fibras ópticas acopladas

5.1 Acopladores ópticos direcionais

Devido às propriedades interessantes dos sólitons temporais, esses podem ser utilizados em sistemas de comunicação baseados em fibras ópticas não-lineares. A informação é codificada de modo que cada pulso representa uma unidade de bit com valor 1, e então transmitida na forma de trens de sólitons ocupando *slots* (janelas temporais de largura w_s) conforme o código binário associado a informação, sendo que um slot vazio representa uma unidade de bit com valor 0 [7, 13]. Em situações práticas, a largura à meia altura de um pulso (w_p) pode variar de 10 a 25 picosegundos ($10^{-12} s$), e tipicamente tem-se $w_s = n w_p$ com $n \in \mathbb{Z}$ sendo algumas poucas unidades [13]. No gerenciamento da transmissão de informações em sistemas envolvendo múltiplas fibras, *acopladores ópticos* são dispositivos de grande importância, que podem ser construídos na forma de replicadores ou direcionadores de pulsos de uma fibra principal ativa acoplada a múltiplas fibras secundárias passivas, por exemplo.

Acopladores ópticos são dispositivos que distribuem a energia eletromagnética transmitida em uma fibra principal (*input*) para outras fibras secundárias (*output*), esse processo de ramificação pode envolver uma ou várias fibras na entrada e saída. Esses podem ser usados para acoplar luz propagando no espaço livre com uma ou mais fibras, funcionando como um dispositivo de *input* [53]. Acopladores ópticos têm outras aplicações que os transforma, por exemplo, em interruptores (ou *switchers*) dependentes da intensidade e limitadores [13]. Esses foram abordados nas Ref. [68–71].

A construção de acopladores envolvendo duas fibras é geralmente dada pela união via torção e fusão térmica sobre tensão, de modo a estruturar uma seção com forma cônica alongada e afunilada que é compartilhada pelas duas fibras. Dois tipos de acopladores podem ser construídos nesse caso, esses se diferem pelo modo em que ocorre a transferência de energia, que se dá pela interação dos campos ópticos das fibras na região compartilhada no

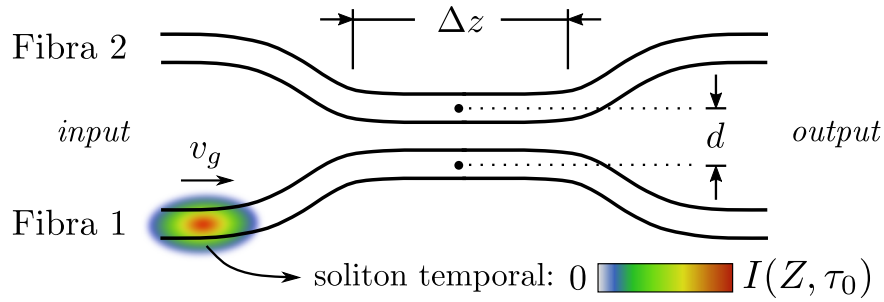


Figura 5.1 Esquema de acoplador direcional, também chamado na literatura de *twin-core optical coupler*. A figura ilustra um cenário em que um pulso propaga em direção ao acoplador pelo *input* da fibra 1 (fibra ativa), a interação entre a região de campo evanescente e o meio inicialmente livre da fibra 2 (fibra passiva), promove a distribuição da luz conforme intensidade do acoplamento, que depende da separação d . O resultado final nas fibras de *output* depende do comprimento Δz do acoplador (da ordem de alguns centímetros [53]).

núcleo ou na superfície. No segundo tipo de acoplador, os núcleos das fibras permanecem intactos, e a magnitude da interação de superfície envolvendo os campos ópticos evanescentes (intensidade do acoplamento) depende do comprimento da seção fundida compartilhada pelas duas fibras e da distância que separa os núcleos (d) [13]. Esse acoplador de duas fibras corresponde a uma fibra óptica não-linear de dois núcleos, e também é conhecido como *acoplador direcional*. A Fig. 5.1 mostra um esquema contendo as dimensões básicas que caracterizam esse dispositivo. Acopladores direcionais também podem ser utilizados na eliminação de ruídos lineares e com isso melhorar a qualidade de sólitons produzidos experimentalmente. Nesse processo, o ruído linear que acompanha o sóliton temporal propagando na fibra 1 ativa, acopla facilmente com a fibra 2 passiva, para onde parte de sua energia é transferida e dissipada. Nessa aplicação o acoplador direcional funciona efetivamente como um filtro de ruído [72].

Denotando os perfis de envelope dos campos ópticos nas fibras 1 e 2 pelas funções $U(\tau, z)$ e $V(\tau, z)$, respectivamente, a propagação de luz fora do acoplador direcional é governada por equações na forma da Eq. (4.1) com essas funções no lugar de $U(x, t)$ e (x, t) trocado por (τ, Z) . Na região do acoplador, as equações de movimento se tornam [13, 14]

$$iU_Z + \frac{1}{2}U_{\tau\tau} + F(|U|^2)U - \Lambda V = 0, \quad (5.1)$$

$$iV_Z + \frac{1}{2}V_{\tau\tau} + F(|V|^2)V - \Lambda U = 0, \quad (5.2)$$

em que Λ é um parâmetro real adimensional proporcional à intensidade do acoplamento linear induzido pelo dispositivo. As Eq. (5.1) e (5.2) não são integráveis devido ao acoplamento

linear (também conhecido em outros contextos físicos como acoplamento Rabi), mesmo quando a não-linearidade corresponde a um sistema desacoplado que seja integrável [13].

Considerando a não-linearidade cúbica com $n_1 = 1$ e $\Lambda = 0.5$, investigou-se os efeitos do acoplador direcional quando um sóliton temporal na fibra ativa interage com a fibra passiva ao longo de uma distância ΔZ . A rotina numérica foi implementada com base nos métodos pseudo-espectral e Runge-Kutta de 4ª ordem, verificou-se que as discretizações $dZ = 0.001$ e 256 pontos temporais no intervalo $\mathcal{I} = [-20, 20]$ são suficientes para o caso em questão. O cenário simulado numericamente corresponde ao mesmo ilustrado pela Fig. 5.1, em que acoplamento é nulo fora do intervalo ΔZ , e as condições iniciais são dadas por $U(\tau, 0) = \text{sech}(\tau)$ e $V(\tau, 0) = 0$. Na Fig. 5.2, para $\Delta Z = 1.62555$, a dinâmica de evolução dos perfis de envelope é mostrada em termos do referencial (t, Z) , em que no processo $\approx 50\%$ da energia do pulso na fibra 1 é transferida para a fibra 2.

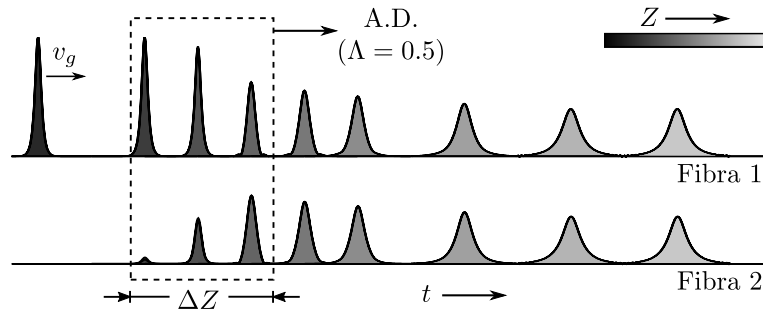


Figura 5.2 Evolução de um sóliton temporal ao passar por um acoplador direcional (AD) com $\Lambda = 0.5$ e comprimento $\Delta Z = 1.62555$, ambos pulsos no *output* das fibras propagam com velocidade de grupo v_g .

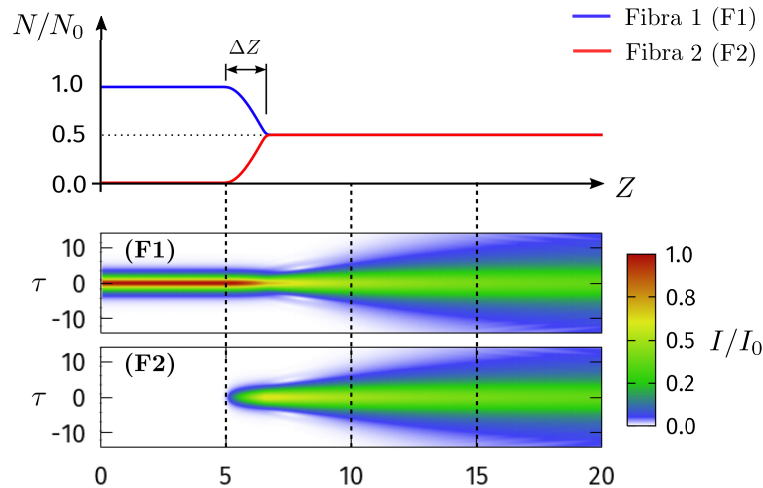


Figura 5.3 Resultado da propagação das condições iniciais para $\Delta Z = 1.62555$, o primeiro gráfico mostra como a energia total em cada fibra varia com Z , os outros mostram a distribuição de intensidade dos campos ópticos em termos de $|U(\tau, Z)|$ e $|V(\tau, Z)|$.

O processo de *splitting* 50 : 50 ilustrado na figura anterior é mostrado de forma mais conveniente e detalhada na Fig. 5.3, onde o alargamento dos pulsos que deixam o acoplador eventualmente cessa para $Z > 20$, quando esses estabilizam na forma de sólitons. A energia total na fibra 1 é estimada em termos da integral de normalização $N^{(1)}(Z) = \int_{\mathcal{I}} d\tau |U(\tau, Z)|^2$ calculada no intervalo \mathcal{I} , na fibra 2 a expressão é análoga.

Nos cenários seguintes, foram considerados valores maiores de ΔZ . Na Fig. 5.4, quase toda a energia da fibra ativa é transferida para a fibra passiva, e a energia restante se encontra na forma de ruído linear que também é gerado na fibra passiva.

Conforme ΔZ aumenta, a maior parte da energia transferida para a fibra passiva volta para a fibra ativa (veja a Fig. 5.5), e o restante novamente se encontra na forma de ruído linear.

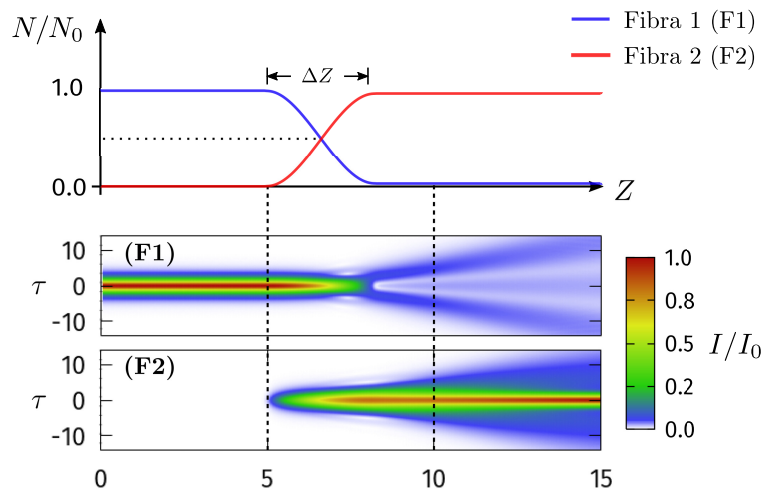


Figura 5.4 Resultado da propagação das condições iniciais para $\Delta Z = 3.25$.

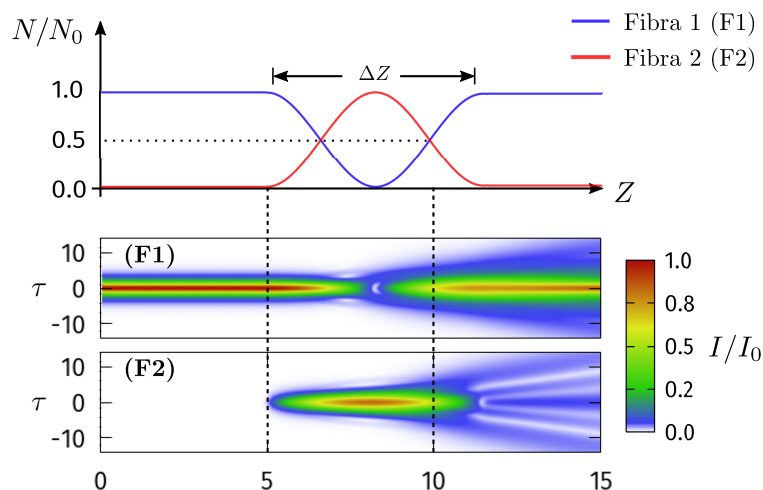


Figura 5.5 Resultado da propagação das condições iniciais para $\Delta Z = 6.55$.

Com isso, fica claro que o comprimento do acoplador direcional não deve exceder o valor do caso anterior, pois isso promove oscilações desnecessárias na energia das fibras e conseqüentemente maior geração de ruídos.

No caso da não-linearidade logarítmica $F(I) = \ln(I + 1)$, o intenso auto confinamento dos pulsos propicia resultados diferentes. Como exemplo comparativo, o sóliton da Fig. 4.4(c) foi transmitido numericamente através de um acoplador direcional com $\Lambda = 0.5$ e $\Delta Z = 0.91$, o resultado (veja a Fig. 5.6) é um *splitting* 50 : 50 semelhante ao da Fig. 5.4, porém a quantidade de ruído é significativamente menor.

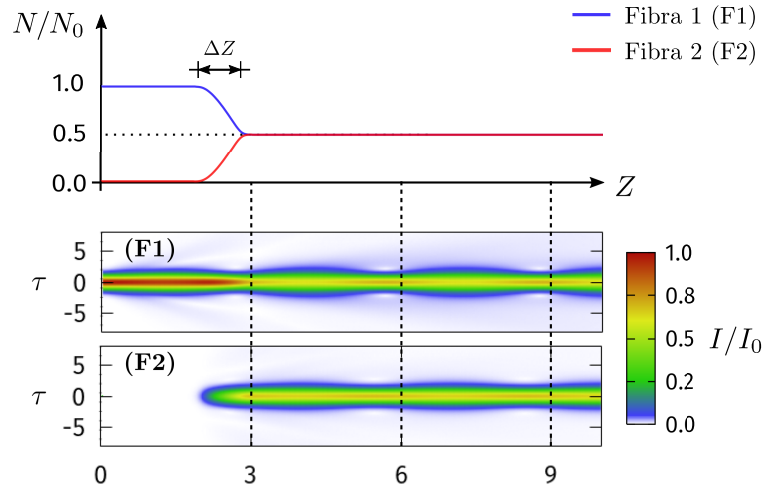


Figura 5.6 Resultado da propagação das condições iniciais $U(\tau, 0) = \exp(2) \exp(-\tau^2)$ e $V(\tau, 0) = 0$ com $F(I) = \ln(I + 1)$, $\Lambda = 0.5$ e $\Delta Z = 0.91$.

5.2 Colisões de sólitons em acopladores direcionais

Quando as duas fibras do acoplador direcional são ativas, o processo de transferência de energia ao longo do comprimento ΔZ pode ocorrer pela interação dos campos ópticos evanescentes de cada fibra, diferentemente da situação abordada antes onde o campo de uma fibra interage inicialmente com o meio livre da outra. No entanto, para que isso aconteça, os sólitons temporais devem "colidir" no interior do acoplador. Se as duas fibras são idênticas, os sólitons propagam com a mesma velocidade de grupo, e portanto devem chegar no *input* do acoplador quase que simultaneamente, isto é, com uma separação temporal que não exceda a largura média dos pulsos. Alternativamente, os sólitons nas fibras 1 e 2 podem ser gerados inicialmente com velocidades de fase $v_0^{(1)}$ e $v_0^{(2)}$, respectivamente, e por isso podem entrar no acoplador em instantes arbitrários $\tau_0^{(1)}$ e $\tau_0^{(2)}$ desde que $v_0^{(n)} > v_0^{(3-n)}$ se $\tau_0^{(n)} < \tau_0^{(3-n)}$ (com $n = 1, 2$).

A priori, a construção de um acoplador direcional a partir de duas nano fibras é factível, embora a disponibilidade de técnicas para isso seja discutível atualmente. Supondo que em tal dispositivo prevaleça a forma linear de acoplamento entre os campos ópticos, o cenário colisional abordado anteriormente pode ser estendido para o caso de *gaussions* propagando em nano fibras de não-linearidade logarítmica. As equações que governam esse sistema podem ser reformuladas para fornecer uma descrição aproximada no regime de campos intensos, para isso um procedimento análogo ao que culminou na Eq. (4.39) fornece:

$$i\phi_Z + \frac{1}{2}\phi_{\tau\tau} + g\ln(|\phi|^2)\phi - \Gamma\psi = 0, \quad (5.3)$$

$$i\psi_Z + \frac{1}{2}\psi_{\tau\tau} + g\ln(|\psi|^2)\psi - \Gamma\phi = 0. \quad (5.4)$$

Aqui, a notação para as variáveis foi mantida ao efetuar as trocas $\tau \rightarrow \tau/\sqrt{h}$ e $Z \rightarrow Z/h$, U e V em termos dessas novas variáveis reescaladas são trocados pelas funções $\phi(\tau, Z)$ e $\psi(\tau, Z)$, respectivamente, e por fim $\Gamma = \Lambda/h$. Quando instantes e velocidades de entrada são escolhidos como $\tau_0^{(n)} = (-1)^{3-n} s_0/2$ (com $s_0 > 0$ sendo a separação temporal inicial) e $v_0^{(n)} = (-1)^n v_0/2$ (com $v_0 > 0$ sendo a velocidade de aproximação inicial), o processo de colisão no referencial (τ, Z) é simétrico com relação ao eixo $\tau = 0$. O espalhamento de *gaussions* via colisões simétricas no modelo dado pelas Eq. (5.3) e (5.4) foi o tema principal da Ref. [73] (publicação do próprio autor e orientador), sendo abordado em detalhes no próximo capítulo. Nesse trabalho, o espalhamento de pulsos na forma de ondas solitárias, sendo inicialmente *gaussions*, foi investigado para o caso em que $g = 1$ e $\Gamma = -0.2$ por meio de duas abordagens. Na primeira, foi desenvolvido um modelo variacional composto por EDOs, que fornecem uma aproximação para dinâmica de colisão. Os resultados desse modelo reduzido se mostraram bem interessantes e posteriormente foram verificados na segunda abordagem por meio de simulações numéricas diretas de propagação. Assim como será discutido no próximo capítulo, descobriu-se que para valores pequenos da velocidade de aproximação, a dinâmica de interação dos pulsos se revela bastante rica e complexa, a correlação entre os parâmetros de entrada ($Z = 0$) e de saída (pós colisões) é caótica e tem incorporada uma estrutura fractal de janelas com propriedades peculiares (similar aos modelos citados na Fig. 2.5). Embora o mecanismo responsável pelo aparecimento dessas estruturas não seja trivial, seu funcionamento é relativamente simples, e deve-se a existência de modos internos que armazenam parte da energia cinética das ondas solitárias em oscilações de forma. Como exemplo final, a Fig. 5.7 mostra dois cenários de colisão provenientes do modelo abordado no trabalho [73], note que em (a) e (b) o pulso adquire oscilações de forma ao interagir com o outro (com comportamento simétrico) na região próxima de $\tau = 0$.

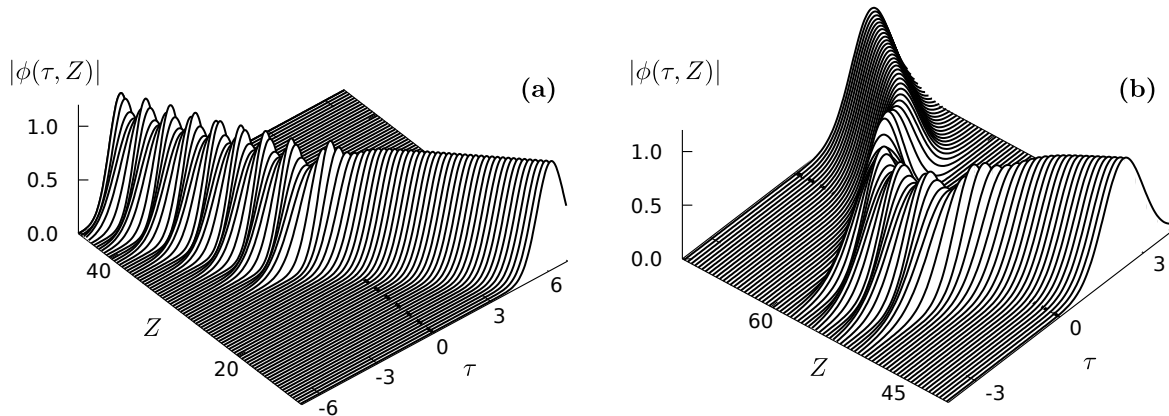
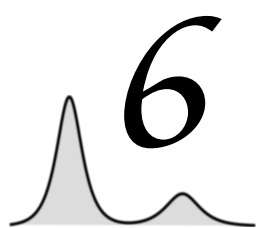


Figura 5.7 Colisões simétricas de ondas solitárias do modelo LNLS (Eq. (5.3) e (5.4) com $g = 1$ e $\Gamma = -0.2$). Em $Z = 0$ as soluções iniciais têm a forma de *gaussions*, as figuras são gráficos da função $|\phi(\tau, Z)|$ propagada numericamente, o comportamento da função $|\psi(\tau, Z)|$ é obtido pela reflexão desses gráficos ao longo do eixo $\tau = 0$. Em (a), os pulsos colidem em $Z \approx 30$ e ocorre apenas uma pequena transferência de energia para os modos internos/vibracionais. Em (b), a velocidade de aproximação é bem menor, de forma que a energia cinética remanente após a primeira colisão não é suficiente para separar os pulsos, que permanecem em um estado ligado devido ao efeito atrativo do acoplamento até a segunda colisão. Nesse cenário, o sóliton temporalmente adiantado ($\tau > 0$) recupera sua energia cinética inicial após a segunda colisão, no entanto sua velocidade de fase final tem sinal invertido e esse continua adiantado com relação ao outro pulso (diferentemente de (a), onde o pulso atrasado ($\tau < 0$) se adianta, isso significa que mesmo entrando no acoplador depois do primeiro pulso, esse será o primeiro a ser detectado na saída).



Espalhamento de *gaussions* via acoplamento linear

6.1 Introdução

A abordagem variacional tem sido amplamente usada como uma descrição alternativa de muitos sistemas físicos não integráveis, fornecendo resultados similares aos obtidos via simulações computacionais diretas das equações de movimento. O uso de métodos variacionais no estudo de ondas não-lineares se deve originalmente a Bondeson [49, 74], vários exemplos de aplicação são abordados na Ref. [14]. Com relação ao uso desses métodos no estudo de interações de ondas solitárias, esses se mostram adequados quando os perfis de envelope das ondas não desviam significativamente de suas formas funcionais calculadas na ausência de acoplamentos, ou seja, quando a estabilidade das soluções durante o processo de colisão é comparada com a de sólitons. Usualmente, a configuração inicial do sistema é caracterizada por soluções localizadas de ondas solitárias bem separadas, de modo a permitir que os efeitos do acoplamento possam ser desprezados. Assim, supõe-se que a interação no momento de maior aproximação possa alterar apenas parâmetros internos das ondas, mantendo o perfil da solução (i.e., a forma de sech ou gaussiana, por exemplo). Se tal suposição for admissível, um modelo variacional (também chamado de modelo reduzido ou de coordenadas coletivas) pode ser de grande utilidade desde que um *ansatz* apropriado possa ser elaborado.

Em vários casos, modelos reduzidos têm bastante utilidade no estudo de propriedades dinâmicas da interação de ondas solitárias, capturando as principais características das colisões qualitativamente e, em certas situações, fornecendo bons resultados quantitativos [6, 15–17]. Geralmente são consideradas baixas intensidades de acoplamento para evitar grandes divergências entre os resultados do modelo e os exatos (provenientes de simulações diretas), mas podem existir regimes inesperados em que o modelo falha ou sucede (como, por exemplo, no caso discutido em [6, p. 214]) e por isso uma análise cautelosa dos resultados é

essencial. Na Ref. anterior, o sucesso parcial da descrição variacional, se deve a construção de um *ansatz* que emula oscilações de forma induzidas por modos internos das ondas solitárias.

Colisões de ondas solitárias em sistemas não integráveis podem envolver modos internos e de radiação [15], principalmente quando esses desviam muito do regime de integrabilidade. Assim como descrito anteriormente, as ondas solitárias podem ser consideradas sólitons antes da primeira colisão, mas, quando a superposição de seus perfis é suficientemente alta, os efeitos do acoplamento se tornam relevantes. Esse pode ser interpretado como uma perturbação dos sólitons interagentes, de forma que acoplamentos intensos seriam equivalentes a perturbações elevadas que por sua vez promoveriam maior excitação dos modos em questão, o que geralmente leva a cenários de colisão que não podem ser descritos variacionalmente. Se modos de instabilidade também forem excitados pelo acoplamento, então a estabilidade linear das ondas solitárias deve ser analisada antes de qualquer estudo variacional das colisões. Além disso, deve-se verificar se o papel dos modos de radiação na dinâmica das colisões é de fato pequeno em comparação com os modos internos, pois a emissão de radiação é omitida na derivação do modelo variacional.

6.2 Considerações iniciais e derivação do modelo reduzido

A interação de ondas solitárias no modelo em questão é governada pelas equações de evolução (5.3) e (5.4). Assim como discutido no final do capítulo anterior, essas equações podem descrever a interação de campos ópticos propagando na forma de pulsos temporais em acopladores direcionais, que podem ser concebidos a partir de duas nano fibras com não-linearidade na forma logarítmica $F(I) = \ln(I)$ se os campos forem estabelecidos no regime de amplitudes/intensidades elevadas. Para investigar colisões simétricas, as condições iniciais são escolhidas como

$$\phi(\tau, 0) = \eta_0 \exp \left[-g \left(\frac{\tau - \tau_0}{w_0} \right)^2 - i \frac{v_0}{2} (\tau - \tau_0) \right], \quad (6.1)$$

$$\psi(\tau, 0) = \eta_0 \exp \left[-g \left(\frac{\tau + \tau_0}{w_0} \right)^2 + i \frac{v_0}{2} (\tau + \tau_0) \right], \quad (6.2)$$

com η_0 denotando a amplitude inicial do perfil gaussiano com pico em $\pm \tau_0$, e w_0 sua largura inicial. A energia (norma) inicial associada a cada campo é dada por $N_0 = \int_{\mathbb{R}} d\tau |\phi(\tau, 0)|^2 = \int_{\mathbb{R}} d\tau |\psi(\tau, 0)|^2 = \eta_0^2 w_0 \sqrt{\pi/2}$. As Eq. (6.1) e (6.2) têm a forma $G_\mu(\tau \pm \tau_0, 0)$ de *gaussons* com velocidade de fase $\pm v_0/2$ quando $w_0 = 1$. A amplitude pode ser arbitrária, e é escolhida tal que $\eta_0 = 1$ ($\mu = -1$) para simplicidade. Se o acoplamento é desligado ($\Gamma = 0$), as

condições iniciais propagam como ondas solitárias que são propriamente sólitons, e podem ser convertidas em soluções exatas para qualquer t se multiplicadas por $\exp(-it)$.

Para investigar o comportamento das ondas solitárias com velocidade de aproximação v_0 , a propagação numérica direta das condições iniciais apresentadas é a maneira mais exata. Para construir um modelo variacional capaz de capturar os principais aspectos da propagação exata, deve-se elaborar uma forma funcional fixa para os campos (*ansatz*) que emule possíveis oscilações de forma, e que contenha as condições iniciais em questão como caso particular. Sabe-se que fases não-lineares são responsáveis por induzir tais oscilações, então, um *ansatz* que se revela adequado é encontrado na forma

$$\phi(\tau, Z) = \eta \exp \left\{ -g \left(\frac{\tau - p}{w} \right)^2 + i \left[\frac{b}{2w} (\tau - p)^2 - \frac{v}{2} (\tau - p) + \sigma \right] \right\}, \quad (6.3)$$

$$\psi(\tau, Z) = \eta \exp \left\{ -g \left(\frac{\tau + p}{w} \right)^2 + i \left[\frac{b}{2w} (\tau + p)^2 + \frac{v}{2} (\tau + p) + \sigma \right] \right\}. \quad (6.4)$$

A dependência em Z está contida nos parâmetros variacionais (graus de liberdade), que são: amplitude $\eta(Z)$, largura $w(Z)$, *chirp* $b(Z)$, posição do pico $p(Z)$, velocidade de fase $v(Z)$, e fase global $\sigma(Z)$. Quando $Z = 0$, o valor de cada parâmetro variacional é denotado com o subíndice zero (0), logo o *ansatz* toma a forma da condição inicial se $p_0 = \tau_0$ e $b_0 = 0$ (diferindo apenas pela fase σ). A fase quadrática é acompanhada pelo fator $b/(2w)$ que controla as oscilações de forma que modificam o perfil através de η e w . Como $w > 0$, as oscilações tendem a alargar o perfil ($w \uparrow$) se $b > 0$ ou estreitar ($w \downarrow$) se $b < 0$. O denominador $2w$ tem o papel de limitar tais oscilações para evitar situações críticas em que $w \rightarrow \infty$ ou $w \rightarrow 0^+$. No entanto, se as oscilações são estáveis ou não, só é possível descobrir *a posteriori* com o modelo reduzido em mãos. O parâmetro $\sigma(Z)$ não influencia na dinâmica de colisão, seu papel é carregar explicitamente a invariância do sistema com relação a qualquer mudança de fase global, de modo que a conservação de norma (Eq. (4.28)) e momento (Eq. (4.29)) sejam reproduzidas pelas EDOs que governam a evolução dos parâmetros variacionais.

No desenvolvimento do modelo reduzido, a densidade Lagrangiana (4.22) deve ser adaptada para o caso em questão, os termos que correspondem a parte não-linear e ao acoplamento são, respectivamente,

$$\mathcal{F}(I) = \int g \ln(I) dI = gI [\ln(I) - 1] \quad , \quad \mathcal{L}_C = -\Gamma(\phi^* \psi + \psi^* \phi) \quad , \quad (6.5)$$

portanto, a densidade Lagrangiana desejada é expressa por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i(\phi^* \phi_Z - \phi \phi_Z^*)/2 + i(\psi^* \psi_Z - \psi \psi_Z^*)/2 - (|\phi_\tau|^2 + |\psi_\tau|^2)/2 \\ & + g|\phi|^2 [\ln(|\phi|^2) - 1] + g|\psi|^2 [\ln(|\psi|^2) - 1] - \Gamma(\phi^* \psi + \psi^* \phi) \quad . \end{aligned} \quad (6.6)$$

Substituindo o *ansatz* dado pelas Eq. (6.3) e (6.4) na Eq. (6.6) acima, \mathcal{L} passa a depender efetivamente de τ e do conjunto de variáveis $\mathbb{V}(Z) = \{\eta, w, b, p, v, \sigma\}$. Como a dependência em τ é conhecida e fixa, a densidade lagrangiana pode ser integrada e expressa em termos da energia cinética (\mathcal{K}), do potencial efetivo da não-linearidade (\mathcal{P}_{NL}), e do potencial efetivo do acoplamento (\mathcal{P}_C), logo

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(\tau; \mathbb{V}(Z)) d\tau = L_Z + \mathcal{K} - \mathcal{P}_{NL} - \mathcal{P}_C. \quad (6.7)$$

A componente L_Z decorre dos dois primeiros termos de evolução na Eq. (6.6) envolvendo as derivadas em Z dos campos, a identificação das outras componentes com a energia do sistema provém da Eq. (4.33). O resultado da integração concede a lagrangiana $L = L(\mathbb{V}(Z))$, que fornece a dinâmica aproximada do sistema em termos dos graus de liberdade permitidos pelo *ansatz*. Para o cálculo detalhado de L , introduz-se as variáveis auxiliares

$$\tau_{\pm} = \frac{\tau \pm p}{w}, \quad \theta_{\pm} = \frac{b}{2w} (\tau \pm p)^2 \pm \frac{v}{2} (\tau \pm p) + \sigma, \quad (6.8)$$

além disso, adota-se uma notação compacta para expressar os campos simétricos, para isso define-se $\varphi^{\pm}(\tau, Z) = u_{\pm} \exp(i\theta_{\pm})$ e a função $u_{\pm} = u(\tau_{\pm})$ tal que $u(x) = \eta \exp(-gx^2)$. Assim, os campos podem ser escritos como $\phi = \varphi^-$ e $\psi = \varphi^+$. Usando a notação $\dot{q} = dq/dZ$ para denotar as derivadas dos parâmetros variacionais, calcula-se que

$$\varphi_{\tau}^{\pm} = \left[-\frac{2g\tau_{\pm}}{w} + i \left(b\tau_{\pm} \pm \frac{v}{2} \right) \right] \varphi^{\pm}, \quad (6.9)$$

$$\varphi_Z^{\pm} = \left[\frac{\dot{\eta}}{\eta} + 2g\tau_{\pm} \left(\frac{\dot{w}}{w}\tau_{\pm} \mp \frac{\dot{p}}{w} \right) + i\dot{\theta}_{\pm} \right] \varphi^{\pm}, \quad (6.10)$$

$$\text{com } \dot{\theta}_{\pm} = \frac{(b\dot{w} - b\dot{w})}{2} \tau_{\pm}^2 \pm \left(b\dot{p} + \frac{w\dot{v}}{2} \right) \tau_{\pm} + \frac{v\dot{p}}{2} + \dot{\sigma}. \quad (6.11)$$

Para evitar expressões muito longas, o cálculo da lagrangiana é dividido para cada componente. Mas antes de prosseguir, as seguintes integrais são úteis:

$$\begin{aligned} Q_m &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{\pm}^m |u_{\pm}|^2 d\tau \quad (m \in \mathbb{N}), \\ \hookrightarrow Q_0 &= \eta^2 w \sqrt{\frac{\pi}{2g}}, \quad Q_1 = 0, \quad Q_2 = \frac{\eta^2 w}{4g} \sqrt{\frac{\pi}{2g}}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

A componente de evolução resulta da integral

$$\begin{aligned} L_Z &= - \int_{-\infty}^{\infty} [\Im(\varphi^{-*} \varphi_Z^-) + \Im(\varphi^{+*} \varphi_Z^+)] d\tau = - \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{\theta}_- |u_-|^2 + \dot{\theta}_+ |u_+|^2) d\tau, \\ &= -Q_2 (b\dot{w} - b\dot{w}) - 2Q_0 \left(\frac{v\dot{p}}{2} + \dot{\sigma} \right) = -\eta^2 w \sqrt{\frac{\pi}{2g}} \left(\frac{b\dot{w} - b\dot{w}}{4g} + v\dot{p} + 2\dot{\sigma} \right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Para a componente cinética, envolvendo as derivadas em τ dos campos, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (|\varphi_{\tau}^{-}|^2 + |\varphi_{\tau}^{+}|^2) d\tau = - \left[\left(\frac{4g^2}{w^2} + b^2 \right) Q_2 + \frac{v^2}{4} Q_0 \right], \\ &= -\eta^2 w \sqrt{\frac{\pi}{2g}} \left(\frac{g}{w^2} + \frac{b^2}{4g} + \frac{v^2}{4} \right).\end{aligned}\quad (6.14)$$

O potencial efetivo decorrente da não-linearidade logarítmica requer o cálculo da seguinte integral:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{NL} &= -g \int_{-\infty}^{\infty} [|\varphi^{-}|^2 \ln(|\varphi^{-}|^2) + |\varphi^{+}|^2 \ln(|\varphi^{+}|^2) - |\varphi^{-}|^2 - |\varphi^{+}|^2] d\tau, \\ &= -g \int_{-\infty}^{\infty} [|u_{-}|^2 (2 \ln \eta - 2g\tau_{-}^2 - 1) + |u_{+}|^2 (2 \ln \eta - 2g\tau_{+}^2 - 1)] d\tau, \\ &= -2g [(2 \ln \eta - 1) Q_0 - 2g Q_2] = -\eta^2 w g \sqrt{\frac{\pi}{2g}} (4 \ln \eta - 3).\end{aligned}\quad (6.15)$$

Finalmente, a última integral que deve ser calculada envolve o termo do acoplamento linear da Eq. (6.6), e é encontrada na forma

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_C &= 2\Gamma \int_{-\infty}^{\infty} \Re(\varphi^{-*} \varphi^{+}) d\tau = -2\Gamma \int_{-\infty}^{\infty} u_{+} u_{-} \cos(\theta_{+} - \theta_{-}) d\tau, \\ &= 2\Gamma \eta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-2g \left(\frac{\tau^2 + p^2}{w^2} \right) \right] \cos \left[\left(\frac{2bp}{w} + v \right) \tau \right] d\tau = 2\Gamma \eta^2 w \sqrt{\frac{\pi}{2g}} C, \\ \text{com } C(w, b, p, v; g) &= \exp \left\{ -\frac{1}{8gw^2} \left[\left(\frac{2bp}{w} + v \right)^2 w^4 + 16g^2 p^2 \right] \right\}.\end{aligned}\quad (6.16)$$

Somando cada componente da lagrangiana conforme mostrado na Eq. (6.7) e organizando alguns termos, tem-se o resultado

$$L = Q_0 \left[\left(\frac{b\dot{w}}{w^2} - \frac{\dot{b}}{w} - \frac{b^2}{w^2} \right) \frac{w^2}{4g} - v\dot{p} - \frac{v^2}{4} - 2\dot{\sigma} + g \left(4 \ln \eta - \frac{1}{w^2} - 3 \right) - 2\Gamma C \right]. \quad (6.17)$$

As equações Euler-Lagrange para cada parâmetro variacional tem a forma

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dZ} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (q = \eta, w, b, p, v, \sigma), \quad (6.18)$$

considerando a fase $q = \sigma$ primeiramente, note que L depende dessa apenas pela derivada $\dot{\sigma}$, e assim obtém-se diretamente que $2\dot{Q}_0 = 0$, que representa a conservação da norma conjunta (ou individual, já que *ansatz* toma os campos como simétricos). Logo, η e w estão vinculados pela relação $\eta^2 w = K = \text{cte.}$, em que $Q_0 = K \sqrt{\pi/(2g)}$. Definindo w como parâmetro livre, tem-se que $\eta = \eta(w)$.

O cálculo das outras equações de Euler-Lagrange segue facilmente, o resultado final consiste da condição de normalização mais quatro EDOs compondo o modelo reduzido

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dZ} &= -\frac{v}{2} - 2\Gamma \frac{\partial C}{\partial v}, & (a) \quad \frac{dw}{dZ} &= b + 4g\Gamma \frac{\partial C}{\partial b}, & (c) \\ \frac{dv}{dZ} &= 2\Gamma \frac{\partial C}{\partial p}, & (b) \quad \frac{db}{dZ} &= \frac{4g^2}{w^2} \left(\frac{1}{w} - w \right) - 4g\Gamma \frac{\partial C}{\partial w}. & (d) \end{aligned} \quad (6.19)$$

Quando $g = 1$, as Eq. (6.19)(a)-(d) são equivalentes às equações do modelo reduzido que constam na Ref. [73] para o caso $g = -1$ (no artigo o sinal de g é negativo), essas podem ser obtidas por uma reescala da velocidade de fase dada por: $v \rightarrow -v/2$.

O momento total das ondas solitárias é obviamente zero em qualquer cenário de colisão simétrica, no entanto pode-se calcular o momento individual a partir do primeiro termo do integrando da Eq. (4.29), fornecendo

$$M^\pm = - \int_{-\infty}^{\infty} \Im (\varphi^\pm \varphi_\tau^{\pm*}) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left(b \tau_\pm \pm \frac{v}{2} \right) |\varphi^\pm|^2 d\tau = \pm \frac{1}{2} Q_0 v. \quad (6.20)$$

Para investigar o espalhamento de *gaussons* no modelo reduzido, é necessário resolver numericamente o sistema de EDOs acopladas para um *ensemble* de condições iniciais, que considera vários processos de colisão com v_0 assumindo valores discretos ao longo de um intervalo pré-definido $[v_i, v_f]$. Para o *ansatz* adotado no artigo, ambos v_i (i : inicial) e v_f (f : final) devem ser negativos, de modo que o n -ésimo processo acontece com velocidade de aproximação $v_0(n) = v_i + (n-1)dv$, com a discretização do intervalo sendo $dv = (v_f - v_i)/(n_p - 1)$ e o número total de processos de colisão n_p (tamanho do *ensemble*). Assim, as condições iniciais para cada processo são dadas por $\mathbb{V}^{(n)}(0) = \{\eta_0, w_0, b_0, p_0, v_0(n), \sigma_0\}$, com $w_0 = 1$ e $b_0 = 0$. Além disso, deve-se garantir que $\dot{b}(0) \approx 0$ (oscilações de forma inativas antes da primeira colisão), o que pode ser feito pela escolha de uma separação inicial suficientemente grande ($2p_0 \gg 1$), já que a função de acoplamento decai exponencialmente com $-p^2$, ou seja, vale a aproximação $C(w, b, p \gg 1, v; g) \approx 0$ assim como para as derivadas de C . É importante notar que se $w_0 \neq 1$, o *ansatz* em $Z = 0$ e as condições iniciais para os perfis (6.1) e (6.2) se tornam não equivalentes, isso resulta em $\dot{b}(0) \neq 0$ e conseqüentemente em um perfil oscilante (como esperado, já que o *ansatz* desvia da solução de *gausson*). Como última observação sobre o modelo, a arbitrariedade da amplitude inicial η_0 e da fase global σ_0 (constante) se manifestam claramente, já que as EDOs não dependem de σ e nem K , sendo esse útil apenas na determinação da amplitude em função da largura.

O acoplamento com $\Gamma < 0$ promove interação atrativa entre as ondas solitárias, que experimentam um potencial efetivo confinante auto induzido e localizado ao longo do eixo $\tau = 0$. Assim, é evidente que podem existir cenários de colisão em que o efeito do

acoplamento se torna intenso o suficiente para modificar a propagação das ondas, sendo possível que essas se auto aprisionem mesmo que por um curto período (veja a Fig. 5.7), formando um estado ligado de tempo de vida finito (intervalo ΔZ entre a primeira e a última colisão). Logo, se as ondas solitárias preservarem suas características básicas após a última colisão (i.e., permanecendo na forma de perfis localizados e estáveis, assim como sólitons), o resultado final de um processo será dado pelos parâmetros internos pós-colisionais de cada onda. A abordagem variacional é uma tentativa de descrever alguns desses parâmetros através da forma funcional fixa dada pelo *ansatz*, no entanto, assim como discutido anteriormente, como o papel dos modos de radiação não pode ser incluso no modelo, quase sempre haverá discrepâncias entre o mesmo e os resultados exatos. A próxima seção é focada nos resultados numéricos do modelo reduzido adaptado para a versão do artigo [73], que são posteriormente analisados e comparados com os resultados das simulações numéricas diretas.

6.3 Resultados do modelo reduzido

As EDOs acopladas (6.19)(a)-(d) foram simuladas numericamente com uso do método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4) [29]. A separação inicial escolhida foi $2p_0 = 20$, e para calcular a amplitude adotou-se $K = 1$. Aqui, a não-linearidade é escolhida como sendo $g = 1$ e o coeficiente do acoplamento $\Gamma = -0.2$. A rotina numérica foi desenvolvida em linguagem *Fortran 95*, no método RK4 empregou-se $dz = 0.001$ como discretização do eixo de propagação, e números reais/complexos foram tratados com precisão dupla.

Nas simulações de espalhamento, o foco da investigação se manteve na correlação entre a velocidade de aproximação e a velocidade de saída, que corresponde ao valor do parâmetro variacional $v(Z \rightarrow \infty) \neq 0$ (denotada por v_∞ e analogamente para os outros parâmetros) se as ondas solitárias escapam do potencial atrativo induzido pelo acoplamento para algum $Z > 0$ finito, ou é indeterminado caso as ondas formem um estado ligado permanente. Para evitar propagações muito longas, exigindo mais tempo de simulação computacional, todo estado ligado que dura além de $Z_{max} = 400$ é considerado permanente, o processo de colisão então fica incompleto e define-se $v_\infty = 0$. O processo é completado quando a separação atinge novamente seu valor inicial (20 unidades) para algum $Z < Z_{max}$, o que pode ocorrer depois de uma ou muitas colisões. Assim, $|p_\infty| = p_0$ é a posição absoluta final atingida depois que as ondas escapam da zona de interação. Como a velocidade de aproximação é negativa (separação decrescente), a velocidade de saída assume valores positivos se o processo de colisão for do tipo reflexão ($p_0 p_\infty > 0$), e valores negativos se for do tipo transmissão ($p_0 p_\infty < 0$), o que no contexto de fibras ópticas significa, respectivamente, que a onda adiantada permanece como tal ou se torna a onda atrasada. Se $|v_\infty| < |v_0|$, o momento

individual e a energia total cinética média são menores no estado pós-colisional, e o processo é dito inelástico. Caso $|v_\infty| \lesssim |v_0|$, esse é então quase elástico, sendo completamente se a igualdade for verificada. Mais detalhes sobre a elasticidade são abordados posteriormente, durante a análise dos resultados.

As simulações de espalhamento foram executadas em intervalos com $n_p = 5000$, o resultado de cada processo de colisão completo é representado por um ponto (v_0, v_∞) no gráfico de velocidade inicial pela de saída, os casos incompletos são vistos como pontos $(v_0, 0)$ no eixo horizontal. Os primeiros testes envolveram desde velocidades relativamente baixas ($v_i \lesssim -0.05$) até valores altos ($v_f \gtrsim -5.0$), e verificou-se que para valores absolutos muito maiores que um limiar específico ($|v_0| \gg |v_c|$) tem-se apenas uma colisão praticamente elástica (transmissão direta). Conforme a velocidade aproxima do limiar ($|v_0| \gtrsim |v_c|$), o processo se torna cada vez mais inelástico. Aqui, v_c é chamada velocidade crítica, pois quando $v_0 \rightarrow v_c \approx -1.04$ o processo tende para o cenário crítico de completa inelasticidade, i.e., um estado ligado permanente. Além disso, quando $|v_0| < |v_c|$, a dinâmica da interação muda drasticamente e a colisão das ondas solitárias fica imprevisível. Esses resultados iniciais podem ser inferidos a partir da Fig. 6.1, que mostra o gráfico de espalhamento $v_\infty \times v_0$ com $v_0 \in [-0.05, -2.00]$, onde o segmento de linha vertical com $v_0 = v_c$ é destacado para enfatizar a separação das regiões de regime regular ($|v_0| > |v_c|$) e irregular ($|v_0| < |v_c|$) de colisões. Na segunda, a dinâmica das ondas solitárias se mostra altamente sensível ao valor da velocidade de aproximação, no gráfico isso é visto como pontos dispersos distribuídos de forma aparentemente aleatória, ou seja, sem nenhuma correlação entre os pontos vizinhos. Porém, note que tal comportamento errático não se estende por todo o intervalo $[0, v_c)$, pois é perceptível a existência de janelas de regularidade, onde a correlação entre pontos vizinhos se manifesta graficamente como uma curva suave e contínua. A Fig. 6.1 também revela um

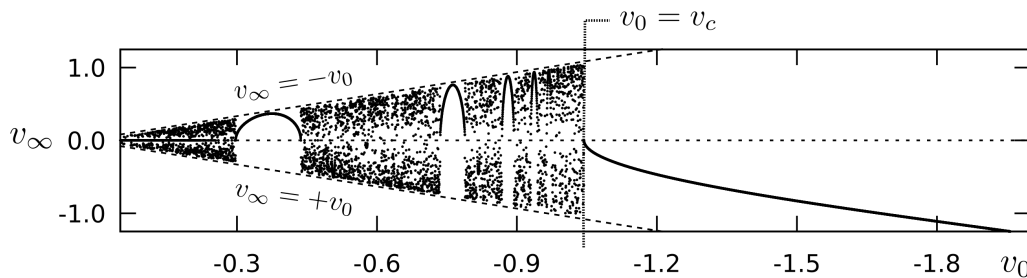


Figura 6.1 Gráfico de v_∞ versus v_0 fornecendo uma visão ampla das regiões de regime regular e irregular de colisões. O ponto crítico $(v_c, 0)$ se encontra quase no centro do gráfico. Pontos tocando as retas limites $v_\infty = \pm v_0$ correspondem a processos de colisão completamente elásticos, que ocorrem na região regular quando $|v_0| \gg |v_c|$ (o gráfico aproxima assintoticamente da reta limite inferior $v_\infty = v_0$).

detalhe importante esperado do modelo, que é o fato de todos os pontos estarem contidos na região definida pelas retas limite $v_\infty = \pm v_0$ (segmentos de linha tracejados), provando que $|v_\infty| \leq |v_0|$ para qualquer v_0 . Isso também significa que a componente translacional da energia cinética total, termo proporcional a v^2 na Eq. (6.14), é sempre menor ou igual ao seu valor inicial. Nos cenários em que $v_\infty = v_0$, verifica-se que todos os outros parâmetros variacionais recuperam seus valores iniciais (processo elástico), em concordância com a conservação de energia do sistema.

A Fig. 6.2 mostra o resultado da simulação de espalhamento da região $|v_0| < |v_c|$, que fornece uma ampliação do gráfico anterior tornando evidente a existência de mais janelas com formato de arcos "elípticos" tangentes à reta limite superior $v_\infty = -v_0$. Essas se distribuem ao longo do eixo v_0 com ambas largura e separação cada vez menores conforme a proximidade do ponto crítico, formando uma estrutura cada vez mais compacta. Analisando a dinâmica de colisões em vários intervalos definidos pelas larguras das janelas, verifica-se que o espalhamento é de fato regular, sendo efetivamente um processo de reflexão bem definido, em que as ondas solitárias formam um estado ligado com características quase idênticas. Isso é ilustrado na Fig. 6.3, que mostra a evolução do processo de colisão para v_0 escolhido nas quatro primeiras janelas de reflexão (indicadas na figura anterior).

Para qualquer v_0 contido no intervalo da largura da janela W_n , os estados ligados formados nos processos de reflexão podem ser caracterizados pelas quantidades básicas: tempo de vida (Z_n - comprimento ΔZ entre a primeira e a segunda colisão); amplitude da oscilação posicional (A_n - coordenada $|\tau|$ máxima); número de oscilações de forma (C_n - resultado da contagem dos picos de máximo da função $|\phi(\tau, Z)|^2$ associados aos instantes de largura mínima do perfil). As duas primeiras quantidades dependem do ponto na janela dado pela coordenada v_0 , mas por variarem muito pouco com relação aos valores no ponto tangente, são consideradas constantes da n -ésima janela. A terceira quantidade é sempre constante devido à sua própria definição, e descreve uma propriedade interessante das janelas, que pode ser expressa pela equação $C_n = n + 3$.

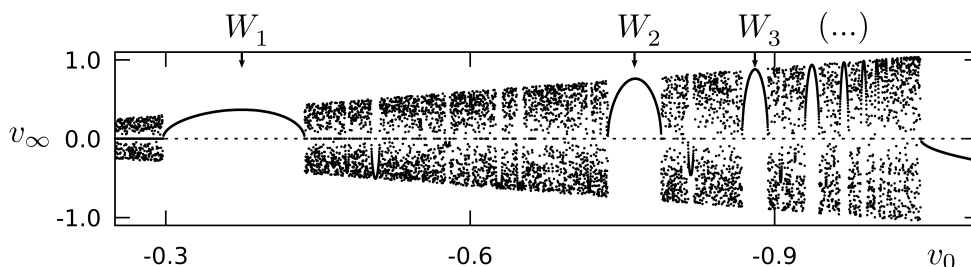


Figura 6.2 Gráfico de v_∞ versus v_0 para o intervalo $[-0.250, -1.102]$. As janelas de regularidade são nomeadas conforme a notação W_n ($n \in \mathbb{N}^*$), com $n = 1$ para a primeira e maior janela.

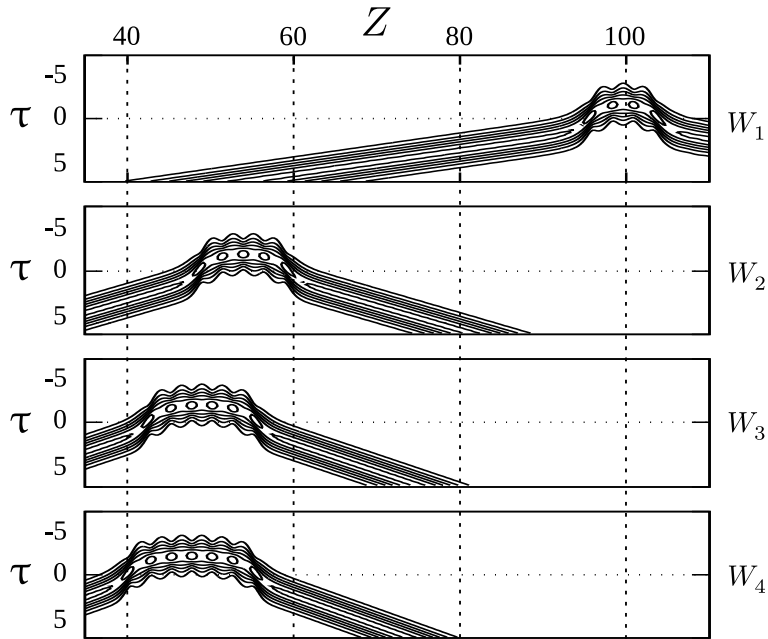


Figura 6.3 Gráficos de curvas de nível da função $|\phi(\tau, Z)|^2$ para quatro velocidades de aproximação, determinadas pelo pontos em que as curvas correspondendo às janelas de reflexão W_n (com $n = 1, 2, 3, 4$) tangenciam a reta $v_\infty = -v_0$.

Por meio de observações mais detalhadas do gráfico da Fig. 6.2, é possível notar que outras janelas bem menores (com formato invertido tangenciando a reta limite inferior) se distribuem em ambas extremidades das janelas de reflexão, com exceção de W_1 que não possui tais janelas na extremidade esquerda. Para evidenciar isso, considerou-se um intervalo simétrico centralizado na janela W_2 , cujo resultado da simulação de espalhamento é mostrado na Fig. 6.4. A semelhança dessas estruturas de janelas com a estrutura principal é clara, se colocadas na mesma escala, é notável que essas se diferenciam apenas por transformações de reflexão ao longo dos eixos horizontal e/ou vertical, i.e., $Z \rightarrow -Z$ e/ou $\tau \rightarrow -\tau$. Nessas janelas a dinâmica de colisões também é regular, e o espalhamento é efetivamente um

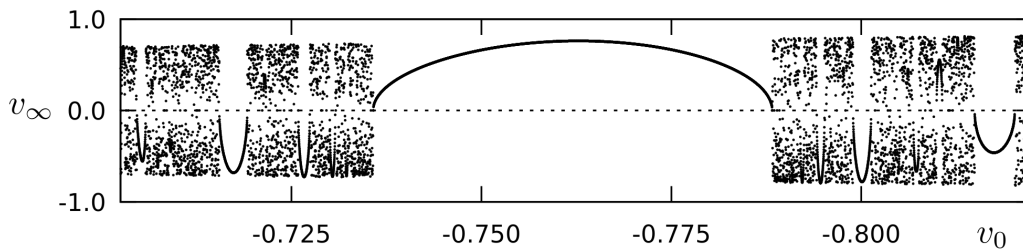


Figura 6.4 Gráfico de v_∞ versus v_0 para o intervalo $[-0.7025, -0.8225]$. Estruturas de janelas semelhantes ao caso anterior surgem nas regiões próxima aos pontos extremos de W_2 , que são pontos críticos onde essas se tornam gradualmente mais compactas.

processo de transmissão bem definido, que obedece um padrão análogo ao das janelas de reflexão. Além disso, toda janela de transmissão do lado esquerdo possui uma correspondente no lado direito (e vice-versa), em que ambas fornecem cenários de colisão quase idênticos (o tempo de vida e a amplitude de cada oscilação posicional diferem muito pouco). A existência dessa múltiplas estruturas menores é constatada para qualquer janela de reflexão W_n , isso indica que existem condições recorrentes em que a sensibilidade do mecanismo de colisão com a velocidade de aproximação se torna muito pequena, permitindo que a interação das ondas solitárias seja previsível e com isso controlada.

Para explorar como essas condições recorrentes se manifestam no gráfico de espalhamento, várias simulações foram efetuadas em intervalos mais finos próximos das extremidades de certas janelas. Primeiramente, escolheu-se a extremidade esquerda da janela W_2 , que forneceu uma ampliação da estrutura de janelas de transmissão vista na Fig. 6.4. Novamente, surgem estruturas menores nas extremidades de cada janela, indicando que a condição recorrente do mecanismo de colisão se estende para intervalos arbitrariamente pequenos. Então, é esperado que janelas cada vez mais estreitas estejam incorporadas em todas as estruturas, para investiga-las adotou-se um protocolo que consiste em selecionar apenas intervalos de ampliação localizados na extremidade esquerda da segunda janela de reflexão/transmissão (sendo a primeira sempre a mais larga). Seguindo esse protocolo de seleção, foram obtidos os resultados mostrados na Fig. 6.5, onde o primeiro gráfico corresponde ao mesmo da Fig. 6.2. Os intervalos destacados indicam a região de ampliação que fornece o gráfico imediatamente abaixo. Aqui, as janelas são rotuladas com o índice adicional (s), que denota a estrutura na qual a janela pertence, assim, $W_n^{(s)}$ é o rótulo da n -ésima janela contida na estrutura da Fig. 6.5(s), com $s = a, b, \dots$, ou e . Além disso, a notação $v_c^{(s)}$ é usada para designar o valor crítico de v_0 em cada estrutura.

Analisando os dados apresentados nas Fig. 6.5(a)-(e), verifica-se que existem pontos no eixo v_0 associados a processos de colisão incompletos, sendo que a maioria se encontra no intervalo de velocidades entre zero e a extremidade esquerda de $W_1^{(a)}$. Isso se deve ao limite de simulação adotado durante as simulações, que foi insuficiente para completar processos envolvendo estados ligados de tempo de vida muito longo, que são mais frequentes quando a velocidade de aproximação é muito baixa. Portanto, o modelo reduzido descreve essencialmente processos de colisão que são do tipo de reflexão ou transmissão. A probabilidade de que algum processo seja do tipo aprisionamento (estado ligado permanente) é extremamente pequena, pois sua ocorrência exige que a velocidade de aproximação assuma exatamente algum dos valores críticos. O padrão de janelas claramente se repete a cada ampliação, a diferença mais notável é a alternância entre os tipo de janela, o que permite relacionar cada

gráfico sucessivo através de uma transformação ao longo do eixo horizontal que combina reflexão, reescala e translação.

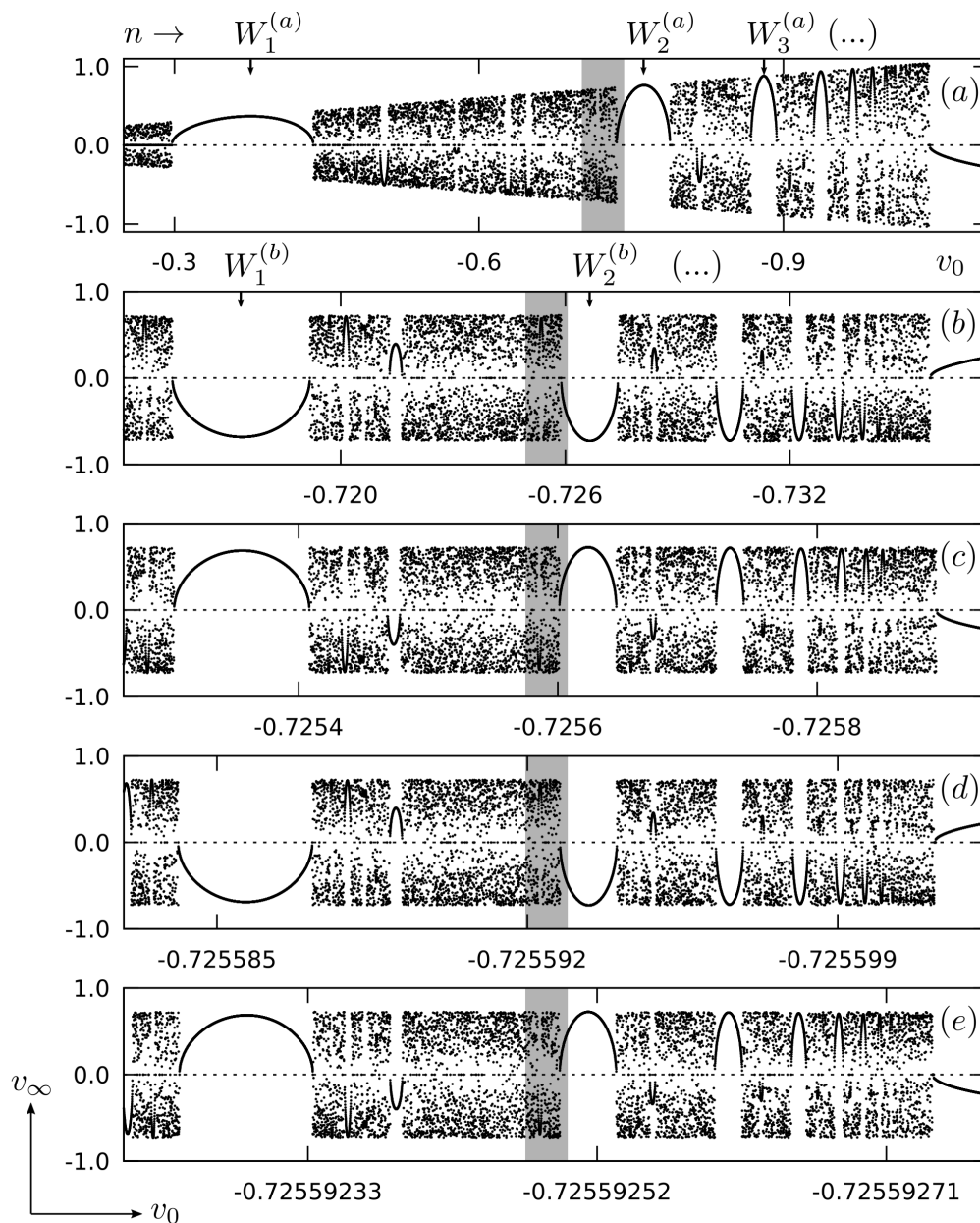


Figura 6.5 Resultados do modelo reduzido para sucessivas ampliações de intervalos no eixo v_0 (regiões retangulares marcadas nas figuras) de acordo com o protocolo de seleção adotado: (a) gráfico de espalhamento da Fig. 6.2 repetido aqui para enfatizar o padrão de janelas; (b)-(e) são os resultados gráficos das simulações nos intervalos mencionados, que evidenciam a similaridade envolvendo as estruturas de janelas de reflexão/transmissão.

Nas referências [6, 15], estruturas de janela também foram detectadas no gráfico de espalhamento, e foi demonstrado que a quantidade $(v_c^2 - v_n^2)^{-1/2}$, com v_n sendo a velocidade no ponto de tangência da n -ésima janela, obedece com grande precisão uma relação linear com o índice n . Para investigar se o mesmo ocorre no caso atual, considerou-se a expressão

$$\left| \left(v_c^{(s)} \right)^2 - \left(v_n^{(s)} \right)^2 \right|^{-1/2} = h^{(s)} n + k^{(s)}, \quad (6.21)$$

com (s) designando a estrutura correspondente, $h^{(s)}$ e $k^{(s)}$ são coeficientes. Na expressão acima, o módulo é necessário se o protocolo de seleção leva em conta estruturas de janela que emergem pelas extremidades direita, que diferem das mostradas aqui por uma transformação de escala seguida de reflexão ao longo do eixo vertical. Considerando as estruturas da Fig. 6.5, verifica-se que a relação dada pela Eq. (6.21) é bem satisfeita, o que é uma forte evidência quantitativa de autossimilaridade do padrão de janelas. No entanto, para comparar os coeficientes $h^{(s)}$ e $k^{(s)}$ das estruturas (b)-(c) com os valores encontrados no caso de $s = a$, é necessário reescalar cada intervalo de ampliação que vai desde a extremidade esquerda de $W_1^{(s)}$ até o ponto crítico de coordenadas $(v_c^{(s)}, 0)$, de modo que esses tenham o mesmo comprimento do intervalo da estrutura inicial (a). Depois de efetuar essa reescala seguida de uma translação no eixo horizontal que leva todos os pontos críticos para o ponto $(-1, 0)$ (i.e., $v_c^{(s)} = -1 \forall s$), calcula-se a quantidade $V(n; s) = [1 - (\vartheta_n^{(s)})^2]^{-1/2}$ para cada n em termos das velocidades transformadas denotadas por ϑ . Na Fig. 6.6 essas quantidades são colocadas em um gráfico até $n = 6$, o comportamento linear é claramente visualizado. Os coeficientes da Eq. (6.21) são encontrados pelo método de regressão linear dos pontos mostrados na figura anterior para cada (s) . Para o caso (a), obteve-se $h^{(a)} = 0.325 \pm 0.006$ (1.85%) e $k^{(a)} = 0.65 \pm 0.02$ (3.08%), enquanto que para os outros o cálculo da média e do desvio padrão dos coeficientes forneceu $\langle h \rangle = 0.280 \pm 0.003$ (1.24%)

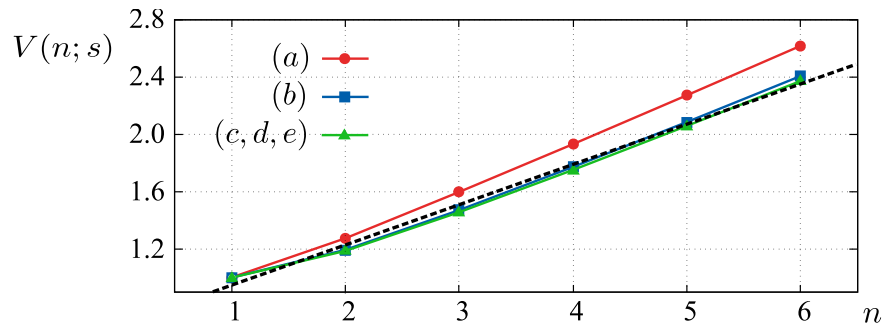


Figura 6.6 Plot da quantidade $V(n; s) = [1 - (\vartheta_n^{(s)})^2]^{-1/2}$ como função do índice n da janela de reflexão/transmissão. A estrutura inicial (a) tem pontos bem distinguíveis, já as estruturas de ampliação possuem pontos muito próximos na escala do gráfico. A reta tracejada representa a função linear: $\langle h \rangle n + \langle k \rangle$.

e $\langle k \rangle = 0.662 \pm 0.004$ (0.68%). Note que o desvio padrão associado aos valores médios é bem pequeno, provando quantitativamente que o padrão de janelas encontrado nos casos (b)-(e) é realmente muito similar. Comparando essas médias com os valores de $h^{(a)}$ e $k^{(a)}$, verifica-se que existe uma diferença relevante com relação ao primeiro, indicando que a autossimilaridade das estruturas se estabelece a partir da primeira ampliação. No entanto, embora a estrutura inicial seja muito semelhante a outras incorporadas na mesma, essa não contém janelas de regularidade na região de baixas velocidades ($0, v_c^{(a)}$), sendo comparável com as outras somente a partir da segunda janela. Adotando outro protocolo de seleção, é possível obter resultados bem semelhantes, que indicam fortemente que tal padrão prevalece para todas as estruturas emergindo na extremidade de qualquer janela de regularidade. Portanto, a estrutura de janelas de reflexão da Fig. 6.1 é *fractal*, sua existência no intervalo de irregularidade do espalhamento e a alta sensibilidade do mesmo com a condição inicial, são assinaturas da natureza caótica do mecanismo de colisão.

As múltiplas estruturas compondo o fractal obedecem outra relação interessante, que relaciona o número de ampliações (seguindo um protocolo pré-definido) com o comprimento da estrutura, definido como sendo $L^{(s)} = |v_c^{(s)} - v_1^{(s)}|$, pela formula

$$\log_{10} L^{(s)} = Rj + r, \quad (6.22)$$

em que R e r são coeficientes característicos do protocolo adotado, sendo $j - 1$ o número de ampliações associado a cada estrutura, com isso, $j = 1$ para o caso (a), $j = 2$ para o caso (b) etc.. A reta de melhor encaixe fornece $R = -1.639 \pm 0.008$ (0.47%) e $r = 1.56 \pm 0.02$ (1.63%), de modo que a Eq. (6.22) pode ser reescrita em termos de $L^{(a)}$ da seguinte forma:

$$L^{(s)} = 10^{R(j-1)} L^{(a)}. \quad (6.23)$$

Como R é negativo, $10^R < 1$ é um fator de redução como esperado, e a Eq. (6.23) mostra que o comprimento das estruturas decresce exponencialmente. Isso significa que a cada ampliação o intervalo de visualização diminui $10^{-R} \approx 43.6$ vezes. Para a estrutura da Fig. 6.5(e), por exemplo, tem-se $L^{(e)}/L^{(a)} \sim 10^{-7}$.

Com relação à dinâmica de colisões nas janelas de reflexão/transmissão das Fig. 6.5(b) e (e), verifica-se que o intervalo de regularidade dessas janelas fornece processos de colisão bem definidos também, ocorrendo a formação de estados ligados com características específicas descritas pelas quantidades $Z_n^{(s)}$, $A_n^{(s)}$ e $C_n^{(s)}$ (novamente o índice (s) serve de extensão da notação). Isso é ilustrado na Fig. 6.7 para quatro janelas consecutivas encontradas nas estruturas (b) e (c), para os casos (d) e (e) a dinâmica de colisão pode ser visualizada na Ref. [73]. Assim como discutido anteriormente para as janelas $W_n^{(a)}$, verifica-se que $Z_n^{(s)}$ e $A_n^{(s)}$ variam muito pouco conforme v_0 é deslocado do ponto de tangência, e por isso podem

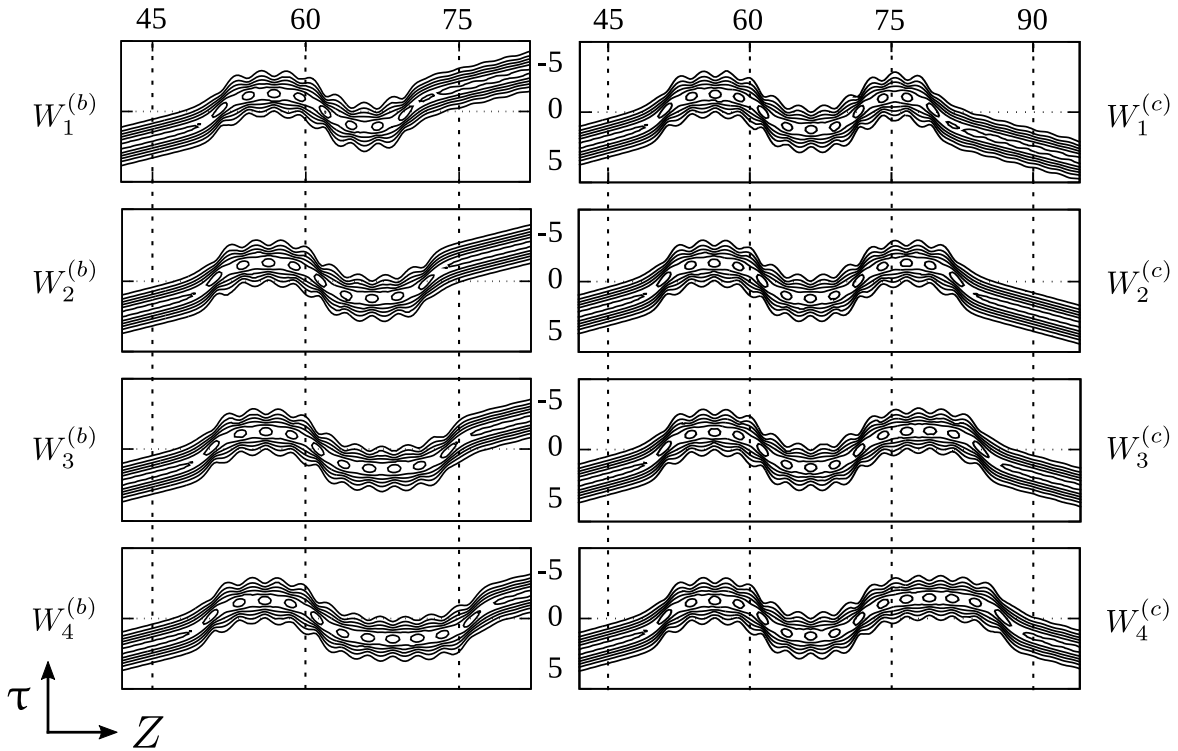


Figura 6.7 Gráficos de curvas de nível da função $|\phi(\tau, Z)|^2$ para oito velocidades de aproximação, determinadas pelo pontos de tangência das janelas $W_n^{(s)}$ com $n = 1, 2, 3, 4$ e $s = b, c$.

ser considerados constantes características de cada janela. Já o número de oscilações de forma pode ser escrito na forma $C_n^{(s)} = (n - 1) + 4m^{(s)} + 4$ para qualquer janela $W_n^{(s)}$ da Fig. 6.5, em que $m^{(s)} = j - 1$ é número de ampliações. De maneira geral, os resultados sugerem vigorosamente que essas propriedades interessantes são válidas para qualquer janela da estrutura fractal, que representam intervalos de condição inicial em que o mecanismo de colisão descrito pelo modelo reduzido fornece uma dinâmica única e previsível, i.e., uma assinatura que permite localizar a janela na região complexa e caótica do gráfico de espalhamento.

6.4 Análise do mecanismo de colisão do modelo reduzido

Para investigar quais condições recorrentes permitem que o mecanismo de colisão seja controlável, o comportamento dos parâmetros variacionais pode ser analisado para um *ensemble* reduzido de processos de colisão, contendo cenários com diferentes velocidades de aproximação variando em um intervalo definido. Para um *ensemble* de $n_p > 1$ processos rotulados com índice $m = 1, \dots, n_p$, o valor da velocidade de aproximação para cada processo m é denotado por $v_0(m)$, de forma que a diferença entre condições iniciais consecutivas

$v_0(m+1) - v_0(m)$ é mantida fixa, sendo que $v_0(1)$ e $v_0(n_p)$ assumem os valores extremos do intervalo predefinido. A evolução de cada processo de colisão, fornece como o ponto $(p, w, v, b)(Z)$ traça a correspondente trajetória no espaço de parâmetros quadridimensional a partir do ponto de configuração inicial (p_0, w_0, v_0, b_0) . Na atual abordagem numérica, as trajetórias acabam no plano definido por $|p| = p_0$, ou no ponto $(p, w, v, b)(Z_{max})$. Antes de prosseguir, algumas considerações são necessárias para facilitar as discussões sobre a dinâmica das ondas solitárias. Assim como mostrado na seção anterior, os processos de colisão são caracterizados por oscilações posicionais e de forma. A primeira pode ser definida como o arco traçado pelo pico da onda solitária (dado pelo parâmetro $p(Z)$) no intervalo em Z entre duas colisões. Assim, se o m -ésimo processo for caracterizado por $n_c(m)$ colisões, o número de oscilações posicionais é dado por $n_{op}(m) = n_c(m) - 1$, e o processo é efetivamente uma reflexão (transmissão) se $n_{op}(m)$ é ímpar (par). A oscilação de forma se manifesta quando a largura da onda solitária oscila em torno do valor $w_0 = 1$, isso ocorre quando a colisão desvia o estado vibracional, definido pelo par ordenado (w, b) , da configuração de equilíbrio (w_0, b_0) , ativando o denominado modo vibracional. Esse é responsável por provocar oscilações na energia cinética e potencial, alterando também o valor médio dessas quantidades (redução da parte cinética e aumento da potencial) sem modificar a energia total que permanece constante. Durante o processo de colisão, a dinâmica desse modo pode ser visualizada em termos do estado vibracional, cujo comportamento é dado pela trajetória traçada por $(w, b)(Z)$ no espaço de parâmetros bidimensional, que circula o ponto (w_0, b_0) de maneira não trivial. Os vários aspectos do mecanismo de colisão conforme a dinâmica descrita pelo modelo reduzido são abordados em detalhes nessa seção.

Considerando um *ensemble* na região regular de espalhamento, em que $n_c = 1$ para todos os processos, verifica-se que a única colisão entre as ondas solitárias não promove mudanças significativas no estado vibracional quando $|v_0| \gg |v_c^{(a)}| = 1.04$, em outras palavras, $w(Z) \simeq w_0$ e também $b(Z) \simeq b_0$ para qualquer $Z > 0$. Quando $|v_0| \lesssim 15$, o estado vibracional se manifesta como ativo, e as oscilações de forma deixam de ser desprezíveis. Essas se instauram devido à troca de energia entre as componentes cinéticas translacional e vibracional (termo proporcional à b^2 na Eq. (6.14)) induzida nos instantes de colisão, e se intensificam (maior amplitude de oscilação) quando v_0 se aproxima da velocidade crítica, para qual o processo de colisão resulta em máxima energia no modo vibracional e momento individual nulo. Esse processo crítico corresponde ao cenário limite em que o acoplamento das ondas solitárias não é suficientemente forte para capturá-las e, conseqüentemente, instaurar um estado ligado.

Na região caótica, a análise do mecanismo de colisão deve ser bem mais detalhada em virtude da complexidade apresentada pelo espalhamento das ondas solitárias. Para isso,

considerou-se um *ensemble* de $n_p = 200$ processos rotulados com $v_0(1) = -0.25$, logo antes da janela $W_1^{(a)}$, e $v_0(m) = -1.04$. Focando primeiramente na dinâmica do parâmetro de posição $p(Z)$, nota-se que todos os processos envolvem pelo menos uma oscilação posicional, o que é um fato esperado já que o acoplamento nesse regime é intenso o bastante para promover a formação de estados ligados. Isso também pode ser entendido ao interpretar o efeito do acoplamento como sendo equivalente ao de um potencial atrativo dinâmico, que é capaz de manter as ondas "ligadas" se o momento individual no instante da primeira colisão for suficientemente baixo. Logo, os processos que envolvem a quantidade mínima de colisões ($\min[n_c] = 2$) são do tipo reflexão dados pelas janelas $W_n^{(a)}$, nesses a resposta do mecanismo de colisão durante o fim da primeira oscilação posicional, promove a restauração de uma quantidade suficiente de momento individual e energia cinética translacional para que as ondas solitárias escapem da zona de potencial atrativo. Para investigar as condições em que isso acontece, os parâmetros variacionais nos instantes da primeira e segunda colisão, denotados por $q(Zc_1)$ e $q(Zc_2)$ (com $q(Z)$ sendo qualquer parâmetro), respectivamente, são analisados para todos processos do *ensemble* (com exceção da posição, pois em qualquer instante de colisão tem-se $p = 0$). As Fig. 6.8(a)-(c) mostram que os parâmetros em Zc_1 dependem fracamente da velocidade de aproximação, principalmente a largura que apresenta variações da ordem de 10^{-3} em todo o intervalo. Note que $w(Zc_1) < 1$ e $b(Zc_1) < 0$, portanto a primeira colisão é sempre caracterizada pelo estreitamento do perfil, o que se deve ao valor negativo de b quando $Z \lesssim Zc_1$ (iminência de colisão), causando a redução de w . Interessantemente, a velocidade de colisão $v(Zc_1)$ varia pouco com v_0 , indicando que a sensibilidade do mecanismo de colisão não decorre diretamente de v_0 . Então, para intervalos estreitos no eixo v_0 , os parâmetros variacionais podem ser considerados quase constantes, e por isso, para todos os processos de colisão contidos nesse intervalo, a primeira oscilação posicional acompanhada das oscilações de forma se manifesta de maneira quase indistinguível. Nas Fig. 6.8(d)-(f), o comportamento dos parâmetros em Zc_2 pode ser visualizado, nesse caso os três parâmetros considerados apresentam variações acentuadas conforme v_0 percorre o intervalo, essas variações são similares e surgem na forma de oscilações com frequência variável, que cresce com valor de $|v_0|$. Considerando $w(Zc_2)$ e $b(Zc_2)$, nota-se que as oscilações do segundo antecedem as do primeiro, verifica-se ainda que isso acontece a uma defasagem fixa. A origem desse comportamento provém do tempo de resposta (*delay*) da onda solitária sobre o efeito da fase quadrática variável, ou seja, as oscilações na largura induzidas pelo parâmetro *chirp* não são instantâneas. Esses resultados mostram que a primeira oscilação posicional tem um papel muito importante na evolução dos parâmetros até a segunda colisão, essa pode ser caracterizada pela amplitude máxima de $|p(Z)|$ (equivalente ao valor absoluto do mínimo de $p(Z)$) durante o intervalo

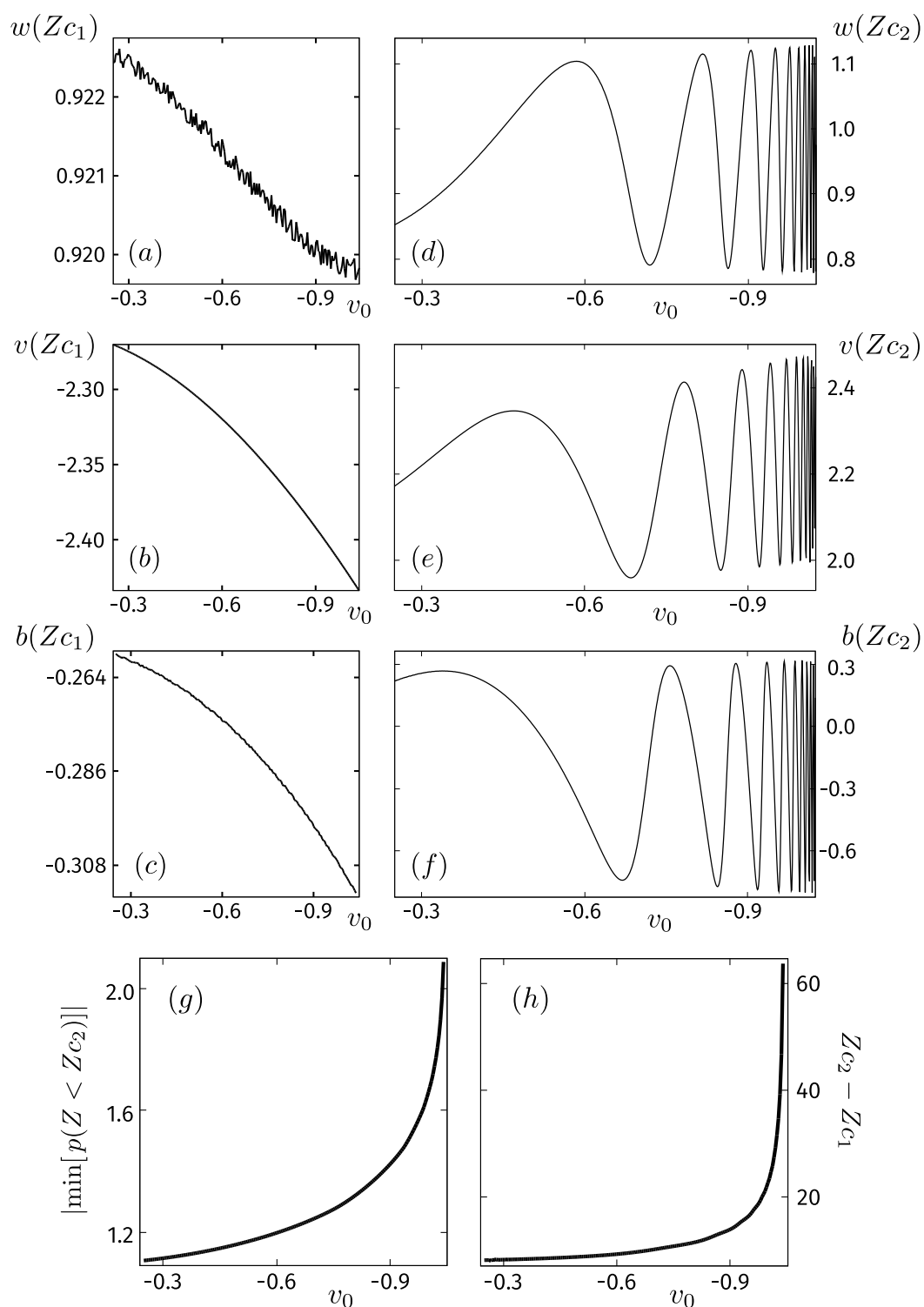


Figura 6.8 Gráficos dos parâmetros variacionais nos instantes da primeira (Z_{c1}) e segunda colisão (Z_{c2}) em função da velocidade de aproximação. Os gráficos (g) e (h) correspondem ao comprimento e à amplitude da primeira oscilação posicional, respectivamente. Cada gráfico contém 200 pontos associados a cada processo de colisão do *ensemble*.

$[Z_{c1}, Z_{c2}]$, e pelo comprimento $Z_{c2} - Z_{c1}$ desse intervalo. Essas duas quantidades definem o comportamento inicial do denominado modo translacional, que está associado a dinâmica de translação das ondas solitárias durante o estado ligado. A energia contida nesse modo é definida como sendo a igual a componente translacional da energia cinética, e por isso esse se altera a cada colisão dependendo da troca de energia do mesmo com o modo vibracional. Os gráficos da Fig. 6.8(g) e (h) mostram que a amplitude e o comprimento $Z_{c2} - Z_{c1}$ crescem estritamente com $|v_0|$. Nos dois gráficos, calcula-se que a curva de melhor ajuste é dada por

$$F(v_0) = \frac{h}{k - |v_0|} + d. \quad (6.24)$$

Para o gráfico da amplitude da oscilação posicional, tem-se os coeficientes de melhor ajuste: $h = 0.914 \pm 0.009$ (0.98%); $k = 1.0590 \pm 0.0003$ (0.026%); $d = 7.48 \pm 0.04$ (0.48%). Com relação ao gráfico do comprimento, os coeficientes são: $h = 0.109 \pm 0.001$ (1.20%); $k = 1.158 \pm 0.002$ (0.13%); $d = 0.996 \pm 0.002$ (0.20%). Em ambos casos, o valor do desvio padrão para cada coeficiente é bem pequeno, indicando que a Eq. (6.24) descreve razoavelmente as curvas em questão. Note que a amplitude e o tempo de vida da primeira oscilação posicional crescem abruptamente quando v_0 se aproxima do valor crítico, logo, pequenas diferença na velocidade de colisão $v(Z_{c1})$ podem provocar grandes mudanças no modo translacional, que levam a estados bem diferentes no instante da próxima colisão. Durante o intervalo $[Z_{c1}, Z_{c2}]$, os parâmetros $w(Z)$ e $b(Z)$ oscilam com amplitude e frequência harmônica quase constantes, essas quantidades caracterizam o modo vibracional excitado na primeira colisão cuja evolução é essencialmente determinada pelo par $(w, b)(Z_{c1})$, esse modo ativo também se manifesta de forma quase idêntica em intervalos de velocidade de aproximação suficientemente estreitos. Na maioria dos processos de colisão, a frequência das vibrações é bem maior que a frequência das oscilações posicionais (que pode ser calculada por $1/(Z_{c2} - Z_{c1})$), por isso pequenas alterações no modo translacional podem alterar bastante a troca de energia entre o mesmo e o modo vibracional na segunda colisão, o que resulta em diferentes configurações do último (dadas por $w(Z_{c2})$ e $b(Z_{c2})$). Isso acontece porque o caminho traçado por $p(Z)$ aumenta na mesma taxa que a amplitude da oscilação posicional, assim a evolução do par (w, b) desde Z_{c1} passa por uma quantidade de ciclos cada vez maior, o resultado são as oscilações de frequência crescente vistas na Fig. 6.8(d) e (f). Essas oscilações são replicadas na velocidade de colisão $v(Z_{c2})$, como pode ser visto na Fig. 6.8(e), isso ocorre porque a energia total contida nos modos translacional e vibracional é constante, logo w , v e b sempre estão correlacionados. Portanto, a similaridade dos padrões de oscilação advém da correlação entre esses parâmetros, além disso, esses padrões acompanham a distribuição de janelas da primeira estrutura, assim como pode ser visto na Fig. 6.9 que mostra como os intervalos em que $b(Z_{c2}) > 0$ coincidem com o surgimento

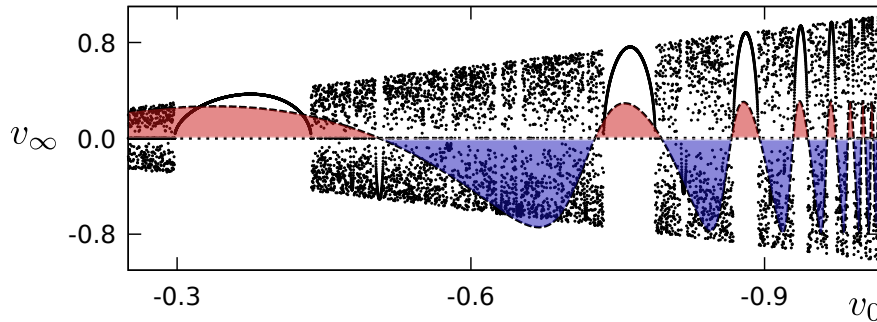


Figura 6.9 Sobreposição do gráfico de $v_\infty \times v_0$ com o gráfico de $b(Z_{c2}) \times v_0$ no intervalo da estrutura fractal de janelas. As regiões em que o parâmetro *chirp* é positivo (destacadas na cor ■) coincidem com as janelas de reflexão, onde os processos ocorrem em somente duas colisões. Os intervalos entre as janelas consistem de processos que decorrem de pelo menos três colisões, para os quais o parâmetro *chirp* (no instante da segunda colisão) é predominantemente negativo (regiões destacadas na cor ■).

das janelas de reflexão. Para os parâmetros $w(Z_{c2})$ e $v(Z_{c2})$ essas regiões de valor positivo se encontram defasadas com relação ao ponto central de tais janelas. Então, a positividade do parâmetro *chirp* é uma condição necessária para que o mecanismo de colisão induza uma troca de energia entre os modos que restaure uma quantidade suficiente de momento individual e energia cinética translacional resultando no fim estado ligado, e com isso nos processos de reflexão de duas colisões característicos das janelas em questão.

A análise do mecanismo de colisão até aqui, teve foco no intervalo da estrutura de janelas inicial. Aplicando o mesmo procedimento nos intervalos entre as janelas de reflexão $W_n^{(a)}$, verifica-se que todos os processos do *ensemble* passam a envolver pelo menos três colisões. Os resultados anteriores são válidos até a segunda colisão, a partir dessa os comportamentos do modo translacional e dos parâmetros variacionais se tornam menos triviais devido às oscilações apresentadas pelos parâmetros em Z_{c2} . No entanto, nas extremidades do intervalo (definidas pelas janelas de reflexão) verifica-se que os parâmetros em Z_{c3} (instante da terceira colisão) oscilam da mesma forma discutida anteriormente, com as regiões em que $b(Z_{c3}) > 0$ coincidindo com as janelas de transmissão. Assim, pode-se inferir que as condições em que o mecanismo de colisão fornece os cenários regulares característicos, são gerais e necessárias para qualquer janela da estrutura fractal. Nos intervalos dominados pelo regime caótico, os processos de colisão envolvem muitas colisões que na maioria das vezes ocorrem frequência elevada (i.e., os modos translacionais carregam menos energia e conseqüentemente as oscilações posicionais se tornam curtas), assim o comportamento dos parâmetros variacionais se torna cada vez mais complexo a cada colisão. Essa complexidade se manifesta nas variações descontroladas que os parâmetros apresentam, e que obviamente

repercutem também nos modos. Embora essas variações sejam bem definidas (i.e., regulares), o efeito resultante na dinâmica dos processos de colisão é uma sensibilidade progressiva com a velocidade de aproximação. Em outras palavras, pequenas mudanças no valor de v_0 são ampliadas a cada colisão, de forma que processos inicialmente indistinguíveis (condições iniciais muito próximas) divergem rapidamente a partir de um certo instante de colisão, a não ser que v_0 pertença ao intervalo de alguma janela de regularidade.

As condições necessárias para o surgimento das janelas de regularidade foram exploradas qualitativamente até agora. Os resultados analisados anteriormente, sugerem que os modos de translação e vibração devem cooperar de alguma forma para que os parâmetros variacionais sejam apropriados no instante da colisão. Nos processos de colisão representados pelos pontos de tangência das janelas de reflexão/transmissão, tal cooperação entre os modos é perfeita, nesses cenários ideais o estado final corresponde simplesmente ao inicial com velocidade de sinal contrário no caso de uma reflexão, em outros termos, toda a energia da componente vibracional é retransferida para a componente translacional depois da última colisão. No restante do intervalo de velocidades de uma janela, as condições ideais que garantem uma colisão perfeitamente elástica não são satisfeitas, no entanto, sabe-se que os aspectos gerais da dinâmica de interação prevalecem, sendo as extremidades da janela os pontos de máximo desvio da condição ideal. Esses pontos podem ser chamados de pontos críticos locais, pois os processos de colisão correspondentes são análogos ao cenário discutido anteriormente, em que as ondas solitárias escapam da zona confinante com momento final nulo e máxima energia no modo vibracional.

Para investigar as condições satisfeitas pelos processos de colisão decorrentes de janelas, considerou-se um *ensemble* com $n_p = 50$ e v_0 tomado no intervalo que tem a extremidade direita da janela $W_2^{(a)}$ como valor central, e se estende pelo eixo v_0 até a coordenada do ponto de tangência $v_2^{(a)}$. Assim, "metade" do *ensemble* ($m \leq 25$) corresponde a processos de colisão previsíveis, que têm a dinâmica característica da janela de reflexão $W_2^{(a)}$. O restante ($25 < m \leq 50$) corresponde a uma mistura de processos regulares e irregulares, sendo dominada pela dinâmica caótica. Na Fig. 6.10(a), a evolução do parâmetro $p(Z)$ é mostrada para todos os processos de colisão, para os quais a dinâmica é muito similar até $Z = Z_{c2}$. As trajetórias de posição vistas na figura, evidenciam o fato que foi anteriormente mencionado, que é a aparente "indistinguíbilidade" dos processos de colisão com condições iniciais próximas (i.e., $v_0(m+1) - v_0(m) = \Delta v$ pequeno), que é exibida pelo comportamento coletivo das trajetórias no espaço de parâmetros (e também nos subespaços de um parâmetro) até o instante da segunda colisão, que antecede a subsequente divergência das mesmas. Para $Z > Z_{c2}$, as trajetórias com $m < 25$, provenientes da janela de reflexão, avançam linearmente para a região de $p > 0$, enquanto que as outras permanecem aprisionadas na

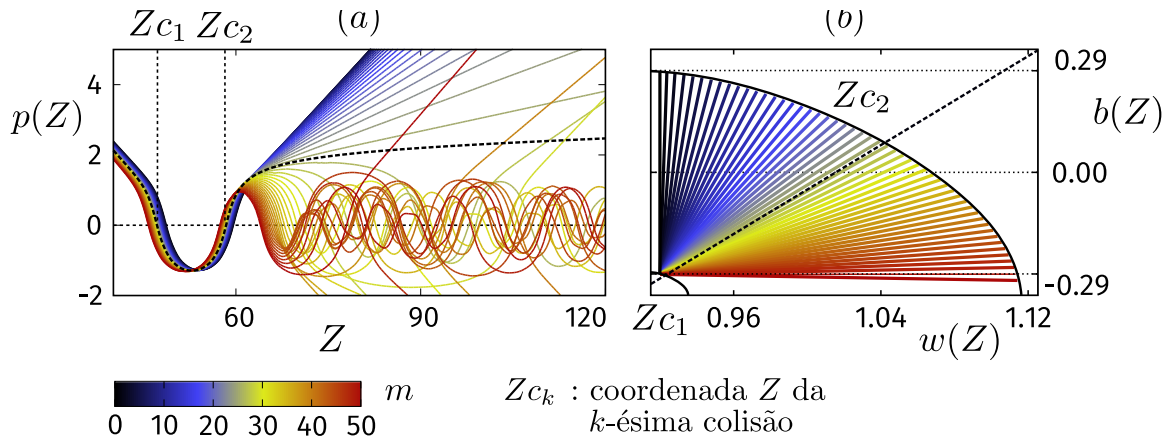


Figura 6.10 Em (a), trajetórias do perfil $|\phi(\tau, Z)|$ dada pela evolução do parâmetro variacional de posição $p(Z)$ para 50 cenários de colisão com velocidade de aproximação $v_0(m)$ ($m = 1, \dots, 50$) selecionada no intervalo $[-0.762495, -0.814056]$. O primeiro cenário ($m = 1$), com $v_0(1) = -0.762495$, corresponde ao ponto de tangência da janela de reflexão W_2 . O cenário com $v_0(25)$ é último contido no interior de W_2 , a trajetória correspondente passa bem próximo da trajetória limite (linha tracejada) obtida quando v_0 é tomado no ponto extremo direito de W_2 . Em (b), variação direta de (w, b) nas coordenadas $Z_{c_{1,2}}$, a linha tracejada diagonal corresponde à trajetória tracejada com $m = 25$.

zona de auto-confinamento, e progressivamente divergem da dinâmica coletiva a cada colisão. A trajetória limite, associada ao ponto de transição, define uma separação clara dos dois regimes de colisão, e pode ser interpretada como um estado ligado permanente já que a separação das ondas fica fixa. Embora os processos caóticos se originem do desvio excessivo da condição limite definida pela janela, existe um instante de última colisão $Z > Z_{c_2}$ em que tal condição é suficientemente satisfeita, permitindo que as ondas solitárias finalmente escapem. No entanto, diferentemente do regime regular, esse instante varia de forma errática para cada valor de v_0 . A Fig. 6.10(b) ilustra a relação entre os estados vibracionais em Z_{c_1} e Z_{c_2} para cada processo do *ensemble* em questão. Em Z_{c_1} , os parâmetros de largura e *chirp*, denotados por w_1 e b_1 , variam pouco com a condição inicial, o que já havia sido mostrado anteriormente nas Fig. 6.8(a)-(c) incluindo a velocidade de colisão (v_1 na notação atual). Por essa razão as trajetórias não divergem durante a primeira oscilação posicional, além de apresentarem oscilações de forma quase idênticas. Ainda na Fig. 6.10(b), o estado vibracional em Z_{c_2} , definido por w_2 e b_2 , varia de um processo para outro seguindo uma curva bem definida, isso acontece devido à defasagem entre as oscilações de $w(Z_{c_2})$ e $b(Z_{c_2})$ abordadas anteriormente (se a defasagem fosse nula, essa curva seria uma reta). Para o cenário ideal dado pela trajetória com $m = 1$ (linha preta contínua na Fig. 6.10(a)), tem-se $w_1 = w_2$ e $b_2 = -b_1$ (linha preta vertical na Fig. 6.10(b)), de modo que o sinal

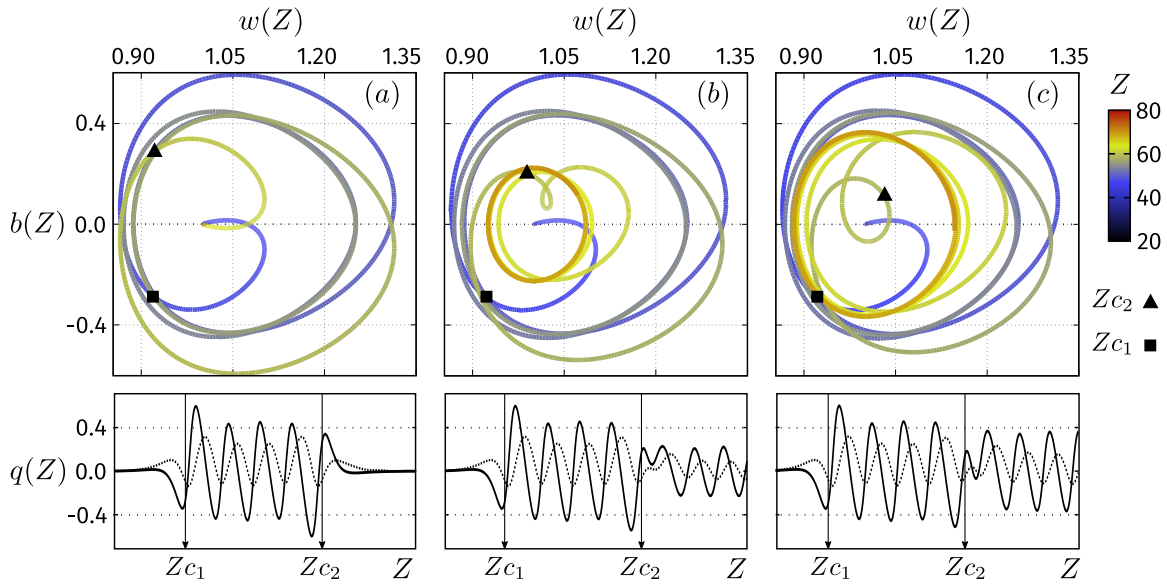


Figura 6.11 Trajetórias no espaço de parâmetros (w, b) para três processos de colisão na janela $W_2^{(a)}$, em (a) a velocidade de aproximação é $v_2^{(a)}$, em (b) e (c) a velocidade é escolhida cada vez mais próxima do ponto crítico local. As trajetórias resultam dos gráficos mostrados logo abaixo, que fornecem a evolução do parâmetro $q(Z)$ (linha contínua para $q = b$ e tracejada para $q = w - 1$).

oposto do parâmetro *chirp* em Z_{c2} indica que o efeito da segunda colisão é exatamente o inverso da primeira (visto que $b(-Z) = -b(Z)$, i.e., a reversão do processo de colisão muda o sinal de $b(Z)$ assim como o de $v(Z)$). Além disso, a diagonal tracejada que mostra quando ocorre a transição para fora da janela, reforça a constatação feita anteriormente sobre a maioria das trajetórias do regime irregular estarem associadas a valores negativos de b_2 . Analisando a evolução do estado vibracional para três casos durante o intervalo de oscilação posicional que antecede a segunda colisão, verifica-se que as trajetórias traçadas pelo ponto (w, b) tem um padrão muito similar, que está associado às oscilações de forma bem definidas características da janela em questão. No cenário ideal, esse padrão de evolução é visto como uma curva simétrica que se fecha exatamente em (w_0, b_0) em algum instante $Z \gtrsim Z_{c2}$ (veja a Fig. 6.11(a)). Quando v_0 desvia do valor ideal, essa curva se altera nos instantes em que $Z \rightarrow Z_{c2}^-$, deslocando o ponto (w_2, b_2) do alinhamento vertical com (w_1, b_1) . Se v_0 permanece contido na janela, a curva evolui em $Z > Z_{c2}$ para um ciclo bem definido, cujo o "raio" médio (amplitude média das oscilações de forma) cresce conforme v_0 se aproxima de um dos pontos críticos locais (veja as Fig. 6.11(b)-(c)). O efeito desse comportamento pode ser visualizado claramente nos gráficos de evolução individual dos parâmetros (parte de baixo da Fig. 6.11), que evidenciam a relação direta do ciclo com a amplitude das os-

cilações de forma. Se v_0 entra na região caótica, a curva preserva um padrão semelhante ao encontrado no caso crítico quando $Z < Z_{c2}$, porém para $Z \geq Z_{c2}$ essa evolui rapidamente para uma trajetória desordenada envolvendo valores bem maiores de b e w , i.e., oscilações de forma intensificadas. Considerando um intervalo $[Z_{c1}, Z']$ com $Z' < Z_{c2}$ tomado no ponto de mínimo de $b(Z)$, as trajetórias no espaço de parâmetros se mostram muito similares, de modo que o comportamento de $w(Z)$ pode ser ajustado com boa precisão pela função

$$w_{\text{fit}}(Z) = D_0 + D \text{sen}[(Z - Z_0)\omega], \quad (6.25)$$

em que os parâmetros de ajuste D e ω , fornecem a amplitude e a frequência de oscilação da largura, respectivamente. Para os cenários das Fig. 6.11(a)-(c), os valores de ajuste obtidos são muito próximos como esperado, calculando o valor médio e o desvio padrão encontra-se os seguintes resultados: $\langle D \rangle = 0.192 \pm 0.007$ (2%) e $\langle \omega \rangle = 2,46 \pm 0.02$ (0.2%). Então, durante a fase de comportamento coletivo do *ensemble*, as oscilações de forma induzidas pela primeira colisão possuem de fato quase a mesma frequência harmônica. Essa propriedade das oscilações é na verdade mais geral, verifica-se que após o desligamento das ondas solitárias ou nos intervalos entre colisões de um estado ligado, essas ocorrem com frequências que crescem muito pouco $|v_0|$ e por isso permanecem próximas do valor apresentado. Assim, em intervalos de v_0 não muito amplos, como é o caso das janelas $W_n^{(a)}$, a frequência de tais oscilações pode ser considerada constante e característica do modo vibracional.

Esse estudo mais detalhado dos processos de colisão pode ser aplicado para qualquer janela de regularidade, e com isso verifica-se que os resultados anteriores podem ser generalizados facilmente. Assim, se o intervalo de velocidades do *ensemble* estiver centrado em uma janela arbitrária, cuja assinatura é um processo de colisão que decorre de j colisões ($j \geq 2$), a dinâmica coletiva de qualquer processo desse *ensemble* se estende até a j -ésima colisão que se dá no instante Z_{c_j} . Durante o intervalo $[Z_{c1}, Z']$ (com Z' sendo o último mínimo de $b(Z)$ logo antes de Z_{c_j}), a evolução do estado vibracional ocorre de forma praticamente idêntica, com ambas amplitude e frequência do modo correspondente sendo aproximadamente constantes. No entanto, os valores $w_j = w(Z_{c_j})$ e $b_j = b(Z_{c_j})$ acabam sendo diferentes para cada v_0 . A origem dessas variações no estado vibracional em Z_{c_j} , pode ser compreendida com a noção de caminho mencionada anteriormente. Para duas trajetórias consecutivas (m e $m + 1$), os modos translacionais aparentam ser "indistinguíveis", porém existem pequenas diferenças de caminho que se acumulam durante as $j - 1$ oscilações posicionais, que são detectadas pelas medidas das amplitudes e comprimentos de cada i -ésima oscilação posicional ($Z_{c_{i+1}} - Z_{c_i}$ com $i = 1, \dots, j - 1$), cujo comportamento em função de v_0 foi abordado no contexto da Fig. 6.8 considerando apenas a primeira oscilação posicional. No caso da trajetória ideal fornecida pela janela arbitrária em questão, o modo translacional coopera perfeitamente com

o vibracional, de maneira que J e $J + 1/2$ (com $J \in \mathbb{Z}^+$) ciclos dos parâmetros de largura e *chirp*, respectivamente, estejam contidos no intervalo total $[Z_{c_1}, Z_{c_j}]$ (veja a Fig. 6.11(a) para a qual encontra-se $J = 4$). O termo ressonância é comumente usado para descrever essa condição ideal satisfeita pelos modos, resultando em um processo perfeitamente elástico. O fato de que J é um inteiro positivo significa que $w_j = w_1$ e $b_j = -b_1$ (ou igual ao $|b_1|$, pois b_1 é sempre negativo), com essa configuração do modo vibracional em Z_{c_j} , tem-se uma resposta do mecanismo de colisão que reverte a troca de energia inicial, restaurando o estado de entrada das ondas solitárias (em termos de energia, i.e., desconsiderando o sinal de v_0). Esse argumento é baseado na simetria de reversão temporal do sistema ($Z \rightarrow -Z$), que requer a troca do sinal de $v(Z)$ e $b(Z)$ na descrição do processo de colisão reverso, porque ambos parâmetros descrevem taxas de variação (não necessariamente instantâneas) dos parâmetros invariantes $p(Z)$ e $w(Z)$, respectivamente. Com base na discussão anterior, essa ressonância exata dos modos não é uma condição necessária, a tolerância de cada janela é dada pela largura de seu intervalo, que define o desvio máximo que v_0 pode apresentar de maneira que o processo de colisão seja efetivamente uma reflexão/transmissão controlada. Quando o desvio excede um pouco o limiar da janela, a fraca ressonância entre os modos não é suficiente para que a j -ésima colisão propicie o desligamento das ondas solitárias. Para desvios maiores, o estado vibracional em Z_{c_j} é caracterizado por $w_j > 1$ e $b_j < 0$, e a resposta do mecanismo de colisão não é favorável para o escape das ondas solitárias, que permanecem aprisionadas com ainda menos energia no modo translacional. Após sucessivas colisões, as trajetórias perdem qualquer correlação inicialmente existente, e permanecem aprisionadas até um eventual instante de colisão em que a troca de energia restaure uma quantidade suficiente para a componente cinética translacional.

A largura decrescente dessas janelas representa condições de ressonância mais restritivas, que podem ser entendidas pela mesma linha de raciocínio anterior. Assim como discutido anteriormente, a amplitude e o comprimento da primeira oscilação posicional variam de maneira não-linear conforme a magnitude de v_0 aumenta, ambas são bem descritas por uma função na forma da Eq. (6.24). Logo, para dois processos de colisão com velocidade de aproximação levemente diferentes, i.e., $v_0^{(2)} = v_0^{(1)} - dv$, as diferenças de caminho que se acumulam desde a primeira colisão se tornam cada vez mais acentuadas conforme a distância entre v_0 e a velocidade crítica ($v_0 - v_c$) diminui. Por isso, para que esses dois processos estejam contidos em uma mesma janela $W_n^{(a)}$, deve-se escolher dv cada vez mais pequeno conforme $v_0 - v_c$ aproxima de zero. Portanto, o desvio máximo da condição de ressonância é menor para janelas localizadas em regiões de velocidade de aproximação com magnitude maior, pois as variações no modo translacional que se tornam mais significativas.

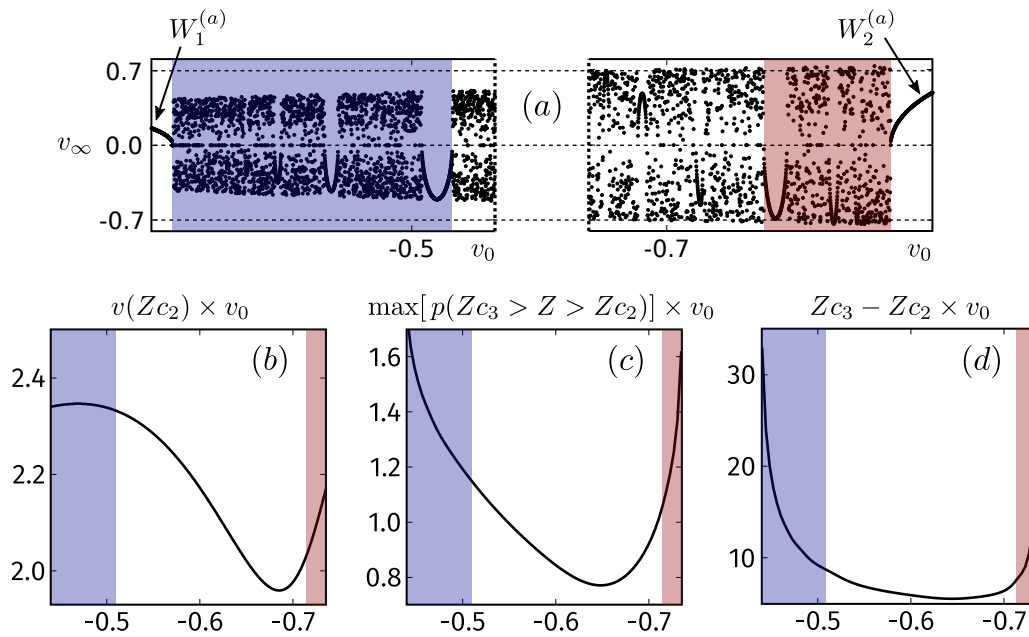


Figura 6.12 Comportamento do modo translacional em termos das medidas de amplitude (c) e comprimento da segunda oscilação posicional (d) no intervalo englobando parte das janelas de reflexão $W_1^{(a)}$ e $W_2^{(a)}$. A dinâmica do modo varia bastante ao longo desse intervalo de velocidades, o que se deve ao comportamento da velocidade na segunda colisão $v(Zc_2)$ mostrado em (b), porém nas regiões destacadas em ■ e ■, o modo passa a variar com v_0 de maneira semelhante a constatada para a primeira oscilação posicional, e assim o mesmo mecanismo de ressonância entre esse modo e o vibracional dá origem as janelas de transmissão de $j = 3$ colisões (mostradas em (a)) com distribuição similar a da estrutura inicial de janelas $W_n^{(a)}$.

A origem das janelas de regularidade é bem entendida em termos do mecanismo de ressonância explorado nessa seção, entretanto, a disposição das estruturas menores que sempre emergem nas extremidades de outras janelas maiores, requer que o comportamento do modo translacional seja estudado além da segunda colisão ($Z > Zc_2$). Na Fig. 6.12, a dinâmica da segunda oscilação posicional é investigada na região entre as janelas $W_1^{(a)}$ e $W_2^{(a)}$, onde duas estruturas de janelas de transmissão de $j = 3$ colisões se destacam, essas são mostradas nos gráficos de espalhamento em (a) que resultam da ampliação dos intervalos de v_0 próximos das extremidades das janelas de reflexão. O gráfico da Fig. 6.12(b) corresponde ao gráfico da Fig. 6.8(e) limitado ao intervalo em questão, note como a velocidade na segunda colisão $v(Zc_2)$ varia bastante em comparação com a velocidade na primeira colisão (veja novamente a Fig. 6.8(b)). Isso significa que o modo translacional comporta-se de maneira bem diferente após a segunda colisão, assim como evidenciado pelos gráficos nas Fig. 6.8(c) e (d) que resultam das medidas da amplitude e do comprimento da segunda

oscilação posicional. O comportamento desse modo durante $[Z_{c2}, Z_{c3}]$ se assemelha ao comportamento durante $[Z_{c1}, Z_{c2}]$ quando v_0 se encontra suficientemente próximo das janelas $W_1^{(a)}$ e $W_2^{(a)}$ (veja as regiões destacadas em ■ e ■). Nessas regiões o modo translacional varia com v_0 de forma análoga à discutida anteriormente no contexto da primeira estrutura de janelas, e por isso as estruturas menores de janelas de transmissão surgem com distribuição muito similar se compactando nas extremidades esquerda e direita de $W_1^{(a)}$ e $W_2^{(a)}$, respectivamente. A estrutura à esquerda vista na Fig. 6.8(a) é claramente diferente (note que as janelas se tornam menores na direção vertical também), o motivo disso reside no comportamento de $v(Z_{c2})$ na região destacada em ■, que é visivelmente diferente daquele na região destacada em ■. O comportamento do modo translacional investigado aqui pode ser generalizado para qualquer intervalo entre janelas, para as estruturas de janelas de reflexão que decorrem de $j = 4$ colisões por exemplo, encontra-se que os resultados da Fig. 6.12 são quase idênticos quando a terceira oscilação posicional é considerada.

As variações na amplitude e no comprimento da primeira oscilação posicional com v_0 , exploradas nas Fig. 6.8(g) e (h), são muita pequenas em qualquer intervalo contendo estruturas de janela de transmissão com $j = 3$ colisões (como no caso dos intervalos destacados na Fig. 6.12). Por isso, o primeiro modo translacional (antes da segunda colisão) aparenta ser fixo para todos os processos nesses intervalos, para o qual a dinâmica das ondas solitárias é muito similar à assinatura colisional da janela de reflexão mais próxima, o que já havia sido notado anteriormente quando as assinaturas dessas janelas foram verificadas (veja os gráficos à esquerda na Fig. 6.7). Entretanto, embora esse primeiro modo seja pouco sensível às mudanças na condição inicial nos intervalos em questão, pequenas variações apresentadas por esse levam a diferentes trocas de energia entre o mesmo e o modo vibracional, que instauram um novo modo translacional cujo comportamento é bem mais sensível às variações em v_0 (assim como discutido no contexto da Fig. 6.12). O que é interessante notar aqui, é que a dependência desse segundo modo com v_0 se mostra realmente muito similar a do primeiro modo nos intervalos em que as estruturas de janelas com $j = 3$ colisões surgem, de forma que para toda janela n dessas estruturas, tem-se o segundo modo análogo ao primeiro modo (e único) da janela $W_n^{(a)}$, i.e., ambos têm aproximadamente a mesma amplitude/comprimento e contêm a mesma quantidade de oscilações de forma (indicando novamente que a frequência do modo vibracional também é muito similar). Pela análise do mecanismo de colisão feita até aqui, pode-se inferir que todos os possíveis modos translacionais que decorrem de processos de colisão em intervalos de janelas, são dados por aqueles que correspondem às janelas de reflexão $W_n^{(a)}$. Logo, a assinatura colisional com $j \geq 3$ colisões de qualquer n -ésima janela de uma estrutura incorporada no fractal, é dada pela composição de $j - 1$ modos, de maneira que os $j - 2$ primeiros modos correspondem (i.e., são similares, pois dependem fracamente

com v_0) àqueles da janela maior mais próxima com $j - 1$ colisões, enquanto que o último corresponde ao modo dado pela janela $W_n^{(a)}$. Essa propriedade permite que a assinatura de qualquer janela do fractal seja dedutível.

6.5 Resultados das simulações diretas

Os resultados do modelo reduzido fornecem fortes indícios de que a dinâmica exata das ondas solitárias possa ser caótica e bastante complexa. Para verificar a validade das previsões da abordagem variacional, as equações de evolução (5.3) e (5.4) foram simuladas diretamente com as condições iniciais dadas pelas Eq. (6.2). As EDPs são resolvidas pelo método de *slit-step* [6, 9], que combina a evolução da parte não-linear da equação, calculada com o uso do método RK4, com a evolução da parte linear via Crank-Nicholson (CN) [29]. Para a separação inicial dos picos das ondas solitárias, adotou-se o mesmo valor empregado no modelo reduzido, ou seja, $2\tau_0 = 20$. Esse valor fornece uma superposição suficientemente pequena em $\tau = 0$, de forma que a condição inicial representa uma boa aproximação para uma solução com ondas localizadas bem separadas. Para que simulações sejam compatíveis com os cenários descritos pelo modelo reduzido, os valores da não-linearidade e do acoplamento são os mesmos, assim como a largura inicial do perfil. Além disso, é adequado tomar $\eta_0 = 1$ e efetuar a troca $v_0 \rightarrow -v_0/2$ para que os resultados sejam mais facilmente comparados.

Com relação aos parâmetros numéricos das simulações, para a variável τ foi adotado o intervalo $[-50, 50]$ com discretização $\Delta\tau = 0.04$, e para Z a discretização foi de $\Delta z = 0.001$. Esses valores satisfazem a condição de Courant-Friedrichs-Lewy associada com a implementação do método CN: $\Delta z / (2\Delta\tau^2) \leq 1$. O programa computacional desenvolvido emprega números reais e complexos com precisão dupla, e se limita a processos de colisão que não excedam o valor máximo $Z_{max} = 800$. Assim como nas simulações do modelo reduzido, a velocidade de saída é considerada nula se o desligamento das ondas solitárias não ocorrer antes de Z_{max} , ou se as oscilações posicionais excederem um limite específico para cada simulação. Esse limite deve ser cautelosamente escolhido, e permite que cenários de estados ligados permanentes, caracterizados por oscilações posicionais de alta frequência, sejam detectados antes do limite de propagação.

Nas várias simulações de espalhamento executadas, o parâmetro de controle v_0 variou em intervalos contendo 5000 pontos. Por meio da análise dos gráficos de velocidade de saída, verificou-se que três cenários de colisão são possíveis, que são: transmissão, reflexão e aprisionamento. Aqui, o último refere-se a estados ligados permanentes, que são frequentemente estabelecidos durante os processos de colisão devido à emissão de radiação pelas ondas solitárias. Nos cenário de colisão, as emissões de radiação são induzidas pelo acoplamento

durante a evolução do estado ligado, e geralmente representam a principal diferença entre a dinâmica exata e a fornecida pelo modelo reduzido [6, 15, 48].

Como os resultados do modelo reduzido sugerem a existência de uma velocidade crítica próxima do ponto $(-1, 0)$, a primeira simulação foi executada em um intervalo amplo centrado nesse ponto, o gráfico de espalhamento correspondente é mostrado na Fig. 6.13(a). Na figura, a velocidade fase na saída v_∞ é calculada numericamente a partir da taxa de variação da posição média associada a uma das ondas solitárias, no caso em questão escolheu-se aquela governada pelo campo $\phi(\tau, Z)$. Como a velocidade de aproximação entra na forma $\pm v_0/4$ nas condições iniciais, a reescala $v_\infty \rightarrow v_\infty/4$ é adequada para uma melhor visualização dos resultados. Interessantemente, esse resultado inicial mostra que existe uma velocidade crítica $v_c \approx -0.993$, próxima do valor previsto pelo modelo reduzido, que separa duas regiões de regime de colisão regular e irregular. Quando $|v_0| \gg |v_c|$, ocorre somente uma colisão que pouco afeta as ondas solitárias, e o processo pode ser considerado elástico. Conforme v_0 aproxima da velocidade crítica pela direita, nota-se que a curva traçada pelo ponto (v_0, v_∞) oscila com amplitude crescente até o ponto crítico, diferentemente do comportamento dado pela abordagem variacional. Na região irregular, são detectadas várias janelas de reflexão e transmissão com formas variadas, essas aparecem distribuídas sem

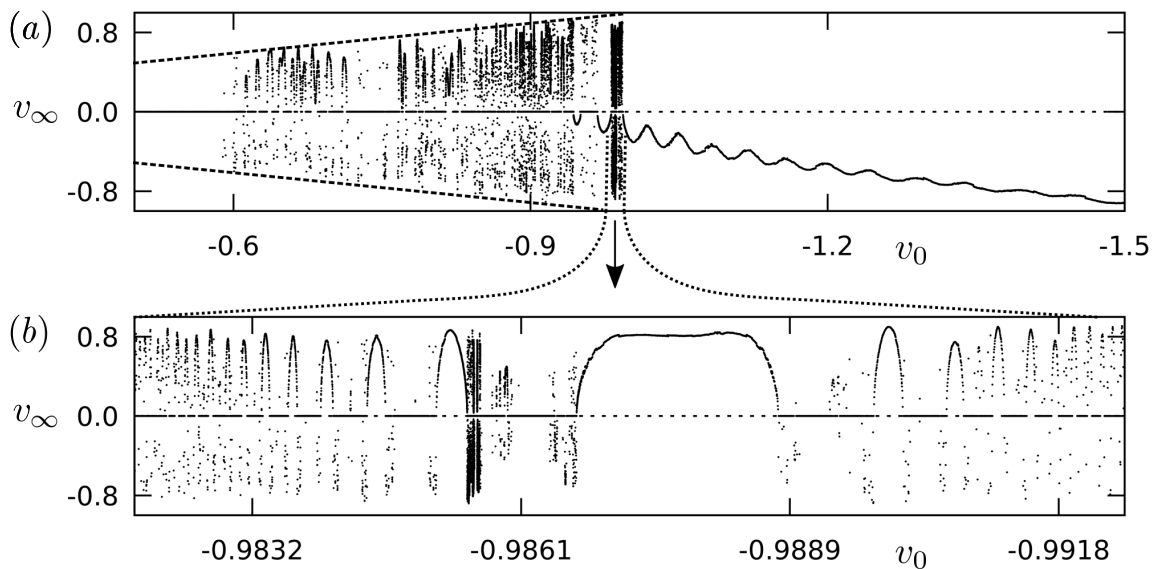


Figura 6.13 Gráfico de v_∞ versus v_0 fornecendo uma visão ampla das regiões de regime regular e irregular de colisões. O ponto crítico $(v_c, 0)$ se encontra quase no centro do gráfico. Pontos tocando as retas limites $v_\infty = \pm v_0$ correspondem a processos de colisão completamente elásticos, que ocorrem na região regular quando $|v_0| \gg |v_c|$ (o gráfico aproxima assintoticamente da reta limite inferior $v_\infty = v_0$).

nenhum padrão de simples dedução. Nos intervalos entre essas janelas, a maioria dos pontos se encontra do eixo v_0 , indicando que os processos de colisão do tipo aprisionamento são predominantes. Diferentemente do modelo reduzido, a presença de grande parte desses pontos não se deve à propagação limitada, e sim à emissão de radiação. A densidade de pontos em alguns intervalos desse primeiro gráfico é bem maior, isso decorre de outras simulações de ampliação executadas durante a investigação das regiões caóticas mais estreitas. O intervalo limitado pela velocidade crítica e pela a extremidade direita da maior janela de transmissão (veja a região destacada na Fig. 6.13(a)) fornece duas estruturas organizadas de janelas de reflexão, que podem ser vistas na Fig. 6.13(b). Essas janelas possuem as mesmas propriedades daquelas encontradas no modelo reduzido, rotulando a janela central mais larga com o índice $n = 0$, pode-se rotular todas as janelas da estrutura à esquerda com índice crescente a partir da maior janela que recebe $n = 1$, e da mesma forma aquelas à direita. Com isso, tem-se pares de janelas com mesmo índice $n \geq 1$, o que é apropriado pois verifica-se que essas fornecem processos de colisão equivalentes. Isso contrasta com o modelo reduzido, para o qual as primeiras janelas de reflexão são únicas e tangentes à reta $v_\infty = -v_0$, enquanto que aqui a reta tangente mais próxima é dada por $v_\infty \approx -0.9v_0$ (novamente devido à emissão de radiação). Comparando as estruturas da Fig. 6.13(b), percebe-se claramente que a da esquerda contém janelas com menor variação na altura do ponto de máximo, por isso a busca por janelas de regularidade mais finas é direcionada na mesma. A ampliação do intervalo dessa estrutura é mostrada na Fig. 6.14(a), as janelas são rotuladas conforme a notação adotada anteriormente. Pela ampliação da região destacada nessa figura, que inclui parte da extremidade direita da janela $W_1^{(a)}$, constata-se que de fato existem estruturas de janela menores (veja a Fig. 6.14(b)). Essas janelas são do tipo transmissão, e emergem nas extremidades das janelas $W_n^{(a)}$, os processos de colisão que essas fornecem são previsíveis e análogos aos descritos pelo modelo reduzido. Diferentemente da estrutura inicial, essa última apresenta um padrão de distribuição e espaçamento que é mais semelhante aos resultados decorrentes da abordagem variacional, cujo protocolo de seleção empregado anteriormente é aplicado aqui na investigação de intervalos mais estreitos. Os gráficos de espalhamento obtidos a cada ampliação são mostrados nas Fig. 6.14(c) – (e), note que o mesmo padrão de alternância de janelas se faz presente. Assim como no modelo reduzido, os resultados indicam que qualquer outro protocolo de seleção de intervalos deve fornecer estruturas de janelas similares, e portanto as duas estruturas iniciais da Fig. 6.13(b) têm propriedades de um fractal. Para comparar as estruturas obtidas aqui com aquelas do modelo reduzido (especificamente aquelas da Fig. 6.5), o mesmo procedimento de reescala empregado anteriormente é aplicado em cada intervalo contendo as estruturas de janelas da Fig. 6.14, que variam desde o ponto crítico de coordenadas $(v_c^{(s)}, 0)$ até a extremidade direita de $W_1^{(s)}$.

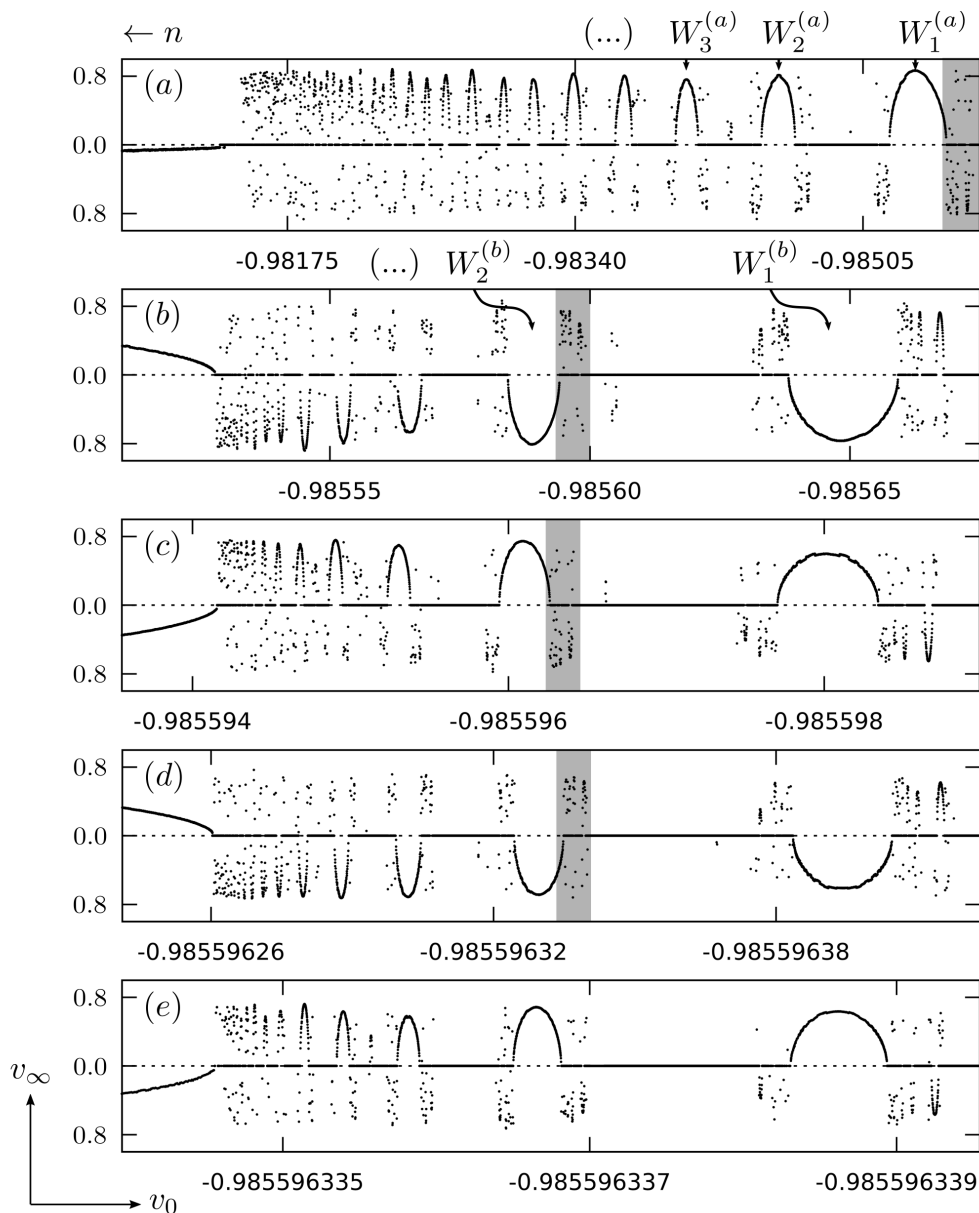


Figura 6.14 Resultados das simulações diretas para sucessivas ampliações de intervalos no eixo v_0 (regiões retangulares marcadas nas figuras): (a) gráfico de espalhamento da estrutura à esquerda na Fig. 6.13; (b)-(e) são os resultados gráficos das simulações de ampliação nos intervalos destacados.

Depois de efetuar a reescala, as estruturas são espelhadas e transladadas no eixo v_0 por meio de uma transformação na forma $v_0 \rightarrow -v_0 + v_t$ (com v_t sendo uma constante de translação adequada), de modo que todos os pontos críticos coincidam com o ponto $(-1, 0)$. O valor de v_0 correspondente a coordenada de máximo (mínimo) da n -ésima janela de reflexão (transmissão) da estrutura (s) transformada, é denotado por $\vartheta_n^{(s)}$ como anteriormente. Assim, a quantidade $V(n; s) = [1 - (\vartheta_n^{(s)})^2]^{-1/2}$ pode ser calculada até $n = 6$ para obter

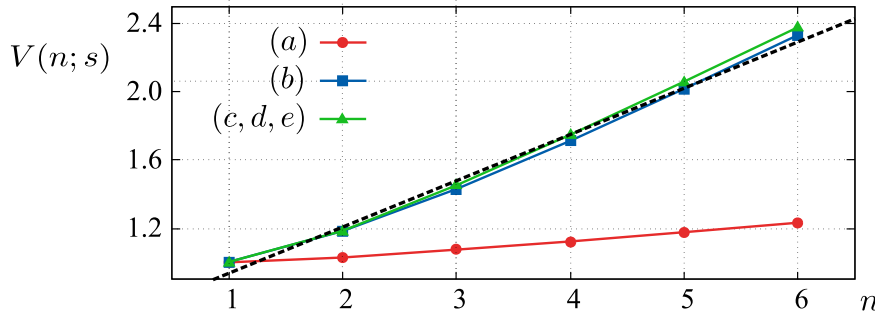


Figura 6.15 Plot da quantidade $V(n; s) = [1 - (\vartheta_n^{(s)})^2]^{-1/2}$ como função do índice n da janela de reflexão/transmissão. A estrutura inicial (a) tem pontos bem distinguíveis, já as estruturas de ampliação possuem pontos muito próximos na escala do gráfico. A reta tracejada representa a função linear: $\langle h \rangle n + \langle k \rangle$.

os resultados mostrados na Fig. 6.15. Os coeficientes $h^{(s)}$ e $k^{(s)}$ (veja a Eq. (6.21)) são encontrados pelo método de regressão linear dos pontos mostrados na figura para cada (s). Para o caso (a), obteve-se $h^{(a)} = 0.047 \pm 0.002$ (4.26%) e $k^{(a)} = 0.941 \pm 0.009$ (0.96%), enquanto que para os outros o cálculo da média e do desvio padrão dos coeficientes forneceu $\langle h \rangle = 0.271 \pm 0.006$ (2.23%) e $\langle k \rangle = 0.667 \pm 0.006$ (0.84%). Note que os coeficientes para estrutura (a) diferem bastante das médias calculadas para as estruturas ampliadas (b) – (e), isso já era esperado pois percebe-se claramente que a largura e o espaçamento das janelas $W_n^{(a)}$ seguem um padrão particular. Comparando $\langle h \rangle$ com valor obtido para o modelo reduzido, calcula-se que a diferença percentual é de $\sim 3.2\%$, logo, a distribuição de janelas para as estruturas de ampliação são bem similares nas duas abordagens.

O comprimento do intervalo de cada estrutura também obedece com boa precisão a relação linear dada pela Eq. (6.22), para qual obtém-se os coeficientes: $R = -1.481 \pm 0.006$ (0.43%) e $r = -0.91 \pm 0.02$ (2.34%). O fator de redução é dado por $10^{-R} \approx 30.3$, e é consideravelmente menor que o valor obtido para o modelo reduzido. Entretanto, a estrutura de janelas inicial dada por esse modelo (Fig. 6.5(a)) é mais de duas ordens de grandeza maior que a estrutura inicial dada pelas simulações diretas (Fig. 6.14 (a)), cujas janelas são, portanto, bem mais estreitas.

A dinâmica característica dos processos de colisão provenientes das quatro primeiras janelas $W_n^{(s)}$, é mostrada nas Fig. 6.16 (para $s = a, b$) e 6.17 (para $s = c, d$) em termos das curvas de nível da função $|\phi(\tau, Z)|^2$. A maioria das propriedades verificadas para as janelas do modelo reduzido também são válidas aqui, apenas a propriedade de composição não é aplicável da mesma maneira descrita no último parágrafo da seção anterior, pois alguns modos translacionais só se instauram em janelas com $j \geq 3$ colisões. As quantidades $Z_n^{(s)}$, $A_n^{(s)}$ e $C_n^{(s)}$ (tempo de vida, amplitude e número de oscilações de forma), são novamente úteis na caracterização das oscilações de posição e largura que definem a assinatura colisional de cada janela.

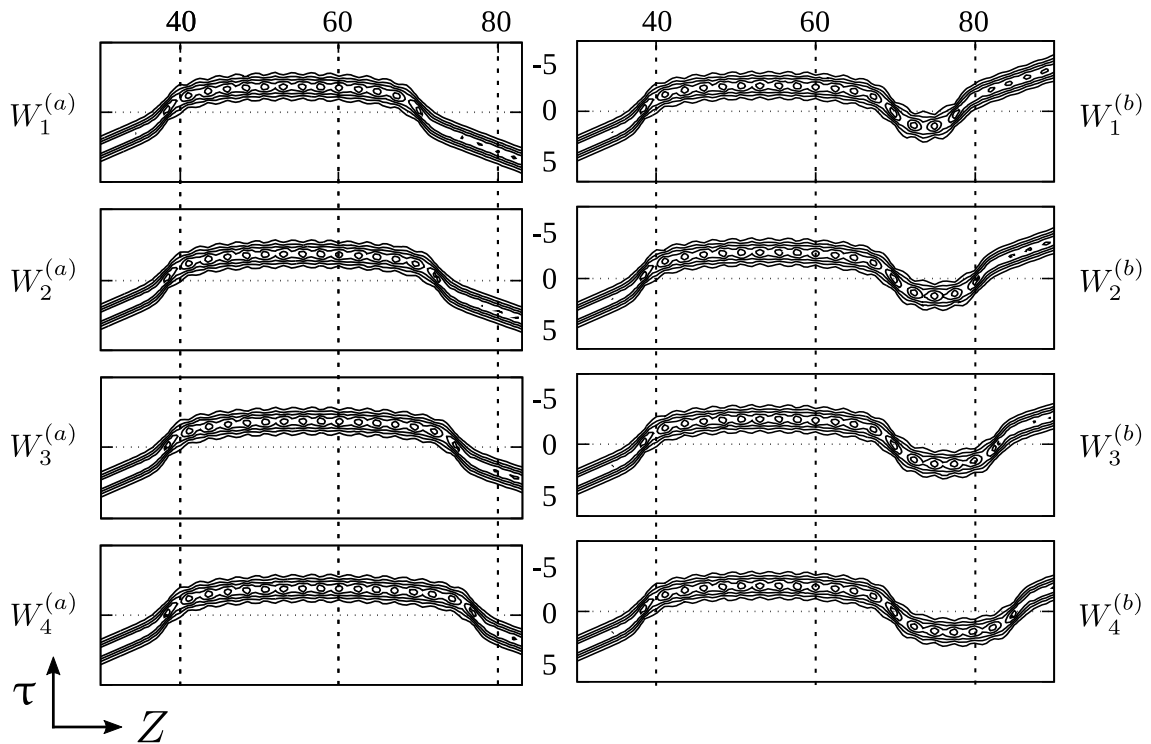


Figura 6.16 Gráficos de curvas de nível da função $|\phi(\tau, Z)|^2$ para oito velocidades de aproximação, determinadas pelo pontos de máximo/mínimo das janelas $W_n^{(s)}$ com $n = 1, 2, 3, 4$ e $s = a, b$.

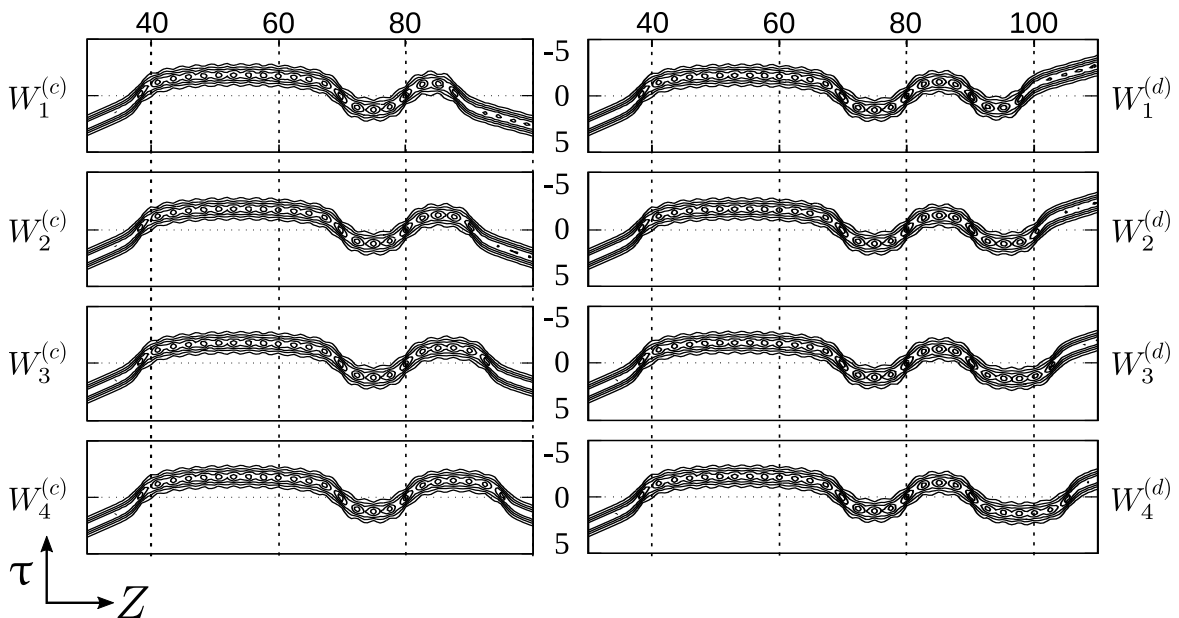


Figura 6.17 Gráficos de curvas de nível da função $|\phi(\tau, Z)|^2$ para oito velocidades de aproximação, determinadas pelo pontos de máximo/mínimo das janelas $W_n^{(s)}$ com $n = 1, 2, 3, 4$ e $s = c, d$.

Verifica-se que as duas primeiras quantidades são quase constantes para qualquer processo com v_0 contido em uma mesma janela (i.e., variam pouco com v_0 nos intervalos de regularidade), já a terceira pode ser expressa pela fórmula $C_n^{(s)} = (n-1) + 4m^{(s)} + 14$ ($m^{(a)} = 0, m^{(b)} = 1, \dots$), que é válida para qualquer janela $W_n^{(s)}$ da Fig. 6.14.

6.6 Análise do mecanismo de colisão e comparação com o modelo reduzido

Estruturas complexas induzidas por colisões de onda solitárias foram detectadas em vários cenários diferentes, geralmente, essas emergem na forma de intervalos de regularidade (janelas) em meio ao caos pós-colisional. Tais estruturas que surgem do espalhamento de ondas solitárias, decorrem do estudo da relação entre o estado final das ondas solitárias (após a colisão) em função de um parâmetro inicial que controla alguma característica do estado de entrada, por exemplo: fase, velocidade, amplitude ou polarização relativa das ondas solitárias. A origem das janelas é frequentemente associada a condições de ressonância entre modos intrínsecos (internos e/ou de radiação) e extrínsecos (oscilações posicionais), ou a condições de fase relativa das ondas solitárias [15]. Um mecanismo de ressonância envolvendo o movimento de translação e as oscilações de forma, foi primeiramente proposto na Ref. [50] para explicar o surgimento de estruturas ressonantes associadas à interação de sólitons *kink* e *antikink* no modelo de teoria de campos ϕ^4 (e posteriormente no modelo $\lambda(\phi^2 - 1)^2$ [75]). Na Ref. [21], estruturas fractais provenientes da interação de vários sólitons em sistemas quase integráveis, foram abordadas e identificadas como resultantes desse mesmo mecanismo, que também foi verificado no contexto de colisões envolvendo sólitons vetoriais [15, 48].

No Cap. 3, a estabilidade linear da equação LNLS foi abordada para a não-linearidade logarítmica $F(I) = \ln(I)$, o espectro de autovalores revelou a existência de incontáveis modos internos de frequência ilimitada, e de um modo de instabilidade. Para o sistema de equações LNLS com acoplamento linear, é esperado que tais modos internos prevaleçam quando as ondas solitárias se encontram bem afastadas. Na descrição variacional, a suposição de que tais modos tenham um papel fundamental na dinâmica dos processos de colisão é essencial para a construção do *ansatz* aplicado na derivação do modelo reduzido de EDOs. Como os resultados fornecidos por essa abordagem aproximada são condizentes com os obtidos por meio das simulações numéricas diretas, o mecanismo de colisão deve de fato depender dos modos internos. Para verificar essa forte evidência, o espectro de estabilidade pode ser calculado para as soluções numéricas durante o estado ligado. Assim, o mesmo procedimento de linearização da equação de movimento

pode ser aplicado nas EDPs acopladas. Primeiramente, as soluções perturbadas podem ser escritas como

$$\phi(\tau, Z') = [p(\tau) + \Phi(\tau, Z')] e^{i\mu Z'} \quad (|\Phi| \ll |p|), \quad (6.26)$$

$$\psi(\tau, Z') = [q(\tau) + \Psi(\tau, Z')] e^{i\nu Z'} \quad (|\Psi| \ll |q|), \quad (6.27)$$

com $p(\tau)$ e $q(\tau)$ sendo soluções complexas discretas e aproximadas numericamente obtidas para um instante Z' , $\Phi(\tau, Z')$ e $\Psi(\tau, Z')$ são as perturbações dessas soluções, respectivamente. No contexto de colisões simétricas, as constantes de propagação devem ser iguais: $\mu = \nu$. Depois de substituir as Eq. (6.26) e (6.27) nas respectivas equações de movimento dadas por (5.3) e (5.4), procede-se com a linearização das perturbações. As equações acopladas resultantes governam $\Phi(\tau, Z')$ e $\Psi(\tau, Z')$, soluções na forma dada pela Eq. (4.44) podem ser escritas como segue:

$$\Phi(\tau, Z; \lambda) = [v_1(\tau) + w_1(\tau)] e^{\lambda Z} + [v_1^*(\tau) - w_1^*(\tau)] e^{\lambda^* Z}, \quad (6.28)$$

$$\Psi(\tau, Z; \lambda) = [v_2(\tau) + w_2(\tau)] e^{\lambda Z} + [v_2^*(\tau) - w_2^*(\tau)] e^{\lambda^* Z}. \quad (6.29)$$

Aqui, o autovalor λ define os modos de cada perturbação que também devem obedecer a condição de simetria. O problema de autovalor resultante pode ser expresso na forma

$$\mathbb{M} \cdot \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & v_2 & w_2 \end{pmatrix}^T = \lambda \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & v_2 & w_2 \end{pmatrix}^T, \quad (6.30)$$

$$\mathbb{M} = i \begin{pmatrix} G_0 & \partial_{\tau\tau}/2 + G_1 & 0 & \Gamma \\ \partial_{\tau\tau}/2 + G_2 & -G_0 & \Gamma & 0 \\ 0 & \Gamma & H_0 & \partial_{\tau\tau}/2 + H_1 \\ \Gamma & 0 & \partial_{\tau\tau}/2 + H_2 & -H_0 \end{pmatrix}, \quad (6.31)$$

as funções $G_n(\tau)$ e $H_n(\tau)$ (com $n = 0, 1, 2$) são calculadas em termos dos perfis complexos $p(\tau)$ e $q(\tau)$, e podem ser expressas pelas equações

$$\begin{aligned} G_0 &= ig \Im \left(\frac{p}{p^*} \right), & H_0 &= ig \Im \left(\frac{q}{q^*} \right) \\ G_1 &= -\mu + g \left[2 \ln |p| - \Re \left(\frac{p}{p^*} \right) + 1 \right], & H_1 &= -\mu + g \left[2 \ln |q| - \Re \left(\frac{q}{q^*} \right) + 1 \right], \\ G_2 &= -\mu + g \left[2 \ln |p| + \Re \left(\frac{p}{p^*} \right) + 1 \right], & H_2 &= -\mu + g \left[2 \ln |q| + \Re \left(\frac{q}{q^*} \right) + 1 \right], \end{aligned}$$

A Eq. (6.30) pode ser resolvida numericamente pelo método de colocação de Fourier [6], no procedimento numérico as funções $v_{1,2}$, $w_{1,2}$, G_n e H_n (com $n = 0, 1, 2$) são expandidas em séries truncadas de Fourier, para isso considerou-se 250 modos (501 termos na expansão).

Para os cenários de colisão abordados nesse capítulo, a não-linearidade e o coeficiente do acoplamento são, receptivamente, $g = 1$ e $\Gamma = -0.2$. As soluções numéricas para o cálculo do espectro de estabilidade são propagadas até $Z = Z'$, então efetua-se as atribuições $\phi(\tau, Z') = p(\tau)$ e $\psi(\tau, Z') = q(\tau)$. Assim, a discretização do eixo τ , limitado aqui ao intervalo $[-20, 20]$, deve ser a mesma das simulações diretas, i.e., $\Delta\tau = 0.04$.

Considerando dois processos de colisão com velocidades de aproximação escolhidas na janela $W_2^{(a)}$, a Fig. 6.18 ilustra o comportamento do espectro de estabilidade linear em termos dos autovalores obtidos pela resolução da Eq. (6.30) em instantes específicos da dinâmica das ondas solitárias. Assim como esperado de processos provenientes de uma mesma janela, a evolução dos perfis iniciais ocorre de maneira quase idêntica até a eminência da segunda colisão em $Z = Z_{c2}$ (veja os gráficos mostrados nas Fig. 6.18(a) e (b)), o mesmo vale para a dinâmica dos autovalores do espectro. A diferença mais evidente que permite distinguir os processos (a) e (b), é claramente vista nas oscilações de forma que persistem após a separação das ondas solitárias, que têm amplitude mais elevada no processo (b) do que em (a). A amplitude dessas oscilações também afeta o comportamento do espectro de estabilidade linear quando $Z > Z_{c2}$, que seria estacionário no cenário ideal de amplitude nula (vibrações inativas). Analisando a distribuição dos autovalores antes da primeira colisão, nota-se que existe semelhança com o espectro inteiramente discreto encontrado na ausência de acoplamento ($\Gamma = 0$), que é ilustrado pela Fig. 4.5(f). No entanto, ao invés disso, existe um quádruplo de autovalores complexos associados a um único modo de instabilidade oscilatória. Essa e outras diferenças mais sutis se devem à própria natureza do acoplamento linear, que promove interações mesmo quando as ondas solitárias se encontram bem afastadas. No contexto de acopladores direcionais, essas interações ocorrem entre a onda solitária de uma fibra e o meio livre da outra fibra acoplada, resultando em um campo oscilante localizado de baixa amplitude induzido na última, que acompanha a onda solitária geradora. A componente imaginária desse modo de instabilidade oscilatória pode ser atribuída a esses campos oscilantes, assim como pequenas oscilações constatadas durante a evolução dos autovalores puramente imaginários. Na primeira colisão, a interação entre as ondas solitárias instaura oscilações de forma que representam uma transição definitiva do espectro de estabilidade linear. Nessa transição, nota-se que autovalores aparentemente "contínuos" surgem no eixo imaginário próximo da origem, se misturando com os autovalores discretos do espectro (veja os espectros da Fig. 6.18 para $Z > Z_{c1}$). Durante o estado ligado, o espectro pós-colisional muda conforme a largura média das ondas solitárias, assumindo basicamente duas configurações principais associadas aos estados vibracionais de mínima e máxima largura das ondas solitárias. A configuração dos autovalores

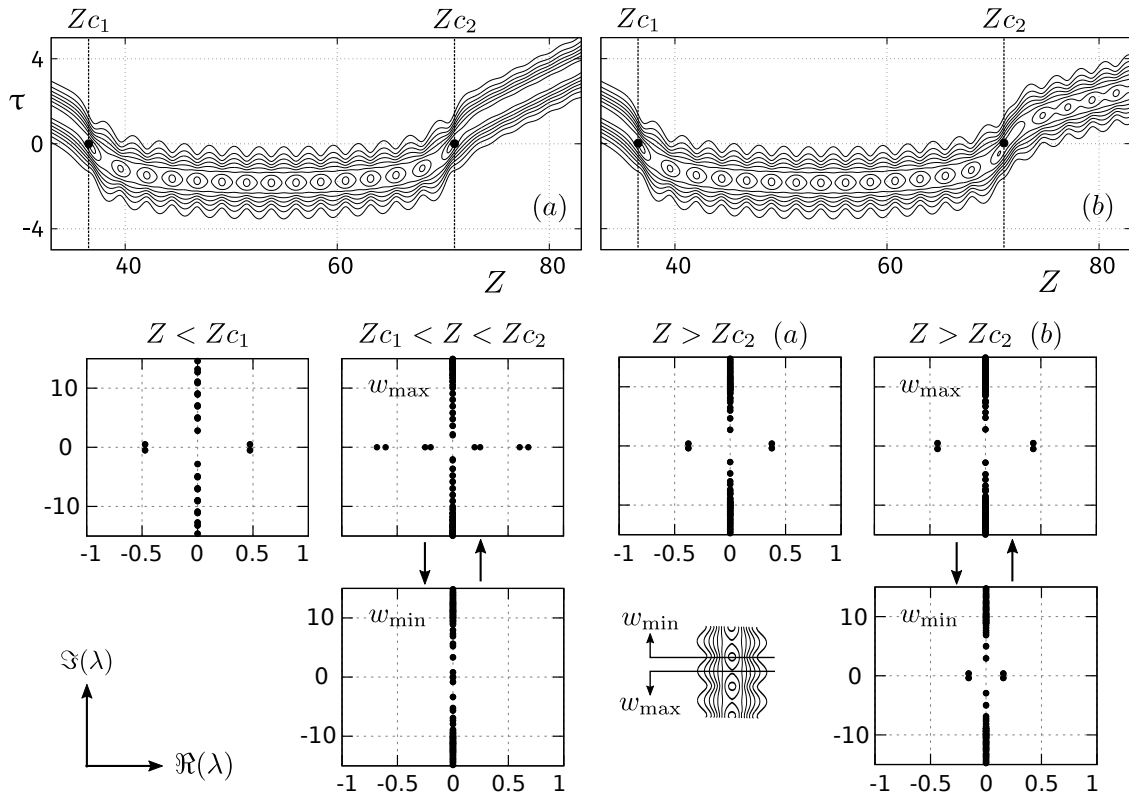


Figura 6.18 Dinâmica do espectro de estabilidade linear ilustrada para os processos de colisão mostrados em (a) e (b). Para ambos, o espectro é quase estacionário quando $Z < Z_{c1}$, depois da primeira colisão esse oscila basicamente entre duas configurações definidas pelos estados de mínima e máxima largura média das ondas solitárias (w_{min} e w_{max} , respectivamente). Depois da última colisão ($Z > Z_{c2}$), o espectro no caso (a) assume uma configuração com poucas oscilações dos autovalores, no caso (b) esse permanece oscilando entre duas configurações também definidas pela largura média.

no estado de mínima largura não envolve modos de instabilidade, isso significa que apenas os modos internos são responsáveis pelo eminente alargamento do perfil. Nesse processo que leva o perfil para o estado vibracional de máxima largura, parte dos autovalores correspondentes aos modos internos colidem na origem ($\lambda = 0$) e se tornam modos de instabilidade. Embora esses modos muitas vezes indiquem que as soluções são instáveis, no sistema em questão os resultados evidenciam que esses podem apenas estar relacionados com a emissão de radiação (que afeta a estabilidade das soluções nos cenários de auto aprisionamento permanente) e/ou com as oscilações de forma juntamente com os modos internos, assim como no caso discutido no Cap. 3 que trata da estabilidade linear de um único *gausson* sem efeitos de acoplamento. Então, o estreitamento que sucede é induzido pelos modos internos e possivelmente pelos modos instabilidade, entretanto, para confirmação do papel desses últimos nas oscilações de forma é necessário um estudo mais detalhado.

Nessa última etapa do ciclo de oscilação, os autovalores reais colidem na origem e se deslocam para o eixo imaginário, e dessa maneira a configuração contendo apenas modos internos e autovalores "contínuos" é gradualmente reestabelecida. Após a segunda e última colisão, o espectro recupera parcialmente a configuração pré-colisional, as oscilações dos autovalores persistem e acompanham o estado vibracional analogamente à descrição anterior, porém as colisões envolvendo os modos na origem não ocorrem (i.e., a quantidade de modos internos ativos permanece fixa). Desconsiderando tais oscilações, a diferença mais notável entre o espectro inicial e o final, é a presença de autovalores ditos "contínuos" no último. Por meio de uma investigação mais detalhada do espectro, verifica-se que tal continuidade é apenas aparente (como esperado de um sistema com não-linearidade logarítmica). O que se tem de fato são conjuntos de autovalores aglomerados com separação muito pequena, que são provenientes das várias componentes da radiação não-linear emitida durante o estado ligado de ondas solitárias. As componentes que propagam com velocidade de fase suficientemente alta, escapam do potencial atrativo produzido pelas ondas solitárias em direção ao campo distante ($|\tau| \gg 0$). As componentes restantes permanecem aprisionadas nas bordas das ondas solitárias, e podem eventualmente adquirir velocidade de fase suficiente para escapar das mesmas. Todas essas componentes da radiação surgem como pacotes localizados com amplitude muito pequena, que é da ordem de 10^{-5} para a maioria das componentes, as que carregam maior energia geralmente têm amplitude da ordem de 10^{-4} . Anteriormente, a influência dos campos oscilantes induzidos no meio livre das fibras foi mencionada, o efeito desses sobre o comportamento dos modos internos e de instabilidade é realmente muito pequeno para a intensidade de acoplamento considerada ($\Gamma = -0.2$), pois constatou-se que esses induzem oscilações muito pequenas nas ondas solitárias que desviam a amplitude das mesmas em aproximadamente 0.5%. Para $|\Gamma| \gtrsim 0.5$, essas oscilações se tornam bem mais relevantes e o comportamento das ondas solitárias desvia bastante daquele de um sóliton de perfil estacionário. Para $\Gamma = -1.0$ por exemplo, o desvio da amplitude é de quase 50%, nesse caso a dinâmica fornecida por um modelo reduzido é completamente inválida.

A análise do espectro de estabilidade linear desenvolvida aqui, teve foco nos cenários apresentados pelas Fig. 6.18, para os quais foram discutidos os aspectos principais da dinâmica dos autovalores associados aos modos internos e de instabilidade, e como esses estão correlacionados com o comportamento das ondas solitárias. Como qualquer processo de colisão, com exceção daqueles que resultam em auto aprisionamento permanente, pode ser descrito em termos dos modos translacionais e vibracionais, é esperado que esses aspectos da dinâmica do espectro sejam gerais. Para verificar isso, considerou-se vários outros processos de colisão, e pela análise do espectro constatou-se que os autovalores se comportam de maneira análoga à descrita anteriormente, i.e., oscilando entre duas configurações associadas

aos estados de mínima e máxima largura média. Essas oscilações são bem consistentes se a separação entre as ondas solitárias não for muito pequena (como em situações de iminência de colisão), e podem envolver configurações bem mais complexas que as apresentadas na Fig. 6.18. A análise do espectro de estabilidade linear indica que os modos vibracionais estão intrinsecamente relacionados aos modos internos e de instabilidade, cujo efeito combinado são as oscilações de forma com frequências bem definidas em qualquer janela de regularidade. Esse resultado é a principal contribuição do estudo estabilidade linear, mais informações sobre a dinâmica das ondas solitárias podem ser obtidas a partir de uma análise mais minuciosa do espectro, o que é muitas vezes uma tarefa bem complicada devido à complexidade que o mesmo pode apresentar na maioria dos cenários de colisão.

Anteriormente na seção sobre o mecanismo de colisão do modelo reduzido, a análise do modo vibracional pôde ser feita em termos dos parâmetros intrínsecos (largura e *chirp*) das ondas solitárias. Porém, isso não é adequado no caso das simulações numéricas diretas, pois apenas parâmetros extrínsecos (e.g. posição e velocidade) podem ser medidos com razoável precisão. Portanto, para investigar quantitativamente os efeitos dos modos internos e de instabilidade na dinâmica de interação, deve-se recorrer ao cálculo da energia cinética total (\mathcal{K}) e potencial total ($\mathcal{P} = \mathcal{P}_{NL} + \mathcal{P}_C$) das ondas solitárias. Para calcular as quantidades \mathcal{K} e \mathcal{P} no instante $Z = Z'$, substitui-se as soluções $p(\tau)$ e $q(\tau)$ na densidade hamiltoniana associada à lagrangiana (6.6), e efetua-se a integração numérica dos termos correspondentes.

A Fig. 6.19 mostra como a variação $\Delta\mathcal{K}(Z) = \mathcal{K}(Z) - \mathcal{K}(0)$ evolui durante processos de colisão fornecidos pelas simulações diretas e pelo modelo reduzido. Sobre o comportamento das componentes cinética e potencial da energia total, reproduzido pelas quantidades $\Delta\mathcal{K}(Z)$ e $\Delta\mathcal{P}(Z)$, verifica-se que a primeira cresce quando o perfil da onda solitária se estreita, e decresce quando esse alarga. O contrário ocorre com a componente potencial, cuja variação tende a ser exatamente o oposto da componente cinética nas simulações diretas (sendo exata no modelo reduzido, para o qual vale a equação $\Delta\mathcal{K}(Z) + \Delta\mathcal{P}(Z) = 0$), i.e., o hamiltoniano dado pela soma permanece aproximadamente constante. Essa quase invariância do hamiltoniano se deve a erros numéricos que se acumulam durante a evolução das condições iniciais via simulações diretas, resultando no decaimento do mesmo e também da normalização. Porém, a discretização empregada garante que esses erros sejam bem pequenos, de modo que nos cenários (a) e (b) da Fig. 6.19 por exemplo, calcula-se que o desvio percentual desde $Z = 0$ até o fim do processo de colisão tem valor inferior a -0.09% para o hamiltoniano, sendo menor que -0.2% para a normalização total. Sobre as oscilações da energia total cinética em todos os casos da figura, nota-se que a primeira colisão é antecedida de um curto alargamento do perfil seguido pelo estreitamento do mesmo, atingindo a largura mínima em um instante $Z(w_{\min}) \gtrsim Zc_1$, que corresponde a um estado em que as ondas solitárias têm

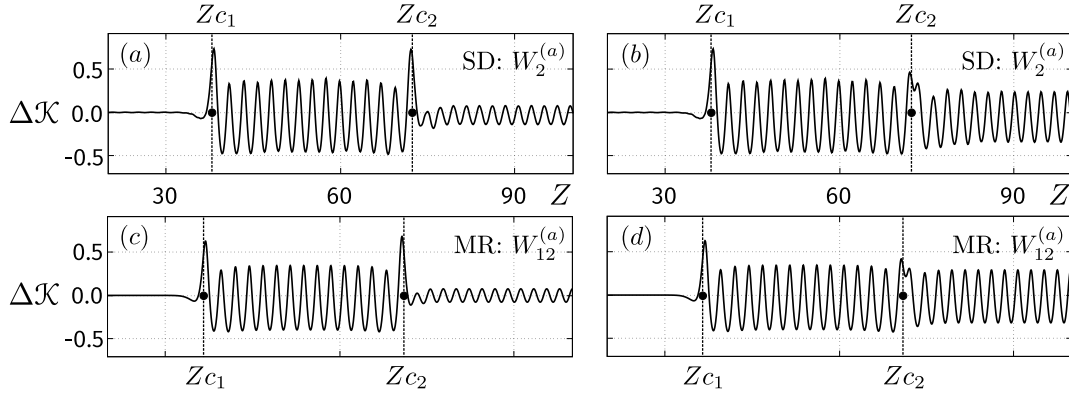


Figura 6.19 Gráficos da variação da energia total cinética ($\Delta\mathcal{K}$) em função da distância de propagação Z para quatro processos de colisão: (a) e (b), resultados obtidos via simulações diretas (SD) para processos com v_0 tomado na janela indicada; (c) e (d), resultados obtidos via modelo reduzido (MR) para processos com v_0 tomado na janela indicada. Essa janela do MR fornece cenários de colisão que são análogos aos fornecidos pela outra encontrada nas SD, por isso, os valores de v_0 em (c) e (d) foram convenientemente escolhidos para que o comportamento de $\Delta\mathcal{K}$ fosse similar aos casos em (a) e (b), respectivamente.

máxima energia total cinética e mínima potencial. Essa primeira colisão instaura oscilações de forma que são replicadas em fase nas componentes da energia, sendo praticamente idênticas durante o estado ligado nos processos fornecidos pelas simulações diretas e pelo modelo reduzido. Usando a Eq. (6.25) para calcular a amplitude e a frequência das oscilações de $\Delta\mathcal{K}$, obtém-se os seguintes parâmetros de melhor ajuste para os gráficos (a)-(b) e (c)-(d) da Fig. 6.19:

$$\text{SD : } D = 0.406 \pm 0.005 \text{ (1.28\%)} \quad , \quad \omega = 2.678 \pm 0.002 \text{ (0.085\%)} \quad , \quad (6.32)$$

$$\text{MR : } D = 0.360 \pm 0.007 \text{ (2.05\%)} \quad , \quad \omega = 2.688 \pm 0.003 \text{ (0.130\%)} \quad . \quad (6.33)$$

Isso mostra que nas duas abordagens o estado vibracional das ondas solitárias tem amplitude e frequência bem definidas, verifica-se que essas quantidades são praticamente constantes para qualquer processo proveniente de uma mesma janela. Comparando D e ω mostrados em (6.32) e (6.33), é evidente a semelhança de valores, principalmente com relação a frequência de tais oscilações, que são, portanto, bem reproduzidas pelo modelo reduzido. A amplitude média dessas oscilações é visivelmente menor que o valor atingido por $\Delta\mathcal{K}$ logo após a primeira colisão ($D < 0.5$). A origem dessa diferença de amplitude reside na contribuição da energia potencial de acoplamento, que decresce quando a separação das ondas solitárias diminui e atinge seu valor mínimo nos instantes de colisão (valor negativo, pois $\Gamma < 0$), resultando em pico de máxima energia cinética total que se destaca entre os outros decorrentes das oscilações de forma. Quando as ondas solitárias se encontram na eminência da segunda colisão, o comportamento da variação $\Delta\mathcal{K}$ nos cenários (b) e (d) é

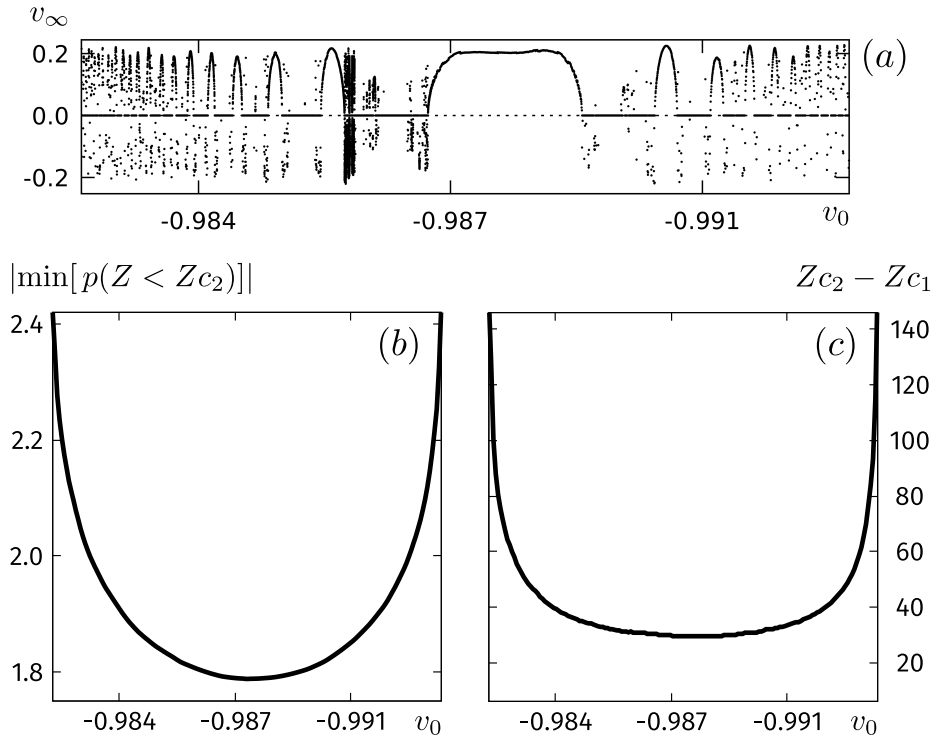
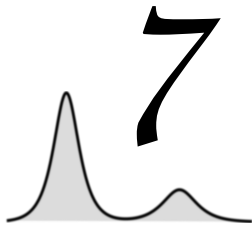


Figura 6.20 Amplitude (b) e comprimento (c) da primeira oscilação posicional nas simulações numéricas diretas, o *ensemble* empregado consiste de 200 processos de colisão com v_0 variando no intervalo da estrutura fractal mostrada em (a).

claramente diferente do que se constata para (a) e (c). Isso ocorre devido às diferenças de caminho discutidas anteriormente na seção sobre o modelo reduzido, que resultam da dependência do primeiro modo translacional com a condição inicial. Aqui, essa dependência também é verificada nas SD em termos da amplitude e do comprimento da primeira oscilação posicional em função de v_0 . As Fig. 6.20(b) e (c) mostram que essas quantidades variam regularmente com v_0 no intervalo da estrutura de janelas inicial, o comportamento de ambas é comparável com os resultados das Fig. 6.12(c) e (d) referentes à segunda oscilação posicional no MR. Esse comportamento do primeiro modo translacional nas SD, explica porque a estrutura mostrada na Fig. 6.20(a) emerge de forma semelhante àquelas da Fig. 6.12(a), no entanto, a dependência desse modo com v_0 é mais simétrica aqui, isso leva ao aparecimento da janela larga central que divide a estrutura inicial em duas compostas por janelas de assinaturas equivalentes. De volta para a Fig. 6.19, nos processos (a) e (c) o valor de v_0 desvia pouco do valor ideal característico das respectivas janelas, que permite a ressonância mais adequada entre esses modos. Como a condição de ressonância é quase satisfeita, os estados acessados pelas ondas solitárias na segunda colisão (durante o intervalo centrado em Z_{c2} definido por $[Z_{c2} - \Delta Z/2, Z_{c2} + \Delta Z/2]$ com ΔZ da ordem de um

período de oscilação $2\pi/\omega$), são bem similares aos estados acessados na primeira colisão na ordem reversa, ou seja, a partir do instante $Z_{c1} + \Delta Z/2$ até $Z_{c1} - \Delta Z/2$ antes da colisão. Isso pode ser facilmente constatado em termos da energia, que tem correlação direta com o estado vibracional e também com a separação das ondas solitárias. Nos processos das Fig. 6.19(b) e (d), a velocidade de aproximação é tal que as diferenças de caminho atrasam a segunda colisão (Z_{c2} é maior que nos dois casos anteriores), com isso a ressonância é fracamente satisfeita, de forma que os estados acessados na segunda colisão diferem mais significativamente daqueles acessados na primeira (note que em (b) e (d), o comportamento de $\Delta\mathcal{K}$ no intervalo $[Z_{c2} - \Delta Z/2, Z_{c2} + \Delta Z/2]$ é claramente diferente do que é visto em (a) e (c)). Consequentemente, uma quantidade maior de energia permanece no modo vibracional após a separação, e por isso a amplitude da oscilação da energia no estado final também é maior. Logo, os resultados e comparações feitas até aqui, evidenciam que os principais aspectos da dinâmica exata dos modos translacionais e vibracionais e do mecanismo de troca de energia entre os mesmos, foram bem descritos pelo MR.

A análise do comportamento da energia baseada nos resultados referentes a Fig. 6.19, sugere fortemente que qualquer processo de colisão proveniente de uma janela encontrada via simulações diretas, pode ser muito bem descrito por algum processo do modelo reduzido decorrente de uma janela com a mesma assinatura colisional. Isso significa que a dinâmica dos processos de colisão regulares é pouco influenciada pelo campo de radiação, de forma que as componentes que permanecem confinadas nas bordas das ondas solitárias, pouco alteram os perfis gaussianos e o comportamento dos modos translacionais/vibracionais. Essa afirmação condiz com os resultados sobre o espalhamento fractal fornecido pelas simulações diretas, pois constatou-se que o mecanismo de ressonância descrito pelo modelo reduzido é de fato responsável pelo surgimento das janelas na abordagem exata do sistema. E como essas surgem em padrões bem definidos e muito similares nas duas abordagens, os efeitos da radiação sobre os modos translacionais/vibracionais devem ser realmente muito pequenos para processos regulares. Por outro lado, no regime caótico de espalhamento, a emissão de radiação causa o aprisionamento definitivo das ondas solitárias na maioria dos processos de colisão. Esse auto aprisionamento permanente se deve a não ressonância dos modos que leva a estados ligados de longa duração envolvendo muitas colisões, com isso, a energia total contida nas ondas solitárias diminui gradualmente, aumentando a taxa de colisões (proporcional a frequência das oscilações posicionais) que por sua vez intensificam ainda mais as perdas por radiação. Como esses cenários são caracterizados por muitas colisões separadas por oscilações posicionais curtas, uma maneira de detectá-los é medindo a taxa de colisões durante a propagação numérica das condições iniciais.



Conclusão

Essa dissertação teve como tema principal a propagação de luz em fibras ópticas não-lineares com foco no espalhamento de ondas solitárias governadas pelas equações de evolução (5.3) e (5.4). Essas fornecem um modelo de EDPs acopladas para o sistema não integrável em questão, e descrevem a interação de pulsos ópticos propagando em acopladores direcionais com não-linearidade logarítmica. A descrição fornecida por essas equações considera campos ópticos suficientemente intensos, de modo que o efeito não-linear possa ser modelado pela não-linearidade na forma aproximada $F(I) = \ln(I)$. Quando os campos estão desacoplados, soluções de ondas solitárias na forma de sólitons gaussianos são admissíveis, essas foram úteis na construção de condições iniciais adequadas para o caso estudado, em que o acoplamento linear (Rabi) é atrativo e dado por $\Gamma = -0.2$. Embora o acoplamento também promova interações entre os campo ópticos de uma fibra e o meio livre da outra, as condições iniciais na forma *gaussions* com pouca sobreposição se mostraram razoáveis. Em outras palavras, verificou-se que um pulso gaussiano propagando em uma fibra ativa acoplada a uma fibra passiva preserva sua forma com grande aproximação quando o acoplamento não é muito intenso. Isso permitiu que uma abordagem variacional fosse considerada, já que a construção de um *ansatz* requer que as ondas solitárias tenham perfis pré-colisionais estáveis, e que esses possam ser aproximados por alguma função analítica conhecida. Como a viabilidade do método variacional já foi comprovada para vários problemas de espalhamento decorrentes de sistemas não integráveis (principais referências: [6, 15–17]), o desenvolvimento de um modelo reduzido de EDOs se mostrou apropriado antes do tratamento exato do problema, que demanda muito mais tempo computacional e exige análises não triviais da dinâmica complexa de interação. Embora o modelo reduzido forneça uma descrição aproximada e simplificada da dinâmica regida pelas EDPs de movimento, essa foi suficiente para prever a existência de uma região caótica de espalhamento contendo uma estrutura fractal de janelas de regularidade, que são caracterizadas por assinaturas colisionais previsíveis e bem definidas associadas a processos de colisão do tipo reflexão ou transmissão. Esse principal resultado obtido variacionalmente motivou a execução das simulações numéricas diretas das EDPs, revelando

que de fato tem-se espalhamento caótico quando a velocidade de aproximação absoluta é inferior a um certo valor crítico ($|v_c|$, cujo valor foi bem aproximado pelo modelo reduzido), e que estruturas de janela surgem em uma região muito mais estreita em que $|v_0| \lesssim |v_c|$. Pela análise e comparação dos resultados fornecidos pelas duas abordagens, constatou-se que as estruturas fractais são bem similares, o que se deve à descrição adequada do mecanismo de colisão pelo modelo reduzido. Isso só foi possível porque a dinâmica combinada dos modos internos e de instabilidade (investigada por meio do estudo do espectro de estabilidade linear) instaura oscilações de forma com amplitude e frequência bem definidas, que foram descritas com boa precisão pela fase quadrática no *ansatz*. Outro detalhe essencial que favoreceu o método variacional foi a baixa influência da radiação não-linear sobre os processos regulares provenientes de janelas, cujo efeito na dinâmica de colisões é muito mais relevante nos processos caóticos que frequentemente resultam no aprisionamento das ondas solitárias.

O sistema considerado nesse trabalho foi abordado com foco no contexto da óptica, no entanto, fenômenos de onda não-linear surgem em diversos cenários físicos, e por isso podem existir situações diferentes em que o espalhamento de ondas solitárias também seja governado pelas EDPs (5.3) e (5.4). Dependendo do contexto físico, a realização de colisões simétricas entre ondas solitárias pode ser factível experimentalmente. Nesse caso, se o grau de controle do sistema for suficientemente alto, permitindo a constatação do espalhamento caótico em termos da velocidade de aproximação, a baixa sensibilidade das colisões procedentes de janelas de regularidade pode ser útil na construção de um dispositivo de detecção de perturbações. Como exemplo, considera-se uma versão hipotética de tal dispositivo em que um meio de propagação de base (livre de perturbações) seria empregado na preparação de um estado inicial de ondas solitárias no regime regular de colisão. Para isso, deve-se considerar as limitações do próprio aparato experimental que seriam responsáveis por flutuações na velocidade de aproximação inicial, assim, o intervalo de velocidades acessado na preparação do estado inicial (definido pela amplitude máxima dessas flutuações) deve estar contido no intervalo de uma janela de regularidade específica. Se o meio de base for trocado por um meio de teste, qualquer desvio do regime regular de colisão indicaria a presença de inhomogeneidades. Logo, o dispositivo em questão permitiria comparar a qualidade de duas fibras ópticas, por exemplo. Caso o estado inicial seja preparado em um regime caótico de espalhamento, as flutuações não permitiriam que o dispositivo fosse configurado em um processo de colisão previsível. Contudo, se a região irregular acessada não for dominada por processos de aprisionamento, a alternância caótica entre reflexão e transmissão poderia ser usada na geração de uma sequência aleatória de números binários, de modo que uma unidade de bit com valor 1 (0) seria designada toda vez que o estado preparado resultar em um processo do tipo reflexão (transmissão).

Referências

- [1] Nussenzveig, Herch Moysés. *Curso de Física Básica*. Blucher, 1997.
- [2] Jackson, J.D. *Classical electrodynamics*. Wiley, 1975.
- [3] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu Franck Laloë. *Quantum Mechanics*, volume 1. Hermann, 1977.
- [4] Peres, A. *Quantum Theory: Concepts and Methods*. Springer Netherlands, Dordrecht, 2002.
- [5] Ablowitz, M.J. *Nonlinear Dispersive Waves: Asymptotic Analysis and Solitons*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2011.
- [6] Yang, Jianke. *Nonlinear Waves in Integrable and Nonintegrable Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, jan 2010.
- [7] Kivshar, Y S e Agrawal, G. *Optical Solitons: from fibers to photonic crystals*. Academic Press, 2003.
- [8] Agrawal, G. *Nonlinear Fiber Optics*. Optics and Photonics. Elsevier Science, 2001.
- [9] Malomed, B.A. *Soliton Management in Periodic Systems*. Springer US, 2006.
- [10] Bao, Weizhu e Cai, Yongyong. Mathematical theory and numerical methods for Bose-Einstein condensation. *Kinetic and Related Models*, 6(1):1–135, dec 2012.
- [11] Hereman, Willy. Shallow Water Waves and Solitary Waves. In *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, páginas 8112–8125. Springer New York, New York, NY, 2009.
- [12] Pethick, C. J. e Smith, H. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, 2002.
- [13] Biswas, A e Konar, S. *Introduction to non-Kerr Law Optical Solitons*. Chapman {&} Hall/CRC Applied Mathematics {&} Nonlinear Science. CRC Press, 2006.
- [14] Malomed, Boris A. Variational methods in nonlinear fiber optics and related fields. páginas 71–193. 2002.
- [15] Tan, Yu e Yang, Jianke. Complexity and regularity of vector-soliton collisions. *Phys. Rev. E*, 64(5):56616, 2001.

- [16] Zhu, Yi; Haberman, Richard e Yang, Jianke. Universal Map for Fractal Structures in Weak Interactions of Solitary Waves. *Physical Review Letters*, 100(14):143901, 2008.
- [17] Goodman, Roy H. Chaotic scattering in solitary wave interactions: A singular iterated-map description. *Chaos An Interdiscip. J. Nonlinear Sci.*, 18(2):23113, 2008.
- [18] Dmitriev, Sergey V; Kivshar, Yuri S e Shigenari, Takeshi. Fractal structures and multiparticle effects in soliton scattering. *Phys. Rev. E*, 64(5):056613, 2001.
- [19] Dmitriev, Sergey V e Shigenari, Takeshi. Short-lived two-soliton bound states in weakly perturbed nonlinear Schrodinger equation. *Chaos An Interdiscip. J. Nonlinear Sci.*, 12(2):324, 2002.
- [20] Dmitriev, Sergey V. e Shigenari, Takeshi. Short-lived two-soliton bound states in weakly perturbed nonlinear Schrodinger equation. *Chaos*, 12(2):324–331, 2002.
- [21] Dmitriev, Sergey V; Kivshar, Yuri S e Shigenari, Takeshi. Fractal structures in multi-soliton collisions. *Phys. B Condens. Matter*, 316-317:139–142, 2002.
- [22] Dmitriev, Sergey V.; Kevrekidis, Panayotis G. e Kivshar, Yuri S. Radiationless energy exchange in three-soliton collisions. *Phys. Rev. E*, 78(4):46604, 2008.
- [23] Sergey V. Dmitriev, Denis A Semagin Andrey A Sukhorukov e Shigenari, Takeshi. Chaotic character of two-soliton collisions in the weakly perturbed nonlinear Schrodinger equation. *PHYSICAL REVIEW E*, 66(4):46609, 2002.
- [24] Garrett, C e Munk, W. Internal Waves in the Ocean. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 11(1):339–369, jan 1979.
- [25] Stoker, J J. *Water Waves: The Mathematical Theory with Applications*. Wiley Classics Library. Wiley, 1957.
- [26] Meyers, R A. *Extreme Environmental Events: Complexity in Forecasting and Early Warning*. Extreme Environmental Events. Springer, 2010.
- [27] Drazin, P.G. e Johnson, R.S. *Solitons: An Introduction*. Cambridge Computer Science Texts. Cambridge University Press, 1989.
- [28] Zabusky, N J e Kruskal, M D. Interaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States. *Phys. Rev. Lett.*, 15(6):240–243, 1965.
- [29] Vesely, F J. *Computational Physics: An Introduction*. Springer US, 2013.
- [30] Khaykovich, L; Schreck, F; Ferrari, G; Bourdel, T; Cubizolles, J; Carr, L D; Castin, Y e Salomon, C. Formation of a Matter-Wave Bright Soliton. *Science*, 296(5571):1290–1293, 2002.
- [31] Strecker, Kevin E; Partridge, Guthrie B; Truscott, Andrew G e Hulet, Randall G. Formation and propagation of matter-wave soliton trains. *Nature*, 417(6885):150–153, 2002.

- [32] Cornish, Simon L; Thompson, Sarah T e Wieman, Carl E. Formation of Bright Matter-Wave Solitons during the Collapse of Attractive Bose-Einstein Condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 96(17):170401, 2006.
- [33] Marchant, A L; Billam, T P; Wiles, T P; Yu, M M H; Gardiner, S A e Cornish, S L. Controlled formation and reflection of a bright solitary matter-wave. *Nat. Commun.*, 4:1865, 2013.
- [34] Burger, S; Bongs, K; Dettmer, S; Ertmer, W; Sengstock, K; Sanpera, A; Shlyapnikov, G V e Lewenstein, M. Dark Solitons in Bose-Einstein Condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 83(25):5198–5201, 1999.
- [35] Craig, W; Guyenne, P; Hammack, J; Henderson, D e Sulem, C. Solitary water wave interactions. *Phys. Fluids*, 18(5):57106, 2006.
- [36] Davydov, A S. *Solitons in Molecular Systems*. Mathematics and its applications (D. Reidel Publishing Company): Soviet series. D. Reidel Publishing Company, 1985.
- [37] Yakushevich, L V. *Nonlinear Physics of DNA*. Wiley, 2004.
- [38] Hasegawa, A e Kodama, Y. *Solitons in optical communications*. Oxford series in optical and imaging sciences. Clarendon Press, 1995.
- [39] Bjorkholm, J E e Ashkin, A A. cw Self-Focusing and Self-Trapping of Light in Sodium Vapor. *Phys. Rev. Lett.*, 32(4):129–132, jan 1974.
- [40] Barthelemy, A; Maneuf, S e Froehly, C. Propagation soliton et auto-confinement de faisceaux laser par non linearité optique de kerr. *Opt. Commun.*, 55(3):201–206, 1985.
- [41] Segev, Mordechai; Crosignani, Bruno; Yariv, Amnon e Fischer, Baruch. Spatial solitons in photorefractive media. *Phys. Rev. Lett.*, 68(7):923–926, 1992.
- [42] Aitchison, J S; Al-Hemyari, K; Ironside, C N; Grant, R S e Sibbett, W. Observation of spatial solitons in AlGaAs waveguides. *Electron. Lett.*, 28(20):1879, 1992.
- [43] Beeckman, Jeroen; Neyts, Kristiaan; Hutsebaut, Xavier; Cambournac, Cyril e Haelterman, Marc. Simulations and experiments on self-focusing conditions in nematic liquid-crystal planar cells. *Opt. Express*, 12(6):1011, 2004.
- [44] Zakharov, V.E. e Shabat, A.B. Exact Theory of Two-dimensional Self-focusing and One-dimensional Self-modulation of Waves in Nonlinear Media. *Sov. J. Exp. Theor. Phys.*, 34:62, 1972.
- [45] Myatt, C J; Burt, E A; Ghrist, R W; Cornell, E A e Wieman, C E. Production of Two Overlapping Bose-Einstein Condensates by Sympathetic Cooling. *Phys. Rev. Lett.*, 78(4):586–589, jan 1997.
- [46] Stamper-Kurn, D M; Andrews, M R; Chikkatur, A P; Inouye, S; Miesner, H.-J.; Stenger, J e Ketterle, W. Optical Confinement of a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 80(10):2027–2030, mar 1998.

- [47] Zhu, Yi e Yang, Jianke. Universal fractal structures in the weak interaction of solitary waves in generalized nonlinear Schrodinger equations. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 75(3):36605, mar 2007.
- [48] Yang, Jianke e Tan, Yu. Fractal structure in the collision of vector solitons. *Physical Review Letters*, 85(17):3624–3627, 2000.
- [49] Goodman, Roy H.; Rahman, Aminur; Bellanich, Michael J. e Morrison, Catherine N. A mechanical analog of the two-bounce resonance of solitary waves: Modeling and experiment. *Chaos An Interdiscip. J. Nonlinear Sci.*, 25(4):43109, 2015.
- [50] Campbell, David K; Schonfeld, Jonathan F e Wingate, Charles A. Resonance structure in kink-antikink interactions in the ϕ^4 theory. *Phys. D Nonlinear Phenom.*, 9(1-2):1–32, 1983.
- [51] Fukushima, K. e Yamada, T. Fractal properties of a scattering sine-Gordon soliton. *Physics Letters A*, 200(5):350–354, 1995.
- [52] Higuchi, Mika; Fukushima, Kazuhiro e Yamada, Tomoji. Initial condition dependence of the residence time for scattering soliton in a perturbed sine-Gordon equation system. *Chaos Solitons & Fractals*, 9(6):845–851, 1998.
- [53] Rüdiger Paschotta. *Encyclopedia of Laser Physics and Technology*. Wiley-VCH, 2008.
- [54] Cohen-Tannoudji, C.; Dupont-Roc, J. e Grynberg, G. *Photons and Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics*. Wiley, 1997.
- [55] Butkov, E. *Mathematical physics*. Addison-Wesley series in advanced physics. Addison-Wesley Pub. Co., 1988.
- [56] Savescu, Michelle; Khan, Kaisar R.; Naruka, Preeti; Jafari, Hossein; Moraru, Luminita e Biswas, Anjan. Optical Solitons in Photonic Nano Waveguides with an Improved Non-linear Schrödinger's Equation. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, 10(5):1182–1191, may 2013.
- [57] Hernández, E S e Remaud, B. General properties of gaussian-conserving descriptions of quantal damped motion. *Phys. A Stat. Mech. its Appl.*, 105(1-2):130–146, jan 1981.
- [58] Hefter, Ernst F. Application of the nonlinear Schrodinger equation with a logarithmic inhomogeneous term to nuclear physics. *Phys. Rev. A*, 32(2):1201–1204, 1985.
- [59] Królikowski, Wieslaw; Edmundson, Darran e Bang, Ole. Unified model for partially coherent solitons in logarithmically nonlinear media. *Phys. Rev. E*, 61(3):3122–3126, mar 2000.
- [60] Buljan, H; Šiber, A; Soljačić, M; Schwartz, T; Segev, M e Christodoulides, D N. Incoherent white light solitons in logarithmically saturable noninstantaneous nonlinear media. *Phys. Rev. E*, 68(3):36607, 2003.
- [61] De Martino, S e Lauro, G. Soliton-like solutions for a capillary fluid. In R Monaco, editor, "WASCOM 2003" 12th Conf. Waves Stab. Contin. Media, páginas 148–152. World Scientific, 2003.

- [62] Martino, S De; Falanga, M; Godano, C e Lauro, G. Logarithmic Schrodinger-like equation as a model for magma transport. *Europhys. Lett.*, 63(3):472–475, 2003.
- [63] Bialynicki-Birula, Iwo e Sowinski, Tomasz. Solutions of the Logarithmic Schrodinger Equation in a Rotating Harmonic Trap. 2003.
- [64] Lemos, N.A. *Mecânica Analítica*. Livraria da Física, 2007.
- [65] Serman, G. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1993.
- [66] Blanco-Redondo, Andrea; Martijn, de Sterke C.; Sipe, J.E.; Krauss, Thomas F.; Eggleton, Benjamin J. e Husko, Chad. Pure-quartic solitons. *Nature Communications*, 7:10427, jan 2016.
- [67] Charkina, Oksana V. Internal Modes of Solitons and Near-Integrable Highly-Dispersive Nonlinear Systems. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, apr 2006.
- [68] Kogelnik, H e Schmidt, R. Switched directional couplers with alternating delta-beta. *IEEE J. Quantum Electron.*, 12(7):396–401, jul 1976.
- [69] Bergh, R A; Kotler, G e Shaw, H J. Single-mode fibre optic directional coupler. *Electron. Lett.*, 16(7):260, 1980.
- [70] Streltsov, Alexander M e Borrelli, Nicholas F. Fabrication and analysis of a directional coupler written in glass by nanojoule femtosecond laser pulses. *Opt. Lett.*, 26(1):42, jan 2001.
- [71] Alves, Erivelton O; Cardoso, Wesley B e Avelar, Ardiley T. Modulation instability in high-order coupled nonlinear Schrodinger equations with saturable nonlinearities. 2015.
- [72] Malomed, B A e Winful, H G. Stable solitons in two-component active systems. *Physical Review E*, 53(5):5365–5368, 1996.
- [73] Teixeira, Rafael M.P. e Cardoso, Wesley B. Fractal scattering of Gaussian solitons in directional couplers with logarithmic nonlinearities. *Physics Letters A*, 380(35):2738–2749, aug 2016.
- [74] Bondeson, A; Lisak, M e Anderson, D. Soliton Perturbations: A Variational Principle for the Soliton Parameters. *Physica Scripta*, 20(3-4):479–485, sep 1979.
- [75] Anninos, Peter; Oliveira, Samuel e Matzner, Richard A. Fractal structure in the scalar $\lambda(\phi^2 - 1)^2$ theory. *Phys. Rev. D*, 44(4):1147–1160, aug 1991.