Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística

Angelo Guimarães

Existência e Multiplicidade de Soluções de Problemas Elípticos Com Termo Semilinear Côncavo-Convexo

Goiânia
2017

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1 **1. Identificação do material bibliográfico**: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

1
2 **2. Identificação da Tese ou Dissertação**

Nome completo do autor: Angelo Guimarães

Título do trabalho: Existência e Multiplicidade de Soluções de Problemas Elípticos Com Termo Semilinear Côncavo-Convexo.

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Angelo Guimarães
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 06 / 03 / 2017

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

ANGELO GUIMARÃES

Existência e Multiplicidade de Soluções de Problemas Elípticos Com Termo Semilinear Côncavo-Convexo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Jose Valdo Abreu Gonçalves

Goiânia
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Guimarães, Angelo
Existência e Multiplicidade de Soluções de Problemas Elípticos Com Termo Semilinear Côncavo-Convexo [manuscrito] / Angelo Guimarães. - 2017.
67 f.

Orientador: Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2017.
Bibliografia. Apêndice.

1. problemas elipticos quasilineares. 2. termo semilinear concavo convexo. 3. expoente crítico de Sobolev. 4. mutiplicidade. 5. métodos variacionais. I. Abreu Gonçalves, José Valdo, orient. II. Título.

CDU 51

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

ATA DA REUNIÃO DA BANCA EXAMINADORA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE ANGELO GUIMARÃES – Às 14:00 horas do primeiro dia do mês de março do ano de dois mil e dezessete (01/03/2017), reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. José Valdo Abreu Gonçalves - Orientador, Prof. Edcarlos Domingos da Silva e Prof. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Auditório do Instituto de Matemática e Estatística, procederem a avaliação da defesa de dissertação intitulada: **"Existência e Multiplicidade de Soluções de Problemas Elípticos Com Termo Semilinear Côncavo-Convexo"**, em nível de Mestrado, área de concentração em Análise, de autoria de Angelo Guimarães, discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. José Valdo Abreu Gonçalves, que fez a apresentação formal dos membros da Banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor da dissertação que, em 45 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da Banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1403 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta o Programa de Pós-Graduação em Matemática e procedidas as correções recomendadas, a dissertação foi **APROVADA** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração em Análise pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do PPGM da versão definitiva da dissertação, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 16:00 horas a presidência da mesa encerrou esta sessão de defesa de dissertação e para constar eu, Ulisses José Gabry, secretário do PPGM, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, será assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

José Valdo Abreu G.
Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves
Presidente - IME/UFG

Edcarlos D. da Silva
Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva
Membro – IME/UFG

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo
Membro – DM/UnB

Angelo Guimarães

Bacharel em Matemática pela Universidade Federal de Goiás - UFG.

Aos meus pais

Agradecimentos

Ao professor Dr. José Valdo pela orientação e suporte.
A professora Shirlei Serkonek pelo incentivo.
Aos professores Abiel Costa, Kaye Oliveira, Marcos Leandro, Edcarlos Domingos e Giovany de Jesus, sempre dispostos a ajudar.
Aos meus colegas Lucas Brito, Lucas Cunha, Steffânio Moreno, Heric Marques, Ilton Menezes, Fábio Sodré e Leonardo Pacheco pelo apoio e companherismo.
Aos meus pais e minha irmã pelo apoio emocional e financeiro.
A minha namorada Nadine de Paula pela paciência e carinho.
Aos meus amigos e familiares que fizeram parte desta trajetório rumo a obtenção do título de mestre.
Ao PICME pelas oportunidades a mim oferecidas e a CAPES pelo apoio financeiro.

"A Matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza."

Bertrand Russel,

.

Resumo

Guimarães, Angelo . **Existência e Multiplicidade de Soluções de Problemas Elípticos Com Termo Semilinear Côncavo-Convexo**. Goiânia, 2017. 67p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho estudaremos existência e multiplicidade de soluções fracas do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \sigma |u|^{p^*-2}u + \lambda |u|^{q-2}u + f \ em \ \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{0-1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um dominio limitado, $\sigma \geqslant 0,\ \lambda > 0,\ 1 < p < N$, $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $1 < q < p^*,\ f \in L^{p'}(\Omega),\ \ p^* = \frac{pN}{N-p}$ é o expoente crítico de Sobolev e $p' = \frac{p}{p-1}$, é o conjugado de Lebesgue de p. Ao tomarmos $f \equiv 0$ e $\sigma = 1$ temos um problema homogêneo com expoente crítico de Sobolev em que utilizamos o Teorema do Passo da Montanha para encontrar existência de uma solução quando $p < q < p^*$. Utilizamos o gênero de Krasnoselskii para encontrar infinitas soluções quando $1 < q < p$. Quando $f \not\equiv 0$ e $\sigma = 0$ temos um problema do tipo não homogêneo que provamos possuir infinitas soluções utilizando um método desenvolvido por P. Rabinowitz.

Palavras–chave

problemas elipticos quasilineares, termo semilinear concavo-convexo, expoente crítico de Sobolev, mutiplicidade, métodos variacionais.

Abstract

Guimarães, Angelo . **Existence and Multiplicity of Solutions of Eliptic Problems with Semilinear Concave Convex Term**. Goiânia, 2017. 67p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work we study existence and multiplicity of weak solutions for the problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \sigma|u|^{p^*-2}u + \lambda|u|^{q-2}u + f \ in \ \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{0-2}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain $\sigma \geqslant 0, \ \lambda > 0, \ 1 < p < N$, $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $1 < q < p^*, \ f \in L^{p'}(\Omega), \ p^* = \frac{pN}{N-p}$ is the critical Sobolev exponent and $p' = \frac{p}{p-1}$, is the Lebesgue conjugate of p. If we take $f \equiv 0$ and $\sigma = 1$ we have a problem homogeneous with critical Sobolev exponent in which we use the Mountain Pass Theorem to find existence of a solution when $p < q < p^*$, and when $1 < q < p$ we use the genus of Krasnoselskii finding infinitely many solutions. If $f \not\equiv 0$ and $\sigma = 0$ we have a non homogeneous problem that we prove to have infinitely many solutions, using a method developed by P. Rabinowitz.

Keywords

quasilinear eliptic problems, concave-convex semilinear term, Sobolev critical expoent, multiplicity, variational methods.

Sumário

CAPÍTULO 1

Introdução

Neste trabalho, estudamos existencia e multiplicidade de soluções fracas do problema côncavo-convexo envolvendo o operador p-Laplaciano

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \sigma |u|^{p^*-2}u + \lambda |u|^{q-2}u + f \ em\ \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1-1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um dominio limitado,

$$\sigma \geqslant 0,\ \lambda > 0,\ 1 < p < N,$$

$$\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u),$$

$$1 < q < p^*,\ f \in L^{p'}(\Omega),$$

onde $p^* = \frac{pN}{N-p}$ é o expoente crítico de Sobolev e $p' = \frac{p}{p-1}$, é o conjugado de Lebesgue de p.
Utilizaremos como técnica principal, métodos variacionais aplicados ao funcional energia

$$F(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \frac{\sigma}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*} dx - \int_\Omega fu\, dx,\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{1-2}$$

No capítulo 5, estudaremos o caso em que $f \equiv 0$ (caso homogêneo) e $\sigma = 1$, de modo que (1-1) se reescreve como

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u + \lambda |u|^{q-2}u \ em\ \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1-3}$$

Assim o funcional (1-2) se torna

$$F(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*} dx,\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{1-4}$$

Apresentamos a seguir os resultados principais do capítulo 5 que são devidos a [13].

Teorema 1.1 *Suponha $p < q < p^*$ e $f \equiv 0$. Então existe $\lambda_0 > 0$ tal que para cada $\lambda > \lambda_0$ o problema (1-3) tem uma solução não trivial u em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

O teorema abaixo, diz que ao tomarmos um menor intervalo para q conseguimos ampliar o intervalo ao qual λ pertence.

Teorema 1.2 *Suponha $\max\{p, p^* - p/(p-1)\} < q < p^*$. Então para cada $\lambda > 0$ existe uma solução não trivial para o problema (1-3).*

As demonstrações dos Teoremas 1.1 e 1.2 serão feitas no Capítulo 5, e são baseadas no Teorema do Passo da Montanha. Para contornar dificuldades técnicas devido a presença do expoente crítico de Sobolev no problema (1-3) utilizamos o método de Concentração-Compacidade devido a [18]. Referimos o leitor a [7, 9] onde também são utilizadas técnicas variacionais.

No capitulo 6 provaremos que o problema (1-3) possui infinitas soluções quando $1 < q < p$.

Teorema 1.3 *Suponha $1 < q < p$. Então existe $\lambda_1 > 0$ tal que, para $0 < \lambda < \lambda_1$, existem infinitas soluções o problema (1-3).*

A demonstração do Teorema 1.3 utiliza o gênero de Kranoselskii. Veja o Capítulo 3 para definição e propriedades.
No Capítulo 7 fazemos $\sigma = 0$ de modo que (1-1) se reescreve como

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^q + f \ em\ \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1-5}$$

onde Ω é um retângulo do $\mathbb{R}^N$. Neste caso o funcional energia se escreve como

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \int_\Omega fu\, dx \tag{1-6}$$

Teorema 1.4 *Suponha $\frac{q}{q-1} < \frac{pq}{N(q-p)} - 1$. Então para cada $\lambda > 0$, (1-5) tem infinitas soluções, que correspondem a uma sequência de valores críticos do funcional (1-6). A sequência tende ao infinito.*

Na demonstração do teorema 1.4 não é possível aplicar o genero de Krasnoselskii, pois o funcional I não é par. Entretanto, foi possível obter um número infinito de soluções fazendo o uso de uma generalização de um método desenvolvido por P. Rabinowitz para o caso $p = 2$ (ver [13, 19, 20]).
No capítulo 2 introduzimos uma breve revisão sobre medidas de Radon e apresentamos

resultados sobre Concentração-Compacidade com suas respectivas demonstrações.
No capítulo 3 apresentamos alguns resultados sobre o gênero de Krasnoselskii ver [8, 25].
No apêndice A colecionamos várias propriedadades do p-Laplaciano, tais como princípios de comparação e de máximo.
No apêndice B relembramos resultados de regularidade de pertubações semilineares do p-Laplaciano.
No apêndice C apresentamos alguns resultados sobre medida de Borel e sua relação com medida de Radon, via Teorema da Representação de Riesz.

CAPÍTULO 2

Medidas de Radon *Concentração-Compacidade*

Neste capítulo faremos uma breve revisão sobre medidas de Radon e apresentaremos alguns resultados envolvendo Concentração-Compacidade. Para um maior complemento veja o Apêndice C. Sugerimos também [21, 22, 25].

Definição 2.1 *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Definimos*

(i) $K(\Omega) := \{u \in C(\Omega);\ supp\ u \text{ é um subconjunto compacto de } \Omega\}$

(ii) $BC(\Omega) := \{u \in C(\Omega); |u|_\infty := \sup_{x\in\Omega} |u(x)| < \infty\}$

(iii) $C_0(\Omega) := \overline{K(\Omega)}^{|\cdot|_\infty}$

Definição 2.2 *Uma medida de Radon em Ω é um funcional linear contínuo em $C_0(\Omega)$. A norma de uma medida de Radon μ é definida por*

$$\|\mu\| := \sup_{\substack{u\in C_0(\Omega)\\ |u|_\infty=1}} |\langle \mu, u\rangle| \tag{2-1}$$

Denotamos por $\mathscr{M}(\Omega)$ o espaço das medidas de Radon definidas em Ω. Dizemos que uma sequência (μ_n) converge fraco para uma medida μ em $\mathscr{M}(\Omega)$, e escrevemos

$$\mu_n \rightharpoonup \mu \tag{2-2}$$

se

$$\langle \mu_n, u\rangle \to \langle \mu, u\rangle,\ u \in C_0(\Omega). \tag{2-3}$$

Uma sequencia $\{\mu_n\} \subset \mathscr{M}(\Omega)$ é dita limitada se dado $f \in C_0(\Omega)$, $\langle \mu_n, f\rangle < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Valem as seguintes propriedades das medidas de Radon.

Proposição 2.3 *Seja $(\mu_n) \subset \mathscr{M}(\Omega)$ uma sequência. Se $\mu_n \rightharpoonup \mu$ em $\mathscr{M}(\Omega)$ então (μ_n) é limitada e $\|\mu\| \leqslant \liminf \|\mu_n\|$.*

Lema 1 (Compacidade de Medidas) *Seja $(\mu_n) \subset \mathscr{M}(\Omega)$, uma sequência limitada. Então existe uma subsequência (μ_{nj}) de (μ_n) e $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ tal que $\mu_{nj} \rightharpoonup \mu$ em $\mathscr{M}(\Omega)$.*

Demonstração do Lema 1:
Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $\Omega_n = \{x \in \Omega;\ d(x, \partial\Omega) \geqslant 1/n\}$ e faça $K_n = \overline{B_n(0)} \bigcap \Omega_n$. Então,

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots \subset \Omega,$$

Agora dado um subconjunto $K \subset \Omega$ defina

$$C_{0,K}(\Omega) := \{u \in C(\Omega);\ supp\ u \subset K\} \tag{2-4}$$

Então temos

$$C_{0,K_1}(\Omega) \subset C_{0,K_2}(\Omega) \subset \cdots \subset C_{0,K_n}(\Omega) \subset \cdots \subset C_0(\Omega)$$

Temos que $|\mu_n(f)| \leqslant C_f,\ \forall f \in C_{0,K_1}(\Omega)$. Como $C_{0,K_1}(\Omega)$ é um espaço de Banach, segue do princípio da limitação uniforme que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mu_n\|_{(C_{0,K_1}(\Omega))^*} < \infty$.
Deste modo, pelo teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, existe uma subsequencia de (μ_n), digamos (μ_n^1) e $\mu^1 \in (C_{0,K_1}(\Omega))^*$ tal que $\mu_n^1 \rightharpoonup \mu^1$. A sequencia (μ_n^1) é limitada em $C_{0,K_2}(X)$ e novamente uzando o princípio da limitação uniforme concluimos que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mu_n^1\|_{(C_{0,K_2}(\Omega))^*} < \infty \tag{2-5}$$

E novamente pelo temorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, existe uma subsequencia de (μ_n^1), digamos (μ_n^2) e $\mu^2 \in (C_{0,K_2}(\Omega))^*$ tal que, $\mu_n^2 \rightharpoonup \mu^2$. Observe que dada $f \in C_{0,K_1}(\Omega) \subset C_{0,K_2}(\Omega)$, então $\langle \mu_n^2, f\rangle \rightharpoonup \langle \mu^1, f\rangle$ pois $f \in C_{0,K_1}(\Omega)$ e $\mu_n^2 \rightharpoonup \mu^1$ em $(C_{0,K_2}(\Omega))^*$, portanto $\langle \mu^2, f\rangle = \langle \mu^1, f\rangle \forall f \in C_{0,K_1}(\Omega)$.
Prosseguindo com uma idéia similar encontramos para cada $j \in \mathbb{N}$, uma subsequência (μ_n^j) de (μ_n^{j-1}) e um funcional $\mu^j \in (C_{0,k_j}(\Omega))^*$ tal que $\mu_n^j \rightharpoonup \mu^j$ com $\mu^j \equiv \mu^i$ em $C_{0,K_i}(\Omega)$ para cada $i \leqslant j$.
Defina agora o funcional $\mu : C_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por $\langle \mu, f\rangle = \langle \mu^l, f\rangle$ onde $l \in \mathbb{N}$ é o menor indicie tal que $supt(f) \subset K_l$.
Afirmamos que $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$.
De fato, sejam $f_1, f_2 \in C_0(\Omega)$ e K_{l_1}, K_{l_2} compactos com $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ os menores indices tais que $supp(f_1) \in K_{l_1}$, $supp(f_2) \in K_{l_2}$. Seja ainda $K_{l_{1,2}}$ o compacto tal que $l_{1,2} \in \mathbb{N}$ é o menor

indice com $supt(f_1+f_2) \subset K_{l_{1,2}}$. Assim

$$\begin{aligned}\langle \mu, f_1+f_2\rangle &= \langle \mu^{l_{1,2}}, f_1+f_2\rangle\\ &= \langle \mu^{l_{1,2}}, f_1\rangle + \langle \mu^{l_{1,2}}, f_2\rangle\\ &= \langle \mu^{l_1}, f_1\rangle + \langle \mu^{l_2}, f_2\rangle\\ &= \langle \mu, f_1\rangle + \langle \mu, f_2\rangle\end{aligned}$$

e também

$$\langle \mu, af\rangle = a\langle \mu, f\rangle,\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Ou seja μ é linear.

Seja agora $K \subset \Omega$ um subconjunto compacto qualquer. Temos então que existe um menor indice l, tal que $K \subseteq K_l$. Assim $C_{0,K}(\Omega) \subseteq C_{0,K_l}(\Omega)$ e portanto $(C_{0,K_l}(\Omega))^* \subseteq (C_{0,K}(\Omega))^*$. Como em $C_{0,K_l}(\Omega)$ temos $\mu = \mu^l$ *e* $\mu^l \in (C_{0,K_l}(\Omega))^*$, concluímos que $\mu \in (C_{0,K}(\Omega))^*$. Assim $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$. Considere a sequência diagonal (μ_k^k), então $\mu_k^k \rightharpoonup \mu$.

De fato seja $f \in C_0(\Omega)$ e K_l compacto onde $l \in \mathbb{N}$ é o menor indice tal que $f \in C_{0,K_l}(\Omega)$. Assim se $n \geqslant l$ tem-se que (μ_n^n) é subsequencia de (μ_n^l) e portanto $\langle \mu_k^k, f\rangle \rightharpoonup \langle \mu^l, f\rangle = \langle \mu, f\rangle$, isto é $\mu_k^k \rightharpoonup \mu$ em $\mathscr{M}(\Omega)$. □

O resultado abaixo é um dos Teoremas de Concentração-Compacidade devidos a Lions [18].

Lema 2 *Sejam, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado, $(u_n) \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ uma sequência que converge fraco para u em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Suponha que*

$$|\nabla u_n|^p \rightharpoonup \mu \text{ em } \mathscr{M}(\Omega) \tag{2-6}$$

$$|u_n|^{p^*} \rightharpoonup \nu \text{ em } \mathscr{M}(\Omega). \tag{2-7}$$

Então,

i) existe um conjunto de indices contável J, pontos distintos $\{x_j\}_{j\in J} \subset \Omega$ e valores não negativos $\{\mu_j, \nu_j\}$ tais que

$$\nu = |u|^{p^*} + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j} \tag{2-8}$$

$$\mu \geqslant |\nabla u|^p + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j}, \tag{2-9}$$

ii) mais ainda, $\nu_j \leqslant C_p^{p^*} \mu_j^{p^*/p}$, $(j \in J)$,

iii) se $u \equiv 0$ e $\nu(\Omega)^{1/p^*} \geqslant C_p \cdot \mu(\Omega)^{1/p}$, então J se reduz a um único ponto com $\nu = \gamma\delta_{x_0} = C_p^{p^*}(\mu)^{p^*/p}$, para algum $x_0 \in \Omega$ e algum $\gamma > 0$.

Para demonstração do Teorema anterior, precisamos do seguinte resultado.

Lema 3 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, ν e μ duas medidas de Radon não negativas e limitadas em $\overline{\Omega}$ satisfazendo para alguma constante $\mathscr{C} \geqslant 0$*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^q d\nu\right)^{1/q} \leqslant \mathscr{C}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p d\mu\right)^{1/p}, \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{2-10}$$

Onde $1 \leqslant p < r \leqslant +\infty$. Então existem um conjunto de indices contável J, familias $(x_j)_{j\in J}$ de pontos distintos de Ω, $(v_j)_{j\in J} \in (0,\infty)$ tais que

$$\nu = \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}, \ \ \mu \geqslant \mathscr{C}^{-p} \sum_{j\in J} \nu_j^{p/q} \delta_{x_j} = \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j} \tag{2-11}$$

então em particular, $\sum_{j\in J} \nu_j < \infty$. Adicionalmente, se vale

$$\nu(\Omega)^{1/q} \geqslant \mathscr{C} \cdot \mu(\Omega)^{1/p} \tag{2-12}$$

J se reduz a um único ponto e $\nu = \gamma\delta_{x_0} = \mathscr{C}^q \mu^{q/p}$, para algum $x_0 \in \Omega$ e algum $\gamma > 0$.

***Demonstração do Lema 3*:**
Pela desigualdade reversa de Hölder (2-11), a medida ν é absolutamente continua com respeito a μ. Como consequência existe $f \in L^1(\Omega)$, $f \geqslant 0$, tal que $\nu = f\mu$. Ainda em (2-11), utilizamos um argumento de densidade do espaço das funções C_0^∞ no espaço das funções continuas para obter

$$\nu(A) \leqslant \mathscr{C}^q (\mu(A))^{q/p}, \tag{2-13}$$

para todo conjunto boreliano $A \subset \Omega$. Em particular, $f \in L^\infty(\Omega)$.
Por outro lado, a decomposição de Lebesgue de μ com respeito a ν nos dá (ver [3])

$$\mu = g\nu + \sigma, \ \text{onde } g \in L^1(d\nu), \ g \geqslant 0 \tag{2-14}$$

e σ é uma medida positiva e limitada, singular com respeito a ν, ou seja, se K é o suporte de σ, então $\nu(K) = 0$.
Agora considere (2-11) aplicada a função teste

$$\varphi = g^{1/(q-p)} \chi_{\{g \leqslant n\}} \psi \tag{2-15}$$

nós obtemos

$$\left(\int_\Omega |\varphi|^r d\nu\right)^{1/r} = \left(\int_\Omega g^{r/(r-p)}|\psi|^r \chi_{\{g\leqslant n\}} d\nu\right)^{1/r} \leqslant \quad (2\text{-}16)$$

$$\leqslant \mathscr{C}\left(\int_\Omega g^{1+p/(r-p)}|\psi|^p \chi_{\{g\leqslant n\}} d\nu\right)^{1/p} \leqslant \mathscr{C}\left(\int_\Omega g^{r/(r-p)}|\psi|^p \chi_{\{g\leqslant n\}} d\nu\right)^{1/p} \quad (2\text{-}17)$$

Então chamando de $d\nu_n = g^{r/r-p}\chi_{\{g\leqslant n\}} d\nu$, a seguinte desigualdade de Hölder reversa vale

$$\left(\int_\Omega |\psi|^r d\nu_n\right)^{1/r} \leqslant \mathscr{C}\left(\int_\Omega |\psi|^p d\nu_n\right)^{1/p}, \quad (2\text{-}18)$$

e em particular, para cada boreliano $A \subset \Omega$ temos

$$(\nu_n(A))^{1/r} \leqslant \mathscr{C}\,(\nu_n(A))^{1/p}. \quad (2\text{-}19)$$

Tomando em conta que $p < r$ então ou $\nu_n(A) = 0$ ou

$$\nu_n(A) \geqslant \mathscr{C}^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} = \delta,\ \delta > 0 \quad (2\text{-}20)$$

Como consequência, dado um ponto $x \in \Omega$, então ou $\nu_n(x) = 0$, ou $\nu_n(x) \geqslant \delta$ e isso significa que ν_n é uma combinação linear de massas de Dirac, que necessáriamente deve ser finita pois ν_n é limitada. Tomando o limite de $n \to \infty$ nós concluimos que

$$\nu = \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}. \quad (2\text{-}21)$$

Mais ainda a desigualdade (2-11) aplicada para cada x_j nos dá,

$$\mu \geqslant \mathscr{C}^{-p}\sum_{j\in J} \nu_j^{\frac{p}{r}} \delta_{x_j} = \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j}. \quad (2\text{-}22)$$

Agora suponha que vale a desigualdade (2-12), então

$$\nu(\Omega)^{1/q} = \mathscr{C}\mu(\Omega)^{1/p},$$

$$\nu(\Omega) = \sum_{j\in J}\nu_j \leqslant \sum_{j\in J}\mathscr{C}^q \mu_j^{q/p} \leqslant \mathscr{C}^q\left(\sum_{j\in J}\mu_j\right)^{q/p} \leqslant \mathscr{C}^q \mu(\Omega)^{q/p} \quad (2\text{-}23)$$

$$\textit{implicando que } \sum_{j\in J}\nu_j = \sum_{j\in J}\mathscr{C}^q\mu_j^{q/p} \textit{ e } \mu(\Omega) = \sum_{j\in J}\mu_j$$

Suponha que $\nu_{j_0} < \mathscr{C}^q \mu_{j_0}^{q/p}$ para algum $j_0 \in J$, então o fato de $\nu_k \leqslant \mathscr{C}^q \mu_k^{q/p}$ nos da que $\sum_{j\in J}\nu_j < \sum_{j\in J}\mathscr{C}^{q/p}\mu_j^{q/p}$ oque nos dá uma contradição. O mesmo ocorre se supormos que

existe um conjunto mensurável E tal que $E \nsubseteq \mathscr{D} := \bigcup_{j \in J} x_j$ e $\mu(E) > 0$. Logo μ se concentra em $\mathscr{D}$ e temos que $\nu = \mathscr{C}^q \mu^{q/p}$.
Dados dois pontos $x_1, x_2 \in \mathscr{D}$, temos

$$\nu(\{x_1,x_2\}) = \mathscr{C}^q \mu^{q/p}(\{x_1,x_2\}) = \mathscr{C}^q \left(\mu_1 + \mu_2\right)^{q/p} \tag{2-24}$$

por outro lado

$$\nu(\{x_1,x_2\}) = \nu(\{x_1\}) + \nu(\{x_2\}) = \mathscr{C}^q (\mu_1)^{q/p} + \mathscr{C}^q (\mu_2)^{q/p} \tag{2-25}$$

ou seja

$$\mathscr{C}^q \left(\mu_1 + \mu_2\right)^{q/p} = \mathscr{C}^q (\mu_1)^{q/p} + \mathscr{C}^q (\mu_2)^{q/p} \tag{2-26}$$

e como $q > p > 0$ a igualdade acima implica que μ_1 ou μ_2 é nulo, e temos a concetração de μ e ν em um único ponto. □
Podemos agora provar o Lema 2.

Demonstração do Lema 2: Vamos primeiro assumir $u \equiv 0$. Escolhendo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, nós temos pela desigualdade de Sobolev que,

$$\left(\int_\Omega |\phi u_n|^{p^*} dx\right)^{1/p^*} \leqslant C_p \left(\int_\Omega |\nabla(\phi u_n)|^p dx\right)^{1/p} \tag{2-27}$$

como $u_n \to u \equiv 0$ fortemente em $L^p_{loc}(\Omega)$, podemos deduzir

$$\left(\int_\Omega |\phi|^{p^*} d\nu\right)^{1/p^*} \leqslant C_p \left(\int_\Omega |\nabla\phi|^p d\mu\right)^{1/p}. \tag{2-28}$$

E o lema 3 nos dá os itens (i), (ii) e (iii) para $u \equiv 0$.
Agora considere $u \not\equiv 0$ e escreva $g_k = u_k - u$, então g_k é limitada, assim utilizando o lema 1 e alguns resultados de imersão (ver [6])

$$\begin{cases} g_k \rightharpoonup 0, \; em\; W_0^{1,p}(\Omega) \\ g_k \xrightarrow{q.t.p.} 0, \; em\; \Omega \\ |\nabla g_k|^p \rightharpoonup \bar{\mu} \; em\; \mathscr{M}(\Omega) \\ |g_k|^{p^*} \rightharpoonup \bar{\nu} \; em\; \mathscr{M}(\Omega) \end{cases} \tag{2-29}$$

e os cálculos feitos acima valem para g_k. Observe que o lema de Brezis-Lieb nos garante (ver [4])

$$\int_\Omega |\phi|^{p^*} |u_k|^{p^*} dx - \int_\Omega |\phi|^{p^*} |g_k|^{p^*} dx \longrightarrow \int_\Omega |\phi|^{p^*} |u|^{p^*} dx \tag{2-30}$$

por outro lado temos

$$\int_{\Omega}|\phi|^{p^*}(|u_k|^{p^*}-|g_k|^{p^*})dx \longrightarrow \int_{\Omega}|\phi|^{p^*}d\nu-\int_{\Omega}|\phi|^{p^*}d\bar{\nu} \tag{2-31}$$

então

$$\int_{\Omega}|\phi|^{p^*}d\nu-\int_{\Omega}|\phi|^{p^*}d\bar{\nu}=\int_{\Omega}|\phi|^{p^*}|u|^{p^*}dx \tag{2-32}$$

e o teorema da representação de Riez nos dá que $\nu=|u|^{p^*}+\bar{\nu}=|u|^{p^*}+\sum_{j\in J}\nu_j\delta_{x_j}$.

Para toda ϕ em $C_0^{\infty}(\Omega)$

$$\left(\int_{\Omega}|\phi|^{p^*}d\nu\right)^{1/p^*}C^{-1/p}\leqslant\left(\int_{\Omega}|\phi|^{p}d\mu\right)^{1/p}+\left(\int_{\Omega}|\nabla\phi|^{p}|u|^{p}d\nu\right)^{1/p} \tag{2-33}$$

Tomando $\phi\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$, $0\leqslant\phi\leqslant 1$, $\phi(0)=1$, $supp\,\phi=\mathscr{B}(0,1)$ e aplicando a desigualdade para $\phi\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon>0$, $j\in J$. (ver [16]).

$$\nu_j^{1/p^*}C_p^{-1/p}\leqslant\mu(\mathscr{B}(x_j,\varepsilon))^{1/p}+\frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{\mathscr{B}(x_j,\varepsilon)}|\nabla\phi\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)|^{p}|u|^{p}dx\right)^{1/p} \tag{2-34}$$

$$\leqslant\mu(\mathscr{B}(x_j,\varepsilon))^{1/p}+\frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{\mathscr{B}(x_j,\varepsilon)}|\nabla\phi\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)|^{N}dx\right)^{1/N}\left(\int_{\mathscr{B}(x_j,\varepsilon)}|u|^{p^*}dx\right)^{1/N} \tag{2-35}$$

$$\leqslant\mu(\mathscr{B}(x_j,\varepsilon))^{1/p}+C_{\varepsilon}\left(\int_{\mathscr{B}(x_j,\varepsilon)}|u|^{p^*}\right)^{1/p^*} \tag{2-36}$$

Fazendo o limite de $\varepsilon\to 0$ obtemos $C_p^{-1}\nu_j\leqslant\mu(\{x_j\})$ e logo, $\mu\geqslant C_p^{-1}\sum_{j\in J}\nu_j^{p^*/p}\delta_{x_j}:=\mu_{\perp}$.

Como $u_n\rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e o operador

$$u\mapsto\int_{\Omega}\phi|\nabla u|^{p}dx,\quad\phi\in C_0^{\infty} \tag{2-37}$$

é convexo e contínuo,

$$\int_{\Omega}\phi|\nabla u|^{p}dx\leqslant\liminf\int_{\Omega}\phi|\nabla u_n|^{p}dx=\int_{\Omega}\phi d\mu \tag{2-38}$$

e assim temos que $\mu\geqslant|\nabla u|^p$, e como $|\nabla u|^p$ e $\mu_{\perp}$ são mutuamente singulares, então $\mu\geqslant|\nabla u|^p+C_p^{-1}\sum_{j\in J}\nu_j^{p^*/p}\delta_{x_j}$ ou mais precisamente $\mu\geqslant|\nabla u|^p+\sum_{j\in J}\mu_j$ □

CAPÍTULO 3

Gênero de Krasnoselskii

Vamos agora introduzir a teoria do gênero de Krasnoselskii, para isso precisamos de algumas propriedades do grau de Brouwer, ver ([8, 10]).

Definição 3.1 *Dados um conjunto aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um elemento $p \in \mathbb{R}^N$ e uma função continua $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$, tal que $p \notin f(\partial\Omega)$. Associamos a eles um inteiro $d(f,\Omega,p)$. O número $d(f,\Omega,p)$ é chamado e grau de f em Ω, na seginte forma*

i) Se f é diferenciável e p é um valor regular de f, então

$$d(f,\Omega,p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} sign(det(Df(x)))$$

ii) Se f é diferenciável e p não é um valor regular de f, então escolhemos $p' \in \mathbb{R}^N$, tal que p' seja um valor regular e também, para todo $\lambda \in [0,1]$ e todo $x \in \partial\Omega$, $f(x) \neq -(\lambda p + (1-\lambda)p')$ e definimos

$$d(f,\Omega,p) \equiv d(f,\Omega,p').$$

A existencia de tal p' é garantida pelo Teorema de Sard, veja [8].

iii) Se f não é uma função diferenciável então escolhemos uma função diferenciável $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, tal que para todo $\lambda \in [0,1]$ e todo $x \in \partial\Omega$, $\lambda g(x) + (1-\lambda)f(x) \neq p$ (esta função f sempre existe em virtude do teorema de Stone-Weierstrass) e definimos

$$d(f,\Omega,p) \equiv d(g,\Omega,p).$$

Apresentamos abaixo alguns resultados que serão utilizados.

Proposição 3.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $f \in C^1(\Omega)$. Defina*

$$S_f(\Omega) = \{x \in \Omega : \ det[Jac(f(x))] = 0\}$$

então $\mu(f(S_f(\Omega))) = 0$, onde μ denota a medida de Lebesgue n-dimensional.

Apresentamos agora o Teorema de Borsuk e uma demonstração devido a [10]

Teorema 3.3 (Borsuk) *Seja Ω um conjunto aberto, limitado e simétrico. Se $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ é impar e $\{0\} \in \Omega$, então o $d(f,\Omega,0)$ é impar.*

Demonstração do Teorema 3.3: Podemos assumir que $f \in \overline{C}^1(\Omega) := C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ e $\det[Jac(f(0))] \neq 0$. Para isso, aproxime $f \in C(\overline{\Omega})$ por $g_1 \in \overline{C}^1(\Omega)$, considere a parte impar $g_2(x) = \frac{1}{2}(g_1(x) - g_1(-x))$ e escolha um δ que não é autovalor de $g_2'(0)$. Então $f(\tilde{x}) = g_2(x) - \delta x$ está em $\overline{C}^1(\Omega)$, é impar com $\det[Jac(\tilde{f}(0))] \neq 0$, e está perto de f, se δ e $|g_1 - f|_0 := \max\{|f(x)| : x \in \Omega\}$ forem escolhidos para ser pequenos o suficiente. Então $d(f,\Omega,0) = d(\tilde{f},\Omega,0)$.
Seja $f \in \overline{C}^1(\Omega)$ e $det[Jac(f(0))] \neq 0$. Para provar o teorema, é suficiente mostrar que existe uma função impar $g \in \overline{C}^1(\Omega)$ suficientemente proxima de f tal que $0 \notin g(S_g)$, então

$$d(f,\Omega,0) = d(g,\Omega,0) = sgn(\det[Jac(g(0))]) + \sum_{\substack{x \in g^{-1}(0) \\ x \neq 0}} sgn(\det[Jac(g(x))]) \qquad (3\text{-}1)$$

onde a soma é impar desde que, $g(x) = 0$ se e somente se $g(-x) = 0$ e $\det[Jac(g(\cdot))]$ é impar.
Então a função g será definida por indução como segue. Considere $\Omega_k = \{x \in \Omega : x_i \neq 0 \text{ para algum } i \leqslant k\}$ e uma função impar $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $\varphi'(0) = 0$ e $\varphi(t) = 0$ se e somente se $t = 0$.
Considere $\overline{f}(x) = f(x)/\varphi(x_1)$ no aberto limitado $\Omega_1 = \{x = (x_1,\ldots,x_n) \in \Omega : \ x_1 \neq 0\}$. Pela proposição 3.2, encontramos $y^1 \notin \overline{f}(S_{\overline{f}}(\Omega_1))$ com $|y^1|$ tão pequena quanto se queira. Então, 0 é valor regular para $g_1(x) = f(x) - \varphi(x_1)y^1$ em Ω_1, desde que $g_1'(x) = \varphi(x_1)\overline{f}'(x)$ para $x \in \Omega_1$. talque $g_1(x) = 0$. Agora suponha que já temos uma função impar $g_k \in \overline{C}^1(\Omega)$ perto de f em $\overline{\Omega}$ tal que $0 \notin g_k(S_{g_k}(\Omega_k))$, para algum $k < n$. Então definimos $g_{k+1}(x) = g_k(x) - \varphi(x_{k+1})y^{k+1}$ com $|y^{k+1}|$ pequena e tal que 0 é um valor regular de g_{k+1} em $\{x \in \Omega : \ x_{k+1} \neq 0\}$.
Evidentemente, $g_{k+1} \in \overline{C}^1(\Omega)$ é impar e perto de f em $\overline{\Omega}$. Se $x \in \Omega_{k+1}$ e $x_{k+1} = 0$ então $x \in \Omega_k$, $g_{k+1}(x) = g_k(x)$ e $g_{k+1}'(x) = g_k'(x)$, então $\det[Jac(g_{k+1}(x))] \neq 0$, e então $0 \notin g_{k+1}(S_{g_{k+1}}(\Omega_{k+1}))$. Logo $g = g_n$ é impar, perto de f em $\overline{\Omega}$ e é tal que $0 \notin g(S_g(\Omega - \{0\}))$, desde que $\Omega_n = \Omega - \{0\}$. Pelo passo de indução nós vemos que $g'(0) = g_1'(0) = f'(0)$; então $0 \notin g(S_g(\Omega))$

□

Corolário 3.4 *Para $j < N$, não existem funções continuas e impares $f : S^{N-1} \to \mathbb{R}^j - \{0\}$.*

Corolário 3.5 *Seja Ω como no teorema de Borsuk. Se $j < N$ então não existe função impar $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^j$, que seja contínua.*

Iremos agora definir a noção de gênero de um conjunto.

Definição 3.6 *Seja E um espaço de Banach, denotamos por*

$$S(E) := \{A \subset E - \{0\}; A \text{ é fechado e simétrico em relação a origem}\}.$$

Definição 3.7 *Seja $A \in S(E)$. Diremos que A tem gênero n, se n for o menor natural para o qual existe uma função continua e impar $\varphi : A \to \mathbb{R}^n - \{0\}$. O gênero de A será denotado por $\gamma(A)$. Se $A = \emptyset$ definimos $\gamma(A) = 0$, se $A \neq \emptyset$ e para nenhum $n \in \mathbb{N}$ existem funções continuas impares $f : A \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ definimos $\gamma(A) = \infty$.*

No que segue, A e B denotarão elementos de $S(E)$.

Proposição 3.8 *O gênero possui as seguintes propriedades:*

1. *Se existe uma função continua e impar $f : A \to B$, então $\gamma(A) \leqslant \gamma(B)$;*
2. *Se $A \subset B$, então $\gamma(A) \leqslant \gamma(B)$;*
3. *Se existe um homeomorfismo impar $f : A \to B$, então $\gamma(A) = \gamma(B)$;*
4. *Se S^{N-1} é a esfera de $\mathbb{R}^N$, $\gamma(S^{N-1}) = N$;*
5. *$\gamma(A \cup B) \leqslant \gamma(A) + \gamma(B)$;*
6. *Se $\gamma(B) < \infty$, então $\gamma(\overline{A - B}) \geqslant \gamma(A) - \gamma(B)$;*
7. *Se A é compacto então $\gamma(A) < \infty$, e existe $\delta > 0$ tal que $\gamma(A) = \gamma(\overline{N_\delta(A)})$, onde $N_\delta(A) = \{x \in E; d(x, A) < \delta\}$;*
8. *Se A é homeomorfo, via homeomorfismo impar, a fronteira de uma vizinhança simétrica e fechada de $\{0\}$ em $\mathbb{R}^N$, então $\gamma(A) = N$*
9. *Sejam X e Y dois subespaços vetoriais de E, tais que $E = X \oplus Y$. Se $\gamma(A) > \dim X$ então $A \cap Y \neq \emptyset$.*

Demonstração da Proposição 3.8:

1. Seja $\gamma(B) = N$ então tome $g : B \to \mathbb{R}^N - \{0\}$ uma função continua e impar. A função $h = g \circ f : A \to \mathbb{R}^N - \{0\}$ é continua e impar. Logo $\gamma(A) \leqslant N = \gamma(B)$.
2. Basta notar que a função imerção de A em B é continua e impar, o resultado segue do item anterior.
3. O item 1 nos da que $\gamma(A) \leqslant \gamma(B)$ e tomando a inversa da função f temos também pelo item 1 que $\gamma(A) \geqslant \gamma(B)$, portanto $\gamma(A) = \gamma(B)$.

4. Temos que $\gamma(S^{N-1}) \leqslant N$ pois a função $i : S^{N-1} \to \mathbb{R}^N - \{0\}$ é continua e impar. O corolário do teorema de Borsuk nos dá que não existe função continua impar $\varphi : S^{N-1} \to \mathbb{R}^j - \{0\}$, se $j < N$. O que conclui nossa demonstração.

5. Da definição do gênero segue que existem funções continuas e impares $\varphi : A \to \mathbb{R}^{\gamma(A)} - \{0\}$ e $\psi : B \to \mathbb{R}^{\gamma(B)} - \{0\}$. E o teorema da extensão de Tietze nos dá que φ e ψ podem ser extendidas a todo E com valores em $\mathbb{R}^{\gamma(A)}$ e $\mathbb{R}^{\gamma(B)}$ respectivamente. Denote por $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$ estas extensões. Observe que podemos supor que $\overline{\varphi}$ e $\overline{\psi}$ são impares, pois se não são, basta considerar $\frac{\overline{\varphi}(x)-\overline{\varphi}(-x)}{2}$ e $\frac{\overline{\psi}(x)-\overline{\psi}(-x)}{2}$. Construimos então,
$$f = (\overline{\varphi}, \overline{\psi}) : E \to \mathbb{R}^{\gamma(A)+\gamma(B)}.$$
f é continua e impar e não se anula em $A \cup B$, logo $\gamma(A \cup B) \leqslant \gamma(A) + \gamma(B)$.

6. Como $A \subset (A - B) \cup B$, temos que $\gamma(A) \leqslant \gamma((A - B)) + \gamma(B)$ ou seja
$$\gamma(A) - \gamma(B) \leqslant \gamma((A - B)).$$

7. Para cada $x \in A$ e cada $0 < r < ||x||$, seja $A(r,x) = B(x,r) \cup B(-x,r)$. Podemos notar que $\gamma(A(r,x)) = 1$. Como A é compacto, existe uma família finita $\{A(r_i,x_i)\}_{i=1}^n$ tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^n A(r_i,x_i)$. Logo $\gamma(A) \leqslant n$. Seja agora $\varphi : A \to \mathbb{R}^{\gamma(A)}$, continua e impar. E seja $\overline{\varphi} : E \to \mathbb{R}^{\gamma(A)}$ uma extensão continua e impar. Como $\overline{\varphi}$ não se anula em A e A é compacto, existe δ talque $\overline{\varphi}$, não se anula em $N_\delta(A)$ ou seja $\gamma(N_\delta(A)) \leqslant \gamma(A)$. E a parte 2 nos garante a igualdade.

8. Seja V uma vizinhança de $\{0\}$ em $\mathbb{R}^N$ utilizando o item 3, resta a nós provar que $\gamma(\partial V) = N$. Defina a seguinte função
$$\begin{aligned} f : \partial V &\to S^{N-1} && (3\text{-}2)\\ x &\mapsto \frac{x}{|x|} && (3\text{-}3) \end{aligned}$$
f é continua e impar, logo $\gamma(\partial V) \leqslant N$. Suponha por absurdo que $\gamma(\partial V) < N$, então existe uma função continua e impar $g : \partial V \to \mathbb{R}^j$, com $j < N$, o que gera uma contradição com o corolário 2 do teorema de Borsuk.

9. Seja $P : E \to X$ a projeção de E em X. Se $A \cap Y = \varnothing$ então $P(u) = u$, $\forall u \in A$, logo $P : A \to X - \{0\}$ é uma função continua e impar, o que contradiz o fato de $\gamma(A) > dim\, X$. Logo $A \cap Y \neq \varnothing$.

□

Exemplos: Tomando $E = \mathbb{R}^2$, $A = \{x \in \mathbb{R}^2;\ ||x|| = 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}^2; ||x|| = 2\}$, então temos

que $\gamma(A\cup B)=2<4=\gamma(A)+\gamma(B)$.
Sejam agora $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;|x|=1\}$ *e* $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;|y|=1\}$. Como A e B são não vazios e $\varphi(x,y)=x,\ \psi(x,y)=y$ são funções continuas impares e que não se anulam em A e B respectivamente, temos que $1=\gamma(A)=\gamma(B)$. Definindo $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;|x|=1,\ |y|\leqslant 1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;|x|\leqslant 1,\ |y|=1\}$, então $C\subset A\cup B$. C é homeomorfo, via homeomorfismo impar, a S^1 então temos $\gamma(A\cup B)\geqslant\gamma(C)=\gamma(S^1)=2$. Logo $\gamma(A\cup B)=2=\gamma(A)+\gamma(B)$.

Definição 3.9 *Seja $F:E\to\mathbb{R}$ um funcional $C^1(E)$ e c um número real. Uma sequencia $\{u_j\}\subset E$ é de Palais-Smale em um nível c se*

$$F(u_j)\to c, \tag{3-4}$$
$$F'(u_j)\to 0\ \in\ E^* \tag{3-5}$$

Se a definição 3.9 implicar na existência de uma subsequencia $\{u_{j_k}\}\subset\{u_j\}$ que converge em $W_0^{1,p}(\Omega)$, dizemos que G verifica a condição de Palais-Smale ou (P-S). Se essa subsequencia convergente forte ocorre somente para alguns valores de c, dizemos que G verfica uma condição *local* de Palais-Smale ou (P-S)$_c$.

Lema 4 (Lema de Deformação de Clark) *Suponha que G satisfaça (P-S). Seja $c\in\mathbb{R}$ e U uma vizinhança de K_c, então existe d_0 tal que se $d_0>d_1>d>0$, existe uma função contínua $\eta:[0,1]\times E\to E$ que satisfaz*

a) $\eta(0,x)=x$ *para todo* $x\in E$

b) para todo t, $\eta(t,x)=x$ *se* $|F(x)-c|>d1$

c) para todo t, $\eta(t,x)=x$ *é um homeomorfismo de E sobre E*

d) $F(\eta(t,x))\leqslant F(x)$ *para todo* $(t,x)\in[0,1]\times E$

e) $F(\eta(1,x))\leqslant c-d$ *se* $F(x)\leqslant c+d$ *e* $x\notin U$

f) se $K_c=\emptyset$ *podemos tomar* $U=\emptyset$*, e por fim*

g) se F é par, η é impar.

Demonstração do Lema 4:
Para a demonstração veja [8, 20]. □

Denotaremos por f_c o conjunto $\{x\in E:\ f(x)\leqslant c\}$.

Teorema 3.10 (Lustenik-Shnierelmann) *Seja $F : E \to \mathbb{R}$ um funcional C^1, par, que satisfaça (P-S) e tal que $F(0) = 0$. Para cada $m \leqslant dimE$, seja*

$$c_m(F) = \inf_{\gamma(A) \geqslant m} \left(\sup_{x \in A} F(x) \right) \tag{3-6}$$

Se $-\infty < c_m(F) < 0$ então

$$K_m := \{x \in E; F(x) = c_m(F), F'(x) = 0\}$$

é não vazio e compacto. Mais ainda, se $m \leqslant n$ e $-\infty < c_m(F) = c_n(F) = c < 0$ então $\gamma(K_m) \geqslant n - m + 1$

Demonstração do Teorema 3.10:
Seja $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K_m$ uma sequência limitada, como F satisfaz (P-S), temos que existe uma subsequência $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ convergente, com limite u. Agora observe que para cada $n \in \mathbb{N}$, $F(u_n) = c$, $F'(u_n) = 0$, e como $F \in \mathscr{C}^1(E)$, $F(u) = c_m(F)$, e $F'(u) = 0$, ou seja $u \in K_m$, e K_m é compacto. Se $K_m = \emptyset$ o teorema de Clark nos dá a existência de um número real $d > 0$ tal que $c_m(f) + d < 0$ e uma função contínua e ímpar na segunda variável $\eta : [0,1] \times E \to E$ tal que $\eta(1, F_{c_m(F)+d}) \subset F_{c_m(f)-d}$. Seja $A \in S(E)$, tal que $\gamma(A) \geqslant n$ e $\sup_{x \in A} F(x) < c_m(f) + d$, logo $A_1 = \eta(1, A)$ é um conjunto fechado e simétrico. Como $\eta(t, \cdot) : E \to E$ é um homeomorfismo para cada $t \in [0,1]$, $\gamma(A_1) \geqslant m$. Mas $\sup_{x \in A_1} F(x) \leqslant c_m(F) - d$ o que contradiz a definição de $c_m(F)$ logo $K_m \neq \emptyset$.
Como K_m é compacto, pela proposição 3.8 (7), $\gamma(K_m) < \infty$. Seja U uma vizinhança aberta e simétrica de K_m tal que $\overline{U} \in S(E)$ e $\gamma(\overline{U}) = \gamma(K_m)$. Sejam $d > 0$ tal que $c + d < 0$ e $\eta : [0,1] \times E \to E$ tal que $\eta(1, F_{c+d}) \subseteq F_{c-d}$. Pela definição de $c_n(F)$, segue que existe $A \in S(E)$ tal que $A \subseteq F_{c+d}$ e $\gamma(A) \geqslant n$.
Seja $B = A - U$, novamento por 3.8 (6) temos que

$$\gamma(K_m) = \gamma(\overline{U}) \geqslant \gamma(A) - \gamma(B) \tag{3-7}$$

Também temos que $B \in S(E)$ e $\eta(1, B) \subseteq F_{c-d}$. Por 3.8 (3) $\gamma(B) = \gamma(\eta(1, B))$. Se $\gamma(B) \geqslant m$ teríamos uma contradição com a definição de c, logo $\gamma(B) \leqslant m - 1$. De (3-7) temos $\gamma(K_m) \geqslant n - m + 1$ e o teorema está demonstrado. $\square$
Seja $F : E \to \mathbb{R}$ uma função C^1, par e tal que $F(0) = 0$. Definimos:

$$i_1(F) = \lim_{a \to 0^-} \gamma(F_a) \tag{3-8}$$

$$i_2(F) = \lim_{a \to -\infty} \gamma(F_a) \tag{3-9}$$

Teorema 3.11 *Suponha que F satisfaz 3.9. Se $i_1(F) > i_2(F)$, então para cada inteiro m tal que $i_2(F) < m \leqslant i_1(F)$, existe pelo menos um par $(x_m, -x_m)$ de pontos críticos de F tais que $F(x_m) = c_m(F)$.*

Demonstração do Teorema 3.11:
Vejamos primeiro que $c_m(F) < 0$ se e somente se $m \leqslant i_1(F)$. Com efeito, se $c_m(F) < 0$, podemos tomar $A \in S(E)$ tal que $\gamma(A) \geqslant m$ e $\sup_{x \in A} F(x) \leqslant c_m(F)/2$. Logo se $a < 0$ e $a > (c_m(F))/2$, se tem que $\gamma(F_a) \geqslant \gamma(A) \geqslant m$ e isto implica que $i_1(F) \geqslant m$. Reciprocamente, se $m \leqslant i_1(F)$, existe $a < 0$ tal que $\gamma(F_a) \geqslant m$. Como F_a é fechado e simétrico, temos que $c_m(F) \leqslant a < 0$.
Agora mostremos que $m > i_2(F)$ se e somente se $c_m(F) > -\infty$. Primeiro seja $c_m(F) > -\infty$, então suponha por contradição que $i_2 \geqslant m$ logo para todo a, $\gamma(f_a) \geqslant m$ ou seja $c_m(f) = -\infty$ oque nos dá uma contradição. Seja agora $i_2(f) < m$ logo existe a tal que $\gamma(f_b) < m$ para todo $b \leqslant a$ ou seja $c_m(f) > a$ e portanto $c_m(f) > -\infty$
Isto combinado com o teorema anterior nos dá que $K_m \neq \emptyset$ e o teorema está demonstrado.
$\square$

CAPÍTULO 4

Convergência de Sequências de Palais-Smale

No problema 1-3, a principal dificuldade é a falta de compacidade na inclusão de $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}$. Provaremos então uma condição local de Palais-Smale, que será suficiente apesar de algumas restrições. A relação 2 com a hipótese que a constante c em 3.9 é pequena o suficiente, permite-nos mostrar que a parte singular das medidas deve ser zero, e teremos então uma condição local de Palais-Smale.

Lema 5 *Seja* $\{v_j\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ *uma sequencia de Palais-Smale para o funcional* F*, definido em* (1-2).
Então temos

1. *Se* $p < q < p^*$*, e* $c < \dfrac{S^{\frac{N}{p}}}{N}$*, então existe uma subsequencia* $\{v_{j_k}\} \subset \{v_j\}$*, convergindo forte em* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

2. *Se* $1 < q < p$*, e* $c < \dfrac{S^{\frac{N}{p}}}{N} - K\lambda^{\beta}$*, onde* $\beta = p^*/(p^* - q)$ *e* K *é uma constante dependendo de* p*,* q*,* N *e* Ω*. Então existe uma subsequencia* $\{v_{j_k}\} \subset \{v_j\}$*, convergindo forte em* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração do Lema 5:
Vamos provar que a sequencia $\{v_j\}$ é limitada em ambos os casos.
Para o caso 1 observe que

$$F(v_j) - \frac{1}{q}\langle F'(v_j), v_j\rangle = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\|v_j\|^p + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}\right)\|v_j\|_{p^*}^{p^*} \geqslant \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\|v_j\|^p$$

Tomando $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $j \geqslant j_0$

$$\|F(v_j)\| + \frac{1}{q}\|F'(v_j)\|\|v_j\| < c + \frac{\varepsilon}{2} + \delta\|v_j\| \tag{4-1}$$

implicando que $\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\|v_j\|^p-\delta\|v_j\|<c+\frac{\varepsilon}{2}$. Portanto $\{v_j\}$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Já para o caso 2 temos

$$\begin{aligned} F(v_j)-\frac{1}{p}\langle F'(v_j),v_j\rangle = \lambda\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\|v_j\|_q^q+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)\|v_j\|_{p^*}^{p^*}\geqslant \\ \lambda K\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\|v_j\|_{p^*}^q+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)\|v_j\|_{p^*}^{p^*} \\ \Longrightarrow \|v_j\|_{p^*}\leqslant C_0 \end{aligned} \tag{4-2}$$

Então $v_j\in L^r,\forall\ 1<r\leqslant p^*$ e também

$$F(v_j)=\frac{1}{p}\|v_j\|^p-\frac{\lambda}{q}\|v_j\|_q^q-\frac{1}{p^*}\|v_j\|_{p^*}^{p^*}<c+\varepsilon \tag{4-3}$$

Ou seja, $\{v_j\}$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Portanto limitada em ambos os casos.
Agora tomando uma subsequencia apropriada se necessário, conseguimos em ambos os casos que

$$\begin{cases} v_j\rightharpoonup v\ em\ W_0^{1,p}(\Omega) \\ v_j\to v\ em\ L^r,\ 1<r<p^*,\ e\ q.t.p. \\ |\nabla v_j|^p\rightharpoonup d\mu\geqslant|\nabla v|^p+\sum_{k\in J}\mu_k\delta_{x_k} \\ |v_j|^{p^*}\rightharpoonup d\nu=|v|^{p^*}+\sum_{k\in J}\nu_k\delta_{x_k} \end{cases} \tag{4-4}$$

Tomando $x_k\in\overline{\Omega}$, no suporte da parte singular de $d\mu$ e $d\nu$, consideremos $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que $\phi\equiv 1\ em\ B(x_k,\varepsilon),\ \phi\equiv 0\ em\ B(x_k,2\varepsilon)^c,\ |\nabla\phi|\leqslant\frac{2}{\varepsilon}$. Podemos ver fácilmente que $\{\phi v_j\}$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ então usando o fato de $F'(v_j)$ convergir para zero em$W^{-1,p'}(\Omega)$,

$$\int_\Omega\phi d\nu+\int_\Omega|v|^q\phi dx-\int_\Omega\phi d\mu=\lim_{j\to\infty}\int_\Omega|\nabla v_j|^{p-2}v_j\nabla v_j\nabla\phi\ dx \tag{4-5}$$

Pela definição da ϕ e pelas representações de $d\mu$ e $d\nu$, utilizamos Hölder para obter

$$0\leqslant\lim_{j\to\infty}\left|\int_\Omega|\nabla v_j|^{p-2}v_j(\nabla v_j,\nabla\phi)dx\right|\leqslant c\left(\int_{B(x_k,2\varepsilon)}|v|^{p^*}dx\right)^{1/p^*}\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0 \tag{4-6}$$

Então

$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_\Omega\phi d\nu+\lambda\int_\Omega|v|^q\phi dx-\int_\Omega\phi d\mu\right\}=\nu_k-\mu_k \tag{4-7}$$

E como $\mu_k\geqslant S.\nu_k^{p/p^*}$ (vide 2), ou seja $\nu_k\geqslant S.\nu_k^{p/p^*}$, então $\nu_k=0$ ou $\nu_k\geqslant S^{\frac{N}{p}}$. Vamos agora provar que esta segunda desigualdade não pode ocorrer.

Assuma que existe k_0 com $\nu_{k_0} \neq 0$ ou seja $\nu_k \geqslant S^{\frac{N}{p}}$. Por (3-5) e (4-2)

$$c = \lim_{j\to\infty} F(v_j) \geqslant F(v) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right) \sum_k \nu_k \geqslant F(v) + \frac{S^{\frac{N}{p}}}{N} \tag{4-8}$$

Mas por hipótese $c < \dfrac{S^{\frac{N}{p}}}{N}$ *e* $F(v) < 0$. Em particular v não é nula, e

$$0 < \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p dx < \frac{1}{p^*}\int_\Omega |v|^{p^*} dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |v|^q dx \tag{4-9}$$

isto é

$$\begin{aligned} c = \lim_{j\to\infty} F(v_j) = \lim_{j\to\infty} \left\{F(v_j) - \frac{1}{p}\langle F'(v_j), v_j\rangle\right\} \geqslant \\ \frac{1}{N}\int_\Omega |v|^{p^*} + \frac{S^{\frac{N}{p}}}{N} + \lambda\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\int_\Omega |v|^q dx. \end{aligned} \tag{4-10}$$

Agora vamos separar novamente nos casos 1 e 2.

1. Se $p < q < p^*$ então $c > \dfrac{S^{\frac{N}{p}}}{N}$ o que já nos dá uma contradição, então $\nu_k = 0$, para todo $k \in J$ *e* $\lim_{j\to\infty} \int_\Omega |v_j|^{p^*} = \int_\Omega |v|^{p^*}$ por (2.6) concluimos que $v_j \to v$ *em* L^{p^*} e pela continuidade do operador inverso Δ_p^{-1}, $v_j \to v$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ (ver Apêndice A).

2. se $1 < q < p$, aplicamos Hölder a (4-10) e obtemos

$$c \geqslant \frac{S^{\frac{N}{p}}}{N} + \frac{1}{N}\int_\Omega |v|^{p^*} - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)|\Omega|^{\frac{p^*-q}{p^*}}\left(\int_\Omega |v|^{p^*}\right)^{q/p^*} \tag{4-11}$$

   Seja $f(x) = c_1 x^{p^*} - \lambda c_2 x^q$, f possui um mínimo absoluto no ponto $x_0 = (\lambda c_2 \frac{q}{p^*} c_1)^{1/(p^*-q)}$, isto é $f(x) \geqslant f(x_0) = -K\lambda^\beta$ mas isto contradiz as hipóteses para o caso em questão, logo $\nu_k = 0$ para todo $k \in J$ e concluimos que $v_j \to v$ *em* L^{p^*} e pela continuidade do operador inverso Δ_p^{-1}, $v_j \to v$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. □

Acabamos de provar que abaixo dos níveis $S^{\frac{N}{p}}/N$ e $S^{\frac{N}{p}}/N - k\lambda^\beta$, o funcional F verifica uma condição local de Palais-Smale para $p < q < p^*$ e $1 < q < p$ respectivamente.

CAPÍTULO 5

Existência de Solução
Caso Homogêneo

Neste capítulo provaremos os Teoremas 1.1 e 1.2 apresentados na Introdução. Relembramos abaixo uma versão do Lema do Passo da Montanha de Ambrosett Rabinowitz, com o objetivo de provar a existência de uma solução para o problema (1-3).

Lema 6 (Passo da Montanha) *Seja F um funcional em um espaço de Banach X, $F \in C^1(X,\mathbb{R})$. Assuma que existem r, R positivos tais que*

(i) $F(u) > r,\ \forall u \in X$ *com* $\|u\| = R$

(ii) $F(0) = 0$ *e* $F(\omega_0) < r$ *para algum* $\omega_0 \in X$ *com* $\|\omega_0\| > R$

Defina $C = \{g \in C([0,1]:X) : g(0) = 0,\ g(1) = \omega_0\}$ *e* $c = \inf_{g\in C}\max_{t\in[0,1]} F(g(t))$. *Então existe uma sequência* $\{u_j\} \subset X$ *tal que* $F(u_j) \to c$ *e* $F'(u_j) \to 0$ *em* X^*.

Demonstração do Lema 6:
Para a demonstração veja [1]. □
Iniciaremos com a prova do Theorema 1.1 que é basicamente verificar que o funcional (1-4) satisfaz as condições (i) e (ii) do Lema 6.
Demonstração do Teorema 1.1: Aplicando F em tv, $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $t \in (0,\infty)$ obtemos,

$$F(tv) = \frac{t^p}{p}\|v\|^p - \frac{t^q\lambda}{q}\|v_j\|_q^q - \frac{t^{p^*}}{p^*}\|v\|_{p^*}^{p^*} \tag{5-1}$$

e como as normas de v em cada um desses espaços é constante em relação a t, temos um polinômio generalizado na variável t.

$$l(t) = a_1t^p - a_2t^q - a_3t^{p^*} \tag{5-2}$$

$l(0) = 0$, para R pequeno o suficinte, o fato de $p < q < p^*$ implica que $l(R) > 0$, portanto existe um $r > 0$ de modo que $l(R) > r$ e também $\lim_{t\to\infty} l(t) = -\infty$ implicando a existência

de um $t_0 > R$ tal que $l(t_0) < r$, assim concluímos que F satisfaz as condições acima.
Se pudermos provar agora que

$$c < S^{\frac{N}{p}}/N \tag{5-3}$$

então o lema 6, juntamente com o lema 5 nos dá a existência de um pontio crítico de F.
Para esta estimativa, nos escolhemos

$$v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)\ com\ \|v_0\|_{p^*} = 1 \tag{5-4}$$

e o fato de $\lim_{t\to\infty} F(tv_0) = -\infty$ nos da a existência de um $t_\lambda > 0$ tal que $\sup_{t\geqslant 0} F(tv_0) = F(t_\lambda v_0)$ e então t_λ verifica

$$0 = \langle F'(t_\lambda v_0), v_0\rangle = t_\lambda^{p-1}\int_\Omega |\nabla v_0|^p dx - t_\lambda^{p^*-1} - \lambda t_\lambda^{q-1}\int_\Omega |v_0|^q dx \tag{5-5}$$

Portanto temos

$$0 = t_\lambda^{q-1}\left(t_\lambda^{p-q}\int_\Omega |\nabla v_0|^p dx - t_\lambda^{p^*-q} - \lambda\int_\Omega |v_0|^q dx\right) \tag{5-6}$$

Observe que

$$t^{p^*-q} + \lambda\int_\Omega |v_0|^q dx \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} \infty \tag{5-7}$$

e então (3.4) implica que $t_\lambda \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Pela continuidade de F,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\sup_{t\geqslant 0} F(tv_0)\right) = 0 \tag{5-8}$$

logo existe λ_0 tal que para todo $\lambda \geqslant \lambda_0$,

$$\sup_{t\geqslant 0} F(tv_0) < \frac{S^{\frac{N}{p}}}{N}. \tag{5-9}$$

Se tomarmos $\omega_0 = sv_0$ com s grande o suficiente para se ter $F(\omega_0) < 0$ conseguimos

$$c \leqslant \max_{t\in[0,1]} F(g_0(t)),\ g_0(t) = t\omega_0 \tag{5-10}$$

então $c \leqslant \sup_{t\geqslant 0} F(tv_0) \leqslant S^{\frac{N}{p}}/N$ ficando provada a estimativa (5-3) para λ grande o suficiente. □

Provaremos agora o Teorema 1.2.

***Demonstração do Teorema:*1.2**

A escolha natural é tomar um truncamento de

$$U_\varepsilon(x) = (\varepsilon + c|x - x_0|^{p/(p-1)})^{(p-N)/p} \tag{5-11}$$

por que etas são funções em $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ que assumem a melhor constante da imersão de Sobolev (ver [15]). É bem conhecido que elas são únicas e positivas, exceto por translações e dilatações. Podemos assumir que $0 \in \Omega$ e a equação acima se torna

$$U_\varepsilon(x) = (\varepsilon + c|x|^{p/(p-1)})^{(p-N)/p}.$$

Seja ϕ uma função em $C_0^\infty(\Omega)$, com $\phi(x) = 1$ em uma vizinhança da origem. Definimos agora, $u_\varepsilon(x) = U_\varepsilon(x)\phi(x)$. Para $\varepsilon \to 0$ o comportamento de u_ε, se assemelha ao comportamento de U_ε, e podemos estimar o erro ao tomar u_ε no lugar de U_ε. Deste modo, calculamos

$$\nabla u_\varepsilon = \{(\varepsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{p-\frac{N}{p}} \nabla\phi(x) - \frac{(N-p)}{p}\phi(x)(\varepsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{p-\frac{N}{p}} |x|^{\frac{2-p}{p-1}} x\} \tag{5-12}$$

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p dx = k_1 \varepsilon^{p-\frac{N}{p}} + O(1),\ \varepsilon \to 0,\ k_1 = \|U_1\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \tag{5-13}$$

$$\left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{p^*}\right)^{p/p^*} = k_2 \varepsilon^{p-\frac{N}{p}} + O(1),\ \varepsilon \to 0,\ k_2 = \|U_1\|^p_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \tag{5-14}$$

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^p = \begin{cases} O(1) + k\varepsilon^{p^2 - \frac{N}{p}},\ \varepsilon \to 0,\ N > p^2 \\ O(1) + k\ln(\varepsilon),\ \varepsilon \to 0, N = p^2 \\ O(1) + k\varepsilon^{p^2 - \frac{N}{p-1}},\ \varepsilon \to 0,\ p < N < p^2 \end{cases} \tag{5-15}$$

tomando $v_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon}{\|u_\varepsilon\|_{p^*}}$, obtemos as seguintes estimativas (ver [5, 12, 15])

a) Estimativa para o gradiente

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_p^p = S + O(\varepsilon^{(N-p)/p}) \tag{5-16}$$

b) Estimativa para $\|v_\varepsilon\|_q$
Se $q > p^*(1 - 1/p)$ então

$$C_1 \varepsilon^{((p-1)/p)(N-q(N-p)/p)} \leqslant \|v_\varepsilon\|_q^q \leqslant C_2 \varepsilon^{((p-1)/p)(N-q(N-p)/p)} \tag{5-17}$$

Se $q = p^*(1 - 1/p)$ então

$$C_1 \varepsilon^{(N-p)q/p^2} |\ln(\varepsilon)| \leqslant \|v_\varepsilon\|_q^q \leqslant C_2 \varepsilon^{(N-p)q/p^2} |\ln(\varepsilon)| \tag{5-18}$$

Se $q < p^*(1-1/p)$ então

$$C_1\varepsilon^{(N-p)q/p^2} \leqslant \|v_\varepsilon\|_q^q \leqslant C_2\varepsilon^{(N-p)q/p^2} \tag{5-19}$$

Observer que se $p < q < p^*$ então $\|v_\varepsilon\|_q^q \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$
Usando estas estimativas, nós vamos mostrar a existência de um $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente de modo que

$$\sup_{t\geqslant 0} F(tv_\varepsilon) < \frac{S^{N/p}}{N} \tag{5-20}$$

Então concluiremos como no teorema anterior, utilizando os lemas 5 e 6. Vamos considerar as funções

$$g(t) = F(tv_\varepsilon) = \frac{t^p}{p}\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p dx - \frac{t^{p^*}}{p^*} - \lambda\frac{t^q}{q}\int_\Omega |v_\varepsilon|^q dx \tag{5-21}$$

e

$$\overline{g}(t) = F(tv_\varepsilon) = \frac{t^p}{p}\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p dx - \frac{t^{p^*}}{p^*} \tag{5-22}$$

É claro que $g(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, então $\sup_{t\geqslant 0} F(tv_\varepsilon)$ é assumido para algum $t_\varepsilon > 0$ e

$$0 = g'(t_\varepsilon) = t^{p-1}\left(\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p dx - t_\varepsilon^{p^*-p} - \lambda t_\varepsilon^{q-p}\int_\Omega |v_\varepsilon|^q dx\right) \tag{5-23}$$

então

$$\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p dx = t_\varepsilon^{p^*-p} + \lambda t_\varepsilon^{q-p}\int_\Omega |v_\varepsilon|^q dx > t_\varepsilon^{p^*-q} \tag{5-24}$$

ou seja

$$t_\varepsilon \leqslant \left(\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p dx\right)^{1/(p^*-p)} \tag{5-25}$$

que implica que

$$\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p dx \leqslant t_\varepsilon^{p^*-q} + \lambda\left(\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p dx\right)^{\frac{q-p}{p^*-p}}\left(\int_\Omega |v_\varepsilon|^q dx\right) \tag{5-26}$$

Escolhendo ε pequeno o suficiente, por (5-16) e $\|v_\varepsilon\|_q^q \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$, temos que

$$t_\varepsilon^{p^*-p} \geqslant S/2 \tag{5-27}$$

ou seja, temos um limite inferior para t_ε independente de ε. Agora estimamos $g(t_\varepsilon)$. A função $\overline{g}$ assume seu máximo em $t = \left(\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p dx\right)^{1/(p^*-p)}$ e é crescente no intervalo

$\left[0, \left(\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p dx\right)^{1/(p^*-p)}\right]$. Então usando (5-16), (5-25) e (5-27) temos

$$g(t_\varepsilon) = \overline{g}(t_\varepsilon) - \frac{\lambda}{q} t_\varepsilon^q \int_\Omega |v_\varepsilon|^q dx \leqslant \tag{5-28}$$

$$\overline{g}(\left(\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p dx\right)^{1/(p^*-p)}) - \frac{\lambda}{q} t_\varepsilon^q \int_\Omega |v_\varepsilon|^q dx \leqslant \tag{5-29}$$

$$\frac{S^{N/p}}{N} + C\varepsilon^{\frac{N-p}{p}} - \frac{\lambda}{q}\left(\frac{S}{2}\right)^{q/(p^*-p)} \int_\Omega |v_\varepsilon|^q dx \tag{5-30}$$

vamos supor $q > p^*(1-1/p)$. Então temos (5-18) e

$$g(t_\varepsilon) \leqslant \frac{S^{\frac{N}{p}}}{N} + C_3\varepsilon^{\frac{N-p}{p}} - \lambda C_1 \left(\frac{S}{2}\right)^{\frac{q}{p^*-p}} \varepsilon^{\{((p-1)/p)(N-q(N-p)/p)\}} \tag{5-31}$$

Se

$$\frac{N-p}{p} > \frac{p-1}{p}\left(N - \frac{q(N-p)}{p}\right)$$

então para ε pequeno o suficiente temos que $g(t_\varepsilon) < \frac{S^{\frac{N}{p}}}{N}$. Isto conclui a demonstração. □

Obs. 1 *Se $N \geqslant p^2$,*

$$p^* - \frac{p}{p-1} \leqslant \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^* \leqslant p$$

e se $p < q < p^*$, temos

$$q > p^* - \frac{p}{p-1}$$

E assim q verifica (5-18) e obtemos o resultado de [15].
Se $N < p^2$,

$$p < p^*\left(1 - \frac{1}{p}\right) < p^* - \frac{p}{p-1}$$

Note que para $p < q < p^* - \frac{p}{p-1}$ a estimativa não é o suficiente.

CAPÍTULO 6

Existência de infinitas Soluções
Caso Homogêneo

Agora estudaremos o caso em que $1 < q < p$. Para encontrar soluções para o problema (1-3), vamos construir uma classe mini-max de pontos críticos, usando o conceito e algumas das propriedades do gênero. Veja o capítulo 3.

Dado o funcional F a hipótese $q < p$ nos dá, pela desigualdade de Sobolev, que

$$F(u) \geqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{1}{p^* S^{p^*/p}}\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{p^*/p} - \frac{\lambda}{q}c_{p,q}\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{q/p} \tag{6-1}$$

se definirmos

$$h(x) = \frac{1}{p}x^p - \frac{1}{p^* S^{\frac{p^*}{p}}}x^{p^*} - \frac{\lambda}{q}c_{p,q}x^q \tag{6-2}$$

então

$$F(u) \geqslant h(\|\nabla u\|_p) \tag{6-3}$$

e um cálculo simples nos permite mostrar a existência de um λ_1 tal que se $0 < \lambda \leqslant \lambda_1$, h atinge seu máximo positivo.

Vamos assumir $0 < \lambda \leqslant \lambda_1$. Escolhendo R_0 e R_1 como sendo a primeira e a segunda respectivamente raizes positivas de $h(x)$ temos o seguinte truncamento de F. (ver [13])

Seja $\tau : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ não crescente e C^∞, definida por

$$\tau(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \leqslant R_0 \\ 0, & se\ x \geqslant R_1 \end{cases} \tag{6-4}$$

Defina então $\varphi(u) = \tau(\|u\|)$. Considere agora o funcional truncado

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*}\varphi(u) dx \tag{6-5}$$

como em (6-3) $J(u) \geqslant \overline{h}(\|u\|)$ com

$$\overline{h}(x) = \frac{1}{p}x^p - \frac{\tau(x)}{p^* S^{\frac{p^*}{p}}} x^{p^*} - \frac{\lambda}{q} c_{p,q} x^q \tag{6-6}$$

Observe que para $x \leqslant R_0$, $\overline{h} = h$ e para $x \geqslant R_1$, $\overline{h} = \frac{1}{p}x^p - \frac{\lambda}{q}c_{p,q}x^q$.
As principais propriedades de J são:

Lema 7 *(i) $J \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega))$;*

(ii) Se $J(u) \leqslant 0$ então $\|u\| < R_0$ e $F(v) = J(v)$, para todo v em uma pequena vizinhança de u;

(iii) Existe $\lambda_1 > 0$ tal que se $0 < \lambda < \lambda_1$ então J verifica uma condição local de Palais-Smale para $c \leqslant 0$

Demonstração do Lema 7:
O fato de $J \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega))$ decorre diretamente de $\varphi \in C^\infty(W_0^{1,p}(\Omega))$.
Para mostrar o item (ii) basta notar que $h(x)$ possui duas raizes positivas, uma em R_0 e outra em R_1. Quando $x > R_0, \overline{h}(x) > 0$, logo se $\|u\| > R_0$ então $J(u) > 0$ pois $J(u) \geqslant h(\|u\|)$.
Para provar o item (iii), observe que toda sequência de Palais-Smale para $c \leqslant 0$ deve ser limitada, então pelo lema 5, se λ verifica $\frac{S^{N/p}}{N} - k\lambda^\beta \geqslant 0$ existe subsequência fortemente convergente. □

Obs. 2 *Pelo item (ii) do lema 7 se encontrarmos algum valor crítico negativo para J, então temos um valor crítico negativo para F.*

Agora vamos construir uma sequência mini-max apropriada de valores críticos negativos para o funcional J.

Lema 8 *Dado $n \in \mathbb{N}$, existe $\varepsilon = \varepsilon(n) > 0$ tal que*

$$\gamma(\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : J(u) \leqslant -\varepsilon\}) \geqslant n.$$

Demonstração do Lema 8: Fixe n, seja E_n um subespaço n-dimensional de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Tomando $u_n \in E_n$ com $\|u_n\| = 1$. Para $0 < \rho < R_0$ temos

$$J(\rho u_n) = F(\rho u_n) = \frac{1}{p}\rho^p - \frac{1}{p^*}\rho^{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*}dx - \frac{\lambda}{q}\rho^q \int_\Omega |u|^q dx \tag{6-7}$$

E_n é um espaço de dimensão finita e portanto todas as suas normas são equivalentes. Se definirmos

$$\alpha_n = \inf\{\int_\Omega |u_n|^{p^*}dx \ : \ u \in E_n, \|un\| = 1\} > 0 \tag{6-8}$$

$$\beta_n = \inf\{\int_\Omega |u_n|^{q}dx \ : \ u \in E_n, \|un\| = 1\} > 0 \tag{6-9}$$

Temos que

$$J(\rho u_n) \leqslant \frac{1}{p}\rho^p - \frac{\alpha_n}{p^*}\rho^{p^*} - \frac{\beta_n\lambda}{q}\rho^q \tag{6-10}$$

E podemos escolher ε pequeno o suficiente, dependendo de n e $\eta < R_0$, tais que $J(\eta u_n) \leqslant -\varepsilon$, se $u_n \in E_n$, e $\|u_n\| = 1$.
Seja $S_\eta = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \ : \ \|u\| = \eta\}$

$$S_\eta \cap E_n \subset \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \ : \ J(u) \leqslant -\varepsilon\}$$

E pela proposição 3.8

$$\gamma(\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \ : \ J(u) \leqslant -\varepsilon\}) \geqslant \gamma(S_\eta \cap E_n) = n \tag{6-11}$$

$\square$

Lema 6.1 *Sejam* $\Sigma_k := \{C \subset W_0^{1,p}(\Omega) - \{0\},\ C = \overline{C} = -C,\ \gamma(C) \geqslant k\}$,

$$c_k := \inf_{C\in\Sigma_k}\sup_{u\in C} J(u) \ e$$

$$K_c := \{u \in W_0^{1,p}(\Omega); J'(u) = 0, J(u) = c\}.$$

Suponha $0 < \lambda < \lambda_1$*, onde* λ_1 *é a constante do lema 7. Então se* $c = c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+r}$*,* $\gamma(K_c) \geqslant r+1$ *(em particular, os* c_k*'s são valores críticos de* J*).*

Demonstração do Teorema 6.1: Na prova vamos usar o lema 4 Por simplicidade denotaremos $J^{-\varepsilon} := \{u \in W_0^{1,p}(\Omega); J(u) \leqslant -\varepsilon\}$. Pelo lema 8, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $\varepsilon(k) > 0$ tal que $\gamma(J^{-\varepsilon}) \geqslant k$. Como J é par e contínuo, $J^{-\varepsilon} \in \Sigma_k$, então $c_k > -\infty$ para todo k. Vamos assumir que $c = c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+r}$. Observe que se $c < 0$, J verifica a condição de Palais-Smale em K_c e é fácil ver que K_c é compacto. Se $\gamma(K_c) \leqslant r$, existe um conjunto fechado e simétrico U, $K_c \subset U$ tal que $\gamma(U) \leqslant r$. Pelo lema de deformação, existe um homeomorfismo ímpar

$$\eta : W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega) \tag{6-12}$$

tal que $\eta(J^{c+\delta} - U) \subset J^{c-\delta}$, para algum $\delta > 0$ ($0 < \delta < -c$, pois J verifica 3.9 em J^0, e precisamos $J^{c+\delta} \subset J^0$). Por definição $c = c_{k+r} = \inf_{c\in\Sigma_k}\sup_{u\in C} J(u)$ então existe $A \in \Sigma_{k+r}$, tal que $\sup\limits_{u\in A} J(u) < c+\delta$ que implica que $A \subset J^{c+\delta}$ e

$$\eta(A-U) \subset \eta(J^{c+\delta}) \subset J^{c-\delta}. \tag{6-13}$$

Mas $\gamma(\overline{A-U}) \geqslant \gamma(A)-\gamma(U) \geqslant k$ e $\gamma(\eta(\overline{A-U})) \geqslant \gamma(\overline{A-U}) \geqslant k$. Então $\eta(\overline{A-U}) \in \Sigma_k$ oque contraria 6-13. De fato $\eta(\overline{A-U}) \in \Sigma_k$ implica que $\sup\limits_{u\in\eta(\overline{A-U})} J(u) \geqslant c_k = c$ □

Podemos então finalmente demonstrar o Teorema 1.3.

Demonstração do Teorema 1.3: O Teorema é consequência imediata do lema 7 e do Teorema 6.1. □

Obs. 3 *O teorema acima também pode ser demonstrado utilizando os Teoremas 3.10 e 3.11.*

Existência de Infinitas Soluções
Caso não Homogêneo

Provaremos agora alguns resultados que irão nos auxiliar na demonstração do Teorema 1.4. A dificuldade em questão é falta de controle da parte não simétrica do funcional I. A ideia é encontra algum truncamento apropriado de I, para obter um funcional J, onde a parte não simétrica possa ser estimada, tal que a existência de pontos críticos de J implique na existência de pontos críticos de I. Vamos começar com uma estimativa a priori, que nos dará uma ideia para realizar o truncamento.

Lema 9 *Existe uma constante $A = A(\|f\|_{p'}) > 0$ tal que, se $I'(u) = 0$ então*

$$\frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx \leqslant A.(|I(u)|^p + 1)^{1/p} \tag{7-1}$$

Demonstração do Lema 9: Seja $I'(u)$ a derivada de Frechet em relação a u. Em um ponto crítico de I temos

$$I(u) = I(u) - \frac{1}{p}I'(u) \tag{7-2}$$

$$= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \int_\Omega fu\, dx - \frac{1}{p}\left[\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \lambda\int_\Omega |u|^q dx - \int_\Omega fu\, dx\right]$$

$$\geqslant \lambda\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega |u|^q dx - \left(1-\frac{1}{p}\right)\|f\|_{p'}\|u\|_p$$

usando o fato de que $q > p$, as desigualdades de Hölder e Young, vemos que para todo $\varepsilon > 0$

$$I(u) \geqslant \lambda\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega |u|^q dx - \frac{1}{p'}\left(\varepsilon\|u\|_p^q + \beta(\varepsilon)\|f\|_{p'}^{q'}\right) \geqslant \tag{7-3}$$

$$\geqslant \lambda\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega |u|^q dx - \frac{1}{p'}\left(C\varepsilon\|u\|_q^q + \beta(\varepsilon)\|f\|_{p'}^{q'}\right). \tag{7-4}$$

Agora escolhemos $2p'\varepsilon = \frac{\lambda}{C}\left(\frac{q-p}{pq}\right)$ e temos

$$|I(u)| \geqslant \lambda\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega |u|^q dx - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega |u|^q dx - \beta_0\|f\|_{p'}^{q'} = \tag{7-5}$$

$$= \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega |u|^q dx - \beta_0\|f\|_{p'}^{q'} \tag{7-6}$$

Tome $k = \frac{2p}{q-p}$ então

$$k\left(|I(u)| + \beta_0\|f\|_{p'}^{q'}\right) \geqslant \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx \tag{7-7}$$

$$k\beta_0\|f\|_{p'0}^{q'}\left(\frac{|I(u)|}{\beta_0\|f\|_{p'}^{q'}}+1\right) \leqslant \frac{A(\|f\|_{p'},q)}{2}(|I(u)|+1)^{p/p} \leqslant \tag{7-8}$$

$$\leqslant \frac{A(\|f\|_{p'},q)}{2}(2^p(|I(u)|^p+1))^{1/p} = A(\|f\|_{p'},q)(|I(u)|^p+1)^{1/p} \tag{7-9}$$

onde $A = 2\cdot\max\{k\beta_0\|f\|_{p'}^{q'},1\}$. Concluimos assim a demonstração. □

Com esta estimativa, fazemos o seguinte truncamento:

Sejam $\chi : \mathbb{R} \to [0,1]$, $\chi \in C^\infty$ e $\psi : W_0^{1,p}(\Omega) \to [0,1]$ tais que

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, \; se\; x \geqslant 2 \\ 1, \; se\; x \leqslant 1 \end{cases} \tag{7-10}$$

Satisfazendo $-2 \leqslant \chi'(x) \leqslant 0$ e

$$\psi(u) = \chi\left\{\frac{\frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx}{2A.(|I(u)|^p+1)^{1/p}}\right\} \tag{7-11}$$

Defina

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \int_\Omega \psi(u) f u\, dx \tag{7-12}$$

Em particular o lema anterior implica que se $I'(u) = 0$ então $J'(u) = 0$. Mas só precisamos da reciproca desta afirmação. Agora vamos provar algumas das propriedades do funcional J, mas primeiro precisamos da seguinte estimativa:

Lema 10 *Seja $u \in supp\psi$, então*

$$\left|\int_\Omega f u\, dx\right| \leqslant \alpha_1(|I(u)|^q + 1) \tag{7-13}$$

onde α_1 depende de $\|f\|_{p'}$.

Demonstração do Lema 10:

$$\left|\int_{\Omega} fu\,dx\right| \leqslant \|f\|_{p'}\|u\|_p \leqslant \alpha_2\|u\|_q \tag{7-14}$$

se $u \in supp\psi$ então $\|u\|_q^q \leqslant 2A(|I(u)|^p+1)^{1/p} \leqslant \alpha_3(|I(u)|+1)$ logo

$$\left|\int_{\Omega} fu\,dx\right| \leqslant \alpha_2(\alpha_3(|I(u)|+1))^{1/q} \leqslant \alpha_1(|I(u)|^{1/q}+1) \tag{7-15}$$

□

Lema 11 *Existe uma constante β_1 dependendo de $\|f\|_{p'}$, tal que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,*

$$|J(u)-J(-u)| \leqslant \beta_1(|J(u)|^{1/q}+1)$$

Demonstração do Lema 11: Observe que $|J(u)-J(-u)| = (\psi(u)+\psi(-u))\left|\int_{\Omega} fu\,dx\right| \leqslant$

$$(\psi(u)+\psi(-u))\alpha_1(|I(u)|^{1/q}+1) \tag{7-16}$$

mas temos também $|I(u)| \leqslant |J(u)| + 2\left|\int_{\Omega} fu\,dx\right|$.

Logo $(\psi(u)+\psi(-u))\left|\int_{\Omega} fu\,dx\right| \leqslant (\psi(u)+\psi(-u))\alpha_1\left(|J(u)|^{1/q}+2\left|\int_{\Omega} fu\,dx\right|^{1/q}+1\right)$

$$(\psi(u)+\psi(-u))\left|\int_{\Omega} fu\,dx\right| \leqslant (\psi(u)+\psi(-u))\alpha_1\left(|J(u)|^{1/q}+\varepsilon\left|\int_{\Omega} fu\,dx\right|+\beta(\varepsilon)+1\right)$$

$$(1-\varepsilon)(\psi(u)+\psi(-u))\left|\int_{\Omega} fu\,dx\right| \leqslant (\psi(u)+\psi(-u))\alpha_1\left(|J(u)|^{1/q}+\beta(\varepsilon)+1\right)$$

e por fim

$$(\psi(u)+\psi(-u))\left|\int_{\Omega} fu\,dx\right| \leqslant \beta_1(|J(u)|^{1/q}+1) \tag{7-17}$$

como queriamos. □

Lema 12 *Existem constantes $M_0,\ \alpha_0 > 0$, e dependendo de $\|f\|_{p'}$ tais que, sempre que $M \geqslant 0,\ J(u) \geqslant M$ e $u \in supp\psi$, então $I(u) \geqslant \alpha_0 M$.*

Demonstração do Lema 12: Observe que $I(u) \geqslant J(u) - \left|\int_{\Omega} fu\,dx\right|$, e se $u \in supp\psi$, o lema 10 nos dá

$$I(u)+\alpha_1|I(u)|^{1/q} \geqslant J(u)-\alpha_1 \geqslant \frac{M}{2} \tag{7-18}$$

para algum M_0 grande o suficiente.
Se $I(u) \leqslant 0$

$$\frac{\alpha_1^{q'}}{q'} + \frac{1}{q}|I(u)| \geqslant \alpha_1 |I(u)|^{1/q} \geqslant \frac{M}{2} + |I(u)| \tag{7-19}$$

que é impossivel se $M_0 \geqslant \frac{2\alpha_1^{q'}}{q'}$, que podemos assumir ser o caso. Então $I(u) > 0$ e

$$I(u) + \frac{1}{q}I(u) + \frac{\alpha_1^{q'}}{q'} \geqslant \frac{M}{2} \tag{7-20}$$

$$I(u) \geqslant \frac{q'M - 2\alpha_1^{q'}}{2q'} \frac{q}{q+1} = \alpha_0 M \tag{7-21}$$

Como queriamos. $\square$

Lema 13 *Existe uma constante $M_1 > 0$ tal que $J(u) \geqslant M_1$ e $J'(u) = 0$ implica que $J(u) = I(u)$ e $I'(u) = 0$.*

Demonstração do Lema 13: É suficiente mostrar que $\psi(u) = 1$ e $\psi'(u) = 0$, e pela definição de ψ, este será o caso se

$$\frac{\frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx}{2A.(|I(u)|^p + 1)^{1/p}} \leqslant 1 \tag{7-22}$$

que é o que vamos verificar agora. Para simplificar a notação denotaremos por

$$\mathscr{I}(u) := 2A.(|I(u)|^p + 1)^{1/p}$$

$$J'(u)u = \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \lambda \int_\Omega |u|^q dx - \int_\Omega (\psi(u) + \psi'(u)u) f u \, dx \tag{7-23}$$

onde

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \chi(\cdots) \\ \psi'(u)u &= \chi'(\cdots)\mathscr{I}(u)^{-2}\left[\mathscr{I}(u)\lambda \int_\Omega |u|^q dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx \mathscr{I}'(u)u\right] \\ e\ \mathscr{I}'(u)u &= 2A(|I(u)|^p + 1)^{1/p-1} I(u)^{p-1}\left[\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \lambda \int_\Omega |u|^q dx - \int_\Omega f u \, dx\right] \end{aligned}$$

logo,

$$J'(u)u = (1 + T_1(u))\int_\Omega |\nabla u|^p dx - (1 + T_2(u))\int_\Omega |u|^q dx - (\psi(u) + T_1(u))\int_\Omega f u \, dx \tag{7-24}$$

Em que

$$\begin{cases} T_1(u) = \chi'(\cdots)\mathscr{I}(u)^{-2}\frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx\ 2A(|I(u)|^p+1)^{\frac{1}{p}-1}I(u)^{p-1}\int_\Omega fu\,dx \\ T_2(u) = \chi'(\cdots)\mathscr{I}(u)^{-1}\lambda\int_\Omega fu\,dx + T_1(u) \end{cases} \tag{7-25}$$

$$J(u) = J(u) - \frac{1}{p(1+T_1(u))}J'(u)u = \left(\frac{1+T_2(u)}{p(1+T_1(u))} - \frac{1}{q}\right)\lambda\int_\Omega |u|^q dx + \left(\frac{1}{p}-1\right)\int_\Omega fu\,dx \tag{7-26}$$

Se $T_1(u) = T_2(u) = 0$, estamos precisamente na situação de 7-2 e 7-22 se reduz a 7-1. Se $T_1(u)$ e $T_2(u)$ são suficientemente pequenos, as estimativas do lema 9 transferem a este caso, trocando o fator A em 7-1 por $2A$. Então o lema segue se provarmos que $T_1(u),\ T_2(u) \to 0$, quando $M \to \infty$. Observe que e $u \in supp\psi$, então $T_1(u) = 0$, já se $u \notin supp\psi$, os lemas 10 e 12 nos dão

$$\begin{aligned} T_1(u) = \chi'(\cdots)\mathscr{I}^{-2}(u)\frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx\ 2A(|I(u)|^p+1)^{\frac{1}{p}-1}I(u)^{p-1}\int_\Omega fu\,dx \\ \chi'(\cdots)\mathscr{I}^{-2}(u)\frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx\ \mathscr{I}(u)\left(\frac{2A}{2A}\right)^p(|I(u)|^p+1)^{(-\frac{1}{p})p}I(u)^{p-1}\int_\Omega fu\,dx = \\ = \chi'(\cdots)\,(2A)^p\,(\mathscr{I}(u))^{-(p+1)}\frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx I(u)^{p-1}\int_\Omega fu\,dx \\ |T_1(u)| \leqslant 4\,(2A)^p\,(\mathscr{I}(u))^{-p}I(u)^{p-1}\int_\Omega fu\,dx \leqslant \\ 4\alpha_2\mathscr{I}(u)^{-1}\int_\Omega fu\,dx \leqslant 4\alpha_2\mathscr{I}(u)^{-1}\alpha_1(I(u)^{\frac{1}{q}}+1) \leqslant \\ 4\alpha_2\mathscr{I}(u)^{-1}\alpha_1[(I(u)^p+1)^{\frac{1}{p}\frac{1}{q}}+1] \leqslant \alpha_3\mathscr{I}(u)^{-1}\left[\mathscr{I}(u)^{1/q} + \frac{1}{(2A)^{1/q}}\right] \leqslant \\ \alpha_3 M_1^{-1+\frac{1}{q}} + \alpha_3\frac{M_1^{-1}}{(2A)^{1/q}} \overset{M_1\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

E como $T_2(u) = \chi'(\cdots)\mathscr{I}^{-1}(u)\lambda\int_\Omega fu\,dx + T_1(u)$,

$$|T_2(u)| \leqslant 2kM^{-1+\frac{1}{q}} + |T_1(u)| \overset{M_1\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Como queriamos.

□

Lema 14 *$J \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega))$ e existe uma constante $M_2 > 0$ tal que J satisfaça (P-S) em $A_{M_2} := \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) | J(u) \geqslant M_2\}$*

Demonstração do Lema 14: Como $I \in C^1$, resta a nós provar apenas que $F(u) = \int_\Omega \psi(u) fu\,dx$, é C^1. Podemos ver facilmente que F é derivável, com derivada

$$F'(u)v = \int_\Omega \psi'(u)v\,fu + \psi(u)fv\,dx \tag{7-27}$$

Novamente o segundo termo da soma dentro da integral, é continuo. Assim se provarmos que $\int_\Omega \psi'(u)vfu\,dx$ é continua, fica claro que $J \in C^1$.

$$\psi'(u)v = \chi'(\cdots)\mathscr{I}(u)^{-2}\left[\mathscr{I}(u)\lambda\int_\Omega |u|^{q-2}uv\,dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx\mathscr{I}'(u)v\right] \tag{7-28}$$

portanto

$$\int_\Omega \psi'(u)vfu\,dx = \chi'(\cdots)\mathscr{I}(u)^{-2}\left[\mathscr{I}(u)\lambda\int_\Omega |u|^{q-2}uv\,dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx\mathscr{I}'(u)v\right]\int_\Omega fu\,dx \tag{7-29}$$

que é continua, como queríamos.
Para verificar 3.9, agimos como no lema 13. Supunha $(u_m) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ com

$$M_2 \leqslant J(u_m) \leqslant K \ e \ J'(u_m) \to 0$$

Então para algum m grande,

$$\begin{aligned} J(u_m) - \rho J'(u_m)u_m \leqslant K - \rho J'(u_m)u_m \leqslant K + |J'(u_m)|\,|u_m| \leqslant \rho\|u_m\| + K = \\ \left(\frac{1}{p} - \rho(1+T_1(u_m))\right)\int_\Omega |\nabla u_m|^p dx + \left[\lambda\rho(1+T_2(u_m)) - \frac{\lambda}{q}\right]\int_\Omega |u_m|^q dx + \\ + [\rho(\psi(u_m)+T_1(u_m)) - \psi(u_m)]\int_\Omega fu\,dx \end{aligned}$$

onde ρ é livre até o momento. Agora temos:

$$\begin{aligned} \rho\|u_m\| + K \geqslant \left(\frac{1}{p} - \rho(1+T_1(u_m))\right)\|u_m\|^p + [q\rho(1+T_2(u_m)) - 1]\frac{\lambda}{q}\|u_m\|_q^q + \\ + \rho(\psi(u_m)+T_1(u_m))\int_\Omega fu\,dx - \psi(u_m)\|f\|_{p'}\|u_m\|_p \end{aligned} \tag{7-30}$$

onde para um M_2 grande o suficiente, ou seja T_1, T_2 pequenos o suficiente,

$$\begin{aligned} \rho\|u_m\| + K \geqslant \left(\frac{1}{p} - \rho(1+T_1(u_m))\right)\|u_m\|^p + [q\rho(1+T_2(u_m)) - 1]\frac{\lambda}{q}\|u_m\|_q^q + \\ - [\rho(1+T_1(u_m)) + 1]\|f\|_{p'}\|u_m\|_p - \alpha_3\|u_m\|_p \end{aligned}$$

Escolhendo $\rho \in \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right)$ e $\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(1+T_1(u_m))} > \rho+\varepsilon > \rho-\varepsilon > \frac{1}{q(1+T_2(u_m))}, &\text{ ou seja} \\ \frac{1}{p} - \rho(1+T_1(u_m)) > \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\frac{1+T_1(u_m)}{1+T_1(u_m)} + \varepsilon, &\text{ e também} \\ -\frac{1}{q} + \rho(1+T_2(u_m)) > -\frac{1}{q} + \frac{1}{q}\frac{1+T_2(u_m)}{1+T_2(u_m)} + \varepsilon& \end{aligned}$$

ocorra uniformemente em m. Então (7-30) mostra

$$\rho\|u_m\| + K \geqslant \varepsilon\|u_m\|^p + \varepsilon\frac{\lambda}{q}\|u_m\|_q^q - \alpha_4\|u_m\|_p \tag{7-31}$$

Usando imersão de Sobolev, finalmente obtemos

$$\rho\|u_m\| + K \geqslant \varepsilon\|u_m\|^p - c\|u_m\| \tag{7-32}$$

oque implica que u_m é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Por fim, o fato de

$$\left(J'(u_m) - J'(u)\right)(u_m - u) \longrightarrow 0 \tag{7-33}$$

$$\int_\Omega [|u_m|^{q-2}u_m - |u|^{q-2}u](u_m-u)dx \longrightarrow 0 \tag{7-34}$$

$$\int_\Omega (\psi(u_m)-\psi(u))f(u_m-u) + f(\psi'(u_m)-\psi'(u))(u_m-u)dx \longrightarrow 0 \tag{7-35}$$

juntamente com

$$\left(J'(u_m) - J'(u)\right)(u_m - u) = \int_\Omega (|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla(u_m-u) \tag{7-36}$$

$$- \int_\Omega [|u_m|^{q-2}u_m - |u|^{q-2}u](u_m-u)dx \tag{7-37}$$

$$- \int_\Omega (\psi(u_m)-\psi(u))f(u_m-u) + f(\psi'(u_m)-\psi'(u))(u_m-u)dx \tag{7-38}$$

nos dá que

$$\int_\Omega (|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla(u_m-u) \longrightarrow 0 \tag{7-39}$$

A desigualdade de Simon nos fornece então

$$\int_\Omega (|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla(u_m-u) \geqslant \begin{cases} c_p\int_\Omega |\nabla u_m - \nabla u|^p dx, \; 2 \leqslant p \\ c_p\int_\Omega \frac{|\nabla u_m-\nabla u|^2}{(1+|\nabla u_m|+|\nabla u|)^{2-p}}dx, \; p<2 \end{cases} \tag{7-40}$$

E em ambos os casos temos convergencia forte em $W^{1,p}(\Omega)$, já que para o caso $p < 2$ a convergência é garantida pelas imersão de $L^p(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, concluindo assim que J satifaz (3.9). $\square$

Observe que apartir do lema 13, se encontrarmos algum valor crítico de J e este for grande o suficiente, então temos soluções para o problema (1-5). Vamos construir uma sequência de valores críticos de J, tendendo ao infinito.

Para simplificar a notação vamos assumir $\Omega = (0,1)^N$. Seja E_k, um subespaço k-dimensional de $W_0^{1,p}(\Omega)$, gerado pelas primeiras k autofunções da base

$$\{(\text{sen} k_1 \pi x_1 \dots \text{sen} k_N \pi x_N), k_i \in \mathbb{N},\ i = 1, \dots, N\} \tag{7-41}$$

Neste espaço de dimensão finita se pode construir uma sequência crescente de números $R_j > 0$ (tão grande quanto se queira), tal que:

$$J(u) < 0,\ \text{se } u \in E_j \cap B_{R_j}^c \tag{7-42}$$

Basta notar que

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \int_\Omega \psi(u) f u\, dx \tag{7-43}$$

$$= \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\lambda}{q}\|u\|_q^q - \int_\Omega \psi(u) f u\, dx \leqslant \frac{1}{p}\|u\|^p - c_k\frac{\lambda}{q}\|u\|^q + \int_\Omega \psi(u) f(-u)\, dx \tag{7-44}$$

$$\leqslant \frac{1}{p}\|u\|^p - c_k\frac{\lambda}{q}\|u\|^q + c_k'\|f\|_{p'}\|u\|\, dx \overset{R_j\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \tag{7-45}$$

Seja $D_j = B_{R_j} \cap E_j$ e defina

$$G_j = \{h \in C(D_j; W_0^{1,p}) : h \text{ é impar},\ h|_{\partial B_{R_j}\cap E_j} = Id\} \tag{7-46}$$

$$b_j = \inf_{h\in G_j} \max_{u\in D_j} J(h(u)) \tag{7-47}$$

Primeiro mostraremos que a sequência $\{b_k\}$ está bem definida e é crescente. Precisamos do seguinte Lema.

Lema 15 *Existe uma constante $c > 0$, tal que se $u \in E_k^c$, então*

$$\|u\| \leqslant k^{-\frac{1}{N}}\|\nabla u\|_p \tag{7-48}$$

Demonstração do Lema 15:

Para a demonstração veja [14] $\square$

Proposição 7.1 *Seja b_k definida por (7-47), então existe $\beta > 0$, tal que*

$$b_k \geqslant \beta k^{\sigma} \tag{7-49}$$

onde $\sigma = \frac{pq}{N(q-p)} - 1$

Demonstração da Proposição 7.1:
Dado $h \in G_k$, e $\rho < R_j$, podemos provar que $h(D_k) \cap \partial B_\rho \cap E_{k-1}^c \neq \emptyset$.
De fato, é suficiente mostrar que $\gamma(h(D_k) \cap \partial B_\rho) \geqslant k$, e aplicar o item 9 da proposição 3.8. Seja $A = \{x \in D_k : h(x) \in B_\rho\}$. É claro que $0 \in A$, pois h é impar, então definimos A_0 como sendo a componente conexa de A contendo 0. A_0 é uma vizinhança simétrica, limitada de 0 em E_k, então $\gamma(\partial A_0) = k$ Ainda mais $h(\partial A_0) \subset \partial B_\rho$. Suponha que não, então dado $x \in \partial A_0$, tal que $h(x) \in B_\rho$, se $x \in D_k$, existe uma vizinhaça de x, U tal que $h(U) \subset B_\rho$, então $x \notin \partial A_0$. Logo $x \in \partial D_k$, mas $h|_{\partial D_k} = Id$, e isto implica que $\|h(x)\| = \|x\| = R_k > \rho$, oque nos da uma contradição. Agora, se definirmos

$$B = \{x \in D_k : h(x) \in \partial B_\rho\}$$

Temos $\partial A_0 \subset B$ e $\gamma(h(D_k) \cap \partial B_\rho) = \gamma(h(B)) \geqslant \gamma(B) \geqslant \gamma(\partial A_0) = k$
Note que a condição de h ser impar é essêncial para obter o resultado, então é um elemento importante de G_k.
Seja $u \in \partial B_\rho \cap E_{k-1}$, então

$$J(u) \geqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx - c_1\|u\|_p$$

onde $c_1 = c_1(\|f\|_{p'})$. Usando a desigualdade de Galiardo-Niremberg

$$\left(\int_\Omega |u|^q dx\right) \leqslant C\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{a}{p}}\left(\int_\Omega |u|^p\right)^{(1-a)/p} \tag{7-50}$$

Com $a = (N/p)(1-p/q)$, obtemos

$$J(u) \geqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{q}C\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{q\frac{a}{p}}\left(\int_\Omega |u|^p\right)^{q\frac{(1-a)}{p}} - c_1\|u\|_p \tag{7-51}$$

Ainda mais, $u \in E_{k-1}^c$, então pelo lema 15

$$\|u\|_p \leqslant \frac{c\|\nabla u\|_p}{k^{1/N}} \tag{7-52}$$

Finalmente por (7-51) e (7-52) obtemos

$$J(u) \geqslant \frac{1}{p}\rho^p - c_1\left(\frac{c}{k^{q(1-a)N}}\right)\rho^q - \left(\frac{c_3}{k^{1/N}}\right)\rho = \rho^p\left(\frac{1}{p} - \frac{c_2}{k^{q(1-a)/N}}\rho^{q-p}\right) - \frac{c_3}{K^{1/N}}\rho \tag{7-53}$$

Agora escolhemos

$$\rho_k = \left\{\frac{k^{q(1-a)/N}}{2pC_2}\right\}^{1/(q-p)} \tag{7-54}$$

então

$$J(u) \geqslant \frac{1}{2p}\rho_k^p - \frac{c_3}{k^{1/N}}\rho_k \geqslant ck^{pq\frac{(1-a)}{N(q-p)}} \tag{7-55}$$

para um k grande o suficiente. Então, por (7-50) e (7-55) obtemos para toda $h \in G_k$, $\max_{u\in D_k} J(h(u)) \geqslant ck^{\sigma}$, onde

$$\sigma = \frac{pq(1-a)}{N(q-p)} = \frac{pq}{N(q-p)} - 1 \tag{7-56}$$

e isto implica (7-49). □

Se tentarmos provar que b_k é valor crítico de J, vamos encontrar uma obstrução importante, a menos que $f \equiv 0$. De fato, no caso $f \not\equiv 0$ o funcional associado J, não é par, e o lema de deformação nos dá um homeomorfismo que não é impar. Então, dado $h \in G_k$, em geral $\eta \circ h \notin G_k$, e a prova clássica não funciona.

Entretanto, a sequência $\{b_k\}$ nos permite mostrar que outras sequências mini-máx que serão construidas, estão bem definidas e verificam as estimativas apropriadas. Defina

$$U_k = \{u = te_{k+1} + \omega,\ t \in [0, R_{k+1}],\ \omega \in B_{R_{k+1}} \cap E_k,\ \|u\| \leqslant R_{k+1}\} \tag{7-57}$$

$$\Lambda_k = \{H \in C(U_k, W_0^{1,p}(\Omega)), H|_{D_k} \in G_k,\ h|_{(\partial B_{R_{k+1}} \cap E_{k+1}) \cup (B_{R_{k+1}} \cap B^c_{R_k} \cap E_k)} = Id\} \tag{7-58}$$

$$c_k = \inf_{H\in\Lambda_k} \max_{u\in U_k} J(H(u)) \tag{7-59}$$

Esta sequência minimax possui o mesmo problema que a b_k; Se $h|_{D_k} \in G_k$, então $H|_{D_k}$ é impar, mas $\eta \circ H|_{D_k}$ não é impar. Entretanto, é claro que $c_k \geqslant b_k$, e se $c_k > b_k$, podemos resolver nosso problema, como a seguinte proposição mostra.

Proposição 7.2 *Se $c_k > b_k > M_1$ (onde M_1 é a constante do lema 13), dado $\delta \in (0, c_k - b_k)$ nós definimos*

$$\Lambda_k(\delta) = \{H \in \Lambda_k; J(H(u)) \leqslant b_k + \delta,\ \forall u \in D_k\} \tag{7-60}$$

$$c_k(\delta) = \inf_{H\in\Lambda_k(\delta)} \max_{u\in U_k} J(H(u)). \tag{7-61}$$

Então $c_k(\delta)$ é valor crítico de J.

Demonstração da Proposição 7.2: Pela definição (7-47) fica claro que $\Lambda_k(\delta) \neq \emptyset$. E por (7-59) e (7-61) também é claro que $c_k(\delta) \geqslant c_k$.
Soponha que $c_k(\delta)$ não é valor crítico e tome $\varepsilon < \frac{1}{2}(c_k - b_k - \delta)$. Pelo lema de deformação de Clark, obtemos um homeomorfismo $\eta : W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ com as seguintes propriedades:

$$\eta(J^{c_k(\delta)+\varepsilon}) \subset J^{c_k(\delta)-\varepsilon} \tag{7-62}$$

$$\eta(u) = u, \text{ se } u \notin J^{-1}([c_k(\delta) - 2\varepsilon, c_k(\delta) + 2\varepsilon]) \tag{7-63}$$

$$\text{Note que se } u \in D_k \text{ e } H \in \Lambda_k(\delta), \text{ então} \tag{7-64}$$

$$J(H(u)) \leqslant b_k + \delta < c_k - 2\varepsilon \tag{7-65}$$

ou seja, se $H \in \Lambda_k(\delta)$, por (7-63) e (7-64), então $\eta \circ H|_{D_k} = H|_{D_k} \in G_k$. Resolvemos então a falta de simetria em η. Agora é fácil concluir, nós provamos que $\eta \circ H \in \Lambda_k(\delta)$ e encontramos uma contradição com (7-61) e (7-62) □

Resta a nós provar que é impossível se ter $c_k = b_k$ para todo k, para isto precisaremos do seguinte Lema devido a Bahri e Berestycki (ver [2]).

Lema 16 *Seja $(d_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de números positivos tal que $0 \leqslant d_{k+1} - d_k \leqslant \delta d_k \theta$, para todo $k \geqslant k_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, e $0 < \theta < 1$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que $d_k \leqslant C k^{1/1-\theta}$, para todo $k \geqslant k_0$.*

Demonstração do Lema 16: Defina $\delta_k = k^{-1/(1-\theta)} d_k > 0$, queremos mostrar que δ_k é uma sequência limitada quando $k \to \infty$. Usando o fato de que $(1+t)^{\xi} \geqslant 1 + \xi t$ para $\xi = 1/(1-\theta) > 1$ e $t > 0$, nós concluimos de $0 \leqslant d_{k+1} - d_k \leqslant \delta \delta_k^{\theta} k^{-1}$, que

$$1/(1-\theta)\delta_{k+1} K^{-1} + \delta_{k+1} - \delta_k \leqslant \delta \delta_k^{\theta} K^{-1}, \tag{7-66}$$

de onde segue que:

(i) ou $\delta_{k+1} \leqslant \delta_k$

(ii) ou $\delta_k \leqslant \delta_{k+1} \leqslant \delta(1-\theta)\delta_k^{\theta}$, que implica que $\delta_k \leqslant [\delta(1-\theta)]^{1/(1-\theta)}$ e então, $\delta_{k+1} \leqslant [\delta(1-\theta)]^{1-\theta} = M$.

Logo nós sempre temos $\delta_{k+1} \leqslant \max\{\delta_k, M\}$, para todo $k \geqslant k_0$, de onde segue que $\delta_k \leqslant \max\{\delta_{k_0}, M\}$ e a sequência δ_k é limitada. □

Proposição 7.3 *Se $c_k = b_k$, $\forall k \geqslant k^*$, existe alguma constante $c > 0$, e $k' \geqslant k^*$, tal que*

$$b_k \leqslant c k^{\frac{q}{q-1}}, \ \forall k \geqslant k' \tag{7-67}$$

Demonstração da Proposição 7.3: Basicamente a ideia é usar que $D_{k+1} = (U_k) \cup (-U_k)$, e se $H \in \Lambda_k$ é possivel extendê-la para uma função de G_k. Por (7-58) e (7-59), podemos escolher $H \in \Lambda_k$ tal que

$$\max_{u \in U_k} J(H(u)) \leqslant c_k + \varepsilon = b_k + \varepsilon \tag{7-68}$$

e por (7-47), tomando a extensão de H, nós temos

$$b_{k+1} \leqslant \max_{u \in D_{k+1}} J(H(u)) \tag{7-69}$$

se o máximo é atingido em U_k então

$$b_{k+1} \leqslant \max_{u \in D_{k+1}} J(H(u)) = \max_{u \in U_k} J(H(u)) \leqslant c_k + \varepsilon \leqslant b_k + \varepsilon \tag{7-70}$$

se o máximo é atingido em $-U_k$, podemos usar o lema 13 da seguinte maneira:
Suponha $\max_{u \in D_{k+1}} J(H(u)) = J(H(\omega))$, para algum $\omega \in -U_k$. Então

$$J(H(-\omega)) \geqslant J(H(\omega)) - \beta(|J(H(-\omega))|^{1/q} + 1) \tag{7-71}$$

$$\geqslant b_{k+1} - \beta((b_k + \varepsilon)^{1/q} + 1) \geqslant b_{k+1} - \beta((b_{k+1} + \varepsilon)^{1/q} + 1) > 0 \tag{7-72}$$

para k grande.
Se $J(H(-\omega)) > 0$

$$\begin{aligned} b_{k+1} &\leqslant J(H(-\omega)) = J(-H(-\omega)) \\ &\leqslant J(H(-\omega)) + \beta(J(H(-\omega))^{1/q} + 1) \\ &\leqslant b_k + \varepsilon + \beta((b_k + \varepsilon)^{1/q} + 1) \end{aligned} \tag{7-73}$$

fazendo $\varepsilon \to 0$ em (7-70) e (7-73) obtemos $b_{k+1} \leqslant b_k + \beta(b_k^{1/q} + 1)$. Finalmente, esta desigualdade juntamente com o lema 16 implicam 7-67. $\square$

Demonstração do Teorema 1.4:
Basta utilizar a proposição 7.3 juntamente com 7.1 e 7.2. $\square$

APÊNDICE A

Sobre o operador p-Laplaciano

Vamos estudar o operador p-laplaciano definido por

$$\Delta_p u \equiv div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u),\ 1 < p < \infty$$

Note que se $p = 2$ ele se torna o operador Laplaciano classico. Nesta seção vamos trabalhar com o problema de Dirichlet,

$$\begin{cases} \Delta_p u = f(x)\ se\ x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0\ se\ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{A-1}$$

onde $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, $p' = p/(p-1)$. A condição de fronteira será entendida como $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Nós temos os seguintes resultados elementares do Calculo de Variações.

Teorema A.1 *Assuma $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um dominio limitado e $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, então o problema* (A-1) *tem uma solução $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ no sentido fraco,*

$$\int_\Omega (\langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla\phi\rangle - f\phi)dx = 0 \tag{A-2}$$

Demonstração do Teorema A.1: O funcional

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx - \int_\Omega f(x)u\, dx,\ \ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{A-3}$$

Pode ser visto como soma dos seguintes funcionais

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx\ ,\ L(u) = \int_\Omega f(x)u\, dx \tag{A-4}$$

como $L(u)$ é linear e diferenciável, sua derivada é ele mesmo. Queremos agora derivar o funcional $I(u)$.

$$\lim_{t\to 0}\frac{I(u+tv)-I(u)}{t}=\lim_{t\to 0}\int_{\Omega}\frac{|\nabla u+t\nabla v|^{p}-|\nabla u|^{p}}{t}dx \tag{A-5}$$

como

$$\lim_{t\to 0}\frac{-|\nabla u|^{p}+|\nabla u+t\nabla v|^{p}}{t}\underset{q.t.p.}{=}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v \tag{A-6}$$

o teorema do valor médio nos da a igualdade

$$(\text{A-5})=\lim_{t\to 0}\int_{\omega}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v_{t}dx\leqslant \tag{A-7}$$

$$\lim_{t\to 0}\int_{\omega}|\nabla u|^{p-1}|\nabla v|dx\underset{Holder}{<}+\infty \tag{A-8}$$

Logo I(u) é derivável, implicando ser J(u) derivável, com derivada

$$\langle J'(u),v\rangle=\int_{\Omega}\{\langle|\nabla u|^{p-2}\nabla u,\nabla v\rangle-fv\}dx \tag{A-9}$$

E nosso problema se resume em encontrar um ponto critico para J. Mas temos que:

i) J é coercivo pois

$$J(u)\geqslant\frac{1}{p}||u||^{p}_{W_0^{1,p}}-||f||_{p'}||u||_{p} \tag{A-10}$$

$$\geqslant\frac{1}{p}||u||^{p}_{W_0^{1,p}(\Omega)}-K||f||_{p'}||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \tag{A-11}$$

$$=\frac{1}{p}||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)}(||u||^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}-K||f||_{p'}) \tag{A-12}$$

ii) J é semicontínuo inferiormente pois o seu primeiro termo é a norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e o segundo é continuo. Então podemos afirmar que J tem um mínimo, ou seja um ponto crítico.

□

Obs. 4 *Para a unicidade, sejam u_1 e u_2 soluções do problema, então*

$$\int_{\Omega}\langle|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1-|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2,\nabla\phi\rangle dx=0,\ \forall\phi\in W^{1,p}(\Omega)$$

se tomarmos $\phi=u_1-u_2$ temos

$$\int_{\Omega}\langle|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1-|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2,\nabla(u_1-u_2)\rangle dx\geqslant\begin{cases}c_p\int_{\Omega}|u_1-u_2|^{p},\ se\ p\geqslant 2\\ c_p\int_{\Omega}\dfrac{|u_1-u_2|^{2}}{(|u_1|+|u_2|)^{2-p}},\ se\ 1<p<2\end{cases}$$

logo,

$$\begin{cases} c_p \int_\Omega |u_1 - u_2|^p \leqslant 0, \ se\ p \geqslant 2 \\ c_p \int_\Omega \dfrac{|u_1 - u_2|^2}{(|u_1| + |u_2|)^{2-p}} \leqslant 0, \ se\ 1 < p < 2 \end{cases}$$

que em ambos os casos implica $u_1 = u_2$ e o problema possui solução única.

Na observação foi utilizado o seguinte lema.

Lema 17 *Seja $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto escalar canônico do $\mathbb{R}^N$. Então*

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \geqslant \begin{cases} c_p |x-y|^p & se\ p \geqslant 2 \\ c_p \dfrac{|x-y|^2}{(|x| + |y|)^{2-p}} & se\ 1 < p < 2 \end{cases} \tag{A-13}$$

Demonstração do Lema 17: Pela homogeneidade podemos assumir que $|x| = 1$ e $|y| \leqslant 1$. E então escolhendo uma base conveniente de $\mathbb{R}^N$ podemos assumir

$$x = (1, 0, ..., 0), \ y = (y_1, y_2, 0, ..., 0), \ e \ \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \leqslant 1.$$

i) Caso $1 < p < 2$. É fácil ver que a desigualdade é equivalente a

$$\left\{ \left(1 - \frac{y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}} \right)(1 - y_1) + \frac{y_2^2}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}} \right\} \frac{\left(1 - \sqrt{y_1^2 + y_2^2}\right)^{2-p}}{(1 - y_1)^2 + y_2} \geqslant C. \tag{A-14}$$

Mas

$$1 - \frac{y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{2-p}} \geqslant \begin{cases} 1 - \dfrac{y_1}{|y_1|^{2-p}} \geqslant (p-1)(1 - y_1), \ se\ 0 \geqslant y_1 \geqslant 1 \\ 1 - y_1 \geqslant (p-1)(1 - y_1), \ se\ y_1 \leqslant 0 \end{cases}$$

Então

$$(p-1)\{(1 - y_1)^2 + y_2{}^2\} \frac{(1 + y_1 + y_2)^{\frac{2-p}{2}}}{(1 - y_1)^2 + y_2{}^2} \geqslant p - 1$$

ii) Caso $p \geqslant 2$. A desigualdade é equivalente a provar que

$$\frac{\left[1 - y_1(y_1{}^2 + y_2{}^2)^{\frac{p-2}{2}}\right](1 - y_1) + y_2{}^2(y_1{}^2 + y_2{}^2)^{\frac{p-2}{2}}}{((1 - y_1)^2 + y_2{}^2)^{\frac{p}{2}}} \geqslant C.$$

Denote $t = \dfrac{|y|}{|x|}$ e $s = \dfrac{\langle x, y \rangle}{|x||y|}$ então, nos precisamos mostrar que a função

$$f(t, s) = \frac{1 - (t^{p-1} + t)s + t^p}{(1 - 2ts + t^2)^{\frac{p}{2}}},$$

é limitada por baixo. Se fixarmos t temos que $\dfrac{\partial f}{\partial s} = 0$ se

$$1-(t^{p-1}+t)s+t^p = (1-2ts+t^2)\frac{t^{p-2}+1}{p}$$

então para o s crítico de f temos

$$f(t,s) = \frac{t^{p-2}+1}{p}\frac{1}{(1-2ts+t^2)^{\frac{p-2}{2}}} \geqslant$$
$$\frac{1}{p}\frac{t^{p-2}+1}{(t+1)^{-2}} \geqslant \frac{1}{p}\min_{0\leqslant t\leqslant 1}\frac{t^{p-2}+1}{(t+1)^{-2}} \geqslant \frac{1}{C_p}$$

□

Estamos interessados nas propriedades do operador inverso

$$(-\Delta_p u)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$$

que são colocadas no seguinte teorema.

Teorema A.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado.*

A) $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ é uniformemente continuo em conjuntos limitados

B) O operador inverso$(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$, existe e é contínuo

C) O operador composto

$$(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

é compacto se $1 \leqslant q < \dfrac{pN}{N-p}$.

Demonstração do Lema A.2:
A) Considere $C \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ um conjunto limitado, ou seja,

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} < M,\ se\ u \in C$$

Então para $u, v \in C$ nós temos

$$\|-\Delta_p u - (-\Delta_p v)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \sup_{\|\phi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \int_\omega \langle \Delta_p u - \Delta_p v, \nabla\phi\rangle dx \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \mathscr{C}_p \sup_{\|\phi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \int_\omega (|\nabla u|^{p-2} + |\nabla v|^{p-2})|\nabla u - \nabla v||\nabla\phi| dx,\ se\ p \geqslant 2 \\ \mathscr{C}_p \sup_{\|\phi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \int_\omega |\nabla u - \nabla v|^{p-1}|\nabla\phi| dx,\ se\ p \leqslant 2 \end{cases}$$

Ver [17].
E então pela desigualdade de Hölder nós podemos concluir que

$$\|-\Delta_p u - (-\Delta_p v)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leqslant \begin{cases} 2\mathscr{C}_p M^{p-2} \|\nabla u - \nabla v\|_p, \ se \ p \geqslant 2 \\ \mathscr{C}_p M \|\nabla u - \nabla v\|_p, \ se \ p \leqslant 2 \end{cases} \tag{A-15}$$

B)Pode ser demonstrado como na observação 4;
C) É consequeência direta de B) e da Imersão de Sobolev. □

Lema 18 (Princípio de Comparação Fraca) *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, com fronteira suave. Se u_1, u_2 satisfazem*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_1 \leqslant -\Delta_p u_2 \ no \ sentido \ fraco \ em \ \Omega \\ u_1 \leqslant u_2 \ em \ \partial\Omega \end{cases} \tag{A-16}$$

Então $u_1 \leqslant u_2$ em Ω.

Demonstração do Lema 18: Tome como função teste $\phi = \max\{u_1 - u_2, 0\}$, que é não negativa e utilizando Stampacchia, provamos que $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Então temos

$$\int_\Omega \langle |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2, \nabla\phi \rangle dx \leqslant 0 \tag{A-17}$$

E então concluimos pelo lema 17 que o conjunto onde $\phi \neq 0$ tem medida nula. □

Lema 19 *Seja Ω um domínio limitado com fronteira suáve. Se $u \in C^1 \bigcap W_0^{1,p}$ e verifica:*

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geqslant 0 \ em \ \mathscr{D}' \\ u > 0 \ em \ \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{A-18}$$

Então $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} < 0$ em $\partial\Omega$. Onde η é a normal exterior a $\partial\Omega$.

Demonstração do Lema 19: Vamos assumir que Ω satisfaz a condição da esfera interior. Considere $x_0 \in \partial\Omega$ e uma bola interior tangente a $\partial\Omega$, denotada por,

$$B_r(y) \subset \Omega, \ \overline{B}_r(y) \bigcap \partial\Omega = \{x_0\} \tag{A-19}$$

Defina

$$v(x) = \begin{cases} A|x-y|^{\frac{p-N}{p-1}} + B, \ se \ N \neq p \\ A \ln|x-y| + B, \ se \ N = p \end{cases} \tag{A-20}$$

Onde $A = [2^{\frac{N-p}{p-1}} - 1]^{-1} r^{\frac{N-p}{p-1}}$, $B = [1 - 2^{\frac{N-p}{p-1}}]^{-1}$ se $p \neg N$ e $A = -(\log 2)^{-1}$, $B = \dfrac{\log r}{\log 2}$ se $p = N$. A Função v satisfaz

1. $v(x) \equiv 1$ em $\partial B_{\frac{r}{2}}(y)$ e $v(x) \equiv 0$ em $\partial B_r(y)$,

2. $0 < v(x) < 1$ se $x \in B_r(y) - B_{\frac{r}{2}}(y)$ e
   $|\nabla v(x)| > c > 0$, para alguma constante positiva c.

Mas $u(x) > 0$ em Ω, então $\tau = \inf\{u(x); x \in \partial B_{\frac{r}{2}}(y)\} > 0$,
e colocando $\tau v = w$ obtemos que w satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta_p w = 0, \ se \ x \in B_r(y) - \overline{B}_{\frac{r}{2}}(y) \\ w(x) = \tau, \ se \ x \in \partial B_{\frac{r}{2}}(y) \ e \\ w(x) = 0, \ se \ x \in \partial B_r(y). \end{cases} \tag{A-21}$$

Agora como $w \leqslant u$ na fronteira do anel $B_r(y) - B_{\frac{r}{2}}(y)$ e $\Delta_p w \leqslant \Delta_p u$ em Ω no sentido fraco, então, o princípio de comparação fraco implica que $w \leqslant u$ em $B_r(y) - B_{\frac{r}{2}}(y)$. Tomando em conta que $u(x_0) = w(x_0) = 0$, então

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{u(x_0 - t\eta)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{w(x_0 - t\eta)}{t} = \frac{\partial w}{\partial \eta}(x_0) = \tau \frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) < 0. \tag{A-22}$$

$\square$

APÊNDICE B

Regularidade de Soluções para o p-Laplaciano

A limitação das soluções no caso $p \geqslant N$ é uma consequencia do Teorema de Morrey e o bootstrapping.

Um dos poucos resultados gerais para problemas com crescimento crítico é o que segue na regularidade $C^{1,\alpha}$. Vamos nos concentrar no seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{B-1}$$

Onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suáve, $1 < p < N$ e f satisfaz

$$|f(x,u)| \leqslant C(1+|u|^r), \text{ com } r+1 \leqslant p^* = \frac{Np}{N-p}. \tag{B-2}$$

A regularidade da solução de (B-1) para $r < p^* - 1$ é consequencia dos resultados no paper escrito por [23] sobre estimativas L^∞ e os resultados obtidos por [11, 24], para a regularidade $C^{1,\alpha}$. Vamos precisar do seguinte lema para dar continuidade a teoria.

Lema 20 *Assuma $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, ser não crescente e tal que se $h > k \geqslant k_0$, para algum $\alpha > 0$, $\beta > 1$, se tenha:*

$$\phi(h) \leqslant \frac{C}{(h-k)^\alpha} \cdot [\phi(k)]^\beta \tag{B-3}$$

Então $\phi(k_0 + d) = 0$, onde $d^\alpha = C \cdot 2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}} [\phi(k_0)]^{\beta-1}$

Demonstração do Lema 20: Tomando d como no enunciado defina $k_n = k_0 + d - \dfrac{d}{2^n}$, vamos utilizar indução para chegar ao resultado. Temos que:

$$\phi(k_1) \leqslant \frac{\phi(k_0)}{2^{-\frac{\alpha}{1-\beta}}} \tag{B-4}$$

Utilizando a hipótese de indução obtemos

$$\phi(k_{n-1}) \leqslant \frac{\phi(k_0)}{2^{-\frac{(n-1)\alpha}{1-\beta}}} \tag{B-5}$$

que juntamente com (B-3) nos dá

$$\phi(k_n) \leqslant \frac{C}{(k_n - k_{n-1})^{\alpha}} \cdot [\phi(k)]^{\beta} = \frac{d^{\alpha} \cdot [\phi(k_{n-1})]^{\beta}}{\frac{d^{\alpha}}{2^{n\alpha}} \cdot 2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}} [\phi(k_0)]^{\beta-1}} \leqslant \tag{B-6}$$

$$\leqslant \frac{d^{\alpha} \cdot [\phi(k_0)]^{\beta}}{\frac{d^{\alpha}}{2^{n\alpha}} \cdot 2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}} [\phi(k_0)]^{\beta-1} 2^{-\frac{(n-1)\beta\alpha}{1-\beta}}} = \tag{B-7}$$

$$= \frac{2^{n\alpha}\phi(k_0)}{2^{\frac{n\alpha\beta}{\beta-1}}} = \frac{\phi(k_0)}{2^{\frac{-n\alpha}{1-\beta}}}. \tag{B-8}$$

Agora aplicando o limite de $n \to \infty$ e observando que $k_n \to k_0 + d$ temos que $\phi(k_0 + d) \leqslant 0$, e como ϕ é não negativa obtemos a igualdade $\phi(k_0 + d) = 0$, como queriamos. □

Teorema B.1 *Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ uma solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g \text{ em } \Omega, \; g \in W^{-1,q}(\Omega), q > \dfrac{N}{p-1} \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{B-9}$$

Então $u \in L^{\infty}(\Omega)$.

Demonstração do Teorema B.1: Podemos escrever $g = divF$, $F = (F_1, F_2, ..., F_N)$ onde cada $F_i \in L^q(\Omega)$. Desde que u seja solução fraca de (B-9), podemos escrever

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = \int_{\Omega} \langle F, \nabla v \rangle dx, \forall v \in W_0^{1,p} \tag{B-10}$$

Para $k > 0$ vamos considerar a função teste

$$v = sign(u) \cdot (|u| - k) = \begin{cases} u - k \text{ se } u > k \\ 0 \text{ se } u = k \\ u + k \text{ se } u < k \end{cases} \tag{B-11}$$

Então $u = v + ksign(u)$ e $u_{x_i} = v_{x_i}$ em $A(k) = \{x \in \Omega; |u(x)| > k\}$, $v = 0$ em $\Omega - A(k)$ e $v \in W_0^{1,p}$. Daí (B-11) se torna

$$\int_{A(k)} |\nabla v|^p dx = \int_{\Omega} \langle F, \nabla v \rangle dx, \tag{B-12}$$

e pela desigualdade de Hölder obtemos

$$\int_\Omega \langle F, \nabla v\rangle dx \leqslant \left(\int_{A(k)} |F|^q dx\right)^{1/q} \left(\int_{A(k)} |\nabla v|^p dx\right)^{1/p} |A(k)|^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \tag{B-13}$$

logo

$$\left(\int_{A(k)} |\nabla v|^p dx\right)^{1-1/p} \leqslant \left(\int_{A(k)} |F|^q dx\right)^{1/q} |A(k)|^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \tag{B-14}$$

e então pela imersão de Sobolev chegamos a

$$S\left(\int_{A(k)} |v|^{p^*} dx\right)^{p/p^*} \leqslant \left(\int_{A(k)} |F|^q dx\right)^{1/q} |A(k)|^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \tag{B-15}$$

Observe que para $0 < k < h$, $A(h) \subset A(k)$ e então

$$|A(h)|^{1/p^*}(h-k) = \left(\int_{A(h)} (h-k)^{p^*} dx\right)^{1/p^*} \leqslant \left(\int_{A(h)} |v|^{p^*} dx\right)^{1/p^*} \leqslant \left(\int_{A(k)} |v|^{p^*} dx\right)^{1/p^*} \tag{B-16}$$

e juntando B-15 com B-16, temos

$$|A(h)| \leqslant \frac{\|F\|_q^{p^*/(p-1)}}{S^{p^*}(h-k)^{p^*}} \cdot |A(k)|^{[1-(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})]\frac{p^*}{p-1}} \tag{B-17}$$

Agora aplicamos o lema anterior para $\phi(h) = |A(h)|$, $\alpha = p^*$, $\beta = p^*(\frac{1}{p} - \frac{1}{q(p-1)}) > 1$, $C = \frac{\|F\|_q^{p^*/(p-1)}}{S^{p^*}}$. Temos que $\phi(0) = |\Omega|$ e o lema nos dá que $\phi(d) = 0$, para $d = \frac{C\|F\|_q^{\frac{1}{p-1}}}{S^{1/p}}|\Omega|^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q(p-1)}-\frac{1}{p^*})}$. Assim concluímos que

$$\|u\|_\infty \leqslant \frac{C\|F\|_q^{\frac{1}{p-1}}}{S^{1/p}}|\Omega|^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q(p-1)}-\frac{1}{p^*})} \tag{B-18}$$

□

Teorema B.2 *Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ uma solução de B-1. Se f verifica a condição B-2, então $u \in L^\infty(\Omega)$.*

Demonstração do Lema B.2: Vamos assumir $r+1 = p^*$ *e* $u \geqslant 0$, se não for o caso podemos trabalhar com as parte negativa e positiva da função u de maneira analoga.
Defina para cada $l > 0$ e $\beta > 1$

$$F(u) = \begin{cases} u^\beta \text{ se } u \leqslant l \\ \beta l^{\beta-1}(u-l) + l^\beta, \text{ se } u > l \end{cases} \tag{B-19}$$

e

$$G(u)=\begin{cases} u^{(\beta-1)p+1} \ se\ u\leqslant l \\ \beta((\beta-1)p+1)l^{(\beta-1)p}(u-l)+l^{(\beta-1)p+1},\ se\ u>l \end{cases} \tag{B-20}$$

Podemos ver que

(i) $G(u)\leqslant uG'(u)$

(ii) Para alguma constante C independente de l, $C[F'(u)]^p\leqslant G'(u)$

(iii) $u^{p-1}G(u)\leqslant C'[F(u)]^p$, com C' independendo de l

(iv) Se $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$, então $F(u),G(u)\in W_0^{1,p}(\Omega)$, pois F e G são lipschitzianas.

Escolha $\beta>1$ de modo que $\beta p<p^*$ e considere a função teste $\xi=\eta^pG(u)$, onde $\eta\in\mathscr{C}_0^\infty$ será fixada. Então temos

$$\int_\Omega|\nabla u|^{p-2}\langle\nabla u,\nabla(\eta^pG(u))\rangle dx=\int_\Omega f(x,u)\eta^pG(u)dx \tag{B-21}$$

para $\varepsilon>0$ um cálculo direto no lado esquerdo da equação nos da

$$\int_\Omega|\nabla u|^{p-2}\langle\nabla u,\nabla(\eta^pG(u))\rangle dx\leqslant \tag{B-22}$$

$$\varepsilon\int_\Omega|\nabla u|^p\eta^pG'(u)dx+C'\int_\Omega|\eta|^p(up-1G(u))dx+\int_\Omega f(x,u)\eta^pG(u)dx \tag{B-23}$$

onde nos usamos a propriedade (i) e as desigualdades de Hölder e Young. Então pela escolha de um ε pequeno o suficiente

$$\int_\Omega|\nabla u|^p\eta^pG'(u)dx\leqslant\mathscr{C}_1\int_\Omega|\nabla\eta|^p[F(u)]^pdx+\mathscr{C}_2\int_\Omega\eta^pu^{p^*-p}[F(u)]^pdx+\mathscr{C}_3|\Omega| \tag{B-24}$$

onde uzamos que $G(u)f(x,u)\leqslant\mathscr{C}_3(1+u^{p^*-1}G(u))$, motivados pelas hipóteses (B-2) e a propriedade (iii). O lado esquerdo da equação pode ser estimado pela propriedade (ii), i.e. $G'(u)\geqslant C[F'(u)]^p$,

$$\int_\Omega|\nabla u|^p\eta^pG'(u)dx\geqslant\mathscr{C}\int_\Omega|\eta F(u)\nabla u|^pdx, \tag{B-25}$$

mas então

$$\int_\Omega|\nabla(\eta F(u))|^pdx\leqslant\mathscr{C}_4\int_\Omega|\nabla\eta|^p[F(u)]^pdx+\mathscr{C}_5\int_\Omega\eta^pu^{p^*-p}[F(u)]^pdx+\mathscr{C}_6|\Omega| \tag{B-26}$$

Aplicando agora a desilgualdade de Sobolev, podemos encontrar

$$\left(\int_\Omega[F(u)]^{p^*}\eta^{p^*}dx\right)^{p/p^*}\leqslant\mathscr{C}_4\int_\Omega|\nabla\eta|^p[F(u)]^pdx+\mathscr{C}_5\int_\Omega\eta^pu^{p^*-p}[F(u)]^pdx+\mathscr{C}_6|\Omega|$$

dado $x_0 \in \Omega$ escolhemos $\eta \in C_0^\infty$ tal que $supp(\eta) = B(x_0,R)$ então $\|u\|_{L^{p^*}(B(x_0,R))}^{p^*-p} \leqslant \dfrac{1}{2\mathscr{C}_5}$.
Então pela desigualdade de Hölder

$$\mathscr{C}_5 \int_\Omega \eta^p u^{p^*-p}[F(u)]^p dx \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_\Omega \eta^{p^*}[F(u)]^{p^*}dx\right)^{p/p^*} \tag{B-27}$$

E finalmente temos

$$\int_\Omega \eta^{p^*}[F(u)]^{p^*}dx \leqslant \mathscr{C}_5 \int_\Omega |\nabla\eta|^p[F(u)]^p dx + \mathscr{C}_6|\Omega| \tag{B-28}$$

Tomando o limite de $l \to \infty$ concluimos

$$\left(\eta p^* u^{\beta p^*}dx\right)^{p/p^*} \leqslant \mathscr{C}(\eta)\int_\Omega u^{\beta p}dx + \mathscr{C}_6|\Omega| \tag{B-29}$$

e como $\beta p < p^*$ temos que $u \in L^{\beta p^*}_{loc}$, então u é a solução da equação

$$-\Delta_p u = a(x)u^{p-1} + b(x) \tag{B-30}$$

onde

$$a(x) = \begin{cases} 0 \; se \; u < 1 \\ \dfrac{f(x,u)}{u^{p-1}} \; se \; u \leqslant 1 \end{cases}$$

e

$$b(x) = \begin{cases} 0 \; se \; u < 1 \\ f(x,u) \; se \; u \leqslant 1 \end{cases}$$

e então $a(x) \in L^r$ com $r > \dfrac{N}{p}$ e $b \in L^\infty$. Assim concluímos pelo teorema anterior que $u \in L^\infty$ e mais, o teorema 1 em [23] nos dá que $u \in C^{1,\alpha}$ para u satisfazendo $-\Delta_p u = f(x,u)$. $\square$

Medidas de Borel e Teorema da Representação de Riesz

Neste apêndice temos por objetivo mostrar alguns resultados de medidas de Borel, como tambem estabelecer uma relação destas medidas com as medidas de Radon através do Theorema da representação de Riesz. (Ver tambem [21, 22]).

Definição C.1 *Chamamos de espaço mensurável o par (X,M), que consiste de um conjunto X e uma σ-álgebra M de subconjuntos de X. Um subconjunto E de X é dito mensurável com respeito a M se $E \in M$*

Definição C.2 *Chamamos μ de uma medida em um espaço mensurável (X,M), um função não negativa*

$$\mu : M \to [0,\infty]$$

tal que $\mu(\emptyset) = 0$ e μ é contável aditiva, no sentido de que para toda coleção contável e disjunta $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ de conjuntos mensuráveis

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

.

Definimos o espaço mensurável (X,M,μ) como sendo o espaço mensurável (X,M) juntamente com a medida μ definida em M.
Seja agora $X = \mathbb{R}^N$, vamos definir uma medida m e uma σ-álgebra $\mathscr{M}(m)$ em $\mathbb{R}^N$.

Definição C.3 *Um conjunto A é dito elementar se é uma união finita de blocos do $\mathbb{R}^N$. Se B é um bloco da forma $\prod_{i=1}^{N}(a_i,b_i)$, definimos*

$$m(B) = \prod_{i=1}^{N}(b_i - a_i).$$

E se A é elementar, definimos $m(A) = \sum_{i=1}^{k} m(B_i)4$, com $A = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$

Definição C.4 *Uma função* ϕ *não negativa e aditiva, definida no conjunto*

$$\mathscr{E} := \{A \subset \mathbb{R}^N;\ A \text{ é elementar}\}$$

é dita regular se para todo $A \in \mathscr{E}$ *e todo* $\varepsilon > 0$*, existirem* $F, G \in \mathscr{E}$*,* F *fechado e* G *aberto,* $F \subset A \subset G$ *e*

$$\phi(G) - \varepsilon \leqslant \phi(A) \leqslant \phi(F) + \varepsilon$$

Definição C.5 *Seja* μ *não negativa, aditiva, regular e finita em* $\mathscr{E}$*. Considere coberturas contaveis de qualquer conjunto* $E \subset \mathbb{R}^N$*, por abertors elementares.*

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Defina

$$\mu^*(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

onde o infimo pe tomado sobre todas as coberturas contáveis de E por abertos elementares. μ^* *é chamada de medida exterior.*

Seguem abaixo algumas das propriedades da μ^* veja [22]

Proposição C.6

1. $\mu^*(E) \geqslant 0\ \forall E$
2. $\mu^*(E_1) \geqslant \mu^*(E_2)$ *se* $E_1 \subset E_2$
3. $\forall A \in \mathscr{E}$, $\mu^*(A) = \mu(A)$
4. *se* $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ *então* $\mu^*(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$

Definição C.7 *Para qualquer* $A, B \subset \mathbb{R}^N$ *definimos*

$$S(A,B) = (A - B) \cup (B - A) \tag{C-1}$$
$$d(A,B) = \mu^*(S(A,B)). \tag{C-2}$$

Dizemos que $A_n \to A$ *se* $\lim_{n\to\infty} d(A, A_n = 0)$

Se existe uma sequencia $\{A_n\}$ de conjuntos elementares tais que $A_n \to A$, dizemos que A é finitamente μ-mensurável, escrevemos $A \in \mathscr{M}_F(\mu)$. Se A é a união de uma coleção contável de conjuntos finitamente μ-mensuráveis, dizemos que A é μ-mensurável e escrevemos $A \in \mathscr{M}(\mu)$.

Teorema C.8 $\mathscr{M}(\mu)$ *é uma* σ*-álgebra e* μ^* *é contável aditiva em* $\mathscr{M}(\mu)$*.*

Agora quando $A \in \mathscr{M}(\mu)$ trocamos $\mu^*(A)$ por $\mu(A)$. Quando $\mu = m$ chamamos m de medida de Lebesgue. Se restringirmos $\mathscr{M}(m)$ a σ-álgebra de Borel, chamamos m de medida de Borel.

Lema 21 (Princípio da limitação uniforme) *Sejam E e F espaços de Banach e $(T_i)_{i\in\mathscr{I}}$, uma família (não necessáriamente contável) de operadores lineáres contínuos de E em F. Assuma que*

$$\sup_{i\in\mathscr{I}} \|T_i x\| < \infty, \ \forall x \in E \tag{C-3}$$

Então

$$\sup_{i\in\mathscr{I}} \|T_i\|_{\mathscr{L}(E,F)} < \infty. \tag{C-4}$$

Em outras palavras, $\exists,\ c > 0$ tal que $\|T_i x\| \leqslant c\|x\|,\ \forall x \in E, \forall i \in \mathscr{I}$

Definição C.9 *A topologia fraca $\sigma(E,E^*)$ em E é a mais grosseira topologia associada a coleção $(\varphi_f)_{f\in E^*}$ de funcionais lineares $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$.*

Lema 22 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) *A bola unitária fechada*

$$B_{E^*} = \{f \in E^*; \|f\| \leqslant 1\}$$

é compácta na topologia fraca $\sigma(E^*,E)$.

Definição C.10 *Diz-se que uma medida λ se concentra em um conjunto $A \subset X$ se $\lambda(E) = 0,\ \forall E \subset X,\ E \cap A = \varnothing$.*

Definição C.11 *Dadas duas medidas λ_1 e λ_2, dizemos que λ_1 é mutuamente singular a λ_2 se existem A_1 e A_2, $A_1 \bigcap A_2 = \varnothing$, com λ_1 e λ_2 se concentrando em A_1 e A_2 respectivamente.*

Teorema C.12 (Representação de Riesz) *Seja X um espaço de Hausdorf localmente compácto, e seja Λ um funcional linear positivo em $C_0(X)$. Então existe uma σ-álgebra χ em X que contém todos os Borelianos de X, e existe uma única medida positiva $\mu \in \chi$ que representa Λ no sentido que*

a) $\Lambda f = \int_X f d\mu$, para toda $f \in C_0(X)$, com as propriedades que seguem:

b) $\mu(K) < \infty$ para todo conjunto compacto $K \subset X$;

c) Para todo $E \in \chi$, temos $\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V,\ V\ aberto\}$;

d) A relação $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K\ compacto\}$, vale para todo aberto E, e para todo $E \in \chi$ com $\mu(E) < \infty$;

e) Se $E \in \chi$, $A \subset E$ com $\mu(E) = 0$ então $A \in \chi$.

Referências Bibliográficas

[1] AUBIN, J.-P; EKELAND, I. **Applied nonlinear analysis**. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006. Reprint of the 1984 original.

[2] BAHRI, A; BERESTYCKI, H. **A perturbation method in critical point theory and applications**. Trans. Amer. Math. Soc., 267(1):1–32, 1981.

[3] BARTLE, R. G. **The elements of integration and Lebesgue measure**. Wiley Classics Library. John Wiley Sons, Inc., New York, 1995. Containing a corrected reprint of the 1966 original [The elements of integration, Wiley, New York; MR0200398 (34 #293)], A Wiley-Interscience Publication.

[4] BRÉZIS, H. M; LIEB, E. A. **A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals**. Proc. Amer. Math. Soc., 88(3):486–490, 1983.

[5] BRÉZIS, H. M; NIRENBERG, L. **Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents**. Comm. Pure Appl. Math., 36(4):437–477, 1983.

[6] BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. Universitext. Springer, New York, 2011.

[7] CARVALHO, M. L. M; DA SILVA, E. D; GOULART, C. **Quasilinear elliptic problems with concaveâ“convex nonlinearities**. Communications in Contemporary Mathematics, 0(0):1650050, 0.

[8] CASTRO, A. **Metodos Variacionales y Analisis Funcional no Lineal**. monograph published by the Colombian Math. Soc., 1980.

[9] CORRÊA, F. J. S. A; FIGUEIREDO, G. M. **Existence and multiplicity of nontrivial solutions for a bi-nonlocal equation**. Adv. Differential Equations, 18(5-6):587–608, 2013.

[10] DEIMLING, K. **Nonlinear functional analysis**. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[11] DIBENEDETTO, E. $C^{1+\alpha}$ **local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations**. Nonlinear Anal., 7(8):827–850, 1983.

[12] EVANS, L. C. **Partial differential equations**, volume 19 de **Graduate Studies in Mathematics**. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

[13] GARCIA AZORERO, J; PERAL ALONSO, I. **Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term**. Trans. Amer. Math. Soc., 323(2):877–895, 1991.

[14] GARCIA AZORERO, J; PERAL ALONSO, I. **Comportement asymptotique des valeurs propres du p-laplacien**. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 307(2):75–78, 1988.

[15] GARCIA AZORERO, J. P; PERAL ALONSO, I. **Existence and nonuniqueness for the p-Laplacian: nonlinear eigenvalues**. Comm. Partial Differential Equations, 12(12):1389–1430, 1987.

[16] LIMA, E. L. **Curso de análise. Vol. 2**, volume 13 de **Projeto Euclides [Euclid Project]**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1981.

[17] LINDQVIST, P. **Notes on the p-Laplace equation**, volume 1. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2005.

[18] LIONS, P.-L. **The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I**. Rev. Mat. Iberoamericana, 1(1):145–201, 1985.

[19] RABINOWITZ, P. H. **Multiple critical points of perturbed symmetric functionals**. Trans. Amer. Math. Soc., 272(2):753–769, 1982.

[20] RABINOWITZ, P. H. **Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations**, volume 65 de **CBMS Regional Conference Series in Mathematics**. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[21] ROYDEN, H. L. **Real analysis**. Macmillan Publishing Company, New York, third edition, 1988.

[22] RUDIN, W. **Principles of mathematical analysis**. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, third edition, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.

[23] SERRIN, J. **Local behavior of solutions of quasi-linear equations**. Acta Math., 111:247–302, 1964.

[24] TOLKSDORF, P. **Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations**. J. Differential Equations, 51(1):126–150, 1984.

[25] WILLEM, M. **Minimax theorems**, volume 24 de **Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications**. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.