

UNIVERSIDADE FEDERAL GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

CAÍKE DA ROCHA DAMKE

**Problemas Elípticos Assintoticamente
Lineares**

Goiânia - GO
2012

CAÍKE DA ROCHA DAMKE

Problemas Elípticos Assintoticamente Lineares

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva

Goiânia - GO
2012

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Caíke da Rocha Damke

Graduou-se em Matemática na UFG - Universidade Federal de Goiás. Durante sua graduação, foi bolsista CNPq em um trabalho de iniciação científica no departamento de Matemática da UFG. Durante o Mestrado, na UFG - Universidade Federal de Goiás, foi bolsista do CNPq e desenvolveu um trabalho teórico na área de equações diferenciais parciais.

Dedico este trabalho aos meus pais,
Eugênio Luis Damke e Cleunice José da Rocha.

Agradecimentos

Agradeço ao meu Deus pela companhia espiritual e mental durante todos esses anos.

Aos meus pais, Cleunice e Eugênio, pelo amor, carinho e apoio durante toda a minha vida. Devo tudo à eles. À minha irmã, Priscila, pelos ensinamentos e por ter nos dado o meu afilhado Ari Vinícius.

Ao meu orientador Edcarlos Domingos da Silva pela paciência, incentivo e dedicação. Ao professor José Valdo pelo incentivo em estudar equações diferenciais parciais.

À família da minha namorada pelo apoio. À minha namorada Talita Pezzini, que apesar da distância, sempre me apoiou e incentivou nos piores momentos com palavras de acalanto.

Aos professores Claudiney Goulart, Flávio Raimundo, Fabiano Fortunato e Walterson P. Ferreira pelos incentivos e ensinamentos durante minha graduação.

Agradeço aos amigos de mestrado Agenor, Alfredo, Benedito, Bruno Trindade, Edivaldo, Pablo e Salazar e aos doutorandos Marcos Roberto e o professor Marcos Leandro pela parceria e ajuda. Em especial, agradeço ao amigo Douglas Caixeta.

À amizade sincera que perdura dos senhores Augusto Zimiani, Claudmir Carvalho, Lúciu Resende, Mariana Montoni e Wesley César.

Agradeço à todos os funcionários da coordenação de graduação e pós-graduação do Instituto de Matemática e Estatística da UFG.

Enquanto um homem não causar horror a si mesmo, nada saberá sobre si mesmo.

P. D. Ouspensky,
Fragmentos de um Ensino Desconhecido.

Resumo

da Rocha Damke, Caíke. **Problemas Elípticos Assintoticamente Lineares**. Goiânia - GO, 2012. 89p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Goiás.

Nesta dissertação analisamos questões de existência e multiplicidade de soluções do problema de Dirichlet elíptico assintoticamente linear. Para obtermos os nossos principais resultados utilizamos métodos variacionais, tais como o Teorema do Passo da Montanha e um Teorema de Linking. Além disso, utilizamos a redução de Liapunov-Schmidt.

Palavras-chave

Problema de Dirichlet, Assintoticamente Linear, Métodos Variacionais, Redução de Liapunov-Schmidt

Abstract

da Rocha Damke, Caíke. **An Asymptotically Linear Elliptic Problem**. Goiânia - GO, 2012. 89p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Goiás.

In this dissertation we analyze questions of existence and multiplicity of solutions for Dirichlet problem in the asymptotically linear case. To obtain our main results we use variational methods, such as Mountain Pass Theorem and Linking Theorem. Moreover, we use the Liapunov-Schmidt reduction.

Keywords

Dirichlet problem, Asymptotically Linear, Variational Methods, Liapunov-Schmidt Reduction

Sumário

Notações	12
Introdução	13
1 Preliminares	17
1.1 Análise Espectral de Operadores Simétricos e Compactos	17
1.2 Os Autovalores do Problema com Peso Indefinido: Formulação Variacional	23
1.3 O Teorema do Passo da Montanha, de Linking e um Teorema de Brezis-Nirenberg	30
1.4 Lemas de Redução	35
2 O Problema de Dirichlet Assintoticamente Linear	37
2.1 Análise do Problema	37
2.2 Problema assintoticamente linear: caso não-ressonante	39
2.3 Resultados de existência para o problema (2-1)	46
2.3.1 Discussão dos resultados obtidos	60
3 Multiplicidade das Soluções do Problema Assintoticamente Linear	64
3.1 Resultados sobre multiplicidade do problema (3-1)	65
A Resultados de Análise Funcional	80
A.1 Espaços de Sobolev	81
A.2 Princípio do Máximo e Regularidade	84
Referências Bibliográficas	87

Notações

Notações Gerais

$$\Omega \subset \mathbb{R}^N$$

conjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^N

$$\partial\Omega$$

fronteira de Ω

$$|\Omega|$$

medida do conjunto Ω

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

gradiente da função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Laplaciano de u

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

onde o multi-índice α é dado por $\alpha =$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N), |\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$$

\rightharpoonup

convergência fraca

\hookrightarrow

imersão contínua

$\overset{cpt.}{\hookrightarrow}$

imersão compacta

Espaços de Funções

$$C^k(\Omega)$$

espaço das funções contínuas e k -diferenciáveis

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\overline{\Omega}) : \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty, \text{ com } x \neq y \text{ e } 0 < \alpha < 1 \right\}$$

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{ u \in C^k(\Omega) : D^j u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), \text{ para todo } |j| \leq K \}$$

$$L^p(\Omega) = \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u|^p < \infty \}, 1 \leq p < \infty$$

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável e } |u(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ para}$$

alguma constante $C > 0$ }

$$W^{k,p}(\Omega) = \{ u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : u \in L^p(\Omega) \text{ e } D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall 0 \leq |\alpha| \leq k \}$$

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}}$$

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$$

$$\|\cdot\|_p$$

norma no espaço $L^p(\Omega)$

$$\|\cdot\|$$

norma no espaço $H_0^1(\Omega)$

Introdução

O objetivo deste trabalho é o de estudar problemas de existência e multiplicidade de soluções para equações do tipo $-\Delta u = f(x, u)$ em um espaço de Sobolev adequado, com condição de fronteira de Dirichlet. Tais equações modelam estados estacionários de equações que dependem do tempo e são, naturalmente, aplicadas na biologia, química e física.

Estudaremos equações elípticas semilineares, com um comportamento assintoticamente linear no infinito. Discutiremos os resultados de existência e multiplicidade via Métodos Variacionais e de redução de Liapunov-Schmidt.

Mais precisamente, consideraremos o problema de Dirichlet elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{D})$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ é um domínio limitado, $\partial\Omega$ é suave e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory subcrítica.

Soluções do problema (D) são precisamente os pontos críticos do funcional

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx, \forall u \in H_0^1(\Omega) \quad (0-1)$$

onde $F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds$. O espaço de Sobolev no qual o funcional está definido é escolhido de acordo com as condições de fronteira, no nosso caso a condição de fronteira de Dirichlet sugere o espaço $H_0^1(\Omega)$. Para obter os pontos críticos do funcional J , mostra-se que o funcional possui certa estrutura geométrica e que o conjunto dos seus pontos críticos possui um tipo de compacidade, condição de Palais-Smale ou de Cerami.

Uma das principais dificuldades no estudo de tais problemas é que a não linearidade f não satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz, ou seja, para algum $\theta > 2$ e $M > 0$ tem-se

$$0 < \theta F(x, s) \leq f(x, s)s, \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega \text{ e } |s| \geq M$$

a qual é utilizada para demonstrar que as sequências de Palais-Smale são limitadas para o

caso onde a não linearidade f é superlinear.

Para o caso assintoticamente linear é necessário dividir o estudo do problema (D) em dois casos. A saber, o caso ressonante e não-ressonante. Dizemos que o problema (D) é ressonante quando o limite assintótico da não-linearidade pertence ao espectro do Laplaciano. Mais especificamente, (D) é um problema ressonante quando

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{f(x, t)}{t} = \lambda \in \sigma(-\Delta, H_0^1(\Omega)).$$

No caso em que

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{f(x, t)}{t} = \lambda \notin \sigma(-\Delta, H_0^1(\Omega))$$

dizemos que (D) é não ressonante. Nos últimos anos o problema (D) tem sido extensivamente estudado, onde f é assintoticamente linear. Para maiores detalhes veja [5, 11, 12, 16, 20, 28, 29, 30].

Nosso trabalho foi motivado por alguns resultados obtidos por Costa e Magalhães [11], Castro e Lazer [9] e Hirano e Nishimura [16].

Costa e Magalhães baseando-se no Teorema do Passo da Montanha e usando a hipótese de não-quadraticidade no infinito sobre a função f dada por

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{f(x, t)t - 2F(x, t)}{t^\mu} = +\infty, \quad \text{para algum } \mu > 0 \quad (\text{CM})$$

mostrou a existência de uma solução, não necessariamente positiva, do problema (D).

Via o método de redução de Liapunov-Schmidt e considerando $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $f(0) = 0$, f' limitada, satisfazendo

$$\lambda_{m-1} < f'(0) < \lambda_m, \quad \lambda_k < \lim_{|t| \rightarrow \infty} f'(t) < \lambda_{k+1}$$

e

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} f'(t) < \lambda_{k+1}.$$

para alguns inteiros $0 < m \leq k$, Castro e Lazer [9] demonstraram a existência de ao menos duas soluções não triviais para o problema (D). Utilizando-se do mesmo método, Hirano e Nishimura [16], supondo $f(t) = \lambda_k t + g(t)$, $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ com

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t} = 0, \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} g(t)t = +\infty,$$

que ou g é limitada ou $\liminf_{|t| \rightarrow \infty} |g(t)| > 0$. Além disso, suponha que

$$\lambda_{m-1} \geq \lambda_k + \inf_{t \in \mathbb{R} - \{0\}} \frac{g(t)}{t} \geq \lambda_k + g'(0) < \lambda_m$$

e

$$\lambda_k + \sup_{t \in \mathbb{R}} g'(t) < \lambda_{k+1}.$$

Então o problema (D) possui ao menos duas soluções não triviais.

No primeiro capítulo estudamos a formulação variacional de um problema de autovalor com peso indefinido. Em um segundo momento, expomos os Teoremas do Passo da Montanha, de Linking e Brezis-Nirenberg e enunciamos alguns lemas de redução.

No segundo capítulo, consideramos as seguintes hipóteses sobre f

(A-1) $f \in C(\Omega \times \mathbb{R})$; $f(x, 0) = 0$, $\forall x \in \Omega$; $f(x, t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$, $x \in \Omega$ e

$$f(x, t) \equiv 0, \forall t \leq 0, x \in \Omega;$$

(A-2) $t \mapsto \frac{f(x, t)}{t}$ é não decrescente para cada $t \geq 0$ e q.t.p. $x \in \Omega$;

(A-3) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, t)}{t} = \mu$; $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(x, t)}{t} = l$ uniformemente q.t.p. $x \in \Omega$, onde $\mu \in [0, +\infty)$, $l \in (0, +\infty]$ são constantes e $\mu < \lambda_1 \leq l$ e λ_1 é o primeiro autovalor do Laplaciano $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Deste modo, verificamos a existência de solução do problema (D) para o caso não-ressonante e demonstramos um resultado de existência de solução para o problema (D), a saber:

Teorema 0.1 *Se as condições (A-1), (A-2) e (A-3) valem, então*

1. *o problema (2-1) não possui solução positiva se $l < \lambda_1$;*
2. *se $\lambda_1 < l < +\infty$ então o problema (2-1) possui uma solução positiva;*
3. *se $l = \lambda_1$ então o problema (2-1) possui uma solução positiva $u \in H_0^1(\Omega)$ se, e somente se, existe uma constante $c > 0$ tal que $u(x) = c\varphi_1(x)$ e $f(x, u) = \lambda_1 u(x)$.*

Utilizamos o método variacional para verificar que o funcional J satisfaz a condição de Cerami que é uma condição mais fraca que a condição de Palais-Smale.

O terceiro capítulo, aborda a questão da multiplicidade de solução do problema (D) utilizando-se do método de redução de Liapunov-Schmidt e o consagrado Teorema de

Linking de Brezis e Nirenberg [7]. Os dois resultados centrais deste capítulo são descritos abaixo:

Teorema 0.2 *Seja f é uma função Carathéodory subcrítica e suponha que existe $a < \lambda_{k+1}$ tal que*

$$\frac{f(x, s) - f(x, t)}{s - t} \leq a, \quad (0-2)$$

para todo $s, t \in \mathbb{R}$, $s \neq t$ e q.t.p. em Ω . Assuma que

$$F(x, t) - \frac{1}{2}\lambda_k t^2 \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} +\infty \quad (0-3)$$

uniformemente para q.t.p $x \in \Omega$ e que existem $\delta > 0$, $b > 0$ e $k \geq m > 0$ tais que

$$\frac{1}{2}\lambda_{m-1}t^2 \leq F(x, t) \leq \frac{1}{2}(\lambda_m - b)t^2 \quad (0-4)$$

para todo $|t| \leq \delta$ e q.t.p. em Ω . Então o problema (3-1) possui ao menos duas soluções não triviais em $H_0^1(\Omega)$.

Adicionalmente, podemos provar o seguinte resultado:

Teorema 0.3 *Suponha que $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é subcrítica e que*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} f'(t) < \lambda_{k+1}. \quad (0-5)$$

Assuma que

$$f(t)t - \lambda_k t^2 \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} +\infty \quad (0-6)$$

e que existem $\delta > 0$ e $k \geq m > 0$ tais que

$$\lambda_{m-1} \leq \inf_{0 < |t| < \delta} \frac{f(t)}{t}, \quad f'(0) < \lambda_m. \quad (0-7)$$

Então o problema (3-1) possui ao menos duas soluções não triviais.

No apêndice, contém alguns resultados clássicos de análise funcional, espaços de Sobolev, princípio do máximo que são utilizados ao longo da dissertação, além de um resultado sobre regularização da solução do problema (D).

Preliminares

Nas preliminares desta dissertação, estudaremos o problema de autovalor:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda m u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1-1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio aberto, suave e limitado e $m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de função peso, pertencente a $L^r(\Omega)$ com $r > \frac{N}{2}$.

Verificaremos, por meio da formulação variacional do problema e sob hipóteses adequadas sobre m , que o primeiro autovalor positivo do problema (1-1) é simples e a autofunção associada a este autovalor pode ser tomada estritamente positiva em Ω . Tal resultado é conhecido como Teorema de Krein-Rutman. Deste modo, necessitamos analisar os operadores lineares simétricos e compactos definidos em um espaço de Hilbert.

Observação 1.1 1. Este caso é mais geral que o problema de autovalor $(-\Delta, \mathbf{H}_0^1(\Omega))$.

2. O resultado pode ser aplicado ao operador $Lu = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0(x)u$ fortemente elíptico definido em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ no lugar do Laplaciano em (1-1), com $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $a_0 \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$, $a_0(x) \geq 0$ em Ω e $a_{ij} = a_{ji}$ (cf. [13]).

Dizemos que o operador acima é fortemente elíptico se existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq c |\xi|^2; \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (1-2)$$

1.1 Análise Espectral de Operadores Simétricos e Compactos

Sejam H um espaço de Hilbert, onde denotamos por (\cdot, \cdot) o seu produto interno e $\|\cdot\|$ a sua norma e $T : H \rightarrow H$ um operador linear, simétrico e compacto. Temos a

seguinte caracterização do primeiro autovalor para o operador T :

Lema 1.2 *Se $\mu_1 = \sup\{(Tx, x) : \|x\| = 1, x \in H\} > 0$, então existe $\phi_1 \in H$ normalizada tal que*

$$(T\phi_1, \phi_1) = \mu_1 \text{ e } T\phi_1 = \mu_1\phi_1 \quad (1-3)$$

Prova: Pela desigualdade de Cauchy-Scharwz temos que $|(Tx, x)| \leq \|Tx\|\|x\|$, de onde obtemos que $\forall x \in H$, com $\|x\| = 1$, $(Tx, x) \leq \|T\|$, ou seja, $\mu_1 < \infty$. Assim, pela definição de supremo, existe uma sequência $\{x_n\}$ em H , com $\|x_n\| = 1$, tal que $(Tx_n, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu_1$. Mas $\{x_n\}$ é uma sequência limitada em H então, a menos de subsequência, existe $\phi_1 \in H$ tal que $x_n \rightharpoonup \phi_1$, onde “ \rightharpoonup ” designa convergência fraca. Como T é compacto então $Tx_n \rightarrow T\phi_1$. Logo, $(Tx_n, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (T\phi_1, \phi_1)$ ([6], pg. 58) e pela unicidade do limite obtemos que $(T\phi_1, \phi_1) = \mu_1$.

Agora, devemos obter que $\|\phi_1\| = 1$. Sabemos que $\|\phi_1\| \leq \liminf \|x_n\| = 1$ ([6], pg. 58). Suponha, por absurdo, que $\|\phi_1\| < 1$, então

$$\mu_1 = (T\phi_1, \phi_1) < \frac{\mu_1}{\|\phi_1\|^2} = \left(T \left(\frac{\phi_1}{\|\phi_1\|} \right), \frac{\phi_1}{\|\phi_1\|} \right) = (T\phi_1, \phi_1) \frac{1}{\|\phi_1\|^2}$$

o que é um absurdo, pela definição de μ_1 .

Devemos verificar que $T\phi_1 = \mu_1\phi_1$. Para isto, defina $A = \mu_1 I - T$, onde I é o operador identidade. Claramente, temos que $(A\phi_1, \phi_1) = 0$. Mas $(Ax, x) \geq 0, \forall x \in H$, pois caso contrário $(Ax, x) < 0$ implicaria que $\mu_1 < \frac{(Tx, x)}{\|x\|^2}$, para todo $x \in H$. Em particular, tomando $\|x\| = 1$, obtemos uma contradição. Defina $x = \phi_1 + ty$, onde $t \in \mathbb{R}$ e $y \in H$ são arbitrários. Então $t^2(Ay, y) + 2t(A\phi_1, y) \geq 0$. Escreva $t = \theta(A\phi_1, y)$, com $\theta \in \mathbb{R}$. De onde obtemos que

$$\theta(A\phi_1, y)^2 [2 + \theta(Ay, y)] \geq 0$$

Analisando esta desigualdade, verificamos que $(A\phi_1, y) = 0$, pois caso contrário, podemos tomar θ tão pequeno quanto se queira de maneira que a desigualdade acima se torne negativa, o que é um absurdo. Portanto, $T\phi_1 = \mu_1\phi_1$

□

Analogamente ao lema anterior, demonstra-se o seguinte resultado.

Lema 1.3 *Se $\mu_{-1} = \inf\{(Tx, x) : \|x\| = 1\} < 0$, então existe $\phi_{-1} \in H$, com $\|\phi_{-1}\| = 1$, tal que*

$$(T\phi_{-1}, \phi_{-1}) = \mu_{-1} \text{ e } T\phi_{-1} = \mu_{-1}\phi_{-1}. \quad (1-4)$$

Observação 1.4 O autovalor obtido em (1-3) é o maior autovalor de T . De fato, seja μ um autovalor qualquer de T e ϕ a autofunção associada a μ com $\|\phi\| = 1$. Então

$$\mu_1 = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x) \geq (T\phi, \phi) = \mu(\phi, \phi) = \mu.$$

Similarmente, obtemos que μ_{-1} em (1-4) é o menor autovalor de T . Observe que se $V = \text{span}\{\phi_1\}$ teremos que $H = V \oplus V^\perp$, então podemos aplicar o mesmo processo e obter $\mu_2 = \sup\{(Tx, x) : \|x\| = 1, x \perp \phi_1\} > 0$ é autovalor de T com ϕ_2 sendo a autofunção normalizada associada a μ_2 . Isto ocorre porque, se $V \subset H$ é um subespaço de H tal que $T(V) \subset V$ então $T : V^\perp \rightarrow V^\perp$ é simétrico e compacto. Utilizando este raciocínio, temos:

Proposição 1.5 Se

$$\mu_n = \sup\{(Tx, x) : \|x\| = 1, x \perp \phi_1, \dots, \phi_{n-1}\} > 0, \quad (1-5)$$

então existe $\phi_n \in H$, com $\|\phi_n\| = 1$, tal que

$$(T\phi_n, \phi_n) = \mu_n \text{ e } T\phi_n = \mu_n\phi_n. \quad (1-6)$$

Analogamente, obtemos o resultado para

$$\mu_{-n} = \sup\{(Tx, x) : \|x\| = 1, x \perp \phi_{-1}, \dots, \phi_{-(n-1)}\} < 0. \quad (1-7)$$

O próximo resultado é sobre alguns fatos dos operadores lineares e compactos.

Lema 1.6 Seja $T : H \rightarrow H$ um operador linear e compacto. Então:

1. Autovetores correspondentes a diferentes autovalores são ortogonais;
2. Se μ é um autovalor de T , então o núcleo do operador $T_\mu = T - \mu I$ possui dimensão finita;
3. Os autovalores de T não podem se acumular em um ponto $\mu \neq 0$.

Prova: 1. Sejam $\mu_1 \neq \mu_2$ em \mathbb{R} dois autovalores de T com ϕ_1 e ϕ_2 suas respectivas autofunções. Como T é um operador simétrico, temos que

$$(T\phi_1, \phi_2) = (\phi_1, T\phi_2)$$

Então,

$$\mu_1(\phi_1, \phi_2) = (\mu_1\phi_1, \phi_2) = (T\phi_1, \phi_2) = (\phi_1, T\phi_2) = \mu_2(\phi_1, \phi_2).$$

Logo, como $\mu_1 \neq \mu_2$,

$$(\phi_1, \phi_2) = 0$$

Os itens 2. e 3. podem ser obtidos no livro do Kreyszig em [18], Capítulo 8, Teoremas 8.3-3 e 8.3-1, respectivamente.

□

Observe que na Proposição 1.5 obtemos autovalores do operador T linear, simétrico e compacto. Afirmamos, agora, que todos os autovalores diferentes de 0 do operador T são obtidos pelo processo descrito na proposição 1.5. Mas para demonstrar tal fato, necessitamos do seguinte lema:

Lema 1.7 *Para cada $x \in H$ nós temos*

$$Tx = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mu_i(x, \phi_i) \phi_i \quad (1-8)$$

onde na soma acima não consideramos $i = 0$. Em particular, se não existirem autovalores negativos temos o seguinte somatório

$$Tx = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_i(x, \phi_i) \phi_i \quad (1-9)$$

Sabemos que se $T : H \rightarrow H$ é um operador linear contínuo, a norma de tal operador no espaço dos operadores lineares e contínuos é dada por

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Para demonstrar o Lema 1.7 precisamos de uma caracterização da norma acima:

Lema 1.8 *Seja $T : H \rightarrow H$ um operador simétrico em um espaço de Hilbert H . Então*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)|. \quad (1-10)$$

Prova: Veja [18], Capítulo 9, Teorema 9.2-2.

□

Vamos à demonstração do Lema 1.7

Prova(Lema 1.7): Seja

$$x_n = x - \sum_{i=-n}^n (x, \phi_i) \phi_i, \quad i \neq 0$$

Basta mostrar que $Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Como $x_n \perp \phi_i$, para cada $i = -n, \dots, -1, 1, \dots, n$, temos pela Proposição 1.5 e o Lema 1.8 que

$$\|Tx_n\| \leq \max\{|\mu_{-n}|; \mu_n\} \|x_n\|.$$

e

$$\begin{aligned} \|x_n\|^2 &= \|x - \sum_{i=-n}^n (x, \phi_i) \phi_i\|^2 = \|x\|^2 - 2 \sum_{i=-n}^n (x, \phi_i)^2 + \sum_{i=-n}^n (x, \phi_i)^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=-n}^n (x, \phi_i)^2 \leq \|x\|^2 \end{aligned}$$

Então

$$\|Tx_n\| \leq \max\{|\mu_{-n}|; \mu_n\} \|x\|.$$

de onde concluímos que $Tx_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. □

Então, demonstrado o Lema 1.7, podemos afirmar que todos os autovalores de T diferentes de 0 são obtidos conforme a Proposição 1.5. De fato, suponha que existe um autovalor $\mu \neq 0$ e diferente dos μ_i , para todo i . Então do Lema 1.6 item 1, a autofunção ϕ associada ao autovalor μ é ortogonal à ϕ_i , para todo i . De (1-8), $T\phi = 0$, o que é um absurdo.

Observe que (1-5) e (1-7) exigem o conhecimento dos autovalores positivos e negativos precedentes, respectivamente. O próximo resultado melhora nossas condições.

Proposição 1.9 *Para cada n positivo temos que*

$$\mu_n = \inf_{F_{n-1}} \sup\{(Tx, x) : \|x\| = 1, x \perp F_{n-1}\} \quad (1-11)$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os subespaços F_{n-1} de H com dimensão $n - 1$. Analogamente, temos que

$$\mu_{-n} = \sup_{F_{n-1}} \inf\{(Tx, x) : \|x\| = 1, x \perp F_{n-1}\}. \quad (1-12)$$

Prova: Vamos denotar por Γ_n o lado direito da igualdade na equação (1-11). Tomando F_{n-1} como sendo o subespaço gerado por $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$, temos da Proposição 1.5 que $\Gamma_n \leq \mu_n$. Por outro lado, seja h_1, \dots, h_{n-1} um sistema qualquer de vetores dois a dois disjuntos em H e F_{n-1} o subespaço gerado por estes vetores. Considere um vetor $\phi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$ tal que $(\phi, h_j) = 0$ para $j = 1, \dots, n - 1$ e normalizado, o que implica que

$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$. Como $\|\phi\| = 1$ e $\mu_n \leq \mu_i$ para cada $i = 1, \dots, n$ então

$$(T\phi, \phi) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \mu_i \geq \mu_n.$$

Assim,

$$\sup\{(Tx, x) : \|x\| = 1, x \perp F_{n-1}\} \geq \mu_n, \quad \forall F_{n-1}$$

de onde segue o resultado. □

Na equação (1-11) temos o inconveniente de que o $\sup(Tx, x)$ está sendo tomado em um espaço de dimensão infinita. O seguinte resultado facilita o cálculo para cada autovalor μ_n e μ_{-n} .

Proposição 1.10 *Para cada n positivo*

$$\mu_n = \sup_{F_n} \inf\{(Tx, x) : \|x\| = 1, x \in F_n\} \quad (1-13)$$

onde o supremo é tomado sobre todos os subespaços F_n de H com dimensão n . Analogamente,

$$\mu_n = \inf_{F_n} \sup\{(Tx, x) : \|x\| = 1, x \in F_n\} \quad (1-14)$$

Prova: Denotaremos, novamente, o lado direito de (1-13) por Γ_n . Tomando F_n o subespaço gerado por ϕ_1, \dots, ϕ_n , temos que para todo $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \in F_n$ com $\|x\| = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$

$$(Tx, x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \mu_i \geq \mu_n, \quad (1-15)$$

pois $\mu_i \geq \mu_n, \forall i = 1, \dots, n-1$. Então $\Gamma_n \geq \mu_n$. Por outro lado, dado qualquer subespaço F_n de dimensão n , tome $x \in F_n$ tal que $x \perp \phi_1, \dots, \phi_{n-1}$. Pela Proposição 1.5 $(Tx, x) \leq \mu_n$. Assim,

$$\inf_{x \in F_n} (Tx, x) \leq \mu_n, \quad \forall F_n,$$

o que implica que $\Gamma_n \leq \mu_n$. □

Observação 1.11 *Os ínfimos e os supremos das caracterizações, obtidos nos resultados acima, são atingidos. Logo, podemos trocá-los por mínimos e máximos, respectivamente.*

1.2 Os Autovalores do Problema com Peso Indefinido: Formulação Variacional

Inicialmente, lembramos que a desigualdade de Poincaré afirma que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2} \leq c\|u\|_{H^1}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \quad (1-16)$$

onde, recordando, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $\partial\Omega$ é suave e $H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1}} \cap W^{1,2}(\Omega)$. Além disso, definimos

$$W^{1,2}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : u \in L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, N \right\}$$

chamado de espaço de Sobolev. Para maiores detalhes, veja o Apêndice A.1. Vamos utilizar $\|\cdot\|_2$ para denotar a norma no espaço de Lebesgue $L^2(\Omega)$.

Da desigualdade (1-16), obtemos que os produtos internos

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} [\nabla u \cdot \nabla v + uv] \, dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega),$$

são equivalentes em $H_0^1(\Omega)$. Então utilizaremos a seguinte norma em $H_0^1(\Omega)$:

$$\|u\|_{H_0^1} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Estudaremos o problema (1-1) na sua formulação fraca, dada por:

$$\begin{cases} (u, v) = \lambda \int_{\Omega} muv, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (1-17)$$

onde $(\cdot, \cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é o produto interno em $H_0^1(\Omega)$ dado por

$$(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Sabemos das imersões de Sobolev, que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, continuamente se $1 \leq q \leq 2^* = \frac{2N}{N-2}$, e compactamente se $1 \leq q < 2^*$. Então a expressão $\int_{\Omega} muv$ está bem definida $\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$. Das desigualdades de Hölder (A.6) e Poincaré (A.13), temos

$$\begin{aligned} |(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \right| \leq \int_{\Omega} |\nabla u \cdot \nabla v| \\ &\leq \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 \leq C \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \end{aligned}$$

Além disso,

$$(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \|u\|_{H^1}.$$

Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ fixado. Pela desigualdade de Hölder, o funcional linear dado por

$$v \mapsto \int_{\Omega} muv$$

é limitado em $H_0^1(\Omega)$. Pelo Teorema da Representação de Riesz A.3, existe um elemento em $H_0^1(\Omega)$, denotado por Tu , tal que

$$(Tu, v) = \int_{\Omega} muv \quad (1-18)$$

É fácil ver que $T : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ é linear e simétrico. Vamos provar agora que este operador é compacto. Com efeito, seja $\{u_n\}$ uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$. Passando para uma subsequência, pelos Teoremas de Imersão de Sobolev, temos que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ e $u_n \rightarrow u$ em L^s , para $1 \leq s < 2^*$. Assim, utilizando a desigualdade de Hölder generalizada (A-3) com $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} + \frac{1}{2^*} = 1$ temos

$$\begin{aligned} \|Tu_n - Tu\|^2 &= (T(u_n - u), Tu_n - Tu) = \int_{\Omega} m(u_n - u)(Tu_n - Tu) \\ &\leq \|m\|_r \|u_n - u\|_s \|Tu_n - Tu\|_{2^*} \end{aligned}$$

de onde obtemos que $\|Tu_n - Tu\| \leq c\|u_n - u\|_s$, ou seja, $Tu_n \rightarrow Tu$ em $H_0^1(\Omega)$. Portanto, T é compacto. Além disso, T é contínuo, pois

$$\begin{aligned} \|Tu\|^2 &= (Tu, Tu) \\ &= \int_{\Omega} muTu \\ &\leq C\|m\|_r \|u\| \|Tu\| \end{aligned}$$

Neste caso, conseguimos reescrever a nossa formulação variacional (1-17) do problema (1-1) da seguinte maneira:

$$\begin{cases} (u, v) = \lambda(Tu, v), v \in H_0^1 \\ u \in H_0^1 \end{cases} \quad (1-19)$$

Desta maneira, conseguimos aplicar a teoria desenvolvida acima, para operadores lineares, simétricos e compactos em um espaço de Hilbert H , para descrever as autofunções e autovalores do problema (1-1).

De (1-19) temos que $Tu = \frac{1}{\lambda}u$. Em outras palavras, os autovalores não nulos de (1-19) são os inversos dos autovalores do operador T . Assim, somos capazes de provar o seguinte resultado:

Proposição 1.12 *O problema (1-17) possui uma dupla sequência de autovalores*

$$\cdots \leq \lambda_{-2} \leq \lambda_{-1} < 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots,$$

cujas caracterizações variacionais são

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} &= \sup_{F_n} \inf \left\{ \int_{\Omega} m u^2 : \|u\| = 1, u \in F_n \right\} \\ \frac{1}{\lambda_{-n}} &= \inf_{F_n} \sup \left\{ \int_{\Omega} m u^2 : \|u\| = 1, u \in F_n \right\} \end{aligned} \quad (1-20)$$

onde F_n varia sobre todos os subespaços de dimensão n de \mathbf{H}_0^1 . As autofunções ϕ_n correspondentes aos autovalores citados acima são tais que

$$(\phi_n, v) = \lambda_n \int_{\Omega} m \phi_n v, \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1 \quad (1-21)$$

e

$$(\phi_n, \phi_n) = 1 ; \quad \frac{1}{\lambda_n} = \int_{\Omega} m \phi_n^2 \quad (1-22)$$

Pelos resultados anteriormente vistos, os autovalores (1-20) não se acumulam, exceto em $+\infty$ e $-\infty$. Precisamos garantir a existência de tais sequências de autovalores, ao qual é demonstrado no seguinte resultado.

Proposição 1.13 *Sejam $\Omega_+ = \{x \in \Omega : m(x) > 0\}$ e $\Omega_- = \{x \in \Omega : m(x) < 0\}$. Então*

1. *Se $|\Omega_+| = 0$, então não existe λ_n positivo;*
2. *Se $|\Omega_-| = 0$, então não existe λ_{-n} negativo;*
3. *Se $|\Omega_+| > 0$, então existe uma sequência de $\lambda_n \rightarrow +\infty$ positivos;*
4. *Se $|\Omega_-| > 0$, então existe uma sequência de $\lambda_{-n} \rightarrow -\infty$ negativos.*

onde $|\cdot|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto.

Prova:

item 1: Vamos supor que $\lambda_n > 0$ e seja $\phi_n \neq 0$ a autofunção associada, para cada n . Tomando $v = \phi_n$ em (1-21), obtemos que $(\phi_n, \phi_n) = \lambda_n \int_{\Omega} m \phi_n^2$. Por outro lado, temos que $(\phi_n, \phi_n) = \|\phi_n\|_{H^1}^2 > 0$. Como $\lambda_n > 0$, temos $\int_{\Omega} m \phi_n^2 > 0$, o que nos mostra que $|\Omega_+| > 0$, a qual é uma contradição.

item 2: Análogo ao *item 1*.

item 3: Sejam B_1, \dots, B_n bolas, duas a duas disjuntas, em Ω tais que $B_i \cap \Omega_+$ possuem medida positiva. Considere u_1, \dots, u_n funções de classe C_0^∞ com suporte nas correspondentes bolas e que $\int m u_i^2 > 0$, para cada $i = 1, \dots, n$. Podemos tomar tais funções da

seguinte maneira: seja $\epsilon > 0$ tal que $\|m\chi_{B_i \cap \Omega_+}\|_1 > \epsilon$, onde $\chi_{B_i \cap \Omega_+}$ designa a função característica em $B_i \cap \Omega_+$. Como $C_0^\infty(B_i)$ é denso em $L^{r'}(B_i)$, com $\frac{1}{r'} + \frac{1}{r} = 1$, $\epsilon > 0$, existe $v_i \in C_0^\infty(B_i)$ tal que

$$\|v_i - \chi_{B_i \cap \Omega_+}\|_{r'} < \frac{\epsilon}{\|m\|_r}, \quad v_i \geq 0.$$

Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\left| \int_{\Omega} m(v_i - \chi_{B_i \cap \Omega_+}) \right| \leq \|m\|_r \|v_i - \chi_{B_i \cap \Omega_+}\|_{r'} \leq \epsilon$$

assim,

$$\int_{\Omega} mv_i > \int_{\Omega} \chi_{B_i \cap \Omega_+} - \epsilon > 0.$$

Tomando $v_i = u_i^2$ e normalizando-os de tal forma que $\int_{\Omega} mu_i^2 = 1$, para $i = 1, \dots, n$, obtemos as funções desejadas. Falta mostrar que $\lambda_n > 0$. De fato, seja F_n o subespaço gerado pelas funções u_i (que são ortogonais duas a duas, já que as bolas são disjuntas).

Então para $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \in F_n$ temos

$$\int_{\Omega} mu^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \int_{\Omega} mu_i^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$$

e

$$(u, u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (u_i, u_i) \leq c \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$$

onde $c = \max_{i=1, \dots, n} a(u_i, u_i)$. Logo,

$$\int_{\Omega} mu^2 \geq \frac{1}{c} (u, u), \quad \forall u \in F_n$$

Tomando o ínfimo sobre $u \in F_n$, com $\|u\| = 1$ e depois o supremo sobre os subespaços de dimensão n de H_0^1 temos que, por (1-20), o resultado desejado.

item 4: Análogo ao item 3.

□

O próximo resultado nos mostra como $\lambda_n = \lambda_n(m)$ varia como uma função de m .

Proposição 1.14 *Sejam $m, \bar{m} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções em $L^r(\Omega)$, com $r > \frac{N}{2}$, tais que $m(x) \leq \bar{m}(x)$ q.t.p. em Ω . Suponha que, para um dado $n \in \mathbb{Z}^*$, os autovalores $\lambda_n(m)$ e*

$\lambda_n(\bar{m})$ existam. Então

$$\lambda_n(m) \geq \lambda_n(\bar{m}).$$

Além disso, se $m(x) < \bar{m}(x)$ em um subconjunto de medida positiva de Ω , então a desigualdade acima é estrita.

Prova: A demonstração é simples. Vamos verificar primeiramente para $n > 0$. Por hipótese, $m(x) \leq \bar{m}(x)$ q.t.p. em Ω . Multiplicando por $u^2 \geq 0$ a desigualdade anterior, integrando em Ω , tomando o ínfimo das $u \in F_n$, onde F_n é o subespaço de H_0^1 de dimensão n e depois o supremo de todos estes subespaços de dimensão n , temos a seguinte desigualdade:

$$\sup_{F_n} \inf_{u \in F_n} \int_{\Omega} u^2 m(x) \leq \sup_{F_n} \inf_{u \in F_n} \int_{\Omega} u^2 \bar{m}(x).$$

Consequentemente, temos que

$$\frac{1}{\lambda_n(m)} \leq \frac{1}{\lambda_n(\bar{m})}.$$

Para $n < 0$ a demonstração é análoga. □

O próximo resultado nos garante a continuidade da função $\lambda_n(m)$ na norma $L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$.

Proposição 1.15 $\lambda_n(m)$ é uma função contínua em m , na norma $L^{\frac{N}{2}}$. Isto é, se $\{m_j\}$ é uma seqüência em L^r que converge para um $m \in L^r$ na norma $L^{\frac{N}{2}}$, então

$$\lambda_n(m_j) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \lambda_n(m).$$

Observação 1.16 Observe que se $m(x) = 1$ e denotando por $\lambda_j(1) = \xi_j$ temos que, pela Proposição 1.13 item 3, não existem ξ_j com j negativo.

Neste momento, provaremos um resultado de caracterização do primeiro autovalor e da primeira autofunção de (1-19).

Teorema 1.17 (Krein-Rutman) Seja $m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função pertencente a $L^r(\Omega)$, com $r > \frac{N}{2}$, não necessariamente positiva. Suponha que $m > 0$ em um subconjunto de medida positiva de Ω . Então o primeiro autovalor positivo λ_1 de (1-19) é simples e ϕ_1 pode ser tomada positiva em Ω .

Prova (Teorema 1.17):

Nossa demonstração é dividida em 3 partes.

1. Seja $w \in H_0^1(\Omega)$ uma autofunção correspondente ao primeiro autovalor positivo λ_1 . Observe que não podemos afirmar que λ_1 é diferente dos λ_j 's e conseqüentemente w pode ser tomada como combinação linear dos ϕ_j 's. Em qualquer situação, w é uma solução de

$$(w, v) = \lambda_1 \int_{\Omega} m w v, \quad \forall v \in H_0^1.$$

Queremos provar que w não muda de sinal em Ω . Vamos supor, por contradição, que isto ocorre e defina

$$w^+(x) = \max(w(x), 0) \quad e \quad w^-(x) = \min(w(x), 0).$$

Sabemos que w^+ e w^- também estão em H_0^1 . Como $\int_{\Omega} m w^+ w^- dx = 0$, então

$$\int_{\Omega} m w^2 dx = \int_{\Omega} m (w^+)^2 dx + \int_{\Omega} m (w^-)^2 dx = \alpha_1 + \alpha_2$$

e

$$(w, w) = (w^+, w^+) + (w^-, w^-) = \beta_1 + \beta_2, \quad \beta_1, \beta_2 > 0.$$

Agora, de (1-21) e (1-22), temos que

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \quad ou \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2} < \max\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)$$

e

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{\int_{\Omega} m w^2 dx}{(w, w)} = \frac{\int_{\Omega} m (w^+)^2 dx + \int_{\Omega} m (w^-)^2 dx}{(w^+, w^+) + (w^-, w^-)}$$

o que nos implica que w^+ e w^- são autofunções associadas a λ_1 . Assim, devido ao Corolário 8.1 de [23], $w^+ > 0$ q.t.p. em Ω e $w^- < 0$ q.t.p. em Ω o que não pode ocorrer. De fato, supondo que $w^+ \neq 0$ e $w^- \neq 0$, considere o cone das funções positivas:

$$K := \{u \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}) : u(x) \geq 0 \text{ em } \Omega \text{ e } u(x) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

Facilmente vemos que K é fechado, convexo, não vazio e que $w^+, -w^- \in K$. Utilizando o Teorema A.5, obtemos que existe um único $u \in K$ tal que

$$(u, v - u) \geq \lambda_1 (Tu, v - u); \quad \forall v \in K \tag{1-23}$$

onde estamos tomando $\zeta = \frac{\lambda_1}{2} Tu$ na desigualdade (A-1). Desta desigualdade com $v \equiv 0$ obtemos

$$\frac{1}{2}(u, u) - \frac{\lambda_1}{2}(Tu, u) \leq 0 \tag{1-24}$$

Como (\cdot, \cdot) é simétrico, então

$$\min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}(v, v) - \frac{\lambda_1}{2}(Tv, v) \right\} \leq 0. \quad (1-25)$$

Por outro lado, $w^+ \in K$ e $\frac{1}{\lambda_1} = \frac{\int_{\Omega} m(w^+)^2 dx}{(w^+, w^+)}$ temos que

$$0 = \frac{1}{2}(w^+, w^+) - \frac{1}{\lambda_1}(Tw^+, w^+) \geq \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}(v, v) - \frac{1}{\lambda_1}(Tv, v) \right\}.$$

Portanto, o mínimo é atingido pelo $w^+ \in K$ que fica caracterizado por

$$0 = \frac{1}{2}(w^+, w^+) - \frac{1}{\lambda_1}(Tw^+, w^+) = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}(v, v) - \frac{1}{\lambda_1}(Tv, v) \right\}.$$

Analogamente, obtemos que $-w^- \in K$ fica caracterizado por

$$0 = \frac{1}{2}(w^-, w^-) - \frac{1}{\lambda_1}(Tw^-, w^-) = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}(v, v) - \frac{1}{\lambda_1}(Tv, v) \right\}.$$

Mas pela unicidade do Teorema A.5 concluímos que ou $w^+ \equiv 0$ ou $w^- \equiv 0$. No nosso caso, tomaremos $w^- \equiv 0$ e $w = w^+ \geq 0$ que é a autofunção associada ao autovalor λ_1 e pelo resultado de G. Stampacchia [23] temos que $w > 0$. Como $\phi_1 \geq 0$ temos pelos mesmos argumentos anteriores obtemos que ϕ_1 pode ser tomada estritamente positiva.

2. Agora provaremos que a multiplicidade geométrica de λ_1 é 1. Com efeito, sejam w_1 e w_2 autofunções correspondentes a λ_1 . Pelo passo anterior, sabemos que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, a autofunção $w_1 + \alpha w_2$ tem sinal definido. Então os conjuntos

$$A = \{\alpha : w_1 + \alpha w_2 \geq 0\} \text{ e } B = \{\alpha : w_1 + \alpha w_2 \leq 0\}$$

são não-vazios, fechados e $A \cup B = \mathbb{R}$. Logo, existe um $\bar{\alpha} \in A \cup B$ tal que $w_1 + \bar{\alpha} w_2 = 0$, ou seja, w_1 e w_2 são linearmente dependentes.

3. A multiplicidade algébrica de λ_1 é 1, isto é, λ_1 é um autovalor simples. Para isto, devemos provar que $N(I - \lambda_1 T)^2 = N(I - \lambda_1 T)$. Seja $u \in N(I - \lambda_1 T)^2$. Então pelo passo anterior, para algum $t \in \mathbb{R}$, tem-se que $u - \lambda_1 T u = t \phi_1$. Tomando o produto interno com ϕ_1 temos

$$\begin{aligned} t(\phi_1, \phi_1) &= (u - \lambda_1 T u, \phi_1) \\ &= (u, \phi_1) - \lambda_1 (T u, \phi_1) \\ &= (u, \phi_1) - (u, \lambda_1 T \phi_1) \\ &= (u, \phi_1) - (u, \phi_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De onde obtemos que $t = 0$. Portanto, $u \in N(I - \lambda_1 T)$.

□

1.3 O Teorema do Passo da Montanha, de Linking e um Teorema de Brezis-Nirenberg

Nesta seção abordaremos alguns resultados que são importantes para as demonstrações dos principais teoremas desta dissertação. Primeiramente, enunciaremos alguns teoremas do tipo min-max.

Seja \mathbf{H} um espaço de Hilbert. Considere as seguintes definições:

Definição 1.18 *Seja $\{u_n\}$ uma sequência em \mathbf{H} e $J : \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 .*

1. *Dizemos que $\{u_n\}$ é uma sequência de Palais-Smale para J , ou simplesmente (PS), em \mathbf{H} se $\{J(u_n)\}$ é limitado e $J'(u_n) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Se $J(u_n) \rightarrow c$, então a (PS)-sequência é denotada por $(PS)_c$ -sequência.*
2. *Similarmente, dizemos que uma sequência $\{u_n\}$ em \mathbf{H} é uma sequência de Cerami no nível $c \in \mathbb{R}$ se*

$$J(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \text{ e } (1 + \|u_n\|) \|J'(u_n)\|_{\mathbf{H}^*} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Definição 1.19 *Considere $J : \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 .*

1. *Dizemos que o funcional J satisfaz a condição (PS), respectivamente $(PS)_c$, em \mathbf{H} , se para toda (PS)-sequência, respectivamente $(PS)_c$ -sequência, possui uma subsequência convergente na norma.*
2. *Dizemos que J satisfaz a condição de Cerami se para toda sequência de Cerami no nível $c \in \mathbb{R}$ possui uma subsequência convergente na norma.*

No Teorema do Passo da Montanha usual definimos um funcional $J \in C^1(\mathbf{H}; \mathbb{R})$ que satisfaça duas condições descritas a seguir.

(PM-1) $J \in C^1(\mathbf{H}, \mathbb{R})$, $J(0) = 0$ e $\exists r, \rho > 0$ tais que

$$J(u) \geq \rho, \forall u \in S_r = \{u \in \mathbf{H} : \|u\| = r\}.$$

(PM-2) $\exists e \in \mathbf{H}$ com $\|e\| > r$ tal que $J(e) \leq 0$.

Dizemos que um funcional J que satisfaz as condições **(PM-1)** e **(PM-2)** possui uma geometria do Passo da Montanha. Além disso, denote por Γ o conjunto de todos os

caminhos contínuos que ligam $u = 0$ e $u = e$, isto é,

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], \mathbf{H}) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}. \quad (1-26)$$

Claramente $\Gamma \neq \emptyset$, pois $\gamma(t) = te$ é tal que $\gamma \in \Gamma$.

Utilizando que $\gamma \in C([0, 1], \mathbf{H})$ e S_r divide o espaço em duas componentes conexas, uma sendo limitada e a outra ilimitada. Então podemos considerar:

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max\{J(\gamma(t)) : t \in [0, 1]\} \geq \rho > 0. \quad (1-27)$$

onde ρ é obtido da condição **(PM-1)**.

O resultado a seguir garante que o valor c , dado por (1-27), é um valor crítico para o funcional J .

Teorema 1.20 (Passo da Montanha) *Suponha que $J \in C^1(\mathbf{H}; \mathbb{R})$ satisfaz as condições **(PM-1)**, **(PM-2)** e $(PS)_c$, onde c é dado por (1-27). Então c é um valor crítico não nulo para J , ou seja, existe $z \in \mathbf{H}$, não nulo, tal que $J(z) = c$ e $J'(z) = 0$.*

Prova: Veja [2], Capítulo 8, Seção 8.1. □

Um exemplo de aplicação do Teorema 1.20 é para obter uma solução positiva do seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1-28)$$

onde $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se comporta como $\lambda u + u^p$ quando $u \rightarrow 0^+$ e $u \rightarrow +\infty$. Assumimos também que $f(x, u) \equiv 0$ para $u < 0$, $f \in \mathbb{F}_p$ com $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ e que

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(x, u)}{u} = \lambda > 0, \quad q.t.p. \ x \in \Omega \quad (1-29)$$

e

$$\exists r > 0, \theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right) : 0 < F(x, u) \leq \theta u f(x, u) \quad \forall x \in \Omega, u \geq r. \quad (1-30)$$

Denotamos por $F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds$ e por \mathbb{F}_p a classe das funções Hölder contínuas que satisfazem a seguinte condição: existem $a_1 \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ e $a_2 > 0$ tais que

$$|f(x, u)| \leq a_1(x) + a_2|u|^p; \quad \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$$

onde $p < 2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}$.

A condição (1-30) é conhecida como condição de Ambrosetti-Rabinowitz.

Teorema 1.21 *Se $f \in \mathbb{F}_p$, com $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ e satisfaz a condição (1-29), com $\lambda < \lambda_1$, e (1-30), então o problema (1-28) possui uma solução positiva.*

Prova: Para maiores detalhes, veja [2], Capítulo 8, Seção 8.2 .

□

Vamos agora introduzir uma generalização da geometria e do Teorema do Passo da Montanha. Inicialmente, considere N uma variedade com fronteira ∂N em \mathbf{H} , C um subconjunto de \mathbf{H} e $\mathcal{H} = \{h \in C(N; \mathbf{H}) : h(u) = u, \forall u \in \partial N\}$.

Definição 1.22 *Dizemos que ∂N e C estão enlaçados se*

$$C \cap h(N) \neq \emptyset, \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

Observação 1.23 1. *Sejam X um espaço de Hilbert e \mathcal{L} um conjunto de índices.*

Entendemos por variedade em um espaço de Hilbert X de classe C^k , como um espaço topológico M em X no qual existe uma cobertura $\{U_i\}_{i \in \mathcal{L}}$ aberta de M e uma família de aplicações $\varphi_i : U_i \rightarrow X$ satisfazendo as seguintes condições:

- $V_i = \varphi_i(U_i)$ é um conjunto aberto em X e φ_i é um homeomorfismo de U_i em V_i ;
- $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ é de classe C^k .

Cada par (U_i, φ_i) é chamado de carta. As aplicações $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ são conhecidas como mudança de cartas e o par (V_i, φ_i^{-1}) é chamado parametrização local de M . Não iremos aprofundar nestes conceitos, pois não é o objetivo deste trabalho;

2. *Uma ilustração da Definição 1.22 é dada na Figura 2.1 abaixo:*

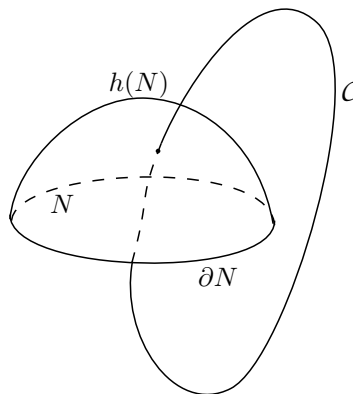


Figura 2.1

3. Observe que se tomarmos C como sendo a esfera $S_r = \{u \in \mathbf{H} : \|u\| = r\}$, N como o segmento $[0, e] = \{u = te : 0 \leq t \leq 1\}$, $\partial N = \{0, e\}$, com $e \in \mathbf{H}$ e $\mathcal{H} = \{h \in C(N; \mathbf{H}) : h(0) = 0, h(e) = e\}$, onde \mathcal{H} nada mais é do que o conjunto de caminhos Γ que definimos em (1-26) anteriormente, teremos que ∂N e C estão enlaçados. Em outras palavras, as hipóteses da geometria do Passo da Montanha satisfazem a Definição 1.22. Veja Figura 2.2

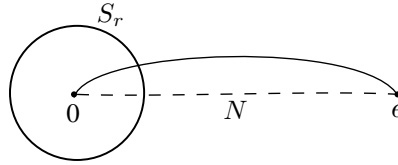


Figura 2.2

4. Vamos supor que \mathbf{H} seja escrito como soma direta de dois subespaços fechados V e W e que $\dim(V) = k < +\infty$. Tomando $C = W$ e $\partial N = \{v \in V : \|v\| = r\}$, onde N é a bola de raio r em V e os conjuntos $h(N)$, $h \in \mathcal{H}$, são as superfícies k dimensionais geradas por ∂N que é a esfera de raio r em V , então podemos mostrar, através da teoria do grau (ver [2], Capítulo 3), que ∂N e C estão enlaçados, veja Figura 2.3. Não entraremos em detalhes para verificação desta afirmação, pois não é o objetivo deste trabalho, mas este resultado nos será útil para o próximo teorema.

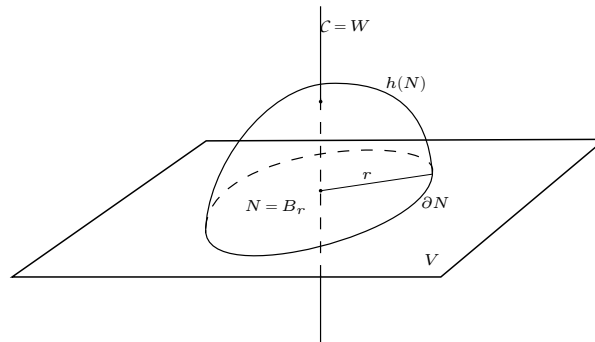


Figura 2.3

Sejam $J \in C^1(\mathbf{H}; \mathbb{R})$ e N, C dois subconjuntos de \mathbf{H} tais que ∂N e C estão enlaçados. Vamos assumir que:

(L-1) J é limitado inferiormente em C e defina

$$\rho := \inf_{u \in C} J(u) > -\infty;$$

(L-2) $\rho > \beta := \sup_{u \in \partial N} J(u)$.

As condições **(L-1)** e **(L-2)** para o funcional J são mais gerais que **(PM-1)** e **(PM-2)**. De fato, tomando $C = S_r$, $N = \{u = te : 0 \leq t \leq 1\}$ e $\mathcal{H} = \Gamma$ então as condições **(PM-1)** e **(PM-2)** são satisfeitas (veja observação 1.23 item 3).

Seja

$$c = \inf_{h \in \mathcal{H}} \sup_{u \in N} J(h(u)). \quad (1-31)$$

Este nível c é chamado de nível de *linking* de J correspondente a N e \mathcal{C} .

Lema 1.24 *Se ∂N e \mathcal{C} estão enlaçados e vale (L-1) para um funcional $J \in C^1(\mathbf{H}; \mathbb{R})$, então $c \geq \rho$.*

Prova: Pela Definição 1.22, temos que $\mathcal{C} \cap h(N) \neq \emptyset, \forall h \in \mathcal{H}$. Logo,

$$\sup_{u \in N} J(h(u)) \geq \inf_{u \in \mathcal{C} \cap h(N)} J(u) \geq \inf_{u \in \mathcal{C}} J(u) = \rho$$

Como a desigualdade acima vale para todo $h \in \mathcal{H}$, então $c \geq \rho$. □

Este lema nos fornece uma caracterização do nosso nível c . Já o próximo teorema garante que sob certas condições o funcional J possui um ponto crítico exatamente no nível c .

Teorema 1.25 (Linking) *Seja $\mathbf{H} = V \oplus W$, onde V e W são subespaços fechados e $0 < \dim(V) = k < +\infty$. Vamos supor que $J \in C^1(\mathbf{H}, \mathbb{R})$ satisfaz as seguintes condições:*

(L-3) *existe $\rho > 0$ tal que*

$$J(w) \geq \rho, \quad \forall w \in W,$$

(L-4) *existem $r > 0$ e $\beta < \rho$ tais que*

$$J(v) \leq \beta, \quad \forall v \in V, \quad \|v\| = r$$

e que $(PS)_c$ vale. Então J possui um ponto crítico z no nível c .

O Teorema 1.25 pode ser aplicado para verificar a existência de uma solução não trivial do problema (1-28), mas impondo condições menos restritivas do que $\lambda < \lambda_1$ em (1-29). Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.26 *Se $f \in \mathbb{F}_p$, com $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ e satisfaz as condições (1-29) e (1-30), para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$. Então o problema (1-28) possui uma solução não trivial.*

Prova: Para maiores detalhes desta demonstração veja [2], Capítulo 8, Seção 8.3.1. □

Encerraremos esta seção com o enunciado de um resultado devido a H. Brezis e L. Nirenberg [7], o qual é conhecido como Linking local na origem. Este resultado fornecerá suporte na demonstração de um dos resultados principais desta dissertação.

Teorema 1.27 (Brezis e Nirenberg) *Seja E um espaço de Banach com uma decomposição em soma direta $E = V_1 \oplus V_2$, onde $\dim(V_1) < +\infty$. Seja J um funcional de classe C^1 em E com $J(0) = 0$, satisfazendo (PS). Assuma que para algum $\delta_0 > 0$*

$$J(v) \geq 0, \quad \forall v \in V_2 \text{ com } \|v\| \leq \delta_0$$

e

$$J(v) \leq 0, \quad \forall v \in V_1 \text{ com } \|v\| \leq \delta_0.$$

Além disso, suponha que o funcional J é limitado inferiormente e $\inf_{v \in E} J(v) < 0$. Então J possui ao menos dois pontos críticos diferentes de zero.

Este teorema pode ser encontrado com maiores detalhes no artigo do S. Li e M. Willem [19], Seção 2.

1.4 Lemas de Redução

Nesta seção, enunciaremos dois lemas de redução que dão suporte para a demonstração dos resultados do Capítulo 3.

Lema 1.28 *Sejam X e Y subespaços fechado de um espaço de Hilbert H tal que $H = X \oplus Y$ e $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 . Se existe uma função crescente $\phi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ tal que $\phi(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$ e*

$$\langle J'(x+y) - J'(x+y_1), y - y_1 \rangle \geq \|y - y_1\| \phi(\|y - y_1\|), \quad (1-32)$$

para todo $x \in X$, $y, y_1 \in Y$, com $y \neq y_1$, então

1. existe uma função contínua $\theta : X \rightarrow Y$ tal que

$$J(x + \theta(x)) = \min\{J(x + y) : y \in Y\};$$

além disso, $\theta(x)$ é o único ponto crítico do funcional $J_X : Y \rightarrow \mathbb{R}$, dado por $J_X(y) = J(x + y)$.

2. a função $\bar{J} : X \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $x \mapsto J(x + \theta(x))$ é de classe C^1 e

$$\langle \bar{J}'(x), x_1 \rangle = \langle J'(x + r(x)), x_1 \rangle, \quad \forall x, x_1 \in X. \quad (1-33)$$

Observação 1.29 *Observe que na definição de (3-22) estamos utilizando o seguinte fato:*

$$\begin{aligned} -J(x + \theta(x)) &= -\min\{J(x + y) : y \in Y\} \\ &= \max\{-J(x + y) : y \in Y\}. \end{aligned}$$

Lema 1.30 *Nas hipóteses do Lema 1.28, se J é de classe C^2 , então \bar{J} é de classe C^2 .*

Podemos obter um resultado análogo ao Lema 1.28 para decomposição de H na soma direta de três subespaços fechados. Para maiores detalhes da demonstração dos lemas acima veja artigo de A. Castro [10].

O Problema de Dirichlet Assintoticamente Linear

2.1 Análise do Problema

Neste capítulo estudaremos o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2-1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ é um domínio limitado, $\partial\Omega$ suave e f satisfaz:

(A-1) $f \in C(\Omega \times \mathbb{R})$; $f(x, 0) = 0$, $\forall x \in \Omega$; $f(x, t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$, $x \in \Omega$ e

$$f(x, t) \equiv 0, \forall t \leq 0, x \in \Omega;$$

(A-2) $t \mapsto \frac{f(x, t)}{t}$ é não decrescente para cada $t \geq 0$ e q.t.p. $x \in \Omega$;

(A-3) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, t)}{t} = \mu$; $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(x, t)}{t} = l$ uniformemente q.t.p. $x \in \Omega$, onde $\mu \in [0, +\infty)$, $l \in (0, +\infty]$ são constantes e $\mu < \lambda_1 \leq l$ e λ_1 é o primeiro autovalor do Laplaciano $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Sabemos que encontrar soluções fracas não triviais para o problema (2-1) equivale a encontrar os pontos críticos não nulos do funcional de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ dado por

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx, \forall u \in H_0^1(\Omega) \quad (2-2)$$

onde

$$F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds; \quad x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Além disso, por **(A-1)** e pelo princípio do máximo forte (ver D. Gilbarg e N. Trudinger [15], capítulo 8, seção 8.7), um ponto crítico não nulo de J é de fato uma solução positiva do problema (2-1).

Observação 2.1 Para obter que o funcional (2-2) é de classe C^1 sugerimos ao leitor o livro de A. Ambrosetti e G. Prodi [3], Teorema 2.9, no qual a idéia consiste basicamente em verificar que o funcional

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} F(x, u) dx$$

é de classe C^1 .

Para encontrar um ponto crítico não trivial do funcional (2-2) utiliza-se o Teorema 1.20 (Teorema do Passo da Montanha). Neste caso, necessitamos de uma hipótese adicional sobre a função f , conhecida como condição de Ambrosetti-Rabinowitz, descrita em (1-30), isto é, existem $\theta < \frac{1}{2}$ e $r > 0$ tais que

$$0 < \frac{1}{\theta} F(x, t) \leq f(x, t)t, \quad q.t.p. \ x \in \Omega \text{ e } |t| \geq r. \quad (2-3)$$

Veja seção 1.3 para maiores detalhes. Quando aplicamos o Teorema do Passo da Montanha, a condição (2-3) desempenha um papel importante na verificação de que o funcional J , dado por (2-2), possui a geometria do Passo da Montanha **(PM-1)**, **(PM-2)** mostrando adicionalmente que a sequência $(PS)_c$ relacionada é limitada.

Estas ideias podem ser obtidas em A. Ambrosetti e A. Malchiodi [2], Capítulo 8, Seção 8.2 e nos artigos de A. Ambrosetti e P.H. Rabinowitz [4], D.G. Costa e C.A. Magalhães [11], Schechter [21] e M. Willem [27]. Mas observe que neste trabalho estamos supondo que f é assintoticamente linear no infinito. Consequentemente, assumindo (2-3), temos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(x, t)}{t^2} = +\infty, \quad x \in \Omega.$$

Neste caso, dizemos que f é superlinear no infinito. De fato, denotando por $\xi = \frac{1}{\theta}$ e da condição (2-3) obtemos que para todo $t, t_0 \geq M$,

$$\int_{t_0}^t \frac{f(x, s)}{F(x, s)} ds \geq \int_{t_0}^t \frac{\xi}{s} ds.$$

De onde temos que

$$|F(x, t)| \geq \left[\frac{|F(x, t_0)|}{|t_0|^\xi} \right] |t|^\xi.$$

Primeiramente, desta desigualdade, obtemos que $F(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$, pois $\xi > 2$. Então, dividindo por t^2 a última desigualdade

$$\frac{F(x, t)}{t^2} \geq C(t_0, \xi) |t|^{\xi-2},$$

onde $C(t_0, \xi) = \frac{|F(x, t_0)|}{|t_0|^\xi}$. Então supondo a condição (2-3) segue que f é superlinear no infinito.

O interesse em estudar problemas que são assintoticamente linear aparecem em alguns problemas físicos como campos eletromagnéticos (ver Stuart [24, 25]), ondas viajantes (ver Volterra [26]), ondas de choque e reação de difusão (ver Smoller [22]). No artigo de J. Busca e B. Sirakov [8] encontram-se alguns exemplos na área da matemática financeira, teoria da probabilidade e biomatemática.

Neste capítulo, provaremos através de uma versão simples do Teorema do Passo da Montanha, alguns resultados de existência de soluções para o problema (2-1) assumindo as condições (A-1), (A-2) e (A-3).

2.2 Problema assintoticamente linear: caso não-ressonante

Considere o seguinte problema de Dirichlet assintoticamente linear:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2-4)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ é um domínio limitado, $\partial\Omega$ suave, $f(x, 0) = 0$, $f \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$ e f satisfaz o seguinte limite

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{f(x, t)}{t} = l \in \mathbb{R}. \quad (2-5)$$

Observação 2.2 Como $f \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$ e supondo que $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{f(x, t)}{t} = l < \infty$ temos que

$$|f(x, t)| \leq C_2(1 + |t|),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$ e para alguma constante $C_2 > 0$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(x, t)| \leq (l + \varepsilon)|t|, \quad \forall |t| \geq M_\varepsilon \text{ e } x \in \Omega. \quad (2-6)$$

Por outro lado, como $f \in C^1$, então existem um $\delta > 0$ e uma constante $C_\varepsilon > 0$ tais que

$$\left| \frac{f(x, t)}{t} \right| \leq (|f'(x, 0)| + \varepsilon), \quad \forall |t| \leq \delta \text{ e } x \in \Omega, \quad (2-7)$$

e

$$|f(x, t)| \leq C_\varepsilon \quad \forall \delta \leq |t| \leq M_\varepsilon \text{ e } x \in \Omega, \quad (2-8)$$

pois $\lim_{|t| \rightarrow 0} \frac{f(x,t)}{t} = f'(x,0)$ e os intervalos $[-M_\varepsilon, -\delta]$ e $[\delta, M_\varepsilon]$ são compactos, respectivamente. De (2-6), (2-7) e (2-8) obtemos

$$|f(x,t)| \leq C_2(1 + |t|),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \Omega$.

Vamos verificar que se $\lambda_k < l < \lambda_{k+1}$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então o funcional associado ao problema (2-4)

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(x,u) dx, \quad \forall u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad (2-9)$$

onde $F(x,u) = \int_0^u f(x,t) dt$, satisfaz $(PS)_c$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

De fato, dado uma $(PS)_c$ -sequência $\{u_n\}$ para J , temos que $\{u_n\}$ é limitada. Com efeito, se $\{u_n\}$ é ilimitada, obtemos que

$$\begin{aligned} J(u_n) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \\ J'(u_n) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{e} \\ \|u_n\| &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty. \end{aligned} \quad (2-10)$$

Defina

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Temos que $\|v_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, a menos de subsequência, existe $v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tal que

- 1) $v_n \rightharpoonup v$; em $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$,
- 2) $v_n \rightarrow v$; em $L^p(\Omega)$; $1 \leq p < 2^*$,
- 3) $v_n(x) \rightarrow v(x)$; q.t.p. em Ω ,
- 4) $|v_n(x)| \leq h(x)$; para alguma $h \in L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < 2^*$.

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\langle J'(u_n), \varphi \rangle}{\|u_n\|} &= \frac{1}{\|u_n\|} \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla \varphi dx - \frac{1}{\|u_n\|} \int_{\Omega} f(x, u_n) \varphi dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla v_n \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} \varphi dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla v_n \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{u_n} v_n \varphi dx, \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Tomando o limite, obtemos

$$0 = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{u_n} v_n \varphi \, dx.$$

Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{x \in \Omega : |v(x)| \neq 0\}$$

e

$$B = \Omega \setminus A = \{x \in \Omega : v(x) = 0\}.$$

Se $x \in A$, então dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(x)$ tal que $|v_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n \geq n_0$. De fato,

$$|v_n(x)| \geq |v_n(x) - v(x)| - |v(x)| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

Assim, temos

$$|u_n(x)| = |v_n(x)| \|u_n\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \|u_n\| \rightarrow +\infty. \quad (2-11)$$

Além disso, conforme a observação (2.2), existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x, u_n)}{u_n} v_n \varphi \right| &= \frac{|f(x, u_n)|}{|u_n|} |v_n \varphi| \\ &\leq C_1 |v_n \varphi| \\ &\leq C_1 |h \varphi|, \end{aligned}$$

onde h é obtido de 4) acima. Pela desigualdade de Hölder, obtemos que $h\varphi \in L^1(\Omega)$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada (ver [17], Capítulo 15, Teorema 15.33) temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \frac{f(x, u_n)}{u_n} v_n \varphi \, dx = \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, u_n)}{u_n} v_n \varphi \, dx = \int_A l v(x) \varphi(x) \, dx.$$

Por outro lado, se $x \in B$, então vemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \left| \frac{f(x, u_n)}{u_n} v_n \varphi \right| dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \left| \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} \varphi \right| dx \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \frac{C_2(1 + |u_n|)}{\|u_n\|} |\varphi| dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{C_2}{\|u_n\|} \|\varphi\|_1 + C_2 \int_B \frac{|u_n|}{\|u_n\|} |\varphi| dx \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} C_2 \int_B |v_n| |\varphi| dx. \end{aligned}$$

Aqui usamos (2-5) e $f \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$, obtendo uma constante $C_2 > 0$ (veja Observação 2.2) tal que

$$|f(x, u(x))| \leq C_2(1 + |u(x)|), \quad x \in \Omega; \quad u \in \mathbb{R}.$$

Observe que existe $h \in L^2(\Omega)$ tal que

$$|v_n \varphi| \leq h|\varphi|.$$

Novamente, pela desigualdade de Hölder temos que $h\varphi \in L^1(\Omega)$ e pelo Teorema da Convergência Dominada obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B |v_n| |\varphi| \, dx \int_B \lim_{n \rightarrow \infty} |v_n| |\varphi| \, dx = 0.$$

Assim, temos que

$$0 = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx - l \int_{\Omega} v \varphi \, dx.$$

Em outras palavras, v é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2-12)$$

o que é um absurdo, pois $\lambda_k < l < \lambda_{k+1}$, para algum $k \in \mathbb{N}$.

Agora, basta verificar que $v \neq 0$. De fato, pela Proposição A.8 temos

$$\|v\| \leq \liminf \|v_n\| = 1.$$

Então, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\langle J'(u_n), u_n \rangle}{\|u_n\|^2} &= \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 \, dx - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|^2} u_n \, dx \\ &= 1 - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|^2} u_n \, dx. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, segue que

$$0 = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|^2} u_n \, dx. \quad (2-13)$$

Como $\{v_n\}$ é uma sequência limitada, do item 4 acima, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} \frac{u_n}{\|u_n\|} \right| &\leq \frac{C_2}{\|u_n\|} |v_n| + C_2 |v_n|^2 \\ &\leq \frac{C_2}{\|u_n\|} |h_1| + C_2 |h_2|^2, \end{aligned}$$

para alguma $h_1 \in L^1(\Omega)$ e $h_2 \in L^2(\Omega)$. Assim,

$$\frac{C_2}{\|u_n\|} |h_1| + C_2 |h_2|^2 \in L^1(\Omega)$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada temos que

$$\int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|^2} u_n \, dx.$$

Agora, se $v = 0$ então

$$\left| \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} \frac{u_n}{\|u_n\|} \right| \leq \frac{C_2}{\|u_n\|} |v_n| + C_2 |v_n|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

pois $v_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v(x) = 0$ q.t.p. em Ω . O que é um absurdo, de (2-13). Portanto, $v \neq 0$.

Resumindo, verificamos que o funcional J satisfaz a condição $(PS)_c$. Mas necessitamos verificar que J possui a seguinte geometria

1. $J(u) \rightarrow -\infty$, quando $\|u\| \rightarrow +\infty$, onde $u \in \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}\} := V_1$;
2. $J(u) \rightarrow +\infty$, quando $\|u\| \rightarrow +\infty$, onde $u \in \text{span}\{\varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots\} := V_2$.

e concluir pelo Teorema 1.25 que J possui um ponto crítico no nível c . Com efeito, pela regra de L'Hopital segue que

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{2F(x, t)}{t^2} = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{f(x, t)}{t} = l,$$

então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$\left| \frac{2F(x, t)}{t^2} - l \right| < \varepsilon; \quad \forall |t| \geq \delta_\varepsilon.$$

Assim, obtemos

$$\frac{l - \varepsilon}{2} t^2 \leq F(x, t) \leq \frac{l + \varepsilon}{2} t^2; \quad \forall |t| \geq \delta_\varepsilon. \quad (2-14)$$

Mas o intervalo $[-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon]$ é um compacto, então existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$F(x, t) \geq \frac{l - \varepsilon}{2} t^2 - C_\varepsilon; \quad \forall t \in [-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon]. \quad (2-15)$$

Logo, pelas desigualdades (2-15) e (A-8) temos que para todo $u \in V_1$,

$$\begin{aligned} J(u) &\leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \left(\frac{l-\varepsilon}{2}\right)\|u\|_2^2 + C_\varepsilon|\Omega| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{l-\varepsilon}{\lambda_k}\right)\|u\|^2 + C_\varepsilon|\Omega| \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_k - (l-\varepsilon)}{\lambda_k}\right)\|u\|^2 + C_\varepsilon|\Omega| \xrightarrow{\|u\| \rightarrow +\infty} -\infty, \end{aligned}$$

pois para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno temos que $\lambda_k < l - \varepsilon$.

De modo análogo, temos que

$$F(x, t) \leq \frac{l+\varepsilon}{2}t^2 + C_\varepsilon; \quad \forall t \in [-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon]. \quad (2-16)$$

Então de (A-9) e (2-16), dado $u \in V_2$ obtemos:

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \left(\frac{l+\varepsilon}{2}\right)\|u\|_2^2 - C_\varepsilon|\Omega| \\ &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{l+\varepsilon}{\lambda_{k+1}}\right)\|u\|^2 - C_\varepsilon|\Omega| \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_{k+1} - (l+\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}\right)\|u\|^2 - C_\varepsilon|\Omega| \xrightarrow{\|u\| \rightarrow +\infty} +\infty, \end{aligned}$$

pois para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno temos que $l + \varepsilon < \lambda_{k+1}$. Portanto, J possui um ponto crítico não trivial z no nível c , ou seja, $J'(z) = 0$.

Neste momento estudaremos o seguinte caso:

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{f(x, t)}{t} = l < \lambda_1 \quad (2-17)$$

temos que J também possui um ponto crítico não trivial dado por minimização. De fato, dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, de (2-16) temos que

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1 - (l+\varepsilon)}{\lambda_1}\right)\|u\|^2 - C_\varepsilon|\Omega| \xrightarrow{\|u\| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Em outras palavras, J é coercivo.

Agora, se J é coercivo então dada uma $(PS)_c$ -sequência $\{u_n\}$ para J obtemos que $\{u_n\}$ é limitada. Com efeito, suponha que $\{u_n\}$ é ilimitada, então temos que

$$\begin{aligned} J(u_n) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \\ J'(u_n) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ e} \\ \|u_n\| &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty. \end{aligned}$$

Assim temos uma contradição, pela coercividade. Utilizando o mesmo argumento verificamos que J é limitado inferiormente.

Sejam

$$\inf_{u \in H_0^1(\Omega)} J(u) = \alpha > -\infty \text{ e} \quad (2-18)$$

$\{v_n\}$ em $H_0^1(\Omega)$ tal que

$$J(v_n) \rightarrow \alpha.$$

Pela coercividade, temos que para algum $C > 0$, $\|v_n\| \leq C$. Então, a menos de subsequência, existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

- 1) $v_n \rightharpoonup v$; em $H_0^1(\Omega)$,
- 2) $v_n \rightarrow v$; em $L^p(\Omega)$; $1 \leq p < 2^*$,
- 3) $v_n(x) \rightarrow v(x)$; q.t.p. de Ω ,
- 4) $|v_n(x)| \leq h(x)$; para alguma $h \in L^p(\Omega)$.

Então, podemos provar que

$$\begin{aligned} \alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf J(v_n) &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf \|v_n\|^2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf \left(- \int_{\Omega} F(x, v_n) dx \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \|v\|^2 - \int_{\Omega} F(x, v) dx \\ &= J(v), \end{aligned}$$

pois o operador $\Phi(w) = \int_{\Omega} F(x, w) dx$ é fracamente contínuo, para todo $w \in H_0^1(\Omega)$ (veja (2-37) na demonstração do Teorema 2.3 item 2). Pela definição de ínfimo, temos que $\alpha = J(v)$, ou seja, o ínfimo é atingido. Assim, existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\inf_{u \in H_0^1(\Omega)} J(u) = J(v).$$

De [2], Teorema 5.5, obtemos que

$$\langle J'(v), h \rangle = 0$$

para todo $h \in H_0^1(\Omega)$, ou seja, J possui um ponto crítico v no nível α .

2.3 Resultados de existência para o problema (2-1)

Considere $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots$ os autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ e $\varphi_1 > 0$ a primeira autofunção associada à λ_1 . Temos então o nosso principal resultado deste capítulo:

Teorema 2.3 *Se as condições (A-1), (A-2) e (A-3) valem, então*

1. o problema (2-1) não possui solução positiva se $l < \lambda_1$;
2. se $\lambda_1 < l < +\infty$ então o problema (2-1) possui uma solução positiva;
3. se $l = \lambda_1$ então o problema (2-1) possui uma solução positiva $u \in H_0^1(\Omega)$ se, e somente se, existe uma constante $c > 0$ tal que $u(x) = c\varphi_1(x)$ e $f(x, u) = \lambda_1 u(x)$.

Corolário 2.4 *Suponha que as condições (A-1), (A-2) e (A-3) são satisfeitas. Se $l = +\infty$ e $f(x, t)$ é subcrítica, isto é, para $p \in (1, \frac{N+2}{N-2})$ se $N \geq 3$ ou para $p \in (1, +\infty)$ se $N = 1, 2$ temos que*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x, t)}{t^p} = 0 \quad (2-19)$$

uniformemente q.t.p. em Ω , então o problema (2-1) possui uma solução positiva.

A demonstração do item 1 não requer grandes dificuldades. Mas os itens 2 e 3 exigem alguns requisitos. A prova do Corolário 2.4 é uma consequência do Teorema 2.3 o qual será verificado no final da seção.

Neste momento consideraremos o seguinte resultado referente à geometria do Passo da Montanha.

Proposição 2.5 (Costa – Miyagaki) *Seja E um espaço de Banach real e suponha que $J \in C^1(E; \mathbb{R})$ satisfaça a condição*

$$\max\{J(0), J(u_1)\} \leq \alpha < \beta \leq \inf_{\|u\|=\rho} J(u)$$

para alguns $\alpha < \beta$, $\rho > 0$ e $u_1 \in E$ com $\|u_1\| > \rho$. Seja $c \geq \beta$ caracterizado por

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} J(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], E) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = u_1\}$. Então existe uma sequência $\{u_n\}$ em E tal que

$$J(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \geq \beta \text{ e } (1 + \|u_n\|) \|J'(u_n)\|_{E^*} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

A Proposição 2.5 garante a existência de uma sequência de Cerami conforme Definição 1.18, item 2 e pode ser obtida no trabalho do D. G. Costa e O. H. Miyagaki [12], Teorema 1.

Demonstraremos, agora, dois lemas técnicos auxiliares na demonstração do Teorema 2.3.

Observação 2.6 *A partir de agora, estamos utilizando a seguinte notação $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathbf{H}_0^1}$ para fazer referência à norma em $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ e $\|\cdot\|_p$ para a norma nos espaços $L^p(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$.*

Lema 2.7 *Seja $\varphi_1 > 0$ a primeira autofunção normalizada associada ao primeiro autovalor λ_1 do problema $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Suponha (A-1) e (A-3), então temos:*

1. *existem $\rho, \beta > 0$ tais que $J(u) \geq \beta, \forall u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = \rho$;*
2. *$J(t\varphi_1) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$ se $l \in (\lambda_1, +\infty]$.*

Prova: Seja $\epsilon > 0$ dado. Vamos verificar que se $l \in (\lambda_1, +\infty)$ ou se $l = +\infty$, então existem $A = A(\epsilon) > 0, B = B(\epsilon)$ e C tais que

$$F(x, t) \leq \frac{1}{2}(\mu + \epsilon)t^2 + At^{p+1}, \quad (2-20)$$

e

$$F(x, t) \geq \begin{cases} \frac{1}{2}(l - \epsilon)t^2 - B; & \text{se } l \in (\lambda_1, +\infty) \\ \lambda_1 t^2 - C; & \text{se } l = +\infty, \end{cases} \quad (2-21)$$

para todo $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ e $p \in (1, \frac{N+2}{N-2})$ se $N \geq 3$ ou $p \in (1, +\infty)$ se $N = 1, 2$. De fato, como

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, t)}{t} = \mu,$$

existe um $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para todo $|t| < \delta$ e $x \in \Omega$ tem-se que

$$\left| \frac{f(x, t)}{t} - \mu \right| \leq \epsilon,$$

a qual implica

$$-t(\epsilon + \mu) \leq f(x, t) \leq t(\epsilon + \mu).$$

Integrando com relação a t obtemos que para todo $|t| < \delta$ e $x \in \Omega$

$$F(x, t) \leq \frac{1}{2}(\mu + \epsilon)t^2. \quad (2-22)$$

Por outro lado, sabemos que

$$\left| \frac{F(x, t)}{|t|^{p+1}} \right| = \left| \frac{F(x, t)}{t^2} \cdot \frac{t^2}{|t|^{p+1}} \right| \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} 0. \quad (2-23)$$

Pois, utilizando a regra de L'Hopital segue que

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{2F(x, t)}{t^2} = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{f(x, t)}{t} = l < +\infty$$

Além disso, como $p > 2$, temos que

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{t^2}{|t|^{p+1}} = 0.$$

Assim, de (2-23) existe $M = M(\epsilon) > 0$ tal que para todo $|t| > M$ e $x \in \Omega$ tem-se

$$-\epsilon|t|^{p+1} < F(x, t) < \epsilon|t|^{p+1}. \quad (2-24)$$

Mas observe que o intervalo $M(\epsilon) \geq |t| \geq \delta$ é um intervalo compacto e a função $\frac{F(x, t)}{t^{p+1}}$ é contínua neste intervalo, logo existe uma constante $c > 0$ tal que para todo $M(\epsilon) \geq |t| \geq \delta$ e $x \in \Omega$, vale

$$\sup \left| \frac{F(x, t)}{|t|^{p+1}} \right| \leq c < +\infty. \quad (2-25)$$

Portanto, das desigualdades (2-22), (2-24) e (2-25) obtemos a desigualdade (2-20).

Analogamente, obtemos que se $l \in (\lambda_1, +\infty)$ então

$$F(x, t) \geq \frac{1}{2}(l - \epsilon)t^2 - B,$$

para todo $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Agora, se $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{f(x, t)}{t} = +\infty$, então existe $\bar{\delta} = \bar{\delta}(\epsilon) > 0$ tal que

$$\frac{f(x, t)}{t} \geq \epsilon, \quad \forall |t| > \bar{\delta} \text{ e } x \in \Omega.$$

O intervalo $[-\bar{\delta}, \bar{\delta}]$ é compacto e $F(x, t)$ é contínua neste intervalo, portanto existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{t \in [-\bar{\delta}, \bar{\delta}]} |F(x, t)| \leq C < +\infty.$$

Tomando $\epsilon = \lambda_1$ e destas considerações acima, obtemos que se $l = +\infty$, então vale a segunda desigualdade em (2-21).

Considere

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx.$$

De (2-20) obtemos

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}(\mu + \epsilon) \int_{\Omega} u^2 dx - A \int_{\Omega} u^{p+1} dx \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}(\mu + \epsilon)\|u\|_2^2 - A\|u\|_{p+1}^{p+1}. \end{aligned}$$

Como $p + 1 < 2^* = \frac{N+2}{N-2} + 1$, então $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}$ (ver Apêndice A, Teorema A.11). Conseqüentemente, existe uma constante $a_1 > 0$ tal que $\|u\|_{p+1}^{p+1} \leq a_1\|u\|^{p+1}$ e pela Desigualdade Variacional (A-7) obtemos:

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}(\mu + \epsilon) \frac{\|u\|^2}{\lambda_1} - Aa_1\|u\|^{p+1} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu + \epsilon}{\lambda_1}\right) \|u\|^2 - Aa_1\|u\|^{p+1}. \end{aligned}$$

Observe que $\left(1 - \frac{\mu + \epsilon}{\lambda_1}\right) > 0$, pois $\mu + \epsilon < \lambda_1$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $p + 1 > 2$. Então tomando $\|u\| = \rho$ suficientemente pequeno na última desigualdade, teremos que

$$J(u) \geq \beta > 0,$$

o que conclui a primeira parte do lema.

Seja $l \in (\lambda_1, +\infty)$. Tomando $\epsilon > 0$ de tal forma que $\lambda_1 < l - \epsilon$ e da primeira desigualdade em (2-21) temos

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\Omega} F(x, u) dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}(l - \epsilon) \int_{\Omega} u^2 dx + B \int_{\Omega} dx \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}(l - \epsilon)\|u\|_2^2 + B|\Omega|, \end{aligned}$$

onde $|\Omega|$ denota a medida de Ω . Tomando $u = t\varphi_1$, com $\|\varphi_1\| = 1$ e utilizando que

$$\|\varphi_1\|^2 = \lambda_1\|\varphi_1\|_2^2,$$

temos que

$$\begin{aligned} J(t\varphi_1) &\leq \frac{1}{2}t^2\|\varphi_1\|^2 - \frac{1}{2}(l - \epsilon)t^2\|\varphi_1\|_2^2 + B|\Omega| \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{l - \epsilon}{\lambda_1}\right) t^2 + B|\Omega| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty, \end{aligned}$$

onde usamos que $(l - \epsilon)/\lambda_1 > 1$.

Por outro lado, se $l = +\infty$, da segunda desigualdade (2-21), obtemos que

$$J(t\varphi_1) \leq -\frac{1}{2}t^2 + C|\Omega| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty.$$

□

Lema 2.8 *Considere o funcional J dado por (2-2). Dada uma seqüência $\{u_n\}$ em $H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$\langle J'(u_n), u_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad (2-26)$$

então existe uma subsequência, ao qual denotaremos ainda por $\{u_n\}$, tal que

$$J(tu_n) \leq \frac{(1+t^2)}{2n} + J(u_n), \quad (2-27)$$

para todo $t > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Prova: Do limite (2-26), dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ tem-se que

$$|\langle J'(u_n), u_n \rangle| < \epsilon$$

Tomando $\epsilon = \frac{1}{n}$ e usando que

$$\langle J'(u), u \rangle = \|u\|^2 - \int_{\Omega} f(x, u)u \, dx,$$

obtemos que

$$-\frac{1}{n} < \|u_n\|^2 - \int_{\Omega} f(x, u_n)u_n \, dx < \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Primeiramente, vamos provar que para qualquer $t > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ temos

$$J(tu_n) \leq \frac{t^2}{2n} + \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} f(x, u_n)u_n - F(x, u_n) \right\} dx. \quad (2-28)$$

Sejam $x \in \Omega$ fixado, $t > 0$ qualquer. Definimos

$$h(x, t) := \frac{1}{2}t^2 f(x, u_n)u_n - F(x, tu_n).$$

Derivando h com relação a t , segue que

$$\begin{aligned} h'(t) &= t f(x, u_n)u_n - u_n f(x, tu_n) \\ &= tu_n \left\{ f(x, u_n) - \frac{f(x, tu_n)}{t} \right\}. \end{aligned}$$

Para $t \leq 1$ temos, por (A-2), que

$$f(x, u_n) - \frac{f(x, tu_n)}{t} \geq 0$$

e para $t \geq 1$ que

$$f(x, u_n) - \frac{f(x, tu_n)}{t} \leq 0.$$

Assim, temos que

$$h'(t) = \begin{cases} \geq 0 & \text{se } 0 < t \leq 1 \\ \leq 0 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

Como $h'(1) = 0$, obtemos que $h(t) \leq h(1)$, para todo $t > 0$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} J(tu_n) &= \frac{1}{2}t^2\|u_n\|^2 - \int_{\Omega} F(x, tu_n) dx \\ &< \frac{1}{2}t^2 \left\{ \frac{1}{n} + \int_{\Omega} f(x, u_n)u_n dx \right\} - \int_{\Omega} F(x, tu_n) dx \\ &= \frac{t^2}{2n} + \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2}t^2 f(x, u_n)u_n - F(x, tu_n) \right\} dx \\ &= \frac{t^2}{2n} + \int_{\Omega} h(x, t) dx \\ &\leq \frac{t^2}{2n} + \int_{\Omega} h(x, 1) dx \\ &= \frac{t^2}{2n} + \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2}f(x, u_n)u_n - F(x, u_n) \right\} dx, \end{aligned}$$

a qual demonstra a desigualdade (2-28).

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} J(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{n} + \int_{\Omega} f(x, u_n)u_n dx \right\} - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx \\ &= -\frac{1}{2n} + \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2}f(x, u_n)u_n - F(x, u_n) \right\} dx. \end{aligned}$$

Consequentemente, temos

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2}f(x, u_n)u_n - F(x, u_n) \right\} dx \leq \frac{1}{2n} + J(u_n). \quad (2-29)$$

Portanto, das desigualdades (2-28) e (2-29), concluímos que

$$\begin{aligned} J(tu_n) &\leq \frac{t^2}{2n} + \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2}f(x, u_n)u_n - F(x, u_n) \right\} dx \\ &\leq \frac{t^2}{2n} + \frac{1}{2n} + J(u_n) \\ &= \frac{(1+t^2)}{2n} + J(u_n), \end{aligned}$$

para todo $t > 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

□

Vamos à demonstração do Teorema 2.3.

Prova (Teorema 2.3):

item 1. Vamos supor, por contradição, que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca positiva do problema (2-1), isto é, u satisfaz

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f(x, u) v \, dx, \quad \forall v \in h.$$

Fazendo $v = u$ e utilizando as hipóteses **(A-2)** e **(A-3)**, obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = \int_{\Omega} f(x, u) u \, dx = \int_{\Omega} \frac{f(x, u)}{u} u^2 \, dx \leq l \int_{\Omega} u^2 \, dx$$

a qual implica que

$$\|u\|^2 \leq l \|u\|_2^2.$$

Mas da desigualdade variacional (A-7) tem-se que

$$\lambda_1 \|u\|_2^2 \leq \|u\|^2 \leq l \|u\|_2^2,$$

o que é um absurdo, pois estamos supondo que $l < \lambda_1$.

item 2. Como $l \in (\lambda_1, +\infty)$, pelo Lema 2.7, existe $t_0 > 0$ suficientemente grande tal que $J(t_0 \varphi_1) < 0$. Definimos

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], H_0^1(\Omega)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = t_0 \varphi_1\}, \quad (2-30)$$

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{x \in [0, 1]} J(\gamma(x)). \quad (2-31)$$

Do Lema 2.7 novamente, verificamos que nosso funcional J satisfaz as hipóteses da Proposição 2.5, ou seja, existem $\alpha < \beta$ e $\rho > 0$ com $\|t_0 \varphi_1\| > \rho$, tais que

$$\max\{J(0), J(t_0 \varphi_1)\} \leq \alpha < \beta \leq \inf_{\|u\|=\rho} J(u),$$

e $c \geq \beta$. Então existe uma sequência $\{u_n\}$ em $H_0^1(\Omega)$ tal que

$$J(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \geq \beta \quad e \quad (1 + \|u_n\|) \|J'(u_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Assim, podemos escrever $J(u_n) = c + o_n(1)$. Mais especificamente

$$o_n(1) = \langle J'(u_n), u_n \rangle = \|u_n\|^2 - \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n \, dx,$$

onde observamos que

$$0 \leq |\langle J'(u_n), u_n \rangle| \leq \|J'(u_n)\| \|u_n\| \leq (1 + \|u_n\|) \|J'(u_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Afirmamos que a sequência de Cerami obtida acima é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Sendo isso verdade, conforme o Teorema de Imersão de Sobolev A.11, a menos de subsequência, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u; && \text{em } H_0^1(\Omega) \\ u_n &\rightarrow u; && \text{em } L^p(\Omega); \forall 1 \leq p < 2^*. \end{aligned}$$

Todavia a função f é subcrítica, de modo que o operador $K : H_0^1(\Omega) \rightarrow (H_0^1(\Omega))^*$, dado por

$$\langle K(u), \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x, u) \varphi \, dx,$$

é compacto (veja [2] capítulo 1, Teorema 1.8).

Note que,

$$\langle J'(u_n), \varphi \rangle = (u_n, \varphi)_{H_0^1} - \int_{\Omega} f(x, u_n) \varphi \, dx. \quad (2-32)$$

Por outro lado, usando $\{u_n\}$ é uma sequência de Cerami no nível c , então

$$(1 + \|u_n\|) \|J'(u_n)\| \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Independentemente, se nossa sequência é limitada ou ilimitada, teremos que $\|J'(u_n)\| \rightarrow 0$.

Deste modo (2-32) implica que $\langle J'(u_n), \varphi \rangle \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Mas a Proposição 3.5 de [6], usando a convergência fraca em $H_0^1(\Omega)$ e que o operador K é compacto, obtemos que

$$\begin{aligned} (u_n, \varphi) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} (u, \varphi) \text{ e} \\ \int_{\Omega} f(x, u_n) \varphi \, dx &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x, u) \varphi \, dx, \end{aligned} \quad (2-33)$$

respectivamente. Logo, obtemos

$$(u, \varphi) = \int_{\Omega} f(x, u) \varphi \, dx; \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (2-34)$$

Tomando $\varphi = u$ em (2-34), segue que

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \int_{\Omega} f(x, u)u \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle K(u_n), u \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle J'(u_n), u_n \rangle - (u_n, u_n)_{\mathbf{H}_0^1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 \end{aligned}$$

Portanto, $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ e $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$ provando que $u_n \rightarrow u$ em $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Provaremos que $\{u_n\}$ é limitada em $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Suponha, por contradição, que $\|u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$. Considere a seguinte sequência:

$$w_n = t_n u_n = 2\sqrt{c} \frac{u_n}{\|u_n\|}, \text{ onde } t_n = \frac{2\sqrt{c}}{\|u_n\|}. \quad (2-35)$$

Observe que $\{w_n\}$ é uma sequência limitada em $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Logo pelas Imersões de Sobolev, a menos de subsequência, existe $w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} w_n &\rightharpoonup w; && \text{em } \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ w_n &\rightarrow w; && \text{em } L^p(\Omega); \forall 1 \leq p < 2^* \\ w_n(x) &\rightarrow w(x); && \text{q.t.p. em } \Omega \\ |w_n(x)| &\leq g(x); && \text{para alguma } g \in L^p(\Omega) \end{aligned} \quad (2-36)$$

Vamos verificar que $w \neq 0$.

Suponha que $w \equiv 0$. Então da convergência fraca em (2-36) e utilizando que o operador $\Phi(w_n) = \int_{\Omega} F(x, w_n) \, dx$ é fracamente contínuo obtemos que

$$\Phi(w_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(w) = 0. \quad (2-37)$$

Em particular, vemos que

$$J(w_n) = \frac{1}{2} \|w_n\|^2 + o(1) = 2c + o(1), \text{ onde } o(1) = \int_{\Omega} F(x, w_n) \, dx.$$

Por outro lado, $\|u_n\| \rightarrow +\infty$, a qual mostra que $t_n = \frac{2\sqrt{c}}{\|u_n\|} \rightarrow 0$. Do Lema 2.8 temos

$$J(w_n) = J(t_n u_n) \leq \frac{1 + t_n^2}{2n} + J(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c.$$

Mas $J(w_n) \rightarrow 2c$, o qual fornece uma contradição, visto que $c > 0$. Deste modo fica estabelecido que $w \neq 0$.

Usando que $w \neq 0$, então podemos provar que $w \in H_0^1(\Omega)$ satisfaz

$$\int_{\Omega} \{\nabla w \cdot \nabla \varphi - lw\varphi\} dx = 0; \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (2-38)$$

Defina

$$p_n(x) = \begin{cases} \frac{f(x, u_n(x))}{u_n(x)}; & \text{se } u_n(x) > 0 \\ 0; & \text{se } u_n(x) \leq 0. \end{cases} \quad (2-39)$$

Note que, $u_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{c}} w_n(x) \|u_n\|$ tende para $+\infty$ se $w(x) > 0$. Além disso, $u_n(x) \rightarrow -\infty$ se $w(x) < 0$. Assim,

$$\lim_{u_n \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u_n)}{u_n} = l. \quad (2-40)$$

Usando que $\frac{f(x, t)}{t}$ é não-decrescente com respeito à t , obtemos que

$$0 \leq p_n(x) \leq l, \quad \forall n \text{ e } x \in \Omega. \quad (2-41)$$

Observe que $\{p_n\} \subset L^p(\Omega)$, $\forall 1 \leq p \leq \infty$, pois $\{p_n\}$ é dominada por uma função em $L^p(\Omega)$, a saber, $g(x) = l$. Em particular, temos que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} p_n^2 dx < +\infty.$$

Passando a uma subsequência, se necessário, temos que existe $h \in L^2(\Omega)$ tal que

- 1) $p_n \rightharpoonup h$; em $L^2(\Omega)$
- 2) $p_n(x) \rightarrow h(x)$; q.t.p em Ω .

Para verificar o item 2), basta observar que se $p_n \rightharpoonup h$, então

$$\int_{\Omega} p_n \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} h \varphi dx, \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega).$$

Em particular, para $\varphi = \varphi_1 > 0$ temos

$$\int_{\Omega} p_n \varphi_1 dx \rightarrow \int_{\Omega} h \varphi_1 dx,$$

o que implica que $p_n \varphi_1 \rightarrow h \varphi_1$ em $L^1(\Omega)$. Logo,

$$(p_n \varphi_1)(x) \rightarrow (h \varphi_1)(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Como $\varphi_1 > 0$, então

$$p_n(x) \rightarrow h(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

De 2) e (2-40), obtemos $0 \leq h(x) \leq l$, q.t.p. em Ω . Usando que $p_n \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ é não-decrescente com relação à segunda variável, segue que

$$\lim_{u_n \rightarrow +\infty} p_n(x) = \lim_{u_n \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u_n)}{u_n} = l = h(x); \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ se } w(x) > 0. \quad (2-42)$$

Agora, para todo $\varphi \in L^2(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} 2\sqrt{c} \frac{\langle J'(u_n), \varphi \rangle}{\|u_n\|} &= 2\sqrt{c} \frac{(u_n, \varphi)}{\|u_n\|} - \frac{2\sqrt{c}}{\|u_n\|} \int_{\Omega} f(x, u_n) \varphi \, dx \\ &= \left(2\sqrt{c} \frac{u_n}{\|u_n\|}, \varphi \right) - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{u_n} w_n \varphi \, dx \\ &= (w_n, \varphi) - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{u_n} w_n \varphi \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla w_n \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{u_n} w_n \varphi \, dx, \end{aligned} \quad (2-43)$$

onde (\cdot, \cdot) é o produto interno em $H_0^1(\Omega)$.

Por outro lado, $p_n w_n \in L^2(\Omega)$, pois $p_n \in L^\infty(\Omega)$ e $w_n \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Ainda, temos que $\{p_n w_n\}$ é uma sequência limitada em $L^2(\Omega)$. Novamente, seguindo as mesmas ideias discutidas na página anterior, a menos de subsequência, temos que

$$p_n w_n \rightharpoonup hw \text{ em } L^2(\Omega).$$

A qual implica

$$(p_n w_n, \varphi)_{L^2} = \int_{\Omega} p_n(x) w_n(x) \varphi \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h(x) w(x) \varphi \, dx.$$

Adicionalmente $w_n \xrightarrow{L^2} w$, implica que

$$\int_{\Omega} \nabla w_n \cdot \nabla \varphi \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \varphi \, dx.$$

Note que $\frac{2\sqrt{c}}{\|u_n\|} \langle J'(u_n), \varphi \rangle \rightarrow 0$, para toda $\varphi \in L^2(\Omega)$. Então

$$\int_{\Omega} \{\nabla w \cdot \nabla \varphi - h(x) w(x) \varphi(x)\} \, dx = 0; \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega). \quad (2-44)$$

Mas do Lema 2.7, $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$ obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \{\nabla w_n \cdot \nabla \varphi - p_n(x) w_n(x) \varphi(x)\} \, dx \right| &= t_n |\langle J'(u_n), \varphi \rangle| \\ &\leq \frac{2\sqrt{c}}{\|u_n\|} \|J'(u_n)\|_{(H_0^1)^*} \|\varphi\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \{\nabla w_n \cdot \nabla \varphi - p_n(x)w_n(x)\varphi(x)\} dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Veja que $w_n \rightharpoonup w$ em $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ e $p_n w_n \rightharpoonup hw$ em $L^2(\Omega)$. Então

$$\int \nabla w_n \cdot \nabla \varphi \rightarrow \int \nabla w \cdot \nabla \varphi \quad \forall \varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Além disso, temos que

$$\int p_n w_n \varphi \rightarrow \int hw \varphi; \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega),$$

respectivamente. Em particular, isto ocorre $\forall \varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Logo, pela unicidade do limite, obtemos

$$\int_{\Omega} \{\nabla w \cdot \nabla \varphi - h(x)w(x)\varphi(x)\} dx = 0; \quad \forall \varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (**)$$

Defina $w^+(x) = \max(w(x), 0)$. Temos que, de **(A-2)** e da desigualdade (2-41), $h(x) = l$. Da equação (**)

$$\int_{\Omega} \{\nabla w^+ \cdot \nabla \varphi - lw^+ \varphi\} dx = 0; \quad \forall \varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Defina também $w^- = \min(w(x), 0)$. Então sabemos que $w^- \equiv 0$. De fato, tome $\varphi = w^-$ e de (**)

$$\int_{\Omega} \{\nabla w \cdot \nabla w^- - h(x)w w^-\} dx = 0; \quad \forall \varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Mas para $w < 0$, tem-se $u_n(x) \rightarrow -\infty$, então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p_n(x) = 0$, q.t.p. em Ω , para toda $u_n \leq 0$ com $n \geq n_0$ a qual implica $h(x) = 0$. Assim,

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w^- dx = 0.$$

Se $w = w^+$, então $\nabla w^+ \cdot \nabla w^- = 0$. Logo a única possibilidade é $w = w^-$, uma vez que $w \neq 0$. Logo

$$\|w^-\|^2 = \int_{\Omega} |w^-|^2 dx = 0.$$

Obtemos então que $w^- = 0$. Assim, $w = w^+ \geq 0$, q.t.p. em Ω . Mas pelo Princípio do Máximo Forte (ver D. Gilbarg e N. Trudinger [15], capítulo 8, seção 8.7, Teorema 8.19), temos que $w(x) > 0$ em Ω . Portanto, de (2-38) com $\varphi = \varphi_1$ tem-se que

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \varphi_1 dx = l \int_{\Omega} w \varphi_1 dx,$$

onde $\varphi_1 > 0$ é a primeira autofunção relativa à λ_1 . Então $l = \lambda_1$, pois

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \varphi_1 \, dx = \lambda_1 \int_{\Omega} w \varphi_1 \, dx,$$

o que é uma contradição, pois estamos supondo $l > \lambda_1$.

Portanto, nossa sequência $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$ concluindo o resultado conforme discutido anteriormente.

item 3. Sejam $l = \lambda_1$ e $\varphi_1 > 0$ a primeira autofunção relativa à λ_1 do problema de autovalor $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Então

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi \, dx = \lambda_1 \int_{\Omega} \varphi_1 \varphi \, dx; \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (\text{I})$$

Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução do problema (2-1) tal que $u(x) > 0$, multiplicando por φ_1 no problema (2-1) e integrando por partes, segue que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi_1 \, dx = \int_{\Omega} f(x, u) \varphi_1 \, dx.$$

Tomando $\varphi = u$ na equação (I) temos

$$\int_{\Omega} [f(x, u) - \lambda_1 u] \varphi_1 \, dx = 0.$$

Mas de (A-2) e (A-3), obtemos que $f(x, u) \leq \lambda_1 u(x)$. Então, vemos que

$$0 = \int_{\Omega} [f(x, u) - \lambda_1 u] \varphi_1 \, dx \leq \int_{\Omega} [\lambda_1 u(x) - \lambda_1 u(x)] \varphi_1 \, dx = 0.$$

Em particular, temos que

$$f(x, u) = \lambda_1 u(x) = -\Delta u.$$

Assim, $u(x)$ é autofunção associada à λ_1 , isto é, existe $c > 0$ tal que $u(x) = c\varphi_1(x)$, $x \in \Omega$.

Por outro lado, seja $c > 0$ tal que $u(x) = c\varphi_1(x) > 0$. Então, segue que

$$\begin{aligned} f(x, c\varphi_1) &= -\Delta(c\varphi_1) = -c\Delta\varphi_1 \\ &= c\lambda_1\varphi_1 = \lambda_1 u \\ &= lu = f(x, u) = -\Delta u \end{aligned}$$

Portanto, $c\varphi_1 > 0$ é solução do problema (2-1).

□

Prova (Corolário 2.4):

Utilizaremos os passos da demonstração do Teorema 2.3 item 2 com algumas modificações.

Observe que pela Proposição 2.5 existe uma sequência $\{u_n\} \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(1 + \|u_n\|) \|J'(u_n)\| \rightarrow 0.$$

De modo análogo, devemos mostrar que esta sequência é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Supondo, por contradição, que $\|u_n\| \rightarrow +\infty$ considere a sequência $\{w_n\}$ em $H_0^1(\Omega)$ e a sequência de funções $\{p_n\}$, ambas definidas como na demonstração do Teorema 2.3 item 2. Vamos mostrar que

$$\int_{\Omega} p_n(x) w_n^2(x) dx \rightarrow +\infty; \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (\text{II})$$

Note que

$$p_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0; \quad \forall x \in A = \{x \in \Omega : w(x) < 0\}.$$

De fato, para n suficientemente grande $w_n(x) < 0$ pois $w_n(x) \rightarrow w(x) < 0$ q.t.p. em Ω . Como

$$u_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{c}} \|u_n\| w_n(x),$$

então $u_n(x) < 0$, para n suficientemente grande. Logo, da definição de $p_n(x)$ obtemos que $p_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Escreva $A' = B_1 \cup B_2$ onde

$$B_1 = \{x \in \Omega : w(x) > 0\}$$

$$B_2 = \{x \in \Omega : w(x) = 0\}.$$

Note que $0 \leq p_n(x) \leq l$ e $w_n^2(x) \geq 0$ então $p_n(x) w_n^2(x) \geq 0$. Pelo Lema de Fatou (ver C. Isnard [17], capítulo 7, seção 7.2, Lema 7.20) obtemos que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_1} p_n(x) w_n^2(x) dx \geq \int_{B_1} \liminf_{n \rightarrow \infty} (p_n(x) w_n^2(x)) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

pois $u_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{c}} \|u_n\| w_n(x) \rightarrow +\infty$ e $p_n(x) = \frac{f(x, u_n)}{u_n} \rightarrow l = +\infty$, se $x \in B_1$. Então, vemos que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} p_n(x) w_n^2(x) dx \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_1} p_n(x) w_n^2(x) dx = +\infty.$$

Por outro lado, podemos mostrar que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla w_n|^2 dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} t_n^2 |\nabla u_n|^2 dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4c}{\|u_n\|^2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \\
&= 4c < +\infty.
\end{aligned}$$

Contudo observamos que

$$\int_{\Omega} |\nabla w_n|^2 dx - \int_{\Omega} p_n(x) w_n^2(x) dx = t_n \langle J'(u_n), w_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

ao qual contradiz o limite (II). □

2.3.1 Discussão dos resultados obtidos

No artigo do D. G. Costa e C. A. Magalhães [11], utilizando uma versão do Teorema do Passo da Montanha, obtém-se um resultado de existência de uma solução do problema (2-1) (não necessariamente positiva) análogo ao Teorema 2.3 item 2, com a condição (CM) de não-quadraticidade no infinito descrita abaixo:

$$\liminf_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x,t)t - 2F(x,t)}{t^\xi} \geq k > 0, \tag{CM}$$

para algum $k > 0$ e $\xi > 0$. Esta condição implica que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(x,t)t - 2F(x,t) = \pm\infty \tag{2-45}$$

Assumindo a condição (2-45), conseguimos obter a existência de uma solução para o problema (2-1), não necessariamente positiva (ver [11]), para o caso de $l = \lambda_j$, $j \in \mathbb{N}$. Aqui a dificuldade principal é verificar que o funcional J satisfaz a condição de Palais-Smale, conforme vimos na Seção 2.2 do capítulo anterior para o caso não-ressonante.

O Teorema 2.3, desde que $\frac{f(x,t)}{t}$ seja não decrescente, melhora os resultados contidos em [11] (em [11] foram utilizadas (CM) e (2-45)). Pois temos o exemplo de uma função que satisfaz as condições (A-1), (A-2) e (A-3), mas não satisfaz a condição (2-45). Um outro exemplo mostra uma função que satisfaz ambas as condições.

Exemplo 1. Seja $g \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $g(0) = 0$, $g(t) \geq 0$ se $t \geq 0$ e $g(t) \equiv 0$ se $t \leq 0$. Além disso, vamos considerar que $g'(t) \geq 0$ para $t > 0$ e que existem $l > 0$ e $t_0 > 0$ tais que

$g(t) = l$ para todo $t \geq t_0$. Defina

$$f(x, t) = g(t)t, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R} \quad (2-46)$$

Claramente f satisfaz **(A-1)**. Agora, para verificar **(A-2)**, sejam $0 \leq t_1 < t_2$, temos

$$\frac{f(x, t_1)}{t_1} = \frac{g(t_1)t_1}{t_1} = g(t_1) \leq g(t_2),$$

pois $g'(t) \geq 0, \forall t > 0$, isto é, g é não-decrescente.

Note que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = g(0) = 0 = \mu \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(x, t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = l; \text{ pois } g(t) = l, \forall t \geq t_0, \end{aligned}$$

mostrando que **(A-3)** é satisfeita.

Vamos verificar agora que f não satisfaz a condição (2-45). Considere

$$F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds = \int_0^t g(s)s ds.$$

Integrando por partes, obtemos

$$F(x, t) = \frac{t^2}{2}g(t) - \frac{1}{2} \int_0^t s^2 g'(s) ds.$$

Assim,

$$f(x, t)t - 2F(x, t) = \int_0^t s^2 g'(s) ds.$$

Mas $\forall t \geq t_0, g(t) \equiv l$. Assim obtemos que $g'(t) = 0, \forall t \geq t_0$. Logo,

$$\begin{aligned} f(x, t)t - 2F(x, t) &= \int_0^{t_0} s^2 g'(s) ds \\ &= s^2 g(s) \Big|_0^{t_0} - 2 \int_0^{t_0} s g(s) ds \\ &\leq t_0^2 g(t_0) = t_0^2 l \end{aligned}$$

Portanto, a condição (2-45) não vale, o que implica que **(CM)** não vale também.

Exemplo 2. Considere $Q \in C(\bar{\Omega}), Q(x) > 0$ e para $\alpha > 0, l > 0$ defina:

$$f(x, t) = \begin{cases} \frac{lQ(x)t^{\alpha+1}}{1+Q(x)t^\alpha} & ; t \geq 0, \\ 0 & ; t \leq 0, \end{cases} \quad (2-47)$$

(A-1): Como $Q \in C(\overline{\Omega})$ e $Q(x) > 0$ em Ω , então $f \in C(\Omega \times \mathbb{R})$. Pela definição da f temos:

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= 0 && ; \forall x \in \Omega, \\ f(x, t) &= \frac{lQ(x)t^{\alpha+1}}{1+Q(x)t^\alpha} \geq 0 && ; \forall t \geq 0 \text{ e } x \in \Omega, \\ f(x, t) &= 0 && ; \forall t \leq 0 \text{ e } x \in \Omega. \end{aligned}$$

(A-2): Basta analisar a derivada de f com relação à t , para $t \geq 0$. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \frac{lQ(x)t^\alpha(\alpha+1+Q(x)t^\alpha)}{(1+Q(x)t^\alpha)^2} \geq 0; \quad \forall t \geq 0.$$

Logo, f é não-decrescente com relação à t .

(A-3):

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{lQ(x)t^\alpha}{1+Q(x)t^\alpha} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{lQ(x)t^\alpha}{Q(x)t^\alpha \left(\frac{1}{Q(x)t^\alpha} + 1 \right)} = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{lQ(x)t^\alpha}{1+Q(x)t^\alpha} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{lQ(x)t^\alpha}{t^\alpha \left(\frac{1}{t^\alpha} + Q(x) \right)} \\ &= l. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que se $\alpha \in (0, 1]$ então f satisfaz a condição (2-45). Vejamos que:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)t - f(x, t) = \frac{lQ(x)t^{\alpha+1}\alpha}{(1+Q(x)t^\alpha)^2} \geq 0; \quad \forall t \geq 0.$$

Aplicando a regra de L'Hopital,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)t - f(x, t) \right\} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\alpha+1)t^\alpha lQ(x)}{2(1+Q(x)t^\alpha)\alpha t^{\alpha-1}Q(x)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\alpha+1)tl}{2(1+Q(x)t^\alpha)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\alpha+1)t^{1-\alpha}l}{2\left(\frac{1}{t^\alpha} + Q(x)\right)} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

para $\alpha \in (0, 1)$. Agora, para $\alpha = 1$, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{lQ(x)t^2}{t\left(\frac{1}{t} + Q(x)\right)^2} = +\infty.$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)t - f(x, t) \right\} = +\infty,$$

uniformemente em $x \in \Omega$ se $\alpha \in (0, 1]$, isto é, existem $k > 0$ e $t_0 = t_0(k) > 0$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)t - f(x, t) \geq k; \forall t \geq t_0 \text{ e } x \in \Omega.$$

Integrando por partes, tem-se

$$\begin{aligned} f(x, t)t - 2F(x, t) &= f(x, t)t - 2 \int_0^t f(x, s) ds \\ &= f(x, t)t - \left[\int_0^t f(x, s) ds + \int_0^t f(x, s) ds \right] \\ &= f(x, t)t - \left[f(x, s)s \Big|_0^t - \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(x, s)s ds \right] - \int_0^t f(x, s) ds \\ &= \int_0^t \left\{ \frac{\partial f}{\partial s}(x, s)s - f(x, s) \right\} ds \\ &\geq \int_{t_0}^t k ds \\ &= k(t - t_0) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty, \end{aligned}$$

pois $\int_0^{t_0} \left\{ \frac{\partial f}{\partial s}(x, s)s - f(x, s) \right\} ds \geq 0$.

Multiplicidade das Soluções do Problema Assintoticamente Linear

Neste capítulo, abordaremos dois teoremas que garantem duas soluções não triviais do problema de Dirichlet assintoticamente linear aos quais generalizam os resultados de A. Castro e A. C. Lazer [9] e N. Hirano e T. Nishimura [16]. Os métodos que utilizaremos na demonstração dos resultados são o de redução de Liapunov-Schmidt e o Teorema 1.27 de H. Brézis e L. Nirenberg.

Considere o problema de Dirichlet assintoticamente linear

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3-1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ é um domínio limitado, $\partial\Omega$ suave e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory subcrítica, isto é, existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$|f(x, t)| \leq C_1 |t|^{p-1} + C_2 \quad (3-2)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$ q.t.p. e $p \in (2, \frac{2N}{N-2})$, para $N \geq 3$, e $p \in (2, +\infty)$, se $N = 1, 2$.

Sejam $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ a sequência dos autovalores distintos do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3-3)$$

Então iniciaremos a seção com os seguintes resultados sobre multiplicidade de soluções para o problema (3-1)

Teorema 3.1 *Suponha que $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(0) = 0$ e f' limitada. Assuma que existem $k \geq m > 0$ tais que*

$$\lambda_{m-1} < f'(0) < \lambda_m, \quad \lambda_k < \lim_{|t| \rightarrow \infty} f'(t) < \lambda_{k+1} \quad (3-4)$$

e

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} f'(t) < \lambda_{k+1}. \quad (3-5)$$

Então o problema (3-1) possui ao menos duas soluções não triviais.

Teorema 3.2 *Suponha que $f(t) = \lambda_k t + g(t)$, $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, onde*

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t} = 0, \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} g(t)t = +\infty. \quad (3-6)$$

Além disso, suponha g limitada ou $\liminf_{|t| \rightarrow \infty} |g(t)| > 0$. Assuma que existem $k \geq m > 0$ tais que

$$\lambda_{m-1} \geq \lambda_k + \inf_{t \in \mathbb{R} - \{0\}} \frac{g(t)}{t} \geq \lambda_k + g'(0) < \lambda_m \quad (3-7)$$

e

$$\lambda_k + \sup_{t \in \mathbb{R}} g'(t) < \lambda_{k+1}. \quad (3-8)$$

Então o problema (3-1) possui ao menos duas soluções não triviais.

O Teorema 3.1 é devido a A. Castro e A. C. Lazer [9]. Sua abordagem é baseada no método de redução de Liapunov-Schmidt, ou seja, assumindo (3-4) e (3-5), existem funções ψ em um espaço de dimensão finita V gerado pelas autofunções correspondentes aos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ e uma função $\theta : V \rightarrow H_0^1(\Omega)$ tal que $v \in V$ é um ponto crítico de ψ se, e somente se, $v + \theta(v)$ é uma solução do problema (3-1). Sob as hipóteses (3-4) e (3-5), uma solução não trivial do problema (3-1) é um ponto crítico de ψ em que ψ atinge seu máximo.

O Teorema 3.2 é obtido no artigo do N. Hirano e T. Nishimura [16]. Sua demonstração é baseada no método de Liapunov-Schmidt.

3.1 Resultados sobre multiplicidade do problema (3-1)

Nesta dissertação, obtemos dois teoremas sobre multiplicidade que generalizam e unificam os Teoremas 3.1 e 3.2. Nossa abordagem é baseada, também, no método de redução de Liapunov-Schmidt e Teorema de Brezis-Nirenberg [7] (veja Teorema 1.27).

Os principais resultados deste capítulo podem ser descritos da seguinte forma:

Teorema 3.3 *Seja f é uma função Carathéodory subcrítica e suponha que existe $a < \lambda_{k+1}$ tal que*

$$\frac{f(x, s) - f(x, t)}{s - t} \leq a, \quad (3-9)$$

para todo $s, t \in \mathbb{R}$, $s \neq t$ e q.t.p. em Ω . Assuma que

$$F(x, t) - \frac{1}{2}\lambda_k t^2 \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} +\infty \quad (3-10)$$

uniformemente para q.t.p. $x \in \Omega$ e que existem $\delta > 0$, $b > 0$ e $k \geq m > 0$ tais que

$$\frac{1}{2}\lambda_{m-1}t^2 \leq F(x, t) \leq \frac{1}{2}(\lambda_m - b)t^2 \quad (3-11)$$

para todo $|t| \leq \delta$ e q.t.p. em Ω , onde $F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds$. Então o problema (3-1) possui ao menos duas soluções não triviais em $H_0^1(\Omega)$.

Teorema 3.4 Suponha que $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é subcrítica e que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} f'(t) < \lambda_{k+1}. \quad (3-12)$$

Assuma que

$$f(t)t - \lambda_k t^2 \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} +\infty \quad (3-13)$$

e que existem $\delta > 0$ e $k \geq m > 0$ tais que

$$\lambda_{m-1} \leq \inf_{0 < |t| < \delta} \frac{f(t)}{t}, \quad f'(0) < \lambda_m. \quad (3-14)$$

Então o problema (3-1) possui ao menos duas soluções não triviais.

Uma consequência direta do Teorema 3.4 é o seguinte resultado.

Corolário 3.5 Suponha que $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} g'(t) < \lambda_{k+1} - \lambda_k. \quad (3-15)$$

Assuma que

$$g(t)t \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} +\infty \quad (3-16)$$

e que existem $\delta > 0$ e $k \geq m > 0$ tais que

$$\lambda_{m-1} - \lambda_k \leq \inf_{0 < |t| < \delta} \frac{g(t)}{t}, \quad g'(0) < \lambda_m - \lambda_k. \quad (3-17)$$

Então o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_k u + g(u), & x \in \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3-18)$$

possui ao menos duas soluções não triviais.

Observação 3.6 O Teorema 3.1 é uma consequência do Teorema 3.4.

De fato, pela regra de L'Hopital e da condição (3-13) temos que

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} f'(t) = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t}.$$

Da condição (3-4) obtemos

$$0 < \lim_{|t| \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(t)}{t} - \lambda_k \right\} < \lambda_{k+1} - \lambda_k.$$

Então

$$f(t)t - \lambda_k t^2 = t^2 \left(\frac{f(t)}{t} - \lambda_k \right) \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} +\infty.$$

Da primeira desigualdade de (3-4) tem-se que

$$\inf_{0 < |t| < \delta} \frac{f(t)}{t} \geq \lambda_{m-1}$$

para algum $\delta > 0$.

Exemplo 1. Temos funções $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ que satisfazem o Teorema 3.4, mas não satisfazem o Teorema 3.1. Por exemplo, considere a seguinte função:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\lambda_{k+1} + \lambda_k)t - \frac{1}{4}(\lambda_{k+1} + \lambda_k - 2\lambda_{m-1})\frac{t}{|t|}, & \text{para } |t| \geq 1 \\ \lambda_{m-1}t + \frac{1}{4}(\lambda_{k+1} + \lambda_k - 2\lambda_{m-1})|t|t, & \text{para } |t| \leq 1. \end{cases} \quad (3-19)$$

Vamos verificar que $f'(0) = \lambda_{m-1}$ e que f satisfaz a condição (3-13). Com efeito, por um cálculo direto obtemos

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\{ \lambda_{m-1} - \frac{1}{4}(\lambda_{k+1} + \lambda_k - 2\lambda_{m-1})|t| \right\} \\ &= \lambda_{m-1}. \end{aligned}$$

De modo análogo, temos que $f'(0^-) = \lambda_{m-1}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} f(t)t - \lambda_k t^2 &= \frac{1}{2}(\lambda_{k+1} + \lambda_k)t^2 - \frac{1}{4}(\lambda_{k+1} + \lambda_k - 2\lambda_{m-1})\frac{t^2}{|t|} - \lambda_k t^2 \\ &= \frac{1}{2}(\lambda_{k+1} - \lambda_k)t^2 - \frac{1}{4}(\lambda_{k+1} + \lambda_k - 2\lambda_{m-1})\frac{t^2}{|t|}. \end{aligned}$$

Como o termo $(\lambda_{k+1} - \lambda_k) > 0$ então

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2}(\lambda_{k+1} - \lambda_k)t^2 - \frac{1}{4}(\lambda_{k+1} + \lambda_k - 2\lambda_{m-1})t \right\} = +\infty.$$

Portanto,

$$f(t)t - \lambda_k t^2 \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} +\infty.$$

Observação 3.7 O Corolário 3.5 generaliza o Teorema 3.2.

De fato, o Corolário 3.5 não necessita que

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t} = 0,$$

e que g seja limitada ou $\liminf_{|t| \rightarrow \infty} |g(t)| > 0$. Além disso, a condição

$$\lambda_{m-1} \leq \lambda_k + \inf_{t \in \mathbb{R} - \{0\}} \frac{g(t)}{t}$$

é substituída pela condição mais fraca

$$\lambda_{m-1} - \lambda_k \leq \inf_{0 < |t| \leq \delta} \frac{g(t)}{t},$$

para algum $\delta > 0$.

Exemplo 2. Existem funções $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ que satisfazem o Corolário 3.5, mas que não satisfazem as hipóteses do Teorema 3.2. Com efeito, considere

$$g(t) = f(t) - \lambda_k t,$$

onde f é tomada como no **Exemplo 1**. Assim, temos que

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t} = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \left(\frac{f(t)}{t} - \lambda_k \right) > \lambda_{k+1} - \lambda_k > 0.$$

Logo, segue que

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t} \neq 0.$$

Por outro lado, podemos provar que

$$\inf_{0 < |t| < \delta} \frac{g(t)}{t} - \lambda_k = \inf_{0 < |t| < \delta} \frac{f(t)}{t} \geq \lambda_{m-1},$$

$$g(t)t = f(t)t - \lambda_k t^2 \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} +\infty$$

e

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} g'(t) = \sup_{t \in \mathbb{R}} (f'(t) - \lambda_k) < \lambda_{k+1} - \lambda_k.$$

Observação 3.8 *Das Observações 3.6 e 3.7 obtemos que o Teorema 3.4 unifica e generaliza os Teoremas 3.1 e 3.2.*

Considere o funcional $\varphi(u) = -J(u)$, onde J é definido em (2-2), ou seja,

$$\varphi(u) = -\frac{1}{2}\|u\|^2 + \int_{\Omega} F(x, u) dx, \quad u \in H_0^1(\Omega). \quad (3-20)$$

Neste caso segue que

$$\langle \varphi'(u), v \rangle = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} f(x, u)v dx, \quad (3-21)$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Defina os seguintes espaços:

$$V = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\} \text{ e } W = V^{\perp}.$$

Agora, aplicando o Lema 1.28, definimos um funcional ψ da seguinte maneira:

$$\psi(v) = \sup_{w \in W} \varphi(v + w); \quad v \in V. \quad (3-22)$$

Observação 3.9 *Temos que o funcional J , com a condição (3-9) e $a < \lambda_{k+1}$, satisfaz as hipóteses do Lema 1.28. Em particular, φ satisfaz o Lema 1.28.*

De fato, para todo $u \in V = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ e $v, v_1 \in W = V^{\perp}$, com $v \neq v_1$, temos

$$\begin{aligned} \langle J'(u+v) - J'(u+v_1), v - v_1 \rangle &= \|v - v_1\|^2 - \int_{\Omega} (v - v_1)(f(x, u+v) - f(x, u+v_1)) dx \\ &\geq \|v - v_1\|^2 - a \int_{\Omega} (v - v_1)^2 dx \\ &= \|v - v_1\|^2 - a\|v - v_1\|_2^2 \\ &\geq \|v - v_1\| \phi(\|v - v_1\|), \end{aligned}$$

onde $\phi(\|v - v_1\|) = \left(\frac{\lambda_{k+1} - a}{\lambda_{k+1}} \right) \|v - v_1\|.$

Podemos reescrever o Lema 1.28 para o funcional φ da seguinte maneira:

Lema 3.10 *Suponha que f satisfaz (3-2) e (3-9). Então $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida em (3-22) é continuamente diferenciável e*

$$\langle \psi'(v), v_1 \rangle = \langle \varphi'(v + \theta(v)), v_1 \rangle, \quad \forall v_1 \in V,$$

onde $\theta : V \rightarrow W$ é uma função contínua satisfazendo

$$\psi(v) = \varphi(v + \theta(v)), \quad \forall v \in V.$$

Observação 3.11 1. *Claramente se v é um ponto crítico de ψ , então $v + \theta(v)$ é um ponto crítico de φ .*

2. *Para obter demonstração do Lema 1.28, conseqüentemente do Lema 3.10, veja o artigo de A. Castro [10].*

3. *Temos que $\langle \psi'(v), w \rangle = 0$, para todo $w \in W$.*

De fato, pela definição (3-22) obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\psi(v + \varepsilon w) - \psi(v)}{\varepsilon} &\leq 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{\psi(v + \varepsilon w) - \psi(v)}{\varepsilon} &\geq 0. \end{aligned}$$

Vamos verificar um resultado que garante que o funcional φ é coercivo, isto é,

$$\lim_{v \in V, \|v\| \rightarrow \infty} \varphi(v) = +\infty. \quad (3-23)$$

Lema 3.12 *Suponha (3-2) e (3-10). Então φ é coerciva. Conseqüentemente, ψ é coerciva.*

Prova: De (3-10) existe $M > 0$ tal que

$$F(x, t) - \frac{1}{2} \lambda_k t^2 \geq 0, \quad \forall |t| \geq M \text{ e q.t.p. em } \Omega.$$

Para todo $|t| \leq M$ e q.t.p. em Ω temos

$$\begin{aligned} |F(x, t)| &\leq \int_0^t |f(x, s)| ds \\ &\leq C_1 \int_0^t |s|^{p-1} ds + C_2 \int_0^t ds \\ &\leq \frac{C_1}{p} M^p + C_2 M. \end{aligned}$$

Neste caso, obtemos

$$F(x, t) \geq \frac{1}{2} \lambda_k t^2 - \frac{1}{2} \lambda_k M^2 - \frac{C_1}{p} M^p - C_2 M, \quad (3-24)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e q.t.p. em Ω .

Suponha que φ não é coerciva, então existe $M_0 > 0$ e uma sequência $\{v_n\} \subset V$ tal que $\|v_n\| \rightarrow \infty$, mas $\varphi(v_n) \leq M_0$. Considere a seguinte decomposição

$$v_n = a_n + b_n,$$

onde $a_n \in \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}\}$ e $b_n \in \text{span}\{\varphi_k\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\|v_n\|^2 = \|a_n\|^2 + \|b_n\|^2.$$

Vamos verificar que $\{a_n\}$ é uma sequência limitada. Vamos supor que $\{a_n\}$ possui uma subsequência $\{a_{n_i}\}$ tal que

$$\|a_{n_i}\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} +\infty.$$

Então temos

$$\begin{aligned} \varphi(v_{n_i}) &= -\frac{1}{2} \|v_{n_i}\|^2 + \int_{\Omega} F(x, v_{n_i}) dx \\ &\geq -\frac{1}{2} \|a_{n_i}\|^2 - \frac{1}{2} \|b_{n_i}\|^2 + \frac{1}{2} \lambda_k \int_{\Omega} v_{n_i}^2 dx - \frac{1}{2} \lambda_k \int_{\Omega} M^2 dx \\ &\quad - \frac{C_1}{p} \int_{\Omega} M^p dx - C_2 \int_{\Omega} M dx \\ &= -\frac{1}{2} \|a_{n_i}\|^2 - \frac{1}{2} \|b_{n_i}\|^2 + \frac{1}{2} \lambda_k \|a_{n_i}\|_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_k \|b_{n_i}\|_2^2 - C_3, \end{aligned}$$

onde $C_3 = \left(\frac{1}{2} \lambda_k M^2 + \frac{C_1}{p} M^p + C_2 M \right) |\Omega|$. Como $b_{n_i} \in \text{span}\{\varphi_k\}$, então

$$-\Delta b_{n_i} = \lambda_k b_{n_i}.$$

Assim, temos

$$\|b_{n_i}\|^2 = \lambda_k \|b_{n_i}\|_2^2 \quad \text{e} \quad \lambda_{k-1} \|a_{n_i}\|_2^2 \geq \|a_{n_i}\|^2.$$

Então

$$\varphi(v_{n_i}) \geq \left(\frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k-1}} \right) \frac{\|a_{n_i}\|^2}{2} - C_3 \xrightarrow{i \rightarrow \infty} +\infty,$$

ao qual contradiz $\varphi(v_n) \leq M_0$.

Portanto, $\{a_n\}$ é limitada, digamos por uma constante C_4 . Como $\|v_n\| \rightarrow +\infty$, então $\|b_n\| \rightarrow +\infty$. Segue do artigo [5], Lema 3.2, que para todo $\alpha > 0$ existe $m_\alpha > 0$ tal

que

$$|A| < \alpha,$$

onde $A = \{x \in \Omega : |v(x)| < m_\alpha \|v\|\}, \forall v \in \text{span}\{\varphi_k\}$. Sejam

$$A_n = \{x \in \Omega : |b_n(x)| \geq m_\alpha \|b_n\|\}$$

e

$$\Omega \setminus A_n = \{x \in \Omega : |b_n(x)| < m_\alpha \|b_n\|\}.$$

Assim, obtemos que $|\Omega \setminus A_n| < \alpha$.

Por outro lado, usando que $\dim V < \infty$, então existe uma constante $C_5 > 0$ tal que

$$\sup_{x \in \Omega} |a_n(x)| \leq C_5, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3-25)$$

De fato, em espaços de dimensão finita as normas são equivalentes. Logo, existem constantes \bar{C} e C_5 tais que

$$\|a_n\|_\infty \leq \bar{C} \|a_n\| \leq C_5.$$

Como $F(x, t) - \frac{1}{2} \lambda_k t^2 \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} +\infty$, então dado $\beta > 0$, existe M_β tal que

$$F(x, t) - \frac{1}{2} \lambda_k t^2 \geq \beta, \quad \forall |t| \geq M_\beta \text{ e q.t.p. em } \Omega. \quad (3-26)$$

Defina

$$B_n = \{x \in \Omega : |v_n(x)| \geq M_\beta\}.$$

Usando que

$$|b_n| - |a_n| = |b_n| - |b_n - v_n| \leq |b_n - b_n + v_n| = |v_n|,$$

temos para cada $x \in A_n$ as seguintes desigualdades:

$$|v_n(x)| \geq |b_n(x)| - |a_n(x)| \geq m_\alpha \|b_n\| - C_5. \quad (3-27)$$

Mas $\|b_n\| \rightarrow +\infty$, então para n suficientemente grande, obtemos

$$m_\alpha \|b_n\| - C_5 \geq M.$$

Assim, dado $x \in A_n$ e n suficientemente grande, temos que

$$|v_n(x)| \geq M. \quad (3-28)$$

Em outras palavras, $A_n \subset B_n$ para n suficientemente grande. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(F(x, v_n) - \frac{1}{2} \lambda_k |v_n|^2 \right) dx &\geq \beta \int_{\Omega} dx \\ &= \beta \int_{B_n} dx + \beta \int_{\Omega \setminus B_n} dx \\ &= \beta |B_n| + \beta |\Omega \setminus B_n|. \end{aligned}$$

Observe que $-\left(\frac{1}{2} \lambda_k M^2 + \frac{C_1}{p} M^p + C_2 M \right) < 0$, pois $M, C_1, C_2 > 0$. Então

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(F(x, v_n) - \frac{1}{2} \lambda_k |v_n|^2 \right) dx &\geq \beta |B_n| - \left(\frac{1}{2} \lambda_k M^2 + \frac{C_1}{p} M^p + C_2 M \right) |\Omega \setminus B_n| \\ &\geq \beta |A_n| - \left(\frac{1}{2} \lambda_k M^2 + \frac{C_1}{p} M^p + C_2 M \right) |\Omega \setminus A_n| \\ &\geq \beta \{ |\Omega| - \alpha \} - \left(\frac{1}{2} \lambda_k M^2 + \frac{C_1}{p} M^p + C_2 M \right) \alpha, \end{aligned}$$

pois $|\Omega \setminus A_n| < \alpha$ implica que $|A_n| > |\Omega| - \alpha$. Tomando o limite inferior na desigualdade acima, obtemos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left(F(x, v_n) - \frac{1}{2} \lambda_k |v_n|^2 \right) dx \geq \beta \{ |\Omega| - \alpha \} - \left(\frac{1}{2} \lambda_k M^2 + \frac{C_1}{p} M^p + C_2 M \right) \alpha.$$

Como esta desigualdade vale para qualquer $\alpha > 0$, então tomando $\alpha \rightarrow 0$, temos que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left(F(x, v_n) - \frac{1}{2} \lambda_k |v_n|^2 \right) dx \geq \beta |\Omega|.$$

Mas $\beta > 0$ também é arbitrário, o qual implica

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left(F(x, v_n) - \frac{1}{2} \lambda_k |v_n|^2 \right) dx = +\infty.$$

Portanto, segue que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(v_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left(F(x, v_n) - \frac{1}{2} \lambda_k |v_n|^2 \right) dx = +\infty,$$

onde usamos a desigualdade variacional (A-8) obtendo que

$$\varphi(v_n) \geq \int_{\Omega} \left(F(x, v_n) - \frac{1}{2} \lambda_k |v_n|^2 \right) dx,$$

Assim temos uma contradição.

□

O próximo lema garante que o funcional ψ possui uma geometria particular.

Lema 3.13 *Sejam $V_1 = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}\}$ e $V_2 = \text{span}\{\varphi_m, \dots, \varphi_k\}$. Suponha que valem as condições (3-9) e (3-11). Então existe um $\delta_0 > 0$ tal que*

$$\psi(v) \geq 0, \quad \forall v \in V_1 \text{ e } \|v\| \leq \delta_0 \quad (3-29)$$

e

$$\psi(v) \leq 0, \quad \forall v \in V_2 \text{ e } \|v\| \leq \delta_0. \quad (3-30)$$

Prova: Como as normas em espaços de dimensão finita são equivalentes, então existe $C_6 > 0$ tal que

$$\|v\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |v_n(x)| \leq C_6 \|v\|, \quad \forall v \in V_1.$$

Tome $\delta_1 = \frac{1}{C_6} \delta$, onde $\delta > 0$ é obtido de (3-11). Assim, para todo $v \in V_1$ com $\|v\| \leq \delta_1$, temos

$$\psi(v) = \sup_{w \in W} \varphi(v+w) \geq \varphi(v).$$

De (3-11), para todo $\|v\| \leq \delta_1$ temos que $F(x, v) \geq \frac{1}{2} \lambda_{m-1} v^2$. Então obtemos que

$$\begin{aligned} \psi(v) \geq \varphi(v) &\geq -\frac{1}{2} \|v\|^2 + \frac{1}{2} \lambda_{m-1} \int_{\Omega} v^2 dx \\ &= -\frac{1}{2} \|v\|^2 + \frac{1}{2} \lambda_{m-1} \|v\|_2^2 \\ &\geq -\frac{1}{2} \|v\|^2 + \frac{1}{2} \|v\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, dividindo a desigualdade (3-11) por t , aplicando L'Hopital temos que

$$0 = \lim_{|t| \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \lambda_{m-1} t \right) \leq \lim_{|t| \rightarrow 0} f(x, t) \leq \lim_{|t| \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} (\lambda_m - b) t \right) = 0.$$

Então, segue que $f(x, 0) = 0$ q.t.p. em Ω . Logo, tomando $s = 0$ e t qualquer na desigualdade (3-9) temos $f(x, t) \leq at$, $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$. Integrando, obtemos

$$F(x, t) \leq \frac{1}{2} at^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega.$$

Assim, para todo $|t| \geq \delta$, $x \in \Omega$, segue que

$$\begin{aligned} F(x, t) &\leq \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(\lambda_m - b)t^2 + \frac{1}{2}(b - \lambda_m)t^2 + \frac{1}{2}at^2 \\ &= \frac{1}{2}(\lambda_m - b)t^2 + \frac{1}{2}(a + b - \lambda_m)t^2 \\ &\leq \frac{1}{2}(\lambda_m - b)t^2 + \frac{1}{2}|a + b - \lambda_m|\delta^{2-p}|t|^p. \end{aligned}$$

Então, temos que

$$F(x, t) \leq \frac{1}{2}(\lambda_m - b)t^2 + C_7|t|^p, \quad x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}, \quad |t| \geq \delta$$

para algum $C_7 > \frac{1}{2}|a + b - \lambda_m|\delta^{2-p}$. Mas observe que de (3-11)

$$F(x, t) \leq \frac{1}{2}(\lambda_m - b)t^2, \quad \forall |t| \leq \delta.$$

Assim, para todo $t \in \mathbb{R}$ e q.t.p. em Ω temos

$$F(x, t) \leq \frac{1}{2}(\lambda_m - b)t^2 + C_7|t|^p.$$

Agora, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq 2^*$, então existe $C_8 > 0$ tal que

$$\|u\|_p \leq C_8\|u\|, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Como a função $\theta : V \rightarrow W = V^\perp$ é contínua em V , então a função $v \mapsto v + \theta(v)$ também é contínua em V . Em particular, é contínua na origem $0 \in V$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta' > 0$ tal que para todo $\|v\| \leq \delta'$ e $v \in V$ tem-se que $\|v + \theta(v)\| \leq \varepsilon$. Tomando

$$\varepsilon = \left(\frac{b}{2\lambda_m C_7 C_8^p} \right)^{\frac{1}{p-2}} \quad \text{e} \quad \delta_0 = \min(\delta', \delta_1),$$

obtemos que

$$\|v + \theta(v)\| \leq \left(\frac{b}{2\lambda_m C_7 C_8^p} \right)^{\frac{1}{p-2}},$$

para todo $v \in V_2$ e $\|v\| \leq \delta_0$.

Portanto, segue que

$$\begin{aligned}
\psi(v) &= \varphi(v + \theta(v)) = -\frac{1}{2}\|v + \theta(v)\|^2 + \int_{\Omega} F(x, v + \theta(v)) \, dx \\
&\leq -\frac{1}{2}\|v + \theta(v)\|^2 + \frac{1}{2}(\lambda_m - b) \int_{\Omega} (v + \theta(v)) \, dx + C_7 \int_{\Omega} |v + \theta(v)|^p \, dx \\
&= -\frac{1}{2}\|v + \theta(v)\|^2 + \frac{1}{2}(\lambda_m - b)\|v + \theta(v)\|_2^2 + C_7\|v + \theta(v)\|_p^p \\
&\leq -\frac{1}{2}\|v + \theta(v)\|^2 + \frac{1}{2}(\lambda_m - b)\|v + \theta(v)\|_2^2 + C_7C_8^p\|v + \theta(v)\|^p.
\end{aligned}$$

Como $\lambda_m \leq \lambda_{k+1}$, $v + \theta(v) \in W = V^\perp$ temos que

$$\|v + \theta(v)\|^2 \geq \lambda_{k+1}\|v + \theta(v)\|_2^2 \geq \lambda_m\|v + \theta(v)\|^2.$$

Em particular, podemos provar que

$$\begin{aligned}
\psi(v) &\leq \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{\lambda_m - b}{\lambda_m} \right) \|v + \theta(v)\|^2 + C_7C_8^p\|v + \theta(v)\|^p \\
&= -\frac{b}{2\lambda_m}\|v + \theta(v)\|^2 + C_7C_8^p\|v + \theta(v)\|^p \\
&= \|v + \theta(v)\|^2 \left[-\frac{b}{2\lambda_m} + C_7C_8^p\|v + \theta(v)\|^{p-2} \right] \\
&\leq \|v + \theta(v)\|^2 \left[-\frac{b}{2\lambda_m} + C_7C_8^p \frac{b}{2\lambda_m C_7C_8^p} \right] = 0,
\end{aligned}$$

para todo $v \in V_2$ e $\|v\| \leq \delta_0$.

□

Agora, utilizando a coercividade obtida no Lema 3.12 e a geometria que o funcional ψ satisfaz no Lema 3.13 obtemos os dois resultados centrais deste capítulo.

Prova (Teorema 3.3):

Pelo Lema 3.12 temos que φ é coerciva. Como $\dim V < \infty$ e pela coercividade, obtemos que φ é limitada inferiormente. Segue de [2], página 107, que φ satisfaz a condição (PS). Vamos verificar que ψ satisfaz a condição (PS), então a sequência (PS) vinculada a ψ é limitada.

De fato, suponha, por absurdo, que a (PS)-sequência $\{v_n\}$ de ψ não seja limitada, então temos que

- 1) $\{\psi(v_n)\}$ é limitada;
- 2) $\psi'(v_n) \rightarrow 0$,

quando $\|v_n\| \rightarrow +\infty$, o que implica que $\|v_n + w_n\| \rightarrow +\infty$, para qualquer sequência $\{w_n\}$ em W . Com efeito, suponha que existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $\|v_n + w_n\| \leq c, \forall n \geq n_0$.

Como W é o complemento ortogonal de V , obtemos que

$$\|v_n\|^2 \leq c^2 - \|w_n\|^2.$$

Se $\|w_n\|^2 \rightarrow +\infty$, então $c^2 - \|w_n\|^2 \leq 0, \forall n \geq n_0$. O que é um absurdo, pois $\|v_n\| \rightarrow +\infty$. Agora, se $\|w_n\|^2$ for limitada, então $\|v_n\|^2$ é limitada, o que nos dá outra contradição.

Consequentemente temos que

$$\psi(v_n) = \sup_{w_n \in W} \varphi(v_n + w_n) \geq \varphi(v_n + w_n).$$

Mas φ é coerciva, ou seja, $\varphi(v_n + w_n) \rightarrow +\infty$, quando $\|v_n + w_n\| \rightarrow +\infty$, o que é um absurdo pelo item 1 acima.

Por outro lado, sabemos que para todo $h \in V$ temos

$$\langle \psi'(v), h \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(v + \varepsilon h) - \psi(v)}{\varepsilon}.$$

Se $\inf_{v \in V} \psi(v) = 0$ então conforme o Lema 3.13 temos que $\psi(v) = 0, \forall v \in V_2$ com $\|v\| \leq \delta_0$ e $\psi(v) \geq 0, \forall v \in V_1$ com $\|v\| \leq \delta_0$. Logo, segue que

$$\begin{aligned} \langle \psi'(v), h \rangle &\geq 0 \quad \text{se } h \in V_1; \\ \langle \psi'(v), h \rangle &= 0 \quad \text{se } h \in V_2, \end{aligned}$$

para todo $v \in V_2$ com $\|v\| \leq \delta_0$. Pela continuidade da ψ , obtemos que $\langle \psi'(v), h \rangle = 0$ para todo $h \in V$ e $v \in V_2$ com $\|v\| \leq \delta_0$, o que implica que ψ possui infinitos pontos críticos.

No caso que $\inf_{v \in V} \psi(v) < 0$ temos que

$$\inf_{v \in V} \psi(v) > -\infty.$$

De fato, tome $\{v_n\} \subset V$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(v_n) = \inf \psi(v)$. Afirmamos que $\{v_n\}$ é limitada, pois caso contrário teríamos

$$\psi(v_n) \xrightarrow{\|v_n\| \rightarrow +\infty} \inf \psi(v) < 0,$$

o que é um absurdo, pela coercividade da ψ . Logo, como $\{v_n\}$ é limitada e ψ é contínua em um compacto, então ψ possui um ínfimo. Portanto, estamos nas hipóteses do teorema de Brezis e Nirenberg 1.27 de onde concluímos que o problema (3-1) possui ao menos duas soluções não triviais em $H_0^1(\Omega)$.

□

Vamos agora a demonstração do Teorema 3.4, que é uma consequência do Teorema 3.3.

Prova (Teorema 3.4):

Seja $a = \sup_{t \in \mathbb{R}} f'(t)$. Usando o Teorema do Valor Médio e (3-12) temos

$$\frac{f(s) - f(t)}{s - t} = f'(\xi) \leq a = \sup_{t \in \mathbb{R}} f'(t),$$

para todo $s, t \in \mathbb{R}$ com $s \neq t$. Assim, a condição (3-9) está satisfeita.

Aplicando (3-13), para todo $\beta > 0$ existe $M > 0$ tal que

$$f(t)t - \lambda_k t^2 \geq \beta,$$

para todo $|t| \geq M$. Consequentemente, temos que

$$f(t) - \lambda_k t \geq \frac{\beta}{t}, \quad |t| \geq M.$$

Integrando, obtemos

$$F(t) - F(M) - \frac{1}{2}\lambda_k t^2 + \frac{1}{2}\lambda_k M^2 \geq \beta \ln t - \beta \ln M.$$

Escrevendo $C_M = F(M) - \frac{1}{2}\lambda_k M^2 - \beta \ln M$, temos

$$F(t) - \frac{1}{2}\lambda_k t^2 \geq \beta \ln t + C_M \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Para $t \leq -M$, obtemos

$$F(r) - \frac{1}{2}\lambda_k r^2 \geq \beta \ln r + C_{\overline{M}},$$

onde $C_{\overline{M}} = F(M) - \frac{1}{2}\lambda_k M^2 - \beta \ln M$ e $r = -t \geq M$. Como $r \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow -\infty$, então

$$F(t) - \frac{1}{2}\lambda_k t^2 \geq \beta \ln t + C_M \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} +\infty.$$

Portanto, a condição (3-13) é satisfeita.

Por outro lado, de (3-14) temos que $\forall 0 < |t| < \delta$

$$\lambda_{m-1}|t| \leq f(t)$$

o que implica, pela continuidade da f , que $f(0) = 0$. Defina $b = \frac{1}{2}(\lambda_m - f'(0))$. Agora,

da segunda desigualdade em (3-14), existe $\delta_0 \in (0, \delta)$ tal que

$$\frac{f(t)}{t} \leq \lambda_m - b,$$

para todo $0 < |t| < \delta_0$. Com efeito, suponha que

$$\frac{f(t)}{t} > \lambda_m - b = \frac{1}{2}\lambda_m + f'(0).$$

Então, segue que

$$0 = \lim_{|t| \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(t)}{t} - f'(0) \right\} > \frac{1}{2}\lambda_m,$$

ao qual é um absurdo.

Logo, temos que

$$\lambda_{m-1}t^2 \leq f(t)t \leq (\lambda_m - b)t^2,$$

$\forall |t| < \delta_0$. Integrando, mostrando que

$$\frac{1}{2}\lambda_{m-1}t^2 \leq F(t) \leq \frac{1}{2}(\lambda_m - b)t^2,$$

para todo $|t| < \delta_0$, de onde obtemos (3-11). Portanto, do Teorema 3.3 segue-se que o problema (3-1) possui duas soluções não triviais.

□

Resultados de Análise Funcional

Definição A.1 Dizemos que um operador linear $T : N_1 \rightarrow N_2$, onde N_1 e N_2 são espaços normados, é compacto se o fecho da imagem $T(A)$ de todo subconjunto limitado $A \subset N_1$ é compacta. Em outras palavras, para toda sequência limitada $\{u_n\}$ em N_1 , a sequência $\{Tu_n\}$ possui subsequência convergente em N_2 .

Proposição A.2 Seja um operador linear e compacto $T : N_1 \rightarrow N_2$, onde N_1 e N_2 são espaços normados. Se $u_n \rightharpoonup u$ em N_1 , então $Tu_n \rightarrow Tu$.

Teorema A.3 (Teorema da Representação de Riesz) Sejam $1 < p < \infty$ e $\zeta \in (L^p(\Omega))^*$. Então existe uma única função $u \in L^q(\Omega)$ tal que

$$(\zeta, f) = \int u f, \quad \forall f \in L^p(\Omega)$$

Definição A.4 Uma forma bilinear $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, onde H é um espaço de Hilbert, é chamada

1. contínua, se existe uma constante C tal que

$$|a(u, v)| \leq C|u||v|, \quad \forall u, v \in H;$$

2. coerciva, se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(u, u) \geq \alpha|u|^2, \quad \forall u \in H.$$

Os seguintes resultados podem ser encontrados em [18], Capítulo 5, Seção 5.3 para o Teorema devido a Stampacchia e Capítulo 4, Seção 4.2 para a desigualdade de Hölder e sua generalização.

Teorema A.5 (Stampacchia) Suponha a é uma forma bilinear, contínua e coerciva em um espaço de Hilbert H . Seja $K \subset H$ um subconjunto não vazio, fechado e convexo em

H. Então, dado qualquer $\zeta \in H^*$, existe um único elemento $u \in K$ tal que

$$a(u, v - u) \geq \langle \zeta, v - u \rangle, \quad \forall v \in K. \quad (\text{A-1})$$

Além disso, se a é simétrico, então u é caracterizado pela propriedade:

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \langle \zeta, u \rangle = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \zeta, v \rangle \right\}. \quad (\text{A-2})$$

Teorema A.6 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Considere a seguinte generalização da desigualdade de Hölder:

Observação A.7 (Desigualdade de Hölder Generalizada) *Sejam f_1, f_2, \dots, f_k funções tais que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq k$, onde $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1$. Então o produto $f = f_1 f_2 \dots f_k$ está em $L^p(\Omega)$ e vale*

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \dots \|f_k\|_{p_k} \quad (\text{A-3})$$

O próximo resultado fornece algumas propriedades de convergência fraca e pode ser encontrado no livro do H. Brézis [6].

Proposição A.8 *Seja $\{x_n\}$ uma sequência em um espaço de Banach B . Então*

1. $x_n \rightharpoonup x$ em B se, e só se, $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$, $\forall f \in B^*$;
2. Se $x_n \rightarrow x$, então $x_n \rightharpoonup x$ em B ;
3. Se $x_n \rightharpoonup x$ em B , então $\{\|x_n\|\}$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$;
4. Se $x_n \rightharpoonup x$ em B e $f_n \rightarrow f$ em B^* , então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

A.1 Espaços de Sobolev

Sejam Ω um aberto limitado de \mathbb{R}^N , $p \geq 1$ e $k \geq 0$ um inteiro. Definimos o seguinte conjunto de funções

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : u \in L^p(\Omega) \text{ e } D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall 0 \leq |\alpha| \leq k \right\},$$

onde α é um multi-índice e $D^\alpha u$ denota a derivada no sentido fraco. O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é chamado de espaço de Sobolev. Definimos também

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}}.$$

Em outras palavras, $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se, existe uma sequência $\{u_n\}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Na dissertação estamos trabalhando com os seguintes espaços de Sobolev:

$$W^{1,2}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : u \in L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, N \right\}$$

e

$$W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)} \cap W^{1,2}(\Omega).$$

Em ambos os espaços vetoriais $W^{1,2}(\Omega)$ e $W_0^{1,2}(\Omega)$ definimos o produto interno:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2} \quad (\text{A-4})$$

Deste produto interno, obtemos a seguinte norma nos espaços $W^{1,2}(\Omega)$ e $W_0^{1,2}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,2}} &= \left(\int_{\Omega} |u|^2 + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2} \\ &= \|u\|_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2} \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

Observação A.9 Não demonstraremos, mas os espaços $W^{1,2}(\Omega)$ e $W_0^{1,2}(\Omega)$ são de Hilbert. Para maiores detalhes das propriedades dos espaços de Sobolev, assim como dos espaços $L^p(\Omega)$, o leitor está convidado a consultar o livro do H. Brezis [6], capítulos 4 e 9.

Denotaremos durante todo o texto $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

As propriedades que conferem importância aos espaços de Sobolev são as de imersões contínuas e compactas destes espaços nos espaços $L^p(\Omega)$, para algum p especificado logo abaixo. Mas antes definimos o que vem a ser imersão contínua e compacta.

Definição A.10 Sejam E e F espaços vetoriais normados (não necessitamos que a norma no espaço E seja a mesma do espaço F).

1. Dizemos que a inclusão $E \subset F$ é uma imersão contínua se a aplicação inclusão $I : E \rightarrow F$, dada por $Ix = x$, é contínua. Isto é, se E está imerso continuamente

em F equivale dizer que existe uma constante C tal que

$$\|x\|_F \leq C\|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

Denotamos esta propriedade por $E \hookrightarrow F$;

2. Se, além disso, a aplicação inclusão for compacta, dizemos que a imersão $E \hookrightarrow F$ é compacta. Em outras palavras, sequências limitadas em E possuem subsequências convergentes em F . Utilizaremos a seguinte notação $E \xrightarrow{\text{cpt.}} F$ para as imersões compactas.

Considere agora os seguintes teoremas de imersão.

Teorema A.11 (Imersões de $W_0^{k,p}$) *Sejam Ω um domínio limitado em \mathbb{R}^N com o bordo suave, $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Então valem as seguintes imersões*

1. se $kp < N$, então $W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-kp}$;
2. se $kp = N$, então $W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q < \infty$;
3. se $kp > N$, então $W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-\lceil \frac{N}{p} \rceil - 1, \alpha}(\overline{\Omega})$, onde

$$\alpha = \begin{cases} \lceil \frac{N}{p} \rceil + 1 - \frac{N}{p}, & \text{se } \frac{N}{p} \notin \mathbb{Z}; \\ \text{qualquer número entre } (0, 1), & \text{se } \frac{N}{p} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

e $\lceil \frac{N}{p} \rceil$ denota o maior inteiro menor do que $\frac{N}{p}$.

Teorema A.12 (Imersões compactas de $W_0^{1,p}$) *Seja Ω um domínio limitado em \mathbb{R}^N com o bordo suave, então as seguintes imersões são compactas*

1. se $1 \leq p < N$, então $W_0^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{\text{cpt.}} L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q < \frac{Np}{N-p}$;
2. se $p = N$, então $W_0^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{\text{cpt.}} L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q < \infty$;
3. se $p > N$, então $W_0^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{\text{cpt.}} C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, para todo $0 < \alpha < 1 - \frac{N}{p}$.

Proposição A.13 (Desigualdade de Poincaré) *Suponha que $1 \leq p < \infty$ e Ω um conjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^N . Então existe uma constante C (dependendo de Ω e p) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ é a norma a qual é equivalente a norma $\|u\|_{W^{1,p}}$.

Em $H_0^1(\Omega)$ a expressão $\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$ é um produto escalar que induz a norma $\|\nabla u\|_{L^2}$ a qual é equivalente a norma $\|u\|_{H^1}$.

A desigualdade de Poincaré implica que as normas

$$\|u\|_{H_0^1} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2} \quad e \quad \|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{1/2}$$

são equivalentes em $H_0^1(\Omega)$.

Observação A.14 1. Para funções em $H_0^1(\Omega)$, a desigualdade de Poincaré fornece:

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq c \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \quad (\text{A-6})$$

onde $c = c(\Omega, N)$ é uma constante que depende de Ω e N , mas não de u .

2. A caracterização variacional (1-11) dos autovalores obtida no Capítulo 2, seção 1, aplicada ao problema de autovalor $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, fornece a seguinte desigualdade variacional

$$\lambda_1 \int_{\Omega} |u|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (\text{A-7})$$

A observação A.14, item 2, possui uma generalização importante descrita a seguir.

Proposição A.15 (Desigualdades Variacionais) Seja $H_0^1(\Omega) = H_k \oplus H_k^\perp$, onde H_k é o subespaço de H_0^1 gerado pelas autofunções φ_i , com $i = 1, \dots, k$, associadas aos autovalores do problema $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ e H_k^\perp é o seu complemento ortogonal. Neste caso, valem as seguintes desigualdades

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \lambda_k \int_{\Omega} u^2 dx \quad \forall u \in H_k; \quad (\text{A-8})$$

e

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq \lambda_{k+1} \int_{\Omega} u^2 dx \quad \forall u \in H_k^\perp. \quad (\text{A-9})$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada no livro do Djairo [13], capítulo 1.

A.2 Princípio do Máximo e Regularidade

Considere um operador

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^N (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + a_0(x)u \quad (\text{A-10})$$

que seja uniformemente elíptico, isto é, existe uma constante $c \geq 0$ tal que

$$c|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \quad x \in \Omega \text{ e } \xi \in \mathbb{R}^N,$$

onde assumimos $a_{ij} = a_{ji}$ e $a_0(x) \geq 0$ em Ω . Suponha que $|a_{ij}(x)| \leq M$, para algum $M \geq 0$. Então temos o seguinte resultado:

Teorema A.16 *Seja L o operador (A-10) com as hipóteses acima. Então as soluções não negativas de $Lu = 0$ são positivas ou identicamente nulas.*

Corolário A.17 (Princípio do Máximo Forte) *Seja L o operador (A-10). Então uma solução da equação $Lu = 0$ que atinge o máximo ou o mínimo em um ponto de Ω é constante.*

Estes resultados são encontrados no trabalho de G. Stampacchia [23], Seção 8. Agora, enunciaremos dois resultados que ajudam a mostrar que sob certas hipóteses a solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$ do problema (2-1) é solução clássica e podem ser obtidos em [14].

Teorema A.18 *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{A-11})$$

então

1. (Agmon, Douglis e Nirenberg [1]) se Ω é de classe C^2 e $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, então $u \in W^{2,p}(\Omega)$ e existe uma constante $C = C(\Omega, p) > 0$ tal que

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

2. (Schauder [15]) se Ω é de classe $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, então $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e existe uma constante $C = C(\Omega, p) > 0$ tal que

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Teorema A.19 *Suponha que Ω é um aberto limitado de classe $C^{2,\alpha}$, $f \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$ e, para algum $C > 0$, f satisfaz*

$$|f(x, u(x))| \leq C(1 + |u(x)|), \quad \forall x \in \Omega.$$

Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca de (A-11) então u é solução clássica.

Prova : Utilizaremos um argumento conhecido como “bootstrap” para demonstrar este resultado.

Pelo Teorema (A.11) temos

$$u \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega),$$

então $C(1 + |u(x)|) \in L^{2^*}(\Omega)$, o que implica que $f(x, u(x)) \in L^{2^*}(\Omega)$. Do Teorema (A.18), item 2, obtemos que

$$u \in W^{2,2^*}(\Omega).$$

Mas novamente pelas Imersões de Sobolev, tem-se que

$$u \in W^{2,2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^{**}}(\Omega), \text{ onde } 2^{**} = \frac{2^* N}{N - 2 \cdot 2^*}.$$

Utilizando este argumento recursivamente, obtemos uma sequência de índices β_n , onde

$$\beta_1 = 2^*, \beta_2 = 2^{**}, \beta_3 = 2^{***}, \dots$$

tais que $\beta_n \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$. Assim, para n suficientemente grande temos $\beta_n > p$ de onde obtemos, pelo Teorema (A.11), $u \in W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Por outro lado, $f \in C^1(\Omega)$, então $f(x, u(x)) \in C^1(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Sendo assim,

$$-\Delta u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Pelo Teorema (A.18), item 2, $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

□

Referências Bibliográficas

- [1] AGMON, S; DOUGLIS, A; NIRENBERG, L. **Estimatives near the boundary for solutions of elliptic P.D.E. satisfying a general boundary value condition I.** *Comm. Pure Appl. Math.*, 12:623–727, 1959.
- [2] AMBROSETTI, A; MALCHIODI, A. **Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems.** Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [3] AMBROSETTI, A; PRODI, G. **A Primer of Nonlinear Analysis.** Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [4] AMBROSETTI, A; RABINOWITZ, P. H. **Dual variational methods in critical point theory and applications.** *Journal Functional Analysis*, 14:349–381, 1973.
- [5] BARTOLO, P; BENCI, V; FORTUNATO, D. **Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity.** *Nonlinear Anal.*, 7:981–1012, 1983.
- [6] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.** Springer, 2010.
- [7] BREZIS, H; NIRENBERG, L. **Remarks on finding critical points.** *Comm. Pure Appl. Math.*, 44:939–963, 1991.
- [8] BUSCA, J; SIRAKOV, B. **Harnack type estimates for nonlinear elliptic systems and applications.** *Ann. I. H. Poincaré*, 21:543–590, 2004.
- [9] CASTRO, A; LAZER, A. C. **Critical point theory and the number of solutions of nonlinear dirichlet problem.** *Ann. Math.*, 18:113–137, 1977.
- [10] CASTRO, A. **Reduction methods via minimax.** *Lecture Notes in Mathematics*, 957:1–20, 1982.
- [11] COSTA, D. G; MAGALHÃES, C. A. **Variational elliptic problems which are nonquadratic at infinity.** *Nonlinear Anal. TMA*, 23:1401–1412, 1994.

- [12] COSTA, D. G; MIYAGAKI, O. H. **Nontrivial solutions for perturbations of the p-laplacian on unbounded domains.** *J. Math. Anal. Appl.*, 193:737–755, 1995.
- [13] DE FIGUEIREDO, D. G. **Positive solutions of semilinear elliptic problems.** *Lecture Notes in Mathematics*, 1982.
- [14] FURTADO, M. F. **Notas de Aula de EDP 2.** Universidade de Brasília, Brasília.
- [15] GILBARG, D; TRUDINGER, N. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.** Springer, Berlin-New York, 1998.
- [16] HIRANO, N; NISHIMURA, T. **Multiplicity results for semilinear elliptic problems at resonance and with jumping nonlinearities.** *JMAA*, 180:566–586, 1993.
- [17] ISNARD, C. **Introdução à Medida e Integração.** IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [18] KREYSIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications.** Wiley Classics Library, Canadá, 1978.
- [19] LI, S; WILLEM, M. **Applications of local linking to critical points theory.** *JMAA*, 189:6–32, 1995.
- [20] LIU, S; TANG, C.-L; WU, X.-P. **Multiplicity of nontrivial solutions of semilinear elliptic equations.** *JMAA*, 249:369–376, 2002.
- [21] SCHECHTER, M. **Superlinear elliptic boundary value problems.** *Manuscripta Math.*, 86:253–265, 1995.
- [22] SMOLLER, J. **Shock waves and reaction-diffusion equations.** Springer-Verlag, New York, 1994.
- [23] STAMPACCHIA, G. **Le problème de dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus.** *Annales de L'Institut Fourier*, 15:189–258, 1965.
- [24] STUART, C. A. **Self-trapping of an electromagnetic field and bifurcation from the essential spectrum.** *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 113:65–96, 1991.
- [25] STUART, C. A. **Magnetic Field Wave Equations for TM-Modes in Nonlinear Optical Waveguides, in: Caristi, Mitidieri (Eds.), Reaction Diffusion Systems, Marcel Dekker.** New York, 1997.
- [26] VOLPERT, A; VOLPERT, V; VOLPERT, V. **Traveling wave solutions of parabolic systems.** AMS, Providence, Rhode Island, 1994.

-
- [27] WILLEM, M. **Minimax Theorems**. Birkhauser Boston, Inc., Boston, 1996.
- [28] WU, X.-P; TANG, C.-L. **Remarks on existence and multiplicity of solutions for a class of semilinear elliptic equations**. *JMAA*, 319:369–376, 2006.
- [29] ZHANG, Z; LI, S; LIU, S; FENG, W. **On an asymptotically linear elliptic dirichlet problem**. *Abstract Applied Math*, 7:509–516, 2002.
- [30] ZHOU, H.-S. **Existence of asymptotically linear dirichlet problem**. *Nonlinear Analysis*, 44:909–918, 2001.