Universidade Federal de Goiás (UFG)
Instituto de Matemática e Estatística (IME)
Programa de Pós Graduação em Matemática

Anna Carolina Gomes Tolêdo

A conjectura de Wilf do ponto de vista da profundidade de um semigrupo numérico e outros invariantes

Goiânia
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[X] Dissertação [ ] Tese [ ] Outro*:_____________

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Anna Carolina Gomes Tolêdo

3. Título do trabalho

A conjectura de Wilf do ponto de vista da profundidade de um semigrupo numérico e outros invariantes

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **Wanderson Tenório**, **Usuário Externo**, em 26/08/2022, às 11:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **ANNA CAROLINA GOMES TOLEDO**, **Discente**, em 26/08/2022, às 11:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3144931** e o código CRC **DC3C261D**.

Referência: Processo nº 23070.038575/2022-91 SEI nº 3144931

ANNA CAROLINA GOMES TOLÊDO

A conjectura de Wilf do ponto de vista da profundidade de um semigrupo numérico e outros invariantes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade Federal de Goiás (UFG), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Área de concentração: Álgebra.

Orientador: Prof. Wanderson Tenório

Goiânia
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Tolêdo, Anna Carolina Gomes
A conjectura de Wilf do ponto de vista da profundidade de um semigrupo numérico e outros invariantes [manuscrito] / Anna Carolina Gomes Tolêdo. - 2022.
lxxxiii, 83 f.

Orientador: Prof. Dr. Wanderson Tenório.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2022.
Bibliografia. Apêndice.

1. Semigrupos numéricos. 2. Conjectura de Wilf. 3. Número de Wilf. 4. Número de Eliahou. I. Tenório, Wanderson, orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 03 da sessão de Defesa de Dissertação de **Anna Carolina Gomes Tolêdo**, que confere o título de Mestra em Matemática, **na área de Álgebra.**

Ao vigésimo sexto dia do mês de agosto do ano de dois mil e vinte e dois, a partir das nove horas e trinta minutos, através de Web Videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"A conjectura de Wilf do ponto de vista da profundidade de um semigrupo numérico e outros invariantes".** Os trabalhos foram instalados pelo presidente da banca, Professor Doutor **Wanderson Tenório – DPMAT/ICET/UFMT** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Matheus **Bernardini de Souza – FGA/UnB** membro titular externo e o Professor Doutor **Alonso Sepúlveda Castellanos – FAMAT/UFU** membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Wanderson Tenório – DPMAT/ICET/UFMT**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao vigésimo sexto dia do mês de agosto do ano de dois mil e vinte e dois.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

A conjectura de Wilf do ponto de vista da profundidade de um semigrupo numérico e outros invariantes

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Wanderson Tenório**, **Usuário Externo**, em 26/08/2022, às 11:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Alonso Sepúlveda Castellanos**, **Usuário Externo**, em 26/08/2022, às 11:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Matheus Bernardini de Souza**, **Usuário Externo**, em 26/08/2022, às 11:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Referência: Processo nº 23070.038575/2022-91 SEI nº 3054745

Anna Carolina Gomes Tolêdo

Bacharel em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatítica - IME em 2021

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à OBMEP por ter me apresentado logo na infância como a matemática é fascinante e como o Brasil é repleto de crianças que compartilham a mesma paixão pelos números, símbolos e pela lógica.

Aos meus pais, Edson e Luce-Leide, e meu irmão, Thiago, por todo suporte e confiança que apenas uma família poderia conceder. Da mesma forma, agradeço ao meu marido, Rafael, por ser meu alicerce durante a produção desta dissertação. Levando em conta o período de pandemia (2020-2022), foi essencial ter um parceiro oferecendo apoio incondicional, que compreendeu minha ausência e comemorou cada momento bom.

No meio acadêmico, há também uma família a agradecer. É comum entre universitários considerarmos orientadores como "pais"acadêmicos e os colegas orientados como "irmãos". Desta forma, tive o privilégio de ter o apoio de muitos "familiares"acadêmicos, principalmente do meu primeiro "pai", o professor Alacyr.

Apesar de meus primeiros passos serem em um caminho formado por várias gerações em sistemas dinâmicos, ter um "pai"que me permitiu conhecer um pouco da grande variedade de áreas da matemática foi fundamental para que eu optasse por seguir em álgebra. Foi assim que encontrei a orientação da professora Ivonildes e fui finalmente adotada no mestrado pelo professor Wanderson que me apresentou o interessante universo dos semigrupos numéricos e me orientou até o presente momento. A estes agradeço pela grande inspiração e aconselhamento durante minha formação.

Também agradeço aos professores Alonso Sepúlveda Castellanos e Matheus Bernardini de Souza por participarem como membros da banca, validando este trabalho perante a comunidade cientifica.

Por fim, agradeço à CAPES e CNPq pelo apoio financeiro durante toda minha vida acadêmica, desde o PICjr até o presente momento.

O que temos de especial é a habilidade de nos maravilharmos com a beleza do cosmo.

Marcelo Gleiser

Resumo

Toledo, Anna Carolina Gomes. **A conjectura de Wilf do ponto de vista da profundidade de um semigrupo numérico e outros invariantes**. Goiânia, 2022. 82p. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Universidade Federal de Goiás (UFG).

Neste trabalho será apresentada a chamada Conjectura de Wilf, que questiona sobre uma relação entre invariantes de semigrupos numéricos. Partindo de exemplos de famílias de semigrupos numéricos conhecidas que satisfazem a conjectura, será apresentada a abordagem de Eliahou [5] que corrobora com a validade da conjectura através de ferramentas desenvolvidas a partir da profundidade. Tal estudo contribui significativamente com métodos de abordagem da conjectura e determina um novo invariante a se estudar a respeito de semigrupos numéricos: o número de Eliahou. Serão apresentados alguns conceitos e propriedades básicas sobre semigrupos numéricos, assim como os pré-requisitos para o método de Eliahou para provar que semigrupos numéricos com profundidade $q \leq 3$ satisfazem a conjectura de Wilf.

Palavras–chave

Semigrupos numéricos, conjectura de Wilf, número de Wilf, número de Eliahou

Abstract

Toledo, Anna Carolina Gomes. **The Wilf's conjecture from the depth of numerical semigroups and other invariants**. Goiânia, 2022. 82p. MSc. Dissertation. Programa de Pós Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Universidade Federal de Goiás (UFG).

In this work, it will be presented the so-called Wilf's conjecture, which asks about a relation between invariants of numerical semigroups. Starting with examples of known families of numerical semigroups satisfying the conjecture, it will be shown the Eliahou's approach [5] that corroborates to the validity of the conjecture through tools from the depth of a numerical semigroup. This study greatly contributes with the methods for the conjecture and determines a new invariant to be studied in numerical semigroups: the Eliahou number. It will be presented some basic concepts and properties about numerical semigroups, as well as the prerequisites for the method of Eliahou to prove that numerical semigroups with depth $q \leq 3$ satisfy the Wilf's conjecture.

Keywords

Numerical semigroups, Wilf's conjecture, Wilf number, Eliahou number

Sumário

Introdução

O principal objeto de estudo neste trabalho são os chamados *semigrupos numéricos*, cujo conceito parte de um submonoide definido a partir de números inteiros não negativos com complementar finito.

Os primeiros estudos de semigrupos numéricos datam do final do século XIX com Frobenius e Sylvester a partir de problemas de combinatória [11, 12] em estruturas com caracterização de semigrupos numéricos como na seguinte questão:

> (Problema do Troco de Frobenius) Considere que existem moedas dos seguintes valores coprimos: $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Qual o maior valor que não pode ser pago utilizando tais moedas sem receber troco?

É apenas no meio do século XX com a relação entre semigrupos numéricos e objetos estudados na Geometria Algébrica que determinados invariantes de semigrupos numéricos foram considerados mais significativos, permitindo um estudo mais independente da área, voltados a explorar seus respectivos invariantes e relações.

Em 1978, Wilf [14] publicou um trabalho onde apresenta algoritmos para o cálculo do condutor de um semigrupo numérico. Seguindo a ideia de se estudar algumas relações envolvendo invariantes de semigrupos numéricos, Wilf propôs as seguintes questões:

a) É verdade que dada a quantidade minimal de geradores n, a razão $\frac{\mathrm{g}(S)}{\mathrm{c}(S)}$ entre gênero e condutor de um semigrupo numérico S é no máximo $1 - \frac{1}{n}$, atingindo a igualdade apenas para os semigrupos gerados por $n, n+1, \ldots, 2n-1$?
b) Seja $f(c)$ o número de semigrupos numéricos cujo condutor é c. Qual a ordem de magnitude para $f(c)$ quando $c \to \infty$?

Para a segunda parte do item a), a respeito da igualdade na cota fornecida, existe existe uma infinidade de semigrupos numéricos que contradizem o proposto, como os semigrupos numéricos com 2 geradores apresentados na Seção 1.3. No entanto, o questionamento principal, acerca da validade da desigualdade, permanece insolúvel e é comumente formulado pela seguinte conjectura, conhecida atualmente como a *Conjectura de Wilf*:

> Para um semigrupo numérico S com número de Frobenius $\mathrm{F}(S)$, dimensão n e com $|\mathrm{L}(S)|$ elementos à esquerda, é verdade que
>
> $$n|\mathrm{L}(S)| \geq \mathrm{F(S)} + 1\,?$$

Tal problema tem instigado matemáticos nos últimos anos, como pode ser observado no *survey* [3], o qual passou a ser explorado a partir da seguinte desigualdade equivalente à anterior:

$$\frac{|\mathrm{L}(S)|}{\mathrm{c}(S)} \geq \frac{1}{n}.$$

Desta forma, é possível associar a conjectura com o conceito de densidade das lacunas de um semigrupo numérico, isto é, a proporção dos números inteiros não negativos que não pertencem ao semigrupo numérico em relação ao total de elementos menores que o condutor permite ter medir o quão "grande" é o espaço sem elementos do semigrupo numérico e que, segundo a Conjectura de Wilf, seria limitada em função do número de geradores do semigrupo numérico.

O objetivo deste trabalho é explorar a solução desenvolvida por Eliahou em [5] no estudo da conjectura de Wilf a partir da profundidade do semigrupo numérico. A importância desta abordagem decorre do resultado de Zhai [15] ao provar a conjectura de Zhao proposta em [**?**]:

> Sejam n_g o número de semigrupos numéricos com gênero g e n'_g o número de semigrupos numéricos com gênero g e profundidade $q \leq 3$. Então
>
> $$\lim_{g\to\infty} \frac{n'_g}{n_g} = 1.$$

Em outras palavras, à medida que o gênero cresce, a "maioria" dos semigrupos numéricos tem profundidade no máximo 3. Com isso, a validade da conjectura para $q \leq 3$ viria a estabelecer que a "maioria" dos semigrupos numéricos satisfazem a conjectura de Wilf. Os casos $q = 1$ e $q = 2$ já eram de conhecimento comum, restando o desafio de se solucionar o caso $q = 3$.

Para este propósito, a dissertação está organizada da seguinte forma.

No Capítulo 1 serão abordados conceitos básicos sobre semigrupos numéricos e seus invariantes, de modo a também caracterizá-los a partir de um conjunto gerador minimal. Também será apresentada a conjectura de Wilf, dada através de uma relação entre invariantes, e algumas das principais famílias de semigrupos numéricos estudadas nas quais a conjectura de Wilf é conhecida ser satisfeita, como semigrupos numéricos de dimensão maximal e semigrupos numéricos irredutíveis.

O Capítulo 2 é dedicado a abordar a técnica de Eliahou através de uma partição conveniente dos elementos do semigrupo numérico e da construção de uma álgebra graduada a partir de elementos do semigrupo numérico. É a partir desta álgebra graduada e de um resultado decorrente do Teorema de Macaulay que estimativas essenciais a solução do problema serão estipuladas. Será apresentado, por fim, a demonstração da validade da Conjectura de Wilf para semigrupos numéricos de profundidade $q = 3$ e a conclusão da validade da conjectura para semigrupos numéricos com profundidade $q \leq 3$.

Tal abordagem da conjectura de Wilf, entretanto, não é suficiente para a comprovação da mesma no caso geral, haja visto que existem semigrupos numéricos S de profundidade $q > 3$ que não é possível comprovar que satisfazem a conjectura pela técnica abordada no Capítulo 2. Assim, no Capítulo 3 serão apresentadas as construções mais recentes de estudos de famílias de semigrupos numéricos com profundidade $q = 4$.

O Apêndice A deste trabalho analisa certas relações envolvendo binomiais necessárias para a Seção 2.3 a fim de contribuir com a determinação da a versão mais adequada do Teorema de Macaulay para esta abordagem.

No decorrer de todo o trabalho serão apresentados, a partir de exemplificações, como utilizar ferramentas do pacote `NumericalSgps` [1] no *software* GAP [7] para o estudo de semigrupos numéricos em geral e as ferramentas criadas especificamente para o estudo da conjectura de Wilf através da técnica de Eliahou.

CAPÍTULO 1

Semigrupos numéricos, seus invariantes e a conjectura de Wilf

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos fundamentais para o estudo de semigrupos numéricos. Partindo da definição mais abstrata da estrutura algébrica, será apresentada uma caracterização de semigrupos numéricos por meio de um conjunto gerador finito a partir do qual novos invariantes são determinados e por fim, será apresentada a conjectura de Wilf que relaciona diferentes invariantes por meio de uma expressão dada inicialmente por Wilf em [14]. Tal conjectura é válida para importantes famílias de semigrupos numéricos e algumas destas serão abordadas ao fim deste capítulo. O conteúdo deste capítulo tem como referências principais [3, 4, 12, 14].

1.1 A definição de semigrupos numéricos

A construção de um semigrupo numérico é, essencialmente, a construção de um submonoide no conjunto dos números inteiros não negativos. Apesar da singela definição de suas propriedades, uma vasta variedade de implicações decorrem das mesmas e servem de base para estudos mais profundos envolvendo semigrupos numéricos.

Definição 1.1 *Um conjunto M é definido como semigrupo quando é munido de uma operação binária $+$ associativa e comutativa.*

Exemplo 1.2 *O conjunto números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ com a operação $+$ convencional é um semigrupo.*

Definição 1.3 *O semigrupo $(M, +)$ é chamado monoide quando o conjunto M possui um elemento identidade, isto é, existe $0 \in M$ tal que $m + 0 = 0 + m = m$ para todo $m \in M$.*

Exemplo 1.4 *O conjunto números inteiros não negativos $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ com a operação $+$ convencional é um monoide.*

O conceito de submonoide decorre diretamente da definição de um subconjunto que preserva as propriedades do monoide. A partir de um subconjunto $A \subset M$ será definido o submonoide gerado por A.

Definição 1.5 *Sejam $(M,+)$ um monoide e $A \subset M$. O submonoide gerado por A é dado por*

$$\langle A \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m \; : \; m \in \mathbb{N}, \; \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{N}_0, \; a_1, \ldots, a_m \in A\}.$$

O conjunto A é dito um conjunto gerador do submonoide $\langle A \rangle$. Quando $A = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, o conjunto $\langle A \rangle$ será denotado por $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle$.

Pode-se mostrar que o $\langle A \rangle$ é o menor submonoide de M, com relação à inclusão, que contém A.

Exemplo 1.6 *Seja $A = \{2\} \subset \mathbb{N}_0$. O submonoide $\langle A \rangle$ representa o conjunto dos números pares.*

A partir das definições anteriores é possível definir o objeto de estudo deste trabalho.

Definição 1.7 *Seja $\mathbb{N}_0$ o monoide aditivo dos inteiros não negativos. Um submonoide de $\mathbb{N}_0$ com complemento finito em $\mathbb{N}_0$ é chamado de* ***semigrupo numérico****.*

Em outras palavras, um subconjunto $S \subseteq \mathbb{N}_0$ será um semigrupo numérico se forem satisfeitas as seguintes condições:

1. $x + y \in S$, para todos $x, y \in S$;
2. $0 \in S$; e
3. o complemento $\mathbb{N}_0 \setminus S$ é finito.

Exemplo 1.8
1. *O conjunto $S = \{0, 2, \rightarrow\} = \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$ é um semigrupo numérico ($\rightarrow$ indica que todos os elementos subsequentes pertencem ao conjunto) com complemento $\{1\}$ em $\mathbb{N}_0$. Mais geralmente, dado $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, o conjunto*

$$\{0, a, \rightarrow\}$$

é um semigrupo numérico. Esta família é conhecida como ***semigrupos numéricos ordinários****.*

2. *O submonoide $\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, \ldots\}$ não é um semigrupo numérico, pois seu complementar em $\mathbb{N}_0$ não é finito .*

1.2 Invariantes básicos de um semigrupo numérico e suas relações

O semigrupo numérico S, do ponto de vista de uma estrutura de conjuntos, é completamente caracterizado pelos inteiros não negativos complementares a S, isto é, $\mathbb{N}_0 \setminus S$. É a partir deste conjunto que alguns de seus invariantes são definidos.

Definição 1.9 *Seja S um semigrupo numérico. Um elemento de $\mathbb{N}_0$ que não pertence a S é dito uma* ***lacuna*** *de S e o* ***conjunto das lacunas*** *de S é definido por*

$$\mathrm{G}(S) := \mathbb{N}_0 \setminus S.$$

A cardinalidade do conjunto das lacunas é chamada de ***gênero*** *de S, denotada por* $\mathrm{g}(S)$.

Definição 1.10 *Seja S um semigrupo numérico. O menor elemento não nulo de* S *é chamado de* ***multiplicidade*** *e será denotado por*

$$\mathrm{m}(S) := \min(\mathrm{S} \setminus \{0\}).$$

Definição 1.11 *Seja S um semigrupo numérico. O maior inteiro de $\mathbb{Z} \setminus S$ recebe o nome de* ***número de Frobenius*** *de S e será denotado por*

$$\mathrm{F}(S) := \max(\mathbb{Z} \setminus S).$$

Quando $S \neq \mathbb{N}_0$, tem-se que $\mathrm{F}(S) = \max(\mathrm{G}(S))$. O número de Frobenius foi assim denominado em homenagem ao matemático alemão Ferdinand Georg Frobenius, responsável pela questão conhecida como "Problema do Troco de Frobenius" que será apresentada posteriormente.

Exemplo 1.12

1. *Considere $S = \mathbb{N}_0$. Seus invariantes são* $\mathrm{G}(S) = \emptyset$, $\mathrm{m}(S) = 1$ *e* $\mathrm{F}(S) = -1$.
2. *Seja $S = \{0, a, \rightarrow\}$ um semigrupo numérico ordinário. Seus invariantes são* $\mathrm{G}(S) = \{1, 2, \ldots, a-1\}$, $\mathrm{m}(S) = a$ *e* $\mathrm{F}(S) = a - 1$.

Com a noção de que um submonoide pode ser gerado por um conjunto, é natural definir o conceito de conjunto gerador para um semigrupo numérico.

Definição 1.13 *Seja S um semigrupo numérico. Um conjunto $A \subset \mathbb{N}_0$ é dito um* **conjunto gerador** *de S se $S = \langle A \rangle$. Mais ainda, um conjunto gerador A de S é dito* ***minimal*** *se $S \neq \langle A' \rangle$ para todo $A' \subsetneq A$.*

A partir do conceito de conjunto gerador, o resultado a seguir apresenta uma definição equivalente para semigrupo numérico.

Lema 1.14 *Seja A um conjunto não vazio de* $\mathbb{N}_0$. *Então o conjunto* $\langle A\rangle$ *é um semigrupo numérico se, somente se,* $\mathrm{mdc}(A) = 1$.

Prova. ($\Rightarrow$) Considere $\langle A\rangle$ um semigrupo numérico. Então o conjunto $\mathbb{N}_0 \setminus \langle A\rangle$ é finito. Logo, existe o número de Frobenius $\mathrm{F}(S) = n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $a > n_0$, tem-se $a \in \langle A\rangle$. Considere $d = \mathrm{mdc}(A)$. Como $d|a$ para todo $a \in A$, segue que $d|s$ para todo $s \in \langle A\rangle$. Em particular, como $d|n_0+1$ e $d|n_0+2$, tem-se $d|n_0+2-(n_0+1) = 1$. Assim, obtém-se que $d = 1$ já que $\mathrm{mdc}(A) \geq 0$.

($\Leftarrow$) Considere $\langle A\rangle$ um submonoide cujo $\mathrm{mdc}(A) = 1$. É preciso mostrar que o complementar de $\langle A\rangle$ em $\mathbb{N}_0$ é finito, isto é, apresentar um elemento $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $a > n_0$ implica que $a \in \langle A\rangle$. Como $\mathrm{mdc}(A) = 1$, então existem $a_1 \cdots, a_n \in A$ e $\lambda_1 \cdots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = 1.$$

Reorganizando a expressão de maneira conveniente para que todos os coeficientes multiplicando os termos $a_1 \cdots, a_n$ sejam positivos e reindexando, é possível escrever:

$$\lambda_{j1} a_{j1} + \cdots + \lambda_j a_j = \lambda_{i1} a_{i1} + \cdots + \lambda_i a_i + 1.$$

Definindo $s = \lambda_{i1} a_{i1} + \cdots + \lambda_i a_i \in \langle A\rangle$, segue que

$$s+1 = \lambda_{j1} a_{j1} + \cdots + \lambda_j a_j \in \langle A\rangle.$$

Colocando $n_0 = (s-1)s + (s-1)$, resta provar que $n \in \langle A\rangle$ para todo $n > n_0$. Dado $n > n_0 > s$, existem q e r inteiros tal que $n = qs + r$, com $0 \leq r < s$. Reescrevendo n como combinação linear de s e $s+1$, obtém-se que que

$$n = qs + r + rs - rs = (q-r)s + r(s+1).$$

Resta provar que $q - r \geq 0$, pois isso implica que $n \in \langle A\rangle$. Como r satisfaz $r \leq s-1$, então a desigualdade

$$n = qs + r \geq n_0 = (s-1)s + (s-1)$$

implica que $q \geq (s-1) \geq r \geq 0$. Daí, $q - r \geq r - r = 0$, de onde conclui-se que $n \in \langle A\rangle$. Portanto, o complementar de $\langle A\rangle$ em $\mathbb{N}_0$ é finito e $\langle A\rangle$ é um semigrupo numérico. $\square$

Em poucas palavras, submonoides de $\mathbb{N}_0$ gerados por elementos coprimos são semigrupos numéricos. A partir desta caracterização, o problema do troco de Frobenius já mencionado na introdução adquire uma condição para ser solucionado.

(Problema do Troco de Frobenius) Considere que existem moedas de valores coprimos $v_1,\ldots,v_n$. Qual o maior valor que não pode ser pago utilizando tais moedas sem receber troco?

A solução deste problema existe quando os valores $v_1,v_2,\ldots,v_n$ são coprimos e assim é possível construir um semigrupo numérico $S=\langle v_1,v_2,\ldots,v_n\rangle$, a partir do qual a solução do problema do troco de Frobenius é dada por $\mathrm{F}(\mathrm{S})$. Para um panorama a respeito do Problema de Frobenius, veja em [11].

Exemplo 1.15 *Dadas as moedas de valores $v_1=4, v_2=5$, o conjunto gerado por combinações de 4 e 5 é*

$$S=\{0,4,5,8,9,10,12,\rightarrow\}.$$

O sistema de álgebra computacional GAP [7] pode ser utilizado para calcular invariantes de um semigrupo numérico através do pacote `NumericalSgps` *[3] pelos comandos:*

```
gap >s := NumericalSemigroupByGenerators([4,5]);;
gap >Gaps(s);
[1,2,3,6,7,11]
gap >Genus(s);
6
gap >Multiplicity(s);
4
gap >FrobeniusNumber(s);
11
```

Isto é, S é um semigrupo numérico com conjunto de lacunas $\mathrm{G}(S)=\{1,2,3,6,7,11\}$*, gênero* $\mathrm{g}(S)=6$*, multiplicidade* $\mathrm{m}(S)=4$ *e número de Frobenius* $\mathrm{F}(S)=11$*, que é a solução para este Problema do Troco de Frobenius.*

No resultado a seguir será exibido um conjunto gerador de um semigrupo numérico com a propriedade que está contido em qualquer outro conjunto gerador. Para isso, considere $S^*=S\setminus\{0\}$ no seguinte lema:

Lema 1.16 *Seja S um semigrupo numérico. Então o conjunto $S^*\setminus(S^*+S^*)$ é um conjunto gerador de S. Além disso, $S^*\setminus(S^*+S^*)$ é o menor conjunto gerador de S.*

Prova. Tomando um elemento $s\in S^*$, se $s\notin S^*\setminus(S^*+S^*)$, então existem $x,y\in S^*$ tais que

$$s=x+y,$$

onde $0<x<s$ e $0<y<s$. Se $x\notin S^*\setminus(S^*+S^*)$, então existem $x_1,y_1\in S^*$ tais que

$$x=x_1+y_1,$$

onde $0 < x_1 < x$ e $0 < y_1 < x$. Repetindo esse processo recursivamente, obtém-se pares (x_i, y_i) de números inteiros positivos e cada vez menores. Como há uma quantidade finita de valores positivos aos quais x_i e y_i podem assumir, então haverá uma etapa em que obrigatoriamente $x_i \in S^* \setminus (S^* + S^*)$. Essa constatação vale para todos os termos x_j, y_j cuja a soma final é s, logo, pode-se concluir que s pode ser escrito como a soma finita de termos de $S^* \setminus (S^* + S^*)$. Esse processo vale para qualquer elemento $s \in S^*$, logo, $S = \langle S^* \setminus (S^* + S^*) \rangle$. Resta provar que dado um outro conjunto gerador qualquer A de S, para todo $s \in S^* \setminus (S^* + S^*)$, tem-se que $s \in A$. Como $S = \langle A \rangle$, dado $s \in S^* \setminus (S^* + S^*)$, é possível escrevê-lo como combinação linear dos elementos do conjunto gerador de S

$$s = \sum_{j>0} \lambda_j a_j,\ \lambda_j \in \mathbb{N}_0, a_j \in A.$$

Como $s \in S * \setminus (S * + S*)$ implica que s não pode ser a soma de mais de dois elementos não nulos do semigrupo, segue que $s = \lambda_i a_i$ para algum $i > 0$. Além disso, se $\lambda_i \neq 1$, então

$$s = a_i + (\lambda_i - 1)a_i,$$

e daí $s \in (S^* + S^*)$, o que contradiz $s \in S^* \setminus (S^* + S^*)$. Com isso, $\lambda_i = 1$ e $s = a_i \in A$. Como esse processo vale para todo elemento $s \in S^* \setminus (S^* + S^*)$, pode-se concluir que $S^* \setminus (S^* + S^*) \subset A$, isto é, todo conjunto gerador de S contém o conjunto $S^* \setminus (S^* + S^*)$. $\square$

Assim, todo semigrupo numérico S tem $S^* \setminus (S^* + S^*)$ como o menor conjunto gerador. O chamado conjunto de Apéry de S a seguir será usado para mostrar a existência de um conjunto gerador finito de S e, como consequência, que todo semigrupo numérico admite um único conjunto gerador minimal finito.

Definição 1.17 *Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. O conjunto*

$$\mathrm{Ap}(S, n) = \{s \in S \ : \ s - n \notin S\}$$

*é chamado **conjunto de Apéry** de S em relação a n..*

A partir da definição de conjunto de Apéry, o resultado a seguir caracteriza seus elementos a partir de representantes das classes de equivalência dos elementos do semigrupo numérico S módulo n.

Lema 1.18 *Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. Então*

$$\mathrm{Ap}(S, n) = \{0 = w(0), w(1), \ldots, w(n-1)\},$$

onde $w(i)$ é o menor elemento de S que é congruente a i módulo n.

Prova. Considere $w(i)$ o menor elemento de S que é congruente a i módulo n. Pela definição, $w(i) = i + q_i n$ para algum $q_i \in \mathbb{N}_0$ e, com isso,

$$w(i) - n = i + q_i n - n = i + (q_i - 1)n \notin S$$

pois $i + (q_i - 1)n$ também é congruente a i módulo n e é menor do que $w(i)$. Desta forma, todo o conjunto

$$\{0 = w(0), w(1), \ldots, w(n-1)\} \subset \mathrm{Ap}(S,n).$$

Suponha por absurdo que exista $w \in \mathrm{Ap}(S,n) \setminus \{0 = w(0), w(1), \ldots, w(n-1)\}$. Então $w = qn + i$ para algum $0 < i < n$ e a partir de w não pertencer a $\{0 = w(0), w(1), \ldots, w(n-1)\}$, considere o elemento $r = i + (q-1)n \in S$. Com isso, $w - n = r \in S$. Portanto, w não pertence a $\mathrm{Ap}(S,n)$, o que contradiz a suposição de que

$$w \in \mathrm{Ap}(S,n) \setminus \{w(0), w(1), \ldots, w(n-1)\}.$$

Logo, $\mathrm{Ap}(S,n) = \{0 = w(0), w(1), \ldots, w(n-1)\}$. □

Observação 1.19 *Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S$. Para todo $s \in S$, existe um único par ordenado $(k,w) \in \mathbb{N}_0 \times \mathrm{Ap}(S,n)$ tal que*

$$s = kn + w.$$

Tal escrita decorre diretamente do fato que dado $s \in S^*$, vale que

$$s \equiv w \mod n$$

para algum $w \in \mathrm{Ap}(S,n)$. Como $s \geq w$ e pela definição de módulo, sabe-se que $s - w = kn$ para algum $k \in \mathbb{N}_0$.

Dado um semigrupo numérico S, qualquer elemento $s \in S$ pode ser escrito como uma soma de um múltiplo de n com um elemento de $\mathrm{Ap}(S,n)$. Assim, S pode ser gerado pelo conjunto $(\mathrm{Ap}(S,n) \setminus \{0\}) \cup \{n\}$ que possui n elementos, de onde conclui-se que semigrupos numéricos possuem conjuntos geradores finitos.

Corolário 1.20 *Todo semigrupo numérico possui um conjunto gerador finito, isto é, é finitamente gerado.*

Além disso, a partir do Lema 1.16, conclui-se que o conjunto $S^* \setminus (S^* + S^*)$ é o menor conjunto gerador de S com relação à inclusão. Por essa razão, tal conjunto é chamado de o **conjunto gerador minimal** de S. A partir do conjunto gerador minimal, define-se um novo invariante de semigrupos numéricos.

Definição 1.21 *Seja S um semigrupo numérico. A cardinalidade do conjunto gerador minimal de S é chamada de **dimensão** de S e será denotada por* $\mathrm{e}(S)$.

Exemplo 1.22

1. *Seja $S = \{0, a, a+1, a+2, \rightarrow\}$ um semigrupo numérico ordinário. O conjunto*

$$A = \{a, a+1, \ldots, a+(a-1)\}$$

é o conjunto gerador minimal de S, ou seja, $A = S^* \setminus (S^* + S^*)$. A dimensão de S, é portanto, $\mathrm{e}(S) = |A| = a$.

2. *Os conjuntos $A = \{4,5\}$, $B = \{4,5,9\}$ e $C = \{0,4,5,10,15\}$ geram o mesmo semigrupo numérico:*

$$S = \{0, 4, 5, 8, 9, 10, 12, \rightarrow\}.$$

É possível comparar os semigrupos numéricos gerados pelos conjuntos A, B e C acima usando a seguinte lista de comandos no GAP:

```
gap >a := NumericalSemigroupByGenerators([4,5]);;
gap >AperyList(a);
[0,5,10,15]
gap >b := NumericalSemigroupByGenerators([4,5,9]);;
gap >c := NumericalSemigroupByGenerators([0,4,5,10,15]);;
gap >a = b;b = c;
true
true
gap >MinimalGenerators(b);
[4,5]
gap >EmbeddingDimension(a);
2
```

Logo, $S = \langle \mathrm{A} \rangle$ e A é o conjunto gerador minimal de S. Portanto, S tem dimensão $\mathrm{e}(S) = 2$.

Outro importante invariante de um semigrupo numérico trata-se da disjunção de seus elementos não nulos em decomponíveis e primitivos. A partir desta definição, é possível fornecer uma caracterização para o conjunto gerador minimal do semigrupo a partir de seus elementos primitivos.

Definição 1.23 *Seja S um semigrupo numérico. Um elemento $s \in S^*$ é dito **decomponível** se $s \in S^* + S^*$, isto é, $s = s_1 + s_2$ em que $s_1, s_2 \in S^*$. Caso contrário, o elemento s é dito **primitivo**. Os conjuntos dos elementos decomponíveis de S e dos elementos primitivos de S serão denotados respectivamente por* $\mathrm{D}(S)$ *e* $\mathrm{P}(S)$.

A partir da definição de $\mathrm{D}(S)$ e $\mathrm{P}(S)$ em relação aos elementos não nulos de S, tem-se que

$$S^* = \mathrm{D}(S)\,\dot{\cup}\,\mathrm{P}(S).$$

Além disso, por definição, o conjunto

$$\mathrm{P}(S) = S^* \setminus (S^* + S^*),$$

e portanto $|\,\mathrm{P}(S)| = \mathrm{e}(S)$.

Considere a notação de intervalo deste trabalho sempre restrita aos números inteiros, exceto quando citado o contrário. Isto é:

$$[x,y] = \{n \in \mathbb{Z} \,:\, x \leq n \leq y\}, \quad [x,y[= \{n \in \mathbb{Z} \,:\, x \leq n < y\}.$$

Dado um semigrupo numérico S com número de Frobenius $\mathrm{F}(S)$, o conjunto $\mathbb{N}_0 \setminus [0,\mathrm{F}(S)] \subset S$, isto é todo número inteiro maior que $\mathrm{F}(S)$ pertence ao semigrupo numérico S. Desta forma, dois importantes invariantes de semigrupos numéricos estão relacionados aos elementos de S que pertencem ao intervalo $[0,\mathrm{F}(S)]$.

Definição 1.24 *Dado um semigrupo numérico S, o* ***condutor*** *de S é definido como*

$$\mathrm{c}(S) := \mathrm{F}(S) + 1.$$

O conjunto de ***elementos à esquerda*** *de S é definido como*

$$\mathrm{L}(S) := [0,\mathrm{c}(S)-1] \cap S.$$

A partir do condutor, todo número inteiro pertence a S. Mais ainda, o condutor é o menor elemento de S com essa propriedade. Os elementos à esquerda de S são elementos do semigrupo numérico intercalados por lacunas. Além disso, como $|[0,\mathrm{F}(S)]| = \mathrm{c}(S)$, conclui-se a seguinte relação

$$|\,\mathrm{L}(S)| + \mathrm{g}(S) = \mathrm{F}(S) + 1 = \mathrm{c}(S). \tag{1-1}$$

O resultado a seguir estabelece uma cota inferior para o gênero a partir do número de Frobenius (e o condutor).

Lema 1.25 *Se S é um semigrupo numérico, então*

$$\mathrm{g}(S) \geq \frac{\mathrm{F}(S)+1}{2}.$$

Prova. Dado $s \in S$, pode-se inferir que o elemento $\mathrm{F}(S) - s$ é uma lacuna de S pois, caso contrário,

$$\mathrm{F}(S) = s + (\mathrm{F}(S) - s) \in S.$$

Assim, tomando qualquer elemento $s \in S$ tal que $s < \mathrm{F}(S)$ implica que $\mathrm{F}(S) - s \in \mathrm{G}(S)$. Com isso, tem-se que

$$\{\mathrm{F}(S) - s \ : \ s \in \mathrm{L}(S)\} \subset \mathrm{G}(S). \tag{1-2}$$

Por outro lado, veja que

$$|\{\mathrm{F}(S) - s \ : \ s \in \mathrm{L}(S)\}| = |\mathrm{L}(S)|. \tag{1-3}$$

A partir de (1-1), (1-2) e (1-3), segue que

$$|\{\mathrm{F}(S) - s \ : \ s \in \mathrm{L}(S)\}| + |\mathrm{L}(S)| = 2|\mathrm{L}(S)| \leq |\mathrm{L}(S)| + \mathrm{g}(S) = \mathrm{F}(S) + 1.$$

Reescrevendo a relação (1-1) em função de $g(S)$ e usando que $2|\mathrm{L}(S)| \leq \mathrm{F}(S) + 1$, tem-se que

$$2\,\mathrm{g}(S) = 2\mathrm{F}(S) + 2 - 2|\mathrm{L}(S)| \geq 2\mathrm{F}(S) + 2 - \mathrm{F}(S) - 1 = \mathrm{F}(S) + 1,$$

e conclui-se o resultado. □

Será provado posteriormente que tal cota é atingida pelos semigrupos numéricos de dimensão 2.

Proposição 1.26 *Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. Então:*

1. $\mathrm{F}(S) = (\max \mathrm{Ap}(S,n) - n)$;
2. $\mathrm{g}(S) = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{w \in \mathrm{Ap}(S,n)} w\right) - \dfrac{n-1}{2}$.

Prova.

1. O semigrupo numérico $S = \mathbb{N}_0$ satisfaz a relação. Basta notar que $\mathrm{Ap}(\mathbb{N}_0, n) = \{0, \ldots, n-1\}$ e $n - 1 - n = -1 = \mathrm{F}(\mathbb{N}_0)$. Considere então $S \neq \mathbb{N}_0$. Desta forma, o número de Frobenius será dado por

$$\mathrm{F}(S) = \max(\mathrm{G}(S)).$$

Pela definição de elemento no conjunto de Apéry,

$$\max \mathrm{Ap}(S,n) - n \notin S.$$

Dado um número $x > \max \mathrm{Ap}(S,n) - n$, têm-se $x+n > \max \mathrm{Ap}(S,n)$ e $x+n$ não pertence a $\mathrm{Ap}(S,n)$. Resta provar que $x+n \in S$ e assim $x+n-n = x \in S$ pela definição de conjunto de Apéry. Como $x+n > \max \mathrm{Ap}(S,n)$, pela divisão euclidiana de $x+n$ por n, existem $0 \leq i < n$ e $k \geq 0$ em que

$$x+n = kn+i > w(i).$$

Como $w(i) = k_1 n + i$ para algum $k_1 \leq k$, é possível reescrever $x+n$ como

$$x+n = (k-k_1)n + w(i)$$

e assim, $x+n \in S$ pois é combinação não negativa de elementos de S. Com isso, $x \in S$. Pela definição de número de Frobenius, como todo elemento maior que $\max \mathrm{Ap}(S,n) - n$ pertence ao semigrupo numérico, conclui-se que $\mathrm{F}(S) = \max \mathrm{Ap}(S,n) - n$.

2. No caso em que $S = \mathbb{N}_0$, como $\mathrm{Ap}(S,n) = \{0,\ldots,n-1\}$, segue que

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{w \in \mathrm{Ap}(S,n)} w\right) - \frac{n-1}{2} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} i\right) - \frac{n-1}{2} = 0 = \mathrm{g}(S).$$

Para $S \neq \mathbb{N}_0$, dado $w(i) \in \mathrm{Ap}(S,n)$, tem-se $w(i) = k_i n + i$, com $k_i \geq 0$. Para todo $x = kn+i$ com $0 \leq k < k_i$, obtém-se que $x \notin S$, pois $w(i) = k_i n + i$ é o menor elemento de S congruente a i módulo n pelo Lema 1.18. Assim,

$$\{i, n+i, \ldots, (k_i - 1)n + i\} \subset \mathrm{G}(S),$$

isto é, existem k_i elementos em $\mathrm{G}(S)$ congruentes a i módulo n. Como cada elemento de $\mathrm{G}(S)$ é congruente a algum $i = 1, 2, \cdots, n-1$, segue que

$$\begin{aligned}
\mathrm{g}(S) &= k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} \\
&= \frac{1}{n}(k_1 n + k_2 n + \cdots + k_{n-1} n) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(k_i n + i) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} i \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} w(i) - \frac{n-1}{2} \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{w \in \mathrm{Ap}(S,n)} w\right) - \frac{n-1}{2}.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 1.27 *Usando o semigrupo numérico* $S = \langle 5, 18 \rangle$ *pode-se verificar as relações do Lema 1.25 e da Proposição 1.26 através do GAP:*

```
gap >S := NumericalSemigroupByGenerators([5,18]);
gap >Genus(S) = Conductor(S)/2;
true
gap >Maximum(AperyList(S)) - Multiplicity(S) = FrobeniusNumber(S);
true
gap >Sum(AperyList(S))/Multiplicity(S) - (Multiplicity(S) - 1)/2 = Genus(S);
true
```

A seguir será introduzido o conceito de profundidade que será fundamental para o próximo capítulo.

Definição 1.28 *Dado um semigrupo numérico* S *com condutor* $\mathrm{c}(S)$ *e multiplicidade* $\mathrm{m}(S)$, *existem* $\mathrm{q}(S), \rho(S) \in \mathbb{N}_0$ *tais que*

$$\mathrm{c}(S) = \mathrm{m}(S)\,\mathrm{q}(S) - \rho(S),$$

com $\rho(S) \in [0, \mathrm{m}(S) - 1]$. *O inteiro* $\mathrm{q}(S)$ *é chamado de* ***profundidade*** *de* S.

Pode-se ver que a profundidade do semigrupo numérico S é dada equivalentemente por

$$\mathrm{q}(S) = \left\lceil \frac{\mathrm{c}(S)}{\mathrm{m}(S)} \right\rceil, \tag{1-4}$$

onde, para $x \in \mathbb{R}$, define-se $\lceil x \rceil = \min\{y \in \mathbb{Z} \;:\; y \geq x\}$. Assim, por exemplo, tem-se que

$$\mathrm{q}(\mathbb{N}_0) = \left\lceil \frac{0}{1} \right\rceil = 0.$$

A profundidade contribui com a determinação de estimativas para invariantes de semigrupos numéricos e é propriamente majorada pelo gênero do semigrupo numérico pela proposição a seguir.

Proposição 1.29 *Seja* S *um semigrupo numérico de gênero positivo. Então*

$$1 \leq \mathrm{q}(S) \leq \mathrm{g}(S).$$

Prova. A partir do Lema 1.25 e do gênero ser positivo, é válida a seguinte desigualdade cujos os termos podem ser divididos pela multiplicidade:

$$\mathrm{m}(S) \leq \mathrm{c}(S) \leq 2\,\mathrm{g}(S);$$

$$1 \leq \frac{\mathrm{c}(S)}{\mathrm{m}(S)} \leq \frac{2\,\mathrm{g}(S)}{\mathrm{m}(S)}.$$

Resta observar que dados $a, b \in \mathbb{R}$, é válido que

$$\lceil a \cdot b \rceil \leq \lceil a \rceil \cdot \lceil b \rceil .$$

A desigualdade acima decorre imediatamente das relações $a \leq \lceil a \rceil$ e $\lceil a \rceil = a$ se $a \in \mathbb{Z}$. Aplicando o teto, que é uma operação não-decrescente, em cada termo da desigualdade, segue que

$$1 \leq \frac{\mathrm{c}(S)}{\mathrm{m}(S)} \leq \left\lceil \frac{\mathrm{c}(S)}{\mathrm{m}(S)} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{2\,\mathrm{g}(S)}{\mathrm{m}(S)} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{2}{\mathrm{m}(S)} \right\rceil \mathrm{g}(S).$$

Como o gênero de S é positivo, sabe-se que $m(S) \geq 2$. Logo, $0 \leq \frac{2}{\mathrm{m}(S)} \leq 1$, de onde conclui-se que

$$1 \leq \mathrm{q}(S) \leq 1 \cdot \mathrm{g}(S).$$

□

Exemplo 1.30 1. *Dado um semigrupo numérico ordinário S, sua profundidade é dada por* $\mathrm{q}(S) = \left\lceil \frac{\mathrm{c}(S)}{\mathrm{m}(S)} \right\rceil = 1$ *pois* $\mathrm{c}(S) = \mathrm{m}(S)$*, atingindo a cota inferior da desigualdade anterior.*

2. *Dado* $g \in \mathbb{N}$*, o semigrupo numérico*

$$S_g = \{0, 2, 4, \ldots, 2g, 2g+1, \rightarrow\}$$

é conhecido como ***semigrupo hiperelíptico*** *e tem* $\mathrm{q}(S) = \left\lceil \frac{\mathrm{c}(S)}{\mathrm{m}(S)} \right\rceil = \left\lceil \frac{2g}{2} \right\rceil = g$*. Suas lacunas são dadas por*

$$\mathrm{G}(S) = \{1, 3, \ldots, 2g-1\}.$$

Assim, $\mathrm{g}(S) = \mathrm{q}(S)$*, atingindo a cota superior da desigualdade anterior.*

Pelos exemplos anteriores, conclui-se que a desigualdade dada pela Proposição 1.29 apresenta a melhor cota possível para a profundidade de um semigrupo numérico.

A profundidade será mais explorada posteriormente ao se determinar uma forma conveniente de se particionar elementos de um semigrupo numérico a partir deste invariante.

A seguir, será definido o conjunto dos elementos pseudo-Frobenius, o qual é uma extensão natural da definição do número de Frobenius.

Definição 1.31 *Seja S um semigrupo numérico. Um elemento $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ é chamado de* ***pseudo-Frobenius*** *se $x + s \in S$ para todo $s \in S^*$. O conjunto formado por todos os elementos pseudo-Frobenius será denotado por*

$$\mathrm{PF}(S) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S \ : \ x + s \in S, \ \ \forall\, s \in S^*\}.$$

A cardinalidade de $\mathrm{PF}(S)$ *é chamada de* ***tipo*** *de S e será denotada por* $\mathrm{t}(S)$.

Por definição, pode-se observar que $\mathrm{F}(S) = \max \mathrm{PF}(S)$. A próxima proposição depende da seguinte relação de ordem parcial definida nos elementos de $\mathbb{Z}$. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$a \leq_S b \text{ se } b - a \in S.$$

Veja que a partir desta relação,

$$\mathrm{PF}(S) = Maximal_{\leq_S}(\mathbb{Z} \setminus S). \tag{1-5}$$

Suponha que exista $f \in \mathrm{PF}(S)$ tal que $f \notin Maximal_{\leq_S}(\mathbb{Z} \setminus S)$. Então existiria $g \in \mathbb{Z} \setminus S$ em que $g - f = s$ para algum $s \in S$. Isto é, $f + s = g \notin S$, o que contradiz a definição de elementos pseudo-Frobenius. Por outro lado, caso $f \in Maximal_{\leq_S}(\mathbb{Z} \setminus S)$ não pertença a $\mathrm{PF}(S)$, então existem $s \in S^*$ e $g \in \mathrm{G}(S)$ em que $f + s = g$. Isto é, $g - f = s$ e $f \leq_S g$, o que contradiz f ser maximal na relação $\leq_S$.

Proposição 1.32 *Seja S um semigrupo numérico. Então*

$$\mathrm{g}(S) \leq \mathrm{t}(S)|\mathrm{L}(S)|.$$

Prova. Para cada elemento $x \in \mathrm{G}(S)$ é possível encontrar ao menos um elemento $f \in \mathrm{PF}(S)$ de modo que $f - x \in S$, pois $\mathrm{PF}(S) = Maximal_{\leq_S}(\mathbb{Z} \setminus S)$ pela relação (1-5). Dado $x \in G(S)$, define-se

$$f_x = \min\{f \in \mathrm{PF}(S) \ : \ \ f - x \in S\},$$

a função dada por

$$\mathrm{G}(S) \to \mathrm{PF}(S) \times \mathrm{L}(S)$$

$$x \mapsto (f_x, f_x - x)$$

está bem definida pois como $f_x - x \leq \mathrm{F}(S) - x$ e $\mathrm{F}(S) - x \in [0, \mathrm{F}(S)] \cap S$, logo $f_x - x \in \mathrm{L}(S)$. Pela injetividade da função, é possível majorar a cardinalidade do domínio a partir da cardinalidade do contradomínio, obtendo portanto

$$g(S) \leq t(S)|L(S)|.$$

□

A desigualdade da Proposição 1.32 é equivalente a

$$F(S) + 1 \leq (t(S) + 1)|L(S)|, \tag{1-6}$$

já que $|L(S)| + g(S) = c(S) = F(S) + 1$.

Wilf [14] questionou sobre a validade de uma desigualdade semelhante à anterior utilizando a dimensão, conhecida hoje como a conjectura de Wilf. A próxima seção será dedicada a explorar tal conjectura e algumas famílias de semigrupos numéricos nas quais é conhecida ser verdadeira.

Antes, porém, é introduzido o invariante a seguir que será utilizado para compreender a formulação original da questão proposta por Wilf em [14].

Definição 1.33 *Dado um semigrupo numérico S, a* ***densidade das lacunas*** *de S é a razão*

$$\frac{g(S)}{c(S)}.$$

Tal invariante fornece uma noção de densidade do conjunto das lacunas no intervalo $[0, F(S)]$.

1.3 A conjectura de Wilf e algumas famílias especiais de semigrupos numéricos

Herbert Wilf publicou *"A Circle-of-Lights Algorithm for the Money-Changing Problem"* [14] em 1978 onde apresenta algoritimos para calcular o condutor de um semigrupo numérico e, devido ao longo tempo desse método para problemas com um maior número de geradores, Wilf propôs um algoritmo chamado *Círculo das Luzes* para determinar o condutor e a partir dele determinou uma cota superior para a condutor em termos de seu conjunto gerador minimal.

Seguindo a ideia de se determinar cotas superiores para invariantes de semigrupos numéricos, ao fim do artigo Wilf propôs as seguintes questões:

a) É verdade que para um semigrupo numérico S com dimensão n, a fração $\frac{g(S)}{c(S)}$ é no máximo $1 - \frac{1}{n}$? Fixado n, é verdade que o único semigrupo numérico de dimensão n que atinge a igualdade é $\langle n, n+1, \ldots, 2n-1 \rangle$?

b) Seja $f(c)$ o número de semigrupos numéricos cujo condutor é c. Qual a ordem de magnitude para $f(c)$ quando $c \to \infty$?

Não é verdade que a igualdade ocorre apenas para semigrupos ordinários, isto é, semigrupos numéricos gerados por $n, n+1, \cdots, 2n-1$. O contra-exemplo será dado ao se apresentar semigrupos numéricos com 2 geradores.

A primeira parte da questão do item a) é sabida ser verdadeira para várias famílias de semigrupos numéricos, porém o caso geral ainda é desconhecida, e por esta razão é comumente conhecida como a **conjectura de Wilf** a seguir:

Conjectura 1.34 (de Wilf) *Para um semigrupo numérico S vale a relação*

$$e(S)|\mathrm{L}(S)| \geq \mathrm{F}(S)+1 \qquad . \tag{1-7}$$

Neste trabalho a Questão de Wilf será explorada a partir da seguinte desigualdade análoga a anterior

$$\frac{|\mathrm{L}(S)|}{\mathrm{F}(S)+1} = \frac{|\mathrm{L}(S)|}{\mathrm{c}(S)} \geq \frac{1}{e(S)}.$$

A partir dessa desigualdade, é evidente a equivalência de (1-7) com $\frac{\mathrm{g}(S)}{\mathrm{c}(S)} \leq 1 - \frac{1}{e(S)}$ proposta por Wilf, basta ver que:

$$1 - \frac{|\mathrm{L}(S)|}{\mathrm{c}(S)} \leq 1 - \frac{1}{e(S)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\mathrm{c}(S) - |\mathrm{L}(S)|}{\mathrm{c}(S)} \leq 1 - \frac{1}{e(S)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\mathrm{g}(S)}{\mathrm{c}(S)} \leq 1 - \frac{1}{e(S)}.$$

Neste trabalho, ambas as formas equivalentes de enunciado da conjectura de Wilf serão utilizadas. No restante desta seção, a conjetura de Wilf será mostrada válida para algumas famílias especiais de semigrupos numéricos.

Semigrupos numéricos ordinários

O semigrupo numérico ordinário satisfaz a conjectura de Wilf atingindo igualdade na relação proposta por Wilf, como afirmado pelo próprio em [14].

Teorema 1.35 *Seja $S = \{0, a, \rightarrow\}$ um semigrupo numérico ordinário. Então S satisfaz a conjectura de Wilf com igualdade.*

Prova. O semigrupo numérico S tem conjunto gerador $\{a, \ldots, 2a-1\}$, de modo que $\mathrm{c}(S) = a$, $\mathrm{e}(S) = a$ e $\mathrm{G}(S) = \{1, \ldots, a-1\}$, isto é, a densidade das lacunas é dada por

$$\frac{\mathrm{g}(S)}{\mathrm{c}(S)} = \frac{a-1}{a}.$$

Por outro lado,

$$1 - \frac{1}{\mathrm{e}(S)} = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a}.$$

Assim, $\frac{\mathrm{g}(S)}{\mathrm{c}(S)} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}(S)}$ e S satisfaz a conjectura de Wilf com igualdade. □

Semigrupos numéricos com 2 geradores

Os semigrupos numéricos com dois geradores são um exemplo clássico para o problema de Frobenius já que já é conhecido um modo de se calcular o número de Frobenius a partir de seus geradores.

Proposição 1.36 *Sejam a e b inteiros positivos com $mdc(a,b) = 1$. Então:*

1. $\mathrm{F}(\langle a,b\rangle) = ab - a - b$;

2. $\mathrm{g}(\langle a,b\rangle) = \dfrac{ab-a-b+1}{2}$.

Prova.

1. Sem perda de generalidade, considere $a < b$. Veja que

$$\mathrm{Ap}(\langle a,b\rangle, a) = \{0, b, 2b, \ldots, (a-1)b\}.$$

Basta perceber que nenhum dos a termos possui a mesma congruência módulo a, isto é,

$$b \not\equiv 2b \not\equiv \ldots \not\equiv (a-1)b \mod a,$$

e todos pertencem ao conjunto $\mathrm{Ap}(\langle a,b\rangle, a)$ pois $ib - a \notin \langle a,b\rangle$ para todo $0 \leq i \leq a-1$. Aplicando a Proposição 1.26, temos que $\mathrm{F}(\langle a,b\rangle) = (a-1)b - a = ab - a - b$.

2. De maneira análoga, aplicando a Proposição 1.26,

$$\begin{aligned}
\mathrm{g}(\langle a,b\rangle) &= \frac{1}{a}\left(\sum_{i=1}^{a-1} ib\right) - \frac{a-1}{2} \\
&= \frac{ab(a-1)}{2a} - \frac{a-1}{2} \\
&= \frac{(b-1)(a-1)}{2} \\
&= \frac{ab-a-b+1}{2}.
\end{aligned}$$

□

Assim, no caso em que um semigrupo numérico S possui 2 geradores, vale

$$\mathrm{g}(S) = \frac{\mathrm{F}(S)+1}{2}. \tag{1-8}$$

que constitui um exemplo em que a igualdade na cota da desigualdade apresentada no Lema 1.25 é atingida.

Teorema 1.37 *Seja S um semigrupo numérico com 2 geradores coprimos quaisquer. O semigrupo numérico S satisfaz a conjectura de Wilf com igualdade.*

Prova. Sabendo que $|\mathrm{L}(S)| = \mathrm{F}(S)+1-\mathrm{g}(S)$ e $\mathrm{g}(S) = \dfrac{\mathrm{F}(S)+1}{2}$, então

$$|\mathrm{L}(S)| = \frac{\mathrm{F}(S)+1}{2}$$

e a dimensão de S é $n = 2$. Substituindo na expressão (1-7) da conjectura de Wilf, tem-se que $2|\mathrm{L}(S)| = \mathrm{F}(S)+1$. □

Assim, semigrupos numéricos com 2 geradores são exemplos de semigrupos que atingem a cota máxima dada pela conjectura de Wilf contradizendo parte da questão inicialmente proposta por Wilf.

Exemplo 1.38 *O exemplo a seguir ilustra o uso do GAP para verificar as fórmulas para gênero e número de Frobenius de um semigrupo numérico com 2 geradores.*

```
gap >s := NumericalSemigroupByGenerators([5,18]);;
gap >FrobeniusNumber(s) = 5*18-5-18;
true
gap >Genus(s) = (5*18-5-18+1)/2;
true
```

Semigrupos numéricos de dimensão maximal

Semigrupos numéricos de dimensão maximal são exemplos de semigrupos numéricos cuja dimensão atinge a cota máxima da seguinte proposição.

Proposição 1.39 *Seja S um semigrupo numérico. Então*

$$\mathrm{e}(S) \leq \mathrm{m}(S).$$

Prova. Recorde da Observação 1.19 que o conjunto $(\mathrm{Ap}(S,\mathrm{m}(S))\setminus\{0\})\cup\{\mathrm{m}(S)\}$ é um conjunto gerador de S com $\mathrm{m}(S)$ elementos. Logo, a dimensão $\mathrm{e}(S)$ de S satisfaz a desigualdade. □

Um semigrupo numérico S tal que $\mathrm{e}(S)=\mathrm{m}(S)$ é chamado de **semigrupo numérico de dimensão maximal**.

Exemplo 1.40 *Seja $S=\{0,a,\rightarrow\}$ um semigrupo numérico ordinário. O semigrupo numérico S é um semigrupo de dimensão maximal pois $\{a,\ldots,2a-1\}$ é o conjunto gerador minimal de S e $\mathrm{e}(S)=a=\mathrm{m}(S)$.*

Para provar que semigrupos numéricos de dimensão maximal satisfazem a conjectura de Wilf, será necessário majorar o tipo do semigrupo numérico. Para isso, é preciso utilizar a seguinte proposição.

Proposição 1.41 *Sejam S um semigrupo numérico e $n\in S^*$. Então*

$$\mathrm{PF}(S)=\{w-n\ :\ w\in \mathit{Maximal}_{\leq_S}\mathrm{Ap}(S,n)\}.$$

Prova. Seja $x\in\mathrm{PF}(S)$. Como $x\notin S$ e $x+n\in S$ para todo $n\in S^*$, segue que $x+n\in\mathrm{Ap}(S,n)$. Para provar que $x+n\in \mathit{Maximal}_{\leq_S}\mathrm{Ap}(S,n)$, suponha que existe $w\in\mathrm{Ap}(S,n)$ tal que $x+n\leq_S w$ e será mostrado que $w=x+n$. De $x+n\leq_S w$ tem-se que

$$w-x-n=s \text{ para algum } s\in S.$$

Em outras palavras,

$$w-n=x+s.$$

Mas x é pseudo-Frobenius e $w-n\notin S$, o que implica que $s=0$. Assim, $x=w-n$ e portanto w é maximal em relação à ordem $\leq_S$. Considere agora

$$w\in \mathit{Maximal}_{\leq_S}\mathrm{Ap}(S,n).$$

Por $w\in\mathrm{Ap}(S,n)$, logo $w-n\notin S$. Supondo que $w-n$ não é pseudo-Frobenius, então $w-n+s\notin S$ para algum $s\in S^*$. Neste caso, $w+s\in\mathrm{Ap}(S,n)$ e $w\leq_S w+s$, o que contradiz a maximalidade de w. Logo, $w-n$ é pseudo-Frobenius. □

Como consequência do resultado anterior,

$$\mathrm{t}(S)=|\{w-n\ :\ w\in \mathit{Maximal}_{\leq_S}\mathrm{Ap}(S,n)\}|.$$

Como 0 nunca será um elemento maximal de $\mathrm{Ap}(S,\mathrm{m}(S))$ e $|\mathrm{Ap}(S,\mathrm{m}(S))| = \mathrm{m}(S)$, conclui-se o seguinte corolário.

Corolário 1.42 *Seja S um semigrupo numérico. Então*

$$\mathrm{t}(S) \leq \mathrm{m}(S) - 1.$$

Para o caso em que S tem dimensão maximal, o resultado do corolário atinge sua cota.

Proposição 1.43 *Seja S um semigrupo numérico de dimensão maximal. Então*

$$\mathrm{t}(S) + 1 = \mathrm{m}(S).$$

Prova. Como o conjunto $(\mathrm{Ap}(S,\mathrm{m}(S)) \setminus \{0\}) \cup \{\mathrm{m}(S)\}$ é um conjunto gerador de S e $|\mathrm{Ap}(S,\mathrm{m}(S))| = \mathrm{m}(S)$, no caso em que S é um semigrupo numérico de dimensão maximal, é possível concluir que $(\mathrm{Ap}(S,\mathrm{m}(S)) \setminus \{0\}) \cup \{\mathrm{m}(S)\}$ é o conjunto gerador minimal de S. Em outras palavras,

$$\mathrm{e}(S) = |(\mathrm{Ap}(S,\mathrm{m}(S)) \setminus \{0\}) \cup \{\mathrm{m}(S)\}|.$$

A Proposição 1.41 garante que $\mathrm{t}(S) = |\{w - \mathrm{m}(S) \ : \ w \in Maximal_{\leq_S} \mathrm{Ap}(S,\mathrm{m}(S))\}|$ e portanto basta provar que todo $w \in \mathrm{Ap}(S,\mathrm{m}(S)) \setminus \{0\}$ é maximal com relação à ordem $\leq_S$. Para isso, suponha que existam $w_i, w_j \in \mathrm{Ap}(S,\mathrm{m}(S))$ não nulos e distintos em que

$$w_i \leq_S w_j,$$

isto é ,$w_j - w_i = s \in S^*$. Em outras palavras, $w_j = w_i + s$ seria um elemento decomponível, o que contradiz o fato de que $(\mathrm{Ap}(S,\mathrm{m}(S)) \setminus \{0\}) \cup \{\mathrm{m}(S)\}$ é o conjunto gerador minimal de S. Assim, todo elemento não nulo de $\mathrm{Ap}(S,\mathrm{m}(S))$ são maximais com relação à ordem $\leq_S$. Assim,

$$\mathrm{m}(S) = \mathrm{e}(S) = |\mathrm{Ap}(S,\mathrm{m}(S)) \setminus \{0\} \cup \{\mathrm{m}(S)\}| = \mathrm{t}(S) + 1.$$

□

Corolário 1.44 *Seja S um semigrupo numérico de dimensão maximal. Então S satisfaz a conjectura de Wilf.*

Prova. Da Equação (1-6), tem-se que

$$\mathrm{F}(S) + 1 \leq (\mathrm{t}(S) + 1)|\mathrm{L}(S)|.$$

Por outro lado, pela Proposição 1.43 tem-se que $\mathrm{t}(S)+1=\mathrm{e}(S)$. Assim,

$$\mathrm{F}(S)+1 \leq \mathrm{e}(S)|\mathrm{L}(S)|,$$

como propõe a conjectura de Wilf. □

Semigrupos numéricos irredutíveis

Dado um semigrupo numérico S, defina

$$\mathrm{SG}(S)=\{x \in \mathrm{PF}(S) \ : \ 2x \in S\}.$$

Os elementos de $\mathrm{SG}(S)$ são chamados de **lacunas especiais** de S.

Note que $|SG(S)| \geq 1$ já que $F(S) \in SG(S)$ em qualquer semigrupo numérico S.

Lema 1.45 *Seja S um semigrupo numérico e $x \in \mathrm{G}(S)$. Então $S \cup \{x\}$ é semigrupo numérico se, e somente se, $x \in \mathrm{SG}(S)$.*

Prova. ($\Rightarrow$) Se $S \cup \{x\}$ é um semigrupo numérico, segue que $s+x \in S$ para todo $s \in S$ o que implica que $x \in PF(S)$. Além disso, $2x \in S$, logo $x \in SG(S)$.

($\Leftarrow$) Definindo o conjunto $T = S \cup \{x\}$, o complemento de T em $\mathbb{N}_0$ é finito pois está contido em $G(S)$. O elemento neutro $0 \in T$. Resta provar que o conjunto T é fechado para adição. Por definição de T, só é necessário mostrar que $s+x \in S$ para todo $s \in S^*$. Da hipótese de $x \in \mathrm{PF}(S)$ decorre que $x+s \in S$ para qualquer $s \in S^*$. Além disso, como $2x \in S$, logo o conjunto T é fechado para soma, concluindo que T é um semigrupo numérico. □

Definição 1.46 *Um semigrupo numérico S é dito* ***irredutível*** *se não pode ser expresso como uma interseção de outros dois semigrupos numéricos que contêm S propriamente.*

O teorema a seguir fornece equivalências para a noção de irredutibilidade por meio de propriedades de seus invariantes que pode podem ser verificadas de maneira mais prática dentro do estudo de semigrupos numéricos.

Teorema 1.47 *Seja S um semigrupo numérico. Então são equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *S é irredutível;*
2. *S é maximal (com respeito à inclusão) no conjunto dos semigrupos numéricos com número de Frobenius $\mathrm{F}(S)$;*

3. $|\,\mathrm{SG}(S)| = 1$.

Prova. (1. $\Rightarrow$ 2.) Caso T seja um semigrupo numérico com $S \subset T$ e $F(S) = F(T)$, é possível escrever o semigrupo S como a interseção dos seguintes semigrupos numéricos

$$S = (S \cup \{F(S)\}) \cap T.$$

Como S é irredutível e $S \neq S \cup \{F(S)\}$, segue que $T = S$. Assim pode-se deduzir que S é maximal no conjunto de todos os semigrupos numéricos com número de Frobenius $F(S)$.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Se S é maximal no conjunto dos semigrupos numéricos com número de Frobenius F(S), caso $|SG(S)| > 1$, então existe $x \in SG(S)$ com $x \neq F(S)$ de modo que $S \cup \{x\}$ é um semigrupo numérico com número de Frobenius $F(S)$ pelo Lema 1.45. Entretanto, $S \subset S \cup \{x\}$ contradiz a maximalidade de S. Assim, $|SG(S)| = 1$.

(3. $\Rightarrow$ 1.) Suponha que $|\,\mathrm{SG}(S)| = 1$ e S não é irredutível , isto é, existem S_1 e S_2 semigrupos numéricos tais que $S = S_1 \cap S_2$ com $S \subsetneq S_1$ e $S \subsetneq S_2$. Considere

$$s_1 = \max(S_1 \setminus S) \quad \text{e} \quad s_2 = \max(S_2 \setminus S).$$

Veja que $s_i \in SG(S)$ para $i = 1,2$, pois $s_i + s \in S$ para todo $s \in S^*$ e $2s_i \in S$ uma vez que $2s_i \geq s_i$ e pela maximalidade de s_i. De $|SG(S)| = 1$ conclui-se que $s_1 = s_2$, e logo $s_1 \in S_1 \cap S_2 = S$, contradizendo $s_1 \in S_1 \setminus S$. □

Definição 1.48 *Seja S um semigrupo numérico irredutível. O semigrupo numérico S é chamado de* ***simétrico*** *quando $F(S)$ é ímpar. Caso contrário, o semigrupo numérico S é chamado de* ***pseudossimétrico****.*

A partir da divisão de semigrupos irredutíveis em simétricos e pseudossimétricos, o número de Frobenius tornou-se peça chave no estudo de semigrupos numéricos irredutíveis. Assim, é possível apresentar uma caracterização equivalente para um semigrupo ser irredutível a partir do número de Frobenius com os seguintes teoremas.

Teorema 1.49 *Seja S um semigrupo numérico. Então são equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *S é simétrico;*
2. *$\mathrm{F}(S)$ é ímpar e $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ implica que $\mathrm{F}(S) - x \in S$;*
3. *$\mathrm{g}(S) = \dfrac{\mathrm{F}(S)+1}{2}$.*

Prova. (1. $\Rightarrow$ 2.) Como S é simétrico, vale que $F(S)$ é ímpar. Resta provar que $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ implica que $F(S) - x \in S$. Suponha que não, então existe $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ em que $F(S) - x \notin S$.

Assim, existe

$$h = \max\{y \in \mathbb{Z} \setminus S \text{ tal que } F(S) - y \notin S\}.$$

Pela maximalidade de h tem-se que $h \geq F(S) - h$, isto é, $2h \geq F(S)$. Por outro lado, $h + s \in S$ para todo $s \in S^*$, pois, caso contrário valeria que $h + s \in G(S)$ e pela maximalidade de h

$$F(S) - (h + s) = t \in S.$$

Isto é,

$$F(S) - h = t + s \in S,$$

o que contradiz a hipótese que $F(S) - h \notin S$. Assim, $h \in SG(S)$ e $S \cup \{h\}$ é um semigrupo numérico com número de Frobenius $F(S)$, contradizendo a hipótese de que S é irredutível pelo Teorema 1.47. Assim, $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ implica que $F(S) - x \in S$.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Como $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ implica que $\mathrm{F}(S) - x \in S$, vale a seguinte afirmação

$$G(S) = \{l_1 < \cdots < F(S) = l_{g(S)}\} \Rightarrow \{F(S) - l_{g(S)} < \cdots < F(S) - l_1\} \subset L(S),$$

de onde se conclui que $g(S) \leq |L(S)|$. Da equação (1-1), tem-se que

$$F(S) + 1 = |L(S)| + g(S) \geq 2g(S),$$

o que implica em

$$g(S) \leq \frac{F(S) + 1}{2}.$$

Além disso, de acordo com o Lema 1.25,

$$g(S) \geq \frac{F(S) + 1}{2}.$$

Assim, pode-se concluir que $\mathrm{g}(S) = \dfrac{\mathrm{F}(S) + 1}{2}$.

(3. $\Rightarrow$ 1.) De $\mathrm{g}(S) = \dfrac{\mathrm{F}(S) + 1}{2}$ e o Lema 1.25 conclui-se que S possui a menor quantidade de lacunas possível associado a um semigrupo numérico tendo $F(S)$ como número de Frobenius. Isto é, para qualquer semigrupo numérico T com número Frobenius $F(S)$ e $S \subset T$ vale que $S = T$, o que implica em S ser irredutível pelo Teorema 1.47. Portanto $F(S)$ é ímpar, o que conclui que S é simétrico. □

Corolário 1.50 *Seja S um semigrupo numérico com* $\mathrm{e}(S) = 2$*. Então S é simétrico.*

*Prova.*Segue diretamente do teorema anterior e a relação dada em (1-8). □

Teorema 1.51 *Seja S um semigrupo numérico. Então são equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *S é pseudo-simétrico;*
2. *$\mathrm{F}(S)$ é par e $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ implica que ou $\mathrm{F}(S) - x \in S$ ou $x = \mathrm{F}(S)/2$;*
3. *$\mathrm{g}(S) = \dfrac{\mathrm{F}(S)+2}{2}$.*

Prova. (1. $\Rightarrow$ 2.) Como S é pseudossimétrico, vale que $F(S)$ é par. Resta provar que $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ implica que $F(S) - x \in S$ ou $x = \mathrm{F}(S)/2$. Suponha que não, então existe $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ com $x \neq \mathrm{F}(S)/2$ e $F(S) - x \notin S$. Assim, existe

$$h = \max\{y \in \mathbb{Z} \setminus S \text{ tal que } F(S) - y \notin S \text{ e } y \neq \mathrm{F}(S)/2\}.$$

Pela maximalidade de h, vale que $h \geq F(S) - h$. Como $h \neq F(S)/2$, segue que $h > F(S) - h$, isto é, $2h > F(S)$. Por outro lado, $h + s \in S$ para todo $s \in S^*$. Caso contrário, valeria que $h + s \in G(S)$ e pela maximalidade de h

$$F(S) - (h+s) = t \in S.$$

Isto é,

$$F(S) - h = t + s \in S$$

contradizendo a hipótese que $F(S) - h \notin S$. Assim, $h \in SG(S)$ e $S \cup \{h\}$ é um semigrupo numérico com número de Frobenius $F(S)$, contradizendo que S é irredutível pelo Teorema 1.47. Logo, $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ implica que ou $F(S) - x \in S$ ou $x = F(S)/2$.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Como $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ implica que $\mathrm{F}(S) - x \in S$ ou $x = \mathrm{F}(S)/2$, vale a seguinte afirmação

$$G(S) = \{l_1 < \cdots < F(S) = l_{g(S)}\} \Rightarrow \{F(S) - l_{g(S)} < \cdots < F(S) - l_1\} \setminus \{F(S)/2\} \subset L(S),$$

de onde segue que $g(S) - 1 \leq |L(S)|$. Da equação (1-1), tem-se que

$$F(S) + 1 = |L(S)| + g(S) \geq 2g(S) - 1.$$

Isto é,

$$g(S) \leq \frac{F(S)+2}{2}.$$

Além disso, de acordo com o Lema 1.25,

$$g(S) \geq \frac{F(S)+1}{2}.$$

Assim, pode-se concluir que

$$g(S) \in \left[\frac{F(S)+1}{2}, \frac{F(S)+2}{2}\right].$$

Como $F(S)$ é par e $g(S)$ é inteiro, conclui-se que $g(S) = \frac{F(S)+2}{2}$.

(3. $\Rightarrow$ 1.) De $\mathrm{g}(S) = \dfrac{\mathrm{F}(S)+2}{2}$ e o Lema 1.25, conclui-se que S possui a menor quantidade de lacunas possível associado a um semigrupo numérico tendo $F(S)$ como número de Frobenius. Isto é, para qualquer semigrupo numérico T com número Frobenius $F(S)$ e $S \subset T$ vale que $S = T$, o que implica em S ser irredutível pelo Teorema 1.47. Portanto $F(S)$ é par, o que conclui que S é pseudossimétrico.

□

Corolário 1.52 *Seja S um semigrupo numérico. Então S é irredutível se, e somente se,*

$$g(S) = \left\lceil \frac{F(S)+1}{2} \right\rceil.$$

Prova. Observe que

$$\left\lceil \frac{F(S)+1}{2} \right\rceil = \begin{cases} \frac{F(S)+1}{2} & \text{se } F(S) \text{ é impar} \\ \frac{F(S)+2}{2} & \text{se } F(S) \text{ é par} \end{cases}$$

em função da definição de teto de um número real. Com isso, o corolário segue diretamente dos teoremas anteriores. □

Com os teoremas anteriores, é possível provar a validade da conjectura de Wilf para semigrupos numéricos irredutíveis a partir da caracterização do gênero em função do número de Frobenius.

Teorema 1.53 *Se S é um semigrupo numérico irredutível, então S satisfaz a conjectura de Wilf.*

Prova. Caso $e(S) = 1$, o semigrupo numérico irredutível se reduz a $S = \mathbb{N}_0$, que satisfaz a conjectura de Wilf. Se S é simétrico e $e(S) \geq 2$, então

$$\begin{aligned} |L(S)| &= F(S) + 1 - g(S) \\ &= \frac{2F(S) + 2 - 1 - F(S)}{2} \\ &= \frac{F(S)+1}{2}. \end{aligned}$$

Logo, substituindo na expressão da conjectura de Wilf,

$$e(S)|L(S)| \geq 2|L(S)| = F(S) + 1.$$

Se S é pseudossimétrico, então

$$\begin{aligned}|L(S)| =& F(S) + 1 - g(S)\\ =& \frac{2F(S) + 2 - 2 - F(S)}{2}\\ =& \frac{F(S)}{2}.\end{aligned}$$

Sabendo que todo semigrupo numérico com dois geradores é simétrico pelo Corolário 1.50, então $e(S) \geq 3$. Logo, substituindo a relação obtida na expressão da conjectura de Wilf, tem-se que

$$e(S)|L(S)| \geq \frac{3F(S)}{2} = F(S) + \frac{F(S)}{2} \geq F(S) + 1,$$

já que $F(S) \geq 2$. □

CAPÍTULO 2

A conjectura de Wilf para semigrupos numéricos com profundidade $\mathrm{q} \leq 3$

Eliahou [5] estudou famílias de semigrupos fixando a profundidade. Para isso, propôs uma partição dos elementos do semigrupo pela qual a cardinalidade das partições facilitaria o uso de estimativas para se provar a conjectura de Wilf. É a partir desta partição que o grande objetivo desta seção, provar a validade da conjectura de Wilf para semigrupos numéricos com profundidade ≤ 3, será atingido.

Com a definição de um invariante a partir desta partição, se recorreu a construção de uma álgebra graduada a partir dos elementos primitivos de um semigrupo numérico com profundidade $q = 3$ e perfil $(p_1, 0)$. Utilizando de uma generalização do Teorema de Macaulay, que pode ser vista em [8], sobre funções de Hilbert aplicadas nesta álgebra graduada para determinar cotas superiores para este semigrupo numérico, o resultado final levou a concluir que todo semigrupo numérico de profundidade $q \leq 3$ satisfaz a Conjectura de Wilf, o que corrobora com a validade da conjectura a partir do resultado de Zhai em [15]. O conteúdo deste capítulo tem como referência principal [5].

2.1 Uma partição conveniente no estudo de semigrupos numéricos

A partir de uma separação dos elementos à esquerda do semigrupo numérico feita de modo a colocá-los convenientemente em intervalos de tamanho igual a multiplicidade, uma grande variedade de propriedades foi determinada. Não apenas os elementos do semigrupo numérico em si, mas também de elementos primitivos, decomponíveis e de Apéry puderam ser contados, ou estimados, por meio destes subconjuntos.

Definição 2.1 (Partição de Eliahou) *Dado um semigrupo numérico S, considere* $\rho(S) = \mathrm{q}(S)\,\mathrm{m}(S) - \mathrm{c}(S)$. *Para cada $i \in \mathbb{N}_0$, defina os subconjuntos*

$$S_i = S \cap [i\,\mathrm{m}(S) - \rho(S), (i+1)\,\mathrm{m}(S) - \rho(S)[.$$

Os subconjuntos acima formam a seguinte partição do semigrupo numérico S.

$$S = S_0 \dot{\cup} S_1 \dot{\cup} S_2 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} S_{q-1} \dot{\cup} S_q \dot{\cup} \cdots .$$

Tal partição permite, dentre outras propriedades, determinar a cardinalidade dos elementos à esquerda de um semigrupo numérico S a partir dos respectivos subconjuntos

$$|L(S)| = |S_0| + |S_1| + \cdots + |S_{q-1}|, \tag{2-1}$$

já que $S_q = [\mathrm{c}(S), \mathrm{c}(S) + \mathrm{m}(S)[$.

É possível observar que $|S_0| = 1$, pois subconjunto S_0 contém apenas o elemento 0. Para isso, basta ver que $S_0 = \mathrm{S} \cap [-\rho(S), \mathrm{m}(S) - \rho(S)[$ e o único elemento de S menor que a multiplicidade é o 0.

De maneira análoga, os elementos decomponíveis e primitivos de S (veja a Definição 1.23) ficam também particionados pela partição de Eliahou. Definindo

$$D_i = S_i \cap D(S) \quad \text{e} \quad P_i = S_i \cap P(S),$$

é possível descrever todos os elementos decomponíveis e primitivos pela partição de Eliahou pelo seguinte resultado.

Proposição 2.2 *Seja S um semigrupo numérico. Os elementos decomponíveis e primitivos de S podem ser particionados pela partição de Eliahou da seguinte forma:*

1.

$$D(S) = D_2 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} D_{q-1} \dot{\cup} D_q \dot{\cup} \cdots .$$

2.

$$P(S) = P_1 \dot{\cup} P_2 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} P_{q-1} \dot{\cup} P_q .$$

Prova.

1. Como $S_0 = \{0\}$, resta provar que $D_1 = \emptyset$. Para isso, só é preciso observar que o menor elemento de S em $S^* + S^*$ é $2m$. Ainda, $2m \in \mathrm{S} \cap [2m - \rho, 3m - \rho] = S_2$. Ou seja, $S_1 \cap D = \emptyset$ e não há elementos decomponíveis em D_1.
2. Como $S_0 = \{0\}$, segue que $P_0 = \emptyset$. Além disso, veja que para qualquer $s \in S_i$ com $i \geq q+1$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $s = \mathrm{c}(S) + \mathrm{m}(S) + n$. Como $\mathrm{c}(S) + n \in S$ por definição de condutor, vale que

   $$s = \mathrm{m}(S) + (\mathrm{c}(S) + n) \in S^* + S^*$$

   e assim todo s é decomponível a partir de $s \in S_i$ com $i \geq q+1$. Portanto, $P_i = \emptyset$ para $i \geq q+1$.

□

As cardinalidades dos subconjuntos da partição serão denotadas por

$$p_i = |P_i| \quad \text{e} \quad d_i = |D_i|,$$

e serão fundamentais nas seções seguintes ao se definir invariantes essenciais na comprovação da validade da conjectura de Wilf para determinados semigrupos numéricos.

Definição 2.3 *Dado um semigrupo numérico S com profundidade q, o **perfil** de S é dado pela* $(q-1)-$*upla* $(p_1, p_2, \ldots, p_{q-1}) \in \mathbb{N}_0^{q-1}$.

O exemplo a seguir ilustra como é possível determinar a partição de Eliahou para elementos primitivos e decomponíveis de um semigrupo numérico, bem como seu perfil através de uma rotina no GAP com o pacote `NumericalSgps`.

Exemplo 2.4 *Considere o semigrupo numérico*

$$\mathrm{s} = \{0,14,22,23,28,36,37,42,44,45,46,50,51,56,\rightarrow\},$$

em que $q(S) = \left\lceil \frac{56}{14} \right\rceil = 4.$

```
gap >s := NumericalSemigroupByGenerators([14,22,23,57,61,62,63]);;
gap >S := EliahouSlicesOfNumericalSemigroup(s);
[[14,22,23],[28,36,37],[42,44,45,46,50,51]]
gap >P := MinimalGenerators(s);;
gap >S4 := [Conductor(s)..Conductor(s)+Multiplicity(s)-1];;
gap >IntersectionSet(P,S[1]);IntersectionSet(P,S[2]);
IntersectionSet(P,S[3]);IntersectionSet(P,S4);
[14,22,23]
[ ]
[ ]
[57,61,62,63]
gap >Difference(S[2],P);Difference(S[3],P);Difference(S4,P);
[28,36,37]
[42,44,45,46,50,51]
[56,58,59,60,64,65,66,67,68,69]
gap >ProfileOfNumericalSemigroup(s);
[3,0,0]
```

Assim, é possível particionar os elementos primitivos por

$$\mathrm{P} = \{14,22,23\} \,\dot{\cup}\, \emptyset \,\dot{\cup}\, \emptyset \,\dot{\cup}\, \{57,61,62,63\}.$$

De maneira análoga, se particiona os elementos decomponíveis por

$$\mathrm{D} = \{28,36,37\} \dot{\cup} \{42,44,45,46,50,51\} \dot{\cup} \{58,59,60,64,65,66,67,68,69\} \dot{\cup} \cdots.$$

Por fim, o perfil de S é dado pela tripla ordenada $(3,0,0)$.

Utilizando a partição de Eliahou também é possível estudar o conjunto de Apéry de um semigrupo numérico S em relação a $\mathrm{m}(S)$. Aqui será utilizado a notação $\mathrm{Ap}(S,\mathrm{m}(S)) = X$. Considere os subconjuntos

$$X_i = S_i \cap X,$$

que satisfazem o seguinte resultado.

Proposição 2.5 *Seja S um semigrupo numérico. Os elementos do conjunto de Apéry X podem ser particionados por*

$$\mathrm{X} = X_0 \dot{\cup} X_1 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} X_{q-1} \dot{\cup} X_q.$$

Prova. Veja que para qualquer $s \in S_i$ com $i \geq q+1$, vale que $s \geq \mathrm{c}(S) + \mathrm{m}(S)$, portanto, que

$$s - \mathrm{m}(S) \geq \mathrm{c}(S).$$

Logo, $s - \mathrm{m}(S) \in S$ e assim $s \notin X$ por definição de elemento de Apéry de S, de onde se conclui a proposição. □

Com a partição dos elementos de X apresentada, pode-se definir a partir das cardinalidades dos subconjuntos X_i os seguintes coeficientes:

$$\alpha_i = \begin{cases} |X_i|, & i \leq q-1 \\ |X_q \setminus P|, & i = q \end{cases}.$$

Tais coeficientes serão de suma importância à principal demonstração deste capítulo por meio das fórmulas fornecidas pelo seguinte.

Proposição 2.6 *Seja* S *um semigrupo numérico. Então*

1. $|L(S)| = \sum_{i=0}^{q-1} (q-i)\alpha_i$;
2. $d_q = \sum_{i=0}^{q} \alpha_i$.

Prova.

1. Como é possível calcular a cardinalidade dos elementos à esquerda de S por

$$|L(S)| = |S_0| + |S_1| + \cdots + |S_{q-1}|,$$

resta encontrar uma relação entre a cardinalidade dos subconjuntos das partições de S e X. Observe que para $1 \leq i \leq q-1$, vale que

$$S_i = (\mathrm{m}(S) + S_{i-1}) \dot{\cup} X_i$$

já que para todo $s \in S_i$, ou $s \in X$ e portanto $s - \mathrm{m}(S) \notin S$, ou $s - \mathrm{m}(S) \in S_{i-1}$. Assim $|S_i| = |S_{i-1}| + \alpha_i$, para $1 \leq i \leq q-1$, e portanto,

$$|S_0| = \alpha_0$$

$$|S_1| = \alpha_0 + \alpha_1,$$

$$|S_2| = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\vdots$$

$$|S_{q-1}| = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{q-1}.$$

Somando as i parcelas de α_{q-i} das expressões anteriores, conclui-se que

$$|L(S)| = \sum_{i=0}^{q-1} (q-i)\alpha_i.$$

2. Pela Lema 1.18, tem-se que $|X| = \mathrm{m}(S)$. Por outro lado, por definições dos coeficientes α_i, vale que

$$|X| = \sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i + (\alpha_q + p_q),$$

já que $|X_q| = \alpha_q + p_q$ pois todo elemento primitivo de S pertence a X. Como $S_q = [\mathrm{c}(S), \mathrm{c}(S) + \mathrm{m}(S)[$, sabe-se que $|S_q| = \mathrm{m}(S)$. Além disso, $|S_q| = p_q + d_q$. Reunindo essas informações, tem-se que

$$p_q + d_q = \sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i + (\alpha_q + p_q).$$

Subtraindo p_q da igualdade, conclui-se a afirmação da proposição.

□

As definições a seguir permitem determinar a validade da conjectura de Wilf por meio dos invariantes.

Definição 2.7 *Dado um semigrupo numérico S, o número*

$$W(S) = \mathrm{e}(S)|\,\mathrm{L}(S)| - \mathrm{c}(S)$$

*é chamado de **número de Wilf** de S.*

Veja que se $W(S) \geq 0$, então

$$\frac{|L(S)|}{c(S)} \geq \frac{1}{e(S)},$$

e consequentemente está provada a conjectura de Wilf. Logo, uma forma de mostrar a validade da conjectura de Wilf para um semigrupo numérico é provar que seu número de Wilf é não negativo.

A seguir será considerado um invariante chave que, com propriedade semelhante ao número de Wilf, permite concluir a validade da conjectura de Wilf para um semigrupo numérico.

Definição 2.8 *Dado um semigrupo numérico S, o número*

$$W_0(S) = |\,\mathrm{P}(S) \cap \mathrm{L}(S)||\,\mathrm{L}(S)| - \mathrm{q}(S)d_q + \rho(S)$$

*é chamado **número de Eliahou** de S.*

A partir dos invariantes que compõem a expressão do número de Wilf e do número de Eliahou, uma importante relação pode ser determinada entre estes. Veja:

$$\begin{aligned} W_0(S) + p_q(|L(S)| - q(S)) &= |\,\mathrm{P}(S) \cap \mathrm{L}(S)||\,\mathrm{L}(S)| - \mathrm{q}(S)d_q + \rho(S) + p_q(|L(S)| - q(S)) \\ &= (|\,\mathrm{P}(S) \cap \mathrm{L}(S)| + p_q)|\,\mathrm{L}(S)| - (p_q + d_q)\,\mathrm{q}(S) + \rho(S) \quad (2\text{-}2) \end{aligned}$$

A expressão anterior será estudada por partes. Primeiramente, sabendo que $|P(S)| = e(S)$ e $P_1 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} P_{q-1} \subset L(S)$, é possível determinar o total de elementos primitivos por $|P(S) \cap L(S)| + p_q = |P(S)|$. Assim, em relação ao primeiro termo da expressão, vale que

$$(|P(S) \cap L(S)| + p_q)|L(S)| = e(S)|L(S)|. \quad (2\text{-}3)$$

Por outro lado, é possível concluir que $p_q + d_q = m(S)$, pois $S_q = [\mathrm{c}(S), \mathrm{c}(S) + \mathrm{m}(S)[$. Assim, os demais termos da expressão implicam em

$$-(p_q + d_q)\,\mathrm{q}(S) + \rho(S) = -\,\mathrm{m}(S)\,\mathrm{q}(S) + \rho(S) = -c(S). \quad (2\text{-}4)$$

Aplicando (2-3) e (2-4) em (2-2), chegamos à expressão

$$W_0(S) + p_q(|L(S)| - q(S)) = \mathrm{e}(S)|\mathrm{L}(S)| - \mathrm{c}(S) = W(S). \tag{2-5}$$

Tal expressão relaciona o número de Wilf com o número de Eliahou como visto a seguir.

Proposição 2.9 *Seja S um semigrupo numérico. Então*

$$W(S) \geq W_0(S).$$

Prova. Da equação (2-5), vale que

$$W(S) = W_0(S) + p_q(|L(S)| - q(S)),$$

para que $W(S) \geq W_0(S)$, basta provar que $|L(S)| \geq q(S)$. Como os elementos de S satisfazem

$$\{0, m(S), 2m(S), \ldots, (q(S)-1)m(S)\} \subset \mathrm{L}(S),$$

então $|\mathrm{L}(S)| \geq q(S)$. Consequentemente,

$$p_q(|L(S)| - q(S)) \geq 0 \text{ e portanto } W(S) \geq W_0(S).$$

□

Assim, provar que número de Eliahou de um semigrupo numérico é não negativo também garante a validade da conjectura de Wilf para o semigrupo numérico.

2.2 Semigrupos numéricos com profundidade 1 ou 2

A partir da definição dos números de Wilf e Eliahou, uma continuidade natural para o estudo é a de analisar semigrupos numéricos a partir de um invariante, neste caso, a partir da profundidade.

Proposição 2.10 *Seja S um semigrupo numérico com profundidade* $\mathrm{q}(S) = 1$. *Então a conjectura de Wilf é válida para S.*

Prova. Sabendo que $\mathrm{q(S)} = 1$, vale que

$$\mathrm{c}(S) = \mathrm{m}(S) - \rho(S).$$

Como, para semigrupos numéricos em geral, pode-se afirmar que

$$c(S) \geq m(S),$$

se deduz que $c(S) = m(S)$. Assim $S = \{0, \mathrm{m}(S), \rightarrow\}$, concluindo que S é um semigrupo numérico ordinário, que satisfaz a conjectura de Wilf. $\square$

Os semigrupos numéricos de profundidade $\mathrm{q}(S) = 1$ são, portanto, semigrupos ordinários. Por outro lado, sabe-se que $\mathrm{m}(S) = \mathrm{c}(S)$ quando S é ordinário, e logo, $\mathrm{q}(S) = 1$. Deste resultado decorre imediatamente o seguinte corolário concluindo a caracterização de semigrupos numéricos de profundidade $q = 1$.

Corolário 2.11 *Um semigrupo numérico S é ordinário se, somente se, tem profundidade $q(S) = 1$.*

A seguir será provado que semigrupos numéricos com profundidade 2 também satisfazem a conjectura de Wilf a partir da ideia de majorar o valor do número de Eliahou do semigrupo numérico.

Proposição 2.12 *Seja S semigrupo numérico com profundidade $\mathrm{q}(S) = 2$. Então a conjectura de Wilf é válida para S.*

Prova. Pela relação (2-1),

$$|L(S)| = p_1 + 1.$$

Considere $\rho(S) = \rho$. Por definição de número de Eliahou,

$$W_0(S) - \rho = |P(S) \cap L(S)||L(S)| - 2d_2 = p_1(p_1 + 1) - 2d_2.$$

O próximo passo é majorar d_2 ao notar que $D_2 \subset (P_1 + P_1)$. Assim, o total de todas as possíveis combinações de 2 elementos dentre p_1 elementos é o máximo que d_2 pode atingir. Sabendo disso, vale a desigualdade

$$d_2 \leq \binom{p_1}{2} = \frac{p_1(p_1 - 1)}{2} \leq \frac{p_1(p_1 + 1)}{2}.$$

Logo, $p_1(p_1 + 1) - 2d_2 \geq 0$. Por fim,

$$W_0(S) - \rho \geq 0 \Rightarrow W_0(S) \geq \rho \geq 0$$

e vale a conjectura de Wilf para S. $\square$

Aqui é importante ressaltar como a sutileza da definição do número de Eliahou simplificou as demonstração deste caso. Uma demonstração anterior mais complexa é dada em [9] para o caso de um semigrupo numérico S em que $\mathrm{c}(S) \leq 2\,\mathrm{m}(S)$.

É possível determinar uma infinidade de semigrupos numéricos com profundidade $q = 2$. Veja que para qualquer valor par $c \geq 4$, existe um semigrupo numérico S de modo que $\mathrm{q}(S) = 2$ e $\mathrm{c}(S) = c$.

Exemplo 2.13 *Dado $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, o semigrupo numérico*

$$S = \langle n, 2n+1, 2n+2, \ldots, 3n-1 \rangle$$

possui multiplicidade $\mathrm{m}(S) = n$ e condutor $\mathrm{c}(S) = 2n$. Isto é, a profundidade de S é dada por $\mathrm{q}(S) = 2$. Para o caso de $n = 10$, o semigrupo numérico deste exemplo seria dado por:

```
gap >s := NumericalSemigroupByGenerators([10,21,22,23,24,25,26,27,28,29]);;
gap >q := Ceil(Float(Conductor(s)/Multiplicity(s)));
2
```

O caso de semigrupos numéricos S com profundidade $\mathrm{q}(S) = 3$ será tratado nas próximas seções após mais ferramentas para o estudo serem apresentadas.

2.3 Álgebras graduadas e o Teorema de Macaulay

O objetivo desta seção, além de determinar uma versão conveniente para o Teorema de Macaulay que será usada na análise na conjectura de Wilf para semigrupos numéricos de profundidade $q = 3$, é de introduzir conceitos básicos referentes a álgebras graduadas que serão utilizados neste trabalho.

O primeiro passo é entender a estrutura algébrica de álgebras graduadas e o conceito de função de Hilbert associado a elas.

Definição 2.14 *Uma **álgebra graduada** é uma álgebra comutativa R sobre um corpo $\mathbb{K}$ munida de uma decomposição de espaços vetoriais*

$$R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i,$$

*em que $R_0 = \mathbb{K}$, $R_i R_j \subset R_{i+j}$ para todo $i, j \geq 0$ e que R é uma $\mathbb{K}$-álgebra finitamente gerada por elementos de R_1. Os elementos $x \in R_i$ são chamados de **elementos homogêneos de grau** i.*

Tais álgebras graduadas são conhecidas por *álgebras graduadas padrão*. Aqui, por simplicidade, será usada apenas a terminologia álgebra graduada.

A seguir, será provado um lema que caracteriza a álgebra graduada dada pelo quociente de uma álgebra e um ideal como feito em [13]. Para isso, um ideal I de uma álgebra graduada $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ é dito um **ideal graduado** se

$$I = \bigoplus_{i \geq 0} I_i \quad \text{e} \quad I_i = I \cap R_i.$$

Lema 2.15 *Seja $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ uma álgebra graduada e I um ideal de R. Valem as seguintes afirmações:*

1. *O ideal I é graduado se, somente se, é gerado por elementos homogêneos.*
2. *Se I é um ideal graduado, então $R/I = \bigoplus_{i \geq 0} (R/I)_i$ é uma álgebra graduada com $(R/I)_i = (R_i + I)/I$. Mais ainda, $R/I \simeq \bigoplus_{i \geq 0} (R_i/(I \cap R_i))$.*

Prova. Veja [13], na Proposição B-5.15. $\square$

A função de Hilbert definida a seguir representa um invariante fundamental para o estudo de álgebras graduadas e igualmente representa um grande desafio de ser estimada a partir de determinadas condições.

Definição 2.16 *A* ***função de Hilbert*** *de uma álgebra graduada $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$ define para cada i a dimensão de R_i como um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, isto é,*

$$i \mapsto h_i = dim_{\mathbb{K}} R_i.$$

O uso de álgebras graduadas para se estimar cardinalidades dentro de semigrupos numéricos está intrinsecamente atrelado a estimativas das dimensões dadas pela função de Hilbert. Para encontrar tais estimativas, serão determinadas cotas para a função de Hilbert a partir do estudo de binômios generalizados.

Dados $i \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, considere o binômio generalizado de x e i por

$$\binom{x}{i} = \frac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!}.$$

Fixado $i \in \mathbb{N}$, a função $x \mapsto \binom{x}{i}$ é uma função polinomial cuja maior raiz tem valor $i-1$. Além disso, dados $y, z \in \mathbb{R}$ com $y > z > i-1$, segue que

$$y - j > z - j, \text{ para todo } j \in [1, i-1],$$

de onde se conclui que $\binom{y}{i} > \binom{z}{i}$, isto é, é uma função crescente. Tal função também tem a propriedade de ser contínua e consequentemente bijetiva do intervalo real $[i-1, \infty[$ ao intervalo $[0, \infty[$.

A partir do binômio generalizado, é possível representar um número inteiro como uma soma de binômios a partir da chamada representação de Macaulay. Para provar o resultado que garante a existência e unicidade de tal representação, será utilizada a conhecida Relação de Stifel:

Lema 2.17 (Relação de Stifel) *Dados $i \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ com $1 \leq i \leq x$, vale a relação*

$$\binom{x}{i} = \binom{x-1}{i-1} + \binom{x-1}{i}.$$

Prova. Pela definição do binômio generalizado, tem-se que

$$\begin{aligned}
\binom{x-1}{i-1} + \binom{x-1}{i} &= (x-1)(x-2)\cdots(x-(i-1))\left(\frac{1}{(i-1)!} + \frac{x-i}{i!}\right) \\
&= (x-1)(x-2)\cdots(x-(i-1))\left(\frac{i}{i!} + \frac{x-i}{i!}\right) \\
&= (x-1)(x-2)\cdots(x-(i-1))\left(\frac{x}{i!}\right) \\
&= \binom{x}{i}.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.18 *Seja i um inteiro positivo. Qualquer $a \in \mathbb{N}$ pode ser escrito unicamente na forma*

$$a = \sum_{j=1}^{i} \binom{a_j}{j},$$

com $a_i > a_{i-1} > \cdots > a_1 \geq 0$ inteiros.

Prova. Será prova por indução sobre i, isto é, a quantidade de binômios. Para $i = 1$, vale de forma natural $a = \binom{a}{1}$, logo, $a = a_1$. Suponha que a existência da representação seja válida para o inteiro $i-1$. Defina

$$a_i = \max\left\{k \in \mathbb{N} \ : \ \binom{k}{i} \leq a\right\}.$$

Se $a = \binom{a_i}{i}$, defina $a_j = j-1$ para $1 \leq j < i$. Assim, $\binom{a_j}{j} = \binom{j-1}{j} = 0$. Se $a > \binom{a_i}{i}$, então $a - \binom{a_i}{i} > 0$. Por hipótese de indução, existem $a_{i-1} > \cdots > a_1 \geq 0$ tais que

$$a - \binom{a_i}{i} = \sum_{j=1}^{i-1} \binom{a_j}{j} \Rightarrow a = \sum_{j=1}^{i} \binom{a_j}{j}.$$

Agora é preciso provar que $a_i > a_{i-1}$. Suponha por absurdo que $a_{i-1} \geq a_i$. Logo, vale que

$$\binom{a_{i-1}}{i-1} \geq \binom{a_i}{i-1} = \binom{a_i+1}{i} - \binom{a_i}{i}$$

pela Relação de Stifel. Pela definição de a_i, sabe-se que $\binom{a_i+1}{i} > a$, e assim

$$\binom{a_{i-1}}{i-1} \geq \binom{a_i+1}{i} - \binom{a_i}{i} > a - \binom{a_i}{i} = \sum_{j=1}^{i-1}\binom{a_j}{j} \geq \binom{a_{i-1}}{i-1},$$

que é uma contradição. Daí, conclui-se que $a_i > a_{i-1}$.

Resta agora provar a unicidade dos coeficientes a_i's. Para isso, basta provar que se $a = \sum_{j=1}^{i}\binom{b_j}{j}$, então $b_i = \max\left\{k \in \mathbb{N} \,:\, \binom{k}{i} \leq a\right\}$. A prova desta afirmação será dada indutivamente sobre a. Para $a = 1$, de fato, tem-se $1 = \binom{i}{i} + \sum_{j=1}^{i-1}\binom{j-1}{j}$ com $i = \max\left\{k \in \mathbb{N} \,:\, \binom{k}{i} \leq 1\right\}$. Agora seja $a = \sum_{j=1}^{i}\binom{b_j}{j} > 1$ e suponha por absurdo que b_i não satisfaz a relação de maximalidade proposta, isto é, $\binom{b_i+1}{i} \leq a$. Em outras palavras,

$$a - \binom{b_i}{i} \geq \binom{b_i+1}{i} - \binom{b_i}{i} = \binom{b_i}{i-1}$$

pela relação de Stifel. Por outro lado, $b_i > b_{i-1}$ implica em

$$\binom{b_i}{i-1} > \binom{b_{i-1}}{i-1}.$$

Já pela hipótese de indução, sabe-se que $a - \binom{b_i}{i} = \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}\binom{b_j}{j}$ implica em

$$b_{i-1} = \max\left\{k \in \mathbb{N} \,:\, \binom{k}{i-1} \leq a - \binom{b_i}{i}\right\}.$$

Entretanto, a relação

$$\binom{b_{i-1}}{i-1} < \binom{b_i}{i-1} \leq a - \binom{b_i}{i}$$

contradiz a hipótese de indução. A contradição partiu da afirmação que b_i não satisfaz a relação de maximalidade sobre i. Logo, vale que $b_i = \max\left\{k \in \mathbb{N} \,:\, \binom{k}{i} \leq a\right\}$, o que resulta na unicidade dos coeficientes $a_i > a_{i-1} > \cdots > a_1 \geq 0$ da representação. □

Definição 2.19 *Dados $a \geq i \geq 1$ inteiros positivos, a i-ésima* ***representação de Macaulay*** *de a é dada por*

$$a = \sum_{j=1}^{i}\binom{a_j}{j},$$

onde a existência e unicidade dos inteiros $a_i > a_{i-1} > \cdots > a_1 \geq 0$ *são garantidos pelo resultado anterior.*

A partir da i-ésima representação de Macaulay de a, é possível definir o número

$$a^{\langle i \rangle} = \sum_{j=1}^{i} \binom{a_j + 1}{j+1}. \tag{2-6}$$

Exemplo 2.20 *A 5-ésima representação de* 11 *é dada por*

$$11 = \binom{6}{5} + \binom{5}{4} + \binom{2}{3} + \binom{1}{2} + \binom{0}{1}.$$

Basta ver que $\binom{6}{5} = 6$, $\binom{5}{4} = 5$ *e* $\binom{2}{3} = \binom{1}{2} = \binom{0}{1} = 0$. *Já o número* $11^{\langle 5 \rangle}$ *é dado por*

$$11^{\langle 5 \rangle} = \binom{7}{6} + \binom{6}{5} + \binom{3}{4} + \binom{2}{3} + \binom{1}{2} = 7 + 6 = 13.$$

A partir dos conceitos definidos anteriormente, pode-se enunciar o resultado chave para o desenvolvimento das próximas seções, conhecido por Teorema de Macaulay.

Teorema 2.21 (Macaulay) *Considere uma álgebra graduada* $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ *sobre o corpo* $\mathbb{K}$ *com função de Hilbert* $h_i = dim_{\mathbb{K}} R_i$ *e* i *um inteiro positivo, então*

$$h_{i+1} \leq h_i^{\langle i \rangle}.$$

Prova. A demonstração deste resultado foge ao escopo deste trabalho. Ela pode ser encontrada no Teorema 6.3.8, página 108 da referência [8]. □

Tendo apresentado a versão acima do Teorema de Macaulay, uma versão mais conveniente para este trabalho decorre do seguinte teorema que determina uma cota superior para o número $a^{\langle i \rangle}$. Sua demonstração envolve o uso de um resultado que decorre de relações sobre os binômios generalizados. Por simplicidade e clareza da exposição, tais ferramentas serão tratadas e apresentadas no Apêndice A.

Teorema 2.22 *Sejam* $a \geq 0, i \geq 1$ *inteiros e* $x \geq i - 1$ *o único número real tal que* $a = \binom{x}{i}$. *Então*

$$a^{\langle i \rangle} \leq \binom{x+1}{i+1}.$$

Prova. A demonstração será feita por indução sobre i. Para $i = 1$ e $a = x$, a 1-representação de Macaulay de a é $a = \binom{a}{1}$. Daí,

$$a^{\langle 1 \rangle} = \binom{a+1}{i+1} = \binom{x+1}{i+1}.$$

Assuma $i \geq 2$ e suponha que o teorema vale para qualquer representação de Macaulay de índice menor que i. Defina $b = \sum_{j=1}^{i-1} \binom{a_j}{j}$. Desta forma, é possível escrever a como

$$a = \binom{a_i}{i} + b \quad \text{e} \quad a^{\langle i \rangle} = b^{\langle i-1 \rangle} + \binom{a_i+1}{i+1}.$$

Por hipótese de indução, existe um único $y \geq i-2$ tal que

$$b = \binom{y}{i-1} \quad \text{e} \quad b^{\langle i-1 \rangle} \leq \binom{y+1}{i}.$$

Logo, $a^{\langle i \rangle} \leq \binom{y+1}{i} + \binom{a_i+1}{i+1}$. Resta provar que $\binom{y+1}{i} + \binom{a_i+1}{i+1} \leq \binom{x+1}{i+1}$ para concluir o teorema. Para isso, veja que por definição de x e y, é possível escrever a como

$$a = \binom{x}{i} = \binom{a_i}{i} + \binom{y}{i-1}.$$

No Apêndice A há uma série de relações envolvendo binomiais que culminam na Proposição A.3 que garante que, nas condições dadas, vale

$$\binom{x+1}{i+1} \geq \binom{y+1}{i} + \binom{a_i+1}{i+1} \geq a^{\langle i \rangle},$$

concluindo o teorema. □

Corolário 2.23 *Sejam $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ uma álgebra graduada sobre o corpo $\mathbb{K}$ com função de Hilbert $h_i = dim_{\mathbb{K}} R_i$, r e x inteiros tais que $x \geq r-1$ e $h_r = \binom{x}{r}$. Então*

$$h_{r+1} \leq \binom{x+1}{r+1}.$$

Prova.De fato, o Teorema de Macaulay determina que $h_{r+1} \leq h_r^{\langle r \rangle}$ e, no teorema 2.22, $h_r = \binom{x}{r}$ implica que $h_r^{\langle r \rangle} \leq \binom{x+1}{r+1}$. □

Na próxima seção será construída uma álgebra graduada na qual a dimensão de suas graduações permitirá determinar cotas superiores para a cardinalidade de certos conjuntos formados por elementos de Apéry de um semigrupo numérico. A cota para essa dimensão será dada por meio da versão conveniente do teorema de Macaulay determinada no corolário anterior.

2.4 Uma álgebra graduada na contagem de elementos de Apéry

Seja S um semigrupo numérico de profundidade $\mathrm{q(S)} = 3$ e perfil $(p_1, 0)$. Por abuso de notação, a multiplicidade será dada por m. Considere o subconjunto primitivo da partição de Eliahou $P_1 = \{m = a_1 < a_2 < \cdots < a_k\} = \{m\} \dot{\cup} X_1$ e defina a álgebra graduada

$$R = \mathbb{K}[t^{a_1}u, \ldots, t^{a_k}u], \tag{2-7}$$

em que $\mathbb{K}$ é um corpo e t e u são variáveis comutativas sobre $\mathbb{K}$ com grau 0 e 1 respectivamente. A álgebra R é uma subálgebra da álgebra polinomial de $\mathbb{K}[t,u]$ e $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ em que $R_0 = \mathbb{K}$ e R_1 é o espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com base $\{t^{a_1}u, \ldots, t^{a_k}u\}$.

A partir da partição P_1, a notação iP_1 representa o conjunto

$$iP_1 = \overbrace{P_1 + \cdots + P_1}^{i-vezes}.$$

Os lemas a seguir apresentam resultados necessários para se majorar cardinalidades de conjuntos referentes ao cálculo do número de Eliahou de um semigrupo numérico de profundidade 3.

Lema 2.24 *Sejam S um semigrupo numérico de profundidade $\mathrm{q}(S) = 3$ e perfil $(p_1, 0)$ e $R = \mathbb{K}[t^{a_1}u, \ldots, t^{a_k}u]$ a álgebra graduada definida em (2-7). Então*

1. *As dimensões das componentes de R são dadas por*

$$\dim(R_i) = |iP_1|;$$

2. *Vale a relação*

$$2P_1 \cap X_2 = 2X_1 \cap X_2 \quad e \quad 3P_1 \cap X_3 = 3X_1 \cap X_3;$$

3. *Vale a relação*

$$P_1 + (2P_1 \setminus X_2) \subset 3P_1 \setminus X_3.$$

Prova.

1. De fato, sabendo que $R_i = \overbrace{R_1 R_1 \cdots R_1}^{i-vezes}$, é possível definir o conjunto

$$A_i = \{t^{d_1}u^i, \ldots, t^{d_{n_i}}u^i\} \subset R_i,$$

em que $d_1, \dots, d_{n_i} \in iP_1$ e $|iP_1| = n_i$. O conjunto A_i é formado por monômios da variável t com n potências distintas. Logo, é um conjunto linearmente independente. Assim,

$$\dim(R_i) \geq |iP_1|.$$

Por outro lado,

$$\dim(R_i) \leq \dim(R_1) \times \dim(R_1) \times \cdots \times \dim(R_1) = i\dim(R_1) = i|P_1|.$$

Conclui-se então que $\dim(R_i) = |iP_1|$ e A_i é uma base para R_i.

2. Sabendo que $P_1 = \{m\} \cup X_1$, os elementos de $2P_1$ podem ser dados pelas somas de elementos com m e sem m, isto é,

$$2P_1 = (m + P_1) \cup 2X_1.$$

Por definição de elementos de Apéry, $(m+S) \cap X = \emptyset$. Logo,

$$2P_1 \cap X_2 = 2X_1 \cap X_2.$$

Analogamente, como $P_2 = \emptyset$ devido o perfil $(p_1, 0)$, segue que

$$3P_1 = (m + 2P_1) \cup (2m + P_1) \cup 3X_1.$$

Logo

$$3P_1 \cap X_3 = 3X_1 \cap X_3.$$

3. Observe que $P_1 + (2P_1 \setminus X_2) \subset 3P_1$ é imediato. Resta provar que

$$(P_1 + (2P_1 \setminus X_2)) \cap X_3 = \emptyset.$$

Determinando os valores extremos para $2P_1$, são válidas as seguintes inclusões

$$\begin{aligned} 2P_1 \setminus X_2 &\subset (S_2 \cup S_3) \setminus X_2 \\ &\subset (S_2 \setminus X_2) \cup S_3 \\ &\subset (m+S) \cup S_3. \end{aligned}$$

Calculando os possíveis elementos de $P_1 + (2P_1 \setminus X_2)$ que estariam em X_3,

$$\begin{aligned} (P_1 + (2P_1 \setminus X_2)) \cap X_3 &\subset \underbrace{((P_1 + (m+S)) \cap X_3)}_{=\emptyset} \cup \underbrace{((P_1 + S_3) \cap X_3)}_{=\emptyset} \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

O primeiro conjunto vazio decorre de $P_1 + (m+S) \subset m+S$. O segundo decorre das partições de Eliahou

$$P_1 + S_3 \subset S_4 \cup S_5 \Rightarrow X_3 \cap (S_4 \cup S_5) = \emptyset.$$

Assim,

$$P_1 + (2P_1 \setminus X_2) \subset 3P_1 \setminus X_3.$$

□

Com isso, é possível provar o seguinte lema a respeito da cardinalidades de certos subconjuntos da partição de Eliahou do conjunto de Apéry.

Lema 2.25 *Seja S um semigrupo numérico de profundidade* $\mathrm{q}(S) = 3$ *e perfil* $(p_1, 0)$. *Seja* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $x \geq 1$ *e*

$$|2X_1 \cap X_2| = \binom{x}{2}.$$

Então

$$|3X_1 \cap X_3| \leq \binom{x+1}{3}.$$

Prova. A partir da definição da álgebra graduada R em (2-7), considere a álgebra quociente $R' = R/J$ em que o ideal J é dado por

$$J = (\{t^b u^2, t^c u^3 \ : \ b \in 2P_1 \setminus X_2,\ c \in 3P_1 \setminus X_3\}).$$

Sendo J gerado por elementos homogêneos, R' é uma álgebra graduada pelo Lema 2.15. Considere

$$R' = \bigoplus_{i \geq 0} R'_i.$$

Provando que $\dim R'_2 = |2X_1 \cap X_2|$ e $\dim R'_3 = |3X_1 \cap X_3|$, pode-se concluir o lema a partir do Corolário 2.23. O objetivo desta demonstração é então determinar as dimensões das componentes R'_2 e R'_3. Recorde que

$$A_i = \{t^{d_1} u^i, \ldots, t^{d_{n_i}} u^i\} \subset R_i,$$

em que $d_1, \ldots, d_{n_i} \in iP_1$ e $|iP_1| = n_i$, é uma base para R_i. Assim, é possível contar os elementos de uma base para R'_2 a partir dos elementos de A_2 que não pertencem a J. Assim,

$$\dim R'_2 = |\{t^b u^2 \ : \ b \in 2P_1 \cap X_2\}| = |2P_1 \cap X_2|.$$

Pelo Lema 2.24, vale que

$$|2P_1 \cap X_2| = |2X_1 \cap X_2|.$$

De maneira análoga, para a dimensão de R'_3 será dada uma expressão semelhante. Inicialmente, é preciso verificar que os polinômios de $\{t^b u^2 \ : \ b \in 2P_1 \setminus X_2\}$ não "diminuem" a quantidade de elementos de A_3 ao se contar os elementos para a base de R'_3. É claro que polinômios na forma $t^b u^2$ não possuem grau correspondente a elementos de R_3, mas como $R_3 = R_1 R_2$, é possível que algum elemento da base de R_3 seja escrito da forma

$$t^b u^2 \cdot t^a u \quad \text{tal que} \quad a \in P_1 \ \text{ e } \ b \in 2P_1.$$

Daí,

$$\dim R'_3 = |\{t^c u^3 \ : \ c \in 3P_1 \cap X_3\} \setminus \{t^{b+a} u^3 \ : \ b \in 2P_1 \setminus X_2, \ a \in P_1\}|.$$

Agora, como $b \in 2P_1 \setminus X_2$, segue que $b + a \in 3P_1 \setminus X_3$, já que pelo Lema 2.24,

$$a + b \in P_1 + (2P_1 \setminus X_2) \subset 3P_1 \setminus X_3.$$

Em outras palavras, que vale que

$$\{t^c u^3 \ : \ c \in 3P_1 \cap X_3\} \setminus \{t^{b+a} u^3 \ : \ b \in 2P_1 \setminus X_2, \ a \in P_1\} = \{t^c u^3 \ : \ c \in 3P_1 \cap X_3\}.$$

Assim, não há mais elementos da base para R'_3 a se retirar, tem-se portanto que $\dim R'_3 = |3P_1 \cap X_3|$. Conclui-se do Lema 2.24 que $\dim R'_3 = |3X_1 \cap X_3|$ e a desigualdade enunciada segue pelo Corolário 2.23. □

2.5 Semigrupos numéricos com profundidade 3

O primeiro passo para se estudar a validade da conjectura de Wilf em semigrupos numéricos com profundidade $\mathrm{q(S)} = 3$ é determinar uma implicação a partir da qual se prove ter o número de Eliahou não negativo utilizando um semigrupo numérico com perfil mais simples.

Proposição 2.26 *Seja S um semigrupo numérico com profundidade $\mathrm{q}(S) = 3$ e perfil (p_1, p_2). Defina $S' = \langle P_1 \cup [c(S), c(S) + m(S)[\rangle$. O conjunto S' é um semigrupo numérico com perfil $(p_1, 0)$, multiplicidade $m(S)$ e condutor $c(S)$.*

Prova. Veja que S' é um semigrupo numérico pois $P_1 \cup [c(S), c(S) + m(S)[$ é um conjunto de elementos coprimos já que contém elementos consecutivos. A multiplicidade de S' é a mesma de S devido a que o menor elemento gerador de ambos ser $m(S)$. Já o condutor de S' é $\mathrm{c}(S)$. Tal afirmação decorre de $S' \subset S$ implicar que $G(S) \subset G(S')$. Isto é, $F(S) \notin S'$ e

$c(S) \in S'$. Resta provar que

$$s > c(S) + m(S) \Rightarrow s \in S'.$$

Veja que $s - c(S) \equiv i \mod m(S)$ para algum $0 \leq i \leq m(S) - 1$. Isto é,

$$s - c(S) = km(S) + i \quad \text{para algum} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sabe-se que $c(S) + i \in S'$ pois $c(S) + i \in [c(S), c(S) + m(S)[$, já que $0 \leq i \leq m(S) - 1$. Por outro lado, $km(S) \in S'$. Assim, é possível concluir que $s = (c(S) + i) + km(S) \in S'$ e $c(S)$ é o condutor de S'. Tendo mesmo condutor e multiplicidade, S' e S possuem mesma partição de Eliahou e de imediato percebe-se que $P_1(S') = P_1(S)$. Por fim, é preciso que $P_2(S') = \emptyset$ para que o perfil de S' seja $(p_1, 0)$. Por definição,

$$P_2(S') = S'_2 \cap P(S') \subset S'_2 \cap (P_1 \cup [c(S), c(S) + m(S)[).$$

Por outro lado, o conjunto gerador de S' satisfaz $P_1 \subset S_1$ e $[c(S), c(S) + m(S)[\subset S_3$. Como o conjunto gerador contém $P(S')$, vale que $P(S') \cap S_2 = \emptyset$ e conclui-se o resultado. $\square$

Proposição 2.27 *Seja S um semigrupo numérico com profundidade* $\mathrm{q}(S) = 3$ *e perfil* (p_1, p_2). *Defina o semigrupo numérico* $S' = \langle P_1 \cup [c(S), c(S) + m(S)[\rangle$ *e considere as notações* $\rho(S) = \rho(S') = \rho$ *e* $D_3(S) = D_3$. *Então*

$$W_0(S) \geq W_0(S') - \rho.$$

Prova. Para provar que $W_0(S) \geq W_0(S') - \rho$, veja que por definição

$$W_0(S) = |P(S) \cap L(S)||L(S)| - 3d_3 + \rho$$

e será preciso majorar d_3. Como os elementos de D_3 são os elementos de $D_3(S')$ e os decomponíveis na forma $P_2 + S^*$, seus elementos são dados por

$$D_3 = D_3(S') \cup ((P_1 + P_2) \cap S_3) \cup (2P_2 \cap S_3),$$

segue que

$$\begin{aligned} d_3 &\leq d_3(S') + |(P_1 + P_2) \cap S_3| + |(2P_2 \cap S_3)| \\ &\leq d_3(S') + p_1 p_2 + \min(\rho, p_2(p_2 + 1)/2). \end{aligned}$$

A cotas aplicadas decorrem de duas relações

$$|P_1||P_2| \geq |P_1 + P_2|,$$

$$2P_2 \cap S_3 \subset [4m - 2\rho, 6m - 2\rho[\cap [3m - \rho, 4m - \rho] = [4m - 2\rho, 4m - \rho[,$$

de modo que $|2P_2 \cap S_3| \leq \rho$. Por outro lado, $2P_2$ tem no máximo o total de combinações de 2 elementos escolhidos dentre P_2, isto é, $|2P_2| \leq p_2(p_2 - 1)/2 \leq p_2(p_2 + 1)/2$. Além disso, a seguinte desigualdade pode ser provada

$$\rho - 3\min(\rho, p_2(p_2 + 1)/2) \geq -p_2(p_2 + 1)$$

supondo cada caso possível para mínimo, veja:

$$\rho < p_2(p_2 + 1)/2 \text{ implica em } \rho - 3\rho = -2\rho > -p_2(p_2 + 1);$$

$$\rho \geq p_2(p_2 + 1)/2 \text{ implica em } \rho - p_2(p_2 + 1)/2 - p_2(p_2 + 1) \geq 0 - p_2(p_2 + 1).$$

Assim, substituindo as estimativas encontradas na expressão para o cálculo do número de Eliahou, tem-se que

$$W_0(S) \geq |P(S) \cap L(S)||L(S)| - 3d_3(S') - 3p_1 p_2 - p_2(p_2 + 1). \tag{2-8}$$

Pela Proposição 2.6, vale que $|P \cap L| = p_1 + p_2$ e $|L| = 1 + p_1 + p_2 + d_2$. Logo,

$$\begin{aligned} |P(S) \cap L(S)||L(S)| - 3d_3(S') &= (p_1 + p_2)(1 + p_1 + p_2 + d_2) - 3d_3(S') \\ &= p_2^2 + p_2(1 + 2p_1 + d_2) + |L' \cap P'||L'| - 3d_3(S') \\ &= p_2^2 + p_2(1 + 2p_1 + d_2) + W_0(S') - \rho. \end{aligned}$$

Substituindo na expressão (2-8), tem-se que

$$W_0(S) \geq p_2(d_2 - p_1) + W_0(S') - \rho.$$

Como $m + P_1 \subset D_2$, conclui-se que $d_2 \geq p_1$ e, portanto, que

$$W_0(S) \geq W_0(S') - \rho.$$

□

Logo, para verificar que um semigrupo numérico S com profundidade $\mathrm{q}(S) = 3$ e perfil (p_1, p_2) satisfaz a conjectura de Wilf basta verificar que $W_0(S') \geq \rho$.

Proposição 2.28 *Seja S um semigrupo numérico com* $\mathrm{q}(S) = 3$*,* $\rho(S) = \rho$ *e perfil* $(k, 0)$*. Então*

$$W_0(S) \geq \rho.$$

Prova. Por hipótese, $P_2 = \emptyset$, $P(S) \cap L(S) = P_1 = \{m\} \cup X_1$ com $X_1 = \{a_2, a_3, \ldots, a_k\}$ e $m < a_2$. Para calcular $W_0(S)$, será preciso majorar d_3. Pela Observação 1.19, todo elemento de D_3 pode ser representado com a soma de um elemento de Apéry do conjunto X e um múltiplo de $m(S)$, ou seja,

$$D_3 = \{3m\} \cup (2m + X_1) \cup (m + X_2) \cup (X_3 \setminus P).$$

Definindo as cardinalidades em termos dos índices α_i como feito uma linha acima da Proposição 2.6, tem-se que $|X_2| = \alpha_2$ e $|X_3 \setminus P| = \alpha_3$. Logo, vale

$$d_3 = k + \alpha_2 + \alpha_3 \;\text{ e }\; |L(S)| = 3 + 2(k-1) + \alpha_2 = 2k + 1 + \alpha_2.$$

Daí, tem-se

$$\begin{aligned} W_0(S) - \rho &= |L(S) \cap P(S)||L(S)| - q(S)d_q(S) \\ &= k(2k + 1 + \alpha_2) - 3(k + \alpha_2 + \alpha_3) \\ &= 4\binom{k}{2} + k\alpha_2 - 3(\alpha_2 + \alpha_3). \end{aligned}$$

Para estimar $(\alpha_2 + \alpha_3)$, veja que $P_2 = \emptyset$ implica que $X_2 \subset D_2$, isto é, $X_2 \subset 2X_1$. Por outro lado, como os únicos primitivos de S estão em $P_1 = X_1 \cup P$, vale que $X_3 \setminus P \subset 2X_1 \cup 3X_1$, pois $2X_2 \subset 4X_1 \subset S_4$. Assim,

$$\alpha_2 = |X_2| = |2X_1 \cap X_2| = \binom{x}{2}$$

e

$$\alpha_3 = |X_3 \setminus P| = |2X_1 \cap X_3| + |3X_1 \cap X_3|.$$

Veja que α_3 foi estimado a partir do fato que $P_2 = \emptyset$ por definição do perfil de S e $D_1(S) = \emptyset$, de modo que os decomponíveis em X_3 são dados por $X_1 + X_1$, $2X_1 + X_1$. Aplicando o Lema 2.25, vale que $|3X_1 \cap X_3| \leq \binom{x+1}{3} = \frac{x+1}{3}\binom{x}{2}$ e pode-se mensurar $\alpha_2 + \alpha_3$ por

$$\begin{aligned} \alpha_2 + \alpha_3 &= |2X_1 \cap X_2| + |2X_1 \cap X_3| + |3X_1 \cap X_3| \\ &\leq |2X_1| + |3X_1 \cap X_3| \\ &\leq \binom{k}{2} + \frac{x+1}{3}\binom{x}{2}. \end{aligned}$$

Substituindo tais relações em $W_0(S)-\rho$, obtém-se que

$$\begin{aligned}
W_0(S)-\rho =&4\binom{k}{2}+k\alpha_2-3(\alpha_2+\alpha_3)\\
\geq&4\binom{k}{2}+k\binom{x}{2}-3\binom{k}{2}-3\frac{x+1}{3}\binom{x}{2}\\
=&\binom{k}{2}+k\binom{x}{2}-(x+1)\binom{x}{2}\\
=&\binom{k}{2}-\binom{x}{2}+(k-x)\binom{x}{2}.
\end{aligned}$$

Como

$$\binom{x}{2}=|2X_1\cap X_2|\leq|2X_1|\leq|2P_1|=\binom{k}{2},$$

conclui-se que $x\leq k$ e, portanto, que $W_0(S)-\rho\geq(k-x)\binom{x}{2}\geq 0$. □

Corolário 2.29 *Todo semigrupo numérico S de profundidade $\mathrm{q}(S)=3$ satisfaz a conjectura de Wilf.*

Prova. Basta notar que para todo semigrupo numérico S com profundidade 3, o semigrupo numérico S' dado por $S'=\langle P_1\cup[c(S),c(S)+m(S)[\rangle$ satisfaz $W_0(S')\geq\rho$ pela Proposição 2.28 e isso implica que o semigrupo numérico S tem $W_0(S)\geq 0$ pela Proposição 2.27. Portanto, S satisfaz a conjectura de Wilf. □

Reunindo as conclusões anteriores a respeito da validade da conjectura de Wilf a partir da análise da profundidade de um semigrupo numérico, chega-se à seguinte consequência relevante:

Corolário 2.30 *Todo semigrupo numérico S de profundidade $\mathrm{q}(S)\leq 3$ satisfaz a conjectura de Wilf.*

Prova. Segue da Proposição 2.10, Proposição 2.12 e Corolário 2.29. □

A importância de se provar a conjectura de Wilf para semigrupos numéricos S com profundidade $\mathrm{q}(S)\leq 3$ decorre do resultado de Zhai [15] ao provar a conjectura proposta por Zhao proposta em [?]:

Teorema 2.31 *Sejam n_g o número de semigrupos numéricos com gênero g e n'_g o número de semigrupos numéricos com gênero g e profundidade $q\leq 3$. Então*

$$\lim_{g\to\infty}\frac{n'_g}{n_g}=1.$$

Em outras palavras, quanto maior o gênero, maior é a chance de o semigrupo numérico ter profundidade no máximo 3, e tais casos já estão provados que satisfazem a conjectura de Wilf. Assim, a maioria dos semigrupos numéricos, à medida que o gênero cresce, satisfazem a conjectura de Wilf.

Entretanto, tal método de demonstração a partir do estudo do número de Eliahou não é suficiente para se provar a conjectura de Wilf de maneira geral, veja:

Exemplo 2.32 *Dado o semigrupo numérico*

$$s = \{0, 14, 22, 23, 28, 36, 37, 42, 44, 45, 46, 50, 51, 56, \rightarrow\}.$$

Os invariantes de número de Eliahou e número de Wilf podem ser calculados da seguinte forma.

```
gap >s := NumericalSemigroupByGenerators([14,22,23,57,61,62,63]);;
gap >q := Ceil(Float(Conductor(s)/Multiplicity(s)));
4
gap >EliahouNumber(s);
-1
gap >WilfNumber(s);
35
```

Logo, vale a conjectura de Wilf para um semigrupo com profundidade $q(S) = 4$ mesmo que tenha número de Eliahou negativo, isto é, não é possível provar a partir do número de Eliahou que vale a conjectura de Wilf para semigrupos com profundidade 4.

Assim, o método de Eliahou não soluciona a conjectura de Wilf, mas corrobora significativamente com a validade da conjectura e inaugura uma nova linha de estudo a se explorar: semigrupos numéricos com número de Eliahou negativo. Em [3] e [6] são apresentadas famílias de semigrupos numéricos que possuem número de Eliahou negativo. Alguns desses resultados serão apresentados no próximo capítulo.

CAPÍTULO 3

Algumas famílias de semigrupos numéricos com número de Eliahou negativo

As seções a seguir decorrem das construções de famílias de semigrupos numéricos do trabalho desenvolvido por Eliahou e Fromentin [6] tendo número de Eliahou dado por $-\binom{n}{3}$ com $n \in \mathbb{N}$.

3.1 Semigrupos numéricos com número de Eliahou -1

A construção desta seção busca apresentar semigrupos numéricos com número de Eliahou -1. Para isso, será apresentado um semigrupo numérico S a partir de um conjunto A e um número natural c de modo que o c seja uma cota superior para o condutor de S e A apresenta propriedades similares a um conjunto gerador do semigrupo numérico.

Tal construção estende a definição de S' feita no Capítulo 2.

Proposição 3.1 *Sejam $A \subset \mathbb{N}$ um conjunto não vazio e $c \in \mathbb{N}$. Defina $m = \min(A)$. Então o conjunto*

$$\langle A \rangle_c = \langle A \cup [c, c+m[\rangle$$

é um semigrupo numérico com condutor $\mathrm{c}(\langle A \rangle_c) \leq c$.

Prova. O conjunto $\langle A \rangle_c$ ser um semigrupo numérico decorre imediatamente do fato que $A \cup [c, c+m[$ é um conjunto de números coprimos de $\mathbb{N}$. Resta provar que

$$s > c + m \Rightarrow s \in \langle A \rangle_c.$$

Veja que $s - c \equiv i \mod m$ para algum $0 \leq i \leq m-1$. Isto é,

$$s = c + i + km \quad \text{para algum} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sabe-se que $c + i \in \langle A \rangle_c$ pois $c + i \in [c, c+m[$. Por outro lado, $km \in \langle A \rangle_c$. Assim, é possível concluir que $s \in \langle A \rangle_c$ e, portanto, que $c \geq c(\langle A \rangle_c)$. $\square$

A partir desta construção, será provado que sob certas condições sobre os elementos $a, b, m \in \mathbb{N}$, vale que

$$S = \langle m, a, b \rangle_{4m}$$

é um semigrupo numérico com $W_0(S) = -1$.

Para isso, será necessário provar a seguinte proposição.

Proposição 3.2 *Sejam $a, b, m \in \mathbb{N}$ satisfazendo*

$$(3m+1)/2 \leq a < b \leq (5m-1)/3.$$

Defina $A = \{a, b\}$. Então

1. *Valem as desigualdades*
$$m+1 \leq a < b \leq 2m-2;$$
$$3m+1 \leq 2a < 2b \leq 4m-2;$$
$$4m+1 \leq 3a < 3b \leq 5m-1;$$
2. *O número $4m-1 \notin \langle m, a, b \rangle$;*
3. *O monoide gerado por a e b satifaz a relação*
$$\langle a, b \rangle \cap [0, 4m[= \{0\} \cup A \cup 2A.$$

Prova.

1. Da desigualdade $(3m+1)/2 \leq (5m-1)/3$ é válido que
$$9m+3 \leq 10m-2 \Rightarrow 5 \leq m.$$
Logo, $m > 5$. Além disso,
$$a \geq (3m+1)/2 = m + \frac{m+1}{2} > m+1,$$
pois $m > 5 > 1$. De maneira análoga,
$$b \leq (5m-1)/3 = 2m - \frac{m+1}{3} \leq 2m-2,$$
pois $m > 5$ implica que $\frac{m+1}{3} > 2$, isto é, $-\frac{m+1}{3} < -2$. A segunda desigualdade decorre da relação a partir da hipótese e da relação anterior,
$$(3m+1)/2 \leq a < b \leq 2m-2 \quad \Rightarrow \quad (3m+1) \leq 2a < 2b \leq 4m-4 < 4m-2.$$

A última desigualdade decorre também a partir da hipótese e da relação anterior,

$$4m+1 \leq 4m+2 = (3m+1)+(m+1) \leq 3a < 3b \leq 5m-1.$$

2. Para provar que $4m-1 \notin \langle m,a,b \rangle$, observe que, pelo Item 1,

$$\langle \{m\} \cup A \rangle \cap [3m+1, 4m-1] = (2m+A) \cup 2A,$$

pois

$$2A \subset [2a, 2b] \subset [3m+1, 4m-2] \text{ e } (2m+A) \subset [2m+a, 2m+b] \subset [3m+1, 4m-2]$$

implica em

$$2A \cup (2m+A) \subset [3m+1, 4m-2].$$

Além disso, qualquer outra combinação de múltiplos de m com múltiplos de elementos de A não pertence ao intervalo $[3m+1, 4m-1]$ a partir do item anterior, ou seja, $\langle \{m\} \cup A \rangle \cap [3m+1, 4m-1] = (2m+A) \cup 2A,$. Por fim, de

$$\langle \{m\} \cup A \rangle \cap [3m+1, 4m-1] = (2m+A) \cup 2A \subset [3m+1, 4m-2]$$

conclui-se que $4m-1 \notin \langle m,a,b \rangle$.

3. Os elementos de $\langle a,b \rangle$ são dados por $A \cup 2A \cup \cdots \cup nA \cup \cdots$. Como $\max 2A = 2b$, pelo item anterior sabe-se que $2b \leq 4m-2$. Assim,

$$A \cup 2A \subset [0, 4m].$$

Por outro lado, $\min 3A = 3a \geq 4m+1$,ou seja, $3A \cap [0, 4m] = \emptyset$ e qualquer elemento de $\langle a,b \rangle$ maior que $3a$ também não pertence ao intervalo. Assim,

$$\langle a,b \rangle \cap [0, 4m[= \{0\} \cup A \cup 2A.$$

□

Proposição 3.3 *Sejam $a,b,m \in \mathbb{N}$ satisfazendo $(3m+1)/2 \leq a < b \leq (5m-1)/3$. Defina $A = \{a,b\}$ e assuma que*

$$A \cup 2A \cup 3A = \{a, b, 2a, a+b, 2b, 3a, 2a+b, a+2b, 3b\}$$

é formado por elementos distintos entre si módulo m. Então

$$S = \langle m, a, b \rangle_{4m}$$

satisfaz $W_0(S) = -1$.

Prova. Da desigualdade $(3m+1)/2 \leq (5m-1)/3$ tem-se que $5 \leq m$. Logo, $m > 5 > 0$. Pelo Item 1 da Proposição 3.2, vale que $0 < m < a < b$ e assim m é a multiplicidade de S. É preciso determinar os valores dos invariantes que compõem a definição do número de Eliahou de S para calculá-lo. Por construção, sabe-se que $c(S) \leq 4m$. Resta provar que $4m-1 \notin S$ para determinar o valor do condutor como $c(S) = 4m$, $q(S) = 4$ e $\rho(S) = 0$. Pelo Item 2 da Proposição 3.2, $4m-1 \notin \langle m, a, b \rangle$ e $4m-1 < 4m$. Logo, por não ser combinação de nenhum gerador menor que ele, conclui-se que $4m-1 \notin S$ e

$$\mathrm{c}(S) = 4m.$$

Tendo o conjunto gerador minimal $P(S) \subset \{m, a, b, 4m, \ldots, 5m-1\}$ e $c(S) = 4m$, vale que $P(S) \cap L(S) \subset \{m, a, b\}$. Como $m < a < b < 2m$, têm-se que m, a e b são primitivos e

$$P(S) \cap L(S) = \{m, a, b\}.$$

Resta determinar o valor de $|L(S)|$ e d_4, os quais podem ser calculados pelas fórmulas dadas na Proposição 2.6 em função da cardinalidade de subconjuntos formados por elementos de Apéry de S denotados por X. Como $X \cap (S+m) = \emptyset$, vale que $X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3 \subset \langle a, b \rangle \cap [0, 4m[$. Por outro lado, pelo Item 3 da Proposição 3.2 sabe-se que

$$\langle a, b \rangle \cap [0, 4m[= \{0\} \cup A \cup 2A.$$

Além disso, o elementos de $\{0\} \cup A \cup 2A$ são distintos entre si módulo m por hipótese da proposição e por $0 < m < a$, concluindo que são elementos de X. Assim,

$$X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3 \subset \langle a, b \rangle \cap [0, 4m[= \{0\} \cup A \cup 2A \subset X,$$

de onde se conclui que

$$X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \{0\} \cup A \cup 2A.$$

Como $X_0 = \{0\}$, basta determinar a qual intervalo, $[m, 2m-1], [2m, 3m-1]$ ou $[3m, 4m-1]$, pertence cada elemento de $A \cup 2A$ para determinar $X_1 \cup X_2 \cup X_3$. Pelo Item 1,

$$A \subset [a, b] \subset [m, 2m-1] \quad \text{e} \quad 2A \subset [2a, 2b] \subset [3m, 4m-1].$$

De onde se conclui que $X_1 = A$, $X_2 = \emptyset$ e $X_3 = 2A$, isto é,

$$|X_1| = 2, \ |X_2| = 0, \ |X_3| = 3.$$

Por fim, $X_4 \setminus P = X_4 \cap D$ é formado pelos elementos decomponíveis em $[4m, 5m-1]$ não gerados por m. Em outras palavras,

$$X_4 \cap D = \langle a, b \rangle \cap [4m, 5m-1].$$

Pelo Item 1 da Proposição 3.2, $3A \subset [3a, 3b] \subset [4m, 5m-1]$. Além disso, por hipótese, $4a \geq (3m+1)\cdot 2 = 6m+2$, de onde se determina que os elementos de X_4 estão em $3A$. Como $2b \leq 2m-4$ tem-se que não há elementos de $2A$ em X_4. Assim

$$|X_4 \cap D| = |3A| = 4.$$

Aplicando as fórmulas dadas para $|L(S)|$ e d_4, tem-se que

$$|L(S)| = 4|X_0| + 3|X_1| + 2|X_2| + |X_3| = 4\cdot 1 + 3\cdot 2 + 2\cdot 0 + 3 = 13;$$

$$d_4 = |X_0| + |X_1| + |X_2| + |X_3| + |X_4 \cap D| = 1 + 2 + 0 + 3 + 4 = 10.$$

Calculando o número de Eliahou,

$$W_0(S) = |P(S) \cap L(S)||L(S)| - 4d_4 + \rho = 3\cdot 13 - 4\cdot 10 = -1.$$

$\square$

A partir desta proposição, é possível construir semigrupos numéricos com número de Eliahou negativo e satisfazerem a conjectura de Wilf, fato que será provado na próxima seção.

O corolário a seguir apresenta uma forma para construir semigrupos numéricos que satisfazem as hipóteses suficientes para que seu número de Eliahou seja -1.

Corolário 3.4 *Sejam k, m inteiros tais que $k \geq 2, m \geq 3k+8$ e $m \equiv k \mod 2$. Defina $a = (3m+k)/2$. Então o semigrupo numérico*

$$S = \langle m, a, a+1 \rangle_{4m}$$

satisfaz $W_0(S) = -1$.

Prova. Para garantir que S satisfaz as condições da Proposição 3.3, tome $b = a+1$ e

$A = \{a, b\}$. Daí, sabendo que $k \geq 2$ e $k \leq (m-8)/3$, vale que

$$a = (3m+k)/2 \geq (3m+1)/2 \quad \text{e}$$

$$b = (3m+k)/2+1 \leq \frac{(9m+m-8)}{6}+1 = \frac{10m-8}{6}+1 = (10m-2)/6 = (5m-1)/3.$$

Resta provar que $A \cup 2A \cup 3A = \{a, a+1, 2a, 2a+1, 2a+2, 3a, 3a+1, 3a+2, 3a+3\}$ são distintos entre si módulo m. Pelo Item 1 da Proposição 3.2, valem as desigualdades

$$m+1 \leq a < a+1 \leq 2m-2;$$

$$3m+1 \leq 2a < 2a+2 \leq 4m-2;$$

$$4m+1 \leq 3a < 3a+3 \leq 5m-1;$$

Como $m \geq 14$, pois $k \geq 2$, segue que 9 números diferentes entre $4m$ e $5m$ são incongruentes entre si módulo m. Logo, para provar que os elementos de $A \cup 2A \cup 3A$ são incongruentes entre si, basta provar que $(A+3m) \cup (2A+m) \cup 3A \subset [4m+1, 5m-1]$ e são distintos entre si. Pelas desigualdades anteriores, vale que

$$4m+1 \leq 2a+m < 2a+1+m < 2a+2+m = a+(a+1)+1+m$$

$$\leq a+(2m-2)+1+m = a+3m-1 < a+3m < a+1+3m$$

$$\leq a+2a = 3a < 3a+1 < 3a+2 < 3a+3 \leq 5m-1.$$

Assim, todos os elementos são distintos módulo m e satisfazem as condições da proposição.

□

Teorema 3.5 *Seja $S = \langle \{m\} \cup A \rangle_{4m}$ um semigrupo numérico construído a partir das hipóteses da Proposição 3.3. Então $W(S) \geq 9$.*

Prova. Da Equação (2-5), vale que

$$W(S) = W_0(S) + p_q(|L(S)| - q(S)),$$

e, por hipótese, $W_0(S) = -1$, $q(S) = 4$ e $|L(S)| = 13$, $d_4 = 10$, isto é,

$$W(S) = -1 + 9p_4.$$

Resta provar que $p_4 \geq 1$. Sabendo que $p_4 + d_4 = m$, vale que $p_4 = m - d_4 = m - 10$. Por outro lado, há 10 elementos em $\{0\} \cup A \cup 2A \cup 3A = \{a, a+1, 2a, 2a+1, 2a+2, 3a, 3a+$

$1, 3a+2, 3a+3\}$ com elementos incongruentes módulo m, isto é, $m \geq 10$. Se $m = 10$, então

$$(3m+1)/2 = 15,5 \leq a < b \leq (5m-1)/3 = 16,3.$$

Segue que 16 é o único inteiro entre $15,5$ e $16,3$, o que contradiz a hipótese que $a < b$. Novamente, caso $m = 11$. tem-se

$$(3m+1)/2 = 17 \leq a < b \leq (5m-1)/3 = 18.$$

No semigrupo $\langle 11, 17, 18 \rangle_{44}$, sabe-se que $\{18, 51 = 17+17+17\} \subset A \cup 2A \cup 3A$ e

$$18 \equiv 7 \equiv 51 \mod 11,$$

o que contradiz a hipótese do teorema. Assim, vale que $m > 11$, concluindo que

$$W(S) = -1 + 9p_4 > -1 + 9(11-10) = 8,$$

$$W(S) \geq 9.$$

$\square$

A partir do teorema, se conclui que os semigrupos numéricos descritos pela Proposição 3.3 satisfazem a conjectura de Wilf.

Já é de conhecimento geral que dentre os semigrupos numéricos com gênero $g \leq 60$, há apenas 5 exemplos de semigrupos numéricos com número de Eliahou negativo, veja em [6]. Tais exemplos serão apresentados a seguir e são construídos a partir da proposição anterior e seu corolário.

Exemplo 3.6 *Sejam*

$$s = \langle 14, 22, 23 \rangle_{56},\ t = \langle 16, 25, 26 \rangle_{64},\ u = \langle 17, 26, 28 \rangle_{68},\ v = \langle 17, 27, 28 \rangle_{68},\ w = \langle 18, 28, 29 \rangle_{72}.$$

Os semigrupos numéricos s, t, u, v e w satisfazem as condições da Proposição 3.3 e portanto tem número de Eliahou -1 e número de Wilf maior ou igual a 9.

```
gap >s := NumericalSemigroup(14,22,23,56,57,58,59,60,61,62,63,64,65,66,67,68,69);;
gap >EliahouNumber(s);
-1
gap >WilfNumber(s);
35
gap >t := NumericalSemigroup(16,25,26,64,65,66,67,68,69,70,71,72,73,74,75,76,77,78,79);;
gap >EliahouNumber(t);
-1
gap >WilfNumber(t);
```

```
53
gap >u := NumericalSemigroup(17,26,28,68,69,70,71,72,73,74,75,76,77,78,79,80,81,82,83,84);;
gap >EliahouNumber(u);
-1
gap >WilfNumber(u);
62
gap >v := NumericalSemigroup(17,27,28,68,69,70,71,72,73,74,75,76,77,78,79,80,81,82,83,84);;
gap >EliahouNumber(v);
-1
gap >WilfNumber(v);
62
gap >w := NumericalSemigroup(18,28,29,72,73,74,75,76,77,78,79,80,81,82,83,84,85,86,87,88,89);;
gap >EliahouNumber(w);
-1
gap >WilfNumber(w);
71
```

Estendendo a caracterização de semigrupos numéricos com número de Eliahou -1 para uma maior variedade de valores negativos, a próxima seção apresentará uma generalização para uma família de semigrupos numéricos com número de Eliahou $-\binom{n}{3}$, a qual inclui o caso desta seção para $n = 3$. Também será verificado que essa família satisfaz a conjectura de Wilf.

3.2 Considerações finais

Uma generalização da construção do semigrupo numérico anterior foi dada em [6], a partir da qual se conjecturou a respeito de semigrupos numéricos com profundidade $q = 4$ e número de Eliahou negativo na qual esta seção está interessada.

Para entender a generalização, é necessário ter noção mínima dos conjuntos B_h proveniente de estudos combinatórios.

Definição 3.7 *Sejam G um grupo abeliano, $A \subset G$ um subconjunto não vazio e $h \geq 1$ um inteiro positivo. Então A é um conjunto B_h se vale a relação*

$$|hA| \leq \binom{|A|+h-1}{h}.$$

Tal definição equivale a:

Qualquer lista de elementos de A $a_1, \ldots, a_h, b_1, \ldots, b_h \in A$ satisfaz

$$a_1 + \cdots + a_h = b_1 + \cdots + b_h.$$

se, somente se, $(a_1, \ldots, a_h)$ for uma permutação de $(b_1, \ldots, b_h)$.

O resultado a seguir caracteriza uma infinidade de semigrupos numéricos com número de Eliahou $-\binom{n}{3}$ a partir de um conjunto A que indus um conjunto B_3 em $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Teorema 3.8 *Sejam $m, a, b, n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq 3$ e*

$$(3m+1)/2 \leq a < b \leq (5m-1)/3.$$

Dado um conjunto $A \subset \mathbb{N}$ com cardinalidade $|A| = n-1$, $\min A = a$, $\max A = b$ e induzindo um conjunto B_3 em $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Então o semigrupo numérico

$$S = \langle \{m\} \cup A \rangle_{4m}$$

satisfaz $W_0(S) = -\binom{n}{3}$.

Prova. A demonstração deste resultado foge ao escopo deste trabalho. Ela pode ser encontrada na Proposição 3.3, página 9 da referência [6]. □

Tomando $n = 3$, tem-se $A = \{a, b\}$ satisfazendo

$$(3m+1)/2 \leq a < b \leq (5m-1)/3$$

com todos os elementos de $A \cup 2A \cup 3A$ distintos módulo m. Logo, o semigrupo numérico S dado pelo teorema tem número de Eliahou $W_0(S) = -\binom{3}{3} = -1$ e já foi provado que satisfaz a conjectura de Wilf na seção anterior.

De fato, todo semigrupo numérico S descrito pelo Teorema 3.8 satisfaz a conjectura de Wilf a partir da garantia que $W(S) \geq 9$, como pode ser visto em [6]. É a partir deste resultado que se faz a seguinte conjectura a respeito de Semigrupos numéricos com profundidade $q = 4$.

Conjectura 3.9 *Seja S um semigrupo numérico com profundidade $q(S) = 4$ e $|P(S) \cap L(S)| = n$. Então $W_0(S) \geq -\binom{n}{3}$.*

A construção da seção anterior serve de exemplo de semigrupos numéricos que satisfazem com igualdade a Conjectura 3.9. A seguir, será dado uma exemplo de um semigrupo numérico que satisfaz a conjectura com um valor acima da estimativa.

Exemplo 3.10 *O semigrupo numérico*

$$S = \langle 3, 10, 14 \rangle,$$

possui $|P(S) \cap L(S)| = 2$ e $W_0(S) = 2$. Logo,

$$W_0(S) = 2 > -\binom{2}{3} = 0.$$

```
gap >s := NumericalSemigroup(3,10,14);;
gap >Ceil(Float((Conductor(s),Multiplicity(s)));
4
gap >EliahouNumber(s);
2
gap >IntersectionSet(MinimalGenerators(s),SmallElements(s));
[3,10]
```

Assim, caso satisfeita a Conjectura 3.9, esta será a melhor estimativa para o número de Eliahou de semigrupos numéricos com profundidade 4 e contribuirá significativamente com o estudo do caso geral de semigrupos numéricos de profundidade 4 na conjectura de Wilf devido a relação entre número de Wilf e número de Eliahou.

Outro resultado que permite construções de semigrupos numéricos para testar hipóteses feitas a respeito de semigrupos numéricos com número de Elihaou negativo foi dado pelo Corolário provado por Delgado em [2].

Teorema 3.11 *Dados $n,N \in \mathbb{Z}$, existe uma infinidade de semigrupos numéricos S com $W_0(S) = n$ e $W(S) > N$.*

Prova. A demonstração deste resultado foge ao escopo deste trabalho. Ela pode ser encontrada no Corolário 57, página 21 da referência [2]. □

Tendo em vista os já presentes resultados a respeito de semigrupos numéricos com número de Eliahou negativo e a amplitude de possibilidades a se explorar a respeito destes, um caminho natural para estes estudos segue na direção de buscar entender melhor como o número de Eliahou influencia na estimativa do número de Wilf e, além disso, determinar mais parâmetros por meio do número de Eliahou negativo que levem ao semigrupo numérico satisfazer a conjectura de Wilf.

APÊNDICE A

Algumas relações envolvendo binomiais

O resultado de uma proposição que determina relações a partir da igualdade entre somas de binômios é necessário para a demonstração do Teorema 2.22. O mesmo decorre de relações que dependem do lema provado por Lovász [10]. A prova deste lema, por sua vez, depende de 3 relações que serão demonstradas a seguir. O conteúdo deste capítulo tem como referências principais [5, 10].

Considere a seguinte notação a partir da expansão binomial de $(x+1)^n$:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k,$$

então $[x^m](x+1)^n = \binom{n}{m}$.

Isto é, $[x^m]$ de uma expansão binomial é o coeficiente que acompanha a m-ésima potência de x. Desta noção, decorrerá a proposição.

Proposição A.1 *Dados $m,n,r,a,b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$. A partir da definição de*

$$[x^m](x+1)^n = \binom{n}{m},$$

valem as relações

1. *O binômio do oposto de um número é dado por*

$$\binom{-r}{k} = \binom{r+k-1}{k}(-1)^k.$$

2. *O inverso da expansão binomial satisfaz a relação*

$$\frac{1}{(1-z)^{b+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b+k}{k} z^k.$$

3. *O m-ésimo coeficiente do produto de expansões binomiais satisfaz a relação*

$$[x^m](1+x)^a x^k (1+x)^{-k} = \binom{a-k}{m-k}.$$

Prova.

1. Pela definição da função binomial, dada por um polinômio e estendida a números negativos, é possível escrever:

$$\begin{aligned}\binom{-r}{k} &= \frac{-r(-r-1)\cdots(-r-k+1)}{k!}\\ &= \frac{r(r+1)\cdots(r+k-1)}{k!}(-1)^k\\ &= \frac{(r+k-1)\cdots(r+1)r}{k!}(-1)^k\\ &= \binom{r+k-1}{k}(-1)^k.\end{aligned}$$

2. Escrevendo a fração de forma conveniente, têm-se que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^{b+1}} &= (1-z)^{-(b+1)}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(b+1)}{k}(-z)^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(b+1)}{k}(-1)^k z^k\end{aligned}$$

Pelo item 1, vale que

$$\binom{-(b+1)}{k}(-1)^k = \binom{b+1+k-1}{k}(-1)^k(-1)^k = \binom{b+k}{k}.$$

Substituindo em todas as parcelas da série, resulta em:

$$\frac{1}{(1-z)^{b+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{b+k}{k}z^k.$$

3. Para se determinar o coeficiente da m-ésima potência de x, é preciso escrever a expressão como uma soma de potências, isto é:

$$\begin{aligned}[x^m](1+x)^a x^k(1+x)^{-k} &= [x^m]x^k(1+x)^{a-k}\\ &= [x^m]x^k\sum_{j=0}^{\infty}\binom{a-k}{j}x^j (\text{ pela expansão binomial de } (1+x)^{a-k})\\ &= [x^m]\sum_{j=0}^{\infty}\binom{a-k}{j}x^{j+k}.\end{aligned}$$

O coeficiente que acompanha x^m no somatório é o que acompanha o termo

$$x^{j+k} = x^m \Rightarrow j = m-k,$$

isto é, $\binom{a-k}{m-k}$.

□

A partir de tais itens, vale o seguinte lema.

Lema A.2 *Dados $a,b \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que $m \leq b$, vale que*

$$\binom{a+b+1}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{b+k}{k}\binom{a-k}{m-k}.$$

Prova. Por definição de coeficiente de uma expansão binomial, tem-se que

$$\begin{aligned}\binom{a+b+1}{m} &= [x^m](1+x)^{a+b+1}\\ &= [x^m](1+x)^a(1+x)^{b+1}\\ &= [x^m](1+x)^a\frac{1}{(1-x/(1+x))^{b+1}}.\end{aligned}$$

Aplicando o Item 2 da Proposição A.1 com $z = \frac{x}{(1+x)}$, então

$$\begin{aligned}\binom{a+b+1}{m} =&[x^m](1+x)^a\sum_{k=0}^{\infty}\binom{b+k}{k}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{b+k}{k}[x^m](1+x)^a x^k(1+x)^{-k}.\end{aligned}$$

Por fim, aplicando o item 3 da Proposição A.1, conclui-se que

$$\binom{a+b+1}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{b+k}{k}\binom{a-k}{m-k}.$$

□

A partir deste lema será provada a proposição, da qual o segundo item será utilizado no Teorema 2.22.

Proposição A.3 *Seja $r \geq 2$ um inteiro e $u \geq v \geq w$ números reais tais que $v \geq r-1$ e $w \geq r-2$. Então $\binom{u}{r} = \binom{v}{r} + \binom{w}{r-1}$ implica em duas desigualdades:*

1. $\binom{u}{r-1} \leq \binom{v}{r-1} + \binom{w}{r-2}$.
2. $\binom{u+1}{r+1} \geq \binom{v+1}{r+1} + \binom{w+1}{r}$.

Prova.

1. O binômio $\binom{u}{r}$ pode ser escrito a partir do Lema A.2 com $a = w+1, b = u-w-2, m = r$. Assim,

$$\binom{u}{r} = \binom{a+b+1}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{w+1-k}{r-k}\binom{u-w-2+k}{k}.$$

De maneira análoga, calcula-se que

$$\binom{v}{r} = \sum_{k=0}^{m} \binom{w+1-k}{r-k}\binom{v-w-2+k}{k}.$$

Assim, por hipótese e calculando a parte o primeiro termo do somatório, podemos escrever zero como

$0 = \binom{u}{r} - \binom{v}{r} - \binom{w}{r-1}$

$= \binom{w}{r-1}\left(\binom{u-w-1}{1} - \binom{v-w-1}{1} - 1\right) + \sum_{k=2}^{r} \binom{w+1-k}{r-k}\left[\binom{u-w-2+k}{k} - \binom{v-w-2+k}{k}\right]$

$$= \binom{w}{r-1}(u-v-1) + \sum_{k=2}^{r} \binom{w+1-k}{r-k}\left[\binom{u-w-2+k}{k} - \binom{v-w-2+k}{k}\right] \tag{A-1}$$

Utilizando os mesmos passos anteriores, podemos escrever a diferença entre binômios

$$\binom{u}{r-1} - \binom{v}{r-1} - \binom{w}{r-2}$$

$$= \binom{w}{r-2}(u-v-1) + \sum_{k=2}^{r-1} \binom{w+1-k}{r-1-k}\left[\binom{u-w-2+k}{k} - \binom{v-w-2+k}{k}\right] \tag{A-2}$$

O objetivo da demonstração é provar que $\binom{u}{r-1} - \binom{v}{r-1} - \binom{w}{r-2} \leq 0$. Para isso, veja que $\binom{w}{r-1} \times \frac{(r-1)}{(w-r-2)} = \binom{w}{r-2}$ e assim é possível escrever 0 como em (A-1) da seguinte forma.

$$\begin{aligned}
0 &= 0 \times \frac{(r-1)}{(w-r-2)} \\
&= \binom{w}{r-2}(u-v-1) + \left\{\sum_{k=2}^{r} \binom{w+1-k}{r-k}\left[\binom{u-w-2+k}{k} - \binom{v-w-2+k}{k}\right]\right\}\frac{(r-1)}{(w-r-2)} \\
&\geq \binom{w}{r-2}(u-v-1) + \sum_{k=2}^{r} \binom{w+1-k}{r-k}\frac{(r-k)}{(w-r-2)}\left[\binom{u-w-2+k}{k} - \binom{v-w-2+k}{k}\right].
\end{aligned}$$

Vale a desigualdade anterior pois

$$\frac{(r-1)}{(w-r-2)} > \frac{(r-k)}{(w-r-2)} \text{ para } k = 2, 3, \cdots, r.$$

Como $\binom{w+1-k}{r-k}\frac{(r-k)}{(w-r-2)} = \binom{w+1-k}{r-1-k}$, pela expressão dada na Equação (A-2), conclui-se que

$$
\begin{aligned}
0 &\geq \binom{w}{r-2}(u-v-1)+\sum_{k=2}^{r}\binom{w+1-k}{r-1-k}\left[\binom{u-w-2+k}{k}-\binom{v-w-2+k}{k}\right] \\
&\geq \binom{u}{r-1}-\binom{v}{r-1}-\binom{w}{r-2}.
\end{aligned}
$$

2. Suponha inicialmente que

$$\binom{u}{r+1}<\binom{v}{r+1}+\binom{w}{r}.$$

Então pelo binômio ser uma função bijetiva crescente, existe $z>u$ inteiro tal que

$$\binom{z}{r+1}=\binom{v}{r+1}+\binom{w}{r}.$$

Pelo Item 1 da Proposição A.3,

$$\binom{z}{r}\leq\binom{v}{r}+\binom{w}{r-1}=\binom{u}{r}.$$

De onde se conclui que $z\leq u$, o que contradiz o fato de $z>u$. Logo, vale que

$$\binom{u}{r+1}\geq\binom{v}{r+1}+\binom{w}{r}. \tag{A-3}$$

Somando $\binom{u}{r}=\binom{v}{r}+\binom{w}{r-1}$ em (A-3),

$$\binom{u}{r+1}+\binom{u}{r}\geq\binom{v}{r+1}+\binom{v}{r}+\binom{w}{r}+\binom{w}{r-1}.$$

Pela relação de Stifel dada em 2.17, segue que

$$\binom{u}{r+1}+\binom{u}{r}=\binom{u+1}{r+1}$$

$$\binom{v}{r+1}+\binom{v}{r}=\binom{v+1}{r+1}$$

$$\binom{w}{r}+\binom{w}{r-1}=\binom{w+1}{r}.$$

Assim,

$$\binom{u+1}{r+1}\geq\binom{v+1}{r+1}+\binom{w+1}{r}.$$

□

Assim, dados $r \geq 2$ um inteiro e $u \geq v \geq w$ números reais tais que $v \geq r-1$ e $w \geq r-2$. Então $\binom{u}{r} = \binom{v}{r} + \binom{w}{r-1}$ implica em

$$\binom{u+1}{r+1} \geq \binom{v+1}{r+1} + \binom{w+1}{r}.$$

Veja que a relação

$$\binom{x}{i} = a = \binom{a_i}{i} + \binom{y}{i-1}$$

dada no Teorema 2.22 em que $a \geq 0, i \geq 2$ e $y \geq 0$ inteiros com $x \geq i-1$ e $y \geq i-2$, satisfaz as hipóteses da Proposição A.3 e, com isso, se conclui que

$$\binom{x+1}{i+1} \geq \binom{y+1}{i} + \binom{a_i+1}{i+1}.$$

Desta forma, a demonstração do teorema segue a partir desta desigualdade.

Referências Bibliográficas

[1] DELGADO, M.; GARCIA-SANCHEZ, P. A.; MORAIS, J. **NumericalSgps, a package for numerical semigroups, Version 1.3.1**. https://gap-packages.github.io/numericalsgps, Jul 2022. Refereed GAP package.

[2] DELGADO, M. **On a question of Eliahou and a conjecture of Wilf**. *Mathematische Zeitschrift*, 288(1-2):595–627, 2018.

[3] DELGADO, M. **Conjecture of Wilf: a survey**. In: *Numerical semigroups. Proceedings of the INdAM international meeting on numerical semigroups, IMNS 2018, Cortona, Italy, September 3–7, 2018*, p. 39–62. Cham: Springer, 2020.

[4] DOBBS, D. E.; MATTHEWS, G. L. **On a question of Wilf concerning numerical semigroups**. *Focus on Commutative Rings Research*, p. 193–202, 2006.

[5] ELIAHOU, S. **Wilf's conjecture and Macaulay's theorem**. *Journal of the European Mathematical Society (JEMS)*, 20(9):2105–2129, 2018.

[6] ELIAHOU, S.; FROMENTIN, J. **Near-misses in Wilf's conjecture**. *Semigroup Forum*, 98(2):285–298, 2018.

[7] The GAP Group. **GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.11.1**, 2021.

[8] HERZOG, J.; HIBI, T. **Monomial ideals**, volume 279 de **Grad. Texts Math.** Cham: Springer, 2018.

[9] KAPLAN, N. **Counting numerical semigroups**. *The American Mathematical Monthly*, 124(9):862–875, 2017.

[10] LOVÁSZ, L. **Combinatorial Problems and Exercises**. AMS/Chelsea publication. North-Holland Publishing Company, 1993.

[11] RAMÍREZ ALFONSÍN, J. L. **The Diophantine Frobenius problem**, volume 30 de **Oxf. Lect. Ser. Math. Appl.** Oxford: Oxford University Press, 2005.

[12] ROSALES, J. C.; GARCÍA-SÁNCHEZ, P. A. **Numerical semigroups, Developments in Mathematics**, volume 20. Springer, 2009.

[13] ROTMAN., J. J. **Advanced Modern Algebra**, volume 2nd. American Mathematical Society, 2003.

[14] WILF, H. **A circle-of-lights algorithm for the ”money-changing problem”**. *American Mathematical Monthly*, 85:562–565, 1978.

[15] ZHAI, A. **Fibonacci-like growth of numerical semigroups of a given genus**. *Semigroup Forum*, 86(3):634–662, 2013.

[16] ZHAO, Y. **Constructing numerical semigroups of a given genus**. *Semigroup Forum*, 80(2):242–254, 2010.