Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística

Debora Naiure Araujo Costa

Análise do discriminante em equações polinomiais de terceiro grau a partir de funções simétricas

Goiânia
2020

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[x] Dissertação [ ] Tese

2. Nome completo do autor

Debora Naiure Araujo Costa

3. Título do trabalho

Análise do discriminante em equações polinomiais de terceiro grau a partir de funções simétricas

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Alacyr José Gomes**, **Professor do Magistério Superior**, em 03/12/2020, às 09:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **DEBORA NAIURE ARAUJO COSTA**, **Discente**, em 08/12/2020, às 11:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1667355** e o código CRC **6CE6ABA2**.

Referência: Processo nº 23070.049384/2020-92 SEI nº 1667355

Debora Naiure Araujo Costa

Análise do discriminante em equações polinomiais de terceiro grau a partir de funções simétricas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática pelo PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Alacyr José Gomes

Goiânia
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Costa, Debora Naiure Araujo
Análise do discriminante em equações polinomiais de terceiro grau a partir de funções simétricas [manuscrito] / Debora Naiure Araujo Costa. - 2020.
75 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Alacyr José Gomes.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2020.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Polinômios. 2. Equações polinomiais. 3. Funções simétricas das raízes. 4. Discriminante. I. Gomes, Alacyr José, orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **17** da sessão de Defesa de Dissertação de **Debora Naiure Araujo Costa**, que confere o título de Mestra em Matemática, na área de concentração em Matemática.

Aos nove dias do mês de novembro de dois mil e vinte, a partir das 14 **horas**, por meio de videoconferência devido a pandemia covid-19, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"**Análise do discriminante em equações polinomiais de terceiro grau a partir de funções simétricas**"**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Alacyr José Gomes (IME/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Geci José Pereira da Silva (IME/UFG), membro titular externo; o Professor Doutor Hugo Leonardo da Silva Belisário (IFG). Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Alacyr José Gomes, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos nove dias do mês de novembro de dois mil e vinte.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Referência: Processo nº 23070.049384/2020-92 SEI nº 1648940

Debora Naiure Araujo Costa

Formada em Matemática pela PUC Goiás (2014) - PROUNI, atuou como monitora pelo Departamento de Matemática de sua Universidade (2011/2), participou por um ano meio do Projeto Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência - PIBID pela CAPES (2011-2012) e foi aluna de intercambio pelo CNPq na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra em Portugal (FCT-UC 2012-2013), onde cursou disciplinas do Mestrado em Ensino de Matemática. Atuou por 6 anos como professora na rede privada em Goiânia lecionando Geometria e Álgebra e preparatórios para Olimpíadas de Matemática. Em 2019 assumiu aulas como professora efetiva da rede de educação em Goiás, para as quais se dedica em período integral.

Com enorme gratidão, dedico este trabalho aos meus pais, Jaques e Edivana.

Agradecimentos

- Agradeço a Deus pelo privilégio de existir e concluir mais uma etapa acadêmica com êxito.
- Ao meu esposo, Adenor Neto, quem me suportou e apoiou em todos os momentos ao longo desse curso.
- Aos meus pais, que por toda a vida foram os meus maiores incentivadores.
- À minha querida irmã Sarah Priscila, pelo grande apoio, mesmo à distância.
- Ao meu orientador Prof. Dr. Alacyr José Gomes pelo incentivo, pelo muito conhecimento compartilhado e pelas várias horas de dedicação junto a mim.
- Aos amigos que me apoiaram com presença e/ou palavras de incentivo e força em muitos momentos.
- A todos que de alguma forma estiveram presentes nos cuidados com minha filha, Maria Olívia, para que eu pudesse trabalhar e estudar; pois ela chegou para completar nossa família, enquanto eu ainda cursava as disciplinas do mestrado, e alegra os meus dias.
- Aos professores e colegas de turma do PROFMAT, que muito me ensinaram durante essa caminhada.

Resumo

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo sobre as características das soluções de equações polinomiais de graus 2 e 3, a partir do comportamento de seu discriminante, escrito em função de invariantes que dependam unicamente dos coeficientes de uma equação inicial. Começaremos retomando algumas definições e proposições importantes a cerca de polinômios, em seguida será feito um estudo sobre funções simétricas das raízes e desenvolveremos a resolução da cúbica por radicais usando dois métodos distintos. Por fim será possível analisar o discriminante por meio de manipulações algébricas, que faremos utilizando todo o conteúdo apresentado nos capítulos anteriores, e então os escreveremos o discriminante a partir das raízes das equações, o que tornará possível desenvolver uma demonstração para os teoremas que relacionam as raízes das equações de 2° e 3° graus com seus discriminantes.

Palavras-chave: Polinômios, Equações polinomiais, Funções simétricas das raízes, Discriminante.

Abstract

The objective of this work is to make a study on the characteristics of the roots of polynomial equations of degrees 2 and 3, studying the discriminant written in function of invariants that depend only on the coefficients of an initial equation. We will start by remembering some important definitions and propositions about polynomials, symmetric functions of the roots and develop the resolution of the cubic by radicals using two different methods. Finally, it will be possible to analyze the discriminant through algebraic manipulations that we will do, using the content presented in the previous chapters, and then we will write the discriminant from the roots of the equations, which enable to develop a proof for the theorems that relate the roots of the equations 2° and 3° degrees with their discriminants.

Keywords: Polynomials, Polynomial equations, Symmetric root functions, Discriminant.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

A evolução dos métodos para resolver problemas de terceiro grau teve importante papel na história da matemática, pois muitos dos desenvolvimentos algébricos dos séculos XV e XVI resultaram dos esforços para encontrar uma solução para a cúbica por radicais. Logo no século XVI as equações do terceiro e quarto graus tiveram suas fórmulas estabelecidas pela escola italiana, fórmulas tais que nomeavam um termo dependente dos coeficientes, de discriminante da equação, termo esse que determina várias propriedades para as raízes, e que objeto de estudo nesse trabalho.

A formação continuada do docente é de suma importância para uma melhor prática em sala de aula. Assim este trabalho é dedicado ao aperfeiçoamento profissional de um professor de matemática.

Parte-se, inicialmente, para a retomada dos conhecimentos necessários ao estudo de polinômios, observando diversas relações entre coeficientes e raízes e apresentando não somente a definição, mas também variados resultados de funções simétricas das raízes de uma equação (ver 1.2), bem como, mencionando conceitos do cálculo que são fundamentais para as conclusões deste trabalho. Diversas demonstrações foram daqui omitidas, pois o embasamento utilizado em cada uma delas fugia aos nossos objetivos.

Já o segundo capítulo traz manipulações algébricas que podem ser feitas a partir de uma equação polinomial inicial, tanto manipulações que não alterem suas raízes, quanto manipulações que as alteram, na intenção de facilitar processos resolutivos, ou os estudos dessas equações. Apresentamos então, dois métodos de resolução da cúbica por radicais.

Ao se transferir para o terceiro capítulo, o leitor será apresentado à alguns exemplos de equações de grau 2 com análise do seu discriminante por funções simétricas. Em seguida há um exemplo completo de resolução da cúbica por radicais, e outros exemplos mais imediatos para os quais foram analisados os invariantes, e a partir deles iniciamos a análise do discriminante. Por fim, no último capítulo apresento o desenvolvimento dos discriminantes em função dos coeficientes das equações, e as considerações finais.

CAPÍTULO 1

Características das raízes de equações polinomiais a partir de seus coeficientes

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, e $\mathbb{C}$ o conjunto dos complexos, tais que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ e x um símbolo denominado de variável.

Definiï¿½ï¿½o 1.1. *Um polinômio ou uma função polinomial em x é uma expressão algébrica do tipo*

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n, \tag{1.1}$$

onde, $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}$ e a_n são números reais ou complexos, denominados coeficientes, n é um número inteiro positivo e a_n é denominado de termo independente.

Nessa dissertação trabalharemos apenas com polinômios de coeficientes reais. Podemos citar como exemplos os polinômios $p_1(x) = -7x^3 + 3x^2 + 7x - 3$ e $p_{(}x) = 2x^7 + 10x$.

Definiï¿½ï¿½o 1.2. *Dado um polinômio $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, chama-se grau do polinômio ao valor de n natural, que é o expoente máximo de x, com $a_0 \neq 0$ e a notação será:*

$$gr(p(x)) = n.$$

Por exemplo, se $p_1(x) = -7x^3 + 3x^2 + 7x - 3$, $gr(p_1(x)) = 3$, e se $p_2(x) = 2x^7 + 10x$, então $gr(p_2(x)) = 7$.

Definiï¿½ï¿½o 1.3. *Denomina-se equação polinomial de grau n, em x, toda equação que pode ser reduzida à forma:*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

com coeficientes em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e n inteiro positivo.

Definiï¿½ï¿½o 1.4. *Dizemos que um número* α *é raiz ou zero de um polinômio* $p(x)$*, se* $p(\alpha) = 0$.

Por exemplo, $x = 1$ é raiz de $p_1(x) = -7x^3 + 3x^2 + 7x - 3$, pois $p(1) = -7(1)^3 + 3(1)^2 + 7(1) - 3 = -7 + 3 + 7 - 3 = 0$. De forma semelhante, $x = 0$ é raiz de $p_2(x) = 2x^7 + 10x$, pois $p_2(0) = 0$.

Definiï¿½ï¿½o 1.5. *Intuitivamente, dizemos que uma função* $f(x)$ *tem limite* L *quando* x *tende para* a*, se é possível tornar* $f(x)$ *arbitrariamente próximo de* L*, desde que tomemos valores de* x*, suficientemente próximos de* a*, e escrevemos:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Definiï¿½ï¿½o 1.6. *Uma função* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *diz se contínua num ponto* a *do domínio quando* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$*, e* f *é dita função contínua quando o for em todos os pontos de seu domínio.*

Proposição 1.7. *Uma função polinomial,* $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua em* $\mathbb{R}$.

Essa proposição pode ser demonstrada a partir da definição formal de limite e de suas propriedades, partindo da ideia de que o limite de uma função polinomial para x tendendo para a, é igual ao valor numérico de $f(a)$. Essa demonstração é encontrada em livros de Cálculo.

O resultado abaixo será muito importante no estudo de polinômios.

Proposição 1.8. *Seja* $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$ *função polinomial. Se* α *é uma raiz de* $p(x)$*, então,* $(x - \alpha)$ *é um fator de* p*, isto é, existe uma função polinomial* g *tal que* $p(x) = (x - \alpha) \cdot g(x)$.

Demonstração: Com efeito $p(\alpha) = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-2}\alpha^2 + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$. Logo,

$$p(x) = p(x) - p(\alpha) = a_0(x^n - \alpha^n) + \cdots + a_{n-2}(x^2 - \alpha^2) + a_{n-1}(x - \alpha), \tag{1.2}$$

Usando que

$$(x^k - \alpha^k) = (x - \alpha)(x^{k-1} + x^{k-2}\alpha + \cdots + x\alpha^{k-2} + \alpha^{k-1}),$$

para todo inteiro $k \geqslant 1$. Colocando $(x - \alpha)$ em evidência em (1.2) teremos

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot g(x), \tag{1.3}$$

onde $g(x) = a_{n-1} + a_{n-2}(x + \alpha) + \cdots + a_0(x^{n-1} + x^{n-2}\alpha + \cdots + x\alpha^{n-2} + \alpha^{n-1})$. ■

Observe que o grau de $(g(x)$ é menor que o grau de $p(x)$.

Teorema 1.9. ***(Teorema Fundamental da Álgebra)*** *Toda função polinomial, $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ de uma variável e grau $n \geqslant 1$, tem pelo menos uma raiz complexa.*

Ao leitor interessado uma demonstração completa está em [2]. Vale ressaltar que as primeiras demonstrações corretas deste teorema foram apresentadas pelo alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), que foi um dos mais notáveis matemáticos de todos os tempos, apresentando trabalhos em diversos campos da matemática e física, incluindo teoria dos números, análise, geometria diferencial, geodésia, magnetismo, astronomia e óptica.

Corolário 1.10. *Todo polinômio $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$, de grau $n \geqslant 1$, pode ser fatorado como produto de n fatores, na forma*

$$p(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n), \tag{1.4}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ são as raízes de $p(x) = 0$.

Demonstração: Vamos demonstrar este corolário por indução sobre o grau n da função polinomial $p(x)$. Quando $n = 1$, temos $p_1(x) = a_0x + a_1$ que tem como raiz $\alpha_1 = -\dfrac{a_1}{a_0}$ e pode ser escrito como

$$p_1(x) = a_0 \cdot \left(x + \frac{a_1}{a_0}\right) = a_0 \cdot (x - \alpha_1).$$

Suponhamos que o corolário é válido para o grau $n-1$, de forma que toda função polinomial $g(x) = b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-3}x^2 + b_{n-2}x + b_{n-1}$ de grau $n-1$, pode ser fatorada como

$$g(x) = b_1(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-1}).$$

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, existe α_n tal que $p(\alpha_n) = 0$. Daí, pela proposição 1.8, existe uma função polinomial $g(x)$ de grau $n-1$, onde $p(x) = (x-\alpha_n)g(x)$, então podemos escrever

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-\alpha_n)g(x) \\ &= (x-\alpha_n)\cdot(b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}) \\ &= b_1x^n + (b_2 - \alpha_nb_1)x^{n-1} + \cdots + (b_{n-2} - b_{n-3})x^2 + (b_{n-1} - b_{n-2})x + b_{n-1} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Igualando os coeficientes teremos que $a_0 = b_1 \neq 0$. Observe que se $g(x)$ tem grau $n-1$, vale que $g(x) = b_1(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-1})$, assim, de (1.5),

$p(x) = (x - \alpha_n) \cdot a_0 \cdot (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{n-1})$, ou seja,

$$p(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n). \quad \blacksquare$$

Corolário 1.11. *Qualquer polinômio não constante com coeficientes reais, pode ser escrito como produto de polinômios de primeiro ou segundo grau, com coeficientes reais.*

Corolário 1.12. *Se um número complexo, não real, $z = a+bi$, é raiz de uma equação polinomial com coeficientes reais, então o seu conjugado, $\overline{z} = a - bi$, também é raiz da equação polinomial.*

Demonstração: Para demonstrar este teorema é importante relembrar a seguinte propriedade do conjugado de um número z complexo,

$$a_k\overline{z}^k = \overline{a_k}\ \overline{z}^k = \overline{a_k}\ \overline{z^k} = \overline{a_k\ z^k}, \text{ para cada } k \in (0, 1, ..., n).$$

Seja $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$. Considere $z = a+bi, b \neq 0$ raiz do polinômio, temos que $p(z) = 0$,vamos verificar $p(\overline{z})$:

$$\begin{aligned} p(\overline{z}) &= a_0\overline{z}^n + a_1\overline{z}^{n-1} + a_2\overline{z}^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\overline{z} + a_n \\ &= \overline{a_0}\ \overline{z}^n + \overline{a_1}\ \overline{z}^{n-1} + \overline{a_2}\ \overline{z}^{n-2} + \cdots + \overline{a_{n-1}}\ \overline{z} + \overline{a_n} \\ &= \overline{a_0z^n} + \overline{a_1z^{n-1}} + \overline{a_2z^{n-2}} + \cdots + \overline{a_{n-1}z} + \overline{a_n} \\ &= \overline{a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}z + a_n} \\ &= \overline{p(z)} \ = \overline{0} \ = 0, \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que $\overline{z}$ também é raiz de p, como queríamos. $\blacksquare$

Teorema 1.13. *Um polinômio $p(x)$ será divisível por $(x-\alpha_1), (x-\alpha_2), \cdots, (x-\alpha_n)$, onde cada $(x - \alpha_k)$, com $k \in (1, 2, 3, \cdots, n)$ são números distintos se, e somente se, $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ forem raízes distintas de $p(x)$.*

A demonstração completa deste teorema pode ser encontrada em [3], e a partir dela temos o seguinte corolário:

Corolário 1.14. *Se $p(x) = 0$, e e $gr(p(x)) = n$, então p admitirá, no máximo, n raízes, sendo que caso hajam raízes imaginárias elas ocorrerão aos pares.*

Definiï¿½ï¿½o 1.15. *Um número real α é uma raiz de multiplicidade m, sendo $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 1$ de $p(x) = 0$ se, a forma fatorada de p é*

$$\underbrace{(x - \alpha) \cdot (x - \alpha) \cdots (x - \alpha) \cdot (x - \alpha)}_{m \text{ vezes}} \cdot q(x),$$

isto é

$$p(x) = (x - \alpha)^m \cdot q(x), \text{ com } q(\alpha) \neq 0.$$

Ou seja, a multiplicidade m de uma raiz α, é a maior potência de $(x - \alpha)$ que divide $p(x)$.

Quando $m = 1$, diremos que α será uma raiz simples de $p(x)$, e α será uma raiz múltipla (ou, raiz de multiplicidade m) de $p(x)$ quando $m \geqslant 2$. Outra observação interessante é que se α for uma solução de multiplicidade m ímpar, então o gráfico de $p(x)$ transpassa o Eixo X ao passar pelo ponto $(\alpha, 0)$; mas se a multiplicidade da raiz α é par, então o gráfico de $p(x)$ não atravessa o Eixo X ao interceptar o ponto $(\alpha, 0)$ mas retorna para o mesmo lado, sendo o ponto $(\alpha, 0)$ um ponto de máximo ou mínimo local do gráfico.

Teorema 1.16. ***(Teorema do Valor Intermediário)*** *Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

A demonstração completa desse teorema pode ser encontrada em [5]. A partir desse teorema entendemos que na representação gráfica de funções contínuas em um intervalo, não haverão quebras ou saltos, sendo traçadas "sem levantar o lápis do papel". Sendo que os zeros reais de uma função polinomial estarão nos pontos de intersecção do gráfico com o eixo x. Veremos mais adiante que, na representação gráfica de uma função polinomial de grau n haverão, no máximo, n interseções com o eixo x.

Corolário 1.17. *Seja $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, e a e b reais. Se $p(a)$ e $p(b)$ tem sinais contrários, existe um c entre a e b, tal que $p(c) = 0$.*

Corolário 1.18. *Uma equação polinomial de grau ímpar com coeficientes reais tem, no mínimo, uma raiz real.*

Demonstração: Seja $p(x)$ um polinômio de grau ímpar com coeficientes reais. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, 1.9, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $p(z) = 0$. Se $z \in \mathbb{R}$, o resultado está provado. Mas, se z for um complexo não real, pelo Corolário anterior, $\overline{z}$ também é uma raiz de $p(x)$. Como o polinômio tem grau ímpar, tem de existir, pelo menos, um raiz real, já que as raízes complexas aparecem aos pares. ■

Teorema 1.19. ***(Regra dos Sinais de Descartes - Raízes Positivas)*** *O número de raízes reais positivas de uma equação polinomial é, no máximo, igual à quantidade de mudanças de sinais $+$ ou $-$ em seus coeficientes, quando ordenados no primeiro membro da equação.*

Demonstrações completas podem ser encontradas em [1].

Teorema 1.20. ***(Regra dos Sinais de Descartes - Raízes Negativas)*** *A quantidade máxima de raízes negativas que uma equação polinomial pode ter, é a mesma quantidade de mudanças de sinais* $+$ *ou* $-$ *nos coeficientes ordenados de* $p(-x) = 0$.

É importante observar que para as Regras de Sinais de Descartes uma raiz de multiplicidade m é contada como m raízes.

Ao substituir x por $(-x)$ em $p(x) = 0$, teremos a nova equação que possui as raízes opostas às de $p(x)$. Ou seja, serão os mesmos valores em módulo, porém, com sinais opostos. Dessa forma, as raízes negativas de $p(x)$ são as positivas de $p(-x)$, assim foi possível enunciar a regra dos sinais de Descartes para as raízes negativas.

Um bom uso da Regra de sinais de Descartes é para detectar a existência de raízes imaginárias. Pois se somarmos o maior número possível de raízes positivas ao maior número de raízes negativas, e a soma encontrada for menor que o grau da equação, temos a certeza da existência de raízes imaginárias.

Veja os exemplos.

Em $p_1(x) = -7x^3 + 3x^2 + 7x - 3$, temos 2 trocas de sinais. Em $p_1(-x) = 7x^3 + 3x^2 - 7x - 3$, temos apenas 1 troca de sinais. Portanto, podemos afirmar que $p_1(x)$ possui no máximo raízes positivas e 1 raiz negativa. Ou seja, serão no máximo 3 raízes reais. Nesse caso nãos erá possível estudar as raízes imaginárias.

Para $p_2(x) = 2x^7 + 10x$, não temos nenhuma troca de sinais. Em $p_2(-x) = -2x^7 - 10x$, também não há troca de sinais, logo esse polinômio não possui raízes positivas e negativas. Sabemos que uma de suas raízes é o zero, como o grau de $p_2(x) = 7$ podemos afirmar que as outras 6 raízes serão três pares complexos.

Corolário 1.21. *Considere o polinômio* $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$. *Se os coeficientes dos termos de maior e menor grau,*

i) *Tiverem sinais opostos, isto é* $a_n \cdot a_0 < 0$, *então a quantidade de raízes positivas de* $p(x)$ *é ímpar.*

ii) *Tiverem sinais iguais, isto é* $a_n \cdot a_0 > 0$, *então a quantidade de raízes positivas de* $p(x)$ *é par.*

Para esse corolário, a multiplicidade m de uma raiz é considerada como m raízes. O leitor pode verificar exemplos desse corolário em 3.1 e 3.10, onde $a_n \cdot a_0 < 0$, e há quantidades impares de raízes positivas. E em 3.2 e 3.6, onde $a_n \cdot a_0 > 0$, e as raízes positivas aparecem em quantidades pares.

1.1 Relações de Girard

Como mencionamos ao longo do capítulo, há varias relações entre raízes e coeficientes de equações polinomiais, mas as relações que veremos a seguir são popularmente conhecidas como Relações de Girard (1595 - 1632), matemático francês que contribuiu muito dentro da álgebra, trigonometria e aritmética. Albert Girard publicou um trabalho em 1629 onde dava indícios do Teorema Fundamental da Álgebra e apresentava os primeiros estudos acerca de funções simétricas das raízes [1.2] de uma equação. De acordo com [6], ele foi o primeiro matemático a aceitar raízes negativas na solução de problemas geométricos e as nomeou de "quantidades menores que o nada".

As relações por ele apresentadas são uma importante ferramenta no estudo das raízes de um polinômio, quando conhecemos alguma informação sobre as mesmas. A seguir apresentamos as relações para as equações de 2° e 3° graus, em seguida apresentamos uma generalização das relações para as equações de grau n.

Definiï¿½ï¿½o 1.22. *Uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita simétrica em relação as suas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se permutarmos quaisquer duas variáveis e a função não se altera, isto é*

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

para quaisquer $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Alguns exemplos de funções simétricas são

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow x^2 + y^2 \\ f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longrightarrow xyz \\ f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longrightarrow x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2. \end{aligned}$$

A seguir apresentaremos as relações de Girard que são funções simétricas em relação às raízes de um polinômio. Considerando α_1 e α_2 as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, temos pelo corolário 1.10 que

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2).$$

Dividindo ambos os membros por a, segue que:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= x^2 - x\alpha_1 - x\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2 \\ &= x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2, \end{aligned}$$

igualando os coeficientes podemos escrever:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 & = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha_1\alpha_2 & = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Para as equações de terceiro grau, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$, cujas raízes são α_1, α_2 e α_3, temos

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3).$$

Dividindo ambos os membros por a, temos que

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3).$$

Efetuando as multiplicações e agrupando os termos semelhantes, obtemos que

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$

logo,

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 & = \dfrac{c}{a} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 & = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Seja $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. Por meio de raciocínio análogo aos anteriores, de acordo com o corolário 1.10 se considerarmos como raízes de $p(x)$ os termos α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, então

$$p(x) = a_0 \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n),$$

de forma que

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = a_0 \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdots (x - \alpha_n),$$

dividindo a igualdade por a_0, temos

$$x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0}x + \frac{a_n}{a_0} = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_n), \tag{1.6}$$

denotando $\frac{a_i}{a_0} = p_i$, escrevemos

$$x^n + p_1x^{n-1} + \cdots + p_{n-1}x + p_n = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_n).$$

Quando os fatores do segundo membro são multiplicados, a maior potência de x é o termo x^n de coeficiente 1, a segunda maior potência de x é x^{n-1}, cujo coeficiente é o resultado da soma dos termos $(-\alpha_1) + (-\alpha_2) + (-\alpha_3) + \cdots + (-\alpha_n)$, o coeficiente de x^{n-2} é a soma de seus produtos dois a dois, que será um resultado positivo; já o coeficiente do termo x^{n-3} é a soma dos produtos dos temos $(-\alpha_1), (-\alpha_2), (-\alpha_3), ..., (-\alpha_n)$ multiplicados três a três, e assim por diante, até o último termo que será apenas o produto de todas as raízes (com seus sinais alterados).

Equacionando os coeficientes de x em cada lado da identidade obtemos que

$$\begin{cases} p_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n), \\ p_2 = +(\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_2 \cdot \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n), \\ p_3 = -\ (\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-2} \cdot \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n), \\ \quad \vdots \\ p_n = (-1)^n \cdot (\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdots \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n). \end{cases} \tag{1.7}$$

A partir dessas relações podemos afirmar que, se as raízes de uma equação são todas positivas, seus coeficientes são todos, alternadamente, positivos e negativos. Se as raízes de uma equação são todas negativas, seus coeficientes serão todos positivos. As funções $p_1, p_2, \ldots, p_n$ determinadas em (1.7) são todas funções simétricas.

1.2 Funções simétricas das raízes

Funções simétricas das raízes de uma equação são aquelas funções em que todas as raízes estão igualmente envolvidas, de modo que o valor da expressão é inalterado quando a posição entre duas ou mais das raízes são trocadas, isto é funções que atendem a Definição 1.22. Por exemplo, as relações de Girard observadas em (1.7) são dessa natureza e são as funções simétricas mais simples entre raízes de um polinômio, pois cada raiz é considerada apenas em seu primeiro grau, nenhuma delas aparece elevada ao quadrado, ou ao cubo, por exemplo.

Sem conhecer o valor de cada raiz, podemos, a partir das relações (1.7), obter os valores de uma variedade infinita de funções simétricas das raízes em função dos coeficientes. Vamos representar funções simétricas pela letra grega $\sum$ e um modelo dos termos da função simétrica que será analisada, por exemplo, se α, β, γ são as raízes de uma cúbica, $\sum \alpha^2\beta^2$ representa a seguinte função simétrica das raízes

$$\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2, \tag{1.8}$$

onde estão todos os possíveis produtos entre os quadrados das raízes. Da mesma forma, $\sum \alpha^2\beta$ representa a função simétrica

$$\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\alpha + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta \tag{1.9}$$

onde todas as permutações das raízes duas a duas, com o primeiro termo elevado ao quadrado, estão escritas. Por fim, se considerarmos uma equação de grau n, com raízes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, a expressão $\sum \alpha_1\alpha_2$ representa a soma de todos os produtos dois a dois dessas raízes, ou seja,

$$\begin{aligned}\sum \alpha_1\alpha_2 = &(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 \cdots + \alpha_1\alpha_n) \\ &+ (\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_2\alpha_n) + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n.\end{aligned}$$

De modo geral, considerando

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \cdots + p_{n-1}x + p_n = 0, \tag{1.10}$$

de raízes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, e as relações de Girard apresentadas em (1.7), podemos escrever, por exemplo, em função dos coeficientes:

Exemplo 1.23. A soma de todos os quadrados das raízes da equação (1.10).

Sabemos que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -p_1$$

elevando ambos os membros ao quadrado obtemos

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)^2 &= p_1^2 \\
\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 \cdots + \alpha_1\alpha_n & \\
+\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 \cdots + \alpha_2\alpha_n & \\
+\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2 \cdots + \alpha_3\alpha_n & \\
\vdots & \\
+\alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_n + \alpha_3\alpha_n + \cdots + \alpha_n^2 &= p_1^2 \\
\sum \alpha_1^2 + 2 \cdot \sum \alpha_1\alpha_2 &= p_1^2 \\
\sum \alpha_1^2 &= p_1^2 - 2p_2. \qquad (1.11)
\end{aligned}$$

Exemplo 1.24. A soma dos inversos das raízes de (1.10).

A penúltima e a última relação de Girard (1.7), afirmam que :

$$\begin{cases} \alpha_2\alpha_3 \cdots \alpha_n + \alpha_1\alpha_3 \cdots \alpha_n + \cdots + \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}p_{n-1} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdots \alpha_{n-1}\alpha_n = (-1)^n p_n \end{cases}$$

Do quociente entre elas obtemos:

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n} = \frac{-p_{n-1}}{p_n}. \qquad (1.12)$$

Essa soma pode ser representada como $\sum \frac{1}{\alpha_1} = \frac{-p_{n-1}}{p_n}$.

De forma similar é possível encontrar a soma dos inversos entre produtos das raízes organizados dois a dois, três a três, etc, a partir do quociente entre as equações encontradas em (1.7) e a equação do produto entre todas as raízes.

1.3 Exemplos de funções simétricas para as raízes das equações de grau 2

Vamos considerar a equação

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (1.13)$$

onde $a \neq 0$, sendo α e β suas raízes. De (1.7), temos que

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a} & (1.14a)\\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}, & (1.14b)\end{cases}$$

a partir desses resultados, vamos mostrar alguns exemplos.

Exemplo 1.25. A soma do quadrado das raízes, $\alpha^2+\beta^2$, em função dos coeficientes a, b e c, da equação de segundo grau em (1.13), a partir de (1.14a),

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= -\frac{b}{a}\\ (\alpha+\beta)^2 &= \left(-\frac{b}{a}\right)^2\\ \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 &= \frac{b^2}{a^2}\\ \alpha^2+2\cdot\frac{c}{a}+\beta^2 &= \frac{b^2}{a^2}\\ \alpha^2+\beta^2 &= \frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Exemplo 1.26. O quadrado da diferença entre as raízes α e β, a partir de (1.14a) e (1.14b),

$$\begin{aligned} (\alpha-\beta)^2 &= (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\ &= \frac{b^2}{a^2}-4\cdot\frac{c}{a}\\ &= \frac{b^2-4ac}{a^2}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

resultado muito importante na resolução das equações de segundo grau.

1.4 Exemplos de funções simétricas para as raízes das equações de grau 3

Para a equação

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \tag{1.17}$$

onde $a \neq 0$, e α, β e γ são as raízes, sabemos das relações de Girard que,

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\dfrac{b}{a} & (1.18a) \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \dfrac{c}{a} & (1.18b) \\ \alpha\beta\gamma = -\dfrac{d}{a} & (1.18c) \end{cases}$$

e a partir dessas, podemos escrever:

Exemplo 1.27. A soma de todas as possíveis combinações dos produtos das raízes, sendo uma delas elevada ao quadrado, $\sum \alpha^2\beta$, utilizando (1.18a) e (1.18b),

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\beta\gamma) &= -\frac{bc}{a^2} \\ \alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha\beta\gamma+\alpha\beta^2+\alpha\beta\gamma+\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma^2+\beta\gamma^2 &= -\frac{bc}{a^2} \\ \sum \alpha^2\beta + 3\alpha\beta\gamma &= -\frac{bc}{a^2} \\ \sum \alpha^2\beta &= -\frac{bc}{a^2} + \frac{3d}{a} \qquad (1.19) \end{aligned}$$

Exemplo 1.28. A soma dos quadrados de todas as raízes da cúbica, $\sum \alpha^2$, utilizando (1.18a) e (1.18b):

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta+\gamma)^2 &= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 \\ \sum \alpha^2 + 2\cdot(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) &= +\frac{b^2}{a^2} \\ \sum \alpha^2 + 2\cdot\frac{c}{a} &= \frac{b^2}{a^2} \\ \sum \alpha^2 &= \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}. \qquad (1.20) \end{aligned}$$

Exemplo 1.29. A soma dos cubos das três raízes, $\sum \alpha^3$, a partir dos resultados de (1.14a) e (1.20):

$$\begin{aligned}
(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha+\beta+\gamma) &= \left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)\\
\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta\gamma^2 &= \left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)\\
\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 &= \left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)+\frac{bc}{a^2}-\frac{3d}{a}\\
\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 &= -\frac{b^3}{a^3}+\frac{2bc}{a^2}+\frac{bc}{a^2}-\frac{3d}{a}\\
\sum\alpha^3 &= -\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}-\frac{3d}{a} \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

Utilizando os resultados já obtidos nos itens anteriores podemos escrever ainda,

Exemplo 1.30. A soma dos quadrados das diferenças entre as raízes, $\sum(\alpha-\beta)^2$:

$$\begin{aligned}
(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2 &= 2\cdot\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\right)\\
&= 2\cdot\left(\sum\alpha^2-\sum\alpha\beta\right)\\
&= 2\cdot\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}-\frac{c}{a}\right)\\
&= 2\cdot\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{3c}{a}\right) \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

Colocando (-6) em evidência, podemos reescrever:

$$\sum(\alpha-\beta)^2 = \ -6\cdot\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}\right) \qquad (1.23)$$

Esse resultado e próximo são muito importantes no processo de resolução da equação de terceiro grau.

Exemplo 1.31. Podemos encontrar em função dos coeficientes, o produto

$$\Pi = (2\alpha-\beta-\gamma)(2\beta-\gamma-\alpha)(2\gamma-\alpha-\beta)$$

$$
\begin{aligned}
\Pi &= (2\alpha - \beta - \gamma)(2\beta - \gamma - \alpha)(2\gamma - \alpha - \beta) \\
&= (4\alpha\beta - 2\alpha^2 - 2\alpha\gamma - 2\beta^2 + \alpha\beta + \beta\gamma - 2\beta\gamma + \alpha\gamma + \gamma^2)(2\gamma - \alpha - \beta) \\
&= (5\alpha\beta - 2\alpha^2 - 2\alpha\gamma - 2\beta^2 + \beta\gamma - 2\beta\gamma + \alpha\gamma + \gamma^2)(2\gamma - \alpha - \beta) \\
&= 10\alpha\beta\gamma - 5\alpha^2\beta - 5\alpha\beta^2 - 4\alpha^2\gamma + 2\alpha^3 + 2\alpha^2\beta - 2\alpha\gamma^2 + \alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma \\
&- 4\beta^2\gamma + 2\alpha\beta^2 + 2\beta^3 - 2\beta\gamma^2 + \alpha\beta\gamma + \beta^2\gamma + 2\gamma^3 - \alpha\gamma^2 - \beta\gamma^2 \\
&= 12\alpha\beta\gamma - 3 \cdot (\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \beta\gamma^2) + 2 \cdot (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) \\
&= 12\left(-\frac{d}{a}\right) - 3\left(\frac{3d}{a} - \frac{bc}{a^2}\right) + 2\left(-\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2} - \frac{3d}{a}\right) \\
&= -\frac{12d}{a} - \frac{9d}{a} + \frac{3bc}{a^2} - \frac{2b^3}{a^3} + \frac{6bc}{a^2} - \frac{6d}{a} \\
&= -\frac{2b^3}{a^3} + \frac{9bc}{a^2} - \frac{27d}{a}
\end{aligned}
$$

Colocando (-27) em evidência, temos o resultado:

$$
\Pi = (2\alpha - \beta - \gamma)(2\beta - \gamma - \alpha)(2\gamma - \alpha - \beta) = (-27)\left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right) \tag{1.24}
$$

CAPÍTULO 2

Solução algébrica para equações polinomiais de terceiro grau

Antes de desenvolver as resoluções das equações polinomiais, é importante apresentar algumas observações acerca de manipulações algébricas que podem ser feitas a fim de facilitar tanto a resolução, quanto algumas discussões a cerca de equações polinomiais.

2.1 Transformações de Equações

Em equações da forma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0$$

podemos realizar transformações que alterem ou não alteram suas raízes. Algumas transformações que não alteram as raízes são:

a) Somar o mesmo termo a ambos os lados da equação.

b) Multiplicar ambos os lados da equação por um determinado valor/ expressão, que pode ser inclusive um número fracionário, de denominador diferente de zero.

Já utilizamos esse segundo item, em (1.6), onde consideramos $a_0 \neq 1$ e multiplicamos ambos os membros da equação por $\dfrac{1}{a_0}$, o que resultou em:

$$x^n + p_1x^{n-1} + \cdots + p_{n-2}x^2 + p_{n-1}x + p_n = 0, \tag{2.1}$$

onde $p_i = \dfrac{a_i}{a_0}$.

Existem também outras manipulações algébricas que podem ser aplicadas às equações polinomiais. As transformações que apresentamos a seguir provocam alterações nas raízes.

c) Trocar x por $-y$ na equação, e fazer o jogo de sinal necessário, de acordo com cada potência de x da equação inicial. Assim, as novas raízes serão simétricas em relação às da equação inicial.

Considere $x^n + p_1x^{n-1} + \cdots + p_{n-2}x^2 + p_{n-1}x + p_n = 0$, sendo α_i suas raízes, pode ser escrito como $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n) = 0$, de forma que

$$x^n + p_1x^{n-1} + \cdots + p_{n-2}x^2 + p_{n-1}x + p_n = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)$$

ao substituir x por $-y$, temos:

$$(-y)^n + p_1(-y)^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(-y) + p_n = (-y - \alpha_1)(-y - \alpha_2)\cdots(-y - \alpha_n)$$

que assumirá comportamentos semelhantes, independente de n ser par ou ímpar, pois, caso n **seja par**, teremos:

$$y^n - p_1y^{n-1} + \cdots + p_{n-2}y^2 - p_{n-1}y + p_n = +(y + \alpha_1)(y + \alpha_2)\cdots(y + \alpha_n)$$

caso n **seja ímpar**, teremos:

$$-y^n + p_1y^{n-1} + \cdots + p_{n-2}y^2 - p_{n-1}y + p_n = -(y + \alpha_1)(y + \alpha_2)\cdots(y + \alpha_n)$$

multiplicando ambos os membros por (-1), obtemos:

$$y^n - p_1y^{n-1} - \cdots - p_{n-2}y^2 + p_{n-1}y - p_n = (y + \alpha_1)(y + \alpha_2)\cdots(y + \alpha_n)$$

Portanto, na prática, se for necessário trocar as raízes de uma equação polinomial por suas simétricas, basta alternadamente, a partir do coeficiente do termo de grau $(n - 1)$, mudar os sinais de todos os coeficientes da equação (inclusive os sinais dos coeficientes iguais a 0), se $+$ colocar $-$ e vice-versa.

d) Multiplicar os coeficientes da equação polinomial pelas potências de um valor qualquer k, em ordem crescente, para obter novas raízes, todas múltiplas de k.

Se as raízes de uma equação polinomial são $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ por exemplo, e queremos que sejam $k\alpha_1, k\alpha_2, \ldots, k\alpha_n$, então, se antes poderíamos escrever o polinômio como $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n) = 0$, agora queremos escrever um novo polinômio $(x - k\alpha_1)(x - k\alpha_2)\cdots(x - k\alpha_n) = 0$, resolvendo essa equação temos:

$$x^n + kp_1x^{n-1} + k^2p_2x^{n-2}\cdots + k^{n-1}p_{n-1}x + k^np_n = 0,$$

onde $p_1, p_2, ..., p_n$ seguem das Relações de Girard em (1.7).

Na pratica, para que as raízes de uma equação polinomial sejam todas multiplicadas por uma constante k, basta que o coeficiente que acompanha o termo de grau n seja multiplicado por $k^0 = 1$, o coeficiente que acompanha o termo de grau $(n-1)$ será multiplicado por k^1, o coeficiente que acompanha o termo de grau $(n-2)$ será multiplicado por k^2 e assim sucessivamente, até que o ultimo termo, p_n seja multiplicado por k^n, o que fará com que as novas raízes sejam todas multiplicadas pela constante k.

e) Podemos acrescentar ou retirar das raízes de uma equação, determinada quantidade (h).

Avaliaremos o polinômio $p(x)$, da forma $x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_{n-1}x + p_n$, em $(x+h)$,

$$(x+h)^n + p_1(x+h)^{n-1} + \cdots + p_{n-2}(x+h)^2 + p_{n-1}(x+h) + p_n. \tag{2.2}$$

Do Binômio de Newton, temos $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$, ou seja,

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n, \tag{2.3}$$

onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{2.4}$$

Expandindo cada potência em (2.2), teremos:

$$\begin{aligned}
p(x+h) = {} & \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + \binom{n}{n}h^n \\
& + p_1\left[\binom{n-1}{0}x^{n-1} + \binom{n-1}{1}x^{n-2}h + \cdots + \binom{n-1}{n-1}h^{n-1}\right] \\
& + \cdots \\
& + p_{n-2}\left[\binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xh + \binom{2}{2}h^2\right] \\
& + p_{n-1}\left[\binom{1}{0}x + \binom{1}{1}h\right] + p_n,
\end{aligned}$$

ao reorganizar os coeficientes de acordo com os graus de h, o polinômio será

$$\begin{aligned}
p(x+h) = &\binom{n}{0}x^n + p_1\binom{n-1}{0}x^{n-1} + \cdots + p_{n-2}\binom{2}{0}x^2 + p_{n-1}\binom{1}{0}x + p_n \\
&+ h\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + p_1\binom{n-1}{1}x^{n-2} + \cdots + p_{n-2}\binom{2}{1}x + p_{n-1}\binom{1}{1}\right] \\
&+ h^2\left[(\binom{n}{2}x^{n-2} + p_1\binom{n-1}{2}x^{n-3} + \cdots + p_{n-3}\binom{3}{2}x + p_{n-2}\binom{2}{2}\right] \\
&+ \cdots \\
&+ h^{n-2}\left[\binom{n}{n-2}x^2 + p_1\binom{n-1}{n-2}x + p_2\binom{n-2}{n-2}\right] \\
&+ h^{n-1}\left[\binom{n}{n-1}x + p_1\binom{n-1}{n-1}\right] \\
&+ h^n\binom{n}{n},
\end{aligned}$$

desenvolvendo cada uma das combinações, de acordo com (2.4), e colocando os denominadores dos binomiais em evidência, teremos:

$$\begin{aligned}
p(x+h) = &x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \cdots + p_{n-2}x^2 + p_{n-1}x + p_n \\
&+ h\left[(nx^{n-1} + p_1(n-1)x^{n-2} + p_2(n-2)x^{n-3} \cdots + 2p_{n-2}x + p_{n-1}\right] \\
&+ \frac{h^2}{2!}\left[n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)p_1x^{n-3} + \cdots + 2\cdot 1\cdot p_{n-2}\right] \\
&+ \cdots \\
&+ \frac{h^{n-2}}{(n-2)!}\left[\frac{n!}{2!}x^2 + p_1(n-1)!\cdot x + p_2(n-2)!\right] \\
&+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\left[n!\cdot x + p_1(n-1)!\right] \\
&+ \frac{h^n}{n!}\left[n!\right].
\end{aligned}$$

Observamos que a parte independente de h nessa expressão é $p(x)$. E que os coeficientes sucessivos dos diferentes graus de h são polinômios de x de graus menores uma unidade de n. Observe que, cada coeficiente de h^k pode ser escrito como a derivada[1] $k-$ésima de $p(x)$. A primeira derivada de uma função $g(x)$ pode ser indicada como $g'(x)$, a segunda derivada como $g''(x)$ e assim por diante, de forma que a $k-$ésima derivada pode ser indicada como $g^{(k)}(x)$. Portanto $p(x+h)$ pode ser

[1]Conceitos e exemplos de derivadas são encontrados em livros de Cálculo.

reescrito como:

$$p(x+h) = p(x) + h \cdot p'(x) + \frac{h^2}{2!} \cdot p''(x) + \frac{h^3}{3!} \cdot p'''(x) + \cdots + h^{n-1}(nx + p_1) + h^n.$$

Também é possível alternar entre x e h na expressão final, de forma que, na prática, para acrescentar uma quantia (h) às raízes de $p(x)$, basta escrever $p(x+h)$, e o resultado final obtido será

$$p(x+h) = p(h) + x \cdot p'(h) + \frac{x^2}{2!} \cdot p''(h) + \frac{x^3}{3!} \cdot p'''(h) + \cdots + x^{n-1}(nh + p_1) + x^n.$$

2.1.1 Uso de funções simétricas em transformações de equações

Podemos usar funções simétricas para transformar uma equação dada, de raízes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ em uma nova equação cujas raízes sejam funções racionais das raízes iniciais. Seja a função $\phi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ que pode envolver todas as raízes da equação inicial, ou apenas algumas delas, é possível formar todas as suas combinações ao desenvolver

$$\{y - [\phi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)]\} \cdot \{y - [\phi(\alpha, \beta, \delta, \ldots)]\} \cdots = 0.$$

pois, expandido esse produto, os coeficientes sucessivos de y serão formados por funções simétricas das raízes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, e poderão ser expressos em função dos coeficientes da equação inicial; veja abaixo um exemplo.

Considere a equação de 3° grau, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, cujas raízes são α, β e γ. Se quisermos formar uma nova equação em y para a qual as raízes sejam os quadrados das diferenças entre as raízes da equação cúbica inicial, basta escrevermos e desenvolvermos o produto que chamaremos de Π:

$$\Pi = \left(y - (\alpha - \beta)^2\right)\left(y - (\alpha - \gamma)^2\right)\left(y - (\beta - \gamma)^2\right)$$

$$
\begin{aligned}
\Pi &= \left(y-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2\right)\left(y-\alpha^2+2\alpha\gamma-\gamma^2\right)\left(y-\beta^2+2\beta\gamma-\gamma^2\right)\\
&= (y^2-2\alpha^2y+2\alpha\beta\gamma-\gamma^2y+\alpha^3-2\alpha^3\gamma-\alpha^2\gamma^2+2\alpha\gamma-2\alpha^3\beta\\
&+4\alpha^2\beta\gamma-2\alpha\beta\gamma^2-\beta^2y+\alpha^2\beta^2-2\alpha\beta^2\gamma+\beta^2\gamma^2)(y-\beta^2+2\beta\gamma-\gamma^2)\\
&= y^3-2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma\right)y^2\\
&+\left[\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\left(\alpha^3\beta+\alpha^3\gamma+\alpha\beta^3+\beta^3\gamma\alpha\gamma^3+\beta\gamma^3\right)+3\left(\alpha^2\beta^2\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2\right)\right]y\\
&+2\left(\alpha^3\beta^2\gamma+\alpha^3\beta\gamma^2+\alpha^2\beta^3\gamma+\alpha\beta^3\gamma^2+\alpha^2\beta\gamma^3+\alpha\beta^2\gamma^3\right)\\
&-2(\alpha^3\beta^3+\alpha^3\gamma^3+\beta^3\gamma^3)-6\alpha^2\beta^2\gamma^2\\
&= y^3-2\left(\sum\alpha^2+\sum\alpha\beta\right)y^2+\left[\sum\alpha^4-2\sum\alpha^3\beta+3\sum\alpha^2\beta^2\right]y\\
&+2\left[\sum\alpha^3\beta^2\gamma-\sum\alpha^3\beta^3-3\alpha^2\beta^2\gamma^2\right].
\end{aligned}
$$

Portanto, o produto Π gera em seus coeficientes funções simétricas das raízes da equação inicial.

Continuando os itens sobre transformar equações, vamos ao último item dessa seção.

f) Escrever uma equação com raízes que sejam combinações das raízes de uma equação inicial.

Outra maneira de escrever uma nova equação cujas raízes sejam combinações das raízes de uma equação anterior, é escrevendo o que se quer para as novas raízes e fazer as substituições necessárias. Vejamos dois exemplos.

Exemplo 2.1. Considere α, β e γ as raízes de uma equação polinomial mônica de 3° grau da forma $x^3 - bx^2 + cx + d = 0$, se quisermos uma equação em y que tenha como raízes as somas das raízes anteriores tomadas duas a duas podemos escrever que os valores de y procurados serão, $y = \alpha + \beta$, $y = \alpha + \gamma$, $y = \beta + \gamma$, mas sabemos que o coeficiente b da equação inicial representa $b = \alpha + \beta + \gamma$, então, se utilizarmos as equações

$$
\begin{aligned}
y &= \alpha + \beta\\
b &= \alpha + \beta + \gamma
\end{aligned}
$$

podemos escrever que $y = b - \gamma$, onde gama representa um dos valores de x na equação inicial. assim, podemos dizer que

$$y = b - x \;\Leftrightarrow\; x = b - y$$

assim, a equação com as novas raízes, será encontrada ao substituirmos x por $b - y$ na equação inicial.

Exemplo 2.2. Considere a equação

$$x^3 + cx + d = 0 \tag{2.5}$$

cujas raízes são α, β e γ. Se quisermos uma equação em y que tenha como raízes o quadrado das diferenças entre as raízes anteriores, podemos escrever que os valores de y procurados serão, $y = (\alpha - \beta)^2$, $y = (\alpha - \gamma)^2$, $y = (\beta - \gamma)^2$, assim, escolhendo uma dessas raízes podemos escrever

$$\begin{aligned}
y &= (\beta - \gamma)^2 \\
y &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma + \alpha^2 - \alpha^2 \\
y &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 - 2\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha} \\
y &= \sum \alpha^2 - \alpha^2 - 2\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha},
\end{aligned}$$

a partir de (1.18c) e (1.20) podemos escrever para o exemplo em questão, que $\alpha\beta\gamma = -d$ e $\sum \alpha^2 = -2c$. Assim, podemos escrever y como

$$y = -2c - \alpha^2 - 2\ \frac{(-d)}{\alpha},$$

entendendo α como uma das soluções da equação inicial, podemos substituí-los por x,

$$\begin{aligned}
y &= -2c - x^2 + \frac{2d}{x} \\
xy &= -2cx - x^3 + 2d,
\end{aligned}$$

$$x^3 + (y + 2c)x - 2d = 0, \tag{2.6}$$

que é uma função que relaciona as raízes α, β e γ da equação $x^3 + cx + d = 0$ com as novas raízes $y = (\alpha - \beta)^2$, $y = (\alpha - \gamma)^2$, $y = (\beta - \gamma)^2$. Subtraindo (2.5) de (2.6), teremos:

$$\begin{aligned}
(y + c)x - 2d &= 0 \\
x &= \frac{3d}{y + c},
\end{aligned}$$

assim, a equação com as novas raízes, será encontrada ao substituirmos x por $\dfrac{3d}{y + c}$ na equação inicial.

2.2 Resolução algébrica da equação polinomial de segundo grau

Vamos desenvolver uma solução algébrica para a equação de segundo grau. Consideraremos (1.13),

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde $a \neq 0$, sendo x_1 e x_2 as soluções procuradas. Vamos considerar a substituição $x = (y + h)$ na equação dada e a reorganizaremos em função de y,

$$\begin{aligned}
&a(y+h)^2 + b(y+h) + c = 0\\
&ay^2 + 2ayh + ah^2 + by + bh + c = 0\\
&ay^2 + (2ah + b)y + (ah^2 + bh + c) = 0.
\end{aligned}$$

O resultado obtido pode ser interpretado como uma aplicação direta de (2.1), pois o que encontramos é $f(h) + f'(h)\ y + \frac{f''(h)}{2}\ y^2 = 0$.

Agora o objetivo é eliminar o termo de segundo maior grau, no caso, $2ah + b = 0$, para isso, faremos $h = -\dfrac{b}{2a}$. Assim, $x = \left(y - \dfrac{b}{2a}\right)$,

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(y - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(y - \frac{b}{2a}\right) + c\\
&= a\left(y^2 + 2\frac{yb}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + by - \frac{b^2}{2a} + c\\
&= ay^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c.
\end{aligned}$$

Igualando essa equação a zero para determinar suas raízes e somando e subtraindo os termos convenientes, continuaremos a resolução,

$$\begin{aligned}
ay^2 &= \frac{-b^2}{4a} - c\\
4a^2y^2 &= -b^2 - 4ac\\
\sqrt{4a^2y^2} &= \sqrt{b^2 - 4ac}\\
|2ay| &= \sqrt{b^2 - 4ac}\\
y &= \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

Mas, como escrevemos $x = \left(y - \dfrac{b}{2a}\right)$ as soluções da equação serão

$$x = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{2.7}$$

e o discriminante será $\Delta = b^2 - 4ac$, onde a, b e c são coeficientes da equação. Observe que esse resultado também foi encontrado como função simétrica das raízes α e β das equações de grau 2 em (1.26).

O modelo mais conhecido de desenvolvimento da resolução de uma equação de grau 2, que é atribuído erroneamente à Bháskara[2], consiste em reduzir o problema a uma equação linear. Ele denominava esse método de 'eliminação do termo médio', equivalente ao nosso *completamento de quadrados*, mas atualmente sabe-se da existência de outro matemático indiano, Sridhara [6], que viveu por volta dos anos 900, e já utilizava palavras para orientar o que fazer em cada próximo passo de resolução, daquilo que já se pareceria com uma equação matemática, tal como conhecemos.

2.3 Resolução algébrica das equações de terceiro grau

Vamos iniciar considerando a equação (1.17)

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

onde $a \neq 0$, sendo x_1, x_2 e x_3 as soluções procuradas. Vamos estudar a equação dada, em x, para $x = (y + h)$.

Sabemos por (2.1) que o resultado será da forma:

$$\frac{p'''(h)}{3!}y^3 + \frac{p''(h)}{2!}y^2 + p'(h)y + p(h) = 0,$$

ou seja, o resultado obtido é

$$ay^3 + (3ah + b)y^2 + (3ah^2 + 2bh + c)y + (ah^3 + bh^2 + ch + d) = 0.$$

[2]Bháskara foi um matemático indiano que viveu de 1114 a 1185. Seus principais trabalhos foram dedicados à aritmética, álgebra, astronomia e trigonometria esférica. Sendo que a álgebra estudada ainda não fazia uso de letras. Ele representa o ápice da Matemática do século XII, de acordo com [7].

De forma semelhante ao que fizemos para as equações de grau 2, o primeiro objetivo é eliminar o termo do segundo maior grau. Portanto, fazendo a translação $x = \left(y - \dfrac{b}{3a}\right)$ temos que

$$ay^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)y + \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) = 0.$$

De acordo com (2.1), podemos reescreve-lo como

$$y^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)y + \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right) = 0.$$

Chamaremos de invariantes A e B os termos

$$\begin{aligned} A &= \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \\ B &= \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Esses invariantes foram encontrados também como funções simétricas das raízes em (1.23) e (1.24). Então, neste processo de resolução chegamos à

$$y^3 + Ay + B = 0, \tag{2.9}$$

que precisa ser resolvida. Para isso, apresentaremos dois métodos, o primeiro, atribuído à escola italiana de matemáticos, dos quais podemos citar Scipione del Ferro (1465-1526), Nicolo Tartaglia (1499? -1557), Girolamo Cardano (1501-76) e Ludovico Ferrari (1522-65) entre outros. Porém, Cardano[3]foi quem organizou e em 1545 publicou seu trabalho *Ars Magna* - primeiro tratado latino dedicado exclusivamente à álgebra, métodos de solução das equações cúbicas e quárticas que ele havia aprendido e aprimorado, com justificativas principalmente geométricas [7] [6]. O segundo método de resolução é atribuído a Leonhard Euler (1707 - 83), e também descoberto, de forma independente, pelo matemático brasileiro Carlos Gustavo, mais conhecido como Gugu, em 1987. Atualmente Gugu é pesquisador titular do IMPA, membro da comissão brasileira de Olimpíadas de Matemática, e sua principal área de pesquisa em Matemática é a dos Sistemas Dinâmicos. Vamos às resoluções.

[3]Cardano foi o primeiro matemático, que se sabe, a utilizar mudança de variável em uma equação para reduzi-la à outro modelo de equação, para a qual já fosse conhecido um método de resolução.

Primeiro Método Para resolver (2.9) usaremos de um artifício do calculo, que é considerar $y = u + v$, com $u, v \neq 0$ a determinar. Assim,

$$\begin{aligned}
&y^3 + Ay + B = 0\\
&(u+v)^3 + A(u+v) + B = 0\\
&u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + A(u+v) + B = 0\\
&u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + A(u+v) + B = 0\\
&u^3 + v^3 + (3uv + A)(u+v) + B = 0. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Dessa forma, para que a equação (2.10) admita soluções $y = u + v$ é necessário que:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -B \\ 3uv = -A \end{cases} \qquad (2.11)$$

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -B \\ u^3v^3 = -\frac{A^3}{27}, \end{cases} \qquad (2.12)$$

ou seja, podemos considerar $v = -\dfrac{A}{3u}$. Assim, em (2.10), temos

$$\begin{aligned}
u^3 - \frac{A^3}{27u^3} + B &= 0\\
u^6 + Bu^3 - \frac{A^3}{27} &= 0, \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

uma equação do segundo grau em (u^3), que pode ser resolvida utilizando (2.7)

$$\begin{aligned}
u^3 &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4\left(\frac{A^3}{27}\right)}}{2}\\
u^3 &= -\frac{B}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{B^2 + \left(\frac{4A^3}{27}\right)}\\
u^3 &= -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(B^2 + \frac{4A^3}{27}\right)}\\
u^3 &= -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}\\
u &= \sqrt[3]{-\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}}.
\end{aligned}$$

Encontramos uma solução u para a equação auxiliar (2.13). Mas, sabemos pelas relações (1.7) que o produto das soluções em (u^3) é $-\dfrac{A^3}{27}$, logo, como $u^3v^3 = -\dfrac{A^3}{27}$, é possível que v^3 seja a segunda raiz dessa equação. Para isso vamos analisar, que a soma das raízes deve ser $-B$. Substituindo (2.12) em (2.13), temos:

$$u^6 + Bu^3 + u^3v^3 = 0,$$

que dividido por u^3,

$$u^3 + B + v^3 = 0v^3 = -B - u^3,$$

somando u^3 a ambos os membros, teremos

$$u^3 + v^3 = -B, \tag{2.14}$$

o que nos garante, por (1.7), que v^3 é raiz da equação, ou seja v^3 é da forma

$$v^3 = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}$$
$$v = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}}.$$

Como o produto $uv = -\dfrac{A}{3}$, as raízes u e v serão

$$u = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}}$$
$$v = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} - \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}}.$$

Já que as soluções da equação (2.9), são da forma $y = u + v$, temos que

$$y = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{B}{2} - \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}}, \tag{2.15}$$

sendo que, para cada raiz cúbica é possível encontrar até três raízes complexas distintas que, somadas duas a duas, nos fornecerão até nove raízes para a solução da equação em y - que admite no máximo três soluções distintas (Teorema 1.9 e Corolário 1.14). Para encontrarmos apenas as três soluções procuradas usaremos o fato do produto dos radicais ser $uv = -\dfrac{A}{3}$.

Essa foi a demostração dada por Cardano, de forma que as soluções, em

x, da cúbica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, onde $a \neq 0$, serão $x = y - \dfrac{b}{3a}$, e onde o discriminante, pode ser representado por

$$\Delta_3 = \frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27} \tag{2.16}$$

Segundo Método - Este segundo método de resolução também será iniciado reduzindo a cúbica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ a $y^3 + Ay + B = 0$ - equação auxiliar em y, já apresentada em (2.9), que será resolvida a partir de uma nova equação auxiliar de segundo grau em t.

$$\begin{aligned} t^2 - St + P = 0 \quad &\text{onde } S = t_1 + t_2 \\ &\text{e } \ P = t_1 \cdot t_2 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Primeiramente analisemos a seguinte hipótese: Considere

$$\begin{aligned}
&y = \sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2} \quad \text{elevando os membros ao cubo, temos:} \\
&y^3 = t_1 + 3\sqrt[3]{t_1^2}\sqrt[3]{t_2} + 3\sqrt[3]{t_1}\sqrt[3]{t_2^2} + t_2 \\
&y^3 = t_1 + 3\sqrt[3]{t_1 t_2}\sqrt[3]{t_1} + 3\sqrt[3]{t_1 t_2}\sqrt[3]{t_2} + t_2 \\
&y^3 = (t_1 + t_2) + 3\sqrt[3]{t_1 t_2} \cdot (\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}) \\
&y^3 = S + 3\sqrt[3]{P} \cdot y
\end{aligned}$$

que pode ser reorganizada como

$$y^3 - 3\sqrt[3]{P}y - S = 0. \tag{2.18}$$

Comparando os coeficientes dos termos de mesmo grau das equações $y^3 + Ay + B = 0$ (2.9) e $y^3 - 3\sqrt[3]{P}y - S = 0$ (2.18), temos que:

$$\begin{cases} S & = -B \\ \sqrt[3]{P} & = -\frac{A}{3} \end{cases}$$
$$\begin{cases} S & = -B \\ P & = -\frac{A^3}{27} \end{cases} \tag{2.19}$$

assim, determinamos quem serão os valores S e P de uma equação auxiliar de segundo grau em t (2.17), cujas raízes são t_1 e t_2, as obtendo encontramos também as soluções da (2.9) que são da forma $y = \sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}$.

Portanto, considerando (2.19), temos que a equação auxiliar de segundo grau a ser resolvida é

$$t^2 + Bt - \frac{A^3}{27} = 0,$$

que, de acordo com a fórmula resolutiva de (2.7), terá as seguintes soluções:

$$\Delta = B^2 + \frac{4A^3}{27}$$
$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}$$
$$t = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}$$

Logo as soluções da cúbica serão $y = \sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}$, onde cada raiz cúbica pode assumir três valores complexos, todavia a equação (2.19) diz que o produto desses dois radicais deve ser $-\frac{A}{3}$. Assim, será possível obter as três raízes da (2.9), que serão da forma

$$y = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{B}{2} - \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}} \tag{2.20}$$

onde as soluções da cúbica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ em x serão $x = y - \frac{b}{3a}$, onde o discriminante, pode ser representado, mais uma vez por $\Delta_3 = \frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}$. Observe que os resultados encontrados são os mesmos para os dois métodos de desenvolvimento.

CAPÍTULO 3

Análise das raízes a partir do comportamento do Discriminante

Antes de analisar o discriminante de cada equação, vamos observar o comportamento de alguns exemplos de equações para verificar como serão suas raízes, seus discriminantes e invariantes encontrados ao longo da resolução, e também os gráficos das funções polinomiais que as representam.

3.1 Equações de grau 2

De acordo com os itens já estudados nos capítulo anteriores, sabemos que as equações de grau 2, admitem apenas 3 tipos de raízes, são elas:

1. Duas raízes reais distintas,
2. Uma raiz real de multiplicidade 2,
3. Duas raízes complexas conjugadas.

A seguir apresentaremos um exemplo de cada caso. Em todos eles usaremos a fórmula encontrada em (2.7), que afirma $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemplo 3.1. $x^2 - 3x - 10 = 0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1}$$
$$x_1 = -3, \; x_2 = 5$$

Neste exemplo $\Delta > 0$ e as soluções são reais e distintas. O gráfico 3.1 representa a função polinomial descrita nesse exemplo.

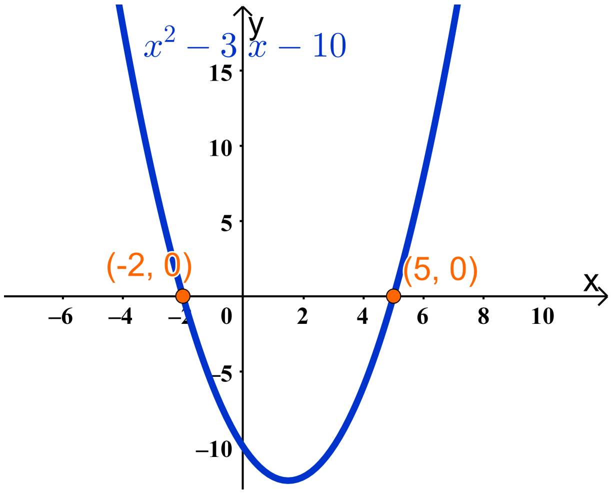

Figura 3.1: $x^2 - 3x - 10 = 0$, *caso* $\Delta > 0$.

Exemplo 3.2. $x^2 - 6x + 9 = 0$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0.$$

Portanto,

$$x = \frac{6 \pm 0}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2}$$
$$x_1 = x_2 = 3,$$

duas soluções iguais, ou seja, uma raiz real de multiplicidade 2.

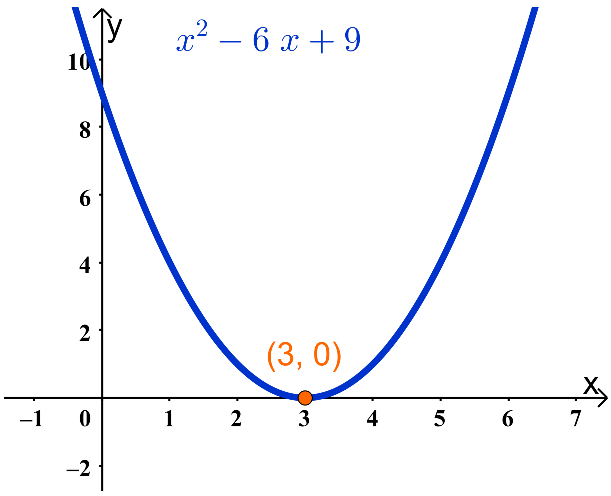

Figura 3.2: $x^2 - 6x + 9 = 0$, *caso* $\Delta = 0$.

Exemplo 3.3. $x^2 + 2x + 5 = 0$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16$$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}\\
x &= \frac{-2 \pm 4i}{2}\\
x &= -1 \pm 2i
\end{aligned}
$$

assim, x_1 e x_2 são duas soluções complexas conjugadas, e a curva gerada não toca o eixo das abscissas. Ver figura 3.3.

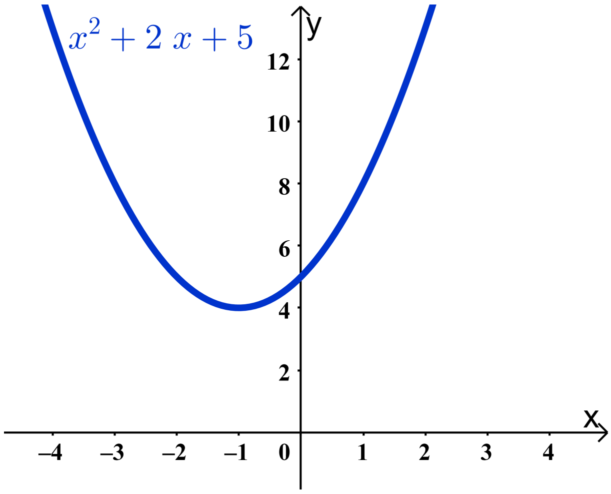

Figura 3.3: $x^2 + 2x + 5 = 0$, *caso* $\Delta < 0$.

Então, nos exemplos encontramos $\Delta > 0$ para soluções rais e distintas, $\Delta = 0$ para uma raiz real de multiplicidade 2, e $\Delta < 0$ quando as raízes são complexas conjugadas.

A função $\Delta = b^2 - 4c$ (que pode ser visto assim, considerando que toda equação polinomial pode ser resolvida considerando-a mônica a partir da multiplicação por $\frac{1}{a}$, caso necessária), está descrita na figura 3.4, onde o plano está dividido em três regiões, haja vista que para as equações polinomiais de segundo grau, só existem 3 tipos de soluções possíveis.

Essa mesma função foi encontrada em (1.26), como resultado do quadrado da diferença entre as raízes das equações de segundo grau, vamos utilizar esse resultado para demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.4. *Seja a equação polinomial de grau 2,*

$$p(x) = ax^2 + bx + c = 0,$$

com $a \neq 0$, coeficientes reais, raízes x_1 e x_2 e Δ seu discriminante. Podemos afirmar que: Se $\Delta < 0$, $p(x)$ terá um par de raízes complexas. Se $\Delta = 0$, então $p(x)$ tem raízes múltiplas. Se $\Delta > 0$, $p(x)$ tem duas raízes reais distintas.

Demonstração: Sabemos que toda equação polinomial pode er escrita em sua forma mônica, então vamos considerar $a = 1$ de forma que a equação seja $x^2 + bx + c = 0$. É fato que o discriminante pode ser escrito como $\Delta = b^2 - 4c$, e que

$$(x_1 - x_2)^2 = b^2 - 4c = \Delta.$$

A partir daí podemos fazer algumas análises.

Caso $\Delta < 0$: É necessário que $(x_1 - x_2)^2 < 0$, o que só é possível se uma das raízes for complexa, mas o corolário 1.12 nos garante que se uma das raízes for complexa a outra também o será, e será o conjugado da primeira raiz, o que garante que $(x_1 - x_2)^2$ não será zero, mas resultará em um valor negativo para o discriminante.

Veja que, se $\Delta < 0$, então $b^2 - 4c < 0$, mas se consideramos os coeficientes reais, e $a > 0$, então b^2 é sempre positivo, logo é necessário que $c > 0$ para que o discriminante seja negativo.

Caso $\Delta = 0$: Se $\Delta = 0$ então $(x_1 - x_2)^2 = 0$, o que só é possível se $x_1 = x_2$, assim, se $\Delta = 0$ as raízes serão reais e iguais, portanto,a equação admitirá uma solução real de multiplicidade 2.

Caso $\Delta > 0$: Assumir o discriminante positivo é o mesmo que $(x_1 - x_2)^2 > 0$, só é possível se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, e $x_1 \neq x_2$. Logo, teremos duas raízes reais e distintas para a equação inicial. $\blacksquare$

A figura abaixo, 3.4, traz a representação da curva $b^2 - 4c = 0$.

Sobre a curva estarão as equações de grau 2 que possuem única solução de multiplicidade 2. Abaixo da curva estarão as equações cujo $\Delta > 0$ ou seja, $b > 2\sqrt{c}$, e por fim, a região acima da curva, onde estão as equações polinomiais de grau 2, em que $\Delta < 0$.

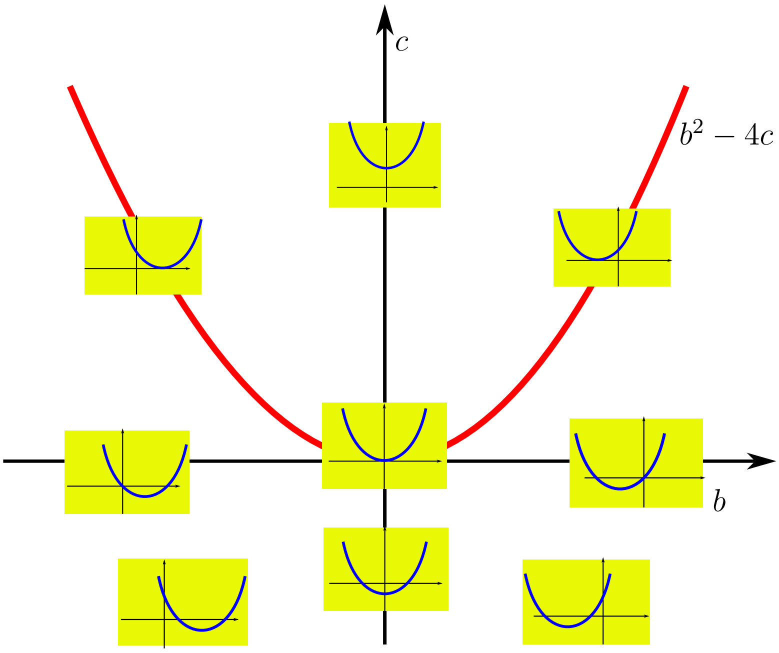

Figura 3.4: *Curva $b^2 - 4c = 0$ e os modelos de gráficos que podem ser gerados por funções de 2° grau, onde $a > 0$.*

Os casos representados na figura consideram $a = 1$, e representam todos os casos onde $a > 0$, os gráficos para $a = -1$ ou $a < 0$ são semelhantes aos apresentados, porém, com reflexão em torno do eixo horizontal, x .

Ao início do capítulo apresentamos os três possíveis tipos de raízes para as equações de 2° grau, e na imagem 3.4 o plano foi dividido em exatamente 3 regiões - região abaixo da curva, acima da curva e sobre a curva - uma para cada tipo de raiz. Vamos ver se essa relação também acontece para as equações de grau 3.

3.2 Equações de grau 3

Pelo que já estudamos ao longo do trabalho, sabemos que as equações de grau 3 admitem os seguintes tipos de soluções:

1. Três raízes reais diferentes;
2. Três raízes reais, sendo uma raiz dupla (multiplicidade 2) e uma raiz simples;
3. Três raízes reais iguais, ou seja, uma raiz tripla (multiplicidade 3);
4. Uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.5. $x^3 - 9x = 0$

Para essa equação apresentaremos a resolução completa considerando a fórmula resolutiva apresentada em (2.3), na qual eliminamos o termo de grau 2 fazendo a substituição $x = \left(y - \dfrac{b}{3a}\right)$. Mas, nesse caso, o coeficiente do termo de grau 2 já é 0, então a substituição será $x = y$,, portanto vamos escrever a equação $y^3 + Ay + B = 0$, onde A eB serão obtidos a partir dos coeficientes da equação a resolver (2.8). Temos que $a = 1, b = 0, c = -9, d = 0$, assim

$$A = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} = \frac{-9}{1} - \frac{0}{3} = -9,$$

$$B = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = \frac{0}{27} - \frac{0 \cdot (-9)}{3} + \frac{0}{1} = 0,$$

$$\Delta_3 = \frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27} = \frac{0}{4} + \frac{(-9)^3}{27} = -27.$$

Então, chegamos à equação auxiliar,

$$y^3 - 9y = 0. \tag{3.1}$$

As soluções em y são da forma $y = u + v$, onde $u = \sqrt[3]{-\dfrac{B}{2} + \sqrt{\Delta_3}}$ e $v = \sqrt[3]{-\dfrac{B}{2} - \sqrt{\Delta_3}}$, mas como u e v são resultados de raízes cúbicas, ou seja, cada um deles admitirá três soluções, logo, a partir das combinações possíveis de u e v poderemos encontrar até 9 soluções distintas para y, mas algumas delas serão chamadas de "soluções estranhas" pois não nos fornecerão soluções corretas para a equação inicial - que por ser de 3° grau, de acordo com o corolário 1.14 apresentará no máximo 3 soluções distintas. Como vimos em (2.11), o produto uv deve ser $u \cdot v = -\dfrac{A}{3}$, o que nos garantirá se as soluções serão ou não as verdadeiras. Sendo assim vamos analisar u e v, e o produto entre eles.

$$u = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} + \sqrt{\Delta_3}} = \sqrt[3]{\frac{0}{2} + 3i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{3i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{3^{\frac{3}{2}}i} = \sqrt{3}\sqrt[3]{i} \tag{3.2}$$

Para determinar as três raízes cúbicas de i, usaremos a 2^a **Fórmula de Moivre** [4], que é utilizada para encontrar as raízes n-ésimas de um número complexo escrito em sua forma polar. Considerando o número complexo $z = a + bi$, e o número complexo w, onde $w^n = z$, então os $w_{1,2,\ldots,n-1}$ são chamados de raízes enésimas de z. A fórmula diz que

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \tag{3.3}$$

onde $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e para determinar o argumento inicial θ, usamos $cos\ \theta = \dfrac{a}{|z|}$ e $sen\ \theta = \dfrac{b}{|z|}$.

Retomando a resolução do exemplo, vamos determinar w_0, w_1 e w_2, que são as raízes cúbicas de i.

$$\begin{aligned} z = i,\ |z| &= \sqrt{1^2} \\ |z| &= 1 \\ cos\ \theta = \frac{0}{1} = 0,&\ \ sen\ \theta = \frac{1}{1} = 1 \\ \text{portanto, } \theta &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[3]{1} \cdot \left(cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right) + i\ sen\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right)\right) \\ &= cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\ sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt[3]{1} \cdot \left(cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right) + i\ sen\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right)\right) \\ &= cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\ sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \sqrt[3]{1} \cdot \left(cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3}\right) + i\ sen\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3}\right)\right) \\ &= cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\ sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ &= 0 + i(-1) = -i, \end{aligned}$$

então, a partir de (3.2), os três valores possíveis para u serão:

$$u_0 = \sqrt{3} \cdot (-i) = -i\sqrt{3} \tag{3.4}$$

$$u_1 = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \frac{3}{2} + \frac{i\,\sqrt{3}}{2} \tag{3.5}$$

$$u_2 = \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = -\frac{3}{2} + \frac{i\,\sqrt{3}}{2} \tag{3.6}$$

A imagem abaixo traz a representação geométrica das três raízes cúbicas de $z = i$ encontradas, como todas as raízes obtidas têm o mesmo módulo, suas imagens pertencem à circunferência de raio igual ao módulo, nesse caso, raio 1, e centro na origem do plano de Argand-Gauss (ou Plano complexo).

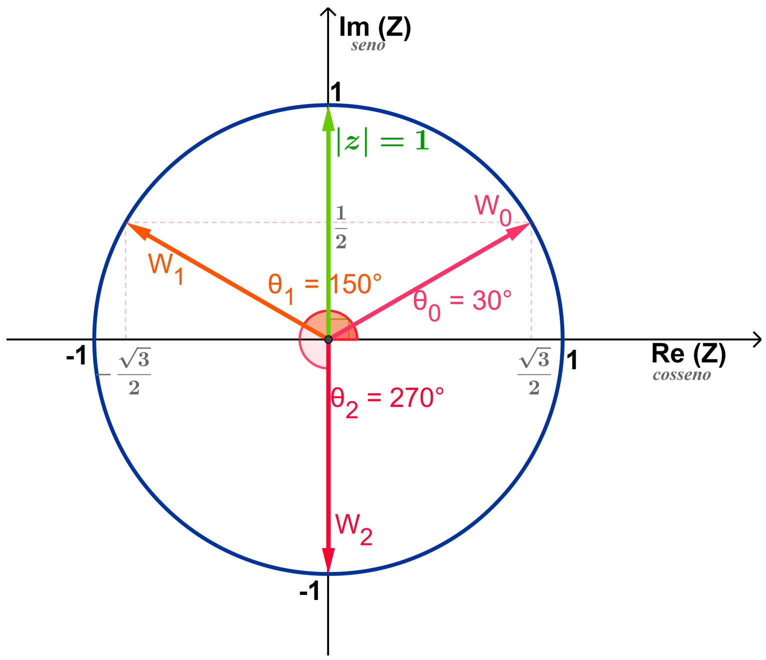

Figura 3.5: *Interpretação geométrica das raízes cúbicas do número complexo $z = i$.*

Já determinamos quem é u, agora vamos analisar v, para em seguida conferirmos os produtos $u \cdot v$.

$$v = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} - \sqrt{\Delta_3}} = \sqrt[3]{\frac{0}{2} - 3i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{-3i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{3^{\frac{3}{2}}(-i)} = \sqrt{3}\,\sqrt[3]{-i}, \tag{3.7}$$

Para determinar as três raízes cúbicas de $-i$, não usaremos a segunda fórmula de Moivre, (3.3), mas utilizaremos uma consequência dos itens (1.4), (1.8) e (1.13), do capítulo inicial. Estamos procurando os valores w que satisfazem $w^3 = -i$, ou seja, queremos resolver a equação

$$w^3 + i = 0.$$

Dos estudo de números complexos sabemos que

$$
\begin{aligned}
i^0 =& 1, \\
i^1 =& i, \\
i^2 =& -1, \\
i^3 =& i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \\
i^4 =& i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1, \\
i^5 =& i^3 \cdot i^2 = (-i)(-1) = i, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Assim, em (3.2) sabemos que uma solução será $w_0 = i$, dessa forma podemos escrever $w^3+i = q(w)\cdot(w-i)$, para determinar esse $q(w)$ usaremos a divisão entre polinômios, $(w^3+i) \div (w-i)$,

$$
\begin{array}{r|l}
w^3 + i & w - i \\
\cline{2-2}
-w^3 + iw^2 & w^2 + iw - 1 \\
\cline{1-1}
iw^2 + i & \\
-iw - w & \\
\cline{1-1}
-w + i & \\
+w - i & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

dessa forma, podemos escrever $w^3+i = (w-i)(w^2+iw-1) = 0$, assim, para determinar as outras duas raízes de valores de w^3+i, basta resolver $w^2+iw-1 = 0$, para isso,

$$\Delta = i^2 - 4(1)(-1) = 3$$

$$w = \frac{-i \pm \sqrt{3}}{2} \quad w_1 = \frac{\sqrt{3}-i}{2} \quad w_2 = \frac{-\sqrt{3}-i}{2};$$

continuando de (3.7), temos

$$
\begin{aligned}
v &= \sqrt{3}\sqrt[3]{-i} \\
v_0 &= i\sqrt{3} && (3.8) \\
v_1 &= \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} && (3.9) \\
v_2 &= \sqrt{3} \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, && (3.10)
\end{aligned}
$$

chegamos aos valores de u e v procurados,

$$\begin{cases} u_0 = -i\sqrt{3} \\ u_1 = \frac{3}{2} + \frac{i\ \sqrt{3}}{2} \\ u_2 = -\frac{3}{2} + \frac{i\ \sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = i\sqrt{3} \\ v_1 = \frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ v_2 = -\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Precisamos que os produtos entre eles seja $uv = -\dfrac{A}{3} = -\dfrac{(-9)}{3} = 3.$

$$\begin{aligned} u_0 \cdot v_0 &= -i\sqrt{3} \cdot i\sqrt{3} \\ &= -i^2 \cdot 3 = 3, \text{ indicando que } y = u_0 + v_0 \ \text{ é uma solução.} \\ u_0 \cdot v_1 &= -i\sqrt{3} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -\frac{3i\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}, \text{ que indica que } y = u_0 + v_1 \ \text{ não é uma solução.} \\ u_0 \cdot v_2 &= -i\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{3i\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}, \text{ indicando que } y = u_0 + v_2 \ \text{ não é uma solução.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 \cdot v_0 &= u_0 \cdot v_2 \neq 3 \text{ o que indica que } y = u_1 + v_0 \ \text{ não é uma solução.} \\ u_1 \cdot v_1 &= \left(\frac{3}{2} + \frac{i\ \sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{9}{4} - \frac{i^2\sqrt{9}}{4}\right), \text{ indicando que } y = u_1 + v_1 \ \text{ é uma solução.} \\ u_1 \cdot v_2 &= \left(\frac{3}{2} + \frac{i\ \sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -\frac{9}{4} - \frac{6i\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4} \\ &= -\frac{3}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}, \text{ assim, } y = u_1 + v_2 \ \text{ não é uma solução.} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_2 \cdot v_0 &= \ u_0 \cdot v_2 \neq 3, \quad \text{logo } y = u_2 + v_0 \text{ não é uma solução.}\\
u_2 \cdot v_1 &= \left(-\frac{3}{2} + \frac{i\ \sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= \left(-\frac{9}{4} + \frac{6i\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}\right)\\
&= -\frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}, \text{ indicando que } y = u_2 + v_1 \ \text{ não é uma solução.}\\
u_2 \cdot v_2 &= \left(-\frac{3}{2} + \frac{i\ \sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= \frac{9}{4} - \frac{3i^2}{4} = 3, \quad \text{indicando que } y = u_2 + v_2 \quad \text{é uma solução.}
\end{aligned}
$$

Portanto as soluções da equação auxiliar $y^3 + 9y = 0$, 3.1, são

$$
\begin{aligned}
y_1 &= u_0 + v_0 = -i\sqrt{3} + i\sqrt{3} = 0\\
y_2 &= u_1 + v_1 = \left(\frac{3}{2} + \frac{i\ \sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{6}{2} = 3\\
y_3 &= u_2 + v_2 = \left(-\frac{3}{2} + \frac{i\ \sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{6}{2} = -3.
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

Esses valores de y encontrados são também as raízes da equação inicial $x^3 - 9x = 0$, pois fizemos a substituição $x = y$, assim as raízes são $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3$.

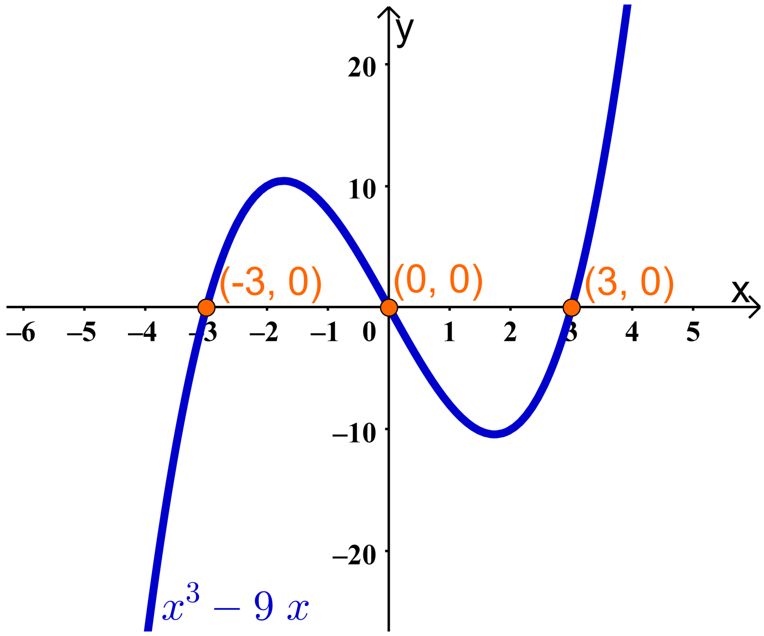

Figura 3.6: *$f(x) = x^3 - 9x$ e os zeros da função.*

No exemplo acima, optamos por fazer a resolução completa utilizando o método encontrado em (2.15) para deixar ao leitor interessado nesse tipo de resolução, um modelo completo e bem explicado.

Para os próximos exemplos optamos por escolher as raízes e encontrar a equação de 3° grau correspondente. Em seguida avaliamos os parâmetros A e B da nova equação auxiliar, (2.9), e o discriminante associado à equação, (2.16), em comparação com suas raízes. Aqui não vamos fazer como no exemplo anterior - desenvolver todo o processo de resolução, pois o que queremos é analisar os invariantes e o discriminante em relação aos tipos de raízes.

Exemplo 3.6. $x^3 - 13x + 12 = 0$

Essa equação foi encontrada a partir de $(x + 4)(x - 1)(x - 3) = 0$, portanto possui 3 raízes reais distintas, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 3$. Exemplo semelhante ao anterior, onde as soluções são reais e distintas. No caso temos, $a = 1,\ b = 0\ c = -13,\ d = 12$, assim,

$$A = \frac{-13}{1} - 0 = -13,$$

$$B = 0 - 0 + \frac{12}{1} = 12$$

$$\Delta_3 = \frac{12^2}{4} + \frac{(-13)^3}{27} = \frac{144}{4} - \frac{2197}{27} = -\frac{1225}{27}$$

podemos escrever $y^3 - 13y + 12 = 0$ para a qual, $\Delta_3 < 0$, que gerará três soluções reais distintas para x, e cuja representação geométrica está logo abaixo.

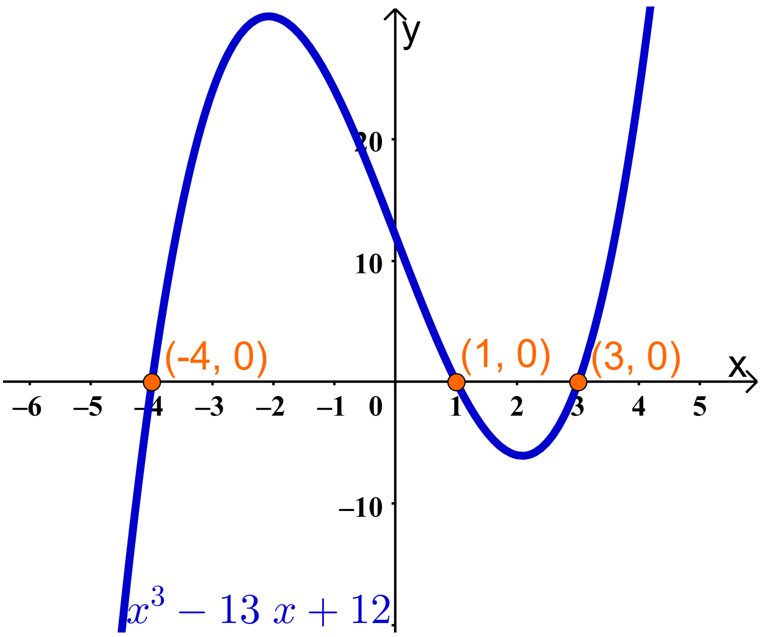

Figura 3.7: $f(x) = x^3 - 13x + 12$

Exemplo 3.7. $x^3 + x^2 - 25x - 25 = 0$

Essa equação foi encontrada a partir de $(x+1)(x+5)(x-5) = 0$, portanto possui 3 raízes reais, sendo duas negativas e a terceira positiva, $x_1 = -5, x_2 = -1$ e $x_3 = 5$. Vamos determinar os valores dos invariantes A e B na equação auxiliar, e seu discriminante.

Temos, $a = 1,\ b = 1,\ c = -25,\ d = -25$, assim,

$$A = \frac{-25}{1} - \frac{(1)^2}{3 \cdot (1)^2} = \frac{-75 - 1}{3} = -\frac{76}{3},$$

$$B = \frac{2 \cdot (1)^3}{27 \cdot (1)^3} - \frac{(1) \cdot (-25)}{3 \cdot (1)^2} + \frac{-25}{1} = \frac{2}{27} + \frac{25}{3} - 25 = -\frac{448}{27}$$

$$\Delta_3 = \frac{(-\frac{448}{27})^2}{4} + \frac{(-\frac{76}{3})^3}{27} = \frac{50176}{27^2} - \frac{438976}{27^2} = -\frac{388800}{729},$$

chegamos à equação auxiliar $y^3 - \dfrac{76}{3}y - \dfrac{448}{27} = 0$, onde $\Delta_3 < 0$, que gera três soluções reais, e cuja representação geométrica está abaixo.

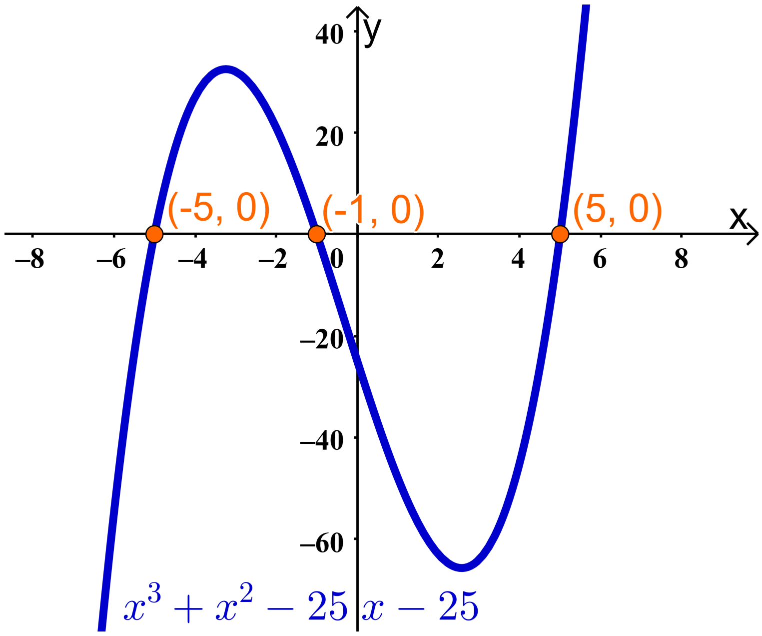

Figura 3.8: $f(x) = x^3 + x^2 - 25x - 25$

Exemplo 3.8. $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

Essa equação foi encontrada a partir de $(x+2)^2(x-1) = 0$, portanto possui 3 raízes reais, sendo uma com multiplicidade 2, e outra simples, $x_1 = -2,\ x_2 = -2$, e $x_3 = 1$. Vamos determinar os valores de A e B na equação auxiliar $y^3 + Ay + B = 0$, e seu discriminante.

Temos, $a = 1,\ b = 3,\ c = 0,\ d = -4$, assim,

$$A = \frac{0}{1} - \frac{(3)^2}{3 \cdot (1)^2} = 0 - \frac{9}{3} = -3,$$

$$B = \frac{2 \cdot (3)^3}{27 \cdot (1)^3} - \frac{(3) \cdot 0}{3 \cdot (1)^2} + \frac{-4}{1} = 2 - 0 - 4 = -2$$

$$\Delta_3 = \frac{(-2)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27} = \frac{4}{4} - \frac{27}{27} = 0,$$

chegamos à equação auxiliar $y^3 - 3y - 2 = 0$, onde $\Delta_3 = 0$, que gera três soluções reais, sendo uma com multiplicidade 2 para x, e cuja representação geométrica está abaixo.

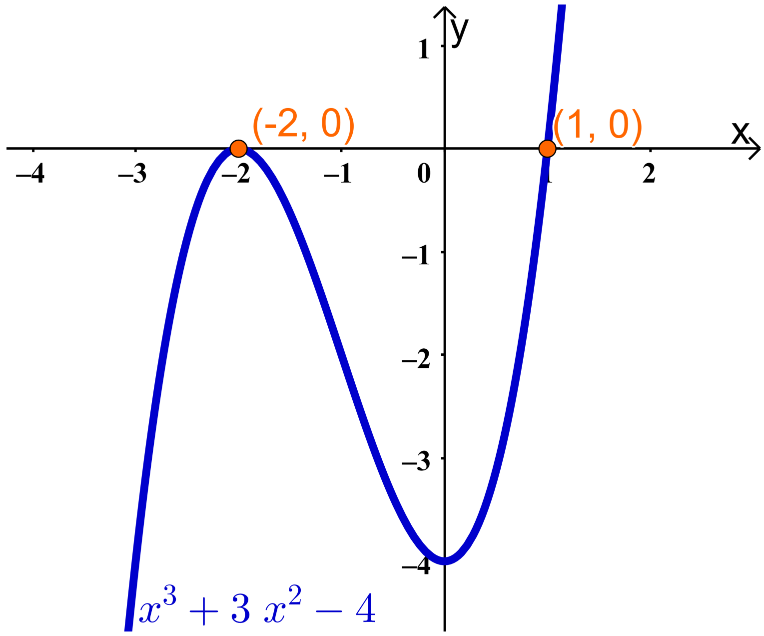

Figura 3.9: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Exemplo 3.9. $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

Equação encontrada a partir de $(x-1)^2(x+1) = 0$, portanto possui 3 raízes reais, sendo uma raiz dupla e uma raiz simples, $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ $ e $x_3 = -1$. Exemplo semelhante ao anterior, sendo $a = 1,\ b = -1,\ c = -1,\ d = 1$, teremos:

$$A = \frac{(-1)}{1} - \frac{(-1)^2}{3 \cdot (1)^2} = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3},$$

$$B = \frac{2 \cdot (-1)^3}{27 \cdot 1} - \frac{(-1) \cdot (-1)}{3 \cdot 1} + \frac{1}{1} = -\frac{2}{27} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{16}{27},$$

$$\Delta_3 = \frac{\left(\frac{16}{27}\right)^2}{4} + \frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^3}{27} = \frac{256}{729} \cdot \frac{1}{4} + \frac{(-64)}{27} \cdot \frac{1}{27} = \frac{64}{729} - \frac{64}{729} = 0$$

Assim a equação auxiliar será $y^3 - \frac{4}{3}y + \frac{16}{27} = 0$ onde $\Delta_3 = 0$, que gera três soluções reais, sendo uma com multiplicidade 2, e cuja representação geométrica segue abaixo.

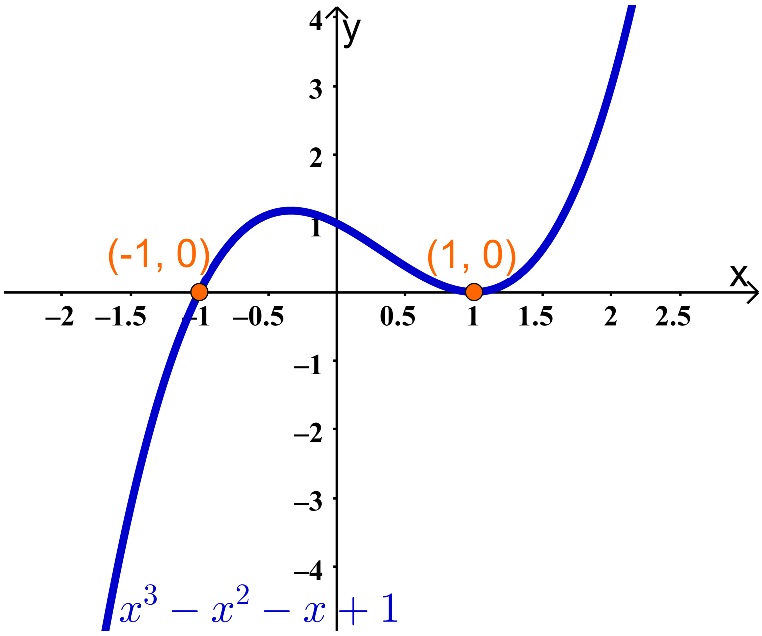

Figura 3.10: $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

Exemplo 3.10. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

Equação gerada a partir de $(x-1)^3 = 0$, que possui 3 raízes reais iguais, ou seja uma única raiz de multiplicidade 3. Na qual $a = 1,\ b = -3,\ c = 3,\ d = -1$, portanto:

$$A = \frac{(3)}{1} - \frac{(-3)^2}{3 \cdot (1)^2} = 3 - \frac{9}{3} = 0,$$

$$B = \frac{2 \cdot (-3)^3}{27 \cdot 1^3} - \frac{(-3) \cdot 3}{3 \cdot 1^2} + \frac{(-1)}{1} = -\frac{2}{1} - \frac{(-9)}{3} - 1 = 0,$$

$$\Delta_3 = \frac{0}{4} + \frac{0}{27} = 0,$$

assim a equação auxiliar será $y^3 = 0$ onde $\Delta_3 = 0$, que gera três soluções $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, de forma que ao retornar à substituição inicial, $x = y - \dfrac{b}{3a}$, teremos $x = -\dfrac{b}{3a}$ que será uma única solução, de multiplicidade 3. Veja abaixo a representação gráfica.

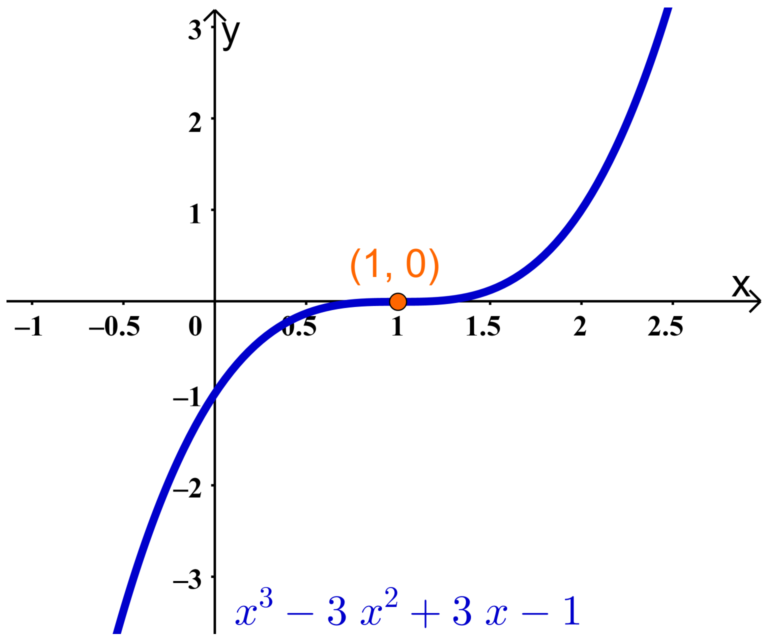

Figura 3.11: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Exemplo 3.11. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$

Exemplo semelhante ao anterior, pois a equação foi encontrada a partir de $(x+2)^3 = 0$, portanto possui 3 raízes reais iguais $x_1 = x_2 = x_3 = -2$, ou seja uma única raiz de multiplicidade 3.

Vamos determinar A, B e Δ_3 considerando $a = 1,\ b = 6,\ c = 12,\ d = 8$:

$$A = \frac{(12)}{1} - \frac{6^2}{3 \cdot 1^2} = 12 - \frac{36}{3} = 0,$$

$$B = \frac{2 \cdot (6)^3}{27 \cdot 1^3} - \frac{(6) \cdot 12}{3 \cdot 1^2} + \frac{8}{1} = \frac{432}{27} - \frac{72}{3} + 8 = 16 - 24 + 8 = 0,$$

$$\Delta_3 = \frac{0}{4} + \frac{0}{27} = 0,$$

assim a equação auxiliar será $y^3 = 0$ onde $\Delta_3 = 0$, que gera três soluções $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, de forma que ao retornar à substituição inicial, $x = \left(y - \dfrac{b}{3a}\right)$, teremos $x = -\dfrac{b}{3a}$, que, para esse exemplo será

$$x = -\frac{6}{3 \cdot 1} = -2$$

Solução única de multiplicidade 3. Veja abaixo a representação gráfica.

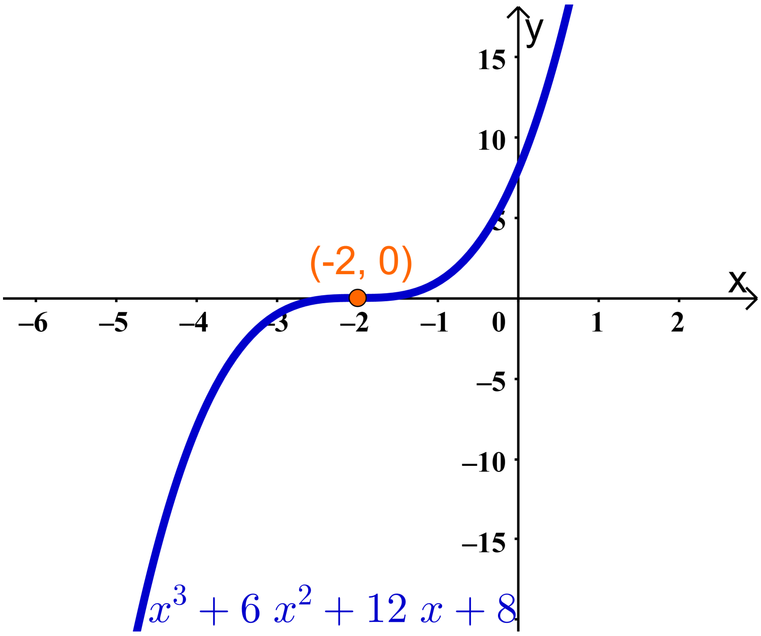

Figura 3.12: $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Exemplo 3.12. $x^3 + 6x^2 + 4x + 24 = 0$

Equação resultante do produto $(x+6)(x+2i)(x-2i) = 0$, portanto possui 1 raiz real negativa e duas raízes complexas conjugadas, $x_1 = -6$, $x_2 = -2i$ e $x_3 = 2i$.

No caso temos, $a = 1,\ b = 6,\ c = 4,\ d = 24$, assim,

$$A = \frac{(4)}{(1)} - \frac{(6)^2}{3 \cdot (1)^2} = 4 - 12 = -8,$$

$$B = \frac{2 \cdot (6)^3}{27 \cdot (1)^3} - \frac{6 \cdot (4)}{3 \cdot (1)^2} + \frac{(24)}{(1)} = \frac{432}{27} - 8 + 24 = 32$$

$$\Delta_3 = \frac{32^2}{4} + \frac{(-8)^3}{27} = 256 - \frac{512}{27} = \frac{6400}{27}.$$

Então, chegamos à equação $y^3 - 8y + 32 = 0$, para a qual $\Delta_3 > 0$, e gera uma solução real e duas complexas para x. A representação da equação inicial está no gráfico abaixo.

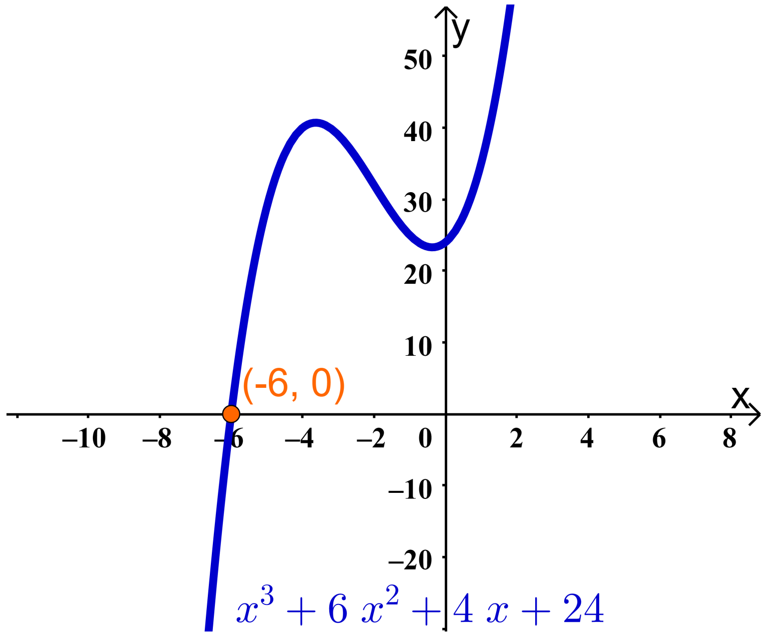

Figura 3.13: $f(x) = x^3 + 6x^2 + 4x + 24$

Exemplo 3.13. $x^3 - 8x^2 + 21x - 20 = 0$

Equação resultante do produto $(x-4)(x-(2+i))(x-(2-i)) = 0$, portanto possui 1 raiz real e duas raízes complexas conjugadas, $x_1 = -3$, $x_2 = -2i$ e $x_3 = 2i$.

No caso temos, $a = 1,\ b = -8,\ c = 21,\ d = -20$, assim,

$$A = \frac{(21)}{(1)} - \frac{(-8)^2}{3 \cdot (1)^2} = \frac{63 - 64}{3} = -\frac{1}{3},$$

$$B = \frac{2 \cdot (-8)^3}{27 \cdot (1)^3} - \frac{(-8) \cdot (21)}{3 \cdot (1)^2} + \frac{(-20)}{(1)} = -\frac{1024}{27} + \frac{168}{3} - 20 = -\frac{52}{27},$$

$$\Delta_3 = \frac{(-\frac{52}{27})^2}{4} + \frac{(-\frac{1}{3})^3}{27} = \frac{676}{27^2} - \frac{1}{27^2} = \frac{675}{729}.$$

Então, chegamos à equação $y^3 - \dfrac{1}{3}y - \dfrac{52}{27} = 0$, para a qual $\Delta_3 > 0$, e gera uma solução real e duas complexas para x. A representação da equação inicial está no gráfico abaixo.

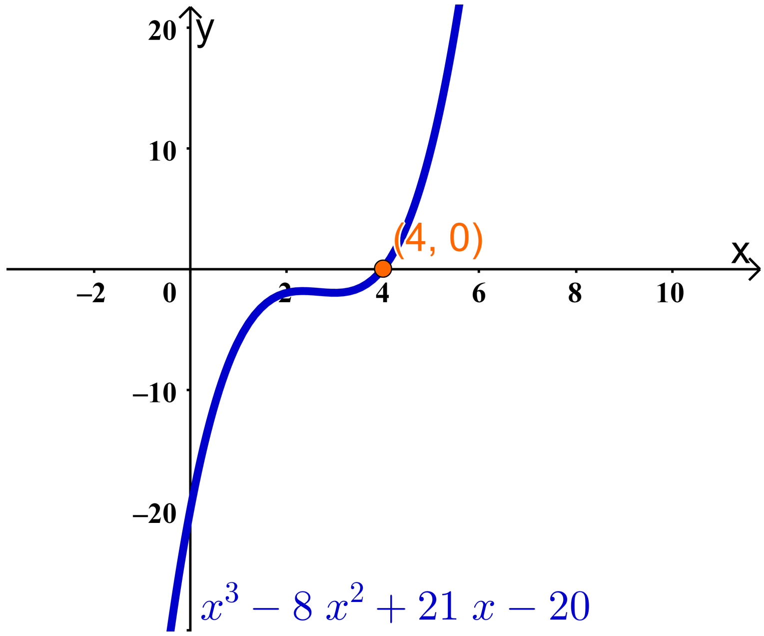

Figura 3.14: $f(x) = x^3 - 8x^2 + 21x - 20$

Exemplo 3.14. $x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = 0$

Equação resultante do produto $(x+3)(x+2i)(x-2i) = 0$, portanto possui 1 raiz real e duas raízes complexas conjugadas, $x_1 = -3$, $x_2 = -2i$ e $x_3 = 2i$.

No caso temos, $a = 1,\ b = 3,\ c = 4,\ d = 12$, assim,

$$A = \frac{(4)}{(1)} - \frac{(3)^2}{3 \cdot (1)^2} = 4 - 3 = 1,$$

$$B = \frac{2 \cdot (3)^3}{27 \cdot (1)^3} - \frac{3 \cdot (4)}{3 \cdot (1)^2} + \frac{(12)}{(1)} = 2 - 4 + 12 = 10$$

$$\Delta_3 = \frac{10^2}{4} + \frac{1^3}{27} = \frac{2700 + 4}{108} = \frac{2704}{108}.$$

Então, chegamos à equação $y^3 + y + 10 = 0$ para a qual $\Delta_3 > 0$, e gera uma solução real e duas complexas para x. A representação da equação inicial está no gráfico abaixo.

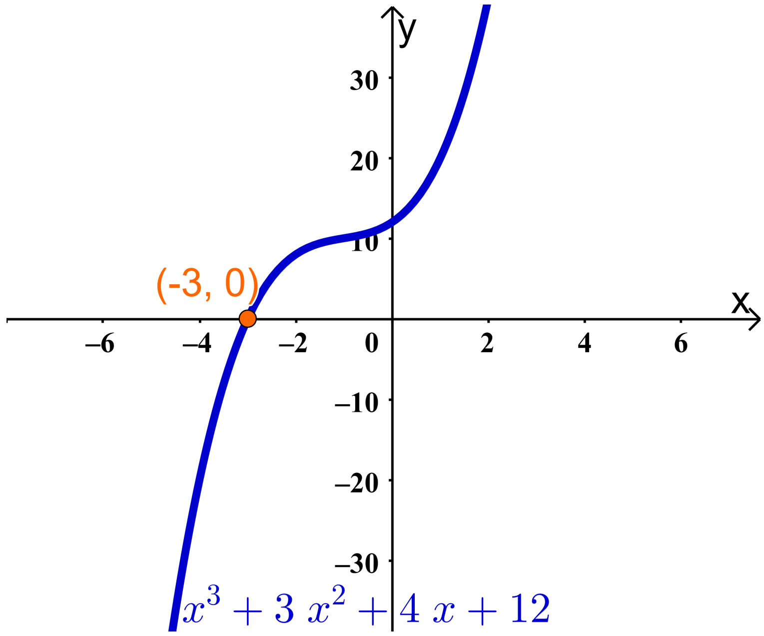

Figura 3.15: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 12$

Exemplo 3.15. $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

Equação resultante do produto $(x - i)(x + i)(x - 1) = 0$, portanto suas raízes serão, $x_1 = i,\ x_2 = -i,$ e $x_3 = 1$, duas complexas conjugadas e uma raiz real positiva.

No caso temos, $a = 1,\ b = -1,\ c = 1,\ d = -1$, assim,

$$A = \frac{1}{1} - \frac{(-1)^2}{3 \cdot 1^2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$B = \frac{2 \cdot (-1)^3}{27 \cdot 1^3} - \frac{1 \cdot (-1)}{3 \cdot 1^2} + (-1) = \frac{-2 + 9 - 27}{27} = -\frac{20}{27},$$

$$\Delta_3 = \frac{\left(-\frac{20}{27}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{27} = \frac{400}{27^2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{27} = \frac{100}{27^2} + \frac{8}{27^2} = \frac{108}{729},$$

a equação auxiliar será $y^3 + \dfrac{2}{3}y - \dfrac{20}{27} = 0$, onde $\Delta_3 > 0$, que gera uma solução real e duas complexas para x. Exemplo semelhante ao anterior.

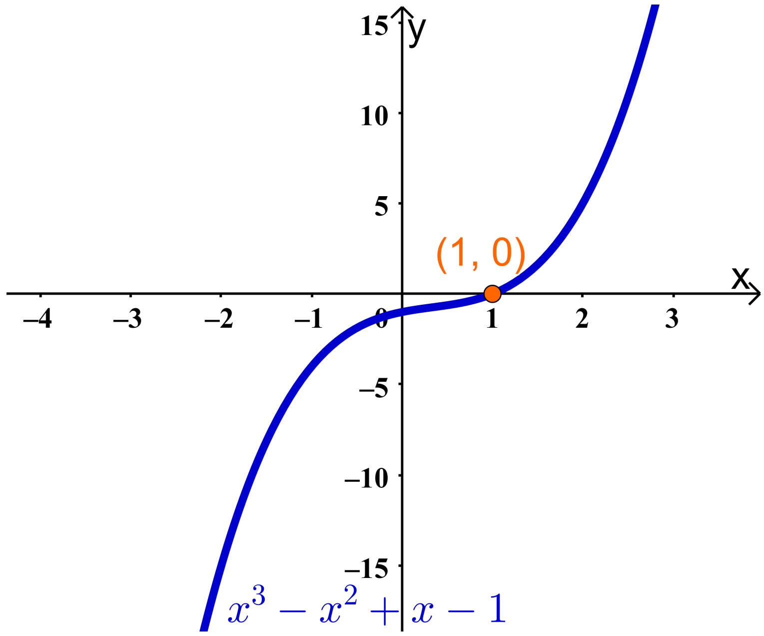

Figura 3.16: $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

Exemplo 3.16. $x^3 - 9x^2 + 52x - 102 = 0$

Equação resultante do produto $(x-3)(x-(3+5i))(x-(3-5i)i) = 0$, portanto as soluções serão um par de raízes complexas e uma raiz real positiva, sendo elas, $x_1 = 3,\ x_2 = 3 + 5i,\ $ e $x_3 = 3 - 5i$.

No caso temos, $a = 1,\ b = -9,\ c = 52,\ d = -102$, assim,

$$A = \frac{52}{1} - \frac{(-9)^2}{3 \cdot 1^2} = 52 - 27 = 25,$$

$$B = \frac{2 \cdot (-9)^3}{27 \cdot 1^3} - \frac{(-9) \cdot 52}{3 \cdot 1^2} + \frac{(-102)}{1} = -54 + 156 - 102 = 0,$$

$$\Delta_3 = \frac{0^2}{4} + \frac{25^3}{27} = \frac{15625}{27},$$

a equação auxiliar será $y^3 + 25y = 0$ e $\Delta_3 > 0$.

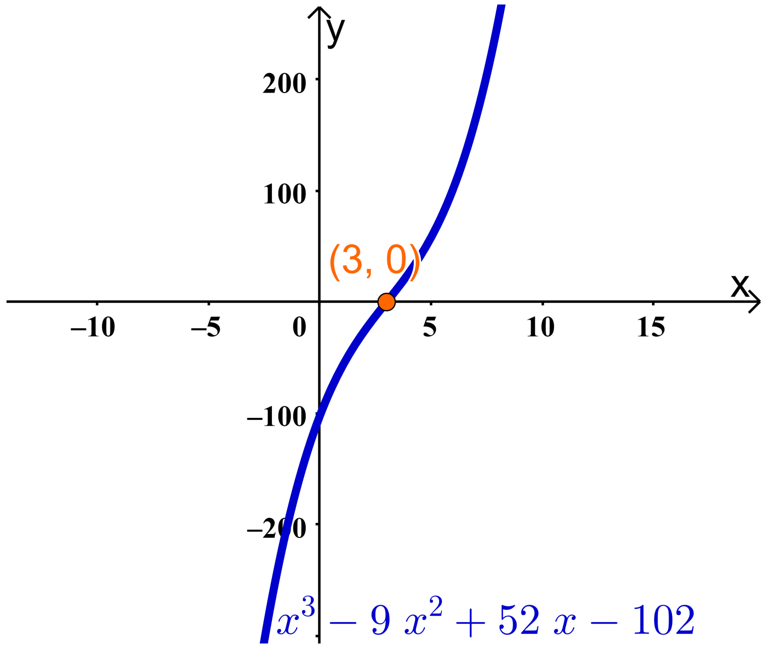

Figura 3.17: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 52x - 102$

Ao analisar cada exemplo resolvido, temos:

Exemplo	A	B	Δ_3	Natureza das Raízes
a) $x^3 - 9x = 0$	< 0	0	< 0	3 Reais Distintas, sendo uma igual a zero.
b) $x^3 - 13x + 12 = 0$	< 0	> 0	< 0	3 Reais Distintas, sendo duas positivas.
c) $x^3 + x^2 - 25x - 25 = 0$	< 0	< 0	< 0	3 Reais Distintas, sendo duas negativas.
d) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$	< 0	< 0	0	1 Real Dupla (negativa) e 1 Real Simples.
e) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$	< 0	> 0	0	1 Real Dupla (positiva) e 1 Real Simples.
f) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$	0	0	0	1 Real Tripla Positiva.
g) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$	0	0	0	1 Real Tripla Negativa.
h) $x^3 + 6x^2 + 4x + 24 = 0$	< 0	> 0	> 0	1 Real Negativa e 2 Complexas.
i) $x^3 - 8x^2 + 21x - 20 = 0$	< 0	< 0	> 0	1 Real Positiva e 2 Complexas.
j) $x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = 0$	> 0	> 0	> 0	1 Real Negativa e 2 Complexas.
k) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$	> 0	< 0	> 0	1 Real Positiva e 2 Complexas.
l) $x^3 - 9x^2 + 52x - 102 = 0$	> 0	0	> 0	1 Real Positiva e 2 Complexas.

Tabela 3.1: *Parâmetros encontrados nos exemplos.*

A curva algébrica em $\mathbb{R}^2$ que representa o discriminante das equações de grau 3, divide o plano em 3 regiões, e em cada uma delas teremos um tipo de raízes para a equação inicial, de acordo com os novos parâmetros A e B, escritos em função dos coeficientes. Veja abaixo no plano (OAB) a curva $\Delta_3 = 0$, e as posições dos pontos (A, B) de cada exemplo trabalhado aqui.

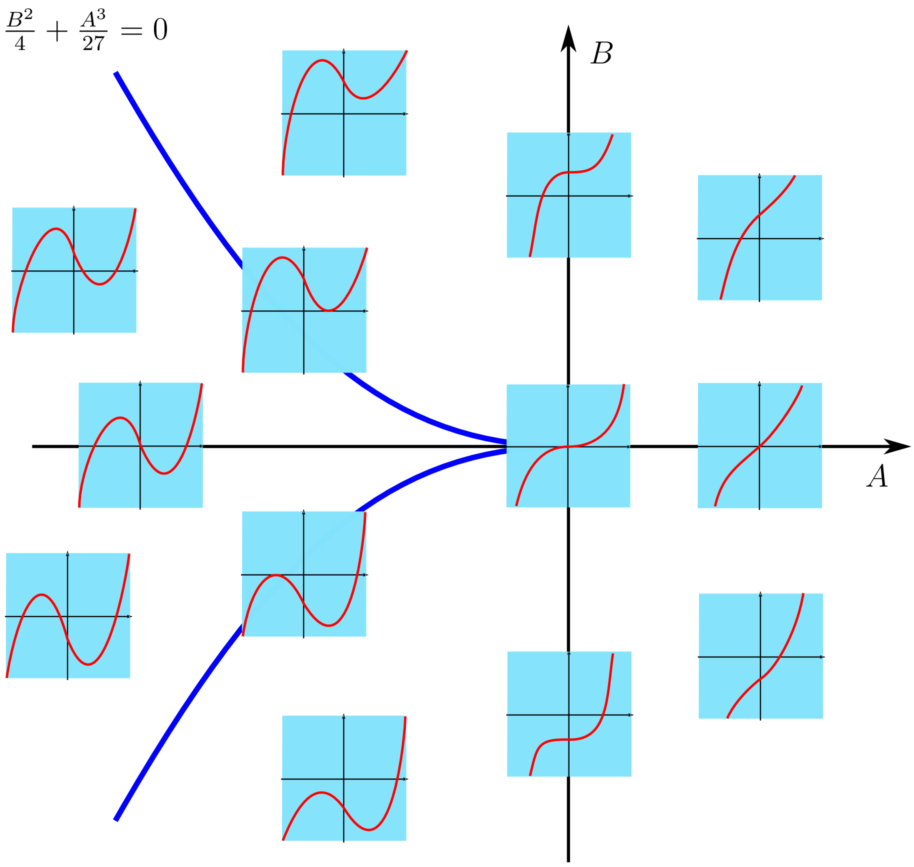

Figura 3.18: *Curva do discriminante de grau 3, e os modelos de gráficos que podem ser gerados por funções de 3° grau onde $a > 0$.*

Optamos por resolver apenas exemplos mônicos, para $a > 0$, para tornar possível a visualização de todos os modelos de gráficos que as equações de 3° grau podem apresentar. Para os casos de $a < 0$ os gráficos resultantes serão idênticos aos apresentados na figura 3.18, porém refletidos em torno do eixo horizontal, x. A imagem abaixo traz os pontos (A, B) de cada exemplo resolvido, mostrando exatamente sua posição em relação à curva $\dfrac{B^2}{4} + \dfrac{A^3}{27} = 0$.

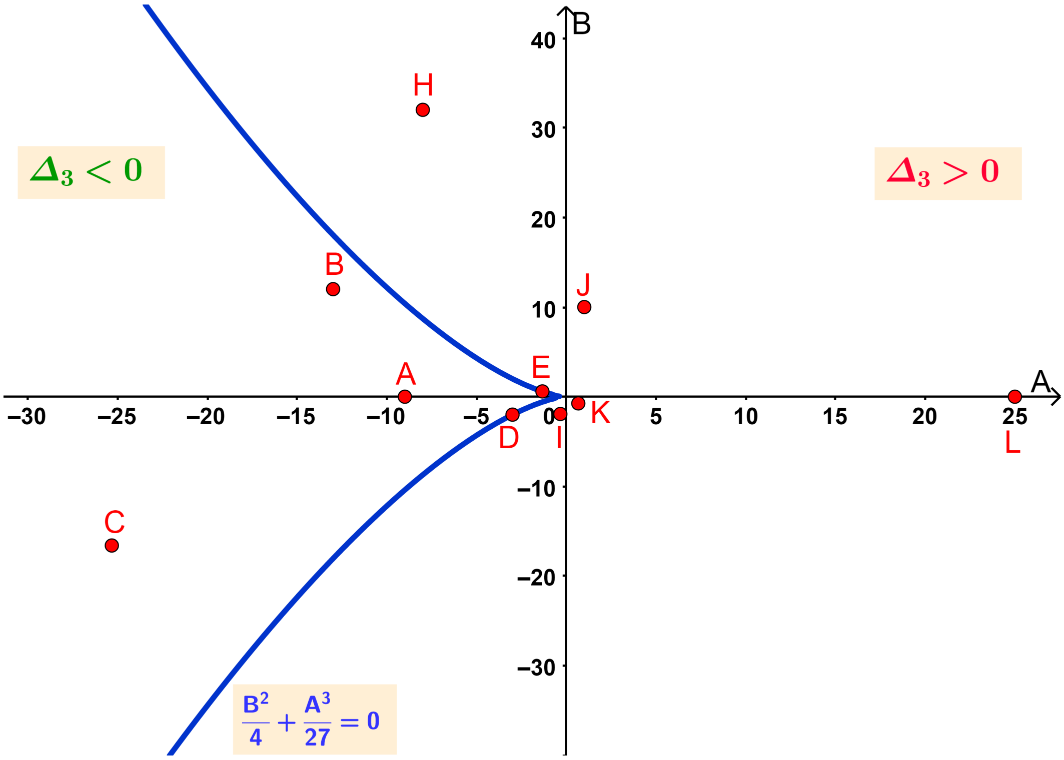

Figura 3.19: *Curva do discriminante e pontos (A, B) dos exemplos resolvidos.*

Sobre a curva $\Delta_3 = 0$ temos os pontos (A, B) das equações que geram raízes com multiplicidade, na parte a esquerda da cúspide temos a região onde os valores de A e B fazem $\Delta_3 < 0$, e nos fornece soluções reais distintas e por fim, temos os valores de A e B que geram $\Delta_3 > 0$, onde estão as equações com soluções complexas. A região que representa as equações com solução única de multiplicidade 3, é apenas o ponto da origem $(0, 0)$, que foi omitido da figura para que a região do plano próxima à origem não ficasse sobrecarregada.

Teorema 3.17. *Seja a equação polinomial de grau 3,*

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

com $a \neq 0$, coeficientes $\in \mathbb{R}$, raízes x_1, x_2 e x_3 e considere Δ_3 seu discriminante. Podemos afirmar que: Se $\Delta_3 < 0$, $p(x)$ tem três raízes reais distintas. Se $\Delta_3 = 0$, então $p(x)$ tem raízes múltiplas. Se $\Delta_3 > 0$, $p(x)$ tem duas raízes complexas e uma raiz real.

Demonstração: Durante o processo de resolução da cúbica algébrica, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, fizemos a substituição $x = y - \dfrac{b}{3a}$ e chegamos à cúbica reduzida auxiliar $y^3 + Ay + B = 0$ [Ver (2.9)], que é da forma estudada em (2.5). Para essa demonstração, vamos considerar que as raízes da equação auxiliar reduzida da cúbica sejam α, β e γ. Sabemos da equação (2.5) que é possível escrever uma nova equação em t, por exemplo, que tenha como raízes funções simétricas das raízes da equação inicial, no caso, vamos escrever uma nova equação em t que tenha como raízes os quadrados das diferenças entre α, β e γ. Para isso, basta substituir $y = \dfrac{3B}{t+A}$ em $y^3 + Ay + B = 0$, como foi apresentado em (2.6) e reorganiza-la em função dos graus de t:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3B}{t+A}\right)^3 + A\left(\frac{3B}{t+A}\right) + B &= 0 \\
\frac{27B^3}{(t+A)^3} + \frac{3AB}{t+A} + B &= 0 \\
\frac{27B^3 + 3AB(t+A)^2 + B(t+A)^3}{(t+A)^3} &= 0 \\
27B^2 + 3A(t+A)^2 + (t+A)^3 &= 0 \\
27B^2 + 3At^2 + 6A^2t + 3A^3 + t^3 + 3At^2 + 3At^2 + A^3 &= 0 \\
t^3 + 6At^2 + 9A^2t + (27B^2 + 4A^3) &= 0, \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

cujas raízes são $(\alpha-\beta)^2$, $(\alpha-\gamma)^2$, $(\beta-\gamma)^2$, e o termo independente $27B^2 + 4A^3$ possui uma relação com o discriminante encontrado no processo de resolução da cúbica, em (2.16), veja:

$$\begin{aligned}
\Delta_3 &= \frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27} \\
\Delta_3 &= \frac{27B^2 + 4A^3}{108} \\
108 \cdot \Delta_3 &= 27B^2 + 4A^3.
\end{aligned}$$

Sabemos das relações apresentadas em (1.18) que o termo independente da equação (3.12) representa o produto entre as raízes, assim,

$$(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2 = 27B^2 + 4A^3 = 108\Delta_3,$$

com esses resultados podemos analisar o discriminante da cúbica a partir da equação (3.12), pois quando essa equação tem raízes negativas, dentre as raízes de (2.9) haverá um par de raízes imaginárias, corolário 1.12, para que o quadrado de suas diferenças resulte em negativo; e quando a equação (3.12) não tem raízes negativas, entendemos que as raízes da cúbica (2.9) serão todas reais. Assumindo que os coeficientes das equações estudadas são todos reais, podemos distinguir três casos:

Caso $\Delta_3 < 0$: É o mesmo que $27B^2 + 4A^3 < 0$, mas nessa expressão $27B^2$ é sempre positivo, logo, para que o discriminante seja negativo é necessário que $A < 0$, o que nos permite analisar os sinais dos coeficientes na equação (3.12).

$$t^3 + \underbrace{6At^2}_{<0} + \underbrace{9A^2t}_{>0} + \underbrace{(27B^2 + 4A^3)}_{<0} = 0, \tag{3.13}$$

Ou seja para $\Delta_3 < 0$ é necessário que $A < 0$, fazendo com que a equação (3.12), tenha seus sinais alternadamente positivos e negativos, o que nos garante pelas Relações de Girard de 1.1, que todas as suas raízes serão positivas, de modo que as raízes de $y^3 + Ay + B = 0$, α, β e γ, sejam todas reais e distintas, pois caso alguma delas tenham multiplicidade, o produto entre o quadrado de suas diferenças seria zero. Assim as raízes da equação inicial, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ também serão reais e distintas.

Caso $\Delta_3 > 0$: Como $27B^2$ é sempre positivo, para que $27B^2 + 4A^3 > 0$, vamos analisar o comportamento de A, que precisará ser $A \geq 0$, de forma que, se $A = 0$, podemos reescrever (3.12) como $t^3 + 27B^2 = 0$, equação de grau ímpar com coeficientes positivos que, pelos teoremas 1.19 e 1.20, gerará 2 raízes complexas e 1 raiz real negativa. Para $A > 0$, os coeficientes da equação (3.12), serão todos positivos, ou seja,

$$t^3 + \underbrace{6At^2}_{>0} + \underbrace{9A^2t}_{>0} + \underbrace{(27B^2 + 4A^3)}_{>0} = 0, \tag{3.14}$$

assim, utilizando o resultado do teorema 1.19 podemos afirmar que a equação não possui raízes positivas, ou seja, todos as raízes $(\alpha - \beta)^2, (\alpha - \gamma)^2$ e $(\beta - \gamma)^2$ são menores que zero. Assim, dentre as raízes de $y^3 + Ay + B = 0$, α, β e γ há um par de raízes complexas e uma raiz real. Como consequência desse resultado, a equação inicial em x terá um par de raízes complexas conjugadas e uma raiz real.

Caso $\Delta_3 = 0$: Para que o discriminante seja nulo é necessário que $(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2(\beta - \gamma)^2 = 0$, ou seja, basta que pelo menos duas das raízes α, β e γ sejam iguais. Se $\Delta_3 = 27B^2 + 4A^3 = 0$, e $A = 0$, então $B = 0$, e se $B = 0$ então $A = 0$, nesse caso, a cúbica auxiliar em y, (2.9) , poderia ser reescrita como $y^3 = 0$, de forma que as soluções $\alpha = \beta = \gamma = 0$, e a equação inicial $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ terá 3 soluções reais iguais, podendo ser chamada ainda de um cubo perfeito. Assim, quando o discriminante é nulo, teremos raízes com multiplicidade. ■

CAPÍTULO 4

Discriminantes escritos em função dos coeficientes

Finalizaremos o trabalho com o desenvolvimento dos discriminantes em função exclusiva dos coeficientes das equações.

O discriminante da equação de grau 2 (1.13), $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, sendo a, b, c os coeficientes e x_1, x_2 as soluções procuradas é $\triangle = b^2 - 4ac$, já determinado em função de seus coeficientes. Indicaremos esse discriminante como $\triangle_2$. Observando que, se a equação for mônica, ou seja, $a = 1$, $\triangle_2 = b^2 - 4c$, apenas em função de b e c.

Considerando a equação de grau 3 (1.17), $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, onde $a \neq 0$, sendo x_1, x_2 e x_3 as soluções procuradas e a, b, c, d os coeficientes, e também a equação auxiliar no processo de resolução, $y^3 + Ay + B = 0$, chegamos ao discriminante $\Delta_3 = \frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}$, onde A e B são $A = \dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{3a^2}, B = \dfrac{2b^3}{27a^3} - \dfrac{bc}{3a^2} + \dfrac{d}{a}$, como visto em (2.8). Vamos desenvolver $\triangle_3$ em função dos coeficientes. Para isso vamos estudar dois casos, primeiramente o caso onde $a = 1$:

Se $a = 1$, temos:

$$\begin{aligned} A = & \ c - \frac{b^2}{3} = \frac{3c - b^2}{3} \\ B = & \ \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d = \frac{2b^3 - 9bc + 27d}{27} \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$
\begin{aligned}
\triangle_3 &= \frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27} \\
\triangle_3 &= \frac{\left(\frac{2b^3-9bc+27d}{27}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{3c-b^2}{3}\right)^3}{27} \\
\triangle_3 &= \frac{4b^6+81b^2c^2+27^2d^2-36b^4c+108b^3d-486bcd}{4\cdot 27^2} + \frac{27c^3-27b^2c^2+9b^4c-b^6}{27\cdot 27} \\
\triangle_3 &= \frac{b^6}{27^2} + \frac{3b^2c^2}{4\cdot 27} + \frac{d^2}{4} - \frac{b^4c}{81} + \frac{b^3d}{27} - \frac{bcd}{6} + \frac{c^3}{27} - \frac{b^2c^2}{27} + \frac{b^4c}{3\cdot 27} - \frac{b^6}{27^2} \\
\triangle_3 &= -\frac{b^2c^2}{27} + \frac{c^3}{27} + \frac{b^3d}{27} + \frac{d^2}{4} - \frac{bcd}{6} \\
\triangle_3 &= \frac{-4b^2c^2+4c^3+4b^3d+27d^2-18bcd}{4\cdot 27} \\
108\cdot\triangle_3 &= -4b^2c^2+4c^3+4b^3d+27d^2-18bcd
\end{aligned}
$$

para $x^3+bx^2+cx+d=0$. Há autores que consideram como discriminante apenas o numerador dessa fração, fica à critério do leitor.

Se $a \neq 1$, teremos:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} = \frac{3ac-b^2}{3a^2} \\
B &= \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^3} + \frac{d}{a} = \frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\triangle_3 &= \frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27} \\
\triangle_3 &= \frac{\left(\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{3ac-b^2}{3a^2}\right)^3}{27} \\
\triangle_3 &= \frac{4b^6+81a^2b^2c^2+27^2a^4d^2-36ab^4c+108a^2b^3d-486a^3bcd}{4\cdot 27^2\cdot a^6} \\
&+ \frac{27a^3c^3-27a^2b^2c^2+9ab^4c-b^6}{27\cdot 27\cdot a^6} \\
\triangle_3 &= \frac{3b^2c^2}{4\cdot 27a^2} + \frac{d^2}{4a^2} + \frac{b^3d}{27a^4} - \frac{bcd}{6a^3} + \frac{c^3}{27a^3} - \frac{4b^2c^2}{4\cdot 27a^4} \\
\triangle_3 &= -\frac{b^2c^2}{4\cdot 27a^4} + \frac{c^3}{27a^3} + \frac{b^3d}{27a^4} + \frac{d^2}{4a^2} - \frac{bcd}{6a^3} \\
\triangle_3 &= \frac{-b^2c^2+4ac^3+4b^3d+27a^2d^2-18abcd}{4\cdot 27a^4} \\
108\cdot a^4\cdot\triangle_3 &= -b^2c^2+4ac^3+4b^3d+27a^2d^2-18abcd
\end{aligned}
$$

para a equação completa, $ax^3+bx^2+cx+d=0$.

Considerações Finais

Ao longo deste trabalho revisitamos alguns conceitos e demonstrações básicas do Cálculo e da Análise, para que o construíssemos bem fundamentado. Foi possível conhecer e compreender diversos métodos para estudar as raízes de uma equação e também maneiras de manipular equações para obter resultados desejados, ou para estuda-las com mais clareza. A construção deste trabalho me permitiu ainda, o aprofundamento nos estudos de números complexos e um melhor uso do aplicativo Geogebra, por onde construímos os gráficos das funções.

Ao iniciar o projeto para esta dissertação, esperávamos chegar aos estudos das equações de 4° grau, resolvendo-as por radicais, construindo a curva do discriminante, estudando alguns exemplos, e por fim apresentando e demonstrando um teorema a respeito das relações entre discriminantes e raízes, assim como o fizemos no Capítulo 3 deste trabalho para as equações de graus 2 e 3, mas essa próxima etapa ficará para um projeto futuro.

Acredito que esta obra serve de apoio a professores e alunos que desejam observar o comportamento das raízes de equações de 3° grau que estejam estudando e os comportamentos gráficos das funções polinomiais que as representam, pois, muitas vezes não buscamos os valores das soluções, mas apenas suas classificações.

Referências Bibliográficas

[1] Coutinho, A. C. **A regra dos sinais de descartes**, 2016.

[2] Fernandez, C. d. S.; Santos, R. A. d. **O teorema fundamental da algebra**. Outubro 2010.

[3] Goncalves, A. **Introdução à Álgebra**. IMPA, $5^{\underline{a}}$ edition, 2015.

[4] Iezzi, Gelson; Dolce, O. D. D. P. R. **Matemática: Ciência e aplicações, vol3, ensino médio.**

[5] Lima, E. L. **Curso de Análise, Vol. I**. IMPA, Projeto Euclides., $11^{\underline{a}}$ edition, 2004.

[6] O'Connor., E. R. J. **Mactutor history of mathematics archive.**

[7] Roque, Tatiana; Carvalho, J. B. P. F. **Tópicos de História da Matemática - Coleção PROFMAT.** 1ª. edition.